Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 04, No. 3 (2015), hal 313 – 322.

ALGORITMA ELIMINASI GAUSS INTERVAL DALAM MENDAPATKAN NILAI DETERMINAN MATRIKS INTERVAL DAN MENCARI SOLUSI SISTEM PERSAMAAN INTERVAL LINEAR

Egi Zulkarnain, Bayu Prihandono, Ilhamsyah

INTISARI

Sistem Persamaan Interval Linear (SPIL) merupakan perluasan dari Sistem Persamaan Linear (SPL) dengan koefisien-koefisiennya berupa interval. Bentuk umum dari SPIL dapat ditulis sebagai $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$. Untuk memperoleh solusi dari SPIL dapat digunakan matriks sebagaimana pada SPL. Dalam hal ini, matriks yang digunakan adalah matriks interval dengan entri-entri berupa interval. Selain untuk menyelesaikan SPIL, teori-teori tentang matriks interval juga sangat diperlukan yang salah satunya adalah untuk mendapatkan nilai determinan matriks interval. Salah satu metode yang digunakan adalah dengan menggunakan Algoritma Eliminasi Gauss Interval. Algoritma ini dimulai dengan mereduksi matriks interval dan matriks interval augmanted dari SPIL dengan menerapkan aritmatika interval yang dimodifikasi untuk mendapatkan matriks interval segitiga atas dan matriks interval augmanted yang lebih sederhana. Selanjutnya, dengan metode substitusi balik pada sistem yang bersesuaian dari matriks interval augmanted yang lebih sederhana sehingga diperoleh solusi dari SPIL dan mengalikan entri-entri diagonal utama dari matriks interval segitiga atas untuk mendapatkan nilai determinan matriks interval segitiga atas. Solusi yang diperoleh adalah solusi $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ yang memenuhi sistem $\tilde{A}\tilde{x} \approx \tilde{b}$ dan vektor interval $\tilde{b}$ yang diperoleh dari sistem $\tilde{A}\tilde{x} \approx \tilde{b}$ ekuivalen dengan vektor interval $\tilde{b}$ dari sistem $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ yang dapat dilihat dari masing-masing midpoint pada vektor interval $\tilde{b}$. Nilai determinan matriks interval segitiga atas ekuivalen dengan nilai determinan matriks interval.

Kata kunci : *Aritmatika Interval, Algoritma Eliminasi Gauss Interval*

PENDAHULUAN

Ilmu aljabar merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang diantaranya mempelajari tentang Sistem Persamaan Linear (SPL) dan Matriks. Suatu persamaan linear dalam n variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah suatu persamaan dalam bentuk $a_1x_1 + a_2x_2 + \ \dots + a_nx_n = b$, dengan a dan b merupakan konstanta real. Sejumlah persamaan linear yang banyaknya berhingga dalam variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ disebut SPL [1]. Untuk mendapatkan solusi dari suatu SPL yang memuat persamaan dan variabel dapat digunakan matriks. Umumnya, entri-entri pada suatu matriks berupa bilangan real ataupun bilangan kompleks. Matriks dengan entri-entri berupa bilangan real disebut dengan matriks real. Akan tetapi, pada perkembangannya entri-entri pada suatu matriks dapat berupa interval yang disebut dengan matriks interval [2].

Sistem Persamaan Interval Linear (SPIL) merupakan perluasan dari SPL yang koefisien-koefisiennya berupa bilangan interval [3]. Bentuk umum dari SPIL dapat ditulis sebagai $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$. Untuk mendapatkan solusi dari SPIL juga dapat digunakan matriks sebagaimana mestinya pada SPL. Selain untuk menyelesaikan SPIL, teori-teori tentang matriks interval juga sangat diperlukan yang salah satunya adalah untuk mendapatkan nilai determinan dari matriks interval dengan menerapkan aritmatika interval yang dimodifikasi. Determinan dari matriks interval persegi $\tilde{A}$ dengan metode ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i adalah $\det(\tilde{A}) = |\tilde{A}| = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}\tilde{A}_{ij}$, dimana $\tilde{A}_{ij}$ adalah kofaktor dari $\tilde{a}_{ij}$ [4]. Solusi dari suatu SPIL dengan metode aturan Cramer adalah himpunan penyelesaian $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ yang memenuhi sistem $\tilde{A}\tilde{x} \approx \tilde{b}$. Dalam artikel ini akan dibahas cara yang berbeda yaitu dengan menggunakan algoritma eliminasi Gauss interval untuk mendapatkan nilai determinan matriks interval dan memperoleh solusi dari SPIL, dengan menerapkan aritmatika interval yang dimodifikasi dan menggunakan operator *dual* pada operasi pembagian dan pengurangan dalam aritmatika interval yang dimodifikasi untuk dua interval yang bernilai sama $\left(\tilde{a}=\tilde{b}\right)$ dengan tujuan untuk mendapatkan entri-entri dibawah diagonal utama dari matriks interval $=\tilde{0}$. Digunakan aritmatika interval yang dimodifikasi, karena dengan aritmatika interval biasa tidak bisa mereduksi entri-entri dibawah diagonal utama dari matriks interval menjadi interval $\tilde{0}$.

Adapun tujuan penelitian ini adalah mengkaji algoritma eliminasi Gauss interval dalam mendapatkan nilai determinan dari matriks interval dan memperoleh solusi dari sistem persamaan interval linear.

Pada penelitian ini, entri-entri pada matriks interval dan matriks interval *augmanted* adalah berupa interval tertutup. Dalam proses perhitungan pada algoritma eliminasi Gauss interval digunakan aritmatika interval yang dimodifikasi.

Pada penelitian ini dapat dimulai dengan mereduksi matriks interval menjadi matriks interval segitiga atas menggunakan algortima eliminasi Gauss interval. Dari matriks interval segitiga atas yang diperoleh, kemudian langkah terakhir adalah mengalikan entri-entri diagonal utama pada matriks interval segitiga atas untuk mendapatkan nilai determinan dari matriks interval segitiga atas yang ekuivalen nilai determinannya. Untuk memperoleh solusi dari sistem persamaan interval linear adalah dengan mereduksi matriks interval *augmanted* dari SPIL menjadi matriks interval *augmanted* yang lebih sederhana menggunakan algoritma eliminasi Gauss interval dan kemudian, substitusi balik sistem yang bersesuaian pada matriks interval *augmanted* yang lebih sederhana.

MODIFIKASI ARITMATIKA INTERVAL

Aritmatika interval biasa pada algoritma eliminasi Gauss interval umumnya tidak dapat digunakan, karena tidak dapat mereduksi entri-entri dibawah diagonal utama dari matriks interval menjadi interval $\tilde{0}$. Oleh sebab itu, diperlukan modifikasi pada aritmatika interval yang disebut sebagai modifikasi aritmatika interval. Pada modifikasi aritmatika interval, dikenal istilah *dual* yang berperan penting dalam algoritma eliminasi Gauss interval. *Dual* merupakan operator penting dalam menukar *upper endpoint* dengan *lower endpoint* dari sebuah interval. Operator *dual* pada modifikasi aritmatika interval hanya digunakan pada operasi pengurangan dan pembagian untuk dua interval yang bernilai sama. Misalkan diberikan $\tilde{a}=[a_1,a_2]$, maka *dual* dari $\tilde{a}$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$dual(\tilde{a})=dual[a_1,a_2]=[a_2,a_1].$$

Pada suatu interval $\tilde{a}=\left[\underline{a},\overline{a}\right]$, dalam modifikasi aritmatika interval juga dikenal istilah *midpoint* dan *half-width* seperti halnya pada aritmatika interval. Berikut ini diberikan bentuk umum *midpoint* dan *half-width* pada modifikasi aritmatika interval. Misalkan diberikan $\tilde{a}=\left[\underline{a},\overline{a}\right]$; $\tilde{a}\in\mathbf{IR}$, maka

1. Titik tengah dari interval $\tilde{a}$ yang disebut *midpoint* $\tilde{a}$, dapat dituliskan sebagai berikut:
$$m(\tilde{a})=\left(\frac{\underline{a}+\overline{a}}{2}\right)$$
2. Setengah dari lebar interval $\tilde{a}$ yang disebut *half-width* $\tilde{a}$, dapat dituliskan sebagai berikut:
$$w(\tilde{a})=\left(\frac{\overline{a}-\underline{a}}{2}\right)$$

Diberikan dua interval $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$; $\tilde{a},\tilde{b}\in\mathbf{IR}$ dan $*\in\{+,-,\cdot,\div\}$, sehingga dapat dinyatakan bahwa $\tilde{a}*\tilde{b}=\left[m(\tilde{a})*m(\tilde{b})-k,m(\tilde{a})*m(\tilde{b})+k\right]$, dengan $k=min\left\{\left(m(\tilde{a})*m(\tilde{b})-\alpha,\beta-m(\tilde{a})*m(\tilde{b})\right)\right\}$, α dan β adalah *endpoints* dari interval $\tilde{a}*\tilde{b}$ pada aritmatika interval [2]. Berikut ini diberikan bentuk umum dari aritmatika interval yang dimodifikasi

1. Penjumlahan:
$$\begin{aligned}\tilde{a}+\tilde{b}&=\left[\underline{a},\overline{a}\right]+\left[\underline{b},\overline{b}\right]\\&=\left[\left(m(\tilde{a})+m(\tilde{b})-k\right),\left(m(\tilde{a})+m(\tilde{b})+k\right)\right]\text{, dengan } k=\left(\frac{(\overline{b}+\overline{a})-(\underline{b}+\underline{a})}{2}\right).\end{aligned}$$

2. Pengurangan:

$$\tilde{a} - \tilde{b} = [\underline{a}, \overline{a}] - [\underline{b}, \overline{b}]$$
$$= \left[\left(m(\tilde{a}) - m(\tilde{b}) - k\right), \left(m(\tilde{a}) - m(\tilde{b}) + k\right)\right], \text{ dengan } k = \left(\frac{(\overline{b}+\overline{a})-(\underline{b}+\underline{a})}{2}\right);$$

dan jika $\tilde{a} = \tilde{b}$, maka

$$\tilde{a} - \tilde{b} = \tilde{a} - dual(\tilde{a}) = [\underline{a}, \overline{a}] - [\overline{a}, \underline{a}]$$
$$= [\underline{a} - \underline{a},\ \overline{a} - \overline{a}]$$
$$= [0,0].$$

3. Perkalian:

$$\tilde{a} \cdot \tilde{b} = [\underline{a}, \overline{a}][\underline{b}, \overline{b}]$$
$$= \left[\left(m(\tilde{a})m(\tilde{b}) - k\right), \left(m(\tilde{a})m(\tilde{b}) + k\right)\right], \quad \text{dengan} \quad k = \min\left\{\left(m(\tilde{a})m(\tilde{b}) - \alpha\right), \left(\beta - m(\tilde{a})m(\tilde{b})\right)\right\},$$

$\alpha = \min(\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\,\overline{b})$ dan $\beta = \max(\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\,\overline{b})$

dan jika diketahui sebarang skalar c, maka

$$c\tilde{a} = [c\underline{a}, c\overline{a}], \text{ untuk setiap } c \in \mathbb{R}.$$

4. Pembagian:

$$1 \div \tilde{a} = \frac{1}{\tilde{a}}$$
$$= \left[\frac{1}{m(\tilde{a})} - k, \frac{1}{m(\tilde{a})} + k\right], \text{ dengan } k = \min\left\{\frac{1}{\overline{a}}\left(\frac{\overline{a}-\underline{a}}{\underline{a}+\overline{a}}\right), \frac{1}{\underline{a}}\left(\frac{\overline{a}-\underline{a}}{\underline{a}+\overline{a}}\right)\right\} \text{ dan } 0 \notin \tilde{a};$$

dan jika $\tilde{a} = \tilde{b}$, maka

$$\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \frac{\tilde{a}}{\tilde{a}} = \frac{\tilde{a}}{dual(\tilde{a})}$$
$$= [\underline{a}, \overline{a}]\frac{1}{[\overline{a}, \underline{a}]} = [\underline{a}, \overline{a}]\left[\frac{1}{\underline{a}}, \frac{1}{\overline{a}}\right]$$
$$= \left[\frac{\underline{a}}{\underline{a}}, \frac{\overline{a}}{\overline{a}}\right]$$
$$= [1,1].$$

MATRIKS INTERVAL DAN SISTEM PERSAMAAN INTERVAL LINEAR (SPIL)

Diberikan matriks $\underline{A}, \overline{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dengan $m, n \in \mathbb{N}$. Didefinisikan bahwa matriks interval $\tilde{A}$ merupakan himpunan matriks dari $A = \{\mathrm{M} \in \mathbb{R}^{m\times n} : \underline{A} \leq \mathrm{M} \leq \overline{A}\}$. Himpunan matriks-matriks $\mathbb{R}^{\mathrm{m\times n}}$ pada matriks interval dinotasikan dengan $\mathbb{IR}^{\mathrm{m\times n}}$ [5]. Berikut ini adalah bentuk umum dari matriks interval

$$\tilde{A}_{m\times n} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \cdots & \tilde{a}_{mn} \end{bmatrix} = (\tilde{a}_{ij})_{m\times n}$$

dengan $\tilde{a}_{ij} = [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$, untuk sebarang $\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}$ yang memenuhi $\underline{a}_{ij} \leq \overline{a}_{ij}$.

Pada matriks interval juga dikenal istilah *midpoint* dan *width* seperti halnya pada suatu interval.

1. *Midpoint* dari entri-entri matriks interval $\tilde{A}$ disebut sebagai matriks *midpoint* dari $\tilde{A}$ dengan matriks dan entri-entrinya yang dituliskan sebagai berikut:

$$m(\tilde{A}) = \begin{bmatrix} m(\tilde{a}_{11}) & \cdots & m(\tilde{a}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m(\tilde{a}_{m1}) & \cdots & m(\tilde{a}_{mn}) \end{bmatrix}$$

2. *Width (or half-width)* dari entri-entri matriks interval $\tilde{A}$ disebut sebagai matriks *width (or half-width)* dari $\tilde{A}$ dengan matriks dan entri-entrinya yang dituliskan sebagai berikut

$$w(\tilde{A}) = \begin{bmatrix} w(\tilde{a}_{11}) & \cdots & w(\tilde{a}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w(\tilde{a}_{m1}) & \cdots & w(\tilde{a}_{mn}) \end{bmatrix}$$

Aritmatika matriks interval merupakan generalisasi dari aritmatika matriks real, dimana operasi-operasi pada aritmatika matriks interval menggunakan aturan-aturan yang berlaku pada operasi aritmatika interval. Pada operasi aritmatika matriks interval digunakan aritmatika interval yang dimodifikasi. Berikut ini diberikan bentuk umum operasi-operasi pada aritmatika matriks interval.

Jika $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbf{M}(\mathbf{IR})^{m\times n}, \tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{M}(\mathbf{IR})^{n}$ dan $\tilde{\alpha} \in \mathbf{IR}$, maka

1. $\tilde{\alpha}\tilde{A} = (\tilde{\alpha}\tilde{a}_{ij})_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}$
2. $\tilde{A} + \tilde{B} = (\tilde{a}_{ij} + \tilde{b}_{ij})_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}$
3. $\tilde{A} - \tilde{B} = (\tilde{a}_{ij} - \tilde{b}_{ij})_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}$
4. $\tilde{A}\tilde{B} = \left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{ik}\tilde{b}_{kj}\right)_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}$
5. $\tilde{A}\tilde{\boldsymbol{x}} = \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}\, \tilde{\boldsymbol{x}}\right)_{1\le i\le m}$

Definisi 1 [2] Jika $m(\tilde{A}) = m(\tilde{B})$, maka matriks interval $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dikatakan ekuivalen. Jika $m(\tilde{A}) = m(\tilde{B})$ dan $w(\tilde{A}) = w(\tilde{B})$, maka matriks interval $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dikatakan sama.

Suatu sistem sebarang dari m persamaan interval linear dengan n faktor yang tidak diketahui dapat ditulis sebagai:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{a}_{11}\tilde{x}_1 & +\tilde{a}_{12}\tilde{x}_2 & +\cdots & +\tilde{a}_{1n}\tilde{x}_n & = \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_{21}\tilde{x}_1 & +\tilde{a}_{22}\tilde{x}_2 & +\cdots & +\tilde{a}_{2n}\tilde{x}_n & = \tilde{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1}\tilde{x}_1 & +\tilde{a}_{m2}\tilde{x}_2 & +\cdots & +\tilde{a}_{mn}\tilde{x}_n & = \tilde{b}_m \end{array}$$

Solusi dari SPIL dapat dicari sebagaimana mestinya pada SPL dengan menggunakan eliminasi Gauss dan substitusi balik, dimana pada SPIL menggunakan algoritma eliminasi Gauss interval dengan nilai $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ yang memenuhi suatu sistem $\tilde{A}\tilde{x} \approx \tilde{b}$.

DETERMINAN MATRIKS INTERVAL

Determinan matriks interval berukuran $n \times n$ sama halnya juga dengan definisi dari determinan matriks real berukuran $n \times n$, yaitu suatu hasilkali elementer dari suatu matriks interval $\tilde{A}$ berukuran $n \times n$ adalah hasilkali dari n entri data dari matriks interval $\tilde{A}$ yang tidak satupun berasal dari baris atau kolom yang sama dan dapat ditulis sebagai:

$$\det(\tilde{A}) = \sum \pm\, \tilde{a}_{1j_1} \cdot \tilde{a}_{2j_2} \cdot \dots \cdot \tilde{a}_{nj_n}$$

dimana Σ menunjukkan bahwa suku-suku harus dijumlahkan untuk semua permutasi $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ dan tanda $+$ atau $-$ dipilih untuk setiap suku tergantung pada apakah permutasinya genap atau ganjil.

Sifat 2 [4] Misalkan diberikan sebuah matriks interval $\tilde{A}$ berukuran $n \times n$, sifat-sifat yang berlaku pada determinan matriks interval $\tilde{A}$ adalah sebagai berikut:

1) $det(\tilde{A}) \approx det(\tilde{A}^T)$, untuk semua matriks interval $\tilde{A}$ berukuran $n \times n$.
2) Jika satu baris dari $\tilde{A}$ seluruhnya bernilai nol, maka $det(\tilde{A}) \approx \tilde{0}$.

3) Jika $\tilde{B}$ adalah matriks interval yang diperoleh dari $\tilde{A}$ dengan mengalikan satu baris dari $\tilde{A}$ dengan skalar k maka $det(\tilde{B}) \approx k\ det(\tilde{A})$.
4) Jika $\tilde{B}$ adalah matriks interval yang diperoleh dari $\tilde{A}$ dengan menukar dua baris dari $\tilde{A}$ maka $det(\tilde{B}) \approx -\ det(\tilde{A})$.
5) Jika dua baris dari $\tilde{A}$ bernilai sama, maka $det(\tilde{A}) \approx \tilde{0}$.

Teorema 3 [4] *Jika $\tilde{A}$ adalah matriks interval segitiga atas atau segitiga bawah berukuran $n \times n$, maka $|\tilde{A}|$ ekuivalen dengan hasil kali dari diagonal utamanya.*

Bukti.

Diberikan $\tilde{A}$ adalah matriks interval segitiga atas berukuran $n \times n$. Akan dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika:

Langkah 1: akan dibuktikan untuk $n = 2$ bahwa determinan dari matriks interval segitiga atas $\tilde{A}$ berukuran 2×2 adalah hasil kali dari entri-entri diagonal utamanya adalah benar,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{0} & \tilde{a}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}] & [\underline{a}_{12}, \overline{a}_{12}] \\ [0,0] & [\underline{a}_{22}, \overline{a}_{22}] \end{bmatrix}, \text{ maka} |\tilde{A}| \approx \tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22} \approx [\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}][\underline{a}_{22}, \overline{a}_{22}]$$

karena nilai determinan dari matriks interval segitiga atas $\tilde{A}$ berukuran 2×2 adalah hasil kali dari entri diagonal utamanya, maka hasilnya berlaku untuk induksi atas $n = 2$.

Langkah 2: diasumsikan bahwa hasilnya juga benar dan berlaku untuk $n = k$, maka determinan dari matriks interval $\tilde{A}$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$|\tilde{A}| = \begin{vmatrix} [\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}] & [\underline{a}_{12}, \overline{a}_{12}] & \cdots & [\underline{a}_{1k}, \overline{a}_{1k}] \\ [0,0] & [\underline{a}_{22}, \overline{a}_{22}] & \cdots & [\underline{a}_{2k}, \overline{a}_{2k}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [0,0] & [0,0] & \cdots & [\underline{a}_{kk}, \overline{a}_{kk}] \end{vmatrix}$$

Langkah 3: selanjutnya, untuk $n = k + 1$, determinan dari matriks interval segitiga atas $\tilde{A}$ berukuran $n = k + 1$ dengan memperluas sepanjang entri pada baris dibawah entri diagonal utama dari matriks interval segitiga atas $\tilde{A}$ (karena semua entri pada baris dibawah entri diagonal utama adalah nol kecuali $[\underline{a}_{k+1}, \overline{a}_{k+1}]$), maka

$$|\tilde{A}| = \begin{vmatrix} [\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}] & [\underline{a}_{12}, \overline{a}_{12}] & \cdots & [\underline{a}_{k+1}, \overline{a}_{k+1}] \\ [0,0] & [\underline{a}_{22}, \overline{a}_{22}] & \cdots & [\underline{a}_{k+1}, \overline{a}_{k+1}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [0,0] & [0,0] & \cdots & [\underline{a}_{k+1}, \overline{a}_{k+1}] \end{vmatrix}$$

$$\approx (-1)^{(k+1)+(k+1)}[\underline{a}_{k+1}, \overline{a}_{k+1}] \begin{vmatrix} [\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}] & [\underline{a}_{12}, \overline{a}_{12}] & \cdots & [\underline{a}_{1k}, \overline{a}_{1k}] \\ [0,0] & [\underline{a}_{22}, \overline{a}_{22}] & \cdots & [\underline{a}_{2k}, \overline{a}_{2k}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [0,0] & [0,0] & \cdots & [\underline{a}_{kk}, \overline{a}_{kk}] \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\tilde{A}| &\approx (-1)^{(2k+2)}[\underline{a}_{k+1}, \overline{a}_{k+1}][\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}][\underline{a}_{22}, \overline{a}_{22}] \cdots [\underline{a}_{kk}, \overline{a}_{kk}], \\ &\approx (-1)^{2(k+1)}[\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}][\underline{a}_{22}, \overline{a}_{22}] \cdots [\underline{a}_{kk}, \overline{a}_{kk}][\underline{a}_{k+1}, \overline{a}_{k+1}] \\ &\approx [\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}][\underline{a}_{22}, \overline{a}_{22}] \cdots [\underline{a}_{kk}, \overline{a}_{kk}][\underline{a}_{k+1}, \overline{a}_{k+1}], \text{ karena } (-1)^{2(k+1)} = 1. \\ &\approx \text{hasil kali diagonal utama dari } \tilde{A}, \text{ sehingga} \end{aligned}$$

Diperoleh hasilnya juga berlaku untuk $n = k + 1$ ∎

Teorema 4 [4] *Jika $\tilde{B}$ adalah matriks interval yang diperoleh dari matriks interval $\tilde{A}$ dengan menjumlahkan kelipatan satu baris $\tilde{A}$ ke baris lain dari $\tilde{A}$, maka $det(\tilde{A}) \approx det(\tilde{B})$.*

Bukti.

Diberikan $\tilde{B}$ adalah matriks interval berukuran $n \times n$ yang diperoleh dari matriks interval $\tilde{A}$ berukuran $n \times n$ dengan menjumlahkan k kali baris ke-j dari $\tilde{A}$ dengan baris ke-i dari $\tilde{A}$, dengan $i, j = 1,2,3, \ldots, n$. Maka matriks interval $\tilde{B}$ adalah sebagai berikut:

$$\tilde{B}=\begin{bmatrix}\tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \cdots & \tilde{a}_{1n}\\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \cdots & \tilde{a}_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \tilde{a}_{j1} & \tilde{a}_{j2} & \tilde{a}_{j3} & \cdots & \tilde{a}_{jn}\\ \tilde{a}_{i1}+k\tilde{a}_{j1} & \tilde{a}_{i2}+k\tilde{a}_{j2} & \tilde{a}_{i3}+k\tilde{a}_{j3} & \cdots & \tilde{a}_{in}+k\tilde{a}_{jn}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \tilde{a}_{n3} & \cdots & \tilde{a}_{nn}\end{bmatrix}$$

$$\det\left(\tilde{B}\right)=\begin{vmatrix}\tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \cdots & \tilde{a}_{1n}\\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \cdots & \tilde{a}_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \tilde{a}_{j1} & \tilde{a}_{j2} & \tilde{a}_{j3} & \cdots & \tilde{a}_{jn}\\ \tilde{a}_{i1}+k\tilde{a}_{j1} & \tilde{a}_{i2}+k\tilde{a}_{j2} & \tilde{a}_{i3}+k\tilde{a}_{j3} & \cdots & \tilde{a}_{in}+k\tilde{a}_{jn}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \tilde{a}_{n3} & \cdots & \tilde{a}_{nn}\end{vmatrix}$$

$$\approx\begin{vmatrix}\tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \cdots & \tilde{a}_{1n}\\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \cdots & \tilde{a}_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \tilde{a}_{j1} & \tilde{a}_{j2} & \tilde{a}_{j3} & \cdots & \tilde{a}_{jn}\\ \tilde{a}_{i1} & \tilde{a}_{i2} & \tilde{a}_{i3} & \cdots & \tilde{a}_{in}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \tilde{a}_{n3} & \cdots & \tilde{a}_{nn}\end{vmatrix}+k\begin{vmatrix}\tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \cdots & \tilde{a}_{1n}\\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \cdots & \tilde{a}_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \tilde{a}_{j1} & \tilde{a}_{j2} & \tilde{a}_{j3} & \cdots & \tilde{a}_{jn}\\ \tilde{a}_{j1} & \tilde{a}_{j2} & \tilde{a}_{j3} & \cdots & \tilde{a}_{jn}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \tilde{a}_{n3} & \cdots & \tilde{a}_{nn}\end{vmatrix}$$

$\approx det\left(\tilde{A}\right)+k\cdot\tilde{0}=det\left(\tilde{A}\right)$. Dari Sifat 2 (3) dan (5), dapat disimpulkan $det\left(\tilde{B}\right)\approx det\left(\tilde{A}\right)$ ∎

ALGORITMA ELIMINASI GAUSS INTERVAL

Pada umumnya eliminasi Gauss (*Gaussian elimination*) sudah dikenal pada matriks real dan digunakan sebagai prosedur eliminasi untuk mendapatkan bentuk matriks interval *augmanted* yang lebih sederhana dari SPL. Pada subbab ini akan dibahas mengenai algoritma eliminasi Gauss interval yang digunakan sebagai prosedur eliminasi dengan cara mereduksi matriks interval untuk mendapatkan matriks interval segitiga atas dari matriks interval dan mendapatkan bentuk matriks interval *augmanted* yang lebih sederhana dari SPIL. Algoritma eliminasi Gauss interval dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\tilde{a}_{ij}{}^{(k)}=\tilde{a}_{ij}{}^{(k-1)}+\tilde{m}_{ik}\,\tilde{a}_{kj}{}^{(k-1)}$$

dengan $i,j=k+1,\dots,n\,;k=1,2,\dots,n$[6].

Contoh 5 Diberikan matriks interval persegi $\tilde{A}$ berukuran $n\times n$ dengan iterasi ke-$k^{(n-1)}$:

$$\tilde{A}^{(k-1)}=\begin{bmatrix}\tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \cdots & \tilde{a}_{1n}\\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \cdots & \tilde{a}_{2n}\\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \cdots & \tilde{a}_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \tilde{a}_{n(n-1)} & \cdots & \tilde{a}_{nn}\end{bmatrix}$$

Berikut adalah langkah-langkah mereduksi matriks interval persegi $\tilde{A}$ menjadi matriks interval persegi segitiga atas $\tilde{A}$ menggunakan algoritma eliminasi Gauss interval dengan menggunakan pembagian *dual* dan pengurangan *dual* pada aritmatika interval yang dimodifikasi.

1. Pivot $\tilde{a}_{11}$

   Untuk mendapatkan nilai $\tilde{a}_{21}{}^{(1)}=\tilde{0}$ dan nilai $\tilde{a}_{22}{}^{(1)},\tilde{a}_{23}{}^{(1)},\dots,\tilde{a}_{2n}{}^{(1)}$ dari matriks interval $\tilde{A}$, dapat dilakukan langkah-langkah berikut: $\tilde{a}_{21}{}^{(1)}=\tilde{a}_{21}{}^{(0)}+\tilde{m}_{21}*\tilde{a}_{11}{}^{(0)}=\tilde{0}$; $\tilde{a}_{22}{}^{(1)}=\tilde{a}_{22}{}^{(0)}+\tilde{m}_{21}*\tilde{a}_{12}{}^{(0)}$; $\tilde{a}_{23}{}^{(1)}=\tilde{a}_{23}{}^{(0)}+\tilde{m}_{21}*\tilde{a}_{13}{}^{(0)}$; $\tilde{a}_{2n}{}^{(1)}=\tilde{a}_{2n}{}^{(0)}+\tilde{m}_{21}*\tilde{a}_{1n}{}^{(0)}$.

   Untuk mendapatkan nilai $\tilde{a}_{31}{}^{(1)}=\tilde{0}$ dan nilai $\tilde{a}_{32}{}^{(1)},\tilde{a}_{33}{}^{(1)},\dots,\tilde{a}_{3n}{}^{(1)}$ dari matriks interval $\tilde{A}$, dapat dilakukan langkah-langkah berikut: $\tilde{a}_{31}{}^{(1)}=\tilde{a}_{31}{}^{(0)}+\tilde{m}_{31}*\tilde{a}_{11}{}^{(0)}=\tilde{0}$; $\tilde{a}_{32}{}^{(1)}=\tilde{a}_{32}{}^{(0)}+\tilde{m}_{31}*\tilde{a}_{12}{}^{(0)}$; $\tilde{a}_{33}{}^{(1)}=\tilde{a}_{33}{}^{(0)}+\tilde{m}_{31}*\tilde{a}_{13}{}^{(0)}$; $\tilde{a}_{3n}{}^{(1)}=\tilde{a}_{3n}{}^{(0)}+\tilde{m}_{31}*\tilde{a}_{1n}{}^{(0)}$.

Dan sampai seterusnya untuk mendapatkan nilai $\tilde{a}_{n1}{}^{(1)} = \tilde{0}$ dan nilai entri $\tilde{a}_{n2}{}^{(1)}, \tilde{a}_{n(n-1)}{}^{(1)}, \dots, \tilde{a}_{nn}{}^{(1)}$ dari matriks interval $\tilde{A}$, dapat dilakukan langkah-langkah berikut: $\tilde{a}_{n1}{}^{(1)} = \tilde{a}_{n1}{}^{(0)} + \tilde{m}_{n1} * \tilde{a}_{11}{}^{(0)} = \tilde{0}$; $\tilde{a}_{n2}{}^{(1)} = \tilde{a}_{n2}{}^{(0)} + \tilde{m}_{n1} * \tilde{a}_{12}{}^{(0)}$; $\dots, \tilde{a}_{n(n-1)}{}^{(1)} = \tilde{a}_{n(n-1)}{}^{(0)} + \tilde{m}_{n1} * \tilde{a}_{1(n-1)}{}^{(0)}$; $\dots, \tilde{a}_{nn}{}^{(1)} = \tilde{a}_{nn}{}^{(0)} + \tilde{m}_{n1} * \tilde{a}_{1n}{}^{(0)}$.

Diperoleh matriks interval:

$$\tilde{A}1 = \begin{bmatrix} [\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}]^{(0)} & [\underline{a}_{12}, \overline{a}_{12}]^{(0)} & [\underline{a}_{13}, \overline{a}_{13}]^{(0)} & \cdots & [\underline{a}_{1n}, \overline{a}_{1n}]^{(0)} \\ [0,0] & [\underline{a}_{22}, \overline{a}_{22}]^{(1)} & [\underline{a}_{23}, \overline{a}_{23}]^{(1)} & \cdots & [\underline{a}_{2n}, \overline{a}_{2n}]^{(1)} \\ [0,0] & [\underline{a}_{32}, \overline{a}_{32}]^{(1)} & [\underline{a}_{33}, \overline{a}_{33}]^{(1)} & \cdots & [\underline{a}_{3n}, \overline{a}_{3n}]^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0,0] & [\underline{a}_{n2}, \overline{a}_{n2}]^{(1)} & \cdots [\underline{a}_{n(n-1)}, \overline{a}_{n(n-1)}]^{(1)} & \cdots & [\underline{a}_{nn}, \overline{a}_{nn}]^{(1)} \end{bmatrix}$$

2. Pivot $\tilde{a}_{22}$

   Untuk mendapatkan nilai $\tilde{a}_{32}{}^{(2)} = \tilde{0}$ dan nilai $\tilde{a}_{33}{}^{(2)}, \dots, \tilde{a}_{3n}{}^{(2)}$ dari matriks interval $\tilde{A}1$, dapat dilakukan langkah-langkah berikut: $\tilde{a}_{32}{}^{(2)} = \tilde{a}_{32}{}^{(1)} + \tilde{m}_{32} * \tilde{a}_{22}{}^{(1)} = \tilde{0}$; $\tilde{a}_{33}{}^{(2)} = \tilde{a}_{33}{}^{(1)} + \tilde{m}_{32} * \tilde{a}_{23}{}^{(1)}$; $\tilde{a}_{3n}{}^{(2)} = \tilde{a}_{3n}{}^{(1)} + \tilde{m}_{32} * \tilde{a}_{2n}{}^{(1)}$.

   Dan sampai seterusnya untuk mendapatkan nilai $\tilde{a}_{n2}{}^{(2)} = \tilde{0}$ dan nilai $\tilde{a}_{n(n-1)}{}^{(2)}, \dots, \tilde{a}_{nn}{}^{(2)}$ dari matriks interval $\tilde{A}1$, dapat dilakukan langkah-langkah berikut: $\tilde{a}_{n2}{}^{(2)} = \tilde{a}_{n2}{}^{(1)} + \tilde{m}_{n2} * \tilde{a}_{22}{}^{(1)}$; $\dots, \tilde{a}_{n(n-1)}{}^{(2)} = \tilde{a}_{n(n-1)}{}^{(1)} + \tilde{m}_{n2} * \tilde{a}_{2(n-1)}{}^{(1)}$; $\dots, \tilde{a}_{nn}{}^{(2)} = \tilde{a}_{nn}{}^{(1)} + \tilde{m}_{n2} * \tilde{a}_{2n}{}^{(1)}$.

   Diperoleh matriks interval:

$$\tilde{A}2 = \begin{bmatrix} [\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}]^{(0)} & [\underline{a}_{12}, \overline{a}_{12}]^{(0)} & [\underline{a}_{13}, \overline{a}_{13}]^{(0)} & \cdots & [\underline{a}_{1n}, \overline{a}_{1n}]^{(0)} \\ [0,0] & [\underline{a}_{22}, \overline{a}_{22}]^{(1)} & [\underline{a}_{23}, \overline{a}_{23}]^{(1)} & \cdots & [\underline{a}_{2n}, \overline{a}_{2n}]^{(1)} \\ [0,0] & [0,0] & [\underline{a}_{33}, \overline{a}_{33}]^{(2)} & \cdots & [\underline{a}_{3n}, \overline{a}_{3n}]^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0,0] & [0,0] & \cdots [\underline{a}_{n(n-1)}, \overline{a}_{n(n-1)}]^{(2)} & \cdots & [\underline{a}_{nn}, \overline{a}_{nn}]^{(2)} \end{bmatrix}$$

3. Dan seterusnya untuk pivot $\tilde{a}_{33}, \dots, \tilde{a}_{(n-1)(n-1)}$

   Untuk mendapatkan nilai $\tilde{a}_{n(n-1)}{}^{(n-1)} = \tilde{0}$ dan nilai entri-entri ,..., $\tilde{a}_{nn}{}^{(n-1)}$ dari matriks interval $\tilde{A}2$, dapat dilakukan langkah-langkah berikut: $\tilde{a}_{n(n-1)}{}^{(n-1)} = \tilde{a}_{n(n-1)}{}^{(2)} + (\tilde{m}_{n(n-1)}) * (\tilde{a}_{(n-1)(n-1)}{}^{(2)})$. Dan sampai seterusnya untuk entri $\tilde{a}_{nn}{}^{(n-1)}$; $\tilde{a}_{nn}{}^{(n-1)} = \tilde{a}_{nn}{}^{(2)} + (\tilde{m}_{n(n-1)}) * (\tilde{a}_{(n-1)n}{}^{(2)})$. Diperoleh matriks interval persegi segitiga atas dari $\tilde{A}$:

$$\tilde{A}3 = \begin{bmatrix} [\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}]^{(0)} & [\underline{a}_{12}, \overline{a}_{12}]^{(0)} & [\underline{a}_{13}, \overline{a}_{13}]^{(0)} & \cdots & [\underline{a}_{1n}, \overline{a}_{1n}]^{(0)} \\ [0,0] & [\underline{a}_{22}, \overline{a}_{22}]^{(1)} & [\underline{a}_{23}, \overline{a}_{23}]^{(1)} & \cdots & [\underline{a}_{2n}, \overline{a}_{2n}]^{(1)} \\ [0,0] & [0,0] & [\underline{a}_{33}, \overline{a}_{33}]^{(2)} & \cdots & [\underline{a}_{3n}, \overline{a}_{3n}]^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0,0] & [0,0] & \cdots [0_{n(n-1)}, 0_{n(n-1)}]^{(n-1)} & \cdots & [\underline{a}_{nn}, \overline{a}_{nn}]^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Determinan dari matriks interval segitiga atas $\tilde{A}3$ adalah hasil kali dari diagonal utama pada $\tilde{A}3$ yaitu $det(\tilde{A}3) = [\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}]^{(0)} \cdot [\underline{a}_{22}, \overline{a}_{22}]^{(1)} \cdot [\underline{a}_{33}, \overline{a}_{33}]^{(2)} \cdot \dots \cdot [\underline{a}_{nn}, \overline{a}_{nn}]^{(n-1)}$. Dari Teorema 3 dan Teorema 4, maka dapat dikatakan bahwa $det(\tilde{A}) \approx det(\tilde{A}3)$.

Contoh 6 Mencari nilai determinan matriks interval menggunakan algoritma eliminasi Gauss interval. Diberikan matriks interval $\tilde{A}_{4\times 4}$ sebagai berikut:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [4,6] & [-1,1] & [-1,1] & [-1,1] \\ [-1,1] & [-6,-4] & [-1,1] & [-1,1] \\ [-1,1] & [-1,1] & [9,11] & [-1,1] \\ [-1,1] & [-1,1] & [-1,1] & [-11,-9] \end{bmatrix}$$

Langkah-langkah dalam merubah matriks interval $\tilde{A}$ menjadi matriks interval segitiga atas $\tilde{A}$ menggunakan algoritma eliminasi Gauss interval:

1. Pivot $\tilde{a}_{11}$
   Untuk mendapatkan $\tilde{a}_{21}, \tilde{a}_{31}, \tilde{a}_{41} = \tilde{0}$ dan nilai entri $\tilde{a}_{22}, \tilde{a}_{23}, \tilde{a}_{24}, \tilde{a}_{32}, \tilde{a}_{33}, \tilde{a}_{34}, \tilde{a}_{42}, \tilde{a}_{43}, \tilde{a}_{44}$ yang baru dari matriks interval $\tilde{A}$: $\tilde{m}_{21} = -[-0.23\,,0.23]$; $\tilde{a}_{21} = \tilde{0}$; $\tilde{a}_{22} = [-6.23, -3.77]$; $\tilde{a}_{23} = [-1.23, 1.23]$; $\tilde{a}_{24} = [-1.23, 1.23]$; $\tilde{m}_{31} = -[-0.23\,,0.23]$; $\tilde{a}_{31} = \tilde{0}$; $\tilde{a}_{32} = [-1.23, 1.23]$; $\tilde{a}_{33} = [8.77, 11.23]$; $\tilde{a}_{34} = [-1.23, 1.23]$; $\tilde{m}_{41} = -[-0.23\,,0.23]$; $\tilde{a}_{41} = \tilde{0}$; $\tilde{a}_{42} = [-1.23, 1.23]$; $\tilde{a}_{43} = [-1.23, 1.23]$; $\tilde{a}_{44} = [-11.23, -8.77]$.
2. Pivot $\tilde{a}_{22}$
   Untuk mendapatkan $\tilde{a}_{32}, \tilde{a}_{42} = \tilde{0}$ dan nilai entri $\tilde{a}_{33}, \tilde{a}_{34}, \tilde{a}_{43}, \tilde{a}_{44}$ yang baru dari matriks interval $\tilde{A}$: $\tilde{m}_{32} = -[-0.3, 0.3]$; $\tilde{a}_{32} = \tilde{0}$; $\tilde{a}_{33} = [8.4, 11.6]$; $\tilde{a}_{34} = [-1.6, 1.6]$; $\tilde{m}_{42} = -[-0.3, 0.3]$; $\tilde{a}_{42} = \tilde{0}$; $\tilde{a}_{43} = [-1.6, 1.6]$; $\tilde{a}_{44} = [-11.6, -8.4]$.
3. Pivot $\tilde{a}_{33}$
   Untuk mendapatkan $\tilde{a}_{43} = \tilde{0}$ dan nilai entri $\tilde{a}_{44}$ yang baru dari matriks interval $\tilde{A}$: $\tilde{m}_{43} = -[-0.18, 0.18]$; $\tilde{a}_{43} = \tilde{0}$; $\tilde{a}_{44} = [-11.89, -8.11]$.

Dari langkah 1,2, dan 3 diperoleh matriks interval segitiga atas dari $\tilde{A}$:

$$\tilde{A}3 = \begin{bmatrix} [4,6] & [-1,1] & [-1,1] & [-1,1] \\ [0,0] & [-6.23, -3.77] & [-1.23, 1.23] & [-1.23, 1.23] \\ [0,0] & [0,0] & [8.4, 11.6] & [-1.6, 1.6] \\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & [-11.89, -8.11] \end{bmatrix}$$

Determinan dari matriks interval $\tilde{A}$ dapat diperoleh dengan cara mengalikan entri-entri diagonal utama dari matriks interval segitiga atas $\tilde{A}3$ yang diperoleh:

$$\begin{aligned} \left|\tilde{A}3\right| &= [4,6] \cdot [-6.23, -3.77] \cdot [8.4, 11.6] \cdot [-11.89, -8.11] \\ &= [1027.29, 3972.71]. \end{aligned}$$

Nilai determinan dari matriks interval $\tilde{A}$ yang diperoleh dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor adalah $\left|\tilde{A}\right| = [868, 4132]$.

Untuk mengetahui hubungan antara dua nilai determinan yang diperoleh dengan dua cara yang berbeda, dapat dilakukan dengan mencari *midpoint* dari masing-masing nilai determinan tersebut

1) *midpoint* dari nilai determinan yang diperoleh menggunakan algoritma eliminasi Gauss interval adalah $\left|\tilde{A}3\right| = [1027.29, 3972.71]$, maka $m\left(\left|\tilde{A}3\right|\right) = \frac{1027.29 + 3972.71}{2} = \frac{5000}{2} = 2500.$
2) *midpoint* dari nilai determinan yang diperoleh menggunakan metode ekspansi kofaktor adalah $\left|\tilde{A}\right| = [868, 4132]$, maka $m\left(\left|\tilde{A}\right|\right) = \frac{868 + 4132}{2} = \frac{5000}{2} = 2500.$

karena diperoleh nilai *midpoint* yang sama, yaitu $m\left(\left|\tilde{A}3\right|\right) = m\left(\left|\tilde{A}\right|\right) = 2500$, maka dapat disimpulkan bahwa determinan matriks interval segitiga atas $\left|\tilde{A}3\right| \approx$ determinan matriks interval$\left|\tilde{A}\right|$.

Contoh 7 Mencari solusi dari SPIL atau matriks *augmanted* dari SPIL.

Diberikan SPIL $\left(\tilde{A}\tilde{x} \approx \tilde{b}\right)$, dengan

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [3.7, 4.3] & [-1.5, -0.5] & [0,0] \\ [-1.5, -0.5] & [3.7, 4.3] & [-1.5, -0.5] \\ [0,0] & [-1.5, -0.5] & [3.7, 4.3] \end{bmatrix}, \text{dan } \tilde{b} = \begin{bmatrix} [-14, 0] \\ [-9, 0] \\ [-3,0] \end{bmatrix}$$

Langkah-langkah dalam mencari solusi dari SPIL menggunakan algoritma eliminasi Gauss interval.

Matriks interval *augmanted* dari sistem tersebut adalah

$$\begin{bmatrix} [3.7, 4.3] & [-1.5, -0.5] & [0,0] & [-14, 0] \\ [-1.5, -0.5] & [3.7, 4.3] & [-1.5, -0.5] & [-9, 0] \\ [0,0] & [-1.5, -0.5] & [3.7, 4.3] & [-3,0] \end{bmatrix}$$

dari matriks interval *augmanted*, dilanjutkan dengan mereduksi matriks interval *augmanted* tersebut menggunakan Algoritma Eliminasi Gauss Interval:

1. Pivot $\tilde{a}_{11}$
   Untuk mendapatkan nilai entri $\tilde{a}_{21} = \tilde{0}$ dan nilai entri $\tilde{a}_{22}, \tilde{a}_{23}, \tilde{a}_{24}$ yang baru dari matriks interval *augmanted*: $\tilde{m}_{21} = -[-0.38, -0.12]$; $\tilde{a}_{21} = \tilde{0}$; $\tilde{a}_{22} = [3.26, 4.24]$; $\tilde{a}_{23} = [-1.5, -0.5]$; $\tilde{a}_{24} = [-12.5, 0]$; karena $\tilde{a}_{31} = \tilde{0}$, maka dapat dilanjutkan untuk langkah berikutnya.
2. Pivot $\tilde{a}_{22}$
   Untuk mendapatkan nilai entri $\tilde{a}_{32} = \tilde{0}$ dan nilai entri $\tilde{a}_{33}, \tilde{a}_{34}$ yang baru dari matriks interval *augmanted*: $\tilde{m}_{32} = -[-0.42, -0.12]$; $\tilde{a}_{32} = \tilde{0}$; $\tilde{a}_{33} = [3.22, 4.24]$; $\tilde{a}_{34} = [-6.38, 0]$.

Dari langkah 1 dan 2 diperoleh matriks interval *augmanted* yang lebih sederhana dari SPIL

$$\begin{bmatrix} [3.7, 4.3] & [-1.5, -0.5] & [0,0] & [-14, 0] \\ [0,0] & [3.26, 4.24] & [-1.5, -0.5] & [-12.5, 0] \\ [0,0] & [0,0] & [3.22, 4.24] & [-6.38, 0] \end{bmatrix}$$

dengan cara substitusi balik sistem yang bersesuaian dari matriks interval *augmanted* tersebut, maka dapat dicari solusi $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ dari matriks interval *augmanted* yang lebih sederhana.
Sistem yang bersesuaian dari matriks interval *augmanted* yang lebih sederhana (eselon baris) adalah:

$$[3.7, 4.3]\tilde{x}_1 + [-1.5, -0.5]\tilde{x}_2 + [0,0]\tilde{x}_3 = [-14, 0]$$
$$[0,0]\tilde{x}_1 + [3.26, 4.24]\tilde{x}_2 + [-1.5, -0.5]\tilde{x}_3 = [-12.5, 0]$$
$$[0,0]\tilde{x}_1 + [0,0]\tilde{x}_2 + [3.22, 4.24]\tilde{x}_3 = [-6.38, 0]$$

Solusi $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ yang diperoleh dengan cara substitusi balik sistem yang bersesuaian dari matriks interval *augmanted* yang lebih sederhana dari SPIL dan memenuhi sistem $\tilde{A}\tilde{x} \approx \tilde{b}$ adalah

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-4.46, 0] \\ [-3.84, 0] \\ [-1.72, 0] \end{bmatrix}.$$

Dari nilai $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ yang diperoleh, kemudian substitusikan nilai-nilai tersebut pada sistem yang bersesuaian dari matriks interval *augmanted* untuk mengetahui apakah solusi yang diperoleh memenuhi sistem $\tilde{A}\tilde{x} \approx \tilde{b}$.
Sistem yang bersesuaian dari matriks interval *augmanted* adalah

$$[3.7, 4.3]\tilde{x}_1 + [-1.5, -0.5]\tilde{x}_2 + [0,0]\tilde{x}_3 = [-14, 0] \quad (1)$$
$$[-1.5, -0.5]\tilde{x}_1 + [3.7, 4.3]\tilde{x}_2 + [-1.5, -0.5]\tilde{x}_3 = [-9, 0] \quad (2)$$
$$[0,0]\tilde{x}_1 + [-1.5, -0.5]\tilde{x}_2 + [3.7, 4.3]\tilde{x}_3 = [-3,0] \quad (3)$$

midpoint dari vektor interval $\tilde{b}$ pada persamaan 1,2, dan 3 adalah $m(\tilde{b}_{11}) = -7$; $m(\tilde{b}_{21}) = -4.5$; dan $m(\tilde{b}_{31}) = -1.5$.

Substitusikan nilai $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$, dan $\tilde{x}_3$ pada Persamaan 1, 2, dan 3 untuk memperoleh vektor interval $\tilde{b}$ yang memenuhi sistem $\tilde{A}\tilde{x} \approx \tilde{b}$:

1. $\tilde{b}_{11} = [3.7, 4.3]\tilde{x}_1 + [-1.5, -0.5]\tilde{x}_2 + [0,0]\tilde{x}_3$
   $= [3.7, 4.3] \cdot [-4.46, 0] + [-1.5, -0.5] \cdot [-3.84, 0] + [0,0] \cdot [-1.72, 0]$
   $= [-17.84 , 0] + [0, 3.84] + [0,0] = [-17.84, 3.84]$.
2. $\tilde{b}_{21} = [-1.5, -0.5]\tilde{x}_1 + [3.7, 4.3]\tilde{x}_2 + [-1.5, -0.5]\tilde{x}_3$
   $= [-1.5, -0.5] \cdot [-4.46, 0] + [3.7, 4.3] \cdot [-3.84, 0] + [-1.5, -0.5] \cdot [-1.72, 0]$
   $= [0, 4.46] + [-15.36, 0] + [0, 1.72] = [-15.36, 6.18]$.
3. $\tilde{b}_{31} = [0,0]\tilde{x}_1 + [-1.5, -0.5]\tilde{x}_2 + [3.7, 4.3]\tilde{x}_3$
   $= [0,0] \cdot [-4.46, 0] + [-1.5, -0.5] \cdot [-3.84, 0] + [3.7, 4.3] \cdot [-1.72, 0]$
   $= [0,0] + [0, 3.84] + [-6.88, 0] = [-6.88, 3.84]$.

Midpoint dari vektor interval $\tilde{b}$ yang diperoleh adalah

$$m(\tilde{b}_{11}) = -7;\ m(\tilde{b}_{21}) = -4.59; \text{dan } m(\tilde{b}_{31}) = -1.52.$$

Berikut adalah solusi $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, dan $\tilde{x}_3$ dari matriks interval *augmanted* yang diperoleh dengan menggunakan metode aturan Cramer

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-4.482, 0] \\ [-3.816, 0] \\ [-1.776, 0.006] \end{bmatrix}$$

substitusikan nilai $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ pada Persamaan 1, 2, dan 3 untuk memperoleh vektor interval $\tilde{b}$ yang memenuhi sistem $\tilde{A}\tilde{x} \approx \tilde{b}$. Nilai vektor interval interval $\tilde{b}$ yang diperoleh adalah $\tilde{b}_{11} = [-17.92, 3.82]$, $\tilde{b}_{21} = [-15.273,\ 6.261]$, dan $\tilde{b}_{31} = [-7.102,\ 3.838]$.

Midpoint dari vektor interval $\tilde{b}$ yang diperoleh adalah

$$m(\tilde{b}_{11}) = -7.05;\ m(\tilde{b}_{21}) = -4.51; \text{dan } m(\tilde{b}_{31}) = -1.63.$$

PENUTUP

Algoritma eliminasi Gauss interval dapat digunakan untuk mendapatkan matriks interval segitiga atas dari matriks interval dan matriks interval *augmanted* yang lebih sederhana dari matriks interval *augmanted* dengan menerapkan aritmatika interval yang dimodifikasi. Untuk mendapatkan nilai determinan dari suatu matriks interval dapat dilakukan dengan mereduksi matriks interval menjadi matriks interval segitiga atas menggunakan algoritma eliminasi Gauss interval. Dengan mengalikan entri-entri diagonal utama matriks interval segitiga atas, diperoleh nilai determinan matriks interval segitiga atas ekuivalen nilai determinan matriks interval yang dapat dilihat dari masing-masing *midpoint* nilai determinan matriks interval yang diperoleh dengan dua cara yang berbeda. Mencari solusi dari SPIL menggunakan algoritma eliminasi Gauss interval adalah dengan mendapatkan matriks interval *augmanted* yang lebih sederhana dari SPIL dan dilanjutkan dengan substitusi balik sistem yang bersesuaian dari bentuk matriks interval *augmanted* yang lebih sederhana, sehingga diperoleh solusi $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ yang memenuhi SPIL $\tilde{A}\tilde{x} \approx \tilde{b}$. *Midpoint* vektor interval $\tilde{b}$ dari solusi $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ yang diperoleh menggunakan algoritma eliminasi Gauss interval lebih mendekati *midpoint* vektor interval $\tilde{b}$ dari sistem $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$, dibanding dengan *midpoint* vektor interval $\tilde{b}$ dari solusi $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ yang diperoleh menggunakan metode aturan Cramer.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Anton, Rorres C. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Edisi Kedelapan* [Indriasari R, trans]. Jakarta: Erlangga; 2004.

[2]. Ganesan K. On Some Properties Of Interval Matrices. *International Journal of Computational and Mathematical Sciences*. 2007; 1(1):25-32.

[3]. Garloff J. Interval Gaussian Elimination With Pivot Tightening. *SIAM Journal Matrix Anal Applied*. 2009; 30(4):1761-1772.

[4]. Nirmala T, Datta D, Kushwaha H S. Invers Interval Matrix. A New Approach. *Journal Applied Mathematical Sciences.* 2011; 5(13):607-624.

[5]. Rohn J. *A Handbook of Results on Interval Linear Problems*. Czech Republic: Czech Academy of Sciences, Prague, European Union; 2005.

[6]. Adabitabar FM, Babakordi F, Shahhosseini M. Gauss Elimination Algorithm for Interval Matrix. *Int. Journal Industrial Mathematics*. 2011; 3(1):9-15.

EGI ZULKARNAIN : FMIPA Untan, Pontianak, egi_zulkarnain14@yahoo.com
BAYU PRIHANDONO : FMIPA Untan, Pontianak, beiprihandono@gmail.com
ILHAMSYAH : FMIPA Untan, Pontianak, ilhamsm99@gmail.com