Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 02, No. 2 (2013), hal 127 – 132.

KAJIAN SIFAT DISTRIBUSI NORMAL BIVARIAT

Turyadi, Muhlasah Novitasari Mara, Dadan Kusnandar

INTISARI

Distribusi adalah pola penyebaran yang merupakan gambaran kondisi sekelompok data. Salah satu distribusi dengan variabel acak kontinu adalah Distribusi Normal. Distribusi Normal Univariat mempunyai dua parameter yaitu nilai harapan μ dan variansi σ^2. Sedangkan Distribusi Normal Bivariat mempunyai lima parameter yaitu μ_x, μ_y, σ_x^2, σ_y^2 dan ρ. Distribusi Normal Bivariat merupakan gabungan dari dua variabel acak kontinu X dan Y, dengan variabel acak X dan Y keduanya berdistribusi normal. Jika $\rho = 0$, maka X dan Y independen sehingga Distribusi Normal Bivariat terbentuk dari hasil kali distribusi marginal X dengan distribusi marginal Y. Jika $\rho \neq 0$, maka Distribusi Normal Bivariat terbentuk dari hasil kali distribusi marginal yang berdistribusi normal dengan Distribusi bersyarat yang juga Berdistribusi Normal.

Kata Kunci : *distribusi normal bivariat, distribusi normal, sifat.*

PENDAHULUAN

Distribusi Normal merupakan distribusi probabilitas dengan variabel acak kontinu. Kurva Distribusi Normal berbentuk lonceng setangkup yang melebar tak berhingga pada kedua arah positif dan negatifnya. Distribusi Normal Univariat memiliki dua parameter yaitu nilai harapan dan variansi. Distribusi Normal Bivariat merupakan perluasan dari Distribusi Normal Univariat. Distribusi Normal Bivariat mempunyai lima parameter yaitu nilai harapan dan variansi dari masing-masing variabel acak kontinu dan koefisien korelasi antara dua variabel [1].

Dalam tulisan ini dikaji sifat-sifat Distribusi Normal Bivariat dengan dua variabel acak yang independen dan variabel acak tidak independen. Adapun tujuan dari tulisan ini adalah mendeskripsikan sifat-sifat Distribusi Normal Bivariat. Banyak penelitian yang menggunakan Distribusi Normal Bivariat. Misalnya Distribusi Normal Bivariat digunakan sebagai model untuk prosedur penyaringan, dimana suatu produk diterima atau ditolak berdasarkan pada pengukuran sekunder yang berkorelasi dengan karakteristik kinerja. Misalnya penyaringan digunakan untuk proporsi semua item yang ditolak walaupun item tersebut sebenarnya baik dan proporsi bagian yang diterima sebenarnya rusak atau cacat yang menarik [2]. Distribusi Normal Bivariat pernah digunakan dalam bidang pertambangan batu bara. Dalam penelitiannya, dilakukan pendekatan untuk menentukan distribusi bersyarat dari kedalaman perpindahan, kedalaman aliran, dan kedalaman gas yang dikembangkan menggunakan Distribusi Normal Bivariat. Persentase aliran, perpindahan dan pembentukkan data sebagai fungsi jarak dari dasar batu bara dan diperoleh dari serangkaian percobaan lubang bor yang dilakukan berulang-ulang. Dalam penelitiannya Distribusi Normal Bivariat digunakan untuk menentukan distribusi bersyarat [3]. Dalam penelitian lain mengatakan bahwa Fungsi Distribusi Normal Bivariat merupakan hasil kali dari distribusi marginal dengan distribusi bersyarat. Dalam penelitiannya, melakukan pendekatan sederhana untuk Probabilitas Normal Bivariat. Dengan menggunakan distribusi bersyarat diperoleh suatu metode sederhana untuk mendekati Distribusi Normal Bivariat. Dalam penelitiannya menyimpulkan bahwa ketika korelasi dalam interval [-0.5, 0,5], maka kesalahan dalam pendekatan selalu kurang dari 0,0008 [4].

DISTRIBUSI NORMAL

Distribusi Normal adalah distribusi dengan variabel acak kontinu, sehingga perhitungan probabilitasnya dilakukan dengan menentukan luas daerah di bawah kurva. Distribusi Normal merupakan distribusi yang simetris dan berbentuk genta atau lonceng. Kurva Distribusi Normal dipengaruhi oleh nilai harapan dan variansi. Makin besar variansinya maka bentuk kurva normalnya semakin rendah dan distribusinya semakin lebar. Hal ini disebabkan karena luas di bawah kurva fungsi densitas harus sama dengan satu [5].

Definisi. *Variabel acak X berdistribusi normal dengan nilai harapan μ dan variansi σ^2, dinotasikan dengan $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, mempunyai fungsi densitas sebagai berikut:*

$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$, dengan $-\infty < X < \infty$

SIFAT DISTRIBUSI NORMAL BIVARIAT

Sepasang variabel acak kontinu *X* dan *Y* dikatakan memiliki Distribusi Normal Bivariat jika variabel acak kontinu *X* dan *Y* memiliki fungsi densitas gabungan dari bentuk sebagai berikut [6]:

$$f(x,y) = \frac{1}{\sigma_x\sigma_y 2\pi\sqrt{1-\rho^2}} exp\left\{-\left(\frac{1}{2\sqrt{(1-\rho^2)}}\right)\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\} \quad (1)$$

Untuk $-\infty < x < \infty$ dan $-\infty < y < \infty$ dengan $-1 < \rho < 1$
Dimana μ_x dan σ^2_x adalah nilai harapan dan variansi dari variabel acak *X*, μ_y dan σ^2_y adalah nilai harapan dan variansi dari variabel acak *Y*, dengan r adalah koefisien korelasi antara variabel acak *X* dan *Y*. Fungsi Distribusi Normal Bivariat mempunyai lima parameter yaitu μ_x, μ_y, σ^2_x, σ^2_y dan ρ.

Teorema. *Jika Sepasang variabel acak kontinu X dan Y adalah Distribusi Normal Bivariat dengan parameter μ_x, μ_y, σ^2_x, σ^2_y* dan ρ, *maka $X \sim N(\mu, \sigma_x^2)$ dan $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$ dengan r adalah koefisien korelasi antara X dan Y.*

Misalkan $g(x)$ adalah distribusi marginal *X* dan $h(y)$ adalah distribusi marginal *Y*. Dibuktikan bahwa $X \sim N(\mu, \sigma_x^2)$ dan $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$

Bukti:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{(1-\rho^2)}}$$
$$exp\left\{\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\right)\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{(1-\rho^2)}}$$
$$exp\left\{-\left(\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_x^2\sigma_y^2}\right)\left[(x-\mu_x)^2\sigma_y^2 - 2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)\sigma_x\sigma_y + (y-\mu_y)^2\sigma_x^2\right]\right\}$$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\rho\sigma_x\sigma_y\sqrt{(1-\rho^2)}}$$

$$exp\left\{-\frac{(x-\mu_x)^2\sigma_y^2(1-\rho^2)}{2(1-\rho^2)\sigma_x^2\sigma_y^2} exp\left\{-\frac{\left[\left(y-\mu_y\right)\sigma_x-(x-\mu_x)\sigma_y\rho\right]^2}{2(1-\rho^2)\sigma_x^2\sigma_y^2}\right\}\right\} dy$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{(1-\rho^2)}} exp\left\{-\frac{(x-\mu_x)^2\sigma_y^2(1-\rho^2)}{2(1-\rho^2)\sigma_x^2\sigma_y^2}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{-\frac{\left[\left(y-\mu_y\right)\sigma_x-(x-\mu_x)\sigma_y\rho\right]^2}{2(1-\rho^2)\sigma_x^2\sigma_y^2}\right\} dy$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{(1-\rho^2)}} exp\left\{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{-\frac{\left[\left(y-\mu_y\right)\sigma_x-(x-\mu_x)\sigma_y\rho\right]^2}{2(1-\rho^2)\sigma_x^2\sigma_y^2}\right\} dy$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{(1-\rho^2)}} exp\left\{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{-\frac{\left[y-\left(\mu_y+(x-\mu_x)\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\rho\right)\right]^2}{2(1-\rho^2)\sigma_y^2}\right\} dy$$

$$= \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}\sqrt{(1-\rho^2)}} exp\left\{-\frac{\left[y-\left(\mu_y+(x-\mu_x)\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\rho\right)\right]^2}{2(1-\rho^2)\sigma_y^2}\right\} dy$$

$$= \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} exp\ \left\{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\} \times 1$$

$$= \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} exp\ \left\{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\} \tag{2}$$

Maka $g(x)$ adalah Distribusi Normal dengan nilai harapan μ_x dan variansi σ_x^2 .

Dengan langkah yang sama didapatkan bahwa:

$$h(y) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2x}} exp\left\{-\frac{\left(y-\mu_y\right)^2}{2\sigma_y^2}\right\} \tag{3}$$

Maka $h(y)$ adalah Distribusi Normal dengan nilai harapan $\mu_y$dan variansi σ_y^2.

Terbukti bahwa $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ dan $Y \sim N\left(\mu_y, \sigma_y^2\right)$. ■

Sepasang variabel acak *X* dan *Y* pada Distribusi Normal Bivariat mempunyai dua hubungan yaitu variabel acak *X* dan *Y* yang independen dan dua variabel acak *X* dan *Y* yang tidak independen. Selanjutnya dikaji Distribusi Normal Bivariat yang mempunyai variabel acak *X* dan *Y* yang independen. Untuk itu dikaji hasil kali dari Persamaan 2 dan Persamaan 3.

$$f(x,y) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\} \times \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{\left(y-\mu_y\right)^2}{2\sigma_y^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sigma_x\sigma_y 2\pi} exp\left\{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\} exp\left\{-\frac{\left(y-\mu_y\right)^2}{2\sigma_y^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sigma_x\sigma_y 2\pi} exp\left\{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{\left(y-\mu_y\right)^2}{2\sigma_y^2}\right\} \tag{4}$$

Persamaan 4 adalah Fungsi Distribusi Normal Bivariat yang mempunyai$\rho = 0$. Dengan demikian Fungsi Distribusi Normal Bivariat dengan *X* dan *Y* yang independen terbentuk dari $g(x) \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$dikali dengan $h(y) \sim N\left(\mu_y, \sigma_y^2\right)$.

Jika Fungsi Distribusi Normal Bivariat mempunyai $\rho \neq 0$, maka variabel acak X dan Y tidak independen. Fungsi Distribusi Normal Bivariat dengan $\rho \neq 0$ mempunyai fungsi bersyarat yang harus dipenuhi agar hasil kali dari $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ dengan $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$. menghasilkan Fungsi Distribusi Normal Bivariat yang mempunyai $\rho \neq 0$. Untuk itu dikaji fungsi distribusi bersyarat Y dengan syarat $X = x$.

Fungsi distribusi beryarat Y dengan syarat $X = x$ adalah sebagai berikut:

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}$$

$$f(y|x) = \frac{\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{(1-\rho^2)}} exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right\}}{\frac{1}{\sigma_x\sqrt{(2\pi)}} exp\left\{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{(1-\rho^2)}} exp\left\{-\left(\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_x^2\sigma_y^2}\right)\left[(x-\mu_x)^2\sigma_y^2 - 2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)\sigma_x\sigma_y + (y-\mu_y)^2\sigma_x^2\right]\right\}}{\frac{1}{\sigma_x\sqrt{(2\pi)}} exp\left\{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{(1-\rho^2)}} exp\left\{-\frac{(x-\mu_x)^2\sigma_y^2(1-\rho^2)}{2(1-\rho^2)\sigma_x^2\sigma_y^2} - \frac{\left[(y-\mu_y)\sigma_x-(x-\mu_x)\sigma_y\rho\right]^2}{2(1-\rho^2)\sigma_x^2\sigma_y^2}\right\}}{\frac{1}{\sigma_x\sqrt{(2\pi)}} exp\left\{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{(1-\rho^2)}} exp\left\{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{\left[y-\left(\mu_y(x-\mu_x)\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\rho\right)\right]^2}{2(1-\rho^2)\sigma_y^2}\right\}}{\frac{1}{\sigma_x\sqrt{(2\pi)}} exp\left\{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\}}$$

$$= \frac{exp\left\{-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2} - \frac{\left(y-\left(\mu_y+(x-\mu_x)\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\rho\right)\right)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_y^2}\right\}}{\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi}} \times \frac{\sigma_x\sqrt{2\pi}}{exp\left\{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\}}$$

$$= \frac{1}{\sigma_y\sqrt{1-\rho^2\sqrt{2\pi}}} exp\left\{-\frac{\left(y-\left(\mu_y+(x-\mu_x)\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\rho\right)\right)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_y^2}\right\} \quad (5)$$

Dengan langkah yang sama didapatkan fungsi distribusi bersyarat X dengan syarat $Y = y$.

$$f(x|y) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{1-\rho^2\sqrt{2\pi}}} exp\left\{-\frac{\left(x-\left(\mu_x+(y-\mu_y)\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\rho\right)\right)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_x^2}\right\} \quad (6)$$

Dengan demikian $(y|x) \sim N\left[\left(\mu_y + \left(x - \mu_x\right)\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\rho, (1-\rho^2)\sigma_y^2\right),\right]$ dan
$(x|y) \sim N\left[\mu_x + \left(y - \mu_y\right)\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\rho, (1-\rho^2)\sigma_x^2\right]$.

Selanjutnya dikaji Distribusi Normal Bivariat dengan variabel acak X dan Y yang tidak independen. Distribusi Normal Bivariat dengan variabel acak X dan Y yang independen terbentuk dari hasil kali distribusi marginal. Untuk itu dikaji hasil kali dari Persamaan 2 dan Persamaan 5.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\} \times \frac{1}{\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} exp\left\{-\frac{\left(y-\left(\mu_y+(x-\mu_x)\right)\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\right)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_y^2}\right\} \\ &= \frac{1}{\sigma_x\sigma_y 2\pi\sqrt{1-\rho^2}} exp\left\{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\} \times exp\left\{-\frac{\left(y-\left(\mu_y+(x-\mu_x)\right)\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\right)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_y^2}\right\} \\ &= \frac{1}{\sigma_x\sigma_y 2\pi\sqrt{1-\rho^2}} exp\left\{-\left(\frac{1}{2\sqrt{(1-\rho^2)}}\right)\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\} \end{aligned} \tag{7}$$

Persamaan 7 sama dengan Persamaan 1 yang merupakan Fungsi Distribusi Normal Bivariat yang mempunyai koefisien korelasi sama dengan ρ. Begitu juga dengan hasil kali dari Persamaan 3 dengan Persamaan 6 juga menghasilkan Fungsi Distribusi Normal Bivariat yang mempunyai koefisien korelasi sama dengan ρ. Dengan demikian Fungsi Distribusi Normal Bivariat dengan X dan Y yang tidak independen terbentuk dari $g(x)$ ´ $f(y|x)$ atau $h(y)$ ´ $f(x|y)$.

PENUTUP

Kesimpulkan dari penelitian ini bahwa Distribusi Normal Bivariat memiliki sifat-sifat sebagai berikut:

1. Distribusi marginal X dan Y dari Distribusi Normal Bivariat adalah normal.
   $X \sim N(\mu, \sigma_x^2)$ dan $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$
2. Distribusi Normal Bivariat

   $$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right\}$$

   merupakan fungsi densitas gabungan dari variabel acak X dan Y.
   Dimana $X \sim N(\mu, \sigma_x^2)$ dan $(x|y) \sim N\left[\mu_x + \left(y-\mu_y\right)\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\rho, (1-\rho^2)\sigma_x^2\right]$ atau $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$ dan$(x|y) \sim N\left[\mu_y + (x-\mu_x)\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\rho, (1-\rho^2)\sigma_y^2\right]$ dengan, $f(x,y) = g(x).f(y|x) = h(y).f(x|y)$
3. Jika $X : N(m_x, s_x^2)$ dan $Y : N(m_y, s_y^2)$ independen maka:

   $f(x,y) = \frac{1}{\sigma_x\sigma_y 2\pi} exp\left\{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right\}$, yang merupakan fungsi densitas dari Distribusi Normal Bivariat dengan $r = 0$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Sahoo P, *Probability and Mathematical Statistics.* Departement of Mathematics: University of Louisville; 2008.

[2] Owen DB, McIntire D, Seymour E. Tables using one or two screening variables to increase acceptable product under one-sided specification. *Journal of Quality Technology*. **7:** 127-138, 1975**.**

[3] Karacan CO, Gerrit VRG. Probabilistic modeling using bivariate normal distributions for identification of flow and displacement intervals in longwall overburden. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. **48:** 27-41, 2011.

[4] Mee Robert W, Owen DB. A simple approximtion for bivariate normal probabilities. *Departement of Statistics*. Southern Methodist University; 1982.

[5] Walpole RE, Raymond HM. *Ilmu Probabilitas dan Statistik untuk Insinyur dan Ilmuan.* Bandung: ITB; 1995.

[6] Bain LJ, Max E, *Introduction To Probability And Mathematical Statistics*. California: Duxbury; 1991.

TURYADI : FMIPA UNTAN Pontianak, yadie_si2pan@ymail.com

MUHLASAH NOVITASARI MARA : FMIPA UNTAN Pontianak, novee_mara@yahoo.co.id

DADAN KUSNANDAR : FMIPA UNTAN Pontianak,dkusnand@yahoo.com