



Limits: Journal of Mathematics and Its Applications

E-ISSN: 2579-8936

P-ISSN: 1829-605X

Vol. 16, No. 2, Desember 2019, 117-134

DOI: <http://dx.doi.org/10.12962/limits.v16i2.5255>

Model Matematika Persaingan Dua Spesies dengan Toksisitas dan Pemanenan Selektif

Puja Nur Audria¹, Miswanto^{2*}, Fatmawati³

^{1,2,3} Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Kampus C Universitas Airlangga, Jl. Mulyorejo, Surabaya

e-mail : miswanto@fst.unair.ac.id

Abstrak

Persaingan merupakan interaksi biologi antar makhluk hidup untuk bersaing mendapatkan sumber energi yang terbatas, misalnya makanan yang dibutuhkan untuk tumbuh dan bertahan hidup. Beberapa spesies mempunyai strategi tersendiri dalam bersaing, diantaranya adalah kemampuan mengeluarkan racun. Pada jurnal ini, dikaji dua model predator-prey yang dipengaruhi oleh adanya toksisitas dan pemanenan selektif. Model pertama mengkaji model persaingan dua spesies dengan adanya toksisitas dan pemanenan selektif, sedangkan model kedua mengkaji model persaingan dua spesies dengan adanya toksisitas dan pemanenan selektif dengan Holling tipe III. Dari model pertama diperoleh 4 titik setimbang yaitu ε_{20} , ε_{21} , ε_{22} , dan ε_{23} . Dari model kedua juga diperoleh 4 titik setimbang, yaitu ε_{20} , ε_{21} , ε_{22} , dan ε_{23} . Titik setimbang ε_{10} dan ε_{20} tidak stabil, sedangkan ε_{11} , ε_{12} , ε_{13} , ε_{21} , ε_{22} , dan ε_{23} stabil dalam kondisi tertentu. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa kedua spesies pada model kedua mengalami peningkatan dibandingkan dengan model pertama. Hal tersebut dikarenakan adanya kecenderungan untuk mencari musuh yang lain ketika jumlah musuh mulai berkurang.

Kata Kunci: Model *Predator-Prey*, Kompetisi, Toksisitas, Pemanenan Selektif, Kestabilan.

Abstract

Competition is a biological interaction among organisms for obtaining the limited energy resources such as food, to grow and survive. Some species have their own type to compete, such as through toxin production. In this paper, we use predator-prey model which affect of toxicity and selective harvesting. This thesis will analyze two models. First, is mathematics model of selective harvesting of two competing species in the presence of toxicity and second is mathematics model of selective harvesting of two competing species in the presence of toxicity with Holling type III. From the first model obtained four equilibrium point, those are ε_{10} , ε_{11} , ε_{12} and ε_{13} . From second model also obtained four equilibrium point, those are ε_{20} , ε_{21} , ε_{22} , and ε_{23} . The equilibrium point ε_{10} and ε_{20} are unstable, while ε_{11} , ε_{12} , ε_{13} , ε_{21} , ε_{22} , and ε_{23} are stable under certain conditions. The numerical insight show that both of species in the second model are increasing, compared to the first model. It is caused by the tendency to find other competitor when the competitor number respond to decrease.

Keywords: *Predator-Prey Model, Competition, Toxicity, Harvesting, Stability.*

corresponding author: miswanto@fst.unair.ac.id

1. Pendahuluan

Tiada kehidupan tanpa adanya makanan. Virus sebagai makhluk hidup terkecil sampai manusia sebagai makhluk hidup tertinggi pun membutuhkan makanan untuk mempertahankan kehidupannya. Salah satu cara mendapatkan makanan adalah dengan berkompetisi. Pada interaksi ini timbul persaingan antarspesies untuk mendapatkan makanan. Persaingan ini timbul terutama karena terbatasnya sumber makanan. Kompetisi memegang peranan penting dalam evolusi kehidupan [1]. Layaknya sebuah permainan, dalam berkompetisi mendapatkan makanannya, setiap spesies memiliki strategi tersendiri yang didukung oleh morfologi, fisiologi dan perilaku masing-masing spesies [2]. Salah satunya adalah kemampuan mengeluarkan racun untuk mengalahkan pesaingnya. Ada beberapa organisme yang dapat mengeluarkan racun ketika berinteraksi dengan spesies lain. Interaksi ini biasa disebut dengan alelopati [3]. Peristiwa kompetisi dan alelopati terjadi sebagai bentuk aktivitas spesies untuk menjaga keseimbangan ekosistem. Salah satu aktivitas lain yang juga mempengaruhi keseimbangan ekosistem adalah adanya faktor pemanenan.

Kajian mengenai model matematika persaingan dua spesies terus mengalami perkembangan. Jing dkk. (2009) [4] telah mengkaji model matematika predator prey menggunakan fungsi respon Holling tipe II dengan adanya pemanenan pada predator dan mangsa. Sedangkan Samanta (2010) [5] melakukan telaah mengenai dinamika persaingan dua spesies yang dipengaruhi oleh zat beracun. Pada tahun 2017, sebuah penelitian yang ditulis oleh Pal dkk [6] menjelaskan mengenai model matematika persaingan dua spesies ikan dengan adanya toksisitas dan pemanenan selektif dan adanya waktu tunda. Selanjutnya pada artikel ini dilakukan modifikasi model matematika persaingan dua spesies yang telah dikembangkan oleh Pal dkk (2017) [6] dengan menghilangkan waktu tunda dan menambahkan fungsi respon Holling tipe III.

2. Formulasi Model Matematika

2.1. Model Matematika Persaingan Dua Spesies dengan Adanya Toksisitas dan Pemanenan Selektif.

Pada subbab ini, dikaji dua model matematika persaingan dua spesies dengan adanya toksisitas dan pemanenan selektif. Model pertama adalah model sebelum dimodifikasi dengan Holling Tipe III, dan model kedua adalah model sesudah dimodifikasi dengan Holling Tipe III. Kedua model memiliki masing-masing dua kompartemen yakni spesies pertama (x_1) dan spesies kedua (x_2).

Asumsi yang digunakan pada model pertama yakni: 1. Kedua spesies beracun. 2. Model pertumbuhan kedua spesies merupakan model pertumbuhan logistik. 3. Pemanenan hanya terjadi di spesies pertama. 4. Laju kematian alami diabaikan. 5. Laju kelahiran kedua spesies konstan. Bentuk model pertama sebagai berikut,

$$\frac{dx_1}{dt} = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k_1}\right) - a_1 x_1 x_2 - \gamma_1 x_1^2 x_2 - q E x_1 \quad (1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{k_2}\right) - a_2 x_1 x_2 - \gamma_2 x_1 x_2^2 \quad (2)$$

Persamaan (1) menunjukkan laju perubahan populasi spesies pertama per satuan waktu. Populasi spesies pertama akan bertambah karena laju pertumbuhan secara logistik yang dibatasi oleh kapasitas maksimum populasi sebesar k_1 . Populasi spesies pertama akan berkurang karena persaingan dengan spesies kedua dengan laju persaingan sebesar a_1 . Demikian juga, persaingan dengan spesiesnya sendiri dan spesies kedua dengan laju persaingan sebesar γ_1 , serta pemanenan sebesar q .

Persamaan (2) menunjukkan laju perubahan populasi spesies kedua per satuan waktu. Populasi spesies kedua akan bertambah karena laju pertumbuhan secara logistik yang dibatasi oleh kapasitas maksimum populasi sebesar k_2 . Populasi spesies kedua akan berkurang karena persaingan dengan spesies pertama dengan laju persaingan sebesar a_2 serta persaingan dengan spesiesnya sendiri dan spesies pertama dengan laju persaingan sebesar γ_2 .

Pada model kedua, asumsi yang digunakan yaitu: 1). Kedua spesies beracun. 2). Model pertumbuhan kedua spesies merupakan model pertumbuhan logistik. 3). Pemanenan hanya terjadi pada spesies pertama. 4). Laju kematian alami diabaikan. 5). Laju kelahiran kedua spesies konstan 6). Spesies yang cenderung akan mencari populasi spesies musuh yang lain ketika populasi spesies musuh mulai berkurang, dan 7). Fungsi respon Holling hanya ditambahkan pada suku ketiga disetiap persamaan pada model. Bentuk model kedua adalah sebagai berikut,

$$\frac{dx_1}{dt} = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k_1}\right) - a_1 x_1 x_2 - \frac{\gamma_1 x_1^2 x_2}{1 + x_1^2} - q E x_1 \quad (3)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{k_2}\right) - a_2 x_1 x_2 - \frac{\gamma_2 x_1 x_2^2}{1 + x_2^2} \quad (4)$$

Persamaan (3) menunjukkan laju perubahan populasi spesies pertama per satuan waktu. Populasi spesies pertama akan bertambah karena laju pertumbuhan secara logistik yang dibatasi oleh kapasitas maksimum populasi k_1 . Populasi spesies pertama akan berkurang karena persaingan dengan spesies kedua dengan laju persaingan sebesar a_1 , dan juga persaingan dengan

spesiesnya sendiri dan spesies kedua yang dalam persamaan ini, spesies pertama akan cenderung mencari spesies kedua yang lain, ketika spesies kedua mulai berkurang dengan laju persaingan sebesar γ_1 , serta spesies pertama juga akan berkurang karena pemanenan sebesar q .

Persamaan (4) menunjukkan laju perubahan populasi spesies kedua per satuan waktu. Populasi spesies kedua akan bertambah karena laju pertumbuhan secara logistik yang dibatasi oleh kapasitas maksimum populasi spesies kedua sebesar k_2 . Populasi spesies kedua akan berkurang saat terjadi persaingan dengan spesies pertama dengan laju persaingan sebesar a_2 serta persaingan dengan spesiesnya sendiri dan spesies pertama yang dalam persamaan ini, spesies kedua akan cenderung mencari spesies pertama yang lain, ketika spesies pertama mulai berkurang dengan laju persaingan sebesar γ_2 .

Disumsikan semua parameter dan variabel bernilai positif dengan keterangan sebagai berikut,

- x_1 : Jumlah populasi spesies pertama,
- x_2 : Jumlah populasi spesies kedua,
- r_1 : Potensi biotik dari spesies pertama,
- r_2 : Potensi biotik dari spesies kedua,
- α_1 : Koefisien kompetisi interspesifik spesies pertama,
- α_2 : Koefisien kompetisi interspesifik spesies kedua,
- k_1 : Kapasitas pendukung spesies pertama,
- k_2 : Kapasitas pendukung spesies kedua,
- γ_1 : Koefisien toksisitas spesies pertama,
- γ_2 : Koefisien toksisitas spesies kedua,
- q : Koefisien kemampuan tertangkapnya spesies pertama,
- E : Tingkat pemanenan.

3. Hasil dan Pembahasan

Untuk menganalisis kestabilan dari kedua model di atas, maka yang harus dilakukan adalah menentukan titik setimbang dari model tersebut.

3.1. Titik Setimbang Model

3.1.1. Titik Setimbang Model Pertama

Keadaan titik setimbang merupakan suatu kondisi ketika perubahan jumlah subpopulasi tertentu sepanjang waktu adalah nol. Model pertama akan memiliki titik setimbang jika memenuhi $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = 0$, dengan demikian

$$\frac{dx_1}{dt} = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k_1}\right) - a_1 x_1 x_2 - \gamma_1 x_1^2 x_2 - q E x_1 = 0 \quad (5)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{k_2}\right) - a_2 x_1 x_2 - \gamma_2 x_1 x_2^2 = 0 \quad (6)$$

Dari persamaan (5) dan (6) diperoleh empat titik setimbang, yaitu:

1. **Titik setimbang kepunahan** mengindikasikan suatu kondisi ketika populasi spesies pertama dan spesies kedua dalam keadaan punah ($x_1, x_2 = 0$). Dari sini diperoleh titik setimbang kepunahan $\boldsymbol{\varepsilon}_{10}(x_1, x_2) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$.
2. **Titik setimbang kepunahan spesies pertama** mengindikasikan suatu kondisi ketika tidak adanya populasi spesies pertama ($x_1 = 0, x_2 \neq 0$). Dari persamaan (5) dan (6) maka diperoleh $\frac{dx_1}{dt} = 0$. Kemudian dengan mensubstitusikan $x_1 = 0$ ke dalam persamaan (6) diperoleh

$$\frac{dx_2}{dt} = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{k_2}\right) = 0 \quad (7)$$

Karena $x_2 \neq 0$, maka diperoleh $x_2 = k_2$. Dengan demikian diperoleh titik setimbang kepunahan spesies pertama $\boldsymbol{\varepsilon}_{11}(x_1, x_2) = (\mathbf{0}, k_2)$.

3. **Titik setimbang kepunahan spesies kedua** mengindikasikan suatu kondisi ketika tidak adanya populasi spesies kedua ($x_2 = 0, x_1 \neq 0$). Dari persamaan (5) dan (6) maka diperoleh $\frac{dx_2}{dt} = 0$. Kemudian dengan mensubstitusikan $x_2 = 0$ ke dalam persamaan (5) diperoleh

$$\frac{dx_1}{dt} = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k_1}\right) - q E x_1 = 0 \quad (8)$$

Karena $x_1 \neq 0$, maka diperoleh $x_1 = \frac{k_1(r_1 - qE)}{r_1}$. Dengan demikian diperoleh titik setimbang kepunahan spesies kedua $\boldsymbol{\varepsilon}_{12}(x_1, x_2) = \left(\frac{k_1(r_1 - qE)}{r_1}, \mathbf{0}\right)$ yang akan eksis apabila memenuhi $r_1 > qE$.

4. **Titik setimbang koeksistensi** mengindikasikan suatu kondisi dimana kedua spesies hidup berdampingan dalam suatu ekosistem ($x_1, x_2 \neq 0$). Dari persamaan (5) dan (6) diperoleh

titik setimbang koeksistensi $\varepsilon_{14}(x_1, x_2) = \left(\frac{k_1(-r_1 + a_1x_2 + qE)}{-r_1 - k_1\gamma_1x_2}, \frac{k_2(-r_2 + a_2x_1)}{-r_2 - k_2\gamma_2x_1} \right)$. Kemudian

dengan mensubstitusikan x_2 ke x_1 , diperoleh persamaan kuadrat berikut,

$$mx_1^2 + nx_1 + p = 0 \quad (9)$$

dengan

$$m = r_1k_2\gamma_2 - k_1\gamma_1k_2a_2$$

$$n = r_1r_2 + k_1\gamma_1k_2r_2 - r_1k_1k_2\gamma_2 - a_1a_2k_2 + qEk_2\gamma_2$$

$$p = -k_1r_1r_2 + a_1k_2r_2 + qEr_2$$

Titik setimbang ε_{14} akan eksis jika $x_1, x_2 > 0$ sehingga akan ditentukan syarat agar x_1 bernilai positif. Persamaan (9) akan diselidiki apakah persamaan tersebut memiliki akar bilangan real positif.

Misalkan x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan (9), sehingga berlaku sifat $x_1x_2 = \frac{p}{m}$. Berdasarkan sifat akar persamaan kuadrat, suatu persamaan kuadrat memiliki tepat satu akar real positif jika hasil kali akar-akarnya bernilai negatif. Dari sini diperoleh $\frac{-k_1r_1r_2 + a_1k_2r_2 + qEr_2}{r_1k_2\gamma_2 - k_1\gamma_1k_2a_2} < 0$.

Dengan demikian titik setimbang ε_{14} akan eksis jika memenuhi syarat $a_1k_2r_2 + qEr_2 < k_1r_1r_2$ dan $r_1k_2\gamma_2 > k_1\gamma_1k_2a_2$, atau $a_1k_2r_2 + qEr_2 > k_1r_1r_2$ dan $r_1k_2\gamma_2 < k_1\gamma_1k_2a_2$.

Titik setimbang ε_{14} juga akan eksis jika $x_2 = \frac{k_2(-r_2 + a_2x_1)}{-r_2 - k_2\gamma_2x_1} > 0$, karena semua parameter bernilai positif, maka $-(r_2 + k_2\gamma_2x_1) < 0$. Dengan demikian agar $x_2 > 0$ maka

$$k_2(-r_2 + a_2x_1) < 0 \Leftrightarrow x_1 < \frac{r_2}{a_2}.$$

Dengan demikian titik setimbang ε_{14} akan eksis jika memenuhi syarat:

i. a) $a_1k_2r_2 + qEr_2 < k_1r_1r_2$ dan $r_1k_2\gamma_2 > k_1\gamma_1k_2a_2$, atau

b) $a_1k_2r_2 + qEr_2 > k_1r_1r_2$ dan $r_1k_2\gamma_2 < k_1\gamma_1k_2a_2$

ii. $0 < x_1 < \frac{r_2}{a_2}$

3.1.2. Titik Setimbang Model Kedua

Model kedua akan memiliki titik setimbang jika memenuhi memenuhi $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = 0$, dengan demikian,

$$\frac{dx_1}{dt} = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k_1}\right) - a_1 x_1 x_2 - \frac{\gamma_1 x_1^2 x_2}{1 + x_1^2} - qE x_1 = 0 \quad (10)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{k_2}\right) - a_2 x_1 x_2 - \frac{\gamma_2 x_1 x_2^2}{1 + x_2^2} = 0 \quad (11)$$

Dari persamaan (10) dan (11) diperoleh empat titik setimbang sebagai berikut:

1. **Titik setimbang kepunahan** mengindikasikan suatu kondisi ketika populasi spesies pertama dan spesies kedua dalam keadaan punah $x_1, x_2 = 0$. Dari sini diperoleh titik setimbang kepunahan $\varepsilon_{2_0}(x_1, x_2) = (0, 0)$.
2. **Titik setimbang kepunahan spesies pertama** mengindikasikan suatu kondisi ketika tidak adanya populasi spesies pertama ($x_1 = 0, x_2 \neq 0$), maka diperoleh $\frac{dx_1}{dt} = 0$. Kemudian dengan mensubstitusikan $x_1 = 0$ ke dalam persamaan (11) maka diperoleh

$$\frac{dx_2}{dt} = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{k_2}\right) = 0 \quad (12)$$

Karena $x_2 \neq 0$, maka diperoleh $x_2 = k_2$. Dengan demikian diperoleh titik setimbang kepunahan spesies pertama $\varepsilon_{2_1}(x_1, x_2) = (0, k_2)$.

3. **Titik setimbang kepunahan spesies kedua** mengindikasikan suatu kondisi ketika tidak adanya populasi spesies kedua ($x_1 \neq 0, x_2 = 0$), sehingga diperoleh $\frac{dx_2}{dt} = 0$. Kemudian dengan mensubstitusikan $x_2 = 0$ ke dalam persamaan (10) maka diperoleh

$$\frac{dx_1}{dt} = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k_1}\right) - qE x_1 = 0 \quad (13)$$

Karena $x_1 \neq 0$, maka diperoleh $x_1 = \frac{k_1(r_1 - qE)}{r_1}$. Dengan demikian diperoleh titik setimbang

kepunahan spesies kedua $\varepsilon_{2_2}(x_1, x_2) = \left(\frac{k_1(r_1 - qE)}{r_1}, 0\right)$ yang akan eksis apabila memenuhi

$$r_1 > qE.$$

4. **Titik setimbang koeksistensi** mengindikasikan suatu kondisi dimana kedua spesies hidup berdampingan dalam suatu ekosistem ($x_1, x_2 \neq 0$). Dari persamaan (10) dan (11) diperoleh titik setimbang koeksistensi (ε_{2_3}) yang memenuhi persamaan

$$x_1^3 + Ax_1^2 + Bx_1 + A = 0 \quad (14)$$

$$x_2^3 + Cx_2^2 + Dx_2 + C = 0 \quad (15)$$

Dengan

$$A = -k_1 + \frac{k_1 a_1 x_2}{r_1} + \frac{k_1 qE}{r_1}$$

$$B = 1 + \frac{k_1 \gamma_1 x_2}{r_1}$$

$$C = -k_2 + \frac{a_2 x_1 k_2}{r_2}$$

$$D = 1 + \frac{k_2 \gamma_2 x_1}{r_2}$$

Menurut Aturan Descartes, persamaan (14) dan persamaan (15) akan memiliki paling tidak satu akar real positif jika variasi perubahan tanda koefisien polinomnya lebih dari satu atau sama dengan satu. Karena pada persamaan (14), $B > 0$, maka agar ada perubahan tanda pada koefisien polinomnya, A harus bernilai negatif sehingga $A = -k_1 + \frac{k_1 a_1 x_2}{r_1} + \frac{k_1 q E}{r_1} < 0 \Leftrightarrow x_2 < \frac{-qE + r_1}{a_1}$. Begitu pula dengan persamaan (15), karena $D > 0$ maka agar terdapat perubahan tanda koefisien polinomnya, C harus bernilai negatif sehingga $C = -k_2 + \frac{a_2 x_1 k_2}{r_2} < 0 \Leftrightarrow x_1 < \frac{r_2}{a_2}$. Dengan demikian titik setimbang koeksistensi akan eksis jika memenuhi syarat $0 < x_1 < \frac{r_2}{a_2}$ dan $0 < x_2 < \frac{-qE + r_1}{a_1}$.

3.2. Kestabilan Model

3.2.1. Kestabilan Model Pertama

Langkah untuk menentukan kestabilan dari titik setimbang model pertama adalah dengan mensubstitusikan titik setimbang $\varepsilon_{10}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}$ dan ε_{14} ke dalam matriks Jacobian dari persamaan (1) dan (2), yakni

$$J = \begin{bmatrix} r_1 \left(1 - \frac{x_1}{k_1}\right) - \frac{r_1 x_1}{k_1} - x_2 a_1 - 2\gamma_1 x_1 x_2 - qE & -x_1(a_1 + \gamma_1 x_1) \\ -x_2(a_2 + \gamma_2 x_2) & r_2 \left(1 - \frac{x_2}{k_2}\right) - \frac{r_2 x_2}{k_2} - a_2 x_1 - 2\gamma_2 x_1 x_2 \end{bmatrix}$$

1. Kestabilan Lokal Titik Setimbang Kepunahan (ε_{10})

Berikut matriks Jacobian setelah disubstitusikan dengan titik setimbang kepunahan $\varepsilon_{10}(x_1, x_2) = (0, 0)$

$$J(\varepsilon_{10}) = \begin{bmatrix} r_1 - qE & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, didapat persamaan karakteristik melalui $|\lambda I - J(\varepsilon_{10})| = 0$ sebagai berikut

$$(\lambda - r_1 + qE)(\lambda - r_2) = 0 \quad (16)$$

Dari persamaan karakteristik (16) diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = r_2 \text{ dan } \lambda_2 = r_1 - qE.$$

Berdasarkan Teorema 2.9, syarat agar titik setimbang kepunahan stabil asimtotis adalah semua nilai eigen harus negatif. Karena terdapat nilai eigen $\lambda_1 = r_2 > 0$ maka titik setimbang kepunahan (ε_{10}) tidak stabil asimtotis.

2. Kestabilan Lokal Titik Setimbang Kepunahan Spesies Pertama (ε_{1_1})

Berikut matriks Jacobian setelah disubstitusikan dengan titik setimbang kepunahan spesies pertama $\varepsilon_{1_1}(x_1, x_2) = (0, k_2)$

$$J(\varepsilon_{1_1}) = \begin{bmatrix} r_1 - k_2\alpha_1 - qE & 0 \\ -\alpha_2k_2 - \gamma_2k_2^2 & -r_2 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, didapat persamaan karakteristik melalui $|\lambda I - J(\varepsilon_{1_1})| = 0$ sebagai berikut

$$(\lambda - r_1 + k_2\alpha_1 + qE)(\lambda + r_2) = 0. \quad (17)$$

Dari persamaan karakteristik (17) diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = r_1 - k_2\alpha_1 - qE \text{ dan } \lambda_2 = -r_2.$$

Dengan cara yang sama seperti sebelumnya, maka diperoleh $\lambda_1 = r_1 - k_2\alpha_1 + qE$ dan $\lambda_2 = -r_2 < 0$. Titik setimbang kepunahan spesies pertama (ε_{1_1}) akan stabil asimtotis jika $r_1 < k_2\alpha_1 + qE$.

3. Kestabilan Lokal Titik Setimbang Kepunahan Spesies Kedua (ε_{1_2})

Berikut matriks Jacobian setelah disubstitusikan dengan titik setimbang kepunahan spesies kedua

$$\varepsilon_{1_2}(x_1, x_2) = \left(-\frac{k_1(Eq - r_1)}{r_1}, 0 \right)$$

$$J(\varepsilon_{1_2}) = \begin{bmatrix} r_1 \left(1 + \frac{-r_1 + qE}{r_1} \right) - r_1 & \frac{a_1k_1(-r_1 + qE)a_1 - \gamma_1k_1^2(-r_1 + qE)^2}{r_1} \\ 0 & r_2 + \frac{a_2k_1(-r_1 + qE)}{r_1} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, didapat persamaan karakteristik melalui $|\lambda I - J(\varepsilon_{1_2})| = 0$ sebagai berikut

$$\left(\lambda - r_1 \left(1 + \frac{-r_1 + qE}{r_1} \right) + r_1 \right) \left(\lambda - r_2 - \frac{a_2k_1(-r_1 + qE)}{r_1} \right) = 0 \quad (18)$$

Dari persamaan karakteristik (18) diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = -r_1 + qE \text{ dan } \lambda_2 = \frac{r_2r_1 - a_2k_1r_1 + a_2k_1qE}{r_1}$$

Dengan menggunakan cara yang sama seperti sebelumnya, diperoleh $\lambda_1 = -r_1 + qE < 0$ dan $\lambda_2 = \frac{r_2r_1 - a_2k_1r_1 + a_2k_1qE}{r_1} < 0$. Titik setimbang kepunahan spesies kedua (ε_{1_2}) akan stabil asimtotis

jika $r_1 > qE$ dan $r_2 < \frac{a_2k_1(r_1 - qE)}{r_1}$.

4. Kestabilan Lokal Titik Setimbang Koeksistensi (ε_{1_3})

Kestabilan lokal pada titik setimbang koeksistensi (ε_{1_3}) diperoleh dengan cara mensubstitusikan nilai titik setimbang yaitu $\varepsilon_{1_3} = (x_1, x_2)$ ke dalam matriks Jacobian, sehingga diperoleh

$$J(\varepsilon_{1_3}) = \begin{pmatrix} -\frac{r_1\gamma_1}{k_1} - \gamma_1 x_1 x_2 & -a_1 x_1 - \gamma_1 x_1^2 \\ -a_2 x_2 - \gamma_2 x_2^2 & -\frac{r_2 x_2}{k_2} - \gamma_2 x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, matriks Jacobian $J(\varepsilon_{1_3})$ tersebut dibentuk menjadi persamaan karakteristik melalui $\det(\lambda I - J(\varepsilon_{1_3})) = 0$ sebagai berikut

$$\lambda^2 + m\lambda + n = 0 \quad (19)$$

dengan

$$m = \frac{k_1\gamma_2 x_1 x_2 k_2 + r_1 x_1 k_2 + k_1 r_2 x_2 + \gamma_1 x_1 x_2 k_1 k_2}{k_1 k_2}$$

$$n = \frac{r_1 x_1 r_2 x_2 + r_1 x_1^2 \gamma_2 x_2 k_2 - x_2 k_1 k_2 \gamma_1 x_1^2 a_2 + \gamma_1 x_1 x_2^2 k_1 r_2 - x_2 k_1 k_2 a_1 x_1 a_2 + x_2^2 k_1 k_2 a_1 x_1 \gamma^2}{k_1 k_2}$$

Titik setimbang ε_{1_3} akan stabil asimtotis jika dan hanya jika persamaan (19) memiliki akar-akar negatif. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, akar-akar persamaan (19) akan memiliki tanda bagian real negatif jika dan hanya jika, $m, n > 0$ dan $mn > 0$. Berdasarkan syarat-syarat tersebut diperoleh beberapa hal sebagai berikut :

i. Jelas bahwa $k_1, k_2, r_1, r_2, x_1, x_2, \gamma_1, \gamma_2, a_1, a_2 > 0$, sehingga nilai m dijamin positif atau $m > 0$.

Koefisien n akan dijamin positif dengan syarat :

$$\frac{r_1 x_1 r_2 x_2 + r_1 x_1^2 \gamma_2 x_2 k_2 - x_2 k_1 k_2 \gamma_1 x_1^2 a_2 + \gamma_1 x_1 x_2^2 k_1 r_2 - x_2 k_1 k_2 a_1 x_1 a_2 + x_2^2 k_1 k_2 a_1 x_1 \gamma^2}{k_1 k_2} > 0$$

$$\Leftrightarrow x_2 > \frac{(k_1 k_2 \gamma_1 a_2 - r_1 \gamma_2 k_2) x_1 + k_1 k_2 a_1 a_2 - r_1 r_2}{(\gamma_1 k_1 r_2 + k_1 k_2 a_1 \gamma^2)}$$

ii. Selanjutnya, akan ditentukan syarat agar $mn > 0$.

$$mn > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k_1 \gamma_2 x_1 x_2 k_2 + r_1 x_1 k_2 + k_1 r_2 x_2 + \gamma_1 x_1 x_2 k_1 k_2)(r_1 x_1 r_2 x_2 + r_1 x_1^2 \gamma_2 x_2 k_2 - x_2 k_1 k_2 \gamma_1 x_1^2 a_2 + \gamma_1 x_1 x_2^2 k_1 r_2 - x_2 k_1 k_2 a_1 x_1 a_2 + x_2^2 k_1 k_2 a_1 x_1 \gamma^2)}{k_1^2 k_2^2} > 0$$

Karena $(k_1 \gamma_2 x_1 x_2 k_2 + r_1 x_1 k_2 + k_1 r_2 x_2 + \gamma_1 x_1 x_2 k_1 k_2), k_1^2 k_2^2 > 0$ maka

$$\frac{r_1 x_1 r_2 x_2 + r_1 x_1^2 \gamma_2 x_2 k_2 - x_2 k_1 k_2 \gamma_1 x_1^2 a_2 + \gamma_1 x_1 x_2^2 k_1 r_2 - x_2 k_1 k_2 a_1 x_1 a_2 + x_2^2 k_1 k_2 a_1 x_1 \gamma^2}{k_1 k_2} > 0$$

$$\Leftrightarrow x_2 > \frac{(k_1 k_2 \gamma_1 a_2 - r_1 \gamma_2 k_2) x_1 + k_1 k_2 a_1 a_2 - r_1 r_2}{(\gamma_1 k_1 r_2 + k_1 k_2 a_1 \gamma^2)}$$

Dari uraian di atas, dapat disimpulkan bahwa titik setimbang koeksistensi stabil asimtotis jika memenuhi $x_2 > \frac{(k_1 k_2 \gamma_1 a_2 - r_1 \gamma_2 k_2) x_1 + k_1 k_2 a_1 a_2 - r_1 r_2}{(\gamma_1 k_1 r_2 + k_1 k_2 a_1 \gamma^2)}$.

3.2.1 Kestabilan Model Kedua

Langkah untuk menentukan kestabilan dari titik setimbang model kedua adalah dengan mensubstitusikan titik setimbang $\varepsilon_{20}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22},$ dan ε_{23} ke dalam matriks Jacobian dari persamaan (5) dan (6), yakni

$$J = \begin{bmatrix} w_1 & -x_1 w_2 \\ -x_2 w_3 & w_4 \end{bmatrix} \quad (20)$$

dengan :

$$w_1 = r_1 \left(1 - \frac{x_1}{k_1} \right) - \frac{r_1 x_1}{k_1} - x_2 a_1 - \frac{2\gamma_1 x_1 x_2}{1 + x_1^2} + \frac{2\gamma_1 x_1^3 x_2}{(1 + x_1^2)^2} - qE$$

$$w_2 = a_1 + \frac{\gamma_1 x_1}{1 + x_1^2}$$

$$w_3 = a_2 + \frac{\gamma_2 x_2}{1 + x_2^2}$$

$$w_4 = r_2 \left(1 - \frac{x_2}{k_2} \right) - \frac{r_2 x_2}{k_2} - a_2 x_1 - \frac{2\gamma_2 x_1 x_2}{1 + x_2^2} + \frac{2\gamma_2 x_1 x_2^3}{(1 + x_2^2)^2}$$

1. Kestabilan Lokal Titik Setimbang Kepunahan Spesies Pertama (ε_{21})

Berikut matriks Jacobian setelah disubstitusikan dengan titik setimbang kepunahan spesies pertama $\varepsilon_{21}(x_1, x_2) = (0, k_2)$

$$J(\varepsilon_{21}) = \begin{bmatrix} r_1 - k_2 \alpha_1 - qE & 0 \\ -\alpha_2 k_2 - \frac{\gamma_2 k_2^2}{1 + k_2^2} & -r_2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, diperoleh persamaan karakteristik melalui $|\lambda I - J(\varepsilon_{21})| = 0$ sebagai berikut

$$(\lambda - r_1 + k_2 \alpha_1 + qE)(\lambda + r_2). \quad (21)$$

Dari persamaan karakteristik (20) diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = r_1 - k_2 \alpha_1 - qE$ dan $\lambda_2 = -r_2$.

Dengan cara yang sama seperti sebelumnya, diperoleh $\lambda_1 = r_1 < k_2 \alpha_1 + qE$ dan $\lambda_2 = -r_2 < 0$.

Titik setimbang kepunahan spesies pertama (ε_{21}) akan stabil asimtotis jika $r_1 < k_2 \alpha_1 + qE$.

2. Kestabilan Lokal Titik Setimbang Kepunahan Spesies Kedua (ε_{2_2})

Berikut matriks Jacobian setelah disubstitusikan dengan titik setimbang kepunahan

$$\varepsilon_{2_2}(x_1, x_2) = \left(-\frac{k_1(Eq - r_1)}{r_1}, 0 \right)$$

$$J(\varepsilon_{2_2}) = \begin{vmatrix} r_1 \left(1 + \frac{-r_1 + qE}{r_1} \right) - r_1 & \frac{k_1(-r_1 + qE)a_1}{r_1} - \frac{\gamma_1 k_1^2 (-r_1 + qE)^2}{r_1^2 \left(1 + \frac{k_1^2 (-r_1 + qE)^2}{r_1^2} \right)} \\ 0 & r_2 + \frac{a_2 k_1 (-r_1 + qE)}{r_1} \end{vmatrix}$$

Selanjutnya, diperoleh persamaan karakteristik melalui $|\lambda I - J(\varepsilon_{2_2})| = 0$ sebagai berikut

$$\left(\lambda - r_1 \left(1 + \frac{-r_1 + qE}{r_1} \right) \right) \left(\lambda - r_2 - \frac{a_2 k_1 (-r_1 + qE)}{r_1} \right). \quad (23)$$

Dari persamaan karakteristik (21) diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = -r_1 + qE \text{ dan } \lambda_2 = \frac{r_2 r_1 - a_2 k_1 r_1 + a_2 k_1 qE}{r_1}.$$

Dengan cara yang sama seperti sebelumnya, diperoleh $\lambda_1 = -r_1 + qE < 0$ dan

$\lambda_2 = \frac{r_2 r_1 - a_2 k_1 r_1 + a_2 k_1 qE}{r_1} < 0$. Titik setimbang kepunahan spesies kedua (ε_{2_2}) akan stabil asimtotis

jika $r_1 > qE$ dan $r_2 < \frac{a_2 k_1 (r_1 - qE)}{r_1}$.

3. Kestabilan Lokal Titik Setimbang Koeksistensi (ε_{2_3})

Berdasarkan uraian titik setimbang yang telah di dapat, untuk mengetahui kestabilan dari titik setimbang koeksistensi (ε_{2_3}) secara analitik melalui analisis nilai eigen sulit ditentukan.

Dengan demikian penulis menggunakan metode numerik untuk menentukan kestabilan dari titik setimbang koeksistensi dengan menggunakan *software* Matlab 7.0. Simulasi ini dilakukan dengan memberi nilai parameter dan tiga nilai awal untuk $x_1(0)$ dan $x_2(0)$ yang diketahui. Berikut adalah tabel nilai awal dan nilai parameter yang digunakan (Tabel 1 dan Tabel 2).

Simulasi ini dilakukan pada waktu $t = 0$ hingga $t = 200$.

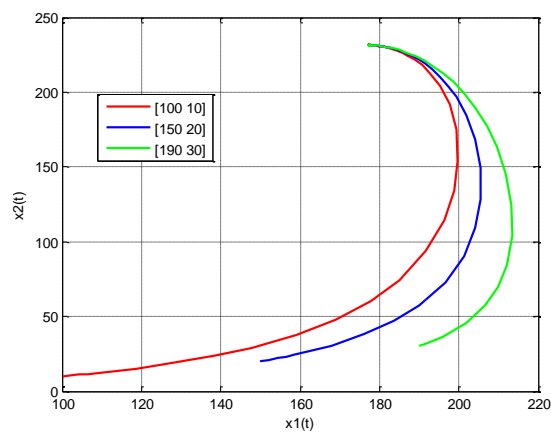
Tabel 1. Nilai awal

| Nilai Awal | $x_1(0)$ | $x_2(0)$ | Warna |
|------------|----------|----------|-------|
| 1 | 100 | 10 | Merah |
| 2 | 150 | 20 | Biru |
| 3 | 190 | 30 | Hijau |

Tabel 2. Nilai parameter model matematika persaingan dua spesies dengan adanya toksisitas dan pemanenan selektif

| Parameter | Nilai | Sumber |
|------------|--------|----------------|
| r_1 | 3,98 | Pal dkk (2017) |
| r_2 | 4,86 | Pal dkk (2017) |
| α_1 | 0,004 | Pal dkk (2017) |
| α_2 | 0,002 | Pal dkk (2017) |
| k_1 | 300 | Pal dkk(2017) |
| k_2 | 250 | Pal dkk (2017) |
| γ_1 | 0,0002 | Asumsi |
| γ_2 | 0,0002 | Asumsi |
| q | 0,05 | Pal dkk (2017) |
| E | 14 | Pal dkk (2017) |

Berikut ini adalah hasil simulasi numerik dari bidang fase titik setimbang koeksistensi

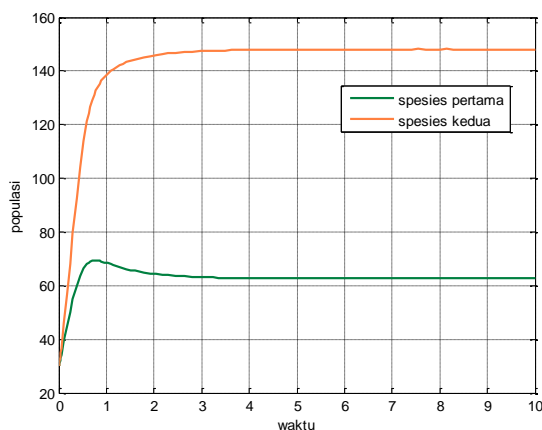


Gambar 1. Grafik bidang fase populasi x_1 dan x_2 pada model matematika persaingan dua spesies dengan adanya toksisitas dan pemanenan selektif dengan Holling tipe III.

Gambar 1 menyajikan grafik bidang fase populasi spesies pertama dan spesies kedua pada model matematika persaingan dua spesies dengan adanya toksisitas dan pemanenan selektif dengan syarat eksistensi (ϵ_{2_3}). Berdasarkan gambar tersebut dengan ketiga nilai awal yang digunakan menunjukkan bahwa semua grafiknya cenderung menuju ke titik setimbang koeksistensi spesies pertama dan spesies kedua yaitu titik (177, 231), dengan kata lain grafik tersebut konvergen. Dengan demikian model tersebut cenderung stabil asimtotis pada titik setimbang koeksistensi.

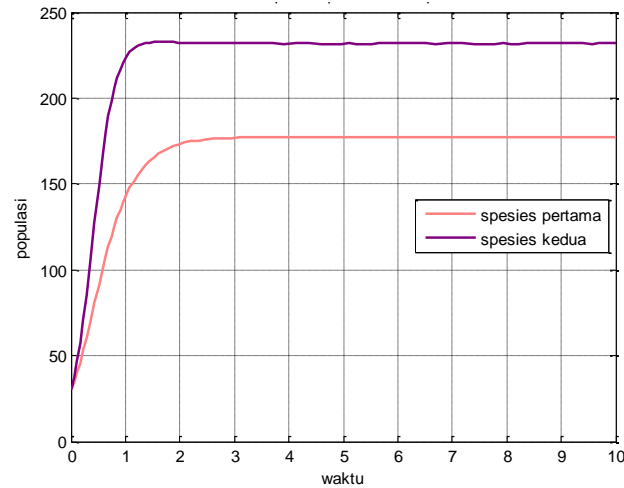
4. Simulasi Numerik

Pada subbab ini, disimulasikan perbandingan model pertama dan model kedua menggunakan bantuan program MATLAB 7.0. Simulasi dilakukan dalam $t = 10$, dengan nilai awal $(x_1(0), x_2(0)) = (30, 30)$ dan nilai parameter yang digunakan sama dengan nilai parameter untuk simulasi bidang fase. Berikut merupakan hasil simulasi numerik model pertama.

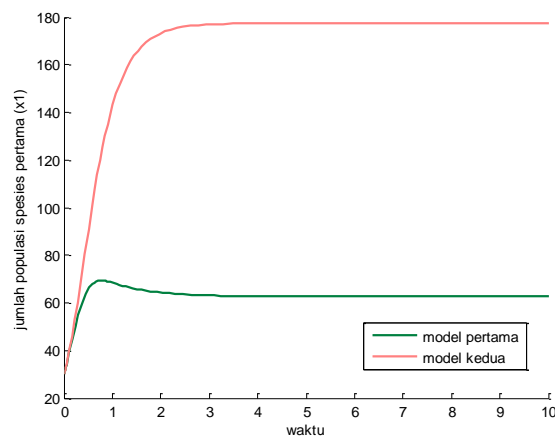


Gambar 2. Dinamika populasi spesies pertama (x_1) dan spesies kedua (x_2) pada model matematika persaingan dua spesies dengan adanya toksisitas dan pemanenan selektif

Gambar 2 menyajikan grafik antara spesies pertama dan spesies kedua selama $t = 10$. Dari gambar terlihat bahwa spesies pertama dan spesies kedua sempat mengalami kenaikan selama beberapa waktu karena ada pertumbuhan alami dari kedua spesies tersebut. Namun setelah itu, jumlah spesies pertama mengalami penurunan yang menyebabkan peningkatan pada spesies kedua akibat adanya persaingan antar kedua spesies. Kemudian kedua spesies cenderung konstan pada suatu titik yang menunjukkan jumlah populasi di akhir pengamatan, yakni spesies pertama sebanyak 62 spesies dan spesies kedua sebanyak 148 spesies. Pada Gambar 3 disajikan hasil simulasi dari model kedua. Gambar ini menyajikan grafik antara spesies pertama dan spesies kedua selama $t = 10$. Dari gambar terlihat bahwa spesies pertama dan spesies kedua sempat mengalami kenaikan selama beberapa waktu karena ada pertumbuhan alami dari kedua spesies tersebut. Kemudian kedua spesies cenderung konstan pada suatu titik yang menunjukkan jumlah populasi di akhir pengamatan, yakni spesies pertama sebanyak 177 spesies dan spesies kedua sebanyak 231 spesies. Selanjutnya pada Gambar 4 disajikan hasil simulasi numerik perbandingan dari kedua model.



Gambar 3. Dinamika populasi spesies pertama (x_1) dan spesies kedua (x_2) pada model matematika persaingan dua spesies dengan adanya toksisitas dan pemanenan selektif dengan Holling Tipe III

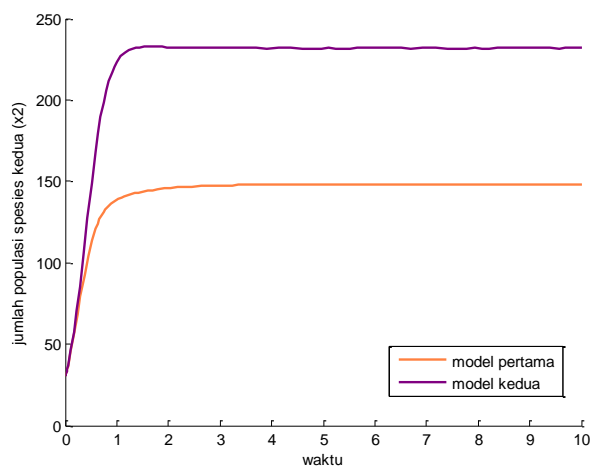


Gambar 4. Dinamika populasi spesies pertama (x_1)

Gambar 4 di atas menunjukkan perbandingan jumlah populasi spesies pertama sebelum dan setelah dimodifikasi dengan Holling tipe III. Terlihat adanya perbedaan pada model pertama dan Perubahan jumlah populasi spesies pertama pada model kedua mengalami peningkatan yang cukup besar dibanding pada model pertama. Begitu pula di akhir waktu pengamatan, jumlah populasi spesies pertama cenderung lebih tinggi daripada jumlah populasi spesies pertama pada model pertama (Tabel 3). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa dengan adanya fungsi respon Holling tipe III, dapat meningkatkan jumlah populasi spesies pertama karena adanya aktivitas pencarian spesies kedua yang lain ketika spesies kedua mulai berkurang.

Tabel 3. Perbandingan jumlah populasi spesies pertama (x_1) saat waktu $t = 10$

| Kondisi | Jumlah Populasi Spesies Pertama (x_1) |
|---------------|---|
| Model Pertama | 62 |
| Model Kedua | 177 |

Gambar 5. Dinamika populasi spesies kedua (x_2)

Grafik pada Gambar 5 menunjukkan perbandingan jumlah populasi spesies pertama sebelum dan setelah dimodifikasi dengan Holling tipe III. Terlihat bahwa adanya perbedaan pada model pertama dan model kedua. Perubahan jumlah populasi spesies kedua pada model kedua mengalami peningkatan yang cukup besar dibanding pada model pertama. Begitu pula di akhir waktu pengamatan, jumlah populasi spesies kedua cenderung lebih banyak daripada jumlah populasi spesies kedua pada model pertama (Tabel 4). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa dengan adanya fungsi respon Holling tipe III, dapat meningkatkan jumlah populasi spesies kedua karena adanya aktivitas pencarian spesies pertama yang lain ketika spesies pertama mulai berkurang .

Tabel 4. Perbandingan jumlah populasi spesies kedua (x_2) saat waktu $t = 10$

| Kondisi | Jumlah Populasi Spesies Kedua (x_2) |
|---------------|---|
| Model Pertama | 148 |
| Model Kedua | 231 |

5. Simpulan

Berdasarkan hasil pembahasan diperoleh simpulan sebagai berikut:

1. Model matematika persaingan dua spesies dengan adanya toksisitas dan pemanenan selektif memiliki empat titik setimbang, yakni :
 - a. Titik setimbang kepunahan $\varepsilon_{10}(x_1, x_2) = (0,0)$, yang bersifat tidak stabil.
 - b. Titik setimbang kepunahan spesies pertama $\varepsilon_{11}(x_1, x_2) = (0, k_2)$ yang bersifat stabil asimtotis jika $r_1 < k_2\alpha_1 - qE$
 - c. Titik setimbang kepunahan spesies kedua $\varepsilon_{12}(x_1, x_2) = \left(\frac{k_1(r_1 - qE)}{r_1}, 0\right)$ yang bersifat stabil asimtotis jika $r_1 > qE$ dan $r_2 < \frac{a_2k_1(r_1 - qE)}{r_1}$
 - d. Titik setimbang koeksistensi $\varepsilon_{13}(x_1, x_2) = \left(\frac{k_1(-r_1 + a_1x_2 + qE)}{-r_1 - k_1\gamma_1x_2}, \frac{k_2(-r_2 + a_2x_1)}{-r_2 - k_2\gamma_2x_1}\right)$ cenderung stabil asimtotis jika $x_2 > \frac{(k_1k_2\gamma_1a_2 - r_1\gamma_2k_2)x_1 + k_1k_2a_1a_2 - r_1r_2}{(\gamma_1k_1r_2 + k_1k_2a_1\gamma^2)}$.
2. Model matematika persaingan dua spesies dengan adanya toksisitas dan pemanenan selektif dengan Holling tipe III memiliki empat titik setimbang, yakni :
 - a. Titik setimbang kepunahan $\varepsilon_{10}(x_1, x_2) = (0,0)$, yang bersifat tidak stabil.
 - b. Titik setimbang kepunahan spesies pertama $\varepsilon_{11}(x_1, x_2) = (0, k_2)$ yang bersifat stabil asimtotis jika $r_1 < k_2\alpha_1 - qE$
 - c. Titik setimbang kepunahan spesies kedua $\varepsilon_{12}(x_1, x_2) = \left(\frac{k_1(r_1 - qE)}{r_1}, 0\right)$ yang bersifat stabil asimtotis jika $r_1 > qE$ dan $r_2 < \frac{a_2k_1(r_1 - qE)}{r_1}$
 - d. Titik setimbang koeksistensi $\varepsilon_{24}(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ yang memenuhi persamaan

$$x_1^3 + \left(-k_1 + \frac{k_1a_1x_2}{r_1} + \frac{k_1qE}{r_1}\right)x_1^2 + \left(1 + \frac{k_1\gamma_1x_2}{r_1}\right)x_1 + \left(-k_1 + \frac{k_1a_1x_2}{r_1} + \frac{k_1qE}{r_1}\right) = 0$$

$$x_2^3 + \left(-k_2 + \frac{a_2x_1k_2}{r_2}\right)x_2^2 + \left(d_3 = 1 + \frac{k_2\gamma_2x_1}{r_2}\right)x_2 + -k_2 + \frac{a_2x_1k_2}{r_2} = 0$$
 yang cenderung stabil asimtotis pada titik setimbang koeksistensi ε_{24} .
3. Pada perbandingan simulasi numerik model matematika persaingan dua spesies sebelum dan sesudah dimodifikasi dengan Holling tipe III, nampak bahwa terjadi peningkatan jumlah populasi spesies pertama (x_1) dan spesies kedua (x_2) pada model dengan Holling tipe III

dibandingkan dengan model sebelum modifikasi yang cenderung lebih sedikit dan tidak ada peningkatan yang cukup pesat pada jumlah populasi kedua spesies.

6. Daftar Pustaka

- [1] N. H. T. Siahaan, *Hukum Lingkungan dan Ekologi Pembangunan*, Edisi Kedua. Jakarta: Erlangga, 2004.
- [2] O. J. Schmitz, *Ecology and Ecosystem Conservation*, First Edit. Washington DC.: Island Press, 2007.
- [3] D. Abdurahman, *Kelompok Pertanian dan Kesehatan*, vol. Edisi 1. Bandung, 2008.
- [4] X. Jing, Z. Liu, R. Yuan, and S. Ruan, "The Effects of Harvesting and Time Delay on Predator-Prey System with Holling type II Functiona Response," *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 70, pp. 1178–1200, 2009.
- [5] G. P. Samanta, "A Two Species Competitive System Under The Influence of Toxic Substances," *Appl. Math. Comput.*, vol. 216, pp. 291–299, 2010.
- [6] D. Pal, G. P. Samanta, and G. S. Mahapatra, "Selective Harvesting of Two Competing Fish Species in the Presence of Toxicity with Time Delay," *Appl. Math. Comput.*, vol. 313, pp. 74–93, 2017.