J. Math. and Its Appl.
ISSN: 1829-605X
Vol. 3, No. 1, May 2006, 27–40

Keterbatasan Operator Riesz di Ruang Morrey

Gani Gunawan*, Hendra Gunawan
Departemen Matematika
FMIPA ITB

Abstrak

Dengan menggunakan transformasi Fourier, didefinisikan operator $(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}, 0 < \alpha < n$, yang dikenal sebagai operator Riesz atau operator integral fraksional I_α , yaitu $I_\alpha := (-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}, 0 < \alpha < n$. Dalam makalah ini akan diperlihatkan bahwa aksi dari operator tersebut bersifat terbatas dari ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ ke ruang $L^q(\mathbb{R}^n)$ jika dan hanya jika dengan $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ dengan $1 < p < q < \infty$. Selanjutnya diperlihatkan juga bahwa operator tersebut terbatas di ruang perumumannya, khususnya di ruang Morrey.

Kata Kunci: *Operator Riesz, ruang Lebesgue, ruang Morrey*

1. Pendahuluan

Diasumsikan $f \in \mathcal{S}$, dengan $\mathcal{S}$ adalah himpunan fungsi yang terdiferensialkan tak hingga kali di $\mathbb{R}^n$. Transformasi Fourier dari fungsi f dinotasikan dengan $f^\wedge$, dan didefinisikan oleh

$$f^\wedge(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx, \qquad \forall\xi \in \mathbb{R}^n$$

*Jur. Mat. UNISBA, Mhs S2 Jur. Mat. ITB

Jika Δf menotasikan Laplacian dari f yang didefinisikan oleh $\Delta f := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, maka untuk suatu $\xi \in \mathbb{R}^n$, berlaku $(-\Delta f)^\wedge(\xi) = 4\pi^2|\xi|^2 f^\wedge(\xi)$, lihat ([5], halaman 308). Oleh karena itu melalui persamaan ini didefinisikan untuk $0 < \alpha < n$, $((-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} f)^\wedge(\xi) = (2\pi|\xi|)^{-\alpha} f^\wedge(\xi)$, untuk setiap $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Karena $(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} f = ((-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} f)^{\wedge\vee} = ((2\pi|\xi|)^{-\alpha} f^\wedge)^\vee$ dimana $(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} f)^{\wedge\vee}$ adalah invers transformasi Fourier dari $((-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} f)^\wedge$, maka untuk suatu $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\left((2\pi|\xi|)^{-\alpha} f^\wedge\right)^\vee (x) = \frac{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

Uraian dari invers transformasi tersebut dapat dilihat pada ([5], halaman 367) atau ([7], halaman 123). Menurut Stein (lihat [2], halaman 117), dituliskan bahwa

$$I_\alpha f := (-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} f, 0 < \alpha < n$$

Jadi

$$I_\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \tag{1}$$

dengan

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} 2^\alpha \Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{(n-\alpha)}{2})}$$

I_α pada Persamaan 1 selanjutnya dinamakan sebagai *operator Riesz* atau *operator integral fraksional.*

Dalam makalah ini akan dilihat bagaimana aksi dari operator tersebut jika dikenakan di ruang $L^p = L^p(\mathbb{R}^n)$ dan ruang perumumannya, khususnya di ruang Morrey. Adapun notasi $L^p = L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$ disebut juga ruang Lebesgue, yaitu himpunan kelas-kelas ekuivalen fungsi sedemikian sehingga $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty$, atau dapat ditulis $L^p(\mathbb{R}^n) := \{f : \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty\}$ dengan $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_p$ adalah norm dari f dan didefinisikan oleh $\|f\|_p := (\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx)^{1/p}$, untuk setiap $x \in \mathbb{R}^n$. Sedangkan norm dari f untuk $p = \infty$ didefinisikan oleh $\|f\|_\infty := ess \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}^n\}$ dengan $ess \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}^n\}$ merupakan batas atas terkecil esensial dari $|f|$.

Diawali dari suatu proposisi mengenai operator I_α di ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$, dapat diperlihatkan bahwa melalui operator dilasi yang dikenakan pada opertor I_α diperoleh suatu syarat perlu dari keterbatasan operator I_α di ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$. Kemudian dengan menggunakan fakta keterbatasan fungsi maksimal atau *ketaksamaan Hardy-Littlewood* di ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dapat ditunjukan juga bahwa operator I_α merupakan operator yang terbatas dari $L^p(\mathbb{R}^n)$ ke $L^q(\mathbb{R}^n)$ asalkan $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ dengan $1 < p < q < \infty$. Selanjutnya dengan menggunakan *ketaksamaan Fefferman-Stein*, dapat ditunjukan bahwa operator maksimal juga terbatas di ruang perumumannya, khususnya di ruang Morrey. Berdasar pada fakta ini, akhirnya diperoleh hasil bahwa operator I_α juga terbatas di ruang perumumannya, yakni terbatas di ruang Morrey.

2. Keterbatasan Operator I_α di Ruang Lebesgue

Pertama-tama akan kita lihat aksi dari operator I_α ini di ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ yang mempunyai sifat bahwa operator tersebut terbatas dari $L^p(\mathbb{R}^n)$ ke $L^q(\mathbb{R}^n)$ hanya jika $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$. Untuk melihat sifat ini kita pandang suatu operator dilasi τ_δ yang didefinisikan untuk $\delta > 0$ oleh $\tau_\delta f(x) := f(\delta x)$. Maka dapat dinyatakan suatu lemma berikut,

Lemma 2.1

$$\begin{array}{ll} (a) & \|\tau_\delta f\|_p = \delta^{-n/p}\|f\|_p \\ (b) & \tau_{\delta^{-1}} I_\alpha f = \delta^{-\alpha} I_\alpha \tau_{\delta^{-1}} f \end{array}$$

Bukti:
(a).

$$\begin{aligned} \|\tau_\delta f\|_p &= \left(\int_{\Re^n} (\tau_\delta f(x))^p dx\right)^{1/p} = \left(\int_{\Re^n} (f(\delta x))^p dx\right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{\Re^n} (f(x'))^p \delta^{-n} dx'\right)^{1/p} = \delta^{-n/p} \left(\int_{\Re^n} (f(x')^p dx'\right)^{1/p} \\ &= \delta^{-n/p}\|f\|_p \end{aligned}$$

(b).

$$\begin{aligned}
\tau_{\delta^{-1}} I_\alpha f(x) &= \tau_{\delta^{-1}}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\Re^n} |x-y|^{-n+\alpha} f(y)dy\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\Re^n} |\frac{x}{\delta}-y|^{-n+\alpha} f(y)dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\Re^n} |x-\delta y|^{-n+\alpha}\delta^{n-\alpha} f(y)dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\Re^n} |x-y'|^{-n+\alpha}\delta^{n}\delta^{-\alpha} f(\frac{y'}{\delta})dy \\
&= \delta^{-\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\Re^n} |x-y'|^{-n+\alpha} f(\frac{y'}{\delta})dy' \\
&= \delta^{-\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\Re^n} |x-y'|^{-n+\alpha} \tau_{\delta^{-1}} f(y')dy' \\
&= \delta^{-\alpha} I_\alpha \tau_{\delta^{-1}} f(x) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Akibat dari Lemma 2.1 tersebut diperoleh syarat perlu keterbatasan fungsi maksimal di ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ yang dinyatakan dalam proposisi berikut.

Proposisi 2.2 *Jika ketaksamaan*

$$\|I_\alpha f\|_q \leq A\|f\|_p, \qquad 0<\alpha<n \tag{2}$$

dipenuhi untuk setiap f dan untuk suatu konstanta A, maka $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{\alpha}{n}$.

Bukti:
Akibat dari Lemma 2.1 bagian (a), dapat ditulis $\|\tau_{\delta^{-1}} I_\alpha f\|_q = \delta^{n/q}\|I_\alpha f\|_q$ bahwa sehingga diperoleh

$$\|I_\alpha f\|_q = \delta^{-\frac{n}{q}}\|\tau_{\delta^{-1}} I_\alpha f\|_q$$

Menurut Lemma 2.1 bagian (b), $\tau_{\delta^{-1}} I_\alpha f(x) = \delta^{-\alpha} I_\alpha \tau_{\delta^{-1}} f(x)$, maka diperoleh

$$\|I_\alpha f\|_q = \delta^{-\frac{n}{q}}\|\tau_{\delta^{-1}} I_\alpha f\|_q = \delta^{-\frac{n}{q}}\|\delta^{-\alpha} I_\alpha \tau_{\delta^{-1}} f\|_q = \delta^{-\frac{n}{q}-\alpha}\|I_\alpha \tau_{\delta^{-1}} f\|_q$$

Karena Ketaksamaan 2 dipenuhi, maka diperoleh untuk suatu konstanta A (dalam hal ini A dapat diasumsikan sebagai konstanta terkecil yang memenuhi 2)

$$\|I_\alpha f\|_q \leq A\delta^{-\frac{n}{q}-\alpha}\|\tau_{\delta^{-1}} f\|_q \tag{3}$$

Menurut Lemma 2.1 bagian (a), $\|\tau_{\delta^{-1}} f\|_q = \delta^{\frac{n}{q}}\|f\|_q$. Jadi Ketaksamaan 3 dapat ditulis

$$\|I_\alpha f\|_q \leq A\delta^{-\frac{n}{p}-\frac{n}{q}-\alpha}\|f\|_q \tag{4}$$

Ini mungkin hanya jika $\frac{n}{p} - \frac{n}{q} - \alpha = 0$.

Diamati lebih lanjut, syarat cukup untuk proposisi tersebut juga dapat dipenuhi. Namun untuk kasus $p = 1$, (maka $q = \frac{n}{n-\alpha}$) dan $q = 8$, (maka $p = \frac{n}{\alpha}$) gagal untuk dapat dipenuhi, lihat ([2], halaman 119). Oleh karena itu, setelah melalui pengamatan ini dapat diformulasikan teorema positifnya, yang disebut teorema *Hardy-Littlewood-Sobolev.* Persisnya kita mempunyai suatu teorema berikut.

Teorema 2.3 *(Hardy-Littlewood-Sobolev) Jika* $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{\alpha}{n}$ *dan* $1 < p < q < \infty$ *dengan* $0 < \alpha < n$, *maka*

$$\|f^*|\cdot|^{\alpha-n}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq A_{p,q}\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

Sebelum membuktikan Teorema 2.3 tersebut, pertama-tama perhatikan beberapa definisi, sifat dan fakta yang ada sebagai konsep yang mendasarinya. Sebelumnya, didefinisikan *fungsi maksimal Hardy-Littlewood*,

$$Mf(x) := \sup_{0<R<\infty} \frac{1}{\mu(B(x,R))} \int\limits_{B(x,R)} |f(y)|\, dy, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

dengan $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, yaitu fungsi terintegralkan secara lokal di $\mathbb{R}^n$, dan $\mu(B(x,R))$ adalah ukuran Lebesgue $B(x,R)$ di $\mathbb{R}^n$. Dalam hal ini $B(R) = B(x,R)$ adalah bola buka di $\mathbb{R}^n$ yang berpusat di titik $x \in \mathbb{R}^n$ dengan radius $R > 0$, yaitu $B(x,R) := \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < R\}$, untuk setiap $x \in \mathbb{R}^n$ dan $R > 0$. Selanjutnya teorema *Hardy-Littlewood* berikut, yang menyatakan bahwa operator maksimal M tersebut terbatas di ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$, lihat [8].

Teorema 2.4 *(Hardy-Littlewood) Jika* $1 < p < \infty$ *dan* $f \in L^p$, *maka* $Mf \in L^p$ *dan* $\|Mf\|_p \leq C_{p,n}\|f\|_p$.

Definisi 2.5 *Fungsi* f *di* $\mathbb{R}^n$ *disebut fungsi radial jika nilai* $f(x)$ *hanya bergantung pada* $|x|$ *untuk* $x \in \mathbb{R}^n$.

Lemma 2.6 *Misalkan* ψ *fungsi non negatif di* $\mathbb{R}^n$. *Jika* ψ *fungsi radial yang turun, maka*

$$\sup\{|f^*\psi_t(x)| : t > 0\} \leq Mf(x) \int_{\mathbb{R}^n} \psi\, dy$$

dengan Mf *merupakan fungsi maksimal dan* $\psi_t = t^{-n}\psi(\frac{x}{t})$

Bukti:
Lihat ([3], halaman 57)

Lemma 2.7 *Jika f fungsi radial, maka*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ dx = \omega_{n-1} \int_0^\infty f(r) r^{n-1}\ dr, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

dengan $\omega_{n-1} = \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

Lihat ([5], halaman 407).

Lemma 2.8 *Misalkan $\phi(y) = |y|^{-k}\chi_{B(R)}(y)$, $y \in \mathbb{R}^n$ dan $y \neq 0$. Maka untuk setiap $R > 0$ dan $0 < k < n$,*

(i). ϕ adalah fungsi turun secara radial

(ii). ϕ terintegralkan

Bukti:

(i). Ambil $y_1,\ y_2$ dengan $0 < |y_1| < |y_2| \leq R$, maka $|y_1|^{-k} > |y_2|^{-k}$. Karena $\chi_{B(R)}(y) = 1$ untuk setiap $y \in B(R)$, sehingga diperoleh $\chi_{B(R)}(y_1) = \chi_{B(R)}(y_2) = 1$. Jadi $\phi(y_1) = |y_1|^{-k}\chi_{B(R)}(y_1) \geq |y_2|^{-k}\chi_{B(R)}(y_2) = \phi(y_2)$. Ini berarti $\phi(y)$ adalah fungsi turun secara radial untuk setiap $y \in \mathbb{R}^n$.

(ii).

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)\ dy &= \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{-k}\chi_{B(R)}(y)\ dy = \int_{|y|<R} |y|^{-k}\ dy \\
&= \int_{\theta\in S^{n-1}} \left(\int_0^R |r|^{-k} r^{n-1}\ dr \right) d\theta \\
&= \int_{\theta\in S^{n-1}} \left(\frac{1}{n-k}|r|^{n-k} \right)_{r=0}^{r=R} d\theta \\
&= \int_{\theta\in S^{n-1}} \frac{R^{n-k}}{n-k}\ d\theta = \frac{R^{n-k}}{n-k}\int_{\theta\in S^{n-1}} d\theta \\
&= \frac{R^{n-k}}{n-k}\omega_{n-1} = \frac{R^{n-k}}{n-k}\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} < \infty \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Lemma 2.9 *Misalkan* $\psi(y) = |y|^{-k}\chi_{C_{B(R)}}(y)$ *dengan* $y \in \mathbb{R}^n, y \neq 0$ *dan* $R > 0$. *Jika* $0 < k < n$ *dan* $n - kp' < 0$, *maka* $\psi \in L^{p'}$

Bukti

$$\begin{aligned}
\int_{\Re^n} |\psi(y)|^{p'} dy &= \int_{\Re^n} |\ |y|^{-k}\chi_{C_{B(R)}}(y)|^{p'} dy \\
&= \int_{\Re^n} |y|^{-kp'}\chi_{C_{B(R)}}(y)dy \\
&= \int_{|y|\geq\Re} |y|^{-kp'} dy \\
&= \int_{\theta\in s^{n-1}} \left(\int_{\Re}^{\infty} |r|^{-kp'} r^{n-1} dr\right) d\theta \\
&= \int_{\theta\in s^{n-1}} \left(\frac{1}{n-kp'} r^{n-kp'}\right)_{r=\Re}^{r=\infty} d\theta, n - kp' < 0 \\
&= \frac{R^{n-kp'}}{kp'-n} \int_{\theta\in s^{n-1}} d\theta = \frac{R^{n-kp'}}{kp'-n}\omega_{n-1} \\
&= \frac{R^{n-kp'}}{kp'-n} \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} < \infty
\end{aligned}$$

Jadi $\psi \in L^{p'}$.

Selanjutnya kita lihat pembuktian Teorema 2.3 sebagai berikut,
Untuk $R > 0$ dapat dituliskan bahwa

$$\begin{aligned}
(f^*|\cdot|^{\alpha-n})(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)|y|^{\alpha-n} dy \\
&= \int_{|y|<R} f(x-y)|y|^{\alpha-n} dy + \int_{|y|\geq R} f(x-y)|y|^{\alpha-n} dy \qquad (5)
\end{aligned}$$

Perhatikan suku pertama Persamaan 5, dapat ditulis menjadi

$$\int_{|y|<R} f(x-y)|y|^{\alpha-n} dy = \left(f^*|\cdot|^{\alpha-n}\chi_{B(R)}(y)\right)(x)$$

dengan

$$\chi_{B(R)}(y) = \begin{cases} 1, & \text{jika } y \in B(R) \\ 0, & \text{jika } y \notin B(R) \end{cases}$$

Dan menurut Definisi 2.5, jika dimisalkan $\phi(y) = |y|^{\alpha-n}\chi_{B(R)}(y)$ maka ϕ merupakan fungsi radial. Berdasarkan Lemma 2.8 diperoleh bahwa ϕ adalah fungsi turun yang terintegralkan. Akibatnya menurut Lemma 2.6, jika $\phi_t = t^{-n}\phi(x/t)$, maka

$$\begin{aligned} |f^*\phi(x)| = |f^*\phi_1(x)| &\leq \sup\{|f^*\phi_t(x)| : t > 0\} \\ &\leq Mf(x)\int_{\mathbb{R}^n}\phi(y)dy \\ &= C_1R^\alpha Mf(x), (\phi\ terintegralkan) \end{aligned} \tag{6}$$

untuk suatu bilangan real C_1.
Suku kedua dari Persamaan 5 dapat dituliskan menjadi

$$\int_{|y|\geq R} f(x-y)|y|^{\alpha-n}dy = \left(f^*|\cdot|^{\alpha-n}\chi_{C_{B(R)}}(y)\right)(x) = \int f(x-y)|y|^{\alpha-n}\chi_{C_{B(R)}}(y)dy$$

dengan

$$\chi_{C_{B(R)}}(y) = \begin{cases} 1, & \text{jika } \ y \in C_{B(R)} \\ 0, & \text{jika } \ y \notin C_{B(R)} \end{cases}$$

Oleh karena itu dapat ditulis

$$\begin{aligned} \left|\int_{|y|\geq \Re} f(x-y)|y|^{\alpha-n}dy\right| &= \left|\int f(x-y)|y|^{\alpha-n}\chi_{C_{B(R)}}(y)dy\right| \\ &\leq \int |f(x-y)|y|^{\alpha-n}\chi_{C_{B(R)}}(y)|dy \end{aligned}$$

Misalkan $u = -y$, maka dapat ditulis

$$\int f(x-y)|y|^{\alpha-n}\chi_{C_{B(R)}}(y)\ dy = \int f(u+x)|u|^{\alpha-n}\chi_{C_{B(R)}}(u)\ du.$$

Jadi menurut ketaksamaan Holder diperoleh

$$\begin{aligned} \left|\int_{|y|\geq R} f(x-y)|y|^{\alpha-n}dy\right| &\leq \int \left|f(u+x)|u|^{\alpha-n}\chi_{C_{B(R)}}(u)\right| du \\ &= \|f_{+x}|u|^{\alpha-n}\chi_{C_{B(R)}}(u)\|_1 \\ &\leq \|f_{+x}\|_p\||u|^{\alpha-n}\chi_{C_{B(R)}}(u)\|_{p'} \\ &= \|f\|_p\||y|^{\alpha-n}\chi_{C_{B(R)}}(y)\|_{p'} \\ &= \|f\|_p\|\psi\|_{p'} \end{aligned} \tag{7}$$

dengan $\psi = |\cdot|^{\alpha-n}\chi_{C_{B(R)}}$.

Perhatikan Lemma 2.9 jika $k = n - \alpha$, maka

$$kp' - n = (\frac{n}{q} - \frac{n}{p} + n)p' - n = n\left(\frac{p'}{q}\right) > 0.$$

Akibatnya diperoleh $n - kp' < 0$. Sehingga menurut Lemma 2.9, dapat dikatakan bahwa $\psi \in L^{p'}$. Oleh karenanya dapat dipandang untuk suatu bilangan real C_2

$$\|\psi\|_{p'} = C_2 R^{-n/q} \tag{8}$$

Dengan demikian Ketaksamaan 7 menjadi

$$\left| \int_{|y| \geq R} f(x-y)|y|^{\alpha-n} dy \right| \leq C_2 R^{-n/q} \|f\|_p \tag{9}$$

untuk suatu bilangan real C_2. Dari Persamaan 5, 6 dan 9 diperoleh

$$\left|(f^*| \cdot |^{\alpha-n})(x)\right| \leq C_1 R^\alpha Mf(x) + C_2 \|f\|_p R^{-n/q} \leq A[R^\alpha Mf(x) + \|f\|_p R^{-n/q}]$$

dimana $A = \max\{C_1, C_2\}$.

Selanjutnya pilih R sehingga $R^\alpha Mf(x) = \|f\|_p R^{-n/q}$ atau $R^{-n/p} = \frac{Mf(x)}{\|f\|_p}$. Jadi jika dipilih $R^{-n/p} = \frac{Mf(x)}{\|f\|_p}$, maka

$$\left|(f^*| \cdot |^{\alpha-n})(x)\right| \leq A[Mf(x)]^{p/q} \|f\|_p^{1-p/q}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\|f^*| \cdot \|^{\alpha-n}\|_q &= (\int |(f^*| \cdot |^{\alpha-n})(x)|^q dx)^{1/q} \\
&\leq [\int (A[Mf(x)]^{p/q} \|f\|_p^{1-p/q})^q dx]^{1/q} \\
&\leq A\|f\|_p^{1-p/q} [\int (Mf(x))^p]^{1/q} \\
&\leq A\|f\|_p^{1-p/q} \|Mf\|_p^{p/q} \\
&\leq A\|f\|_p^{1-p/q} \|f\|_p^{p/q} = C\|f\|_p
\end{aligned}$$

untuk suatu konstanta C yang tergantung pada p, q.
Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa

$$\|f^*| \cdot \|^{\alpha-n}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq A_{p,q} \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

3. Keterbatasan Operator I di Ruang Morrey

Ruang Morrey $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ pertama kali diperkenalkan oleh C.B. Morrey pada tahun 1938 dalam suatu jurnal matematika dengan judul *on the solutions of quasi linear elliptic partial differential equations.* Selanjutnya ruang Morrey banyak ditemukan pada saat mempelajari perilaku operator Schrodinger dan teori potensial. Tujuan utama kita dalam pembahasan pada bagian ini, akan menunjukan bahwa operator I_α juga terbatas di ruang Morrey $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ke $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ asalkan $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n-\lambda}$ dan $0 \le \lambda < n - \alpha p$. Adapun ruang Morrey itu sendiri didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi f yang terintegralkan secara lokal pada $\mathbb{R}^n$, yaitu seperti yang dinyatakan dalam definisi berikut,

Definisi 3.1 *Untuk $1 \le p < \infty$ dan $0 \le \lambda \le n$, ruang Morrey $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ didefinisikan oleh*

$$L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) := \{f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} < +\infty\}$$

dengan

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{B=B(x,R)} \left(\frac{1}{R^\lambda}\int_B |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

Dalam hal ini notasi $B = B(x,R)$ merupakan bola buka berdimensi n dengan pusat $x \in R^n$ dan berjari-jari $R > 0$, yaitu $B(x,R) := \{y \in \Re^n : |x-y| < R\}$. Untuk setiap bola $B = B(x,R)$ berdimensi n ini dipunyai suatu fakta bahwa

$$|B| \le CR^n \tag{10}$$

dimana n adalah suatu bilangan dimensi yang tetap dan C adalah konstanta yang tidak bergantung pada x dan R, dengan $|B|$ menyatakan ukuran Lebesgue dari B, lihat ([5], halaman 3). Dari fakta 10 tersebut dapat dinyatakan suatu lemma berikut.

Lemma 3.2 *Untuk setiap $\alpha > 0$, maka berlaku $\int_{B(x,R)} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \le CR^\alpha$ untuk suatu konstanta real C.*

Bukti:
Jika $n \le \alpha$, maka jelas bahwa menurut fakta (*), $\int_{B(x,R)} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} dy = |B| \le CR^\alpha$. Sekarang jika $n < \alpha$, maka

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,R)} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} dy &\le \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-j-1}R \le |x-y| < 2^{-j}R} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \\
&\le \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{-j-1}R)^{n-\alpha}} |B(x, 2^{-j}R)| \\
&\le \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2^{(j+1)(n-\alpha)}}{R^{n-\alpha}} C(2^{-j}R)^n \\
&= C\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j} R^\alpha \ = \ CR^\alpha
\end{aligned}$$

Selanjutnya sebelum diperlihatkan suatu fakta yang menyatakan bahwa operator I_α juga terbatas di ruang Morrey, yakni dari $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, ke $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, terlebih dahulu disajikan suatu ketaksamaan Fefferman-Stein yang buktinya dapat dilihat di ([3], halaman 53).

Teorema 3.3 *(Fefferman-Stein) Misalkan ω adalah fungsi tak negatif dan f adalah fungsi terintegralkan secara lokal di $\mathbb{R}^n$. Maka terdapat $C_p > 0$ sedemikian sehingga*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p \omega(x)\ dx \leq C_p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p M\omega(x)\ dx$$

Dengan menggunakan ketaksamaan Fefferman-Stein ini diperoleh suatu fakta bahwa operator maksimal juga terbatas di ruang Morrey. Seperti dinyatakan dalam teorema berikut,

Teorema 3.4 *(Chiarenza-Frasca) Misal $1 < p < \infty$ dan $0 \leq \lambda < n$. Maka $\|Mf\|_{L^{p,\lambda}} \leq C\|f\|_{L^{p,\lambda}}$, untuk suatu konstanta C yang tidak bergantung pada f.*

Bukti:
Menurut ketaksamaan yang dinyatakan dalam Teorema 3.3, maka

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p \chi(x)\ dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p (M\chi(x))\ dx \tag{11}$$

untuk suatu fungsi f dan χ yang tak negatif. Ambil $f \in L^{p,\lambda}$, dan χ adalah fungsi karakteristik pada bola $B_R = B(x_0, R)$. Maka menurut Ketaksamaan 11 di atas diperoleh

$$\int_{B_R} |Mf(x)|^p\ dx \leq C\|f\|^p_{L^{p,\lambda}} \left\{ (2R)^\lambda + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{k-1}R)^n} (2^{k+1}R)^\lambda \right\} \subseteq C\|f\|^p_{L^{p,\lambda}} R^\lambda$$

Jadi didapat

$$\frac{1}{R^{\frac{\lambda}{p}}} \left(\int_{B_R} |Mf(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C\|f\|^p_{L^{p,\lambda}}$$

untuk suatu konstanta C ■.

Berdasarkan pada fakta keterbatasan fungsi maksimal Mf di ruang Morrey, maka dapat dibuktikan suatu pernyataan teorema berikut, bahwa operator integral fraksional I_α juga terbatas di ruang Morrey.

Teorema 3.5 *(Chiarenza-Frasca) Jika $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n-\lambda}$, $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ dan $0 \leq \lambda < n - \alpha p$. Maka terdapat $C_{p,q} > 0$ sedemikian sehingga*

$$\|I_\alpha f\|_{L^{q,\lambda}} \leq C_{p,q}\|f\|_{L^{q,\lambda}}$$

Bukti:
Misalkan $f \in L^{p,\lambda}$, dan $f \neq 0$, maka untuk $x \in \mathbb{R}^n$ dan $r > 0$ tuliskan $I_\alpha f(x) := I_1(x) + I_2(x)$, dengan

$$I_1(x) := \int\limits_{|x-y|<R} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy, \qquad \text{dan} \qquad I_2(x) := \int\limits_{|x-y|\geq R} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy$$

Untuk $I_1(x)$ diperoleh

$$|I_1(x)| \leq \int\limits_{|x-y|<R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy \leq C \sum_{k=-\infty}^{-1} (2^k R)^\alpha Mf(x)\, dy \leq CR^\alpha Mf(x)$$

Sementara itu, untuk $I_2(x)$ diperoleh

$$|I_2(x)| \leq \int\limits_{|x-y|\geq R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy \leq CR^{\alpha-\frac{n}{p}+\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{p,\lambda} \leq CR^{\alpha+\frac{\lambda-n}{p}} \|f\|_{L^{p,\lambda}}$$

Sehingga untuk setiap $x \in \mathbb{R}^n$ dan $R > 0$ diperoleh

$$|I_\alpha f(x)| \leq C \left(R^\alpha Mf(x) + R^{\alpha+\frac{\lambda-n}{p}} \|f\|_{L^{p,\lambda}} \right) \tag{12}$$

Selanjutnya dengan memilih $R_0 = \left(\frac{Mf(x)}{\|f\|_{L^{p,\lambda}}} \right)^{\frac{p}{n-\lambda}} > 0$ dan mensubstitusikannya ke dalam Ketaksamaan 12, sehingga didapat

$$|I_\alpha f(x)| \leq C \left(Mf(x)\right)^{\frac{n-\lambda-p\alpha}{n-\lambda}} \|f\|_{Lp,\lambda}^{\frac{p\alpha}{n-\lambda}} \leq C \left(Mf(x)\right)^{\frac{p}{q}} \|f\|_{L^{p,\lambda}}^{\frac{q-p}{q}}$$

Dengan menggunakan fakta bahwa fungsi maksimal terbatas di $L^{p,\lambda}$, maka diperoleh ketaksamaan

$$\|I_\alpha f\|_{L^{q,\lambda}} \leq C \|f\|_{L^{p,\lambda}}$$

untuk suatu konstanta C yang hanya tergantung pada p dan q. ■

Perhatikan bahwa jika $\lambda = 0$ maka $L^{p,0}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$. Ini berarti akan diperoleh kembali keterbatasan I_α dari $L^p(\mathbb{R}^n)$ ke $L^q(\mathbb{R}^n)$. Sedangkan jika $\lambda = n$, maka diperoleh $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dalam hal $\lambda = n$ ini, keterbatasan operator I_α dari $L^p(\mathbb{R}^n)$ ke $L^q(\mathbb{R}^n)$ menjadi tidak berlaku, seperti yang ditunjukan dalam ([2], halaman 119).

4. Kesimpulan

Melalui operator dilasi yang dikenakan terhadap operator integral fraksional, dan dengan adanya fakta keterbatasan fungsi maksimal di ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$, diperoleh fakta bahwa untuk $0 < \alpha < n$, operator integral fraksional I_α yang didefinisikan sebagai

$$I_\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{R^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy$$

merupakan operator terbatas dari $L^p(\mathbb{R}^n)$ ke $L^q(\mathbb{R}^n)$ dengan $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ dan $1 < p < q < \infty$. Persisnya kita mempunyai ketaksamaan

$$\|I_\alpha f\| \leq C_{p,q} \|f\|_p$$

jika dan hanya jika $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ dan $1 < p < q < \infty$.

Selanjutnya di ruang perumumannya, khususnya di ruang Morrey $L^{p,\lambda}, (\mathbb{R}^n)$, dengan menggunakan *ketaksamaan Fefferman-Stein* diperoleh fakta bahwa operator maksimal juga terbatas di ruang perumumannya. Akibatnya dengan memanfaatkan fakta ini diperoleh hasil bahwa operator integral fraksional I_α juga terbatas di ruang perumumannya, yaitu I_α terbatas dari ruang $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ke $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ dengan $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n-\alpha}$ dan $0 \leq \lambda < n - \alpha p$.

Ucapan Terima Kasih.

Kedua penulis berterima kasih kepada LPPM-ITB untuk dana Riset ITB Tahun 2006 No. 0004/K01.03.2/PL2.1.5/I/2006.

Pustaka

[1] E. Nakai, Recent topics of fractional integrals, Departemen of Mathematics, Osaka Kyoiku University Kashiwara, Osaka 582-8582, Japan.

[2] E.M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princenton University Press, Princenton, N.J, 1970.

[3] E.M. Stein, Harmonic Analysis: real variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals, Princenton University Press, Princenton, New Jersey, 1993.

[4] F. Chiarenza and M.Frasca, Morrey spaces and Hardy Littlewood maximal function, rend. Mat. 7, 273-279, 1987.

[5] G.B. Folland, Fourier analysis and its applications, Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 1992.

[6] J.G. Cuerva and A.E. Gatto, Boundedness properties of fractional integral operators associated to non doubling measures, Mathematics Subject Classification, DePaul University, Spain, 1991.

[7] M. Loss and H. Elliot, Analysis, Graduate student in mathematics, volume 4, 2001.

[8] R. Fefferman, Maximal functions in analysis, The University of Chicago REU, 2005.