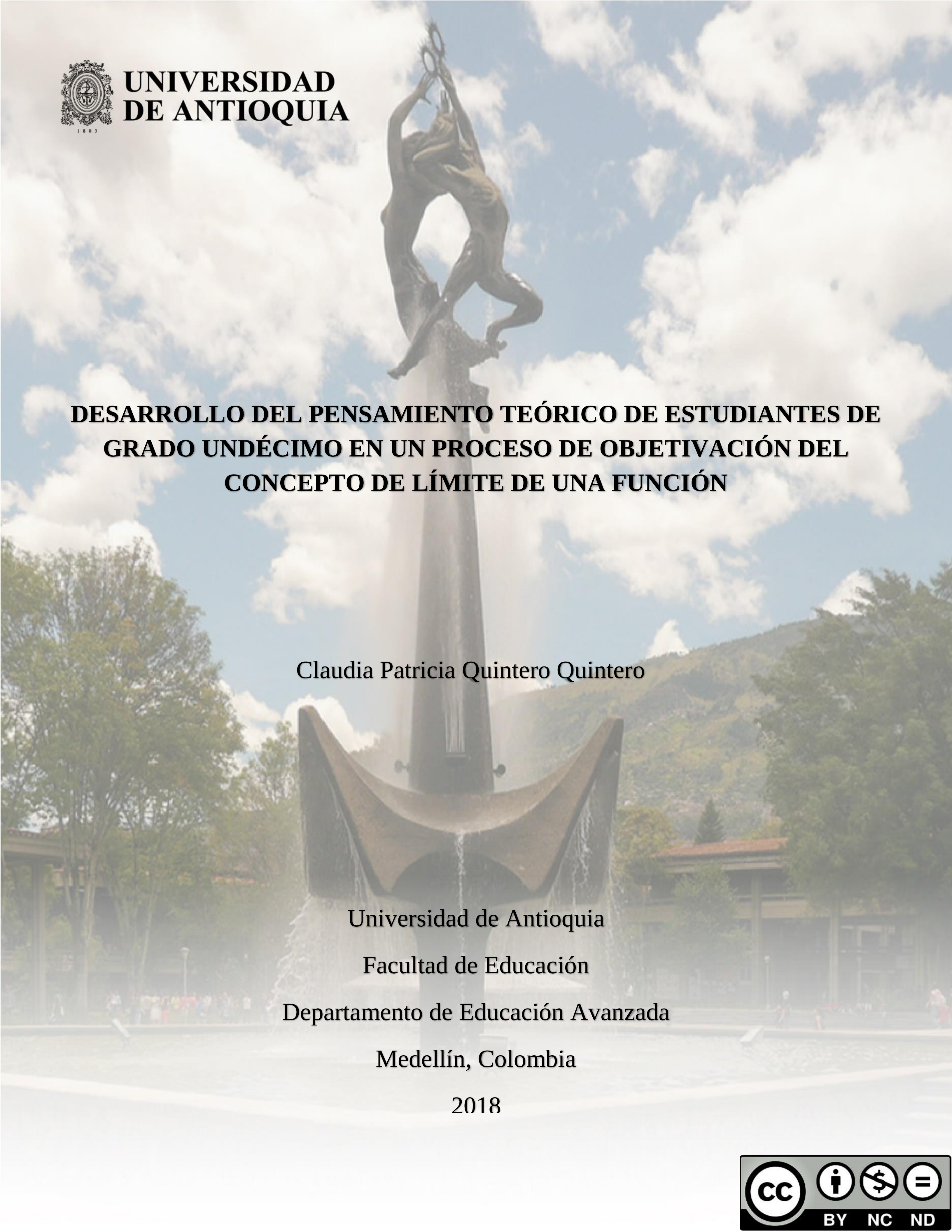


UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO TEÓRICO DE ESTUDIANTES DE GRADO UNDÉCIMO EN UN PROCESO DE OBJETIVACIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Claudia Patricia Quintero Quintero

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Departamento de Educación Avanzada

Medellín, Colombia

2018

Desarrollo del Pensamiento Teórico de Estudiantes de Grado Undécimo en un Proceso de Objetivación del Concepto de Límite de una Función

Claudia Patricia Quintero Quintero

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:

Doctora en Educación

Orientadora:

Doctora Diana Victoria Jaramillo Quiceno

Línea de Investigación:

Histórico-cultural

Grupo de Investigación:

Matemática Educación y Sociedad-MES

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Departamento de Educación Avanzada

Medellín, Colombia

2018

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

TESIS DE DOCTORADO

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO TEÓRICO DE ESTUDIANTES DE GRADO UNDÉCIMO EN UN PROCESO DE OBJETIVACIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Claudia Patricia Quintero Quintero

Orientadora: Dra. Diana Victoria Jaramillo Quiceno

Nota de aceptación

____

Firma del presidente del jurado

____

Firma del jurado

____

Firma del jurado

Medellín
2018

Agradecimientos

Es impensable un proceso formativo como éste sin esos otros a nuestro alrededor, motivándonos, de una u otra forma, a seguir. Es por eso que hoy, deseo hacer explícitos mis agradecimientos a todos ellos.

A la Agencia de Educación Superior de Medellín-Sapiencia, por su apoyo económico.

Al doctor Ricardo Cantoral Uriza, por sus aportes académicos en la lectura del proyecto de investigación y por sus enseñanzas durante la estancia doctoral en el Departamento de Matemática Educativa - Cinvestav, IPN.

Al doctor César Delgado García por sus aportes académicos a través de la lectura del proyecto de investigación y de la tesis doctoral.
A los doctores Rodolfo Vergel Causado y Gilberto Obando Zapata por sus aportes académicos mediante la lectura de la tesis doctoral.

A los profesores y compañeros del Seminario Permanente de la Línea de Educación Matemática.
A mis compañeros del grupo de investigación MES (Matemáticas, Educación y Sociedad).

A la Institución Educativa Lorenza Villegas de Santos.
A Eliza, Dana y Ana; eje de esta investigación.

A mis compañeros-amigos por su apoyo y por ser esa voz de aliento en momentos cruciales.

A Diana, mi orientadora de tesis doctoral y amiga; gracias mil.
A Adri, por su permanente apoyo; por su llamado a la calma desde sus acciones.

A mi familia, por comprender mis ausencias; por su calor.
A Santiago, Kelly, Lizeth, Nubia y Juan Pablo, por su apoyo incondicional.

A mis hermanas-amigas y a mis amigas-hermanas, por estar siempre ahí.

A <mi> Ángel <de luz>) por estar, por ser; por…todo.

Resumen

El objetivo de esta investigación fue analizar el *desarrollo del pensamiento teórico* de estudiantes de grado undécimo, en un proceso de *objetivación* del *límite de una función en un punto.* En esa misma línea, la pregunta de investigación que orientó esta tesis es, ¿cómo puede desarrollarse el *pensamiento teórico* de estudiantes de grado undécimo, en un proceso de *objetivación* del concepto de *límite de una función*? Como parte de la búsqueda de la respuesta a la pregunta de investigación empleé una metodología a la luz del paradigma cualitativo, bajo un enfoque crítico-dialéctico y desde una investigación participante. Así, analicé el desarrollo del *pensamiento teórico* desde el método dialéctico, en tres estudiantes de la institución oficial en la que soy maestra y donde realicé el trabajo de campo. En esa vía, diseñé ocho *Actividades Orientadoras de Enseñanza* que se enmarcan en la *Teoría de la Actividad*. En la investigación, tejí un marco teórico resultante de una imbricación entre la Teoría de la Objetivación (Radford, 2006, 2008, 2013, 2014,2017 y 2018), el desarrollo del *pensamiento teórico* (Vigotsky, 1989, 1991; Kopnin, 1978; Davidov, 1982, 1988 y Moura, 1998, 2010) y el concepto de *límite de una función* real de variable real (Caraça, 1951; Laurentiev y Nikolski, 1976; Boyer, 1999; Eves, 2011 y Cantoral y Farfán, 2003, entre otros). Este tejido tuvo como fundamento epistemológico el materialismo histórico-dialéctico. Así, bajo los presupuestos ontológicos, gnoseológicos y epistemológicos que asumí en el marco teórico, comprendí que la aproximación paulatina de cada una de las estudiantes al *límite de una función,* en sus procesos de *objetivación* a través del desarrollo de las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*, posibilitó un nivel de desarrollo de su *pensamiento teórico.* Esto es, un *pensamiento* que amplía la dimensión del objeto matemático a un método que exige entender el fenómeno de estudio en movimiento.

Desde el materialismo histórico-dialéctico, el desarrollo del *pensamiento* en general –y del *pensamiento teórico* en particular– no puede abordarse en términos absolutistas; admite gradaciones. Gradaciones (no lineales) que obedecen al mismo carácter dialéctico del desarrollo de todo fenómeno –natural o social– En ese sentido, puedo afirmar que cada una de las estudiantes protagonistas de la investigación alcanzó un nivel *teórico* en el proceso de desarrollo de su *pensamiento*. Un nivel –inacabado –determinado por las condiciones individuales de cada estudiante (en una dialéctica yo/ otro) y, por lo tanto, por sus formas particulares de aproximarse al objeto cultural.

Palabras-clave: *Teoría de la Actividad; Materialismo Dialéctico; Movimiento; Función de Variable Real, Apropiación, Conciencia.*

Abstract

The present study analyzed the *development of theoretical thinking* in eleventh-grade students during a process of objectification of *limit of a function at a point.* In the same direction, emerged the research question: How could eleventh-grade students develop a *theoretical thinking* during a process of objectification of the concept of *limit of a function*? I used a qualitative methodology and participative research under a critical-dialectical approach. Thus, from a dialectical method, I analyzed such a development in three students from a public school where I am a mathematics teacher and did the fieldwork. For that purpose, I designed *Eight Teaching-Orienteering Activities* within the framework of the *Activity Theory.* Along this research process, I hatched a theoretical framework resulting from an imbrication between the objectification of the knowledge theory (Radford, 2006, 2008, 2013, 2014,2017), the development of *Theoretical Thinking* (Vigotsky, 1989, 1991; Kopnin, 1978; Davidov, 1982, 1988 y Moura, 1998, 2010) and the concept of *Limit of a Real-valued Function* of a Real Variable (Caraça, 1951; Laurentiev y Nikolski, 1976; Boyer, 1999; Eves, 2011 y Cantoral y Farfán, 2003, among others). This hatch had historical-dialectical materialism as its epistemological foundation. Hence, under ontological, gnoseological and epistemological assumptions, I understood that the progressive approximation to the concept of *limit of a function* by the students made it possible to develop *theoretical thinking* through the development of the *Teaching-Orienteering Activities.* That is to say, a way of thinking which broadens the dimension of the mathematical object into a method that demands to understand the phenomenon of study in movement, an inherent characteristic to this way of thinking.

From the perspective of historical-dialectical materialism, the development of *thinking* in general –and of *theoretical thinking* in particular- cannot be approached as an absolute; it admits

(non-linear) gradations belonging to the dialectical characteristic of the development of all – natural or social- phenomena. Therefore, I can assure that each student in this research reached a certain *theoretical* level in the process of development of their *thinking.* Un –unfinished- level determined by their particular conditions (in a I/other dialectics) and consequently, by their particular ways to approach the cultural object.

Key-words: *Activity Theory; Dialectical Materialism; Movement; Function of Real Variable; Appropriation; Awareness.*

Contenido

Lista de Ilustraciones

Presentación

Para la matemática eurocéntrica, el concepto de *límite de una función* fue –y continúa siendo– pilar fundamental para la comprensión y creación de conceptos asociados a la variación y, en general, al cambio. Su importancia ha sido tal, que al día de hoy sigue siendo parte del currículo escolar de nivel medio en diferentes países. Sin embargo, por lo general, se aborda de manera tal, que propende por el dominio algorítmico de *límite*, mas no por su conceptualización. Esto no posibilita a los estudiantes dotar dicho objeto matemático de sentido y significado, a la vez que les posibilite el desarrollo de su *pensamiento*. Por lo tanto, la vinculación del límite al currículo en este nivel escolar se ha traducido en una problemática motivo de análisis de diversos investigadores.

En esa línea, es mi apuesta en esta tesis doctoral, con el materialismo dialéctico como cimiento epistemológico, analizar el *desarrollo del pensamiento teórico* de estudiantes de grado undécimo, en un proceso de *objetivación* del *límite de una función en un punto*, mediado por *Actividades Orientadoras de Enseñanza*. Como parte de esa apuesta, me interesó problematizar la situación actual de la enseñanza escolar en el contexto del que formo parte activa, como maestra de una institución educativa oficial de Medellín, Colombia. Así, dirigí mis búsquedas hacia una posible solución de la problemática apoyándome en un marco teórico y un diseño metodológico acorde a mis posturas ontológicas, gnoseológicas, epistemológicas y metodológicas.

En consecuencia, planteé el diseño metodológico desde un paradigma cualitativo, bajo un enfoque crítico-dialéctico. Realicé el trabajo de campo con tres estudiantes de undécimo grado de una institución educativa pública del municipio de Medellín. La producción conjunta de registros y datos provino de las interacciones directas con las estudiantes, a través de las *Actividades Orientadoras de Enseñanza* (Moura 2010) en el marco de la *Teoría de la Actividad*.

El marco teórico fue el resultado de un tejido entre la teoría de la *objetivación* desde Radford (2006, 2008, 2013, 2014, 2017); el desarrollo del *pensamiento teórico* desde autores como Vigotsky (1989, 1991), Kopnin (1978), Davidov (1982, 1988) y Moura (1998, 2010) y, el concepto de *límite de una función* que abordé desde Caraça (1951), Laurentiev y Nikolski (1976), Boyer (1999), y Cantoral y Farfán (2003), entre otros.

Al respecto, considero que la incorporación de objetos matemáticos pertenecientes al *cálculo*, como el de *límite*, al currículo propuesto para la escuela, genera una cadena de problemas teóricos y prácticos que debe abordarse desde otras apuestas ontológicas, gnoseológicas, epistemológicas y metodológicas. Estas Apuestas están dirigidas a una enseñanza desarrollante según la propuesta de Davidov (1988) y Kopnin (1978). Es decir, una enseñanza que fomente en los estudiantes un *pensamiento* por medio del cual se acerquen al estudio de fenómenos a través de una *actividad* mental que mediatice su proceso de comprensión, por medio de procesos de análisis y síntesis de las condiciones en que (y por qué) se producen; esto es, un *pensamiento teórico*. Este *pensamiento* tiene formas específicas de generalización y abstracción que posibilitan a los estudiantes la apropiación de conceptos teóricos depositados en la cultura.

En el primer capítulo que conforma este trabajo y que denominé “Sobre la investigación”, planteé el problema de la investigación a la luz de las presupuestos ontológicos, gnoseológicos, epistemológicos y metodológicos. Estos presupuestos sustentaron la búsqueda de la respuesta a la pregunta que orientó esta tesis: “¿cómo puede desarrollarse el *pensamiento teórico* de estudiantes de grado undécimo, en un proceso de *objetivación* del concepto de *límite de una función*? La pregunta está en concordancia con el objetivo. Luego hice un breve recorrido de los principales momentos de la construcción del concepto del *límite* en su devenir histórico. El capítulo finaliza con un apartado en el que argumenté el diseño metodológico y expliqué la postura epistemológica que soporta el diseño de las *actividades* que direccionaron los encuentros con las estudiantes en el aula, y que fueron el eje para la producción conjunta de registros y datos.

El segundo capítulo lo denominé "El Movimiento: Carácter indefectible de la naturaleza", título que corresponde a la primera categoría de análisis emergente. En él, argumenté la tesis referente al movimiento, tanto mecánico como en general, el cual es la esencia –en dialéctica con el cambio– de los fenómenos naturales y sociales; por lo tanto, es la génesis de constructos teóricos como el *límite de una función*. Las estudiantes explicitaron el carácter mutable de la naturaleza, desde sus particularidades, a través del transcurso de todas las *actividades* propuestas.

La denominación del tercer capítulo obedeció al nombre de la segunda categoría emergente, "Límite de Una Función Real de Variable Real: una Manera Particular de Conocer la Mutabilidad de los Fenómenos". En él, desde el método dialéctico, analizo cómo las estudiantes protagonistas de la investigación desarrollaron –en diferentes niveles– un *pensamiento teórico en* el proceso de *objetivación* del concepto de *límite de una función de variable real* en un punto, a través del desarrollo de las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*.

En el último capítulo expongo las conclusiones de la investigación que se obtuvieron del análisis del desarrollo del *pensamiento teórico* de las estudiantes, en un proceso de *objetivación* del concepto de *límite de una función de variable real en un punto*. De esta forma, respondo a la pregunta que motivó la realización de esta investigación.

Sobre la investigación

Planteamiento del problema

La definición axiomática de *límite* ha llegado a las aulas con el propósito de fundamentar la matemática escolar en el nivel medio, conllevando a la organización de los contenidos bajo la influencia de la estructura formal del Análisis Matemático, como lo anotan Molfino y Buendía (2010). Esta organización curricular se traduce –en general– en una enseñanza que propicia la memorización de técnicas algorítmicas para el cálculo del *límite*, mas no la apropiación de su concepto[1]; una enseñanza que, además, no posibilita el desarrollo del *pensamiento teórico* de los estudiantes. Este hecho se transforma en una problemática que se hace evidente –especialmente– en las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes en el proceso de aprendizaje de dicho concepto matemático.

En esa dirección, concuerdo con Cantoral (1995) cuando plantea que una de las causas de la problemática del aprendizaje de conceptos del *cálculo* en la escuela radica, en primer lugar, en que antes de enfrentarse a éstos los estudiantes aprenden una matemática elemental asequible a ellos y, luego, de forma abrupta, se encuentran ante una matemática avanzada que exige un alto nivel de abstracción. En segundo lugar, dice este autor, es el contenido mismo del *cálculo* propuesto en el currículo. Es decir, el *cálculo* escolar contiene ideas nuevas –para los estudiantes– como el cambio y la variación, variación instantánea, procesos infinitos y *límites*; ideas que exigen de unas herramientas matemáticas de un nivel superior. Además, este contenido

[1] Mi comprensión sobre los términos apropiación y concepto, la explicaré posteriormente.

se enseña en un orden casi inmodificable: primero números reales, segundo funciones, tercero *límites*, cuarto continuidad, quinto derivadas y, por último, integrales (Cantoral, 1995).

Al respecto, Cantoral y Farfán (2003) exponen que la inclusión de saberes al sistema curricular escolar bajo la estructura formal de la matemática, sin considerar el contexto al cual serán incluidos ni el contexto histórico en el que dichos saberes fueron originados, conduce a una serie de problemas en cuanto a sus procesos de enseñanza y aprendizaje. Estos problemas requieren la implementación de estrategias diferentes a las que se usan comúnmente; que favorezcan el aprendizaje de los conceptos fundamentales del *cálculo*.

Concuerdo con Blázquez, Ortega, Gatica, y Benegas (2006) cuando plantean que el concepto de *límite* surgió históricamente de las matemáticas y no de la didáctica. Los autores se refieren a la evolución de este concepto:

> Se distingue la necesidad de explicitarlo y formalizarlo, que se utiliza de manera implícita desde la época griega, y no llega a su forma actual hasta el siglo XIX, en parte para validar algunos resultados obtenidos y en parte para demostrar otros más generales (p. 193).

En la misma línea, considero que el proceso de formalización del *cálculo*, consolidado por necesidades concretas en períodos históricos concretos, ha crecido con el avance de las matemáticas, pero al mismo tiempo ha interpuesto una distancia considerable entre objetos matemáticos –como el *límite de una función*, por ejemplo– y su aprendizaje por parte de los estudiantes del ciclo de enseñanza media, al ser llevado al aula sin adaptaciones curriculares pertinentes para su enseñanza en el contexto escolar.

La vinculación del *límite* al currículo escolar de nivel medio de secundaria y al primer nivel universitario se ha transformado en un motivo de análisis de diversos investigadores y desde diversas perspectivas. Es abundante la literatura existente al respecto y en la que se ha concluido que la enseñanza del concepto de *límite* desde el formalismo, en los niveles de educación mencionados, dificulta su comprensión.

Una de las perspectivas desde la que se ha estudiado esta dificultad es la que aborda el concepto de obstáculo epistemológico. En esta perspectiva se encuentran, entre otras, las investigaciones de Cornu (1982) y Sierpinska (1985). Sierpinska realiza un análisis de los obstáculos presentes en la comprensión del *límite de una función* a través de la historia –en un marco topológico– y los compara con los que identificó en el proceso de comprensión de dicho concepto en los estudiantes que participaron de la investigación que realizó. Sierpinska (1985) elaboró una lista de obstáculos epistemológicos relativos al concepto *límite*: "Horror al infinito"; "Obstáculos vinculados al concepto de función"; "Obstáculos geométricos"; "Obstáculos lógicos" y "Obstáculo de los símbolos". Estos obstáculos, según esta autora, son difíciles de superar dada la naturaleza misma del concepto, mas, es fundamental identificarlos como punto de partida de investigaciones posteriores en búsqueda de una posible superación.

Similarmente, Cornu (1982) –en un marco numérico– presenta una clasificación de obstáculos en la conceptualización del *límite de una función*, a partir de la comparación entre aquellos que identificó en el devenir histórico del concepto y la investigación que desarrolló: La noción metafísica del concepto de límite; La noción de lo infinitamente pequeño e infinitamente grande; ¿El límite puede ser alcanzado?; La transposición numérica. Como uno de los resultados de su investigación, el autor enuncia la importancia de organizar la enseñanza del objeto *límite* por medio de acciones mutuas entre maestro y estudiante en cuanto a la construcción de su concepto; construcción de carácter complejo más por el modo de conocer del sujeto que por la estructura misma del objeto. Así, a fin de superar los obstáculos presentes en el proceso de aprendizaje, Cornu (1982) plantea la necesidad de proponer a los estudiantes problemas matemáticos en las que éstos confronten lo que él denomina "concepciones espontáneas" con las propias del objeto matemático.

Sin desconocer la importancia del concepto de obstáculo epistemológico en el campo investigativo —y didáctico— respecto a la comprensión del *límite de una función*, no abordaré tal concepto en el presente trabajo de investigación. Mi decisión obedece a que dicho concepto hace parte de un marco teórico que no coincide con mis presupuestos ontológicos y epistemológicos en educación matemática. Esto es, desde el materialismo histórico-dialéctico y desde la Teoría de la Objetivación se considera, entre otras cosas, que los posibles impedimentos que puedan presentar los estudiantes en su proceso de aprendizaje obedecen a causas de orden social y cultural. De esta manera, el carácter cambiante y particular de cada individuo, determinado por y desde la cultura de la que hace parte activa, determina a su vez una forma particular de aprender. Así, –desde mis comprensiones– se me dificulta aceptar que los impedimentos que puedan presentarse en el proceso de aprendizaje pertenezcan sólo al plano mental y que puedan ser clasificables dentro de categorías estáticas.

Entre las investigaciones orientadas a realizar un estudio cognitivo referente al concepto de *límite* funcional en el aula se encuentran las realizadas por, Tall (1992); Delgado (1995, 1998); Blázquez y Ortega (2002); Blázquez et al (2006); Pons (2014) y Fernández (2015), entre otras.

Delgado (1998), por ejemplo, estudia la secuenciación y control de obstáculos y dificultades conceptuales, con el propósito de desarrollar los esquemas conceptuales de estudiantes de un curso de *cálculo* a nivel universitario en la construcción de los conceptos de *límite* y continuidad. Para la realización del estudio de la evolución conceptual, Delgado plantea situaciones didácticas que generaran conflictos con los esquemas y así, poder analizar el cambio de éstos en el proceso de enseñanza y aprendizaje. La investigación en mención se inscribe en "la ingeniería didáctica" (en el sentido de Artigue, 1988). En esa línea, Delgado (1998) considera la concepción, realización, observación y el análisis de una secuencia didáctica, para indagar sobre la evolución de los esquemas en torno a los conceptos de *límite* y continuidad. El autor concluye que a partir de ciertas situaciones didácticas se puede tener un control del cambio conceptual de los estudiantes y, por lo tanto, realizar una enseñanza más eficiente y eficaz.

Blázquez y Ortega (2002) plantean la problemática en torno a la dificultad que presentan los estudiantes, en general, para la conceptualización del *límite*. Según los autores la problemática es generada básicamente por la introducción de la definición formal del *límite* en el nivel de secundaria. Como solución viable a dicha problemática, Blázquez y Ortega (2002) proponen una definición de *límite de una función* que sin apartarse totalmente de la definición de Weierstrass, simplifica el formalismo, al basarse en la definición de D´Alembert. Así, los investigadores proponen una definición de *límite* como aproximación óptima. En su investigación, los autores observaron que la mayoría de los estudiantes solucionaron las situaciones propuestas por medio de la definición basada en la aproximación óptima y que aún aquellos que emplearon la definición métrica en la solución de los problemas planteados, también utilizaron la definición de *límite* como aproximación óptima. Por lo tanto, Blázquez y Ortega (2002) concluyen que la definición del *límite* finito en un punto como aproximación óptima es más comprensible por los estudiantes, que la definición formal, debido a su simplicidad.

Blázquez et al. (2006), contrastan la conceptualización métrica de *límite*, dada por Weierstrass –que según los autores es la que generalmente se adopta en la enseñanza del *límite*–, con la conceptualización como aproximación óptima, dada por Blázquez y Ortega (2002). En su investigación, los autores formularon el objetivo de establecer cuál de las dos conceptualizaciones puede ser más adecuada para la enseñanza y aprendizaje inicial del concepto, en estudiantes de primeros cursos universitarios de licenciaturas como matemáticas, física, estadística, ingenierías y económicas-empresariales. Los investigadores concluyen que el *límite* comprendido como aproximación óptima puede acarrear dificultad a los estudiantes en cuanto a la identificación de la mejor aproximación, aunque presenta dificultades de aprendizaje menores que la conceptualización métrica, cuyo formalismo les impide entender su significado y, por lo tanto, retenerla por mayor tiempo.

La lectura de los autores que he mencionado a lo largo de este apartado me ha posibilitado reflexionar sobre la pertinencia, o no, de la enseñanza del concepto de *límite* en el contexto escolar de la educación media en el ámbito educativo colombiano. Coincido con los autores abordados en que, la incorporación de este concepto al currículo conlleva a una serie de problemas teóricos y prácticos que deben discutirse desde otras apuestas epistemológicas, gnoseológicas, metodológicas y ontológicas a las tradicionales —como, por ejemplo, la planteada por Blázquez y Ortega (2002)— Considero que dichas apuestas deben, además, estar dirigidas hacia una enseñanza que posibilite un aprendizaje con significado y sentido para los estudiantes de forma que, a su vez, fomente el desarrollo de su *pensamiento* (en el sentido propuesto por Davidov (1988) y Kopnin (1978), que discutiré más adelante).

Al respecto, Davidov (1988) expresa que:

> La escuela debe enseñar a los estudiantes a pensar, es decir, a desarrollar activamente en ellos los fundamentos del pensamiento contemporáneo, para lo cual es necesario organizar una enseñanza que impulse el desarrollo (llamémosla "desarrollante"). (p.3)

Para este autor, una enseñanza desarrollante es aquella que forma en los estudiantes un *pensamiento teórico;* un *pensamiento* que posibilite pensar teóricamente. Es decir, comprender y dominar el proceso de origen y desarrollo de las cosas por medio del análisis de las condiciones en que se producen las mismas. Dicho *pensamiento* tiene formas específicas de generalización y abstracción que posibilitan a los estudiantes la formación de conceptos.

Planteamientos como el de Davidov (1988) me generan inquietudes que cobran un sentido problematizador, como por ejemplo: ¿en realidad posibilitamos el desarrollo de este tipo de *pensamiento* en nuestros estudiantes? Además, ¿es ese el interés de nuestro sistema escolar? En ese sentido, trabajos como los de Cantoral (1995) y Blázquez *et al*. (2006), más mi experiencia como maestra que enseña estos temas, me permiten afirmar que no todo proceso de escolarización conlleva al *desarrollo intelectual* del sujeto y, además, en algunas ocasiones, puede suceder lo contrario.

Por su parte, Davidov (1988) afirma que en la escuela se practica una enseñanza que no propende por el *pensamiento teórico*. En su lugar, la escuela fomenta en los estudiantes un *pensamiento empírico*. Es decir, un *pensamiento* que, al igual que el teórico, tiene formas específicas de generalización y abstracción, pero que, en la mayoría de los casos, éstas constituyen obstáculos para la formación de conceptos. El mismo autor plantea cómo el contenido curricular y los métodos del sistema escolar tradicional en general, orientan la formación de los escolares hacia este tipo de *pensamiento*. En palabras de Davidov (1988):

> En la literatura psicodidáctica y sobre métodos de enseñanza, la generalización [empírica] se caracteriza como la vía fundamental para la formación de conceptos en los escolares. La formación, en los niños, de las generalizaciones [empíricas] conceptuales se considera una de las finalidades principales de la enseñanza escolar (p. 101).

Así, el *pensamiento empírico* dificulta la aproximación teórica de los estudiantes al saber. De esta manera, para Davidov (1988), la enseñanza escolar influye poco en el desarrollo de las capacidades intelectivas de los estudiantes.

En este sentido, desde mi práctica pedagógica como maestra de matemáticas escolares, me pregunto también por el tipo de *pensamiento* que fomento en los estudiantes y por la manera en que propicio su aproximación a los objetos matemáticos. Me pregunto si estaré posibilitando el desarrollo de su capacidad intelectual de tal forma que adquieran teóricamente —en el sentido de Davidov (1988)— los saberes matemáticos propuestos en el currículo escolar. En particular, me hago este cuestionamiento en relación con el concepto de *límite de una función*, dada la importancia que se le da a su enseñanza en el grado undécimo –en el ámbito colombiano– y la dificultad de su aprendizaje.

De acuerdo con lo expuesto, la pregunta orientadora de este proyecto de investigación es: ¿cómo puede desarrollarse el *pensamiento teórico* de estudiantes de grado undécimo, en un proceso de *objetivación* del concepto de *límite de una función*?

La gestación del concepto de límite de una función real de variable real: un breve recorrido histórico

Como todo concepto matemático, el concepto de *límite* es una construcción social producto de un devenir en el que interviene un colectivo con características propias de cada momento histórico-cultural. El concepto se construye con el fin de solucionar problemas resultantes de la *actividad* humana en el interior de cada colectivo. Así, es posible identificar la gestación del concepto *límite* en diferentes momentos, cada uno de ellos con particularidades inherentes al contexto de la época.

Al respecto, existen varias investigaciones sobre la conceptualización del *límite de una función* en estudiantes de secundaria y del primer nivel universitario (Delgado, 1998, Blázquez y Ortega, 2002; Blázquez, Ortega, Gatica y Benegas, 2006; Molfino y Buendía, 2010; Pons, 2014, entre otras), que han abordado su desarrollo histórico y han realizado diversas clasificaciones de su construcción para comprenderlo.

A partir de la asunción de algunos autores que han reconstruido la historia de las matemáticas (Caraça, 1951; Aleksandrov, 1976, Laurentiev y Nikolski, 1976; Boyer, 1993, 1999; Kline, 2000; Eves, 2011 y Mol, 2013) y la consideración de las investigaciones anteriormente mencionadas, me aproximé a diferentes momentos históricos del concepto *límite* para crear un hilvanado desde mis posturas ontológicas, gnoseológicas y epistemológicas. Este hilvanado se presenta a continuación.

La antigua Grecia: en búsqueda de la ordenación del cosmos.

En concordancia con Caraça (1951), Boyer (1999) y Eves (2011), entre los siglos VII y VI a.C. el desarrollo del comercio–especialmente marítimo– en las colonias griegas del Asia Menor generó una clase de sujeto que trascendió las *actividades* prácticas sociales hacia *actividades* intelectuales. Estas prácticas le posibilitaron ir de la satisfacción de las necesidades de supervivencia hasta el planteamiento de preguntas –entre muchas otras– sobre su entorno, sobre el origen y desarrollo de los fenómenos –naturales y sociales– que observaba y que modificaban su vida. Al respecto, Eves (2011) plantea:

> La visión estática del oriente antiguo sobre las cosas se tornó insostenible y, en una atmósfera de racionalismo creciente, el hombre comenzó a indagar cómo y por qué. […] Los procesos empíricos del oriente antiguo, suficientes para responder cuestiones en la forma del cómo, ahora no bastaban para las indagaciones científicas en la forma del por qué. (p. 94)

En consecuencia, las condiciones particulares –materiales, sociales y económicas– de ese momento socio-histórico constituyeron un individuo que se preguntaba por la posibilidad de la existencia de un principio único que determinara la creación y funcionamiento del universo, entendido como "el mundo cósmico y mundo social" (Caraça 1951, p.64).

Esta pregunta tuvo diferentes respuestas acordes con la cosmogonía particular de cada escuela filosófica de la época. Por ejemplo, los filósofos de las colonias jónicas del Asia Menor, específicamente de la región de Mileto, afirmaron la existencia de un principio único, creador de los fenómenos naturales, permanente y dador de vida. Para Tales (ca. 624-548 a.C.), este principio universal era el agua; para Anaximandro (ca. 611-545 a.C.), lo indeterminado y para Anaxímenes (fl. ca. 545 a.C.), el aire (Caraça, 1951).

Para los filósofos de Mileto el principio que regía el universo era de carácter inmutable, mientras que para Heráclito de Éfeso (ca. 534 –484 a.C.), el fuego era el elemento substancial que posibilitaba el movimiento y la transformación de todas las cosas; el mundo estaba en permanente devenir, pues en él las cosas se transformaban en otras, como resultado de la evolución generada por la lucha de contrarios existentes en la naturaleza (Caraça, 1951).

Por su parte, para la escuela pitagórica –liderada por Pitágoras de Samos (ca. 580-500 a.C.)– el principio del universo era el número. Con su lema "todo es número" (Boyer 1999, p.79), los pitagóricos formularon una ordenación matemática del universo en la que todo podía predecirse y predeterminarse a partir de leyes matemáticas, pues el carácter conmensurable de las cosas posibilitaba entender el funcionamiento del cosmos. Aunque no es posible afirmar con exactitud quién fue el primero que descubrió la inconmensurabilidad de segmentos, contenida en los planteamientos de los pitagóricos, este hecho desmoronó su ordenación numérica del universo, generando así –especialmente para los pitagóricos–incertidumbre e inestabilidad pues, lo finito y estable dejó de serlo a partir de dicho descubrimiento.

Para la escuela eleática –seguidores de Parménides de Elea (fl. ca. 460 a.C.)– el principio que regía el universo era "la unidad y permanencia del ser" (Boyer, 1999, p.108). Mientras que para los pitagóricos todos los fenómenos estaban constituidos por unidades numéricas o geométricas –mónadas– y, por lo tanto, el movimiento se generaba por medio de "una sucesión de estados particulares" (Caraça, 1951, p.215), para los eleáticos, desde su postura estática de lo existente, el movimiento era un fenómeno inteligible. Un argumento de Zenón de Elea (fl. ca. 450 a.C.), uno de los discípulos de Parménides más conocido es el siguiente:

> No se trata de saber si hay o no movimiento en el mundo, sino de saber si él es comprensible, esto es, compatible con la explicación racional que damos del universo. Nosotros, eleatas, no lo comprendemos, no conseguimos hallar coherencia con el resto de la explicación racional. Pero ustedes, pitagóricos, dicen comprender y nadan solamente en contradicciones. Una de dos: en un segmento de recta o hay un número finito de mónadas o hay una infinidad. Veamos el primer caso; consideremos una flecha en movimiento recorriendo un segmento de recta: en cada instante, la punta de la flecha ocupa un lugar; la ubicación de una mónada. Pero, ¿qué pasa entre un lugar y el siguiente? Nada. Porque no existiendo nada entre dos mónadas consecutivas, no puede decirse cosa alguna sobre un movimiento que se realice donde nada existe. Conclusión: ¡el movimiento de la flecha es una sucesión de inmovilidades! (Zenón de Elea, referenciado por Caraça, 1951, p. 78).

En concordancia con Boyer (1999) y Caraça, (1951), Zenón de Elea influyó en los matemáticos de la época, especialmente mediante sus paradojas. Él argumentaba la imposibilidad de la comprensión del movimiento desde la epistemología pitagórica – ya fuese por la consideración del carácter indefinido de la divisibilidad del espacio y del tiempo, o por la consideración de que la divisibilidad del espacio y del tiempo culmina en partículas indivisibles (mónadas)–. Contrario a la postura pitagórica, Zenón de Elea planteaba el movimiento como un continuo inexplicable. Como resultado histórico, tanto las paradojas de Zenón como el fenómeno de la inconmensurabilidad impusieron el carácter discreto al campo numérico y el carácter continuo a las magnitudes geométricas, dando protagonismo a estas últimas y hallando a la figura –estática– no al número, como una posible respuesta a la esencia del universo.

Según Caraça, (1951) y Eves (2011), entre los siglos V y IV a.C, Atenas se transformó en la metrópolis hegemónica y representativa de la cultura griega por su papel protagónico en la guerra persa. Esta cultura tenía un marcado interés hacia el saber, que además se demandaba por los intereses económicos y políticos de la clase comerciante y artesanal cuyo poder se acrecentaba de forma notoria. Como lo plantea Caraça, estaban dadas las condiciones adecuadas para que la ciencia despuntara, pues, de un lado estaban los que sustentaban las necesidades básicas de manera holgada por una economía amplia y próspera y de otro lado existía otra clase de ciudadanos creada, según esta civilización, para pensar.

Esta superestructura creó, a su vez, marcadas diferencias sociales en las cuales quienes estaban inscritos en el saber se posicionaron en una escala superior respecto a los que no lo estaban. Atenas fue entonces la cuna del arte, la ciencia y la filosofía griega, que gestaba un individuo nuevo reproductor de la ideología ateniense del momento; un individuo que era peldaño fundamental de la nueva superestructura. Un representante de este nuevo individuo fue, sin duda, el filósofo griego que, preso del horror al cambio, al movimiento y a lo impredecible, se sumergió en el estudio de lo finito, de lo predecible e inmutable desde su propio mundo interior, refugiándose de la realidad exterior. Parménides, oriundo de las costas de Elea, fue uno de estos destacados filósofos que estaba en contra de las ideas que postulaban la realidad y la verdad en términos de movimiento. Al respecto Caraça afirma:

> Parménides distinguía aquello que era objeto puramente de la razón—lo que él llamaba la verdad—de lo que era dado por la observación, por los sentidos— lo que él denominaba

> la opinión. Oponiendo así la razón a la opinión, Parménides, abrió un debate, de una importancia y alcance excepcionales, que hasta hoy tienen trabajando íntimamente a todo el movimiento científico—las relaciones entre la razón y la experiencia, entre la teoría y la práctica, el debate del idealismo y el materialismo.
>
> A lo existente él le reconoce, en la parte del poema dedicado a la verdad, las características siguientes—unidad, homogeneidad, continuidad, inmovilidad y eternidad; relegando para la opinión del vulgo todos aquellos atributos que por ventura contrariasen estos. (p.76)

Según Caraça, parte de esta construcción estaba dirigida a la Escuela Pitagórica, pero también Parménides cuestionaba las ideas de Heráclito quien veía en la transformación y en el devenir, la esencia de las cosas.

Bajo estas condiciones políticas, económicas y sociales, la filosofía griega –encabezada por los socráticos– tomó un nuevo rumbo. Coincido con Caraça (1951) al afirmar que en este nuevo rumbo y como herencia de las posturas filosóficas de los eleatas, el saber era estratificado entre ideas y opiniones, de forma tal que la clase pensante se aproximaba al saber del mundo material a partir del mundo de las ideas, mientras que el hombre común sólo podía formarse una opinión del primero y nunca podría conocerlo.

Tal aristocratización del saber se enmarcó, principalmente, en el idealismo platónico en el cual la matemática al igual que toda la ciencia podía explicar el mundo material solo mediante el sistema de las ideas. Es decir, para el platonismo, las cosas eran sólo el reflejo de las ideas, pues el mundo sensible, el mundo material, sólo podía ser comprendido y determinado por la razón como única dadora de verdad; verdad que, además, era absoluta. Al respecto, Kline (2000) afirma:

> Platón insistía en que la realidad y la inteligibilidad del mundo físico sólo podían ser aprehendidas por medio de las matemáticas del mundo ideal. No había duda de que este mundo estaba matemáticamente estructurado. Al respecto, Plutarco nos refiere la famosa frase de Platón: “Dios geometriza eternamente”. (p. 17)

En esa misma línea, y en consonancia con Caraça (1951), en dicho momento histórico donde la ideología de Platón era dominante, los pensadores en Grecia se caracterizaban por una tendencia general a renunciar al estudio cuantitativo y dinámico de los fenómenos naturales; a lo cambiante –tal como el concepto de variable y por lo tanto al de función–; a lo impredecible e indeterminado y como consecuencia, al estudio de procesos infinitos, implícitos en las paradojas de Zenón y en la inconmensurabilidad. Sin embargo, existían personajes como Eudoxo y Arquitas, que demostraron resultados matemáticos utilizando argumentos físicos, con la consecuencia de ser criticados por el maestro: “Y Platón, indignado denunciaba tales demostraciones como una corrupción de la geometría, puesto que usaban hechos sensibles en lugar de razonamientos puros” (Kline, 2000, p.17). Aunque estas tensiones posiblemente influyeran para que los grandes aportes de estos pensadores se desarrollaran de un modo más lento para la historia, las construcciones realizadas en sus trabajos no se vieron frustradas, como lo expreso a continuación.

Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.) –discípulo de Platón– y Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.) quienes abordaron conceptos del *cálculo* al buscar soluciones a problemas geométricos que implicaban relaciones entre magnitudes geométricas (Boyer, 1993,1999).

El matemático y astrónomo Eudoxo de Cnido formuló un axioma de proporciones entre magnitudes inconmensurables: El Método de Exhaución. Al respecto, varios autores (Boyer, 1993, 1999; Eves 2011 y Mol, 2013) reportan que con este método –tratado en el libro V de los elementos de Euclides– Eudoxo solucionó el problema de la comparación de figuras curvilíneas y rectilíneas. Este método fue aceptado entre la comunidad académica de la época y siglos después, se consideró como el primer paso de la construcción de la teoría del *cálculo* diferencial e integral. Por su parte, Hipócrates de Chíos (fl. 460 a.C.), interesado en resolver la cuadratura del círculo –uno de los tres problemas clásicos de la antigüedad– planteaba la cuadratura de las lúnulas, siendo así el primer griego en abordar el problema de la medida de figuras curvilíneas mediante proporciones. Sin embargo, a diferencia de Eudoxo, Hipócrates abordó el problema solamente en el campo de magnitudes conmensurables, lo que confirma al método de Exhaución de Eudoxo como el primer peldaño hacia la construcción del *cálculo*.

El método de Eudoxo se conoce hoy como Axioma o propiedad de Arquímedes –desarrollado en sus obras: *Sobre la esfera y el cilindro* y en *La cuadratura de la parábola*– y plantea que:

> Dadas dos magnitudes que tengan una razón (es decir, que sean del mismo tipo y ninguna de las dos sea cero), entonces se puede encontrar un múltiplo de cualquiera de ellas que exceda a la otra (Boyer, 1999, p.128).

En concordancia con Kline (2000), las razones y proporciones contenidas en el axioma de Eudoxo, contempladas en el dominio geométrico, posibilitaron para la época, dar una explicación al problema de los inconmensurables al definir una razón de magnitudes –y a partir de ella una proporción– entre conmensurables e inconmensurables. Según Boyer (1999, p.129), este axioma equivale en términos actuales a:

> Si $\mathcal{M}$ es una magnitud dada, ε es otra magnitud del mismo tipo arbitraria, dada también, y r es un número tal que $1/2 \leq r < 1$, entonces podemos encontrar un entero positivo $\mathcal{N}$ tal que $\mathcal{M}(1-\mathrm{r})^{\mathrm{n}} < \varepsilon$ para todo número natural $n > \mathcal{N}$. Es decir, la propiedad de Exhausción es equivalente a la afirmación que, en términos modernos, nos asegura que:

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \mathcal{M}(1-\mathrm{r})^{\mathrm{n}} = 0$$

Por lo tanto, es posible formular el método de Exhaución de Eudoxo en el lenguaje del *cálculo*. Considero importante resaltar que este teorema, bajo la óptica de lenguaje del *cálculo* se torna dinámico porque adquiere la posibilidad de cuantificar –mediante aproximaciones sucesivas– la relación entre magnitudes geométricas.

Años más tarde, según Kline (2000, p. 24), llega el que se podría considerar como el segundo gran período de la cultura griega: “¿Hasta qué punto tuvieron éxito los griegos en la ejecución de su plan para obtener leyes matemáticas del universo? Ha llegado hasta nosotros lo esencial de las matemáticas creadas por hombres como Euclides, Apolonio, Arquímedes y Claudio Tolomeo”; pertenecientes al llamado período helenístico o alejandrino (300 a.C - 600 d.C). Es indudable que fue otra época del florecimiento del pensamiento matemático griego, en la cual el plan de explicar la naturaleza se dio entre otros, por los avances destacados para la época en astronomía, en ingeniería y en mecánica, en armonía con los compendios de Euclides. Durante muchos siglos estas ideas han constituido las bases de la ciencia occidental, que se movilizan entre acuerdos y contradicciones continuas.

Es importante destacar que hubo diversas dificultades para asumir la idea de infinito y la consecuente dificultad para abordarlo cuantitativamente fue, posiblemente, una de las causas que alejaron a matemáticos griegos de la creación del *cálculo* y por ende del concepto de *límite de una función*. El *cálculo* se concibió en siglos posteriores para explicar fenómenos en movimiento que fueron el interés de los matemáticos griegos del período alejandrino.

El hecho de que el pensamiento griego no haya alcanzado a desarrollar los fundamentos que plateó de la mano de grandes pensadores, se explica principalmente por causas asociadas a los conflictos sociales de la época, donde las invasiones de otros pueblos borraron gran parte de la memoria heredada de la cultura griega, como lo expresa Kline (2000, p. 35) "…y durante seis meses, los baños de Alejandría fueron calentados mediante la quema de rollos de pergamino". Situación que aconteció durante lo que se considera el golpe final de la civilización griega cuando fue invadida por los musulmanes en el año 640 d.C.

Finales del Medioevo al siglo XVII: hacia la cuantificación del movimiento.

Como uno de los resultados del intercambio cultural y comercial con oriente próximo, la Europa de finales de la Baja Edad Media amplió su campo visual mediante la apropiación de las construcciones matemáticas realizadas por los pueblos hindúes y, especialmente, árabes. Así, coincidiendo con Boyer (1999) y Mol (2013), a finales del Medioevo, las matemáticas europeas emergieron de un largo período de aletargamiento, en gran medida, gracias a la adopción y resignificación del sistema de numeración hindú-arábigo; la aceptación del cero como número y el desarrollo simbólico proporcionado por el álgebra.

Dentro del momento histórico referido en el párrafo anterior, destaco los aportes hechos por el físico y matemático francés Nicole Oresme (1323-1382) en cuanto a la construcción del *cálculo*. Aunque en este período, como en el período griego, el *cálculo* se presenta de manera implícita, es posible identificar elementos primitivos de esta rama de la matemática occidental.

Los filósofos escolásticos reflexionaron sobre fenómenos tales como la velocidad y la variación de la temperatura de un cuerpo. Como resultado de dichas reflexiones y aunque no contaran con las herramientas matemáticas suficientes para la cuantificación de lo observado, construyeron, según Boyer (1999), "un importante teorema relativo al valor medio de una forma *uniformemente disforme*, es decir, tal que la velocidad de cambio de dicha forma es constante" (p. 339). A partir de estas elaboraciones, aproximadamente un siglo después, Oresme construyó un diagrama en el que representó la variación de dichos fenómenos, de manera análoga a la que utilizamos en el presente para representar funciones.

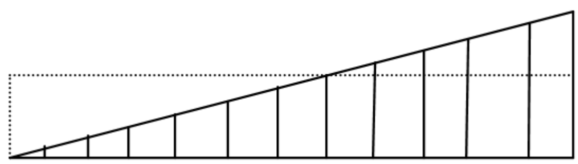


Ilustración 1. Diagrama sobre "Latitud de Formas" de Oresme (Boyer, 1999, p. 339).

En este diagrama Oresme plasmó una relación entre el cambio de velocidad y de tiempo, en cuya recta horizontal representaba la variación de instantes de tiempo –a los que nombró longitudes– y para cada instante trazó un segmento perpendicular a cada uno de estos –segmentos que nominó latitudes–. De esta forma, cada longitud representaba el cambio de velocidad en dicho instante. Tal representación, conocida con el nombre "Latitud de las formas" (Boyer, 1999, p.341) cobró gran importancia en cuanto al estudio del movimiento mecánico, desde la época de Oresme hasta la época de Galileo Galilei (1564-1642).

Laurentiev y Nikolski (1976) indican que el final de la Edad Media fue un momento socio-histórico en el que se requería transformar el estudio matemático de las leyes del movimiento, toda vez que –como derivación de las reflexiones de algunos pensadores de momentos históricos anteriores– se comprendió que el estado de inmovilidad es inexistente en la naturaleza y que, por lo tanto, el cambio es incesante. Dentro de las razones de esta comprensión se encuentran las exploraciones realizadas en diferentes campos, entre ellos el geográfico y el artístico.

Una de las exploraciones más trascendentales fue la del llamado Nuevo Mundo, que posibilitó la ampliación de las fronteras geográficas y mentales de la época. Sin duda alguna, otra de ellas fue la que hicieron personajes como Leonardo da Vinci (1452-1519), Miguel Ángel (1475-1564) y Rafael (1483-1520), quienes resignificaron el concepto de arte con sus innovadoras creaciones. Ya a mediados del siglo XVI, la cosmogonía de la Europa se sorprendía ante la caída del sistema solar ptolemaico y el nacimiento de la teoría heliocéntrica de Nicolás Copérnico (1473-1543) que fue desarrollada y complementada posteriormente por Johann Kepler (1571-1630) y Galileo Galilei (1564-1642) en el siglo XVII. Se generó una revolución paradigmática de la astronomía y una expansión del campo visual del momento.

Kepler y Galileo representaron un papel importante en cuanto a la génesis del *cálculo.* Tanto para ambos científicos como para Stevin (1548-1620), el desarrollo de sus teorías en la astronomía y la física los condujo a razonamientos sobre lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande (Boyer, 1999; Eves 2011 y Mol 2013). Esto puede considerarse, según Boyer (1999), como "el núcleo de lo que iba a llamarse más tarde *cálculo* o análisis infinitesimal" (p. 406). Así, por ejemplo, en la demostración acerca de que el centro de gravedad de un triángulo se sitúa sobre una mediana, Stevin –en su obra de 1586, Estática– se refería a diferencias entre los posibles paralelogramos inscritos en un triángulo, de maneras "tan pequeñas como se quiera" (Boyer, 1999, p. 409). En la misma línea, en su trabajo sobre fluidos, el mismo científico se aproximaba implícitamente a la idea de *límite* mediante "una sucesión de números que tendían a un valor límite" (Ibídem).

Tanto en su Astronomía Nova, en 1609, como en su *Stereometria doliorum*, en 1615, Kepler propuso el concepto de *infinitésimo* para calcular áreas y volúmenes asumiendo que los cuerpos estaban conformados por elementos infinitamente pequeños de áreas o volúmenes ya conocidos. Por su parte, en sus obras, '*Los dos sistemas principales del mundo*' (1632), y, *'Las dos nuevas ciencias'* (1638), Galileo recurrió con frecuencia a propiedades de lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño, dándole mayor importancia a este último debido a su aplicabilidad en sus elaboraciones sobre la dinámica; concepto en el que utilizó y desarrolló matemáticamente "*La Latitud de las formas de Oresme"* (Boyer, 1993, 1999).

Bonaventura Cavalieri (1598-1647), alumno de Galileo, sintetizó y desarrolló el legado de Oresme, Kepler y Galileo. En su '*Geometria indivisibilibus continuorum nova quadamrationepromota*' (1635), –en la búsqueda de una solución al problema de *cálculo* de áreas y volúmenes– formuló que: un área se puede considerar formada por segmentos rectilíneos o "indivisibles", y que un volumen sólido se puede considerar análogamente como compuesto de secciones o áreas que son indivisibles o volúmenes "cuasi atómicos" (Boyer, 1999, p. 416). De acuerdo con Boyer (1993, 1999) y con Eves (2011), Cavalieri, sin saberlo, empleó el método de Arquímedes en sus planteamientos, aunque de una forma más práctica. Así, los indivisibles de

Cavalieri se transformaron en un instrumento para calcular áreas y volúmenes y, a la vez, una de las bases del *cálculo* integral. Kline (2000) plantea que:

> En uno de sus libros (seis ejercicios de geometría, 1947), "explicaba" que el área en cuestión está compuesta de indivisibles, de la misma forma que un collar está hecho de cuentas, una tela de hilos y un libro de páginas. Con este concepto se las arregló para comparar dos áreas o dos volúmenes y obtener las relaciones correctas. (p. 158)

Sus contradictores lo acusaban de poca claridad para sustentar su idea de indivisibles, áreas o volúmenes finitos constituidos por un número infinito de elementos. Aunque, según Kline (2000) también hubo quien defendiera sus planteamientos: "Pascal defendió a Cavalieri…afirmaba que la geometría de los indivisibles y la geometría clásica estaban de acuerdo" (p. 160). Lo que significaba, según Kline, que los resultados obtenidos aplicando los principios de los indivisibles, se podían obtener también por los métodos clásicos de la geometría griega.

En ese mismo período socio-histórico y tal como lo hicieron los matemáticos nombrados anteriormente –retomando los constructos de matemáticos anteriores– es que llega a la escena Pierre de Fermat (1601-1661) para hacer importantes aportes a la matemática de la Europa moderna, tanto en la cocreación de la geometría analítica, como en la creación –intuitiva– del *cálculo*. Según Boyer (1993), Fermat fue el creador del *cálculo* diferencial por medio de su método para hallar máximos y mínimos de curvas polinómicas de la forma $y = f(x)$. Su método consistió en comparar el valor de $f(x)$ cuando es muy próximo a $f(x + E)$ haciendo a E tan pequeño que en una *cumbre* o en un *valle* era posible igualar los valores de ambas funciones. Luego de considerar $f(x) = f(x + E)$, Fermat lo divide entre E y hace $E = 0$. Así, según Boyer

(1993; 1999), Fermat podía hallar las abscisas de los puntos máximos y mínimos de $f(x)$. Boyer (1999, p. 440) plantea que "el método de Fermat es equivalente a calcular":

$$\lim_{E\to 0} f(x+E) - f(x) = 0$$

De este modo, se observa que la solución de esta ecuación es lo que hoy se denomina la derivada de la *función* $f(x)$. Concuerdo con Boyer (1993, 199) y Eves (2011) cuando expresan que el método de máximos y mínimos de Fermat constituye la esencia del análisis infinitesimal. Sin duda, Fermat se ubica como uno de sus grandes precursores.

El siglo XVII –históricamente llamado "El siglo de los genios"– fue una época en la que se rompieron grandes paradigmas y, por lo tanto, de suma importancia para el desarrollo de las ciencias en general, y de la matemática occidental en particular. Al respecto, Kline (2000) plantea:

> El rebelde siglo XVII había encontrado un mundo cualitativo cuyo estudio recibía ayuda de la descripción matemática. Y legaba a la posteridad un mundo cuantitativo y matemático que sustituía la concreción del mundo físico por fórmulas matemáticas. Era el comienzo de la matematización de la naturaleza que se ha desarrollado hasta nuestros días. (p.71)

En esa línea, los matemáticos del siglo XVII, según Laurentiev y Nikolski (1976), dedujeron de forma paulatina que se podían agrupar en dos categorías tanto los problemas derivados del movimiento –considerando la interdependencia entre las variables involucradas en los fenómenos fluentes– como los problemas geométricos irresolubles mediante la aritmética, el álgebra y la geometría elemental. La primera categoría involucraba problemas relacionados con el *cálculo* de la velocidad instantánea de un cuerpo que no presentaba movimiento uniforme –lo que posteriormente se transformaría en *cálculo* diferencial–; y, en la segunda categoría se encontraba lo referente al *cálculo* de áreas y volúmenes –lo que posteriormente se transformaría en *cálculo* integral–. Estos problemas, que surgieron de diferente manera desde la antigua Grecia, fueron el embrión del análisis infinitesimal.

En armonía con autores como Laurentiev y Nikolski, 1976; Boyer, 1999; Eves, 2011; y Mol, 2013, a mediados del siglo XVII se hacía necesaria una sistematización de los resultados que, hasta ese momento, se encontraban de manera aislada. Era este un momento en el que parecía haberse perdido el horror al infinito y en el que era de gran interés para la ciencia cuantificar la naturaleza en general y en especial el movimiento, interés generado por el desarrollo industrial y comercial de la época.

Respondiendo a esa necesidad, Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), de forma independiente, partieron de los trabajos sobre análisis infinitesimal que realizaron sus antecesores, los unificaron y los desarrollaron a un nivel tal, que se les ha reconocido en la historia como los inventores del *cálculo*.

Concordando con Boyer (1993, 1999), Eves (2011) y Mol (2013), Isaac Newton –alumno de Isaac Barrow (1630-1677), quien desarrolló un método para resolver problemas relativos a tangentes, similar al propuesto por Fermat, se sumergió en la comprensión del movimiento de los cuerpos y su posible derivación en procesos infinitos. Desde esa óptica, formuló funciones en términos de series infinitas y construyó un método que le posibilitaría hallar la velocidad de cambio –lo que denominaba fluxión– de magnitudes que varían de manera continua –lo que denominaba como fluentes– tales como longitud, área, volumen, temperatura, entre otras. En la matemática que Newton desarrolló mediante sus métodos para resolver problemas, provenientes especialmente del campo de la física, el *límite de una función* se encontraba de manera implícita y se demostraba desde el campo geométrico, no desde una fundamentación lógica (Kline, 2000).

En su obra *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687), Newton expresa:

> Las razones últimas, en las cuales las cantidades desaparecen, no son, estrictamente hablando, razones de cantidades últimas, sino límites a los que las razones de esas cantidades, decrecientes sin límite, se aproximan, y que, aunque puedan estar más cerca que cualquier diferencia dada, no pueden ser sobrepasados ni alcanzados antes de que las cantidades hayan disminuido indefinidamente (Kline, 2000, p.161).

La cita anterior, que se refiere al método de las razones primeras y últimas entre cantidades, evidencia cómo la matemática de Newton está enriquecida por una mirada no estática en la que conceptos como *límite* –aunque de una manera implícita– son formulados desde el movimiento, desde la fluencia; característica inherente al *cálculo*.

Stewart (1998, p.83) plantea que desde la época de los griegos, siempre hubo un interés por lo relacionado con las tangentes de las curvas en determinados puntos, interés que se desarrolla ampliamente con el cálculo:

> Cuando Newton y Leibniz estaban desarrollando el cálculo, abordaron el problema aplicando una geometría semejante. La ecuación de la parábola es $y = x^2$. El problema principal consiste en hallar la *pendiente* de su recta tangente en *x*. Veamos a continuación la línea de razonamiento de Newton. Hagamos que el valor de *x* se incremente ligeramente pasando a ser x+o. Como consecuencia, x^2 pasa a ser $(x + o)^2$. La razón de los incrementos es, por consiguiente, el cociente entre la diferencia de los cuadrados y la diferencia de los valores de x, es decir

$$[(x+o)^2 - x^2]/[(x+o) - x]$$

Que simplificando se obtiene:

$$\frac{[2ox + o^2]}{o} = 2x + o$$

Al hacer que *o* (con un símbolo más pequeño, como lo representaba Newton) tienda a 0 (el número real), entonces la pendiente tiende a 2x. Newton llamaba a la pendiente la fluxión de la fluente x^2. Anota Stewart (1998) que Leibniz utilizó argumentos similares, donde lo que cambiaba era la notación, en lugar del símbolo *o* de Newton, Leibniz utilizó el símbolo *dx*.

Un crítico en el asunto de tratar las fluxiones como una razón fue el obispo Berkeley, pues como en el ejemplo anterior: $\frac{[2ox+o^2]}{o}$ ambas cantidades en la razón se desvanecían, dejando el sinsentido de 0/0. Con este dilema exhibía Berkeley, según Stewart (1998) un razonamiento en términos aritméticos como:

> Dado que 1x0 = 0, tenemos que 0/0 = 1; pero también 2x0 = 0, luego 0/0 = 2. De la misma manera se puede "demostrar" que 0/0 = x, para cualquier x que queramos tomar. Entonces, ¿cómo es que parece que el método de Newton funciona? Según Berkeley, esto es debido a que hay errores que se compensan entre sí (p. 84)

Los argumentos de Berkeley fueron contundentes y bien argumentados; dejó de manifiesto para la época que había inconsistencias importantes que deberían superarse, pues esto de "compensar" errores en los procedimientos era como negar el error del error. Stewart (1998) expresa: *"Berkeley insistía en pensar como un algebrista para el que o era alguna constante definida"*. Para Newton no era el caso, *o* era una variable que se podía acercar a 0, tanto como se quisiese.

Boyer (1999) afirma que Leibniz –en su proceso de creación del *cálculo*– luego de estudiar las series infinitas y el triángulo armónico, se interesó en las obras de Pascal (sobre la cicloide y otros aspectos del análisis infinitesimal). Leibniz halló en sus estudios una relación entre la tangente de una curva y la razón entre las diferencias de las ordenadas con las abscisas, cuando tales diferencias se hacían infinitamente pequeñas. Así mismo, formuló que las cuadraturas dependen de la suma de las ordenadas o de los rectángulos infinitamente pequeños que conforman un área. Estas elucubraciones, entre muchas otras, le llevaron a la elaboración de un método general para solucionar problemas –como el de las cuadraturas o el de las tangentes– que se consideraban insolubles hasta ese momento. De esta forma, Leibniz concluyó que la integración –*calculus summatorius* (Boyer, 1999, p. 506) como proceso sumatorio es inverso al proceso de diferenciación –*calculus differentialis* (ídem) –.

En el proceso de creación de su método, Leibniz se interesó, además, por desarrollar un simbolismo matemático que hiciera accesible el análisis infinitesimal de diferentes fenómenos que involucraban la variación y el cambio. Por ejemplo, respecto a los trabajos sobre *cálculo* diferencial e integral, Boyer (1999) afirma:

> Después de varios ensayos se decidió a representar por dx y dy las diferencias más pequeñas posibles (o diferenciales) de la x y la y, aunque inicialmente había usado en su lugar $\mathrm{x/d}$ e $\mathrm{y/d}$ para indicar la disminución del grado. Al principio, por otro lado, escribía simplemente omn. (es decir, “todas las y”) para representar la suma de las ordenadas bajo una curva, pero más tarde utilizó el símbolo $\int y$, y posteriormente aún el $\int y\,dx$. (p. 506)

Dentro de los aportes que Leibniz hizo a la construcción del *cálculo* y a otras ramas de la matemática occidental, su simbolismo contiene una practicidad tal, que es el utilizado hoy en día en la enseñanza del análisis infinitesimal.

El *cálculo* de Newton y Leibniz fue trascendental en el desarrollo de la matemática posterior debido a la posibilidad que brindó para abordar el estudio de los fenómenos en movimiento. Sin embargo, algunos de los científicos contemporáneos a ambos matemáticos criticaron sus teorías porque las consideraban carentes de rigor lógico. En esa misma línea, y concordando con Boyer (1999), Kline (2000) y Eves (2011), la falta de claridad en conceptos como primeras y últimas razones en el trabajo de Newton e infinitesimales en la obra de Leibniz, aumentó la dificultad para que la nueva epistemología de la matemática de ese momento socio-histórico fuera comprendido a profundidad. De esa forma, según Kline (2000), el siglo XVII finalizaba con un *cálculo* en un estado aún confuso.

Del siglo XVIII hasta inicios del siglo XX: hacia el rigor lógico del análisis.

El siglo XVIII se ha caracterizado históricamente como un siglo de revoluciones. A mediados del siglo, las nuevas demandas en la industria trajeron consigo un conjunto de transformaciones económicas, tecnológicas y sociales propias de un capitalismo en desarrollo. El final del siglo se encuentra ante el estallido de una nueva revolución generada por una política expansionista que dio origen a un nuevo orden social y económico. De esta manera, tanto la revolución industrial como la revolución francesa generaron una nueva superestructura que, a su vez, transformó al individuo moderno en un individuo que se movilizaba entre las contradicciones de una aristocracia en declive y una burguesía floreciente (Aleksandrov, 1976; Boyer1999).

En esa misma línea, el matemático de mediados del siglo XVIII debía responder a una ideología de cambio, revolución y guerra. Sus construcciones matemáticas debían tener un carácter práctico que no albergara dudas en sus postulados; debían ser objetivas y ofrecer certeza. Esas matemáticas debían enmarcarse en un rigor lógico. Es en este ambiente político y social que se destacaron científicos como los Bernoulli, Euler, y D'Alembert, entre muchos otros, que partieron del legado matemático de finales del siglo XVII e hicieron grandes aportes a la matemática eurocéntrica.

Leonhard Euler (1707-1783) contribuyó a las diferentes ramas de la matemática eurocéntrica del siglo XVIII, entre ellas, a la fundamentación del Análisis. Alumno de Jean Bernoulli (1667-1748), Euler partió de la teoría de fluxiones de Newton y del *cálculo* diferencial de Leibniz, los sintetizó y creó una rama que posibilitó estudiar los procesos infinitos de una forma más general que la existente hasta el momento: el Análisis. En su libro *Introductio in analys ininfinitorum* (1748), Euler define una función como:

> Cualquier expresión analítica formada con la cantidad variable y con números y cantidades "constantes"…Euler consideró a veces una función, de una manera menos formal y más general, como la relación entre las dos coordenadas de los puntos de una curva trazada "a mano alzada" en el plano (Boyer, 1999, p. 558).

Tal como lo exponen Boyer (1999) y Mol (2013), mediante esta definición, Euler se refería a las funciones algebraicas y las funciones trascendentes elementales a las cuales les dio un tratamiento analítico. Aunque Oresme había considerado, de manera implícita, la idea de función mediante su '*Latitud de las Formas'*, fue a partir del planteamiento de función de Euler que este objeto se consideró como la idea fundamental del Análisis. En *Introductio in analys* *ininfinitorum*, Euler también hizo una generalización del tratamiento de Newton, Leibniz y los Bernoulli hacia las series infinitas; aunque no siempre consideró la posibilidad de convergencia, lo que generó cierta desconfianza entre algunos matemáticos contemporáneos y algunos que le sucedieron. En cuanto a su abordaje de lo infinitesimal, Euler consideró las cantidades infinitamente grandes como las magnitudes inversas a aquellas infinitamente pequeñas. Así, anteponiendo una visión aritmética frente a la geométrica, Euler consideró el infinito como una cantidad de mayor tamaño que cualquier otra cantidad finita (Boyer, 1999).

Por su parte, profundizando en los trabajos de Newton, Jean Le Rond D´Alembert (1717-1783) abordó el concepto de razones primeras y últimas y lo interpretó "como límites y no como una primera o última razón de dos cantidades que están exactamente surgiendo al ser o desvaneciéndose, respectivamente" (Boyer, 1999, p. 567). De esta forma, D´Alembert fue uno de los primeros matemáticos que construyó una definición explícita de *límite* y que, además, planteó la importancia de este concepto como fundamento del *cálculo* y, por lo tanto, del Análisis. Dentro de sus escritos en la *Encyclopédie* (1751-1772), D´Alembert formuló:

> Se dice que una cantidad es límite de otra cantidad, cuando la segunda puede aproximarse a la primera con una diferencia menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que se pueda suponer, aunque la cantidad que se aproxima no pueda sobrepasar nunca la cantidad que es aproximada […] La teoría de límites es la base de la verdadera metafísica del *cálculo* diferencial […]. (Kline, 2000, p. 209).

Aunque D´Alembert planteó el concepto de *límite* como cimiento del Análisis incluso en su abordaje del infinito (Eves, 2011); lo consideraba infinitamente grande en términos de límites, negando la existencia del infinito actual. Sin embargo, el lenguaje no formal que empleó en su definición de *límite* impidió que sus contemporáneos la consideraran como un concepto matemático sólido, al punto que los escritores de texto de finales del siglo XVIII continuaron utilizando los conceptos y lenguaje del análisis infinitesimal de Leibniz y Newton y no el de D´Alembert (Boyer, 1999).

Si bien es cierto que la historia no es un tejido lineal en donde se puede identificar claramente el final de un período y el inicio de otro, considero válido afirmar que el siglo XIX fue, en ciertos aspectos, una extensión del siglo XVIII. Por ejemplo, nos encontramos con una segunda revolución industrial que respondía a las exigencias de una sociedad que, inmersa en un capitalismo industrial, demandaba avances tecnológicos en búsqueda de un permanente crecimiento económico. En ese nuevo ambiente económico-social, el capitalismo europeo se expandió por el mundo. En esa nueva superestructura, el individuo contemporáneo hizo y hace ahora parte de una maquinaria y, por lo tanto, de una representación del librecambio, de la eficiencia y la eficacia. El rigor en todas las ciencias se hacía apremiante.

Como parte del nuevo orden del siglo XIX, los matemáticos se dedicaron a consolidar la fundamentación lógica del *cálculo* que inició en el siglo anterior. Según Kline (2000), a comienzos del siglo XIX, Bolzano, Abel y Cauchy condujeron sus trabajos hacia el rigor del *cálculo*. Sin embargo, fue Augustín-Louis Cauchy (1789-1857) quien tuvo el reconocimiento entre la comunidad científica como el precursor de la fundamentación del Análisis, debido al prestigio del que gozaba por ser profesor de la *École Polytechnique*. En su obra *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique* (1821), Cauchy planteó la fundamentación del análisis sobre el concepto de *límite* de D´Alembert, sobre cimientos numéricos –los números reales– dándole al *cálculo infinitesimal* la estructura que posee en el presente. Es decir, el *límite* como la base sobre la que se construyeron conceptos tales como: continuidad de funciones, convergencia de series, derivada e integral. En esa línea, Cauchy fue el primero en considerar al *límite* como un objeto y no, solamente, como un método para definir otros conceptos del análisis. De ese modo, apartándose del abordaje geométrico Cauchy planteó el concepto de *límite* como:

> Cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, a este último valor se llama el límite de todos los demás (Boyer, 1999, p.646).

Tanto la definición de *límite* de Cauchy, como su definición de *infinitésimo*, “Diremos que una cantidad variable se hace infinitamente pequeña, cuando su valor numérico disminuye indefinidamente de manera que converge hacia el límite cero” (Boyer, 1999, p. 647), dan cuenta de un abordaje dinámico al Análisis, siendo los conceptos de *función* y de *límite de una función* los pilares para el estudio de diferentes fenómenos en movimiento.

De igual forma, interesado en la fundamentación del análisis pero, a diferencia de Cauchy, desde una mirada estática, Karl Weierstrass (1815-1897) definió el *límite* de la siguiente forma:

> Si, dado cualquier ε, existe un η_0, tal que para $0 < \eta < \eta_0$, la diferencia $f(xo \pm \eta) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x = x_0$. (Boyer, 1999, p. 696).

La definición anterior fue presentada por su discípulo Eduard Heine en su obra Elemente, en 1872. Concordando con Boyer (1999), Kline (2000) y Eves (2011), la definición de *límite* de Weierstrass sintetizó la búsqueda de rigor lógico en el análisis durante siglos, al independizar el *límite* de concepciones geométricas y de aquellas que implicaran movimiento y cambio; su base fueron los números reales sin hacer alusión a cantidades que varían y que se aproximan a un valor.

El abordaje estático del concepto de *límite* empleado por Weierstrass se ha considerado objetivo porque desechó la expresión empleada por Cauchy, "tan poco como queramos"; siendo aceptado por la comunidad matemática en general incluso hasta el presente. Al respecto interpreta Stewart (1998):

Karl Weierstrass puso orden en el embrollo –y francamente es un alivio—por el procedimiento de tomarse en serio la expresión "tan cerca como se quiera". ¿Cómo de cerca se quiere? Weierstrass consideró la variable, no como una cantidad que cambia de forma activa, sino simplemente como un símbolo estático para cualquier miembro de *conjunto* de valores posibles. […] Esto es como un juego: "si tú me dices cómo de cerca quieres que esté *f(x)* de L, entonces yo te digo cómo de cerca tiene que estar *x* de *a*". (Stewart, 1998, p.87)

Boyer (1999) plantea que en el siglo XX la ŋ de Weierstrass fue sustituida por la letra δ, siendo, en esencia, la definición dada por Weierstrass la empleada en las definiciones de *límite de una función* de variable real en los libros de texto.

En el siglo XX, el formalismo matemático experimentó un gran auge pues se hizo indispensable una matemática que posibilitara la solución de problemas surgidos en un ambiente de guerras mundiales y que trajera consigo avances científicos y tecnológicos en campos nunca explorados. La matemática, y por lo tanto el *cálculo*, se encontró en un nivel con mayor abstracción, propio de una nueva epistemología que respondió a las exigencia de la época. En correspondencia con esa epistemología, el concepto de *límite* propuesto por Weierstrass, aunque con variaciones, cobró mayor vigencia, siendo estudiado desde el campo de la topología.

Después de este recorrido histórico, cabe decir que el concepto de *límite* se ha gestado de diversos modos desde la antigüedad hasta nuestros días, acorde a las demandas y características de cada período histórico. Inicialmente, desde una aproximación implícita y estática, fue un instrumento matemático surgido en la búsqueda de la organización del cosmos. Posteriormente, su aproximación, explícita y dinámica, respondió a la demanda de un mundo volcado hacia la ruptura de lo inamovible, propio de una ideología antropocéntrica –*sine qua non* del nuevo orden capitalista– para luego volver a un estudio estático enmarcado, ahora, en el rigor lógico de las particularidades de un sujeto contemporáneo.

Así, el *límite de una función*, como concepto clave en la consolidación de otros conceptos que posibilitan el estudio del cambio ha sido, a su vez, producto de una epistemología cambiante a través de la historia.

Diseño metodológico

Realicé el presente estudio desde un paradigma cualitativo, bajo un enfoque crítico-dialéctico. Me inscribí en el paradigma cualitativo debido al interés por interpretar y comunicar la realidad particular de un sujeto a partir de mi asunción epistemológica. Esta realidad, en el sentido de Denzin, Guba y Lincoln (1994), está formada por factores socio-políticos y económicos, a través de un devenir histórico. Es una realidad constituida por el sujeto que le pertenece y, al mismo tiempo, constituyente de él. Este sujeto es –el estudiante–el que yo como sujeto investigador, desde mi realidad particular, pretendí estudiar en el contexto escolar por medio de una participación activa en el aula. Para Denzin y Lincoln (2012) la investigación cualitativa es:

> […] una actividad situada, que ubica al observador en el mundo. Consiste en una serie de prácticas materiales e interpretativas que hacen visible el mundo y lo transforman, convirtiéndolo en una serie de representaciones […]. En este nivel la investigación cualitativa implica un enfoque interpretativo y naturalista del mundo […]. (p 48)

En consecuencia, procuré superar las descripciones e interpretaciones generales de fenómenos presentes en los procesos de enseñanza y en los procesos de aprendizaje del saber matemático, particularmente, en cuanto a la aproximación[2] teórica al concepto de *límite de una función* por parte del sujeto estudiante, investigado en su contexto natural.

---

[2]Empleo el término aproximación, en primer lugar, como un acercamiento gradual y continuo que por lo tanto contiene al movimiento como esencia. En segundo lugar, mas, en la misma línea, como un proceso; no como un producto acabado. Esto es, como un acercamiento paulatino a un objeto que ha sido constituido histórica y culturalmente antes del encuentro del sujeto con dicho objeto.

A la luz del enfoque crítico-dialéctico me basé, en primer lugar, en el concepto de dialéctica asumido por Kopnin (1978). Para este autor la dialéctica se concibe como un método de conocimiento de la esencia de los fenómenos de la realidad, fenómenos –naturales y sociales– que están en permanente interrelación, movimiento y cambio. Por lo tanto, basarme en el concepto de dialéctica significó aproximarme al entendimiento de los aspectos constituyentes de la realidad del sujeto/objeto de estudio. El sujeto es un ser social, histórico y creador de su propia realidad en interrelación con los otros.

En segundo lugar, concebí la relación sujeto/objeto de conocimiento, según los planteamientos de Sánchez (1998). Esto es una relación que se entiende como unidad y no como relación bipolar. Es decir, sujeto/objeto se comprenden como partícipes activos del conocimiento en la dialéctica existente entre ambos. En esta línea, elegí analizar la dialéctica entre el sujeto estudiante y el desarrollo de su *pensamiento teórico* en el proceso de *objetivación* del *límite de una función*.

De acuerdo con los planteamientos de Radford (2008), en el proceso de *objetivación* del objeto –hallado en la cultura– el sujeto lo modifica y, a su vez, es modificado por dicho objeto mediante un proceso de subjetivación; hecho que evidencia la naturaleza transformadora de dicha relación. De ese modo, puedo decir que, en tercer lugar, y en concordancia con lo anterior, basé mi análisis en el carácter transformador del paradigma crítico-dialéctico.

Producción conjunta de registro y datos.

Para la producción conjunta de registros y datos partí de ocho *Actividades Orientadoras de Enseñanza* (Moura, 1998, 2010) realizadas por tres estudiantes de grado undécimo de una institución femenina, de carácter oficial, de la ciudad de Medellín, Colombia. He de aclarar que Eliza, Dana y Ana, las tres estudiantes protagonistas de la investigación (con dieciséis y 17 años de edad), contaron con la autorización de sus padres y madres para participar de la investigación. Las *Actividades Orientadoras de Enseñanza* las planteé a las estudiantes –tanto a las protagonistas de la investigación como a las demás integrantes del grupo de undécimo grado– para desarrollar en el aula de clase, donde me desempeño como maestra y en el que actué como investigadora participante.

Las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*, propuestas por Moura (1998, 2010) y su equipo de colaboradores, se enmarcan en la *teoría de la actividad*. En este sentido, la *actividad* puede interpretarse como un proceso de humanización a través del cual, el sujeto identifica las necesidades que surgen de su relación con el entorno. En los párrafos siguientes expongo algunas ideas que fundamentan dicha teoría.

En su intento por dominar la naturaleza y de obtener los elementos indispensables para su supervivencia, el hombre y la mujer –en su devenir histórico– son sujetos de una *actividad* vital que les posibilita alcanzar un fin esperado. Es en la *actividad* donde el cerebro se forma como base material de los procesos mentales, superando su nivel de animalidad para posibilitarle al ser humano un lugar dentro del núcleo social que se gesta en la *actividad* misma. Como lo expresan Cedro y Moura (2008), “La historia del desarrollo humano demuestra que el hombre es esencialmente un ser de naturaleza social, es decir, su fuente de hominización proviene de su vida en sociedad, en el seno de la cultura generada por su grupo social a través del tiempo” (p.56).

Al respecto, Engels (1961) plantea que:

> …El animal utiliza la naturaleza exterior e introduce cambios en ella pura y simplemente con su presencia, mientras que el hombre, mediante sus cambios, la hace servir a sus fines, la domina. Es esta la suprema y esencial diferencia entre el hombre y los demás animales; diferencia debida también al trabajo (p. 151).

Es sólo a través del trabajo –"*actividad* específicamente humana" (Leontiev, 1984, p. 77)– que el hombre (en sentido genérico) se transforma en humano. Es a través del trabajo que el hombre se separa de la naturaleza y, en su búsqueda por suplir sus necesidades, transforma su cuerpo, desarrolla su cerebro y su psiquis. Leontiev (1978) afirma que en este proceso de transformación, el ser humano es un sujeto del "proceso social de trabajo" (p. 262), determinado por condiciones biológicas en las que sus órganos se adaptan a las condiciones externas, y por condiciones socio-históricas que rigen el desarrollo de la misma *actividad*.

Concordando con algunos autores (Marx y Engels, 1974; Kopnin[3], 1978; Petrovski, 1980; Davidov, 1988), en el proceso de la *actividad* –que es de carácter social– los seres humanos reproducen los objetos hallados en la naturaleza y posteriormente, crean aquellos que no se encuentran directamente en ella, pero que consideran necesarios para su supervivencia, su desarrollo individual y social. Como sujeto de un proceso social en la producción de condiciones de vida, el hombre se torna humano en la búsqueda de la satisfacción de sus necesidades por medio de una labor colectiva, generando así relaciones humanas que, a su vez, generan nuevas

---

[3]Las citas textuales que empleo a lo largo de todo el texto de los idiomas portugués e inglés, son traducciones de mi autoría.

necesidades según la complejidad social tejida. Engels (1961) resalta el carácter vital y perenne de la *actividad* humana mediante el siguiente planteamiento:

> Solamente el hombre consigue poner su impronta en la naturaleza, no sólo trasladando las plantas y los animales, sino haciendo cambiar, además, el aspecto, el clima de su medio, más aún, haciendo cambiar las mismas plantas y los mismos animales de tal modo, que las consecuencias de su actividad sólo pueden llegar a desaparecer con la extinción general del globo terráqueo (p.15).

El ser humano interactúa sobre el entorno con el fin de suplir las diferentes necesidades que surgen en dicha interacción. Este mundo sensible es en realidad "*actividad* sensible" (Marx y Engels, 1974, p.49) pues, ante él, el ser humano no es un simple receptor, o un "recipiente pasivo de información del medio ambiente" (Wertsch, 1993, p. 25), sino un sujeto que actúa permanentemente. De este modo, para suplir sus necesidades, el ser humano transforma el entorno y, en un acto de superación de la inmediatez de su interacción, se transforma a sí mismo por medio de la *actividad*. Ésta se realiza en cooperación con los demás integrantes de su comunidad, con aquellos con quienes se constituye en un ser social. En ese sentido, Marx (2010), afirma que:

> El proceso de trabajo, tal como lo hemos presentado en sus elementos simples y abstractos, es una actividad orientada a un fin, el de la producción de valores de uso, apropiación de lo natural para las necesidades humanas, condición general del metabolismo entre el hombre y la naturaleza, eterna condición natural de la vida humana y por tanto independiente de toda forma de esa vida, y común, por el contrario, a todas sus formas de sociedad (p.223).

De esta forma, la *actividad* podría entenderse como el producto de un conjunto de acciones intencionales orientadas a un fin, en la relación ser humano/naturaleza, como las formas de organización acorde con los intereses particulares de cada cultura. En la a*ctividad,* los seres humanos "crean los objetos que satisfagan sus necesidades e igualmente los medios de producción de esos objetos (…)" (Leontiev, 2004, p. 283).

La *actividad* contiene aspectos como: una necesidad, un motivo, unas acciones y unas operaciones. La necesidad surge desde y en la cultura, y a su vez genera un motivo; unas acciones; unas operaciones que concretizan las acciones y posibilitan alcanzar el objetivo. Según Leontiev (1978, 1984), referirse al concepto *actividad* es referirse a ella en términos generales. Sin embargo, concordando con el mismo autor, implícitamente nos referimos a *actividades* particulares, pues cada *actividad* está en correspondencia con una necesidad particular del sujeto –un sujeto constituido por la cultura de la que hace parte– encontrándose en dialéctica con el objeto, reproduciéndose en una *actividad* modificada –bajo condiciones distintas– cuando se satisface la necesidad. Los tipos de *actividad* se diferencian fundamentalmente por el objeto, siendo éste quien la orienta; "el objeto de la *actividad* es su verdadero motivo…no hay *actividad* sin motivo" (Leontiev, 1984, p.84).

Otro aspecto esencial de la *actividad* es la acción. Las acciones son las formas fundamentales como se manifiesta la *actividad,* de modo que al estar orientadas al fin de la *actividad* materializan la *actividad* misma. Es decir, la *actividad* sin acción, o conjunto de éstas, no podría darse. Como lo ejemplifica Leontiev (1984), "La actividad laboral existe en las acciones laborales, la actividad de estudio en las acciones de estudio, la actividad de comunicación en las acciones (actos) de comunicación, etcétera" (p.83).

Según este autor, la acción tiene dos aspectos: un aspecto intencional que está dirigido al logro del fin de la *actividad* y un aspecto operativo que se define por las condiciones requeridas para lograrlo. Por lo tanto, las acciones cristalizan la *actividad* al estar relacionadas con el fin de la *actividad*, pero operan bajo condiciones particulares que a la vez posibilitan su ejecución. Así como la *actividad* no puede prescindir de las acciones, las acciones no pueden prescindir de las operaciones.

Leontiev (1984) plantea al respecto que:

> Por lo general la actividad se realiza mediante un conjunto de acciones que están subordinadas a fines parciales que pueden ser deslindados del fin general; además, un caso típico en los peldaños más elevados del desarrollo es que el papel del fin general lo cumple un motivo del que se ha tomado conciencia, y que gracias a que se tiene conciencia de él se ha convertido en *motivo-fin. (*p. 84).

De esta manera se devela la conexión entre los componentes de la *actividad humana*, una conexión que, lejos de ser aditiva, presenta una estructura dialécticamente conformada en la que cada uno de ellos forma el todo de la *actividad*, transformándose y fundiéndose unos en otros durante el desarrollo de la *actividad* misma, acorde con el desarrollo y transformación de la sociedad y la cultura de la que el individuo hace parte activa.

Autores como Moura (1998, 2010) han (re)significado la *teoría de la actividad* en prácticas sociales como la educación y, específicamente, en la educación matemática. Como resultado de su trabajo, nace la *Actividad Orientadora de Enseñanza* para la organización de la enseñanza y del aprendizaje. Esta se fundamenta en la perspectiva histórico-cultural de la educación y surge como una opción para la *actividad* de enseñanza. Según Moura *et al.* (2010) la

Actividad Orientadora de Enseñanza es a la vez un reto para el maestro. En palabras de los autores:

> El desafío que se presenta al maestro se relaciona con la organización de la enseñanza, de modo que el proceso educativo escolar se constituya como *actividad* para el estudiante y el maestro. Para el estudiante, como estudio y para el maestro como trabajo (…). La *Actividad Orientadora de Enseñanza* mantiene la estructura de la *actividad* propuesta por Leontiev al indicar una necesidad (apropiación de la cultura), un motivo real (apropiación del saber históricamente acumulado), objetivos (enseñar y aprender) y propone acciones que consideran las condiciones objetivas de la institución escolar (p.96).

La *Actividad Orientadora de Enseñanza* es una particularidad de la *actividad*, en la cual tanto el maestro como el estudiante son sujetos de la *actividad* misma, pero con necesidades y, por ende, motivos diferentes. Mientras el maestro tiene la necesidad de enseñar, el estudiante tiene la necesidad de aprender, hecho que genera objetivos divergentes. Considero que el gran desafío para el maestro es reconocerse como sujeto de la *actividad* de enseñanza. Ese reconocimiento conlleva a identificar que es en él en quien recae la responsabilidad de encontrar la manera de que el objeto, resultante de la necesidad, de la *actividad,* coincida con el objeto del estudiante en su *actividad* de aprendizaje. Esto es, que su objeto de enseñanza se convierta en el objeto de aprendizaje del estudiante, como lo plantean Moura *et al.* (2010). Es decir, el maestro tiene el desafío de orientar su enseñanza hacia una práctica en la que el aula se transforme en un espacio dinamizador que estimule la necesidad de aprendizaje del estudiante, del objeto –matemático en este caso– de la *actividad.*

Concuerdo con Moura *et al.* (2010) cuando afirman que el maestro, al transformar su proceso de enseñanza en *actividad* de enseñanza, se convierte en un aprendiz constante de saberes teóricos que le posibilitan generar acciones que, a su vez, le posibilitan al estudiante aproximarse al saber existente en la cultura y, por tanto, el desarrollo del *pensamiento teórico*. No pretendo afirmar que exista una relación directa y lineal entre la enseñanza, vista desde la *teoría de la actividad,* y el desarrollo del *pensamiento teórico* del estudiante, sino que prefiero considerar que la *actividad* de enseñanza es un factor fundamental en el desarrollo psíquico de los individuos (en este caso de los estudiantes). En este sentido, el maestro se convierte también en un sujeto reflexivo sobre su propia práctica, sobre su papel en el sistema escolar y, particularmente, su papel como representante de la cultura. En esa medida, considero que la *Actividad Orientadora de Enseñanza* es posibilitadora del aprendizaje del mismo maestro y, en consecuencia, se constituye como agente transformador.

Moura *et al.* (2010) plantean que la *Actividad Orientadora de Enseñanza* cumple un papel mediador. En sus palabras:

> (…) Reafirmamos que la *Actividad Orientadora de Enseñanza* es la mediación en la actividad del maestro que tiene como necesidad la enseñanza de un contenido, al sujeto en actividad cuyo objetivo es la apropiación de ese contenido entendido como un objetivo social. En esa perspectiva, la *Actividad Orientadora de Enseñanza* se constituye en un modo general de organización de la enseñanza, en que su contenido principal es el conocimiento teórico y su objeto es la constitución del pensamiento teórico del individuo en el movimiento de apropiación del conocimiento. (p.100).

Así, para que las acciones del estudiante en el aula sean acciones pertenecientes a la *actividad –actividad* de aprendizaje–, las acciones del maestro deben mediar su actuar con el objeto de saber a aprender, deben generar la necesidad de aproximarse al concepto.

Para Vigotsky (2013c), el concepto:

> Es el reflejo objetivo de las cosas en sus aspectos esenciales y diversos; se forma como resultado de la elaboración racional de las representaciones, como resultado de haber descubierto los nexos y las relaciones de dicho objeto con otros, incluye en sí, por tanto, un largo proceso de pensamiento y conocimiento que, diríase, está concentrado en él. (p.80).

Así, acorde con lo anterior y con Kopnin (1978), el concepto es un reflejo que lejos de ser la fiel copia del objeto material es una transformación de dicho objeto en uno nuevo –en la conciencia del sujeto– como resultante de una elaboración racional de sus diversas manifestaciones. Así mismo, el concepto posibilita identificar la unidad de las contradicciones internas del objeto que develan su esencia y, por lo tanto, conocerlo en profundidad. En esa línea, las acciones del maestro deben ser sistemáticas, intencionales y contextualizadas, de forma tal que motive la aproximación de los estudiantes al concepto.

La *Actividad Orientadora de Enseñanza* sugiere pensar, planear y desarrollar los encuentros en el aula de clase, de tal manera que se generen interacciones –entre el maestro y el estudiante– que posibiliten (re)significar el saber matemático socialmente construido.

Moura *et al.* (2010) sugieren que en la *Actividad Orientadora de Enseñanza* las necesidades, los motivos y las acciones, son movilizados por lo que los autores llaman una “situación desencadenadora de aprendizaje”. Esta situación es propuesta por el maestro, y sus acciones deben motivar acciones en los estudiantes, dirigidas hacia la búsqueda de la solución de la *situación desencadenadora.* De esa manera, según Moura *et al.* (2010), el estudiante se irá aproximando al concepto y, además, a un modo general de aproximarse a él. En esa línea, la *situación desencadenadora* contendrá la esencia del objeto a estudiar; es decir, posibilitará la apropiación del concepto.

A la luz de este marco teórico, diseñé ocho *Actividades Orientadoras de Enseñanza* como medio para el desarrollo del *pensamiento teórico* en el proceso de *objetivación* del *límite de una función* de las estudiantes y a su vez, para la producción conjunta de registros y datos. Las ocho *Actividades Orientadoras de Enseñanza* fueron realizadas desde el mes de julio hasta el mes de octubre de 2017 en los encuentros de clase habituales y, dirigidos por mí como maestra y como investigadora participante. Cada una de las *Actividades Orientadoras de Enseñanza* requirió de dos sesiones como mínimo para su realización. Además del tiempo necesitado para el desarrollo en el interior de los grupos conformados por las estudiantes, cada *Actividad Orientadora de Enseñanza* tuvo un espacio de socialización grupal, acción que consideré fundamental en el proceso de *objetivación*.

Según Moura y Lanner de Moura (1998), referenciados por Moura *et al.* (2010), la *situación desencadenadora de aprendizaje* puede tener como recurso metodológico el juego, las situaciones emergentes de la cotidianidad o la historia virtual del concepto. Este último, según los autores, enfrenta al estudiante ante una situación-problema similar a la vivida por el ser humano en el momento histórico de construcción del concepto teórico a estudiar en la *actividad*.

Partiendo de lo anterior, la primera *Actividad Orientadora de Enseñanza* que diseñé y que denominé "Determinación de la posición de un cuerpo en un instante dado", estuvo movilizada por una *situación desencadenadora de aprendizaje* bajo el recurso de historia virtual. El motivo de la *Actividad Orientadora de Enseñanza* fue determinar la posición exacta de un móvil en un instante dado, el cual fue un problema con el que se enfrentaron científicos del siglo XVII ante un legado en el que el movimiento era estudiado de manera estática, dado que éste era considerado como una "sucesión de estados particulares de un móvil" (Caraça, 195, p.215). Este problema conllevó a la necesidad de crear un instrumento para solucionarlo –el *infinitésimo*[4]–. La aplicación del nombrado instrumento en el estudio de lo que sucede en cierto punto en interdependencia con puntos "arbitrariamente próximos" (Caraça, 1984, p. 218) y su posterior desarrollo, posibilitó la creación del concepto de *límite*.

Así, en la primera *Actividad Orientadora de Enseñanza* enmarcada dentro de la historia virtual, tuve como objetivo posibilitar a las estudiantes la deducción del movimiento –mecánico– como un continuo, al realizar ciertas acciones y operaciones en las que enfrentaran la imposibilidad de hallar la posición exacta del móvil en cierto instante, y, por lo tanto, generar en ellas la necesidad de crear estrategias para solucionar el problema. Estas estrategias les permitirían vislumbrar de forma implícita el *infinitésimo* como una posible solución.

La *Actividad Orientadora de Enseñanza* se realizó en dos momentos. En el primero, de carácter práctico, las estudiantes debían conformar grupos de trabajo para resolver la *situación desencadenadora de aprendizaje* y presentarla por medio de una guía que orientó dicha *actividad. La g*uía contenía por escrito las acciones y las operaciones sugeridas en vía al alcance del objetivo.

[4] La definición de este concepto, desde Caraça (1984) la presento en la segunda categoría de análisis.

El segundo momento de la *Actividad Orientadora de Enseñanza*, realizado en otra sesión, constó de las respuestas por escrito de las estudiantes a las preguntas de la guía y su posterior socialización. Las respuestas surgieron al interior de sus respectivos grupos de trabajo.

A continuación presento la guía referida.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA LORENZA VILLEGAS DE SANTOS
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA DE MEDELLÍN
Código Dane 105001003298 / Resolución Aprobación 8239 del 23/10/2001

Nombre(s):____Fecha:_________

Determinación de la Posición de un Cuerpo en un Instante Dado

Objetivo

Observar el desplazamiento de un móvil en una línea recta y analizar un punto de su trayectoria en un instante.

Materiales

- Una manguera de nivel, de un metro de longitud.
- Colorante.
- Silicona.
- Cronómetro.
- Papel milimetrado.
- Tabla de madera o cartón paja.

Con tu equipo de trabajo, sigue las instrucciones dadas a continuación.

1. Mide el tiempo que tarda el cuerpo (la burbuja) en hacer todo el recorrido. Repite el procedimiento las veces necesarias para aproximarte a un dato preciso. Anota los resultados.

   ¿El tiempo es el mismo en todas las veces? Argumenta.

2. Halla la distancia recorrida por el móvil cada 2 segundos, en toda su trayectoria. Repite el procedimiento las veces necesarias para aproximarte a un dato preciso. Anota los resultados.

3. ¿Puedes hallar la posición exacta del móvil justo a los 8 segundos de su recorrido?

   En caso de que así sea, anota el resultado –o resultados, en caso de que lo repitas– y explica cómo lo hallaste.

   En caso contrario, busca –y emplea– estrategias para hallar el resultado (o resultados) lo más próximo posible a lo pedido. Anota el resultado (o resultados) y explica las estrategias empleadas.

Ilustración 2. Guía de la actividad “Determinación de un móvil en un instante dado”

El objetivo de la segunda y tercera *Actividad Orientadora de Enseñanza* fue propiciar en las estudiantes la generación de un movimiento por el cual produjeran los datos de su contemplación directa –resultante de las operaciones realizadas en la primera *Actividad*

Orientadora de Enseñanza –, del resultado inicial de sus percepciones y los transformaran en un nuevo objeto mental, en una imagen cognitiva resultante de un análisis profundo del fenómeno. Este fue un objetivo alcanzable por acciones direccionadas a que las estudiantes establecieran relaciones entre diferentes aspectos del fenómeno a estudiar –el desplazamiento de un móvil en una trayectoria rectilínea– con elementos matemáticos que posibilitaran su estudio. Y, en esa medida, comenzaran a elevar su *pensamiento* de un nivel empírico a un nivel teórico.

De este modo, la guía escrita que orientó las acciones de las estudiantes de la segunda *Actividad Orientadora de Enseñanza,* la cual denominé "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado-1", estuvo conformada por preguntas donde pretendí problematizar el movimiento desde y por medio del concepto de *función* real de variable real.

La guía escrita que orientó la tercera *Actividad Orientadora de Enseñanza* y que, en continuidad con la anterior, denominé, "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado-2", contenía preguntas por medio de las cuales pretendí, además de lo expuesto en el párrafo anterior, generar en las estudiantes una reflexión más profunda sobre propiedades de la recta Real tales como densidad y continuidad. Y, de este modo, las estudiantes comenzaran a aproximarse al concepto de *infinitésimo* de manera intuitiva, concepto fundamental en la concepción dinámica de *límite de una función*.

Presento a continuación las guías referenciadas:

INSTITUCION EDUCATIVA LORENZA VILLEGAS DE SANTOS
SECRETARIA DE EDUCACION Y CULTURA DE MEDELLIN
Código Dane 105001003288 / Resolución Aprobación 3239 del 28/10/2001

Nombre(s):____Fecha:________

Análisis de la Posición de un Cuerpo en un Instante Dado-1

De acuerdo a los datos obtenidos en la actividad práctica, resuelve los puntos planteados a continuación.

1. ¿Cuál piensas que es el fenómeno físico –principal– que se manifiesta en el sistema burbuja-manguera?

2. ¿Identificas magnitudes físicas presentes durante el recorrido de la burbuja? ¿Cuáles?

3. ¿Identificas variables involucradas en el fenómeno físico dado? Argumenta.

4. ¿Hallas relación entre las magnitudes físicas y las variables que identificaste? Justifica tu respuesta.

5. Explica el desplazamiento del cuerpo (la burbuja) en la manguera.

Ilustración 3 Guía de la actividad "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado-1"

INSTITUCION EDUCATIVA LORENZA VILLEGAS DE SANTOS
SECRETARIA DE EDUCACION Y CULTURA DE MEDELLIN
Código Dane 105001003298 / Resolución Aprobación 8239 del 28/10/2001

Nombre(s):____Fecha:_________

Análisis de la Posición de un Cuerpo en un Instante Dado-2

De acuerdo a los datos obtenidos en la actividad práctica y a lo que respondiste en el taller anterior, resuelve los puntos planteados a continuación.

1. Construye una gráfica en la que se observen los resultados del punto 2 y del punto 3 de la actividad práctica. Describe la gráfica.
2. ¿Piensas que existe una función entre las variables que identificaste? Explica.
3. ¿Puedes hallar una expresión algebraica que represente la relación (o función) existente entre las variables que identificaste?
   De ser así, hazlo y explica qué relación tiene con la gráfica que realizaste en el punto 1.
4. ¿Cuántos números reales crees que existen entre cinco décimas de segundo antes de los 8 segundos exactos y, cinco décimas de segundo después de los 8 segundos exactos de tiempo transcurrido en el ascenso de la burbuja? ¿Por qué?
5. ¿Cuál piensas que es el valor (o valores) de tiempo más próximo a 8 segundos? ¿Cuál piensas que es el valor(es) de la posición que le corresponde a dicho(s) valor(es) de tiempo? Explica.

Ilustración 4. Guía de la actividad "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado-2"

Mediante la cuarta *Actividad Orientadora de Enseñanza* que denominé "¿Cómo ha sido el desarrollo de tu estatura?", tracé el objetivo de aproximar a las estudiantes al concepto de *función* –específicamente el concepto de variable real– buscando fomentar el desarrollo del *pensamiento teórico* de las estudiantes. En esta *Actividad Orientadora de Enseñanza*, el movimiento, como eje central del concepto de *infinitésimo* y por lo tanto de *límite de una función en un punto*, estuvo presente en uno de los aspectos del desarrollo físico de las estudiantes: su estatura. Además, tuve como objetivo posibilitar a las estudiantes una forma de aproximarse a un fenómeno natural particular desde un saber matemático depositado en la cultura. Por lo tanto, dispuse las condiciones materiales que generaran, en las estudiantes, un movimiento entre el significado social históricamente construido del objeto –*función*– y un sentido hallado por cada una de ellas desde su experiencia vital y personal.

A continuación, presento la guía que orientó la *actividad*.

INSTITUCION EDUCATIVA LORENZA VILLEGAS DE SANTOS
SECRETARIA DE EDUCACION Y CULTURA DE MEDELLIN
Código Dane 105001003298 / Resolución Aprobación 8239 del 28/10/2001

Nombre(s):____Fecha:_________

¿Cómo ha sido el desarrollo de tu estatura?

Partiendo de los datos que tienes registrados sobre tu estatura, desde tus primeros años de vida hasta el presente, responde yo/ resuelve los siguientes puntos:

1. Realiza tu curva de crecimiento.

2. Explica el desarrollo de tu estatura hasta el presente.

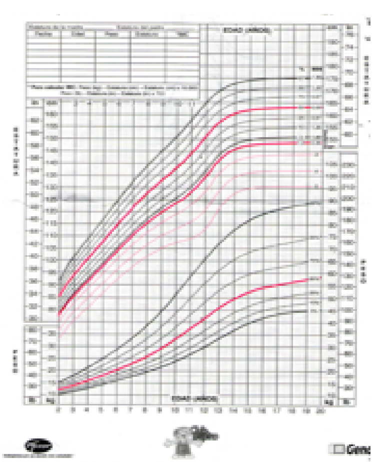
3. Según la Organización Mundial de la Salud (OMS) la estatura esperada– aproximada– de una persona ("Talla Diana Familiar"), considerando la estatura de los padres en centímetros, es:

$$\frac{\text{Estatura de la madre} + \text{Estatura del padre}}{2} + 6{,}5, \quad \text{para niños.}$$

$$\frac{\text{Estatura de la madre} + \text{Estatura del padre}}{2} - 6{,}5, \quad \text{para niñas.}$$

Según la OMS, el resultado puede variar en 5cm.

Partiendo de la fórmula anterior y de tu estatura presente, ¿piensas que esta fórmula es válida en tu caso? Explica.



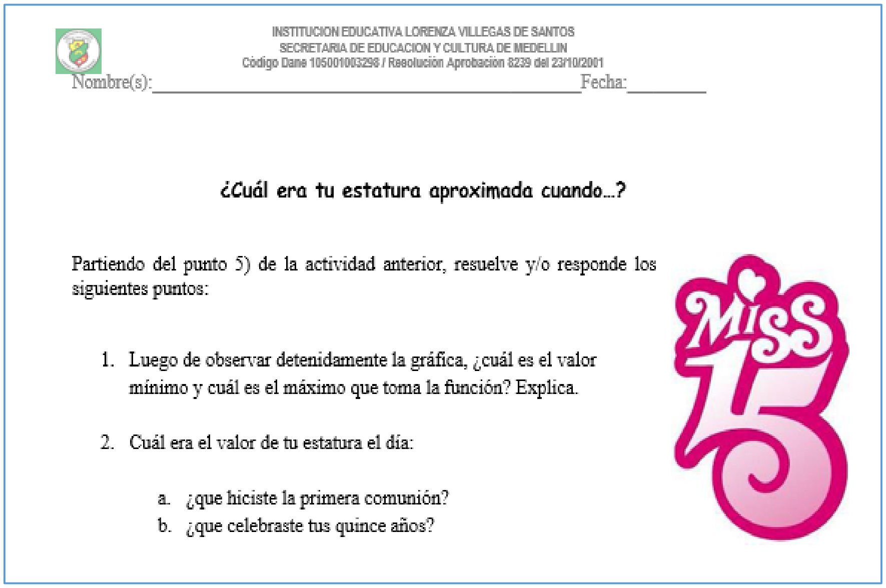
4. ¿Cuáles variables identificas en la curva de tu crecimiento? ¿Piensas que existe una función entre las variables identificadas? Argumenta.

5. Construye una gráfica en la que esté representada la relación existente entre las variables que identificaste (si piensas que existe), desde tus primeros años de vida. Explica las principales características de la gráfica resultante.

Ilustración 5. Guía de la actividad "¿Cómo ha sido el desarrollo de tu estatura?"

En la misma dirección de la *Actividad Orientadora de Enseñanza* anteriormente expuesta, diseñé la quinta *Actividad Orientadora de Enseñanza*, denominada "Cuál era tu estatura aproximada cuando…" Para ello, planifiqué la *situación desencadenadora de aprendizaje* en un contexto cotidiano como recurso metodológico, en el sentido de Moura y Lanner de Moura (1998) referenciados por Moura *et al.* (2010). Es decir, planifiqué una *situación desencadenadora de aprendizaje* que enfrentara a las estudiantes ante una situación propia de su cotidianidad para que en la búsqueda de la solución dotaran de sentido personal el significado cultural presente en el objeto matemático de la situación.

En este sentido, en primer lugar, tuve la intencionalidad de generar en las estudiantes la necesidad de problematizar, a la luz de conceptos del *cálculo*, un aspecto de sus vidas y dotarlo de significado y sentido al realizar las acciones. En segundo lugar, posibilité la aproximación de las estudiantes al concepto de *infinitésimo* –en dialéctica con el concepto de *límite de una función en un punto*– por medio de la representación gráfica de la evolución de sus estaturas y de la determinación de cierta estatura en una edad determinada. A continuación, presento la guía correspondiente.



INSTITUCION EDUCATIVA LORENZA VILLEGAS DE SANTOS
SECRETARIA DE EDUCACION Y CULTURA DE MEDELLIN
Código Dane 105001003298 / Resolución Aprobación 8239 del 23/10/2001

Nombre(s):____________________________________Fecha:________

¿Cuál era tu estatura aproximada cuando…?

Partiendo del punto 5) de la actividad anterior, resuelve y/o responde los siguientes puntos:

1. Luego de observar detenidamente la gráfica, ¿cuál es el valor mínimo y cuál es el máximo que toma la función? Explica.
2. Cuál era el valor de tu estatura el día:
   a. ¿que hiciste la primera comunión?
   b. ¿que celebraste tus quince años?

Ilustración 6. Guía de la actividad "Cuál era tu estatura aproximada cuando…"

La sexta *Actividad Orientadora de Enseñanza* denominada "¿*Límite*?" estuvo constituida por otra *Actividad Orientadora de Enseñanza*, diseñada y desarrollada por las estudiantes, tres meses antes del trabajo de campo. Dicha *Actividad Orientadora de Enseñanza* tuvo como motivo el diseño ficticio de un tanque para almacenamiento de agua cuyo objetivo fue que las estudiantes reconocieran, representaran y explicaran leyes cuantitativas en una situación de variación, como fundamento del concepto de *función*. Al tomar como punto de partida una *Actividad Orientadora de Enseñanza* anterior, mi intención fue problematizar el mismo objeto matemático –*función*– en una situación y un contexto ya conocidos, a través de un nuevo motivo que generara en ellas la necesidad de realizar acciones diferentes a las que se realizaron meses atrás para solucionar la situación-problema. Las acciones y operaciones de las estudiantes deberían ir direccionadas hacia un análisis infinitesimal. De esta forma, mi objetivo con esta *actividad* fue, en esencia, movilizar el *pensamiento* de las estudiantes mediatizado por la transformación del objeto y, por lo tanto, de la *actividad* misma. A continuación, presento las guías correspondientes a las dos *Actividades Orientadoras de Enseñanza*

INSTITUCION EDUCATIVA LORENZA VILLEGAS DE SANTOS
SECRETARIA DE EDUCACION Y CULTURA DE MEDELLIN
Código Dane 105001003298 / Resolución Aprobación 8239 del 23/10/2001

Nombre(s):____Fecha:_________

¿Límite?

Partiendo de la actividad realizada anteriormente llamada: "Tanque para Almacenamiento de Agua", responde y/o resuelve los siguientes puntos.

1. Representa, en Geogebra o en hojas milimetradas, la situación planteada.

2. Explica el tipo de función resultante y sus principales características.

3. Identifica el valor del área cuándo el valor del lado es:
   a. 1 m
   b. 2,5 m
   c. 3
   d. 5,5 m

4. Halla los valores:

   a. f(2,31)
   b. f(4,12)
   c. f(6,51)

5. ¿Cuál es el valor del área, cuándo el lado del tanque se aproxima a 3,699 m?

Ilustración 7. Segunda parte de la guía de la actividad "¿Límite?

INSTITUCIÓN EDUCATIVA LORENZA VILLEGAS DE SANTOS
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA DE MEDELLÍN
Código Dane 105001003298 / Resolución Aprobación 8239 del 23/10/2001

Nombre(s):______________________________Fecha:________

Tanque para Almacenamiento de Agua

En cierto barrio de nuestra ciudad se requiere diseñar un tanque de base cuadrada para almacenamiento de agua. Como parte del diseño, la arquitecta desea saber los valores del área de su base cuando el lado toma ciertos valores.

Para ello, la arquitecta utiliza la tabla mostrada a continuación.

Lado (m)	Area(m^2)
0	
0,5	
1	
1,5	
2	
2,5	
3	
3,5	
4	
4.5	
5	
5.5	
6	

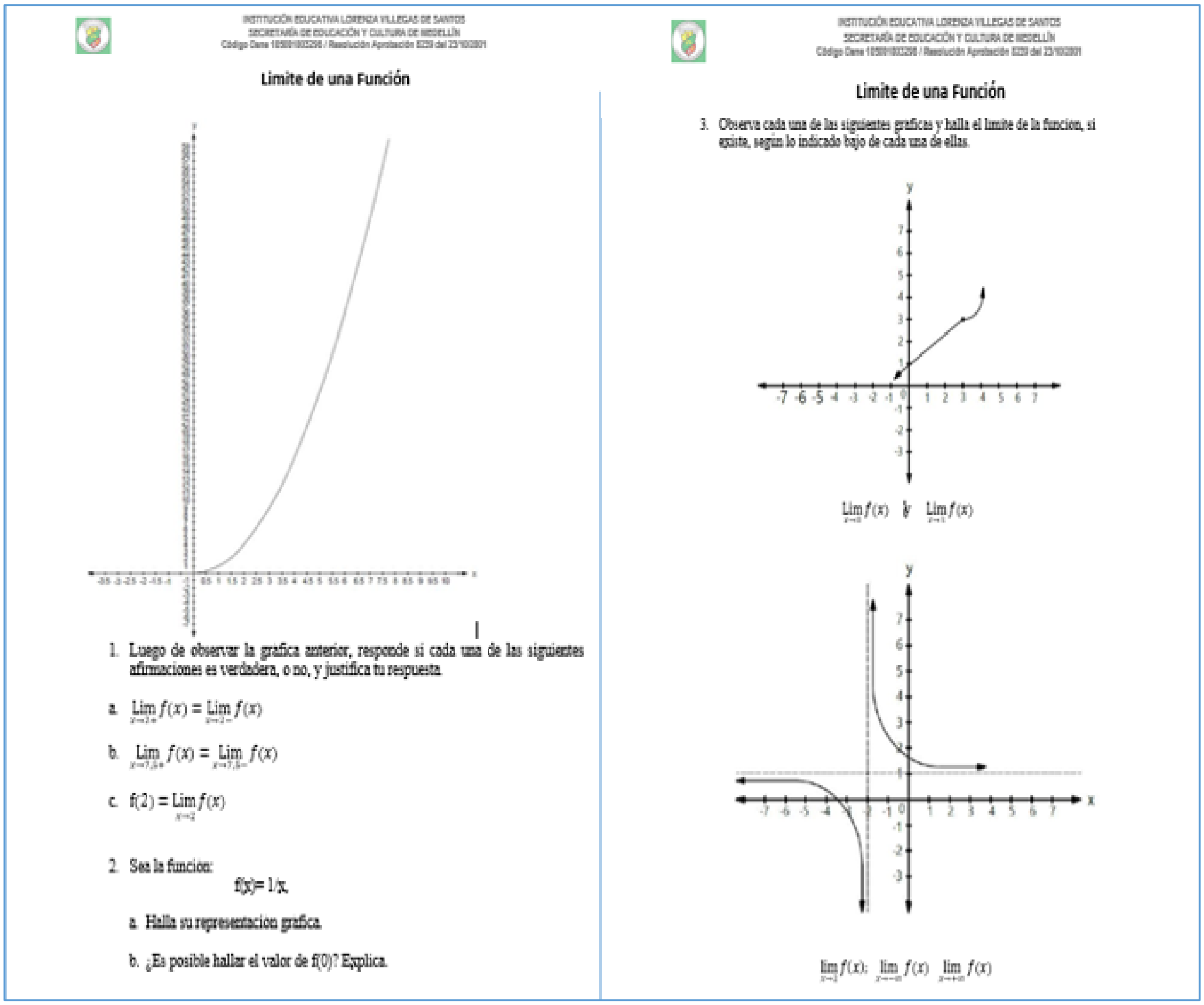
De acuerdo al planteamiento del problema y a la información dada en la tabla:

1. ¿Cuáles son las variables involucradas en el problema? Justifica tu respuesta.
2. En esta situación, podría decirse que una de las variables, depende de la otra? Explica.
3. ¿Cuántos valores de área le corresponde a cada lado?
4. Realiza la representación gráfica (en un plano cartesiano) de la relación entre las variables.
5. Halla una expresión analítica que represente la relación entre las variables.

Ilustración 8. Primera parte de la guía de la actividad "¿Límite?

La *Actividad Orientadora de Enseñanza* N°7 la denominé "Límite de una Función". En ésta, el *límite de una función* se presenta de manera explícita a través de diferentes sistemas de signos como alfanuméricos y gráficos. El uso de diferentes sistemas semióticos de representación tuvo como intención que las estudiantes se aproximaran a estos y descubrieran nexos existentes tanto entre sus aspectos constitutivos internos (criterio de unicidad, la posibilidad de la no existencia, *límites* infinitos y al infinito, entre, otros) como con otros objetos tales como *función* e *infinitésimo*. Por lo tanto, mediante esta *Actividad Orientadora de*

Enseñanza continué propiciando condiciones para el proceso de *objetivación* del concepto *límite de una función* por parte de las estudiantes, mediante las acciones contenidas de forma implícita en las preguntas de la guía. A continuación, presento la guía.



INSTITUCIÓN EDUCATIVA LORENZA VILLEGAS DE SANTOS
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA DE MEDELLÍN

Limite de una Función

1. Luego de observar la grafica anterior, responde si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera, o no, y justifica tu respuesta.

a. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$

b. $\lim_{x\to 7,5^+} f(x) = \lim_{x\to 7,5^-} f(x)$

c. $f(2) = \lim_{x\to 2} f(x)$

2. Sea la funcion:

$f(x)= 1/x$.

a. Halla su representacion grafica.

b. ¿Es posible hallar el valor de f(0)? Explica.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA LORENZA VILLEGAS DE SANTOS
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA DE MEDELLÍN

Limite de una Función

3. Observa cada una de las siguientes graficas y halla el limite de la funcion, si existe, según lo indicado bajo de cada una de ellas.

$\lim_{x\to 0} f(x)$ y $\lim_{x\to 1} f(x)$

$\lim_{x\to -2} f(x)$; $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

Ilustración 9. Guía de la actividad “Límite de una Función”

La *situación desencadenadora de aprendizaje* contenida en la séptima *Actividad Orientadora de Enseñanza*, que denominé “Limite de una Función en un punto”, constó de seis situaciones-problema enmarcadas en diversos contextos. En cada una de ellas, el *límite de una función* fue presentado –de forma directa o indirecta– en dialéctica con el concepto de *función* de variable real. En esa medida, en el diseño de esta *Actividad Orientadora de Enseñanza* tuve como objetivo que el concepto de *límite de una función* se transformara en un medio esencial de sus procesos de reflexión cuando las estudiantes realizaran operaciones para solucionar las situaciones planteadas. Es decir, que, en su *actividad* mental, operaran con el concepto –rasgo característico del *pensamiento teórico*– elaborado en su proceso de *objetivación* durante el desarrollo de todas las *Actividades Orientadoras de Enseñanza* del trabajo de campo.

A continuación, presento la guía que orientó la *Actividad Orientadora de Enseñanza* en mención.

Nombre(s):____Fecha:_________

Límite de una Función en un Punto

1. Como sabemos, las dos unidades de medida de la temperatura más usadas son: Fahrenheit (°F) y Celsius (°C) –o centígrados –. Sabemos además, que entre ambas unidades existe la siguiente relación:

   $$F = 1{,}8C + 32$$

   En donde C es la temperatura en grados Celsius, F es la temperatura en grados Fahrenheit y 32 es el punto de congelación del agua (en °F)

   Partiendo de la relación anterior y de que: el punto de ebullición del agua es de 100°C (212°F) y su punto de congelación es de 0°C (32°F), ¿cuál es la temperatura del agua, en grados Fahrenheit, en cierto momento en que un termómetro marca valores que tienden a 20°C?

2. Desea hallarse el valor que toma cierta función, cuando la variable independiente tiende al valor de 2. Se sabe que la variable dependiente equivale al cubo de la variable independiente aumentada en 3 unidades.

3. Sea la función:

   $$f(x) = 3x - 1,$$

   halla $\lim_{x \to 4} f(x)$

4. La siguiente función representa la forma en que se presenta cierto fenómeno. Halla el valor del límite de la función en la vecindad del 3.

   $$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

5. Del estudio de cierto fenómeno natural se dedujo la función que lo representa, cuya expresión analítica es la siguiente:

   $$f(x) = \begin{cases} 3 - x & si\ x \geq -1 \\ x^2 + 2x & si\ x < -1 \end{cases}$$

   Se desea saber el valor posible de la función cuando la variable independiente toma valores pertenecientes a la vecindad del -1. Resuelve la situación.

6. Responde las siguientes preguntas.
   a. ¿Qué entiendes por límite de una función en un punto?
   b. ¿Qué entiendes por infinitésimo?
   c. ¿Hallas relación entre infinitésimo y límite de una función? Explica.

Ilustración 10. Guía de la actividad “Límite de una Función en un punto”

A partir de las *Actividades Orientadoras de Enseñanza* vislumbré una posibilidad para desarrollar el *pensamiento teórico* en las estudiantes. Por esta razón, dichas *actividades* fueron el pilar epistemológico del trabajo de campo de este proyecto de tesis.

Mi intencionalidad fue analizar cómo podía desarrollarse el *pensamiento teórico* de estudiantes de grado undécimo, en su proceso de *objetivación* del concepto de *límite de una función.* En consecuencia, elegí las tres estudiantes que participaron de esta investigación como protagonistas, atendiendo a sus intereses hacia el área, hacia la investigación y hacia el desarrollo de las *Actividades Orientadoras de Enseñanza* propuestas.

Considero importante explicitar que realicé la producción de registros y de datos durante las clases en las que las estudiantes desarrollaron las *Actividades Orientadoras de Enseñanza* propuestas. Así, desde mi observación participante asumí el papel de *"Quilt maker* o *Bricoleur"* (Denzin y Lincoln, 2012, p.49) ya que tomé partes de la realidad que observé, utilizando diferentes herramientas y técnicas, y las uní al interpretarlas –desde mi subjetividad– para construir un hilvanado de los datos en los diferentes momentos del trabajo de campo.

Los instrumentos y registros que usé para el hilvanado fueron:

- Videograbaciones y audios de los encuentros en el aula.
- Fotografías que posibilitaron evidenciar diferentes episodios.
- Un diario en el que plasmé mis reflexiones como investigadora.
- Otros registros (escritos, orales) producidos por las estudiantes y derivados del desarrollo de las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*.

Análisis de los datos.

Realicé un estudio de casos, bajo las consideraciones de Yin (1984, 2010) y una triangulación entre los datos, mi mirada como investigadora y el marco teórico para analizar dichos datos. Yin (2010) plantea que un estudio de casos "(…) investiga un fenómeno contemporáneo en profundidad y en su contexto de vida real, especialmente cuando los límites entre el fenómeno y el contexto no son claramente evidentes". De esta manera, empleé el estudio de casos, no como método, sino como una herramienta de análisis porque me interesé en interpretar un fenómeno particular en las condiciones naturales en las que se dio la relación entre el sujeto protagonista de la investigación y el objeto de saber matemático, mediados por las particularidades de la cultura que los constituye.

Analicé el caso de las tres estudiantes protagonistas del proyecto de tesis en concordancia con Yin (2010) cuando plantea que el caso "debe ser un fenómeno de la vida real, no una abstracción…" (p. 53). Así, el objeto de estudio fue la manera en que las estudiantes desarrollaron el *pensamiento teórico* en el proceso de *objetivación* del concepto de *límite*, en el contexto escolar al que pertenecían. Para ampliar mis comprensiones sobre dicho contexto consideré factores sociales, culturales e históricos (factores constitutivos de ese contexto).

Las unidades de análisis fueron los enunciados de las estudiantes protagonistas de la investigación, presentes en las *acciones* y *operaciones* realizadas por éstas en el desarrollo de las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*. Parafraseando a Bajtín (2009), las diversas *actividades* humanas están relacionadas con el lenguaje y, específicamente, con el uso de una lengua que es llevada a cabo en forma de enunciados. Para Bajtín el enunciado es "la unidad real de la comunicación discursiva" (2009, p. 260). Así, es a través de él que el sujeto constituye su discurso; manifiesta su voz. En este sentido, a través de los enunciados –verbales y gestuales– las estudiantes expresaron, de diferentes maneras, la aproximación paulatina a la esencia del objeto *límite* mediante las diferentes *acciones* y operaciones que realizaron en el marco de las *actividades* por mí propuestas; siendo, por lo tanto, las *acciones* – y operaciones– el factor determinante de cada enunciado.

Como mencioné antes, adopté una triangulación entre: uno, los datos producidos y registrados en el trabajo de campo a través del hilvanado explicado en el apartado anterior; dos, los resultados de mis observaciones, movidas al ritmo de lo hallado en los episodios resultantes de los encuentros en el aula (evidenciados en las unidades de análisis); y, tres, entre los fundamentos ontológicos, gnoseológicos, epistemológicos y metodológicos que asumí durante el proceso investigativo, construidos a través y desde las bases teóricas abordadas. Es decir, en la triangulación imbriqué diferentes elementos que se transformaron en las diversas voces de y para mi análisis.

En esa misma línea y en la dirección de mis supuestos epistemológicos y metodológicos, considero que el análisis de la complejidad de un fenómeno perteneciente al campo de la educación y específicamente al de la *actividad de aprendizaje* (Moura, 1998), como en este caso, debe hacerse bajo el cristal de la lógica dialéctica ya que un fenómeno como este es de naturaleza fluctuante, no estática. Esto es, en primer lugar, comprender el fenómeno como un todo conformado por partes que están en una unidad dialéctica y que, por lo tanto, están en permanente cambio, pues los sujetos implicados en él –en este caso, las estudiantes protagonistas del proyecto y el contexto–, son a la vez de naturaleza cambiante. En segundo lugar, y en concordancia con el primero, el análisis en sí fue igualmente mutable ya que lo debí ampliar y (re)direccionar algunas veces, acorde con el tejido de voces convergentes en él. Por tales razones, concuerdo con Richardson y Pierre, referenciados por Denzin y Lincoln (2012), cuando exponen que:

> (…) La figura central de la investigación cualitativa debería ser el cristal y no el triángulo. (…) Los cristales crecen, cambian, se modifican (…) Son prismas que reflejan externalidades y las refractan en su propio interior, creando diferentes colores, patrones y escalas, arrojándolos en diferentes direcciones. (p. 53)

Inscrita en la investigación cualitativa, a la luz del enfoque crítico-dialéctico y desde el rol de *Quilt Maker,* a través de mi prisma de investigadora interpreté la esencia de los elementos constitutivos del proceso en el que las estudiantes se aproximaron –desde su subjetividad– al concepto de *límite de una función* y analicé el desarrollo de su *pensamiento teórico* imbricado a un proceso de *objetivación*.

El movimiento: Carácter indefectible de la naturaleza

El constante intento del ser humano por comprender y dominar la naturaleza, a través del devenir histórico, lo ha motivado a crear diferentes ciencias. Sin embargo, y coincidiendo con varios autores (Aleksandrov, 1976; Engels, 1961; Boyer, 1999; entre otros), es a partir de finales de la edad media e inicios de la edad moderna, que las ciencias eurocéntricas dieron sus primeros grandes pasos, como consecuencia de la búsqueda de una explicación a las diferentes manifestaciones de cambio y movimiento en fenómenos físicos y astronómicos de la época. Es así como el sujeto moderno aventurado a investigar la naturaleza con una postura más amplia que la heredada de la época medieval es quien, rompiendo el orden establecido, construyó nuevas formas para entender lo aparentemente inexplicable.

Como parte de esa construcción surgió la mecánica, que se hacía indispensable para solucionar problemas surgidos en torno al desplazamiento de los cuerpos terrestres y cósmicos. En la búsqueda de explicaciones satisfactorias, a la par con la mecánica, la matemática presentó un gran desarrollo. De esta manera, en la modernidad, apareció en escena la matemática del cambio y el movimiento, cuantificando lo que se había considerado incuantificable hasta entonces.

En consecuencia, bajo el entendimiento de que las cosas están en constante movimiento, los científicos Newton y Leibniz sintetizaron parte del saber matemático construido por sus antecesores y crearon herramientas matemáticas –tales como el *infinitésimo* y con él, el concepto de *límite de una función*– que posibilitaron analizar el carácter continuo del movimiento.

Desde mi perspectiva epistemológica, gnoseológica y ontológica, comprendo el movimiento como un aspecto esencial de la materia –realidad objetiva existente– cuyo elemento consustancial es el cambio; es impensable el movimiento sin el cambio (y viceversa). En esa dirección, desde la lógica dialéctica, Engels (1961) afirma que:

> (…) La materia se mueve en un ciclo perenne, ciclo que probablemente describe su órbita en períodos de tiempo para los que nuestro año terrestre ya no ofrece una pauta de medida suficiente; en el que el tiempo del más alto desarrollo, el tiempo de la vida orgánica y, más aún, el de la vida consciente de sí misma y de la naturaleza, resulta medido tan brevemente como el espacio en el que se hacen valer la vida y la conciencia; en el que toda modalidad finita de existencia de la materia, ya sea sol o nebulosa, animal concreto o especie animal, combinación o disociación química, es igualmente perecedera y en el que nada hay eterno fuera de la materia en eterno movimiento y de las leyes con arreglo a las cuales se mueve y cambia. (p.20)

En la presente categoría, tomo como eje central el movimiento a partir de la dialéctica materialista toda vez que ésta, como uno de mis pilares epistemológicos, gnoseológicos y ontológicos, me posibilita entender la concatenación de los factores asociados al objeto de estudio de esta tesis: desarrollo del *pensamiento* de las estudiantes de grado undécimo. Por consiguiente, empleando el método dialéctico, analizo en esta categoría diferentes momentos en que las estudiantes protagonistas de la investigación identificaron el movimiento como condición *sine qua non* del *límite de una función* de variable real. Así mismo, analizo el movimiento del *pensamiento* de las estudiantes durante las *Actividades Orientadoras de Enseñanza* (Moura, 1998, 2010) que diseñé para el trabajo de campo.

Moura, Araújo, Dias, Panossian y Dias (2010) plantean que, en la *Actividad Orientadora de Enseñanza*, las necesidades, los motivos, los objetivos y las acciones son movilizados por una *situación desencadenadora de aprendizaje*; situación que es propuesta por el maestro. Así, las acciones del maestro están dirigidas a la solución de la *situación desencadenadora* considerando las condiciones materiales, los recursos metodológicos, el objeto de saber, los sujetos y el contexto cultural del que estos últimos hacen parte.

La primera *Actividad Orientadora de Enseñanza* que diseñé, y que las estudiantes desarrollaron después, estuvo movilizada por una *situación desencadenadora de aprendizaje* bajo el recurso de historia virtual (como se explicó en el apartado correspondiente al diseño metodológico), ya que el motivo de la *Actividad Orientadora de Enseñanza* fue determinar la posición exacta de un móvil en un instante dado. Este fue un problema con el que se enfrentaron los científicos del siglo XVII ante una tradición científica que consideraba el movimiento como una "sucesión de estados particulares de un móvil" (Caraça, 195, p.215), lo que conllevaba a estudiarlo de una manera estática.

Así, en la primera *Actividad Orientadora de Enseñanza*, enmarcada dentro de la historia virtual, tuve como objetivo posibilitar a las estudiantes la deducción del movimiento –mecánico– como un continuo. De manera tal, que en la medida en que las estudiantes resolvieran la *situación desencadenadora de aprendizaje* mediante el empleo de diferentes estrategias comenzaran a aproximarse al concepto de *infinitésimo* de manera intuitiva; concepto fundamental en la concepción dinámica de *límite de una función*.

Esta *Actividad Orientadora de Enseñanza* denominada "Determinación de la posición de un cuerpo en un instante dado" fue realizada en dos momentos. El primero tuvo un carácter experimental. En él, las estudiantes resolvieron en grupo *la situación desencadenadora de aprendizaje* de la guía (esta guía fue presentada en el apartado correspondiente a la metodología de la investigación). Mi intencionalidad del trabajo en grupos fue la de posibilitar la reflexión individual a partir de la voz del otro, en torno a las acciones y operaciones a realizar conjuntamente, en la búsqueda de soluciones al problema común. Como parte de la organización de dicha *Actividad Orientadora de Enseñanza* sugerí a las estudiantes que conformaran equipos de tres o cuatro integrantes, en línea con mi apuesta epistemológica sobre el aprendizaje. Es decir, el aprendizaje como un proceso social en el que se da un "encuentro consciente" (Radford, 2013, p. 39) entre el individuo y el objeto cultural a partir de su interacción con el *otro* –con todo lo que *no soy yo* (Bajtín, 2004, 2009)–. Un *yo* que, en términos bajtinianos, no puede concebirse sino con la presencia activa del *otro* pues su esencia es completamente social. Es decir, un *yo* que se constituye a partir de las diferentes voces de los *otros*; *otros* que, en alguna medida, le posibilitan aprender.

Así, en este primer momento tuve, además, la intencionalidad que las estudiantes reflexionaran sobre un objeto que les presenté en forma "concreto-sensorial" (Kopnin, 1978), como una fuente de conocimiento para posibilitar el movimiento de su *pensamiento* hacia un nivel de concreción racional. El segundo momento constó de las respuestas que las estudiantes dieron a las preguntas planteadas por escrito en sus respectivos grupos de trabajo, para socializarlas después en el aula, ante toda la clase.

Es claro, que el desarrollo del *pensamiento* no se da en momentos sensoriales y racionales separados; ambos actúan en unidad, como un todo. En esa línea, presento los dos momentos de la *Actividad Orientadora de Enseñanza* solamente para mostrar la forma como distribuí el tiempo de las sesiones de clase con el fin de organizar la *actividad* de enseñanza.

Ilustración 11. "Determinación de un móvil en un instante dado"-Momento práctico. (11 de julio de 2017)

A continuación, presento un episodio de la primera *Actividad Orientadora de Enseñanza* correspondiente al primer momento, a través de las voces de las estudiantes protagonistas de la investigación —Eliza, Dana y Ana—. Este episodio ocurrió en el desarrollo de la parte práctica y a través de las respuestas escritas a las preguntas que formulé en el taller escrito que contenía las acciones y operaciones sugeridas. Considero importante aclarar que Eliza no participó en la conformación del grupo de trabajo de Dana y Ana en esta *actividad*.

Durante el desarrollo de la parte experimental de la *Actividad Orientadora de Enseñanza,* le pregunté a cada uno de los subgrupos sobre el fenómeno físico principal que identificaban en el sistema burbuja-manguera. En las siguientes líneas presento un fragmento del diálogo con los dos subgrupos de los que hicieron parte las estudiantes participantes de la investigación.

Maestra: *¿Cuál piensas que es el fenómeno físico principal que podemos observar?*

Dana: *La distancia.*

Ana: *La velocidad de la burbuja.*

Maestra: *¿Por qué? –Dirigiéndome a ambas estudiantes.*

Dana: *Porque es la distancia que está recorriendo la burbuja. Eh…el tiempo también, pues el tiempo siempre nos acompaña, el tiempo no se detiene.*

Ana: *Sí, también el tiempo, entonces es la velocidad. Tiene tiempo y distancia.*

Dana: *Sí, la velocidad.*

Maestra: *Y, ¿cómo la están analizando?, ¿qué están teniendo en cuenta para saber con qué velocidad va la burbuja?*

Ana: *Uhmm…no sé. Ah, no, eso no es. Es el movimiento.*

Maestra: *¿Por qué?*

Ana: *Porque es lo que estamos viendo. La burbujita se desplaza por la manguera.*

Dana: *Ah, sí, sí. Pero también tiene velocidad, ¿cierto? –dirigiéndose a mí–*

Maestra: *¿Qué dices Ana?*

Ana: *Obvio. Pero lo principal, lo que vemos, es que la burbuja se está moviendo.*

Maestra: *Listo. Continúen, por favor. En un momento vuelvo.*

El diálogo en el subgrupo del que Eliza hizo parte fue:

Maestra: *¿Cuál piensas que es el fenómeno físico principal que podemos observar?*

Eliza: *El movimiento de la burbuja.*

Maestra: *¿Por qué?*

Eliza: *Porque es el cambio que la burbuja hace en su recorrido. En ningún momento, la burbuja para.*

Maestra: *Cuando dices cambio de la burbuja ¿a qué te refieres?*

Eliza: *Pues que la burbuja no está siempre en la misma parte, se mueve hasta que llega a la parte final de la manguera.*

Frente a sus respuestas, sus compañeras de equipo asintieron con un movimiento de cabeza.

Mediante la pregunta formulada, las estudiantes se enfrentaron al objeto de saber de una manera activa, de tal forma que reflexionaron sobre un fenómeno –el movimiento rectilíneo– que no habían descubierto. En ese momento mi voz adquirió un carácter mediador entre las estudiantes –sujetos de la *actividad*– y el fenómeno –objeto de la *actividad*–. Las estudiantes interactuaron con el objeto de una manera diferente. Ante la necesidad de responder la pregunta, el objeto se transformó en un objeto de conocimiento que, en consecuencia, las introdujo en una *actividad intelectual*. Es decir, en las estudiantes hubo una movilización de una de las funciones psíquicas superiores: el *pensamiento*.

Desde el materialismo histórico, el *pensamiento* es consecuencia de la dialéctica existente entre el sujeto y la realidad objetiva. Es decir, entre el sujeto y el mundo material que éste habita; mundo que existe independientemente de la interacción con él, de su conocimiento por parte del sujeto. Parafraseando a Kopnin (1978), el mundo material es todo aquello —cosa, proceso, fenómeno— que existe fuera de nuestra *conciencia* y que, por lo tanto, no está impregnado de subjetividades.

Luria (1984b) afirma que el *pensamiento* es "una forma compleja de *actividad cognitiva*" (p.305) que es orientada a un fin y que se adapta a las diversas situaciones cambiantes del entorno social del sujeto. De tal manera, el *pensamiento* es un proceso intelectual selectivo que surge cuando el sujeto tiene un motivo generado por la necesidad de hallar solución a determinada situación resultante de la interacción activa con la realidad objetiva.

En esa misma línea, Kopnin (1978) define *pensamiento* como una *actividad* subjetiva que posibilita conocer las leyes de la naturaleza y de la sociedad. En palabras de este autor, el *pensamiento* es "*el reflejo de la realidad […] es un modo de conocimiento de la realidad objetiva, por el hombre*" (p. 121). Dicho reflejo, de acuerdo con el mismo autor, es uno de los resultados de la *actividad* del ser humano que posibilita comprender las propiedades de cierto objeto o fenómeno en movimiento.

El reflejo, lejos de ser una fiel copia del objeto material, es un proceso creativo del sujeto en el que reproduce el objeto en forma de ideas. "Las ideas son imágenes según las cuales el hombre crea de los objetos existentes nuevos objetos; así se reflejarán en las ideas las propiedades y leyes de la realidad objetiva" (Kopnin, 1978, p. 122). En esa dirección, las ideas no pueden ser estáticas, en tanto que son imágenes de una realidad que tampoco lo es y, además, son éstas las que constituyen la *conciencia* del sujeto. Así, comprendo el reflejo como una *actividad* subjetiva y creativa por la que el individuo transforma mentalmente la realidad objetiva durante la *actividad práctica* social. Concordando con Kopnin (1978), entender el *pensamiento* como reflejo conlleva, además, entender la dialéctica existente entre lo objetivo y lo subjetivo propio de él, toda vez que en el proceso del *pensamiento* se crea una imagen subjetiva del mundo objetivo.

En cuanto a la subjetividad del *pensamiento*, el mismo autor plantea que, en primer lugar, se refiere siempre a un sujeto, es decir, la manera en que existe el objeto en el *pensamiento* depende de un sujeto. En segundo lugar, el resultado de la subjetividad crea una imagen de lo ideal del objeto, no el objeto mismo.

El *pensamiento* es objetivo por dos condiciones: la primera, porque lo es su contenido —la realidad objetiva— y, la segunda, por ser el resultado de la *actividad* social, no del resultado de la *actividad* de un individuo apartado del colectivo (Kopnin, 1978). El pensamiento es, además, una *actividad intelectual* –en el plano mental– que resulta de la *actividad práctica* –en la experiencia sensorial inmediata– del ser humano. Es por esta razón que el producto principal del *pensamiento* es la formación de ideas, las cuales se producen acordes a la particularidad del desarrollo del *pensamiento*. Esto es, “el movimiento del pensamiento consiste en el desarrollo de la imagen cognitiva, en el movimiento de lo desconocido a lo conocido” (Kopnin, 1978, p. 129). Así, el desarrollo del *pensamiento* está en dialéctica con su movimiento particular.

En los diálogos anteriores se evidencia que Ana y Dana crearon una idea individual del objeto de estudio a partir de la *actividad práctica* grupal; ellas formaron “ideas matemáticas” (Vergel, 2014, p.10). En su interacción con el objeto, y permeada por las voces de su maestra y de sus compañeras de grupo, cada estudiante formó una imagen cognitiva del objeto material Ante la pregunta sobre el fenómeno principal observado la respuesta de Dana –*la distancia* – posiblemente se debió a un resultado surgido de la contemplación directa, derivada de una de las operaciones que las estudiantes debían realizar según la guía escrita. Sin embargo, ante las respuestas dadas por Ana y una nueva solicitud de mi parte de una argumentación, Dana hizo un movimiento entre el objeto de su contemplación y su percepción, generando una nueva reflexión que la llevó a expresar: *Ah, sí, sí.* Es decir, Dana creó una nueva imagen a partir de las voces de su maestra y de su compañera de grupo. Así mismo, cuando Dana expresó: *pero también tiene velocidad, ¿cierto?,* ella relacionó la nueva imagen creada con un concepto perteneciente al campo de la física –la velocidad de un cuerpo en trayectoria rectilínea– construido en un momento histórico anterior a su reflexión. Este es un concepto histórico producto de un saber cultural heredado de generaciones anteriores a la que Dana y sus compañeras pertenecen. En ese sentido, Leontiev (2004), plantea:

> Está fuera de cuestión que la experiencia individual del hombre, por más rica que sea, baste para producir la formación de un pensamiento lógico o matemático abstracto y los sistemas conceptuales correspondientes. Sería preciso no una vida, sino mil. De hecho, el pensamiento y el saber de una generación se forman a partir de la apropiación de los resultados de la actividad cognitiva de las generaciones precedentes. (p. 284)

En el desarrollo práctico de la *Actividad Orientadora de Enseñanza nombrada,* Dana dedujo que la burbuja llevaba una velocidad y, luego modificó su reflexión a partir de las respuestas de Ana a la pregunta que le formulé. En este mismo sentido, en el segundo momento de la *Actividad Orientadora de Enseñanza* –momento en que las estudiantes resolvieron las preguntas en forma escrita— la repuesta de Ana evidenció el movimiento de su *pensamiento* entre un antes y un después de abordar el objeto de estudio en un momento colectivo. Mi afirmación se corrobora a través de la ilustración 12 que expongo a continuación.

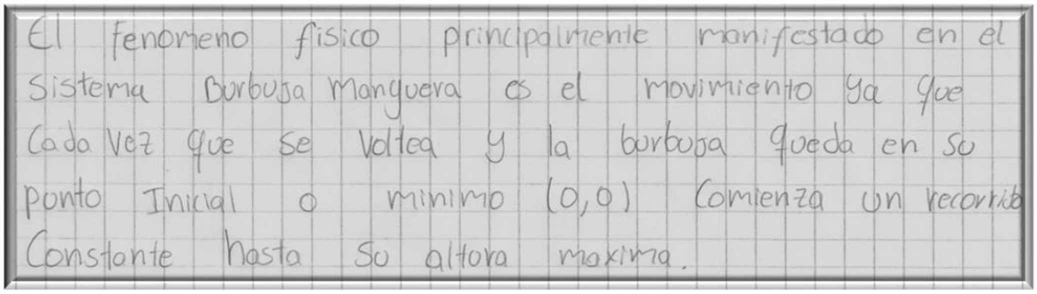

El fenomeno fisico principalmente manifestado en el Sistema Burbuja Manguera es el movimiento ya que Cada Vez que se Voltea y la burbuja queda en su ponto Inicial o minimo (0,0) Comienza un recorrido Constante hasta su altora maxima.

Ilustración 12. Respuesta de Ana. “Determinación de un móvil en un instante dado”-segundo momento. (18 de julio de 2017)

Las experiencias individuales tanto de Dana como de Ana al enfrentarse al objeto –un objeto que en el presente es la síntesis de toda una construcción histórica y cultural– estuvieron constituidas tanto por las intersubjetividades resultantes de la *actividad* que realizaron, como por un saber matemático –producto de la *actividad* de momentos socio-históricos anteriores– preexistente al ahora.

La *actividad* en la que las estudiantes se sumergieron les propició cierto nivel de *pensamiento.* Por ejemplo, cuando Ana expresó: es *el movimiento…Porque es lo que estamos viendo; la burbujita se desplaza por la manguera*, el asociarlo al cambio como argumento fundamental e identificar el movimiento mismo como fenómeno principal, dio cuenta de un reflejo del objeto como producto de su apropiación particular de la *actividad mental* heredada de la cultura que la constituye como sujeto de dicha *actividad*.

De forma similar, Eliza –en su proceso particular de *pensamiento*– identificó el movimiento como fenómeno principal manifiesto en la *actividad*, al parecer, con mayor claridad que Ana y Dana, pues respondió: *el movimiento de la burbuja*, justo después de la formulación de la pregunta. Al igual que Ana, Eliza relacionó el cambio como condición de la existencia del movimiento; reflexión que se evidenció cuando explicó el sentido que cobró para ella el cambio en el desplazamiento de la burbuja. En sus palabras, *(…) la burbuja no está siempre en la misma parte, se mueve hasta que llega a la parte final de la manguera.*

Eliza, Dana y Ana manifestaron a través de la palabra sus formas individuales de *actividad mental*, a partir del desarrollo de una *actividad práctica* grupal en torno a un concepto que ha sido construido de forma histórica. En ese sentido, Davidov (1988) define el *pensamiento* como una “función desarrollada históricamente por su verdadero sujeto (la sociedad), que es apropiada por el individuo” (p.115). Es decir, en el proceso del *pensamiento* intervienen dos sujetos: uno, un sujeto social, que es quien se humaniza por medio del desarrollo de la *actividad práctica* de acuerdo con sus necesidades y la forma cultural como las satisface. Y, dos, un sujeto individual que es quien refleja o refracta el *pensamiento* social, cultural e históricamente elaborado, de acuerdo con su manera particular de relacionarse con la realidad.

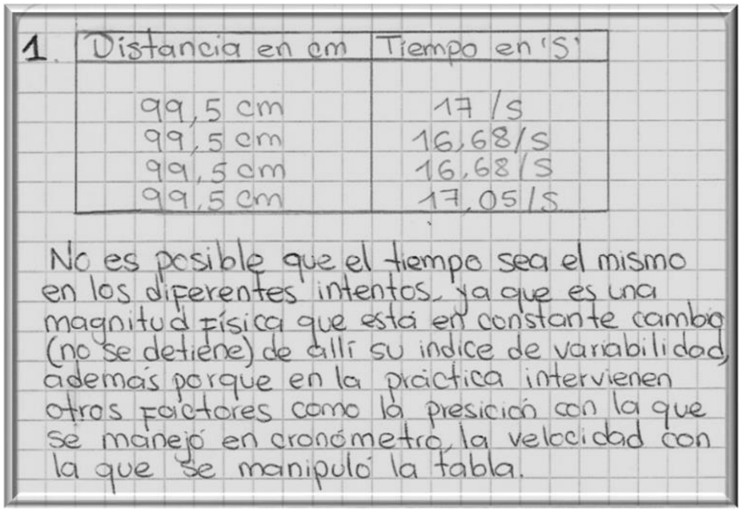
Por lo tanto, comprendo el *pensamiento* como el vínculo individual y dinámico de un sujeto con la realidad de la que hace parte, en tanto que lo relaciona con ella activamente, y éste es, a la vez, el producto de la interacción misma. Sin embargo, es un vínculo que contiene una historicidad y una elaboración social previa al momento en el que el sujeto lo crea. En esta dirección, comprendo el *pensamiento* como una acción intencional del sujeto sobre un objeto, cuyo resultado es un nuevo objeto transformado en el plano de la *conciencia*. Me refiero aquí a una acción intencional como aquella que hace parte fundamental de la *actividad mental-intelectual* que realiza el sujeto, resultante de la *actividad práctica* humana que posibilita la capacidad de razonamiento, de comprender el objeto de la *actividad*.

En el episodio en mención y en el momento de la parte práctica referida, presenté a las estudiantes, en forma escrita, unas acciones y una pregunta que muestro a continuación, con la intencionalidad de continuar involucrándolas en una *actividad de aprendizaje*.

Mide el tiempo que tarda el cuerpo (la burbuja) en hacer todo el recorrido. Repite el procedimiento las veces necesarias para aproximarte a un dato preciso. Anota los resultados. ¿Obtuviste el mismo valor del tiempo en las veces que lo mediste? Argumenta.

Ilustración 13. "Determinación de un móvil en un instante dado"-Momento práctico. (11 de julio de 2017)

A continuación, presento la respuesta de Eliza –en el segundo momento– resultante de las acciones realizadas en colaboración con sus compañeras de *actividad*.


1.

Distancia en cm	Tiempo en 'S'
99,5 cm	17 /s
99,5 cm	16,68/s
99,5 cm	16,68/s
99,5 cm	17,05/s

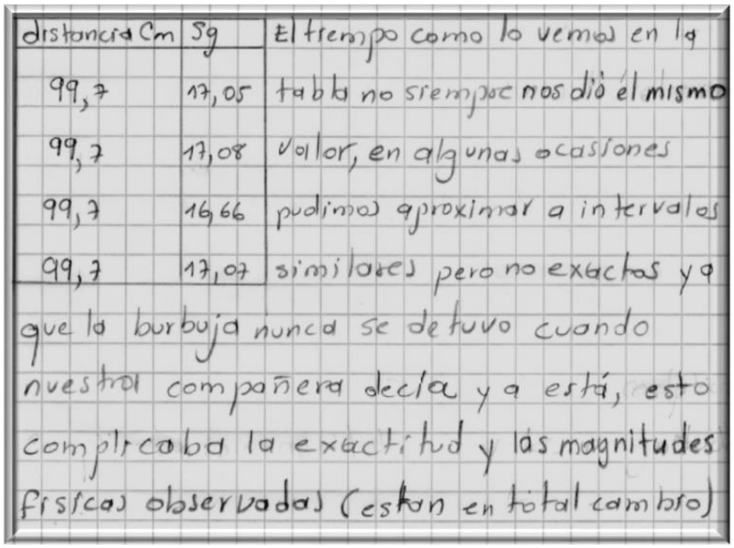
No es posible que el tiempo sea el mismo en los diferentes intentos, ya que es una magnitud física que está en constante cambio (no se detiene) de allí su indice de variabilidad, además porque en la práctica intervienen otros factores como la presición con la que se manejó en cronómetro, la velocidad con la que se manipuló la tabla.

Ilustración 14. Respuesta de Eliza. "Determinación de un móvil en un instante dado"-Segundo momento. (18 de julio de 2017)

Eliza creó una tabla con los resultados de dos de los productos de las acciones de la *Actividad Orientadora de Enseñanza*: la medición del tiempo que tardó el móvil (la burbuja) en recorrer la trayectoria rectilínea (la manguera) y los valores obtenidos. Aunque la tabla de Eliza no atendió a una forma canónica de presentar los datos, se convirtió en un soporte para reflexionar sobre el producto de las operaciones y, por lo tanto, sobre el fenómeno de estudio.

En cuanto a la pregunta sobre el tiempo que tardaba la burbuja en realizar su recorrido, Eliza asoció la variabilidad de los datos con el carácter cambiante del tiempo como razón principal y las operaciones que realizaron ella y sus compañeras de *actividad*, tales como la manipulación del sistema burbuja-manguera y el manejo del cronómetro. A su vez, de manera intuitiva, Eliza expresó el carácter continuo del tiempo e identificó su variación de manera cualitativa.

Por su parte, Dana respondió lo siguiente:



distancia Cm	Sg
99,7	17,05
99,7	17,08
99,7	16,66
99,7	17,07

El tiempo como lo vemos en la tabla no siempre nos dió el mismo valor, en algunas ocasiones pudimos aproximar a intervalos similares pero no exactos ya que la burbuja nunca se detuvo cuando nuestra compañera decía ya está, esto complicaba la exactitud y las magnitudes fisicas observadas (estan en total cambio)

Ilustración 15. Respuesta de Dana. “Determinación de un móvil en un instante dado”-Segundo momento. (18 de julio de 2017)

Al igual que Eliza, Dana construyó una tabla con los valores que halló con sus compañeras de *actividad* sobre la medición de los intervalos de tiempo tomado por el móvil en recorrer la distancia total. En su reflexión, “*en algunas ocasiones nos pudimos aproximar a intervalos similares, pero no exactos, ya que la burbuja nunca se detuvo”*, Dana identificó el carácter continuo del movimiento y por lo tanto su dificultad para medir los intervalos de tiempo en las condiciones materiales de la *actividad* práctica. Este hecho se corroboró en el momento de la socialización de la *Actividad Orientadora de Enseñanza*, cuando ella expresó:

> *Es que, ahí [los resultados diferentes del valor del tiempo] es cuando llegamos al momento de decir las hipótesis. O sea, de cómo es el movimiento de la persona que está volteando la tabla, la que está mirando el cronómetro, la que escribe. Porque obviamente, la que está mirando el cronómetro y observa, mientras le dice a la que está midiendo, le dice “ya”, pues no siempre lo va a hacer con la misma rapidez* (Dana, “Determinación de la posición de un cuerpo en un instante dado”, 18 de julio de 2017).

Dana esperaba obtener el mismo valor del tiempo todas las veces que tomó su medida, pues en su reflexión subraya lo que ella refiere como inexactitud. Esa inexactitud las llevó, a ella y a sus compañeras, a hacer ciertas aproximaciones, que nombró como *intervalos* -de tiempo- con el fin de hallar lo más cercano a lo que esperaban obtener. Dana esperaba obtener los mismos resultados todas las veces que midió el tiempo debido, posiblemente, a que en su relación establecida con el objeto de estudio primaron juicios aislados como resultado de la mera descripción del fenómeno, lo cual obedece a un *pensamiento empírico*.

Como parte de mi proceso de comprensión y análisis del proceso de aproximación de las estudiantes al fenómeno físico estudiado, continué mi hilvanado teórico mediante el concepto de *pensamiento empírico*, al cual me referiré en los siguientes párrafos.

El materialismo histórico ha propuesto romper la dicotomía, normalmente existente, entre la *actividad externa* (*práctica*) y la *actividad interna* (*mental, intelectual*), a través de la comprensión de ambas como formas de la *actividad*, que están en permanente dialéctica. Esta dialéctica se manifiesta en la transformación mutua, constante y recíproca entre ambas, conservando los mismos aspectos de la *actividad humana*, actividad fuente de procesos psíquicos superiores tales como la *conciencia* y el *pensamiento*. Al respecto, Leontiev (1984) enuncia:

> Hoy se opera ante nuestros ojos un entrelazamiento y una aproximación cada vez más estrecha de la actividad externa y la interna: el trabajo físico, ejecutor de la transformación práctica de los objetos materiales, se "intelectualiza" cada vez más, abarcando el cumplimiento de las más complejas acciones mentales; al mismo tiempo, el trabajo del investigador moderno –que es una actividad específicamente cognoscitiva,

intelectual *por excellence*– se colma cada vez más de procesos que, por su forma, son acciones externas. (p.80)

De acuerdo con Davidov (1988), la *actividad práctica humana*, entre otras cosas, desarrolla la *actividad mental* y, con ella, la capacidad del ser humano de expresar mediante diversos sistemas semióticos el objeto o fenómeno –idealizado– que analiza.

Si la idealización de ese objeto (o fenómeno) material se realiza de una forma primaria, solamente a partir de los aspectos observados sensorialmente y utilizando la palabra como principal forma de expresión, en lugar de diferentes sistemas semióticos, entonces el proceso mental involucrado es el *pensamiento empírico*. Así, el *pensamiento empírico*, según Davidov (1988 p. 123), es la "(…) forma transformada y expresada verbalmente de la actividad de los órganos de los sentidos, enlazada con la vida real; es el derivado directo de la actividad objetal-sensorial de las personas". Es decir, el *pensamiento empírico* posibilita una aproximación directa al mundo material, conocer la realidad inmediata, su aspecto presente en el momento de la interacción.

Concuerdo con Kopnin (1978) cuando expresa que en el *pensamiento empírico,* el objeto se representa por sus manifestaciones externas, tan solo como resultado de la contemplación hecha por el sujeto. Así, en la forma lógica del *pensamiento empírico,* su contenido fundamental es el juicio de lo observado, generado de forma aislada y emitido mediante un solo término, lo cual no posibilita identificar las particularidades esenciales del objeto, la conexión interna de sus aspectos.

Puede afirmarse que en el *pensamiento empírico* es característico el uso de la palabra para dar a la interacción perceptual la forma de universalidad abstracta, como apunta Davidov (1988).

Esta universalidad, basada en la repetitividad, verbaliza lo percibido en forma de juicios, lo que constituye el fundamento de los procesos de generalización y abstracción empíricas. Los juicios son el resultado de asociaciones simples que se producen “como una fotografía colectiva de los objetos existentes en nuestra memoria” (Vigotsky, 2013c, p. 79). Es decir, los juicios están formados desde una abstracción caótica y mecánica que, por lo tanto, no conlleva, en sí, a acciones mentales que posibiliten hallar las interrelaciones internas del sistema complejo e integral en el que se sumergen los fenómenos de la realidad objetiva.

En cuanto a la generalización empírica, ésta puede entenderse, según Davidov (1998), como el movimiento que muestra solo las características comunes de un objeto o fenómeno en relación a la clase de objetos de la que hace parte. Lo general consiste en hallar ese algo que se repite; es lo invariante de las propiedades del objeto en análisis, constituyéndose en lo esencial, en el concepto mismo.

De acuerdo con Davidov (1988), la generalización empírica se encuentra estrechamente relacionada con el proceso de abstracción ya que, para identificar una cualidad común de un objeto, se requiere hacer una separación de otras de sus cualidades. Esto permite al estudiante, según dicho autor, “convertir la cualidad general en un objeto independiente y especial de las siguientes acciones —la cualidad general se designa con alguna palabra—” (p.102). Así, en esta perspectiva, lo general se considera sólo como lo igual o semejante en el grupo de objetos o fenómeno abordado; lo esencial se interpreta como el rasgo distintivo de la clase de objetos, como lo que permite formar el concepto.

Según Davidov (1988), este tipo de consideraciones coincide con la interpretación de la lógica formal, la cual conlleva a los procesos de generalización y abstracción en la vía del *pensamiento empírico*. Desde la lógica formal, según Davidov (1988), el *pensamiento empírico* se limita a:

> Uno, la comparación de los datos sensoriales concretos con el fin de separar los rasgos formalmente generales y realizar su clasificación; dos, la identificación de los objetos sensoriales concretos con el fin de su inclusión en una u otra clase. (p. 105)

En esa misma línea, Vigotsky (2013c) plantea que para la lógica formal el concepto es considerado como "una estructura mental abstracta, muy alejada de toda riqueza concreta" (p.76). De esta forma, el *pensamiento empírico* origina en los estudiantes la formación de conceptos resultantes de la experiencia sensorial, mas no de la esencia del objeto, la cual es posible descubrir sólo a partir del movimiento, no de manera estática. A este respecto, Vigotsky (1991) afirma que:

> (…) abarcar el proceso de desarrollo de una determinada cosa, en todas sus fases y cambios –desde el nacimiento a la muerte– significa, fundamentalmente, descubrir su naturaleza, su esencia, ya que "solamente es en movimiento que un cuerpo muestra lo que es". (p.46)

Por lo tanto, un fenómeno se debe entender en su devenir, en su historicidad, en su complejidad; no puede ser comprendido en su inmediatez ni en su mera apariencia. No es posible conocer la realidad únicamente mediante el contacto directo con el fenómeno; "el contacto posibilita solamente una representación caótica del todo" (Marx, 2010, p.108). Por lo tanto, comprender un fenómeno –el desplazamiento de un móvil en una trayectoria rectilínea como en este caso– desde el *pensamiento empírico* es conocer sólo una de las dimensiones de la realidad; es conocerla de una forma fragmentada y superficial.

A continuación, presento la respuesta de Ana.

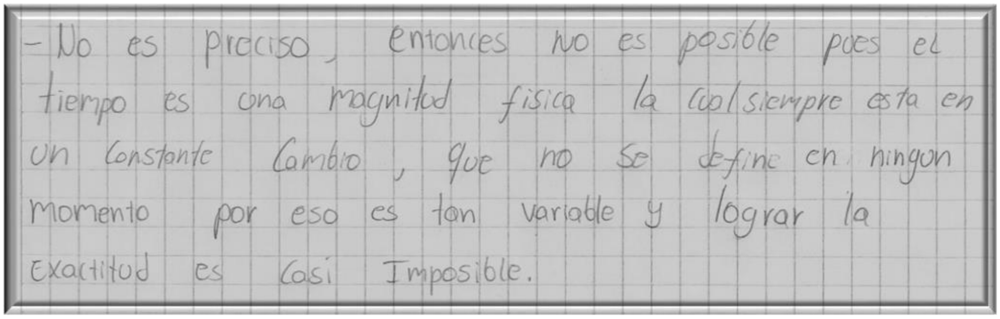

- No es preciso, entonces no es posible pues el tiempo es una magnitud física la cual siempre esta en un constante Cambio, que no se define en ningun momento por eso es tan variable y lograr la exactitud es casi Imposible.

Ilustración 16. Respuesta de Ana. “Determinación de un móvil en un instante dado”-Segundo momento. (18 de julio de 2017)

Al igual que Eliza y Dana, Ana reconoció la esencia cambiante del tiempo pero a diferencia de ellas, hizo un análisis solamente cualitativo. Tampoco construyó una tabla que diera cuenta de los registros de la cuantificación de la magnitud física. En su reflexión sobre el objeto de la *actividad* –el desplazamiento de un móvil en una trayectoria rectilínea–, Ana también manifestó la importancia de *lograr la exactitud* en la cuantificación de las cualidades de las magnitudes observadas.

Sugerí la segunda *Actividad Orientadora de Enseñanza* “Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado”. Esta *Actividad Orientadora de Enseñanza* –así como la tercera– fue continuación de la primera (ver apartado correspondiente al diseño metodológico), ya que las acciones estuvieron direccionadas a profundizar en el estudio del mismo objeto del momento experimental de la primera *Actividad Orientadora de Enseñanza*. En esta misma línea, motivé a las estudiantes a indagar por los diversos factores que influirían en la manifestación del fenómeno en estudio, de forma tal que se preguntaran sobre el porqué de los resultados obtenidos y comenzaran a establecer conexiones en el interior del fenómeno abordado, acción que se aleja de un *pensamiento empírico*. Además, pretendí que se interesaran por profundizar en el contexto físico en el que se manifestaba el fenómeno al preguntarse, por ejemplo, por la velocidad promedio con que se desplazaba la burbuja. De esta forma, procuré generar la reflexión sobre las matemáticas como una herramienta de cuantificación de fenómenos físicos, en este caso particular y, en general, como un instrumento fundamental para solucionar determinados problemas en ciertos momentos de la historia.

Sin embargo, ninguna de las estudiantes se vio motivada a materializar dicha acción, aunque ésta estuviera implícita en una de las acciones de la guía que orientó la *Actividad Orientadora de Enseñanza*. Las estudiantes solo se refirieron al movimiento de la burbuja como *rápido* o no. Es decir, expresaron lo observable (la rapidez), mas no determinaron su valor numérico para comprobar lo identificado directamente en sus actos de contemplación. Presento a continuación la acción en mención.

Explica el desplazamiento del cuerpo (la burbuja) en la manguera.

Ilustración 17. “Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado” (21 de julio de 2017)

Mediante la acción planificada pretendí que las estudiantes realizaran un movimiento desde el plano externo, la contemplación directa, hacia el plano mental, de tal forma que su nivel de *pensamiento* comenzara una transición al nivel de *pensamiento teórico.* Por consiguiente, pretendí que mediante una *actividad mental* realizaran acciones como establecer relaciones entre el desplazamiento del móvil con conceptos teóricos, existentes en la cultura, pertenecientes al campo de la Física como la velocidad y, asociado a ésta, el tipo de movimiento del cuerpo.

Como parte de mis acciones, en mi rol de maestra-investigadora y en concordancia con la *Actividad Orientadora de Enseñanza* organizada, me acerqué a cada uno de los grupos conformados por las estudiantes y advertí que, en la ejecución escrita de la acción– en las operaciones realizadas correspondientes– dieron explicaciones sucintas y cualitativas al desplazamiento del móvil. Dentro de las respuestas estaban las siguientes:

> *"La burbuja tiene un movimiento que no es constante, pero es continuo"* (Eliza, "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado", 21 de julio de 2017).
>
> *"La burbuja posee un movimiento rectilíneo variante, más o menos rápido"* (Dana, "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado", 21 de julio de 2017).
> *"Esta tiene un movimiento rectilíneo variable"* (Ana, "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado", 21 de julio de 2017).

Tuve la intención de mediar entre el fenómeno de estudio y entre las estudiantes como sujetos de la *actividad* para generar la necesidad de cuantificar el movimiento con el fin de profundizar en su estudio. Por lo tanto, me dirigí a todo el grupo y planteé las siguientes inquietudes:

Maestra: *Bueno muchachas, he visto que a la pregunta que formulé ustedes han dado respuestas como: "la burbuja se desplaza rápidamente" o, "la burbuja posee un movimiento rectilíneo variable, más o menos rápido"; etcétera. Bueno, pero ustedes ¿cómo saben que la burbuja iba rápido o no? ¿Cómo saben el tipo de movimiento que lleva [la burbuja]? Es decir, con los datos que ustedes obtuvieron en la parte práctica, ¿no tendrán una forma de confirmar lo que están afirmando cualitativamente?*

Después de unos segundos de silencio, las estudiantes dieron respuestas como:

Dana: *Pues…con los datos que tenemos del tiempo con que se desplazó [la burbuja] y la distancia que recorrió, creo.*

Ana: *Ah, pero no, pues, sí y no. O sea, hallando la velocidad de la burbuja, pero cada dos segundos, para saber bien como era. ¿Cierto?*

Maestra: *Y, hallando las velocidades del móvil, cada dos segundos ¿qué información importante podemos tener sobre el desplazamiento del móvil?*

Eliza: *Pues, que así sabemos si la velocidad es la misma, en toda la manguerita o si cambia.*

Maestra: *Muy bien. Y, ¿recordamos cómo se llama el tipo de movimiento de un cuerpo que lleva velocidad constante en una trayectoria recta?*

Ante el silencio, agregué: *Movimiento uniformemente rectilíneo.* Las estudiantes expresan en coro*: ¡Ah, sí!*

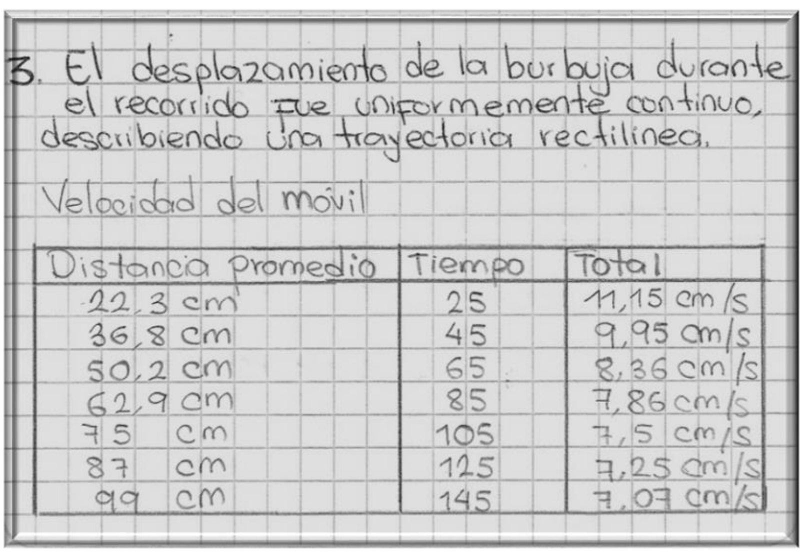
Maestra: *Bueno, miren entonces si este es o no el caso del movimiento que estamos analizando. ¡Manos a la obra!*

En el mismo sentido de la intencionalidad que tuve con la pregunta, retomo aquí a Caraça (1984) cuando manifiesta que:

> El movimiento es […] un fenómeno que se debe estudiar en sus manifestaciones observadas, físicamente y no metafísicamente; el objetivo es encontrar una ley o un conjunto de leyes que, englobando los datos observados, permita prever resultados a confirmar, o no, por la experiencia. Ningún preconcepto debemos por tanto llevar que nos incline, por pequeño que sea, a pretender explicar la naturaleza íntima del fenómeno dentro de cuadros racionales preestablecidos. (p. 217)

Así, mediante la pregunta orientadora que le planteé al grupo, las estudiantes establecieron una relación con el objeto tal, que se encontraron ante la necesidad de planear nuevas acciones hacia una nueva finalidad.

Presento a continuación las operaciones –en línea con sus nuevas acciones– realizadas por las estudiantes protagonistas de la investigación.


3. El desplazamiento de la burbuja durante el recorrido fue uniformemente continuo, describiendo una trayectoria rectilínea.

Velocidad del móvil

Distancia promedio	Tiempo	Total
22,3 cm	2s	11,15 cm/s
36,8 cm	4s	9,95 cm/s
50,2 cm	6s	8,36 cm/s
62,9 cm	8s	7,86 cm/s
75 cm	10s	7,5 cm/s
87 cm	12s	7,25 cm/s
99 cm	14s	7,07 cm/s

Ilustración 18. Operaciones realizadas por Eliza. “Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado” (21 de julio de 2017)

Dana realizó las siguientes operaciones:

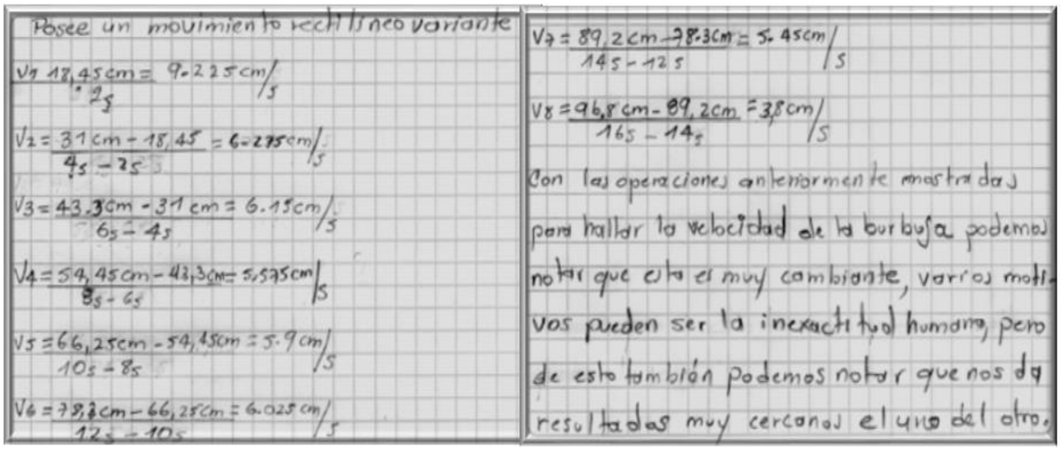


*Ilustración 19.*Operaciones realizadas por Dana "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado" (21 de julio de 2017)

Ana, que estuvo en el mismo equipo de trabajo de Dana, no explicitó las velocidades halladas porque eran las mismas presentadas por esta última. A continuación, presento su respuesta.

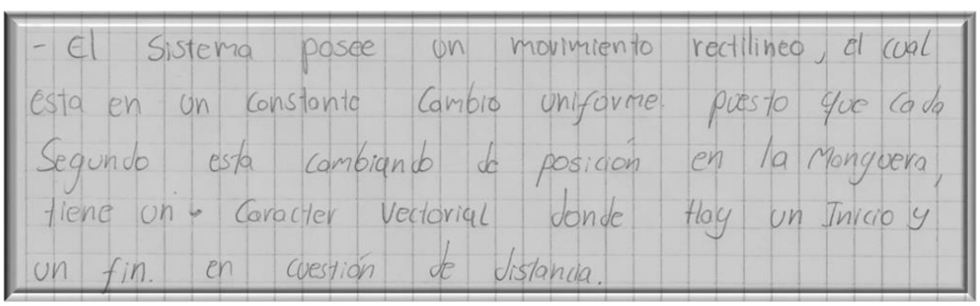


Ilustración 20. Respuesta dada por Ana "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado" (21 de julio de 2017).

Concordando con Wertsch (1993) y Kozulin (2009), Vigotsky plantea que tanto las funciones psíquicas superiores como la *actividad* son mediadas por instrumentos –herramientas técnicas y signos. Siguiendo con estos autores, para Vigotsky los signos y, específicamente, los "sistemas de signos tales como el lenguaje, los diagramas y la aritmética" (Wertsch, 1993 p. 46), tienen un papel fundamental en la mediación de las acciones –dirigidas a un fin– tanto del individuo como de aquellos con quienes éste interactúa en el desarrollo de la *actividad*. Por consiguiente, puede decirse que, así como el ser humano en su devenir histórico y social ha mantenido un permanente interés en el control y dominio de la naturaleza a través de la construcción y uso de instrumentos, éstos, a su vez, generan cambios en la estructura psíquica del ser humano. Así, en su relación con el entorno, el ser humano ha creado instrumentos para el desarrollo de la *actividad* mediante acciones creadoras tendientes a cierto fin y, entre tanto, éstos desarrollan su psiquis.

Según Vigotsky (1986, 1989, 1991), los procesos psíquicos presentes en la *actividad* son producto de la evolución filogenética y ontogenética del ser humano, determinados por su desarrollo histórico-cultural. La vida del ser humano no podría desarrollarse si éste no contara con los instrumentos con los cuales se desempeña activamente en el mundo material; es decir, su vida material es una vida mediatizada. Por lo tanto, la *actividad* es el fundamento del origen de la naturaleza y el desarrollo de las funciones psíquicas superiores –tales como el *pensamiento*, la memoria lógica y la atención selectiva– pues, como lo expresa Vigotsky, "todas las funciones psíquicas superiores son procesos mediatizados" (1986, p. 47), funciones superiores que derivan de la participación del ser humano en la vida *externa* tejida. Para el mismo autor, […] "decir del proceso que es *externo* significa que es social. Toda función psíquica superior fue *externa* porque fue social antes de ser una función interna, propiamente psíquica; ella fue antes una relación social entre las personas" (Vigotsky, 1989, p. 144). Es claro que las funciones psíquicas superiores son, además, resultado de un movimiento desde un plano externo –socio-cultural– a un plano interno –mental– realizado por el individuo en un determinado contexto.

En esa dirección, Vigotsky (1989) enuncia que:

> […] Toda función aparece en escena dos veces, en dos planos, primero social y luego psicológico; primero entre las personas, como categoría interpsíquica y luego en el interior del niño, como categoría intrapsíquica. Esto se refiere por igual a la atención voluntaria, a la memoria lógica, a la formación de conceptos, al desarrollo de la voluntad...Tras todas las funciones superiores y sus relaciones se encuentran las relaciones sociales, las relaciones reales de las personas. (p. 144)

Eliza, Dana y Ana, en el desarrollo de la *Actividad Orientadora de Enseñanza* y, específicamente, de la acción sugerida, interactuaron con sus compañeras de equipo de trabajo –y conmigo– de manera que tejieron una relación con el objeto de estudio que les posibilitó realizar un movimiento interno, una *actividad mental* que es mediada por instrumentos habitados en la cultura y, por lo tanto, continuar con el desarrollo de sus funciones psíquicas superiores. En esta línea, Wertsch (1993) afirma que para Vigotsky "la acción humana, tanto en el plano individual como en el social, está mediada por herramientas y signos" (p. 36). Así, los instrumentos aquí presentes, son instrumentos pertenecientes al campo simbólico del álgebra que, como rama de la matemática y, por lo tanto, como constructo cultural, cobran un papel como medio semiótico que reorganiza la acción de las estudiantes frente al objeto –el desplazamiento de un cuerpo en una trayectoria rectilínea– posibilitándoles visibilizar un aspecto del objeto, inicialmente invisible para ellas.

La tercera *Actividad Orientadora de Enseñanza* que consideré en la presente categoría de análisis, es la que nombré "¿Cómo ha sido el desarrollo de tu estatura?". En ella el movimiento está presente en uno de los aspectos del desarrollo físico de las estudiantes y en su *actividad* *mental* durante la realización de la *actividad*. La organización de mi enseñanza mediante esta *Actividad Orientadora de Enseñanza,* como todas las demás, estuvo centrada en los planteamientos de Bernardes y Moura (2008):

> Relacionando los "componentes" de la actividad en su "macro estructura", las acciones no son ejecutadas aisladamente, no se establecen separadas unas de otra, sino que se vinculan unas a otras, como grupos de acciones que van en cumplimiento de un objetivo, meta a ser concretizada en la actividad. Por lo tanto, el objetivo no es establecido por el sujeto de forma arbitraria, sino los objetivos son establecidos por las circunstancias y condiciones determinadas en la actividad. (p. 468)

En consecuencia, el concepto de *función* –específicamente de variable real– fue el objeto matemático al que pretendí aproximar a las estudiantes mediante esta *Actividad Orientadora de Enseñanza* –como en algunas otras (ver el apartado del diseño metodológico)– buscando orientar el desarrollo del *pensamiento teórico* de las estudiantes en el estudio del *límite de una función* de variable real en un punto. Para esta *Actividad Orientadora de Enseñanza*, tracé como objetivo, además, posibilitar a las estudiantes una forma de aproximarse a un fenómeno natural particular desde un saber matemático depositado en la cultura. Por lo tanto, dispuse las condiciones materiales que generaran, en las estudiantes, un movimiento entre el significado social e históricamente construido del objeto y un sentido hallado por cada una de ellas desde su experiencia vital y personal.

En concordancia con Moura y Lanner de Moura (1998), referenciados por Moura *et al.* (2010), la *situación desencadenadora de aprendizaje* que propuse a las estudiantes tiene el aspecto cotidiano como recurso metodológico. Según estos autores, "La problematización de situaciones emergentes de lo cotidiano posibilita a la práctica educativa oportunidad de poner al niño ante la necesidad de vivenciar la solución de problemas significativos para él" (Moura *et al.* 2010, p. 105). En esta línea, tuve la intencionalidad de generar en las estudiantes la necesidad de problematizar, a la luz de conceptos del *cálculo* –como variable real y función– un aspecto de sus vidas y dotarlo de significado y sentido. Planteé las acciones correspondientes en el sentido de Jaramillo (2011) y D'Ambrosio (2005), para comprender las matemáticas como un objeto que en realidad no está aislado de las prácticas sociales, prácticas en las que nos constituimos como individuos, desde nuestro cotidiano.

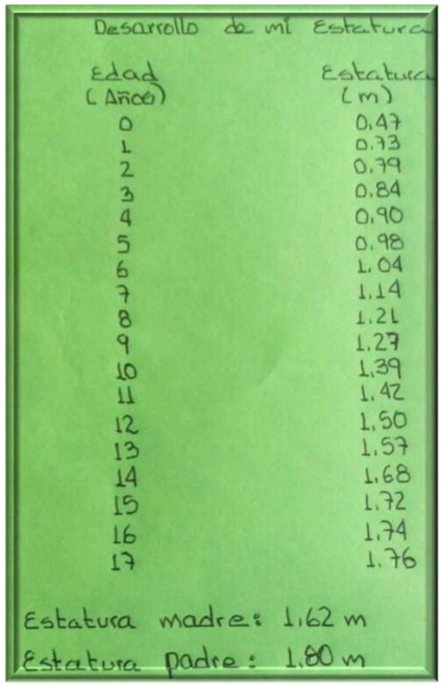
Comprendo aquí lo cotidiano, desde Heller (1978), como el conjunto de *actividades* realizadas por un individuo que están determinadas por la sociedad de la que hace parte. Las *actividades* sitúan al individuo como ser social a la vez que le posibilitan constituir dicha sociedad con su actuar particular. Así, por ejemplo, un estudiante lleva una vida cotidiana de forma tal que sus motivos y necesidades lo sumergen en una *actividad* que lo constituye como estudiante perteneciente a un momento histórico concreto.

Heller (1978, p. 21) afirma que:

> Todo hombre al nacer se encuentra en un mundo ya existente, independientemente de él. Este mundo se le presenta ya "constituido" y aquí él debe conservarse y dar prueba de capacidad vital. El particular [de cada hombre] nace en condiciones sociales concretas, en sistemas concretos de expectativas, dentro de instituciones concretas. Ante todo, debe aprender a "usar" las cosas, apropiarse de los sistemas de usos y de los sistemas de expectativas, esto es, debe conservarse exactamente en el modo necesario y posible en una época determinada (…).

Dentro de las acciones que planteé con miras a alcanzar el objetivo de la *Actividad Orientadora de Enseñanza* –posibilitar a las estudiantes una forma de aproximarse a un fenómeno natural particular desde un saber matemático depositado en la cultura– estuvo el realizar sus curvas de crecimiento –diseñadas para un intervalo de edad de 0 a 20 años– y, a partir de éstas, explicar el desarrollo de sus estaturas a lo largo de sus vidas. Tales acciones hicieron parte de una *situación desencadenadora de aprendizaje* desde el ámbito de lo cotidiano, dado que cada estudiante se encontró ante una *actividad* perteneciente al contexto de sus vidas y preexistente a su nacimiento, el control del crecimiento y desarrollo de niños y niñas como programa de las entidades de salud de la ciudad. Dicha *actividad*, adaptada a la vida escolar como *actividad* de enseñanza debía, de alguna manera, plasmar un aspecto de la vida de cada estudiante en la que se entretejían su rol como estudiante, hija, ser humano en crecimiento –físico y mental– y por lo tanto en movimiento.

Previo al encuentro en el aula en el que trazaron y analizaron las respectivas curvas de crecimiento, las estudiantes realizaron una tabla en la que registraron la medida de sus estaturas desde el momento de nacimiento hasta el momento del desarrollo de la *Actividad Orientadora de Enseñanza*. Las estudiantes acudieron a registros familiares para obtener los datos de los años anteriores, o al no tenerlos, muchas de ellas los dedujeron en compañía de su madre a partir de fotos y videos de la época de su infancia. Las estudiantes obtuvieron los datos actualizados de la medida directa de sus estaturas en el aula, en la clase anterior. A continuación, presento la tabla realizada por Ana.


Desarrollo de mi Estatura

Edad (Años)	Estatura (m)
0	0,47
1	0,73
2	0,79
3	0,84
4	0,90
5	0,98
6	1,04
7	1,14
8	1,21
9	1,27
10	1,39
11	1,42
12	1,50
13	1,57
14	1,68
15	1,72
16	1,74
17	1,76

Estatura madre: 1,62 m
Estatura padre: 1,80 m

Ilustración 21. Tabla con los registros de la estatura de Ana desde su nacimiento hasta su edad actual. ("¿Cómo ha sido el desarrollo de tu estatura?", 11 de agosto de 2017)

En la socialización de los registros de las estaturas, las estudiantes se mostraron entusiasmadas, narrando las estrategias para obtener los datos y describiendo el asombro que les produjo a algunas madres de familia tal requerimiento para una *actividad* matemática. Varias estudiantes compartieron sus estaturas a las demás, quienes se mostraron sorprendidas con los datos de la narradora respectiva, o, por el contrario, no evidenciaron sorpresa ante la confirmación de sus expectativas. Por ejemplo, Ana narró a todo el grupo que su madre le contó que ella "era chiquitica" tanto al nacer como en los primeros años de vida y que luego tuvo "un estirón". Por su parte, Eliza expresó con un poco de desánimo que nació "grande" pero que luego no alcanzó la estatura que le hubiera gustado tener –1,75 m.

Se evidencia entonces, cómo la *Actividad Orientadora de Enseñanza* generó motivaciones desde sus experiencias vitales y comenzó a cobrar sentido para ellas al reconocerse, de forma inconsciente, como seres históricos; cada uno con una historia determinada por condiciones biológicas, familiares, históricas y culturales.

En el siguiente párrafo presento las operaciones que las protagonistas de la investigación realizaron, acorde a algunas de las acciones planteadas en la *Actividad Orientadora de Enseñanza* en mención.

1. Realiza tu curva de crecimiento.
2. Explica el desarrollo de tu estatura hasta el presente.

A continuación, presento las operaciones de Eliza, Dana y Ana.

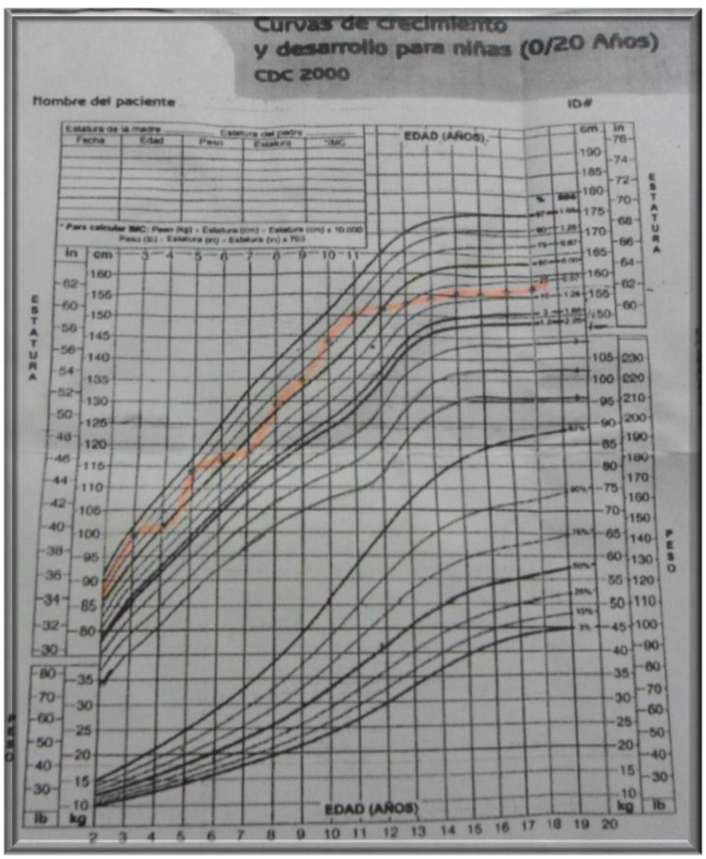


Ilustración 22. Curva de crecimiento de Eliza. (“¿Cómo ha sido el desarrollo de tu estatura?”, 11 de agosto de 2017)

El desarrollo de mi estatura tiene un índice de crecimiento considerable de 0 a 13 años, el siguiente año siguió aumentando, pero muy poco (un centímetro aproximadamente). A los 15, 16 y 17 fue casi constante, es decir, mantuvo casi el mismo valor (Eliza, "¿Cómo ha sido el desarrollo de tu estatura?", 11 de agosto de 2017)[5]

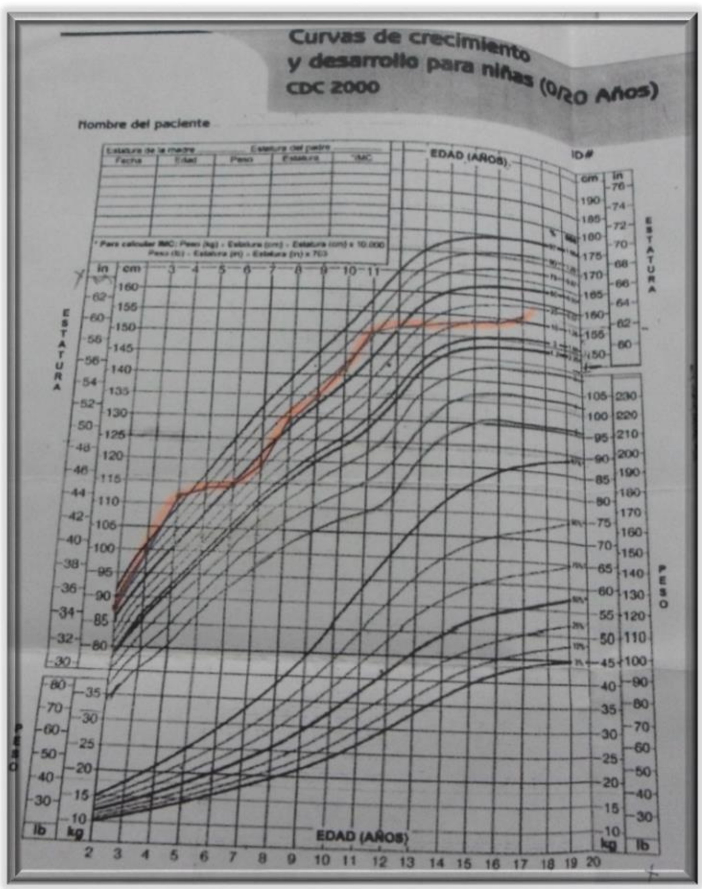


Ilustración 23. Curva de crecimiento de Dana. ("¿Cómo ha sido el desarrollo de tu estatura?", 11 de agosto de 2017)

En la gráfica podemos observar que siempre hay cambio. También que de los 0 a los 10 años tuve un crecimiento veloz, por decirlo de alguna manera, y de los 11 años a la edad actual (17 años) mi crecimiento fue casi nada. O sea, de 0 a 4 años crecí de manera

[5]Considero importante aclarar que aquí – y en párrafos posteriores – opté por transcribir lo escrito por las estudiantes debido a la falta de legibilidad en los documentos.

veloz, de 4 a 6 años fue muy, muy poco el crecimiento, de 6 a 8 tuve crecimiento rápido, de 8 a 11 seguí con un crecimiento casi constante y de 11 a los 17 años que tengo, no he crecido casi. (Dana, "¿Cómo ha sido el desarrollo de tu estatura?", 11 de agosto de 2017).

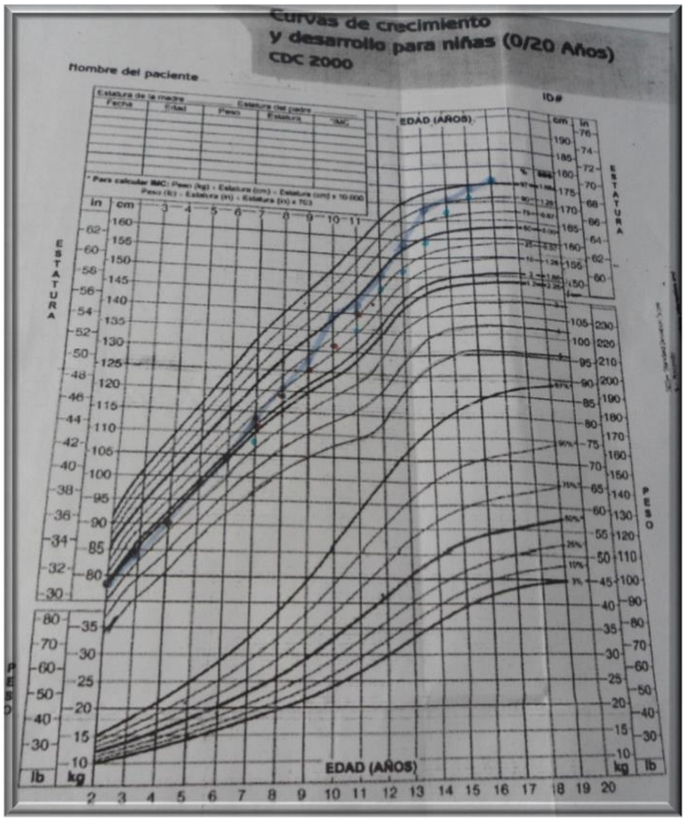


Ilustración 24. Curva de crecimiento de Ana. ("¿Cómo ha sido el desarrollo de tu estatura?", 11 de agosto de 2017)

Desarrollo de mi estatura: En el primer año de vida el crecimiento fue el más notable y de los 2 a los 10 años el crecimiento fue casi constante y poco. En el intervalo de 10 a 11 años fue poco comparado con los años anteriores. De 11 a 14 años se vuelve veloz y de 14 a 17 años el crecimiento fue disminuyendo (Ana, "¿Cómo ha sido el desarrollo de tu estatura?", 11 de agosto de 2017).

A partir de un constructo teórico existente en la cultura –la realización de la curva de crecimiento–, Eliza, Dana y Ana, se situaron en cada una de sus particularidades, como seres cambiantes, desde el momento mismo de llegar al mundo hasta el momento del desarrollo de la *Actividad Orientadora de Enseñanza*. El hecho de analizar cómo se había desarrollado sus estaturas, les posibilitó, a las estudiantes, darle un sentido personal a un significado construido socialmente: una representación gráfica de un fenómeno en un determinado contexto. De esta manera, retomo aquí el concepto de sentido personal desde Leontiev (1984), cuando afirma que:

> A diferencia de los significados, los sentidos personales, lo mismo que la trama sensorial de la conciencia, no poseen una existencia "supraindividual", "no psicológica". Mientras que la sensorialidad externa vincula en la conciencia del sujeto los significados con la realidad del mundo objetivo, el sentido personal los vincula con la realidad de su propia vida en este mundo, con sus motivos. El sentido personal es el que crea la parcialidad de la conciencia humana. (p.120)

Cada una de las estudiantes, desde su propio discurso, desde su *conciencia*, identificó el cambio y la variación en las curvas resultantes del desarrollo de sus estaturas. Sus observaciones a partir de expresiones como: "poco", "muy poco", "veloz", "casi constante", entre otras, denotaron la sola descripción del objeto a partir de la contemplación directa y, por lo tanto, una aproximación cualitativa a la variación y al cambio presente en el fenómeno natural estudiado. Sin embargo, la manera de aproximarse al objeto, propia de un *pensamiento empírico* (Leontiev, 1984, Davidov, 1988, Moura *et al.* 2010), no impidió que las estudiantes se interesaran en su estudio ni que comenzara a visibilizar un concepto teórico desde su cotidianidad, sus realidades y, por lo tanto, a hacer parte de una construcción mental en sus *conciencias.*

Según Leontiev (1984), la *actividad* tanto *práctica* como *mental* es mediatizada por el reflejo psíquico de la realidad objetiva. Así, en su interacción con su realidad, lo que para el sujeto se presenta como motivos, finalidades y condiciones en las que realiza la *actividad*, es "percibido, representado, comprendido, retenido y reproducido, de uno u otro modo en su memoria" (Leontiev, 1984, p. 98).

En esa misma dirección y parafraseando a Talizina (2009, 2010), la psiquis es una forma de *actividad* mediante la cual el sujeto puede solucionar problemas que surgen en su interacción con el entorno. Por lo tanto, la psiquis es un conjunto de acciones que le posibilitan al sujeto desenvolverse en el mundo —mundo material y social–. La psiquis le posibilita al sujeto realizar nuevas *actividades* de acuerdo con el ideal que construye en la relación tejida con los otros sujetos de la *actividad*, dando como resultado una psiquis en un nuevo nivel de desarrollo. En esa línea, Davidov (1988) plantea que la *conciencia* es el nivel superior de la psiquis humana, siendo, por lo tanto:

> ...la reproducción por el individuo de la imagen de su actividad tendiente a una finalidad y de la representación ideal en ella de las posiciones de las otras personas. La actividad consciente del hombre está mediatizada por el colectivo; durante su realización el hombre toma en cuenta las posiciones de los otros miembros del colectivo. (p. 45)

En este sentido, la *conciencia* trasciende el plano de los procesos psíquicos; se genera no solo por las condiciones orgánicas del ser humano, sino por la sociedad como producto de la *actividad* humana. La realidad objetiva se presenta ante el sujeto a través de la *conciencia* como un producto con las huellas de los demás miembros del colectivo del que éste hace parte activa; su nexo es fuertemente tejido, no sólo con el objeto sino también con el otro.

En esa línea, Radford (2013) plantea que:

> La conciencia individual es una forma específicamente humana de reflexión subjetiva sobre la realidad concreta en el curso de la cual tomamos sensibilidad de las formas culturales que nos permite considerar, reflexionar, comprender, disentir, objetar y sentir acerca de otros, de nosotros mismos y de nuestro mundo (p.27).

Al respecto, Marx y Engels (1974) plantean que cuando se supera la inmediatez ante el entorno físico y biológico, la *conciencia* –que es "de antemano un producto social" (p.31)– alcanza un nivel de creación, superando así el plano de la *conciencia* práctica de la existencia humana. Para Zumalabe (2006), la *conciencia* abarca aspectos emocionales y cognoscitivos que los integra en un todo, de manera que potencializa la capacidad creadora y productiva del ser humano a la vez que le posibilita prever resultados de sus acciones realizadas y planificar las futuras.

En consonancia con Marx y Engels (1974), el lenguaje humano surge como medio de comunicación verbal ante la necesidad de establecer relaciones con el otro durante el desarrollo de la *actividad*. En el transcurso de la *actividad práctica* se hace indispensable la transmisión intencional de las experiencias prácticas, de las interpretaciones del mundo y elaboraciones mentales a los demás sujetos de la *actividad*. Además, el lenguaje "es la *conciencia* práctica, la *conciencia* real, que existe también para los otros hombres y que, por tanto, comienza a existir también para mí mismo…" (p.31). Así entonces, el carácter social de la *conciencia* se devela en el lenguaje, pues se hace indispensable la expresión oral para entender las posturas del otro, para generar acuerdos; para la constitución del individuo a partir de las voces de los otros; "junto a otras *conciencias*" (Bajtín, 2004, p.54).

Respecto a la *conciencia*, Vigotsky (2013a) plantea que:

> El mecanismo de la conciencia de uno mismo (autoconocimiento) y del reconocimiento de los demás es idéntico: tenemos conciencia de nosotros mismos porque la tenemos de los demás y por el mismo mecanismo, porque nosotros somos con respecto a nosotros lo mismo que los demás respecto a nosotros (Vigotsky, 2013a, p.11).

De esta forma, la *conciencia* –como nivel superior de la psiquis– le posibilita al sujeto formar imágenes del mundo material y comprender su entorno y su realidad a través de las comprensiones de los otros sujetos con quienes construye dicha realidad, con quienes se comunica de forma verbal. La *conciencia* del individuo es, por lo tanto, *conciencia* del mundo sensible que le rodea y de los nexos establecidos con el otro.

Eliza, Dana y Ana, por medio de la *actividad* en que las involucré, elevaron su psiquis a otro nivel, de manera que lo que para ellas era un fenómeno característico de su niñez y adolescencia –el desarrollo de sus estaturas– se transformó en un objeto matemático a estudiar –la representación gráfica de una *función*– como parte de la relación tejida con su maestra y como producto de una construcción histórico-social, como todo objeto matemático. Así, las estudiantes se hicieron conscientes tanto de un significado presente en la cultura como del uso de herramientas matemáticas para el estudio de un fragmento de sus vidas, y lo expresaron a través de la palabra escrita como medio de conexión con los demás.

Aquí se constata el planteamiento de Leontiev (1984), en cuanto a que la *actividad* del individuo en relación con su entorno está siempre insertada en la comunicación –oral o escrita– en la interacción con los otros; condición específica del desarrollo humano en general.

La *conciencia*, como “existencia consciente del sujeto” (Petrovski, 1980, p.43), al elevar el nivel de la relación del sujeto con el entorno, se transforma en un instrumento que media su *actividad*, posibilitando la elaboración de un cuadro del mundo y dotando de significado y sentido la realidad del sujeto a partir de un tejido social. La elaboración de este cuadro es resultado de la dialéctica entre el *pensamiento* del sujeto de la *actividad* y su propia *conciencia*. Retomo aquí el *pensamiento* en la perspectiva de Leontiev (1984), es decir, como una de las funciones psíquicas superiores que está imbricada dentro de la relación *actividad*/*conciencia* cuyo elemento consustancial es la *actividad*. En esta dirección, la *conciencia* no puede interpretarse como un receptor mental de “imágenes y procesos” (Leontiev, 1984, p.123), sino como un movimiento particular –interno– del movimiento general de la *actividad* del sujeto que le posibilita dotar de sentido los significados culturales existentes. En esa línea, Vergel (2015) plantea que “es en la materialidad de la actividad” (p. 211) donde el estudiante, como sujeto de la *actividad* misma, puede tomar conciencia de formas de hacer y pensar, histórica y culturalmente constituidas.

Como parte de la *Actividad Orientadora de Enseñanza* a la que me he referido en este segmento de la presente categoría, diseñé la acción acorde al concepto de *conciencia* expuesto en los párrafos anteriores. La acción a la que hago alusión está contenida en la *situación desencadenadora de aprendizaje* que presento a continuación.

Según la Organización Mundial de la Salud (OMS) la estatura esperada– aproximada– de una persona ("Talla Diana Familiar"), considerando la estatura de los padres en centímetros, es:

$$\frac{(\text{Estatura de la madre} + \text{Estatura del padre})}{2} + 6.5, \quad \text{para niños.}$$

$$\frac{(\text{Estatura de la madre} + \text{Estatura del padre})}{2} - 6.5, \quad \text{para niñas.}$$

Según la OMS, el resultado puede variar en 5cm.

Partiendo de la fórmula anterior y de tu estatura presente, ¿piensas que esta fórmula es válida en tu caso? Explica.

Durante la ejecución de la acción referida, Eliza se me acercó pidiéndome que nos alejáramos de sus compañeras, para expresarme una inquietud. La transcripción correspondiente es la siguiente:

Eliza: *Profe, pero es que yo no voy a poder hacer este punto.*

Maestra: *¿Por qué?*

Eliza: *Porque no traje los datos completos de los padres, porque yo no tengo papá; no tengo cómo saber de él…Entonces, ¿qué hago?*

Maestra: *Mira, recuerda que estamos trabajando con datos tomados de sus realidades y, si esa es tu situación, pues entonces, como tú dices, no resuelves ese punto; no hay ningún problema.*

Eliza: *Ah bueno profe, gracias.*

En coherencia con lo anterior, la respuesta escrita de Eliza fue la que presento a continuación.

Ilustración 25 "Talla Diana Familiar" de Eliza. ("¿Cómo ha sido el desarrollo de tu estatura?", agosto 11 de 2017)

Es evidente que la acción cobró un sentido peculiar para Eliza, en tanto que su situación familiar –situación común en el contexto del que ella hace parte– trascendió la simple operación de reemplazar valores en una fórmula matemática –construida por personas ajenas a su realidad– hasta un enfrentamiento de cara a su realidad; realidad de un sujeto con una historia concreta. Aquí se pone en cuestión la validez de constructos teóricos ante el sentido personal dotado por la *conciencia* del individuo, versus la *conciencia* colectiva. Así, Eliza se encontró ante el producto de un saber cultural –resultado de una *conciencia* social– cuyo significado perdió validez para ella al transformarlo a su *conciencia* individual.

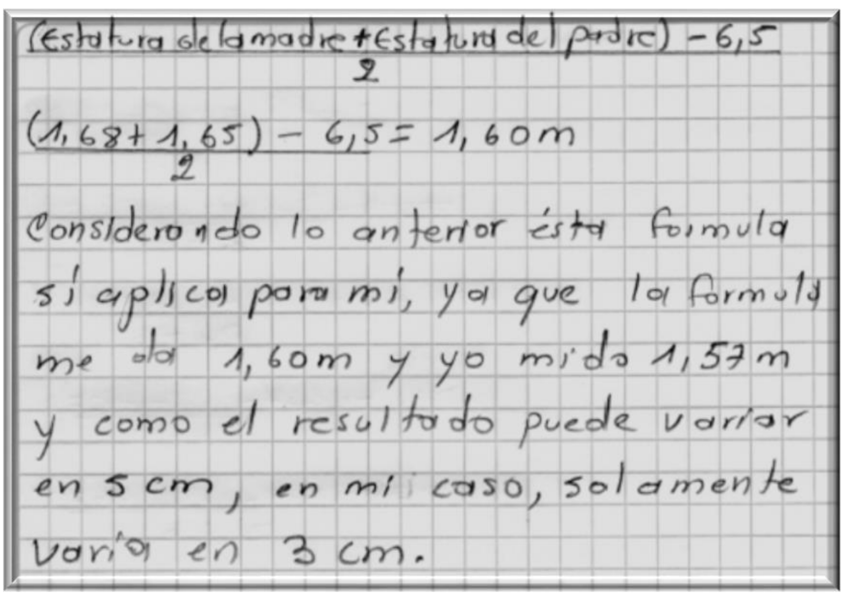
Tengo claridad en cuanto a que las estudiantes son sujetos históricos con vivencias particulares y que, por lo tanto, sus resultados de la acción propuesta por mí –como parte de la organización de la enseñanza de la representación gráfica de una *función*– no podrían ser pre-determinados. Sin embargo, la respuesta de Eliza me cuestionó sobre la pertinencia de la enseñanza de algunos conceptos matemáticos llevados al aula de una manera descontextualizada. En consecuencia, considero importante preguntarnos sobre la pertinencia del currículo de Matemáticas impuesto por instituciones estatales y aplicado en nuestras escuelas. Concuerdo con Valero (2013), D´Ambrosio (2005) y Jaramillo (2011), en cuanto a la importancia de cuestionar las directrices sobre el qué y el cómo enseñar el saber matemático –históricamente construido–

en el aula, teniendo en cuenta a quién se enseña y su (re)significación para buscar una enseñanza situada que cobre sentido para un sujeto inmerso en *actividad* de aprendizaje, que posee unas necesidades y características particulares.

Al respecto Jaramillo (2011) plantea que:

> En consecuencia, en la escuela sólo se acepta como único tipo de conocimiento verdadero el conocimiento científico, traducido en el conocimiento académico, y su aplicación está más relacionada con la aplicación técnica propia del desarrollo tecnológico que con las necesidades oriundas del cotidiano. (p. 17)

Dana y Ana respondieron lo que presento a continuación.

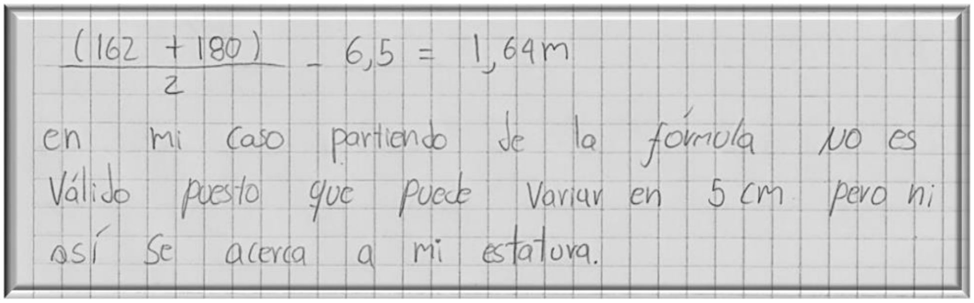


$$\frac{(\text{Estatura de la madre} + \text{estatura del padre}) - 6,5}{2}$$

$$\frac{(1,68+1,65)}{2} - 6,5 = 1,60\,m$$

Considerando lo anterior ésta formula sí aplica para mí, ya que la formula me da 1,60m y yo mido 1,57m y como el resultado puede variar en 5 cm, en mi caso, solamente varía en 3 cm.

Ilustración 26. "Talla Diana Familiar" de Dana. ("¿Cómo ha sido el desarrollo de tu estatura?", agosto 11 de 2017)



$$\frac{(162 + 180)}{2} - 6{,}5 = 1{,}64\text{m}$$

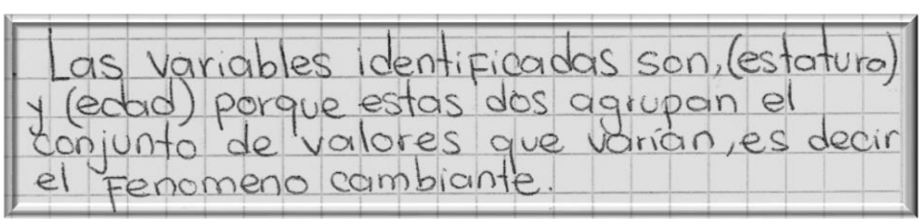
en mi caso partiendo de la fórmula no es Válido puesto que puede Variar en 5 cm pero ni así se acerca a mi estatura.

Ilustración 27. "Talla Diana Familiar" de Ana. ("¿Cómo ha sido el desarrollo de tu estatura?", agosto 11 de 2017)

En las operaciones realizadas como parte de la estructura de la *actividad* (Leontiev, 1984), Dana y Ana interactuaron con un objeto externo –la "Talla Diana Familiar"– efectuando un movimiento interno que les posibilitó hacerse conscientes de sus particularidades frente a un fenómeno físico-biológico, con un significado común a todo individuo en crecimiento, y lo transformaron en un significado para sí; lo dotaron de sentido personal.

La tercera acción sugerida como parte de la *Actividad Orientadora de Enseñanza*, dotó a las estudiantes de un nuevo sentido al relacionar una *función* de variable real con la curva de su crecimiento. A continuación, presento la acción y las operaciones de las protagonistas.

¿Cuáles variables identificas en la curva de tu crecimiento? ¿Piensas que existe una *función* entre las variables identificadas? Argumenta.



Las variables identificadas son, (estatura) y (edad) porque estas dos agrupan el conjunto de valores que varían, es decir el Fenomeno cambiante.

Ilustración 28. Variables identificadas por Eliza en su curva de crecimiento. ("¿Cómo ha sido el Desarrollo de tu estatura?", agosto 11 de 2017)

A continuación, la respuesta de Dana en cuanto a la primera pregunta orientadora.

Identifico las variables edad y estatura, ya que obviamente no son las mismas desde que nací hasta ahora. (Dana, "¿Cómo ha sido el desarrollo de tu estatura?", agosto 11 de 2017).

La respuesta de Ana fue la siguiente:

Las variables identificadas en mi crecimiento son la edad y la estatura, pues han cambiado en mis 17 años. (Ana, "¿Cómo ha sido el desarrollo de tu estatura?", agosto 11 de 2017).

Nuevamente, un concepto teórico cobra un sentido personal para las estudiantes a través de la *actividad; actividad de aprendizaje* en este caso. Tanto Eliza, como Dana y Ana se reconocieron como seres en movimiento, a través de la identificación del cambio en el aspecto biológico de sus vidas el cual relacionaron con el concepto de variable. Así, por ejemplo, cuando Dana expresó, "*Identifico las variables edad y estatura, ya que obviamente no son las mismas desde que nací hasta ahora",* el uso del adverbio *"obviamente"* denota claridad en la esencia del objeto matemático variable –la representación de cualquiera de los elementos del conjunto de valores de un fenómeno mutable– presente en su proceso de crecimiento. Igualmente, la respuesta dada por Ana, "*Las variables identificadas en mi crecimiento son la edad y la estatura, pues han cambiado en mis 17 años"* denota claridad en la esencia cambiante de las variables; claridad manifiesta en la conjunción "pues" que emplea para argumentar su respuesta.

Así mismo, en la respuesta de Eliza, *"Las variables identificadas son (estatura) y (edad) porque estas dos agrupan el conjunto de valores que varían, es decir el fenómeno cambiante"* da cuenta del uso del concepto matemático variable en su proceso de argumentación. Pero, a diferencia de Dana y Ana, Eliza no solamente nombró las magnitudes que consideró de carácter variable, sino que, al parecer, destacó su importancia por medio del empleo de paréntesis. A su vez, ella identificó la imbricación existente entre una variable y el *"fenómeno cambiante*" que representa.

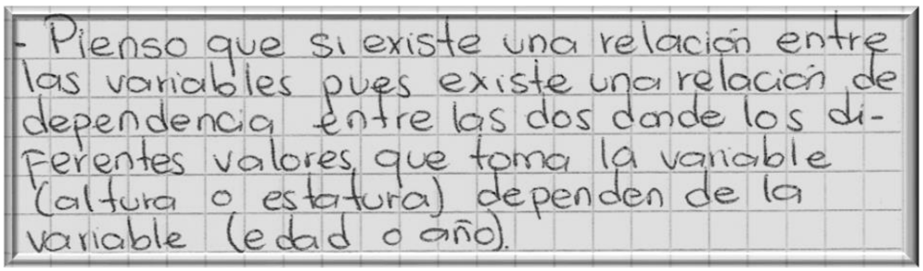
Las respuestas de las tres estudiantes y especialmente la de Eliza, van en línea con el planteamiento de Caraça (1951) sobre el concepto de variable, el cual enuncia como:

> Sea E un conjunto cualquiera de números –finito o infinito– y como convención, representemos a cualquiera de sus elementos por un símbolo, por ejemplo x. A este símbolo, representativo de cualquiera de sus elementos del conjunto E , la llamamos variable…Es el símbolo de la vida colectiva del conjunto, vida que se nutre de la vida individual de cada uno de sus miembros, mas no se reduce a ella. (p. 127)

Así, en la búsqueda de la respuesta a la pregunta orientadora, las estudiantes realizaron un movimiento mental y se hicieron conscientes de su esencia cambiante, lejos del estatismo. Ellas tomaron *conciencia* de algunas de las transformaciones fisiológicas que han tenido desde su nacimiento hasta sus 16 (o 17) años, transformaciones humanas en un espacio-tiempo que también es cambiante.

Desde una mirada histórico-cultural, el principio de cambio, movimiento y transformación es condición inherente al desarrollo individual y, por lo tanto, social. De acuerdo con Caraça (1951) y Engels (1961), todo se encuentra en continuo movimiento; nada es estático, todo se transforma. Retomando al filósofo Heráclito de Éfeso, Caraça anuncia que: "El mundo está en permanente evolución: todas las cosas, a todo momento, se transforman; todo fluye, todo deviene" (Caraça, 1951, p. 110). En esa misma línea, el *cálculo* se ha constituido por condiciones concretas en períodos socio-históricos concretos en un permanente devenir. En consecuencia, conceptos pertenecientes a esta rama de la matemática –tales como *función y límite de una función*– han posibilitado el estudio del cambio a través de la evolución histórica.

La segunda pregunta de la acción sugerida –¿Piensas que existe una *función* entre las variables identificadas?– contenía el concepto de función de manera explícita. Las respuestas expresadas por las estudiantes fueron:



- Pienso que si existe una relación entre las variables pues existe una relación de dependencia entre las dos donde los di-
ferentes valores que toma la variable (altura o estatura) dependen de la variable (edad o año).

Ilustración 29. Respuesta de Eliza sobre la existencia de *función* en su curva de crecimiento. ("¿Cómo ha sido el Desarrollo de tu estatura?", agosto 11 de 2017)

Pienso que hay una función entre esas variables ya que existe una correspondencia unívoca en el caso de mi edad porque a un valor de mi estatura le corresponde un año determinado (Dana, "¿Cómo ha sido el desarrollo de tu estatura?", agosto 11 de 2017).

Yo digo que sí existe una función entre estas variables puesto que hay correspondencia unívoca entre la variable independiente que es la edad y la variable dependiente que es la estatura (según mi edad era la estatura) (Ana, "¿Cómo ha sido el desarrollo de tu estatura?", agosto 11 de 2017).

Las tres estudiantes no sólo relacionaron aspectos de su desarrollo físico con el concepto de variable, sino que, además, identificaron un tipo de relación entre las variables: una *función*. Mientras que Eliza estableció una relación de dependencia entre las variables edad y estatura, Dana argumentó la existencia de función por medio de la correspondencia unívoca entre dichas variables. Eliza, al parecer, empleó el término "relación" en la primera parte de la oración en vez de escribir función. Me atrevo a hacer esta última interpretación porque en sesiones anteriores al de la *Actividad Orientadora de Enseñanza* referida, Eliza evidenció claridad en la *función* como un tipo de relación. Por su parte, Ana hizo un análisis más amplio, al argumentar la existencia de función tanto desde la relación de dependencia entre las variables, como desde la correspondencia unívoca.

De esta manera, Eliza, Dana y Ana identificaron una variación –cualitativa– de dos aspectos cambiantes en su desarrollo físico: la edad y la estatura. Y en línea con esta variación las estudiantes identificaron, especialmente Ana, la dependencia y la correspondencia unívoca entre estas variables; elementos esenciales del concepto de *función.*

Desde la perspectiva histórico-cultural que asumo en esta investigación, comprendo el concepto de *función* en el sentido de Caraça (1951) y de Aleksandrov (1976). Esto es, la función como un instrumento matemático cuya esencia es la correspondencia entre variables que poseen una relación de dependencia. Es un instrumento matemático construido –socialmente a través de un devenir histórico– a partir de la necesidad imperante de hallar regularidades observables en la manifestación del fenómeno de estudio; estudiar leyes cuantitativas.

En ese sentido, Caraça (1951) define *función* de la siguiente manera:

> Sean x y y dos variables representativas de conjuntos de números; se dice que y es función de x y se escribe: $y = f(x)$, si entre las dos variables existe una correspondencia unívoca en el sentido $x \rightarrow y$. A x se le llama variable independiente y a y, variable dependiente. (p.129)

En la siguiente categoría de análisis de la investigación abordaré el concepto de *función*, en dialéctica con el concepto de *límite de una función en un punto.* Esto es, emplear la lógica dialéctica al concatenar[6] ambos conceptos y comprender, por ejemplo, el concepto de *función* como una herramienta matemática mediante la cual es factible estudiar el comportamiento mutable de un fenómeno –representado mediante una *función* de variable real– en un instante determinado.

[6] Empleo este término en el sentido de una de las acepciones de dialéctica planteada por Engels (1961). Esto es, "[..] la naturaleza general de la dialéctica, como ciencia de las concatenaciones, por oposición a la metafísica (p.41). Es decir, el principio fundamental de la dialéctica es de "ver las cosas en su conexión y no aisladas unas de otras" (p. 227).

Límite de una función real de variable real: una manera particular de conocer la mutabilidad de los fenómenos

En el contexto histórico y cultural del siglo XVII, los científicos renacentistas comprendieron el carácter cambiante de la naturaleza y, en ese proceso de comprensión, se enfrentaron al problema del movimiento mecánico que consistía, esencialmente, en la imposibilidad de hallar la posición de un móvil en determinado instante en un punto de su trayectoria (Caraça, 1951, Aleksandrov, 1976). Los científicos de este momento socio-histórico, apoyados en las creaciones de los científicos de momentos anteriores, entendieron, además, que entre dos puntos, por más cercanos que estuviesen, existía infinidad de puntos. Al respecto, Caraça (1951) afirma:

> Cuando deseamos fijar la posición de un móvil en determinado instante, en un punto de su trayectoria, ya él no se encuentra ahí –entre dos instantes– por más aproximados que estén un punto del otro, el móvil ha recorrido un segmento con una infinidad de puntos; a cada instante el móvil está y no está en determinado punto. (p.217)

El problema anterior exigió la creación de un nuevo instrumento matemático que posibilitara trabajar tanto con estados determinados como con la infinidad de posibilidades entre dos de ellos. Ese nuevo instrumento fue el *infinitésimo*[7]. La aplicación del nombrado instrumento en el estudio de lo que sucede en cierto punto en interdependencia con puntos “arbitrariamente próximos” (Caraça, 1951, p. 218) y su posterior desarrollo, posibilitó la creación del concepto de *límite*, tanto de una sucesión como de una *función* en un punto.

[7] Tanto este concepto como el de límite de una función y objetivación, los explicaré posteriormente en este apartado.

Como lo expresé en el apartado correspondiente a la reseña histórica sobre el concepto de *límite*, diferentes matemáticos en distintos momentos históricos y de diferentes maneras –Newton; Leibniz; D'Alembert; Cauchy y Weierstrass, entre otros– definieron dicho concepto. Sin embargo, por mi postura epistemológica retomo en este trabajo el concepto de *límite de una función* desde Caraça (1951**).** Por lo tanto, identifiqué el concepto de *límite de una función en un punto* como el eje fundamental de la presente categoría de análisis, dado que, en primer lugar, en mi búsqueda de la respuesta a la pregunta de investigación –¿Cómo puede desarrollarse el *pensamiento teórico* de estudiantes de grado undécimo, en un proceso de *objetivación* del concepto de *límite de una función*?– cobró importancia la posibilidad de la interiorización[8] del concepto matemático por parte de las estudiantes. En segundo lugar, porque en las respuestas de las estudiantes a lo largo del desarrollo de las *Actividades Orientadoras de Enseñanza* durante el tiempo del trabajo de campo, el concepto de *límite de una función* emergió en forma progresiva en sus procesos de *objetivación*, en sus maneras particulares de aproximarse a este concepto matemático.

En esa línea, la *Actividad Orientadora de Enseñanza* que comienzo a analizar en este apartado es la que retomé en el inicio de la categoría anterior y que denominé, "Determinación de la posición de un cuerpo en un instante dado". Retomo de forma específica una de las preguntas orientadoras que formulé a las estudiantes y que resolvieron en los dos momentos de la *actividad*, *práctica* y de escritorio (momento en que las estudiantes respondieron por escrito las

[8] Comprendo el término interiorización en concordancia con Leontiev (1984), como un proceso en el que el sujeto, en su interacción –mediatizada por instrumentos culturales- con la realidad objetiva transforma el objeto material externo en objeto mental, trasladándolo al plano de la conciencia. Una vez en ella, dicho objeto lo somete a una nueva transformación, por medio de un proceso de generalización para ser exteriorizado de nuevo y posibilitar una nueva interacción. Esta interacción se caracteriza por una elaboración teórica.

preguntas planteadas al interior de sus respectivos equipos de trabajo). La pregunta orientadora a la que hago alusión es la siguiente:

¿Puedes hallar la posición exacta del móvil justo a los 8 segundos de su recorrido?

En caso de que así sea, anota el resultado –o resultados, en caso de que lo repitas– y explica cómo lo hallaste.

En caso contrario, busca –y emplea– estrategias para hallar el resultado (o resultados) lo más próximo posible a lo pedido.

Anota el resultado (o resultados) y explica las estrategias empleadas.

Con esta pregunta acerqué a las estudiantes al concepto de *infinitésimo,* por lo cual ésta se transformó en una *situación desencadenadora de aprendizaje*, en tanto que contiene la génesis del objeto de estudio –la imposibilidad de hallar la posición exacta de un móvil en un instante dado–. Para responder la pregunta, las estudiantes realizaron ciertas acciones y operaciones que las aproximaron, inicialmente a un concreto sensorial y, posteriormente, las aproximaron teóricamente al objeto de estudio, al enfrentarse a una contradicción –hallar la posición exacta del móvil en el instante correspondiente a 8 segundos exactos– contenida en la pregunta misma. Es decir, la pregunta encierra una contradicción –intencional– porque exige un producto inalcanzable en las condiciones en las que las estudiantes deben realizar la *actividad*.

Asumo el término contradicción desde el materialismo dialéctico, como la categoría fundamental de la dialéctica que contiene al movimiento como esencia, como principio de desarrollo de los fenómenos del mundo objetivo. Dentro de los postulados de la dialéctica materialista, la contradicción y específicamente la *Ley de Unidad y Lucha de Contrarios* plantea que en cierto momento de la aproximación al desarrollo de determinado fenómeno se pueden identificar dos polos opuestos que entran en lucha y como resultado, se fusionan en una unidad nueva, diversa, para así constituir un nuevo nivel de desarrollo (Engels, 1961).

En este caso, las estudiantes se enfrentaron a una contradicción al leer la pregunta –¿puedes hallar la posición exacta del móvil justo a los 8 segundos de su recorrido?– e intentar responderla. Como ya dije, esta contradicción –intencional– tuvo como objetivo que las estudiantes plantearan estrategias para resolverla y que en esa búsqueda se encontraran en un nivel de reflexión tal, que elevaran el nivel anterior al momento de la realización de la *Actividad Orientadora de Enseñanza* y, por lo tanto, realizaran una *actividad mental* que les posibilitara una aproximación paulatina al objeto teórico contenido en la contradicción.

A continuación, presento algunas voces de las estudiantes Dana y Ana durante el primer momento de la *Actividad Orientadora de Enseñanza d*entro de los diálogos del equipo de trabajo:

Dana: *Bueno, entonces, la profe nos pregunta que si podemos obtener la posición exacta de la burbuja justo a los 8 segundos de su recorrido.*

Ehhh…justo a los 8, obviamente no. Pues… nosotras sabemos que exactamente, no da; la burbujita siempre se está moviendo. Además, el tiempo va a dar 8 segundos punto uno, o algo así.

Ana: *Claro, si es que en ningún momento la burbuja para y el tiempo siempre está corriendo.*

Dana: *Pero igual, hagámoslo y comprobemos.*

Ana: *Sí, dale.*

En el equipo de trabajo en el que se encontraba Eliza, se dio el siguiente diálogo con Laura, una de las integrantes:

Eliza: *Listo, respondamos la tercera pregunta*: ¿Puedes hallar la posición exacta del móvil justo a los 8 segundos de su recorrido? Hagámoslo, pero yo creo que no va a dar exacto. ¿O, será que sí?

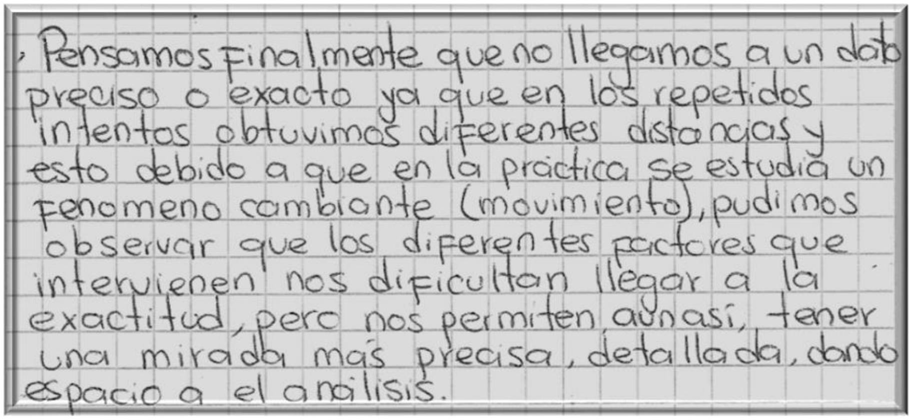
Laura: *¿Por qué?*

Eliza: *Porque, mira que en el punto anterior, cuando hallábamos la posición de la burbujita cada dos segundos, no nos daba lo mismo las veces que lo hicimos. Además, aquí nos están pidiendo mucha más exactitud. Pero, hagámoslo bien, puede que sí nos dé.*

Laura: *Miremos a ver.*

En esta parte del trabajo experimental observé cómo las estudiantes tejieron una relación particular con el fenómeno de estudio. Ellas predijeron el comportamiento del móvil en las nuevas condiciones dadas, probablemente debido a los resultados obtenidos en la resolución de puntos anteriores de la guía de trabajo de la práctica y, seguramente, debido a las voces de sus compañeras de equipo. Aún con algunas dudas, como las expresadas en el equipo de Eliza, las estudiantes hicieron una proyección de lo esperado, teniendo presente la mutabilidad del tiempo y de la burbuja en el sistema físico estudiado.

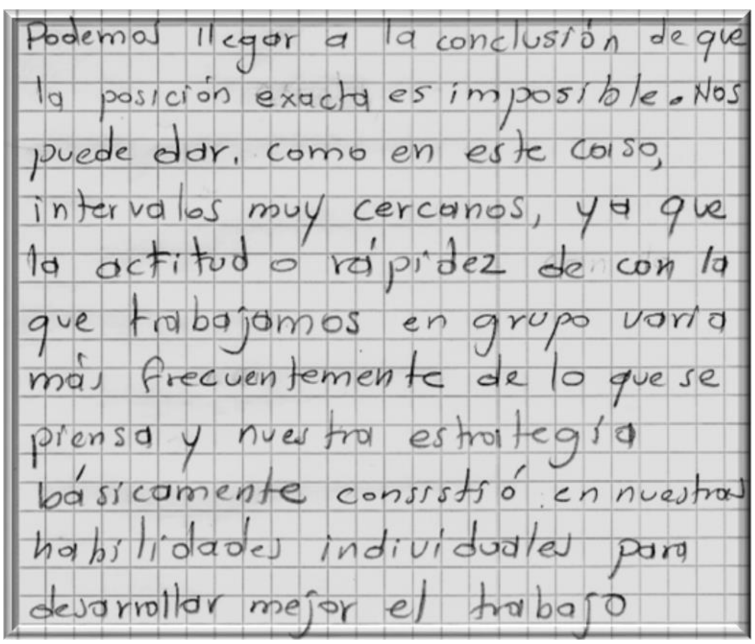
El siguiente episodio corresponde tanto a las respuestas escritas de las estudiantes Eliza, Dana y Ana y de sus respectivos equipos de trabajo durante el segundo momento de la *Actividad Orientadora de Enseñanza*, como a las respuestas dadas en la socialización a la pregunta ¿Puedes hallar la posición exacta del móvil justo a los 8 segundos de su recorrido?



, Pensamos Finalmente que no llegamos a un dato preciso o exacto ya que en los repetidos intentos obtuvimos diferentes distancias y esto debido a que en la práctica se estudia un fenomeno cambiante (movimiento), pudimos observar que los diferentes factores que intervienen nos dificultan llegar a la exactitud, pero nos permiten aún así, tener una mirada más precisa, detallada, dando espacio a el analisis.

Ilustración 30 Respuesta de Eliza a la pregunta: ¿Puedes hallar la posición exacta del móvil justo a los 8 segundos de su recorrido? (“Determinación de la posición de un cuerpo en un instante dado”, julio 18 de 2017)

> *Nosotras lo hicimos [la operación de hallar la posición exacta a los 8 segundos exactos] repetidas veces y no nos arrojó el mismo resultado. Es que la burbuja va demasiado rápido y medir a los 8 segundos exactos, pues en verdad, era imposible* (Eliza, “Determinación de la posición de un cuerpo en un instante dado”, julio 18 de 2017).



Podemos llegar a la conclusión de que la posición exacta es imposible. Nos puede dar, como en este caso, intervalos muy cercanos, ya que la actitud o rápidez de con la que trabajamos en grupo varía más frecuentemente de lo que se piensa y nuestra estrategía básicamente consistió en nuestras habilidades individuales para desarrollar mejor el trabajo

Ilustración 31. Respuesta de Dana a la pregunta: ¿Puedes hallar la posición exacta del móvil justo a los 8 segundos de su recorrido? (“Determinación de la posición de un cuerpo en un instante dado”, julio 18 de 2017)

Nosotras medimos varias veces y nos dio casi la misma posición pero no igual. Lo mismo pasó con el tiempo. Y, aunque tratamos de ser muy coordinadas en el trabajo y hacer bien lo que le correspondía a cada una, no pudimos, porque la burbuja no se detenía hasta el final y el tiempo, pues no se detiene nunca. O sea, la respuesta sería, no. No nos dieron exactas las medidas, ni de la posición de la burbuja ni del tiempo a los 8 segundos exactos. (Dana, "Determinación de la posición de un cuerpo en un instante dado", julio 18 de 2017)

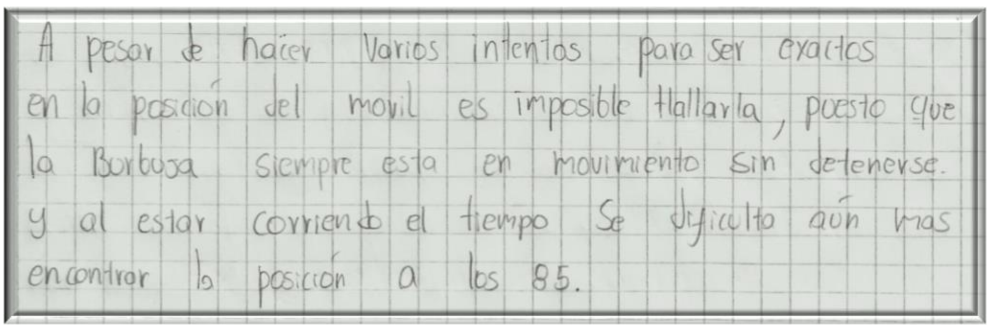

A pesar de hácer Varios intentos para ser exactos
en la posición del movil es imposible Hallarla, puesto que
la Burbuja siempre esta en movimiento sin detenerse.
y al estar corriendo el tiempo Se dificulto aún mas
encontrar la posición a los 8S.

Ilustración 32. Respuesta de Ana a la pregunta: ¿Puedes hallar la posición exacta del móvil justo a los 8 segundos de su recorrido? ("Determinación de la posición de un cuerpo en un instante dado", julio 18 de 2017)

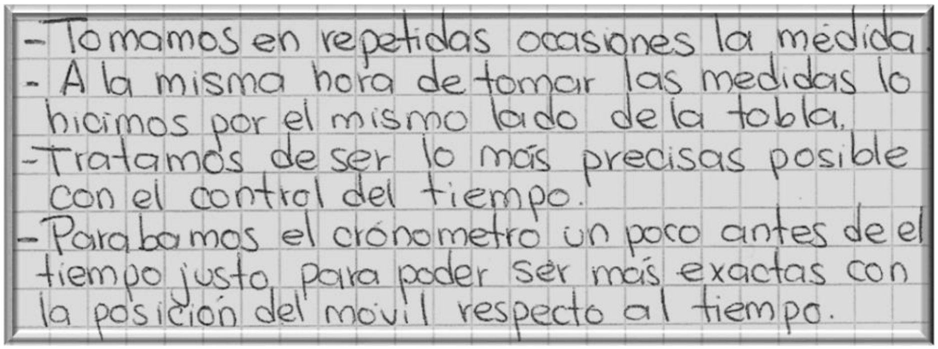
Era imposible. Es que, mientras uno ve los 8 segundos en el cronómetro y le dice a la otra persona [la estudiante que registraba la posición] ¡ya!, no puede dar los 8 segundos cero, cero, exactos. Mientras uno dice; ¡ya!, ya pasó algún tiempo. La distancia recorrida por la burbuja nos dio casi la misma las veces que la medimos, pero tampoco exacta; es que el problema era en los milímetros (Ana, "Determinación de la posición de un cuerpo en un instante dado", julio 18 de 2017).

Frente a la contradicción que generó la naturaleza de la pregunta orientadora, las estudiantes respondieron que no hallaron la posición exacta del móvil. En sus argumentaciones individuales, expusieron el carácter incesante del tiempo y la dificultad para medirlo con exactitud. A diferencia de Dana, Eliza y Ana expresaron, además, que el movimiento de la burbuja era la causa principal de la imposibilidad para hallar lo solicitado.

Resulta llamativo que Dana reporte en sus respuestas escritas que las dificultades en la manipulación del sistema *manguera-burbuja* fueran la razón principal de la imposibilidad para hallar la posición exacta del móvil a los 8 segundos exactos y no, a otros factores tal como lo hizo tanto en el momento práctico –en el cual se anticipó al resultado aduciendo el movimiento permanente de la burbuja como el motivo fundamental– como en la socialización en la que consideró la naturaleza continua del tiempo, además del movimiento de la burbuja. Es posible que este cambio en la argumentación de Dana se deba a un análisis inmediato del fenómeno en el momento de la *actividad práctica* y que, al hacer una reflexión posterior, no lograse conectar ambos momentos. Por lo tanto, entendió el fenómeno de una forma fragmentada, propio de un *pensamiento empírico*.

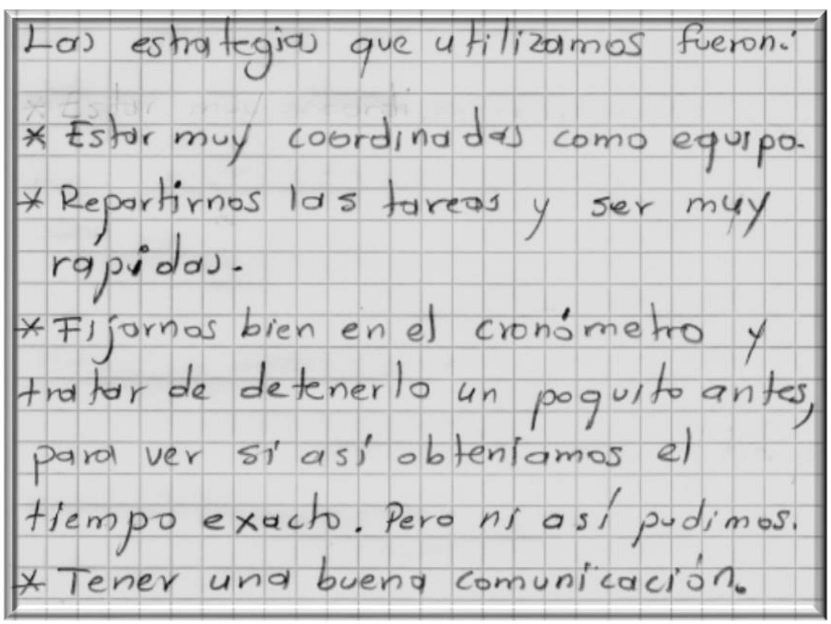
De esta forma, no pretendo afirmar que tanto Eliza como Ana no hacían uso de un *pensamiento empírico* frente a la aproximación al objeto de estudio, pero sí que ellas lograron concatenar el momento práctico de la *actividad* con el momento de reflexión escrita; esto se evidenció en la socialización. La imbricación de los dos momentos referidos –el práctico y el escrito– por parte de Eliza y Ana se evidencia en expresiones como, "pudimos observar que los diferentes factores que intervienen nos dificultan llegar a la exactitud, pero aun así nos permiten tener una mirada, más precisa, detallada, dando espacio al análisis" (Eliza, "Determinación de la posición de un cuerpo en un instante dado", julio 18 de 2017).

Respecto a las estrategias empleadas por las estudiantes protagonistas y sus equipos de trabajo para resolver la situación generadora, ellas afirmaron:



- Tomamos en repetidas ocasiones la medida.
- A la misma hora de tomar las medidas lo hicimos por el mismo lado de la tabla.
- Tratamos de ser lo más precisas posible con el control del tiempo.
- Parabamos el crónometro un poco antes de el tiempo justo para poder ser más exactas con la posición del móvil respecto al tiempo.

Ilustración 33. Estrategias empleadas por Eliza y su equipo de trabajo. ("Determinación de la posición de un móvil en un instante dado" julio18 de 2017).



Las estrategias que utilizamos fueron:

* Estar muy coordinadas como equipo.
* Repartirnos las tareas y ser muy rapidas.
* Fijarnos bien en el cronómetro y tratar de detenerlo un poquito antes, para ver si así obteníamos el tiempo exacto. Pero ni así pudimos.
* Tener una buena comunicación.

Ilustración 34. Estrategias empleadas por Dana y su equipo de trabajo. ("Determinación de la posición de un móvil en un instante dado" julio 18 de 2017).

Tratamos de estar muy coordinadas en toda la práctica, de que cada una fuera muy ágil en el trabajo que le correspondiera: el manejo del cronómetro, voltear la tabla, señalar en la hoja milimetrada, etcétera. Sin embargo, no pudimos obtener los datos precisos.

Ante su respuesta, interpelé mediante la pregunta:

Dana, ¿qué quieres decir con que no pudieron obtener los datos precisos?

A la pregunta planteada, Dana respondió:

Pues, los 8 segundos exactamente y una misma posición de la burbujita, todas las veces. Es que, por ejemplo, la que tenía el cronómetro estaba pendiente y lo detenía un poquitico antes, pero aun así, no nos daba exactamente a los 8 segundos. Pero, es que nooo… para que sea exacto, ¡entonces tendríamos que programar una máquina!

A continuación, la respuesta escrita de Ana.

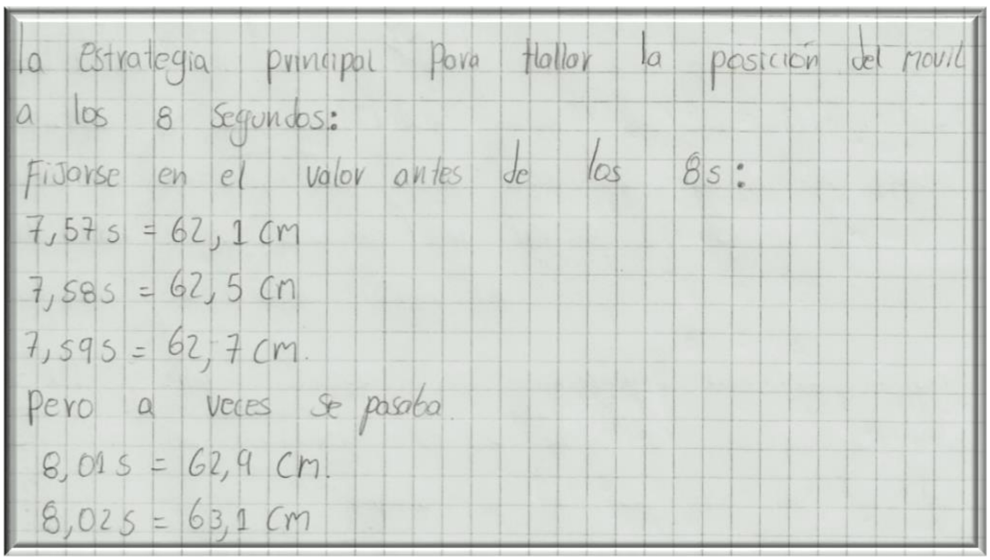

la Estrategia principal para hallar la posición del movil
a los 8 Segundos:
Fijarse en el valor antes de los 8s:
7,57 s = 62,1 cm
7,58s = 62,5 cm
7,59s = 62,7 cm.
pero a veces se pasaba.
8,01 s = 62,9 cm.
8,02s = 63,1 cm

Ilustración 35. Estrategias empleadas por Ana y su equipo de trabajo. (“Determinación de la posición de un móvil en un instante dado” julio 18 de 2017)

Ana hizo hincapié en la estrategia utilizada por ella y su equipo de trabajo en cuanto a la medición del tiempo a los 8 segundos exactos del desplazamiento del móvil. Empleando un sistema de signos numéricos, primordialmente, Ana explicó la estrategia de poner especial atención instantes antes de los 8 segundos exactos para tratar de obtener exactitud en la medida.

Ana presentó, además, la posición del móvil correspondiente a cada tiempo hallado, tanto antes como después de los 8 segundos del desplazamiento del móvil.

En la respuesta de Ana predomina el sistema de signos numéricos como instrumento de mediación entre ella y el objeto de estudio. Por medio de este portador de un significado socio-cultural, Ana plasmó, en forma escrita, un constructo individual resultante de su *actividad* reflexiva, a partir de la *actividad práctica*. En esa línea, considero que Ana usó el signo numérico como vehículo de comunicación de significados a sus compañeras de la *actividad* y a su maestra. Al respecto, retomo a Vigotsky (2013b, p.145) cuando plantea que: “el signo, al principio, es siempre un medio de relación social, un medio de influencia sobre los demás y tan sólo después se transforma en medio de influencia sobre sí mismo”. De esta manera, para Ana, el signo numérico cobró un sentido que trascendió la simple representación hasta transformarse en una influencia directa en su forma particular de comunicar el producto de su reflexión, de su *pensamiento* sobre lo solicitado en la pregunta contenida en la *Actividad Orientadora de Enseñanza*.

En general, las estudiantes resaltaron –implícitamente– la importancia del trabajo colectivo para realizar la situación e intentar obtener un resultado exacto. Las diferentes estrategias que implementaron dan cuenta de la importancia de la interacción con otros sujetos en situaciones de aprendizaje. Fue a través de la comunicación y de la distribución de roles que ellas y sus equipos de trabajo vieron una posible solución a la *situación desencadenadora de aprendizaje*. Así, infiero que las estudiantes identificaron de forma intuitiva pero no consciente, el tiempo y el movimiento de la burbuja como un continuo, pues sus argumentos fueron de tipo técnico –imprecisiones humanas en la realización de la práctica, específicamente en la manipulación de los instrumentos de medida– sin reconocer aun la esencia del fenómeno y, por lo tanto, concibiendo el movimiento como un fenómeno de carácter discreto. Al parecer, las estudiantes consideraron que el mejoramiento de la técnica empleada por ellas y sus equipos facilitaría hallar la respuesta a la pregunta.

Además de las acciones propuestas en la *Actividad Orientadora de Enseñanza* misma, las estudiantes realizaron operaciones acordes a los recursos metodológicos con que contaban como parte del trabajo de tipo colaborativo con los demás sujetos de la *actividad*. Dentro de las operaciones estuvo la de reducir la imprecisión en la toma de los datos por medio de la sincronización entre las integrantes del equipo de trabajo.

Por otra parte, las estudiantes observaban el cronómetro antes del tiempo planteado en la situación, con el fin de obtener una medida lo más exacta posible. Mediante esta última estrategia, las estudiantes intentaron solucionar –aunque de una manera intuitiva– la contradicción de la imposibilidad de determinar el estado exacto del móvil, por medio de la aproximación a sus estados vecinos. Este hecho se confirma en expresiones como: "*Tratamos de ser lo más precisas posible con el control del tiempo. A veces parábamos el cronómetro un poco antes del tiempo justo, para poder ser más exactas con la posición del móvil respecto al tiempo*" (Eliza. "Determinación de la posición de un cuerpo en un instante dado", julio 18 de 2017).

A diferencia de Eliza y Dana, Ana creó una imagen del objeto en la que presentó un campo más amplio de los resultados y, por lo tanto, identificó –de forma intuitiva– cierto entorno respecto a los 8 segundos, así como su interdependencia con las imágenes de los valores de dicho entorno. Ella corroboró este hecho durante la socialización:

La que estaba mirando el cronómetro se fijaba que estuviera llegando al 8 y lo paraba un poquito antes para tratar que diera 8 segundos exactos, pero es que no se obtenía, se pasaba. Cuando el cronómetro llegaba a los 8,00, la compañera decía ¡Ya! pero daba 8:01, 8:02 o algo así… (Ana "Determinación de la posición de un cuerpo en un instante dado", julio 18 de 2017).

Sin embargo, fue un aspecto común que las tres estudiantes se enfrentaran a la contradicción presente en la *situación desencadenadora de aprendizaje*, por medio de estrategias que, si bien no les permitieron llegar a lo que posiblemente era una de sus hipótesis –la posibilidad de obtener una medida de tiempo y posición exactos del móvil–, sí movilizó en ellas diferentes reflexiones sobre el fenómeno físico estudiado: el movimiento de un cuerpo en línea recta. En este sentido, considero que, en su proceso de búsqueda de una solución al problema visibilizado, Ana comenzó a aproximarse desde la intuición, al concepto de *infinitésimo*. Esto es, identificó valores consecutivos "cercanos" al punto 8 lo que podría interpretarse como un entorno de dicho punto.

Caraça (1951, p. 219) define *infinitésimo* de la siguiente manera:

Se llama entorno del punto P a cualquier segmento $\overline{AA'}$del eje Ox del que P sea el punto medio. A la longitud del segmento $\overline{PA} = \rho$ se le llama amplitud del entorno $\overline{AA'}$.

Llamamos *vecindad* del punto P al conjunto de sus entornos. Sea δ un número positivo cualquiera, arbitrariamente pequeño, existirán siempre en la *vecindad* de P entornos de amplitud $\rho < \delta$.

Se dice que un conjunto de puntos pertenece a la *vecindad* de un punto P si todo y cualquier entorno de éste contienen puntos de dicho conjunto.

Definición: Se da el nombre de infinitésimo a toda variable representativa de un conjunto de puntos pertenecientes a la vecindad del origen cuando en esa variable consideramos sucesivamente valores $x_1, x_2, \dots x_n, \dots$ tales que $|x_n| < \delta$ para todo valor de $n > n_1$ y todo $\delta > 0$.

El autor afirma que para que una variable x sea *infinitésimo*, es condición necesaria pero no suficiente, que existan valores en la vecindad del cero; es decir, una variable x solamente será *infinitésimo* si se consideran sus valores sucesivos tan próximos a cero cuanto se desee.

La definición de *infinitésimo* planteada por Caraça coincide con la formulada por Cauchy, (presentada en el apartado de la gestación histórica del límite), "Diremos que una cantidad variable se hace infinitamente pequeña, cuando su valor numérico disminuye indefinidamente de manera que converge hacia el límite cero" (Boyer, 1999, p. 647), en su carácter dinámico.

En la misma línea del carácter dinámico del *infinitésimo*, consideremos la variable x como una variable real, *infinitésima*, la trayectoria de cierto móvil y un punto O perteneciente a dicha trayectoria (ver la ilustración 36). Sobre esa trayectoria los puntos P y P' cuya distancia al punto O es δ por más próximo que P sea de O, es decir por más pequeño que sea el número δ, en el dominio del *infinitésimo* x existe una infinidad de números más pequeños que δ. De esta manera, trabajar con el *infinitésimo* x equivale a trabajar con una infinidad de puntos entre P y P' ya que todos ellos tienen distancias a O que son, en valor absoluto, menores que δ (Caraça, 1951).

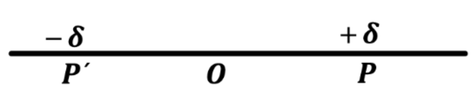


Ilustración 36. Concepto de infinitésimo. (Caraça, 1951, p. 220)

Caraça (1951) plantea, además, una relación entre el concepto *infinitésimo* y el concepto de *vecindad*. Expone que una *vecindad* no es un segmento, sino una variable cuyo dominio está conformado por una infinidad de segmentos en los cuales existen segmentos de amplitud menor que cualquier número real positivo. Por lo tanto, el concepto geométrico de *vecindad*, según el autor, corresponde al concepto analítico de *infinitésimo*, de tal forma que por medio de éste último es posible estudiar lo que pasa en cierta *vecindad* de puntos y así, estudiar "la interdependencia de un punto con sus puntos vecinos" en el fenómeno observado (Caraça, 1951, p. 220).

Caraça (1951) propone profundizar en el abordaje del concepto de *infinitésimo* a través de dos realizaciones particulares: los *infinitésimos* $x - a$ y $1/x$; nombrados por dicho autor como *infinitésimos principales* (Caraça, 1951, p. 289).

Los infinitésimos principales $x - a$ y $1/x$. Según Caraça (1951), en el estudio de un fenómeno puede surgir la necesidad de estudiarlo, tanto en la vecindad de un punto, como en la vecindad del infinito.

En el primer caso acudimos a la función $y = x - a$, de forma que para cualquier número $\delta > 0$ existen valores de x tales que $|x - a| < \delta$ y por lo tanto, $a - \delta < x < a + \delta$ Caraça (1951).

Así, "el *infinitésimo* $x - a$ –vecino de cero cuando x es vecino de a– recibe el nombre de *infinitésimo principal"* (Caraça, 1951, p. 290). Este *infinitésimo* posibilita el estudio de *funciones* de variable real en la *vecindad* de a.

En el segundo caso acudimos a la función $y = 1/x$, de forma que para cualquier número $\delta > 0$ existen valores de x tales que $|1/x| < \delta$ los cuales cumplen que $|x| > 1/\delta$ y por lo tanto, $x < -1/\delta$ ó $x > 1/\delta$. Así, “el *infinitésimo* $1/x$ –vecino de cero cuando x es vecino de infinito– recibe el nombre de *infinitésimo principal”* (Caraça, 1951, p. 290).

Partiendo de los dos *infinitésimo*s principales Caraça plantea las definiciones presentadas a continuación.

Definición I. (Caraça, 1951, p. 292***).*** Se dice que la función $y(x)$, real de variable real, es infinitésima con $x - a$ cuando $\delta > 0$ cualquiera, se le puede hacer corresponder un número también positivo $s(\delta)$ tal que para todos los puntos del intervalo $(a - s, a + s)$ se tiene que:

$$|y(x)| < \delta$$

La condición final se puede dar bajo la forma equivalente:

$$|x - a| < s(\delta) \rightarrow |y(x)| < \delta$$

El autor explica el significado de la definición anterior mediante la forma geométrica que presento a continuación:

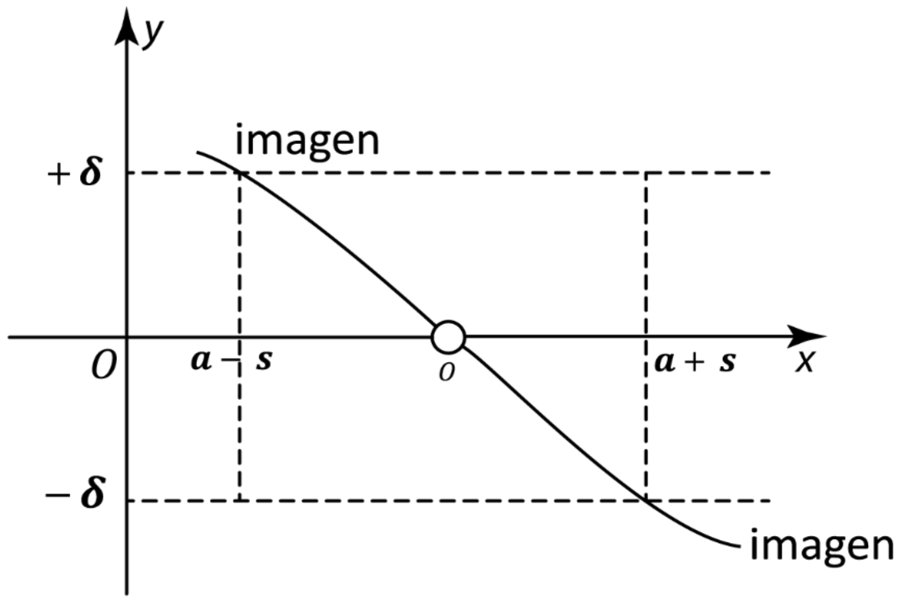


Ilustración 37. Infinitésimo con x-a. La función está entre $-\delta$ y $+\delta$ cuando x es inferior al intervalo $(a-s, a+s)$. δ es cualquier número y s depende de δ . Cuando δ disminuye, s en general también disminuye (Caraça, 1951, p. 294).

Definición II. (Caraça, 1951, p. 293). Se dice que la función $\mathrm{y(x)}$, real de variable real, es infinitésima con $1/\mathrm{x}$ cuando un número $\delta > 0$ cualquiera, se le puede hacer corresponder un número también positivo $\mathrm{s}(\delta)$ tal que para todos los puntos exteriores al intervalo $(-\mathrm{s}, +\mathrm{s})$ se tiene que:

$$|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})| < \boldsymbol{\delta}$$

Como en la definición I, el autor da un significado geométrico mediante la gráfica que presento a continuación.

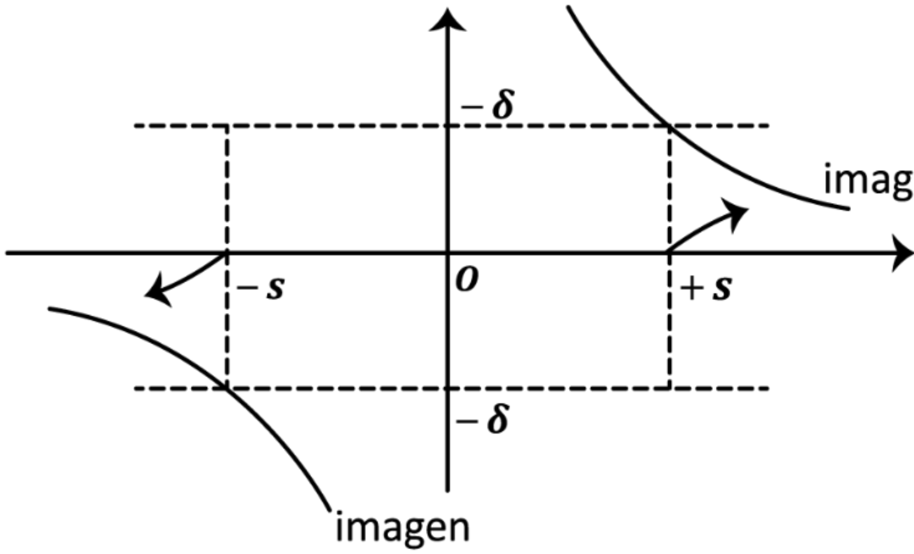


Ilustración 38. Infinitésimo con 1/x. La función está entre $-\delta$ y $+\delta$ cuando x es exterior al intervalo $(-s, +s)$. s es cualquier número y s depende de δ. Cuando δ disminuye, s en general aumenta. (Caraça, 1951, p. 295).

He de aclarar que existen dos razones por las cuales no consideré pertinente abordar –de forma explícita–la construcción teórica de los *infinitésimos principales* expuestos por Caraça (1951). La primera es que tanto la construcción como el concepto en sí de dichos infinitésimos exigen un grado de formalismo que, probablemente, las estudiantes del nivel escolar de undécimo grado aún no logren dotarlo de sentido. La segunda, y en concordancia con la primera razón, porque, desde mis supuestos epistemológicos no consideré la definición explícita de los *infinitésimos principales* como condición necesaria para que las estudiantes se aproximaran a la esencia de *infinitésimo*.

Sin embargo, al diseñar las *Actividades Orientadoras de Enseñanza* fui consciente de la imbricación existente entre los *infinitésimos principales* y el *infinitésimo* en sí como fundamentación teórica. Por esta razón, fui cuidadosa de que la *situación desencadenadora de aprendizaje* los contuviera y que así las estudiantes los abordaran –implícitamente– al realizar la *actividad* correspondiente. Consideré importante plasmar en este apartado lo referente a ambos conceptos como parte fundamental del constructo teórico del concepto de *infinitésimo* y, por consiguiente, del *límite de una función en un punto*, desde la perspectiva epistemológica que asumí en esta investigación.

La segunda *Actividad Orientadora de Enseñanza* que expongo en este apartado es la que denominé "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado". Esta *actividad* es, en verdad, una continuación de la primera que las estudiantes realizaron, ya que la creé con la intencionalidad de que éstas prosiguieran con sus reflexiones sobre el fenómeno estudiado –el movimiento de un cuerpo en una trayectoria rectilínea– sin tener contacto directo con él y, de tal forma, posibilitarles continuar con el proceso de aproximación al concepto de *infinitésimo* y, consecuentemente, al de *límite de una función*.

En los siguientes párrafos presento un episodio concerniente a la socialización de las respuestas que las estudiantes dieron a dos de las preguntas que formulé en la guía escrita. Las preguntas a las que hago alusión son:

5. ¿Cuántos números reales crees que existen entre cinco décimas de segundo antes de los 8 segundos exactos y, cinco décimas de segundo después de los 8 segundos exactos de tiempo transcurrido en el ascenso de la burbuja? ¿Por qué?
6. ¿Cuál piensas que es el valor (o valores) de tiempo más próximo a 8 segundos? ¿Cuál piensas que es el valor(es) de la posición que le corresponde a dicho(s) valor(es) de tiempo? Explica.

Mediante estas preguntas pretendí que, en el proceso de búsqueda a las respuestas de dichas preguntas, las estudiantes conceptualizaran propiedades de la recta Real, tales como densidad y continuidad. Es decir, pretendí que las estudiantes trascendieran una interpretación, que ellas podrían tener, de la recta Real como una figura estática y de carácter discreto, hacia una interpretación que posibilitara la interiorización de ésta como un conjunto de puntos en correspondencia biunívoca[9] con los números reales, que posibilita la representación del desplazamiento continuo de un móvil. Y, en esa misma línea, pretendí que ellas tuvieran la necesidad de hacer un análisis infinitesimal para –parafraseando a Caraça, 1951– estudiar lo que pasaba en cierto punto de interés, de dicho móvil, en interdependencia con los puntos de su *vecindad.*

A continuación, las voces de las estudiantes y la mía –como maestra– en el momento de la socialización en mención.

Ilustración 39. "Análisis de la Posición de un cuerpo en un instante dado"-Socialización (25 de julio de 2017)

[9]Retomo este término desde Apostol (1976) y Caraça (1951).
Apostol afirma que: "[…] a cada punto de la recta real corresponde un número real y uno sólo y, recíprocamente, cada número real está representado por un punto de la recta real y uno sólo." (p. 4)
Al respecto, Caraça expone que "puede suceder que una correspondencia sea unívoca y su recíproca también; si eso se da, la correspondencia es denominada biunívoca" (p. 8).

Maestra: *Muchachas, vamos a la respuesta que dieron a la pregunta número cinco de la guía. ¿Quién quiere comenzar a presentarnos su respuesta?*

Varias estudiantes respondieron en coro: *infinitos números.*

Maestra: ¿Por qué?

Después de un corto silencio, Ana respondió:

Ana: *Pues, porque estamos trabajando con números reales, que son infinitos y, como lo vimos en otras clases, hace tiempo ya, entre dos números reales hay infinidad de números reales.*

Maestra: *Bien. ¿Les quedó claro lo que Ana nos argumentó?*

Ante el asentimiento del resto del grupo, me dirigí al tablero –señalando el número 8 en la gráfica que representaba la *función* resultante de las operaciones de uno de los equipos de trabajo– y formulé la pregunta número seis (*¿Cuál piensas que es el valor (o valores) de tiempo más próximo a 8 segundos?*). Surgieron respuestas como las siguientes:

Eliza: *Nosotras escribimos [ella y su equipo de trabajo] que el número más próximo a 8,00, en ese intervalo que usted nos dijo es, 7,9 segundos. Y la posición correspondiente, en nuestro caso, sería 52,9 centímetros…más o menos.*

Dana: *Nosotras pensamos y dijimos algo similar, pues, cambiando el valor de la posición; a nosotras nos daría en 50,9 centímetros. Pero, es que usted no nos dijo si los valores próximos a 8 eran antes o después. Entonces ahí nos enredamos un poquito…*

Maestra: *Y, entonces, ¿que respondieron finalmente?*

Dana: *Que era así, como dijimos, si era el tiempo antes de los 8, pero que era 8,1, si era después.*

Maestra: *Y, ¿qué posición del móvil le correspondería entonces, a los 8,1 segundos?*

Dana: *Eh…eso no lo dijimos. Pero, pues, sería…51,1 centímetros, más o menos.*

Me dirigí al tablero y construí una nueva gráfica de mayores dimensiones en la que se identificaran con claridad, tanto los valores en discusión como el entorno que propuse, implícitamente, en la pregunta orientadora para el punto correspondiente a 8,0. Luego, me dirigí al todo el grupo señalando tanto al valor del tiempo equivalente a 8 segundos como su *vecindad:*

Maestra: *Bueno, ¿qué dicen las demás? Cuando, en la guía, les formulé la pregunta sobre el número que ustedes consideraran más próximo a 8 segundos, ¿me refería al posible número anterior, o al posterior a él?*

Se generó una discusión en torno a la pregunta, dando cuenta así, de una movilización interna en las estudiantes y una nueva reflexión.

Maestra: *Y, entonces, ¿a qué conclusión llegaron?*

Dana: *Sí, profe, aquí hablando con las compañeras pienso que sí es así, como lo dijimos en el equipo. Es que, además, viendo la gráfica que usted acabó de hacer, aquí concluimos [señalando a sus* compañeras cercanas a la silla en la que está sentada] *que tanto el 7,9 como el 8,1, son cercanos al 8,0.*

Por medio de un gesto afirmativo, el resto del grupo manifestó estar de acuerdo con el enunciado de Dana.

Maestra: ¡*Claro! En la pregunta que formulé, yo no indiqué un antes o un después de 8,0 segundos. Yo pregunté por el posible valor más próximo a él. Y, me puedo aproximar tanto por izquierda, como por derecha a él, ¿no?*

Bueno, pero tengo una inquietud… Fijémonos, por ahora, sólo aquí en este segmento de recta que estoy señalando [En el entorno del punto 8 e indicando aproximaciones a él, por medio de flechas] ¿Ustedes cómo saben que los valores más próximos al 8,0 son, 7,9 y 8,1?

Después de segundos iniciales de silencio y de un murmullo posterior, Ana respondió:

Ana: *Profe, es que vea, estamos fijándonos 5 décimas antes del 8 y 5 décimas después de él, ¿cierto? Entonces, 7,5; 7,6; 7,7…y así hasta el 8. Lo mismo para después de él hasta 8,5.*

Maestra: *Sí, eso es cierto. Pero, veamos. Tú misma dijiste hace un rato, en tu respuesta en la pregunta anterior, que entre un número y otro existen infinitos números, ¿cierto? Luego [señalando el segmento de recta entre 8,0 y 8,1] ¿cuántos números pueden existir entre estos dos números, si sabemos que estamos en el dominio de los números* reales?

Casi al mismo tiempo, la mayoría de las estudiantes y las protagonistas de la investigación respondieron:

Ahhh, ya…

Ana: *Pero, entonces, podría ser 8,01, como cuando medimos con el cronómetro o hasta 8,001, ¿cierto profe?*

Maestra: *Exactamente. Es que, no podemos perder de vista que estamos analizando un fenómeno cuyo dominio son los números reales*.

Eliza: *Pero, entonces, no vamos a poder saber cuál es el número más cercano al 8,00…*

En el episodio anterior se hace evidente cómo la socialización –como una de las acciones de la *Actividad Orientadora de Enseñanza* referida– de las respuestas dadas por las estudiantes a las preguntas planteadas, transformó el aula de clase comúnmente considerada como un espacio cerrado, en un espacio abierto, posibilitador de la intersubjetividad en torno a la dotación de significado del objeto matemático en estudio –el *infinitésimo*, en este caso–. En ese mismo sentido, concuerdo con Jaramillo (2011), Monteiro (2011) y Radford (2008) en sus planteamientos sobre el aula de clase como un lugar dialógico en el que convergen sujetos históricos que desde sus particularidades dotan de sentido el saber matemático por medio de las *actividades* de enseñanza y de aprendizaje que los convocan. Las relaciones intersubjetivas se tornaron consustanciales al proceso de aprendizaje.

En este contexto, el objeto matemático fue haciéndose visible para las estudiantes en la búsqueda conjunta de la solución a la situación-problema contenida en las preguntas. Este proceso puede constatarse por medio de frases enunciadas por las estudiantes como las que presento a continuación:

> *Pero, entonces, podría ser 8,01, como cuando medimos con el cronómetro o hasta 8,001* (Ana, "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado", 25 de julio 2017).

Ana relacionó el conjunto de puntos de la recta con el momento de la *actividad práctica* en que halló la distancia recorrida por la burbuja en los primeros 8 segundos de su desplazamiento. Aquí, Ana hizo conexiones al interior del fenómeno en estudio –el desplazamiento de un móvil en línea recta– al concebir la recta Real como una representación de un fenómeno que fluye y que, por consiguiente, no es posible determinar en ella un punto exacto sin considerar los puntos cercanos. En el mismo sentido, Eliza expresó:

> *Pero, entonces, no vamos a poder saber cuál es el número más cercano al 8,00… (*Eliza, “Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado”, 25 de julio de 2017).

Por medio de la recta Real y de los respectivos razonamientos de Ana, una vez más, Eliza notó la naturaleza del movimiento en cuanto a la imposibilidad de hallar tanto la posición de un cuerpo en cualquier instante cómo saber el punto que lo antecede o lo sigue. Esta naturaleza obedece a una contradicción interna tal, que, como lo expresa Caraça (1951), “A cada instante el móvil está y no está en determinado punto”. (p. 218)

En consecuencia, sumergida en la *actividad* de enseñanza y desde mi ser-maestra, hice “un llamado” (Radford, 2013) a las estudiantes para que se aproximaran paulatinamente, desde sus particularidades, a los conceptos de *entorno*, *vecindad* y, por ende, al de *infinitésimo*.

En la clase siguiente retomé la socialización. Luego de volver a hacer la última gráfica de la clase anterior, pregunté al grupo:

Maestra: *En el fenómeno físico que estamos estudiando, ¿cuál fue el problema principal que ustedes encontraron?*

Eliza: *Que no podíamos hallar dónde estaba la burbuja, justo, a los 8,0 segundos.*

Maestra: *Muy bien. Y, ¿encuentran relación entre ese problema y el análisis que estábamos realizando, la clase anterior, respecto al conjunto de números posibles cercanos al 8,0?*

Mediante gestos, algunas estudiantes expresaron no hallar relación alguna mientras que otras, mediante el mismo lenguaje, dieron una respuesta afirmativa. Por su parte, Dana expresó:

Dana: *Yo creo que sí hay relación. Porque, vea, en ambos casos tenemos dificultades, bueno, en realidad imposibilidades, de hallar lo que nos piden. Y además, porque estamos tratando de hallar números exactos y no podemos.*

Ana: *Además de lo que Dana dice, yo digo que sí hay relación porque el 8 está como en la mitad de los otros números que están en ese conjunto que estábamos mirando. O sea, los que están más o menos cerca, como el 7, 9, que decíamos antes, o muy cerquita a él como 7, 99 y… así.*

Maestra: *Bueno. Entonces, como Ana dice, existen números no tan cercanos al 8, en este caso, y otros muy cercanos a él. Y, ¿cómo sabemos qué tan cercanos están de él? ¿Ustedes qué piensan?*

Ana: *Pues, sabiendo a qué distancia están de él.*

Dana: *Ah, sí, claro. Así sabemos qué tan cerquita están de él.*

Maestra: *¿Cómo es eso?, ¿Cómo sabemos la distancia a la que se encuentran uno del otro?*

Ana: *Restando,…creo.*

Maestra: *¿Ustedes qué dicen? [Dirigiéndome al grupo en general].*

A ver, veamos [Dirigiéndome al tablero e indicando en la recta]. Es evidente que desde el punto del origen de coordenadas hasta este punto [8,01] han transcurrido, 8,01 segundos aproximadamente. ¿Entonces cuánto tiempo ha transcurrido entre 8,01 y 8,0 segundos?

Después de la respuesta acertada de la mayoría de las estudiantes, de nuevo pregunté:

Maestra: Bien, ¿y cómo supieron? *[Dirigiéndome al grupo en general]*.

Ana: *Ah, pues, restando.*

Eliza: *Ay, no. Ahí sí me perdí, no entendí.*

Maestra: *¿Quién quiere salir y explicarle a Eliza y a las que de pronto no han comprendido y nos explica a todas?*

Ana levantó la mano para indicar que deseaba hacerlo. Ante mi mirada de aprobación salió al tablero y se dirigió especialmente a Eliza.

Ana: V*ea, lo que yo entendí es que para saber qué tan cerquita está un número de este conjunto de números que estamos viendo, del 8, pues restamos.*

Por ejemplo: 8,01-8,0. Eso da… [Se toma unos segundos para responder] 0,01.

¿Cierto profe?

Maestra: Sí, c*ierto. ¿Entendimos? [Dirigiéndome a Eliza y a todo el grupo]*.

Sus respuestas fueron afirmativas.

Maestra: *Bueno, ¿y si queremos saber qué tan cerca está un número cualquiera del conjunto, de otro?*

Varias estudiantes expresaron:

Pues, hacemos lo mismo; restamos.

Maestra: *Bueno, y si estamos en una situación cualquiera en la que nos interese analizar los puntos cercanos a un punto de interés, cualquiera, ¿cómo podemos generalizar lo cercano, o no, que estén de él?*

Ante esta pregunta, la mayoría de las estudiantes comunicaron, por medio de un lenguaje gestual, no saber la respuesta. Otras estudiantes –las estudiantes protagonistas entre ellas– expresaron lo contrario. Ana decidió salir al tablero.

Ana: *Pues, si fuera, por ejemplo, con otro tiempo, entonces sería algo así como,*

$t -$…[duda de la letra con qué representar el número de interés].

$t - b$ o, algo así..

Maestra: *En lo que escribiste, ¿que representan la t y la b?*

Ana: *La t, sería el tiempo y la b, sería como el 8, pero sin ser el 8.*

Consciente de que la expresión deducida por Ana $t - b$, no era suficiente para generalizar el "ser próximo a" tomé la decisión, como maestra, de no proponer un lenguaje formal, por varias razones. La primera, porque mi intencionalidad era motivar a las estudiantes, por medio de mis preguntas, a una reflexión más profunda sobre sus respuestas, escritas y verbales, iniciales a la situación planteada. La segunda razón obedeció a mis supuestos ontológicos, en los que, considero la esencia del infinitésimo, en línea con Caraça (1951), como una variable que representa un conjunto de valores sucesivos tan próximos a cero cuánto se desee. Así, esta aproximación es de carácter dinámico que, por lo tanto, contiene al movimiento como pilar; no requiere del lenguaje formal para conocerla.

Ana empleó un lenguaje algebraico para expresar una idea que creó sobre la manera de hallar los puntos próximos al punto de interés. En otras palabras, Ana reconoció ciertos patrones en él y empleó instrumentos simbólicos –signos alfanuméricos– que le posibilitaron reflejar dicho objeto desde su modo particular de reflexionar.

En ese sentido, considero que la expresión de Ana, "*La t sería el tiempo y la b sería como el 8, pero sin ser el 8",* dio cuenta de la apropiación del concepto de variable en cuanto al carácter contradictorio que éste posee –en el sentido de Caraça (1951)– entre el ser y no ser, entre una síntesis de las partes y el todo del conjunto que representa; la variable como un signo matemático que nos posibilita visualizar el carácter cambiante de un fenómeno.

Ana usó la variable como instrumento para comunicar el proceso de síntesis que realizó a partir de sus observaciones del fenómeno en estudio; evidenció su apropiación del concepto de variable. Asumo la apropiación desde los planteamientos de Moura *et al*. (2011), Davidov (1988) y Leontiev (2004); es decir, como un proceso que trasciende el significado de posesión individual al de apropiación de un producto cultural, históricamente constituido, por medio de una *actividad mental* colectiva. La apropiación como "un tipo especial de actividad" (Davidov, 1988, p.56) en la que el sujeto reproduce capacidades concretas, histórica y socialmente formadas; como, "la capacidad imaginativa" o capacidad de pensar teóricamente" (Davidov, 1988, p. 57), por ejemplo. En el contexto actual y específicamente en el desarrollo de la *Actividad Orientadora de Enseñanza* en mención, Ana hizo un uso particular del concepto de variable –elaborado por generaciones anteriores– para generalizar un concepto y transmitirlo a sus compañeras.

En esta parte del episodio también se evidencia que las estudiantes –principalmente Ana– se estaban aproximando, intuitivamente aun, al *infinitésimo principal* $x - a$, y por lo tanto al concepto de *infinitésimo* (desde un lenguaje no formal). Por medio del concepto, Ana encontró una forma de argumentar sus hipótesis de cercanía al punto de interés mediante una generalización de sus hallazgos en la manifestación del fenómeno.

Reconstruí la gráfica en el tablero resaltando el entorno en estudio y otros más, para explicitar dicho término y el término *vecindad* de un punto *P* –de 8,0 en este caso–. Posteriormente, pregunté al grupo:

Maestra: *Entonces, según lo que estoy enfatizando en la gráfica, ¿piensan que existe relación entre entorno y vecindad?*

Eliza: *Yo creo que, viendo lo que usted dibujó, que los entornos como que forman una vecindad.*

Maestra: *Y, ¿qué piensan las demás?*

Ana: *Sí, es que ahí es claro. Pero, ¿o sea que la vecindad es como un segmento más grande?*

Eliza: *Pero, que está cambiando de tamaño, ¿cierto?*

Maestra: *Veamos, [indicando a la vez, en la gráfica] si la vecindad cambia de tamaño, entonces ¿es un solo segmento?*

Varias estudiantes respondieron, casi al mismo tiempo: *nooo…*

Ana *Ah, sí, sí... Si fuera un solo segmento, pues, no cambiaría, estaría ahí quieto…*

Dana A ver…*O sea, ¿qué es como una especie de variable, o…algo así? –lo dice interpelando a Ana y con un gesto de extrañeza.*

Ana *Claro.*

Partiendo de las expresiones de las estudiantes en las dos socializaciones, retomé la discusión sobre los conceptos de *vecindad* e *infinitésimo* –al que las estudiantes se estaban aproximando de forma inconsciente– y enuncié a todo el grupo:

Maestra: *Bueno, como sabemos a cada punto de la recta Real le corresponde un número real. Luego, en la vecindad de nuestro punto de interés, ¿cuántos números reales hay?*

La mayoría de las estudiantes respondieron casi al mismo tiempo: *Infinidad de números.*

Maestra: *Y si les digo, que a lo que representa ese conjunto de números en la vecindad del punto que nos interesa, se le llama infinitésimo, entonces, ¿qué piensan, ustedes, que es infinitésimo?*

Ana: *Pues, que también es una variable.*

Maestra: *¿Por qué?*

Ana: *Pues, por lo que sabemos de variable: que representa un conjunto de valores de algo que está cambiando.*

Maestra: *¿Qué dicen las demás al respecto?*

Eliza: *Sí. Es que… vea que según lo que usted dibujó ahí [señalando la gráfica en la que resalté la variable] se nota claramente que son todos esos números, pequeñitos que están en la vecindad del número y, obviamente, está cambiando.*

En ese momento se escuchó el timbre de finalización de la clase.

Maestra: *Bien muchachas, la próxima clase continuamos. Qué tengan un buen resto de día.*

El episodio narrado indica cómo las estudiantes comenzaron a aproximarse al concepto de *vecindad*, en el sentido de Caraça (1951). Esto es, la *vecindad* no como un segmento, sino como una variable cuyo dominio está conformado por una infinidad de segmentos en torno a un punto. Una vez más, identificaron la relación mutua cambio/movimiento en el fenómeno, así como los constructos teóricos relacionados con el movimiento, por ejemplo, en expresiones como:

> *Ah, sí, sí. Si fuera un solo segmento, pues, no cambiaría, estaría ahí quieto…* (Ana, "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado"-Socialización 28 de julio de 2017)
>
> *O sea, ¿qué es como una especie de variable, o…algo así?* (Dana, "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado"-Socialización 28 de julio de 2017)
>
> *Sí. Es que… vea que según lo que usted dibujó ahí [señalando la gráfica en la que resalté la variable] se nota claramente que son todos esos números, pequeñitos que están en la vecindad del número y, obviamente, está cambiando* (Eliza, "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado"-Socialización 28 de julio de 2017),

Aunque las estudiantes protagonistas de la investigación no explicitaron el *infinitésimo*, visualizaron la esencia del concepto a través de un proceso teórico de *objetivación*, tanto en el episodio correspondiente a la socialización referida, como en las otras *Actividades Orientadoras de Enseñanza* que he presentado.

La objetivación según Radford (2017a) es el “proceso de reconocimiento de lo que nos objeta —sistemas de ideas, significados culturales, formas de pensamiento, etcétera.” (p. 136). Es un proceso mediante el cual se “vuelve aparente lo potencial” (Radford, 2004, p. 18). Asumo que ver lo que en cierto momento de nuestro proceso de *aprendizaje* no se ha revelado aún, ante nuestra visión, se revela mediante un proceso de intersubjetividad. Es decir, se nos hace visible lo invisible a través de la interacción con *el otro* que permite hacer una reflexión de la realidad y, por lo tanto, ver lo que antes estaba oculto en la cultura de la que hacemos parte.

En el marco de la teoría de la *objetivación*, Radford (2006, 2008, 2013) plantea que el *aprendizaje* es un acto en el que damos sentido a los objetos existentes en la cultura, cuando nos relacionamos abiertamente con ellos y con quienes interactuamos. Es hallar un “*algo”* (Radford, 2008, p. 225) en la cultura de forma tal que en ese proceso de búsqueda “*el individuo que busca, se encuentra”* (ibídem) es decir, que a la vez que encuentra ese algo, pasa a constituirse como sujeto. Por lo tanto, el *aprendizaje* involucra procesos sociales en los que el sujeto adquiere progresivamente, por medio de la *actividad*, *conciencia* sobre ciertas formas “codificadas de *pensamiento* y de acción” (Radford, 2013, p.13). En esta dirección, comprendo la *objetivación* como un proceso social donde el aprendizaje surge desde las unidades dialécticas individuo/colectivo, individuo/cultura, cuando el sujeto toma “conciencia progresiva*”* (Radford, 2006, p. 116) de ese algo encontrado y lo dota de sentido. En palabras del autor:

> Tal como se entiende aquí, la *objetivación* es más que la conexión de los dos polos clásicos epistemológicos, sujeto y objeto: es de hecho un proceso transformador y creativo entre estos dos polos, donde, en el curso del aprendizaje, el sujeto objetiva el saber cultural y, al hacerlo, se encuentra objetivado en un movimiento reflexivo que

> puede ser denominado s*ubjetivación*. La elaboración del sujeto, la creación de una subjetividad particular (y única) es, por lo tanto, un proceso de subjetivación que es posible por la actividad en la cual la *objetivación* se lleva a cabo, y por la naturaleza *re-flexiva* del pensamiento […] (2008, p.225).

Frente al anterior planteamiento, resalto el carácter dialéctico del proceso de *aprendizaje*, desde la teoría de la *objetivación* asumida por Radford (2008). Es dialéctico porque entraña el movimiento constante entre los aspectos principales del proceso de *aprendizaje* (el sujeto y el objeto cultural) generado por la contradicción existente entre ellos en la que el objeto aún no visualizado por el sujeto se antepone ante él. Así, dichos aspectos entran en contradicción un primer momento de interacción para luego conformar una unidad en la que el objeto –pre-existente en la cultura– es transformado por el sujeto en un "objeto de conciencia" (Radford, 2018, p. 67). De esta forma, en esta unidad dialéctica –sujeto/objeto– el primero se constituye en un sujeto diferente al del momento inicial.

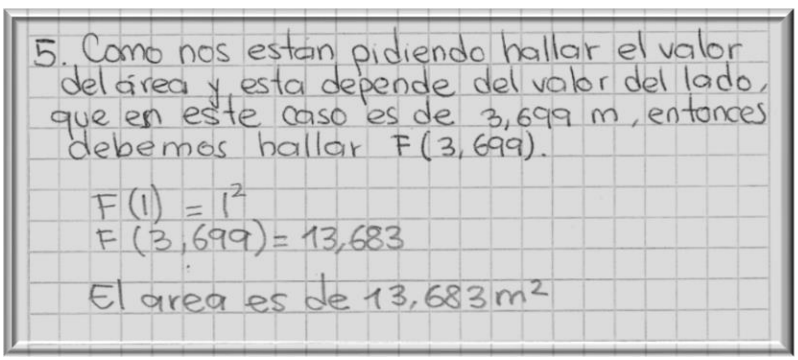
Fue precisamente en esa línea que diseñé la *Actividad Orientadora de Enseñanza* referida –así como las demás– de manera tal que las estudiantes, a partir de un trabajo creativo y colectivo, se sumergieran en un proceso de *objetivación* al buscar soluciones a la *situación desencadenadora de aprendizaje* planteada y continuaran constituyéndose como individuos, como sujetos en el proceso de dotar de sentido personal los conceptos teóricos abordados del *cálculo*. En ese sentido, considero que en el episodio sobre la socialización como parte de la *Actividades Orientadoras de Enseñanza*, las estudiantes se aproximaron de forma paulatina (Radford, 2006, 2013) al concepto de *infinitésimo* en una relación dialógica producto de la interacción con sus compañeras de aula y con la maestra. Esta relación dialógica posibilitó que las estudiantes se posicionaran "de manera crítica" (Radford, 2014, p.136) en el proceso de aproximación al objeto matemático estudiado, constituido de forma histórica y cultural.

El episodio siguiente corresponde a la *Actividad Orientadora de Enseñanza* que denominé, "¿*Límite*?". Para realizar esta *Actividad Orientadora de Enseñanza* las estudiantes debían referirse a la *Actividad Orientadora de Enseñanza* "Tanque para Almacenamiento de Agua" que realizaron meses antes cuando comenzamos a abordar el concepto de *función* (las guías que orientaron ambas *Actividades Orientadoras de Enseñanza* pueden verse en el apartado correspondiente al diseño metodológico de la investigación). El episodio corresponde a las respuestas dadas por las protagonistas de la investigación, tanto en forma escrita como en la socialización.

Mi intencionalidad con esta *Actividad Orientadora de Enseñanza* fue movilizar el *pensamiento* de las estudiantes a otro nivel –hacia un *pensamiento teórico*– al enfrentarse a un nuevo objeto (el *infinitésimo*) existente en una situación matemática ya conocida–el diseño ficticio de un tanque para almacenamiento de agua–. Me refiero a un objeto nuevo porque es producto de la transformación del objeto al que ellas se enfrentaron en la *Actividad Orientadora de Enseñanza* anterior (el concepto de *función*), transformación generada por las acciones y operaciones necesarias para responder la nueva pregunta orientadora que generó una nueva situación-problema. Al transformarse el objeto se transformó también la *actividad* porque la pregunta que orientó dicha *actividad* exigió una reflexión diferente frente al objeto *función;* el cual exigió ahora abordarlo de una manera diferente –el uso consciente del *infinitésimo*– para resolver la *situación desencadenadora de aprendizaje*. La pregunta orientadora a la que hago alusión fue la siguiente:

¿Cuál es el valor del área, cuándo el lado del tanque es próximo a 3,699 m?

La pregunta también tuvo la intención de que las estudiantes hallaran la necesidad de hacer un análisis infinitesimal[10], al entender el movimiento existente en la aproximación propuesta en la pregunta, y continuar acercándolas al concepto de *límite de una función en un punto*. A continuación, en las ilustraciones, 39 a 44, presento las respuestas de Eliza, Dana y Ana.



5. Como nos están pidiendo hallar el valor del área y esta depende del valor del lado, que en este caso es de 3,699 m, entonces debemos hallar $F(3,699)$.

$F(1) = 1^2$
$F(3,699) = 13,683$

El area es de $13,683 \, m^2$

Ilustración 40. Representación analítica en la respuesta de Eliza (¿Límite?, septiembre 9 de 2017)

[10] Con esta expresión me refiero, no al análisis desde el formalismo matemático del *cálculo*, sino a un movimiento mental de las estudiantes por medio de la visualización de la esencia del infinitésimo como herramienta en la solución de la situación.

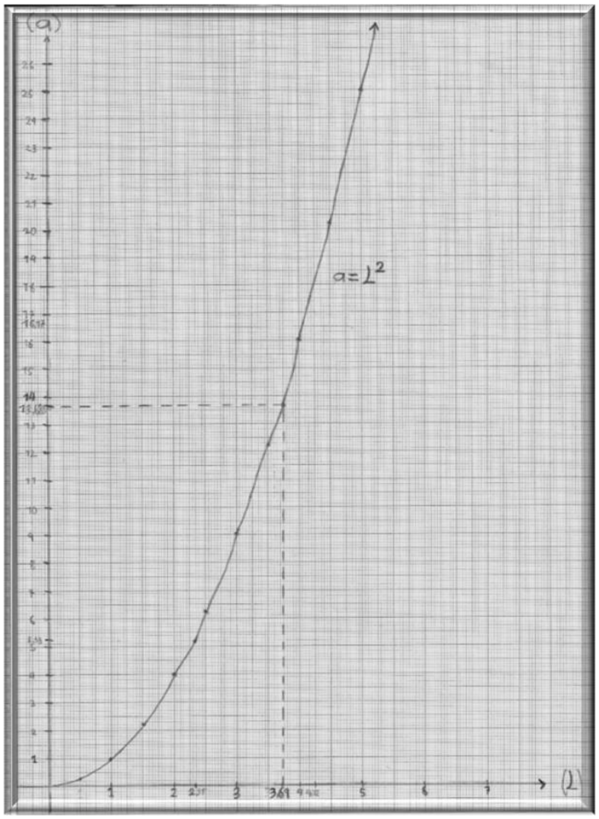
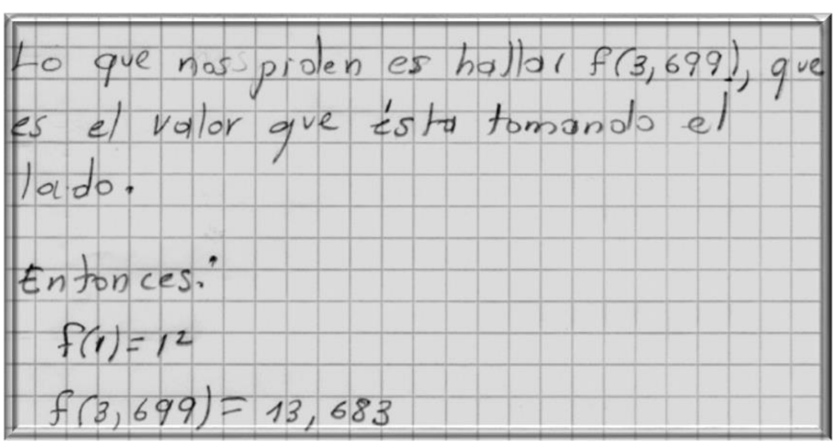


Ilustración 41. Representación gráfica en la respuesta de Eliza (¿Límite?, septiembre 9 de 2017)


Lo que nos piden es hallar $f(3,699)$, que es el valor que ésta tomando el lado.

Entonces:

$f(l)=l^2$

$f(3,699)= 13,683$

Ilustración 42. Representación analítica en la respuesta de Dana (¿Límite?, septiembre 9 de 2017)

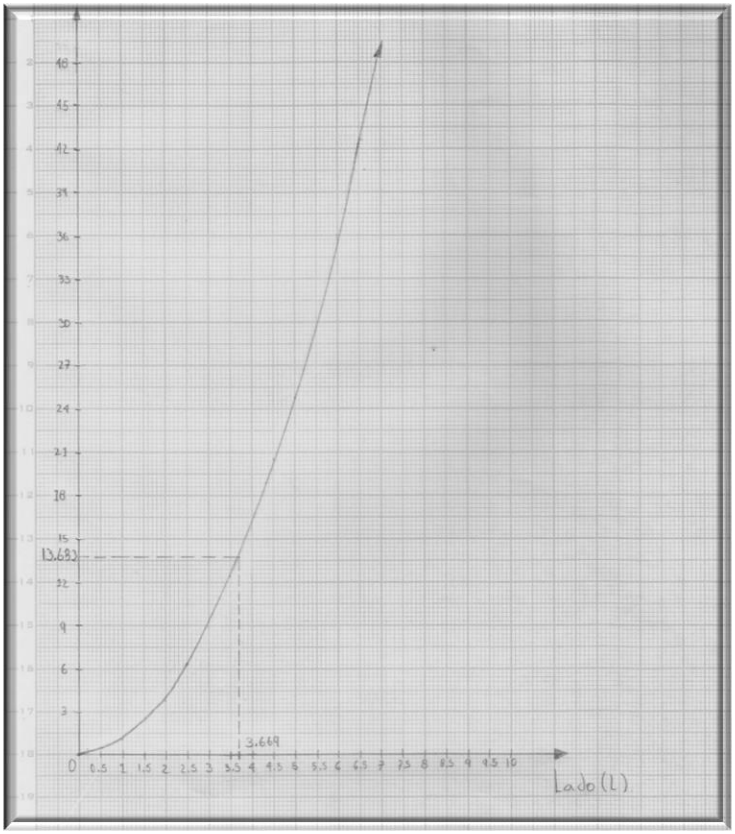
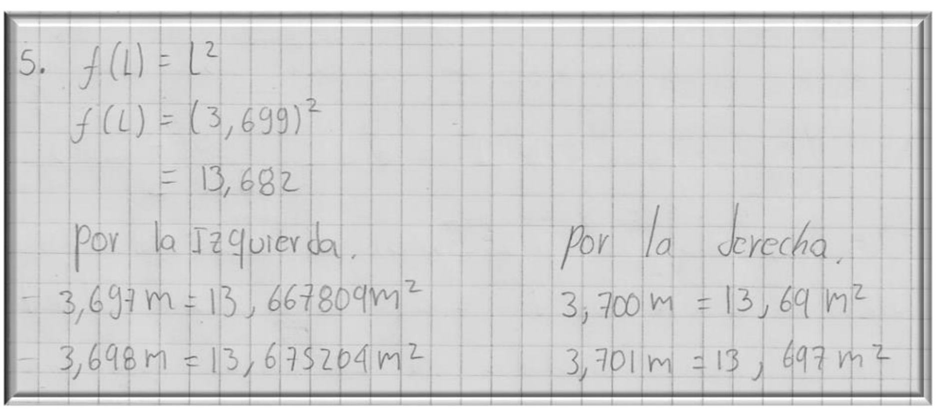


Ilustración 43. Representación gráfica en la respuesta de Dana (¿Límite?, septiembre 9 de 2017)



5. $f(L) = L^2$

$f(L) = (3,699)^2$

$= 13,682$

por la Izquierda.

$3,697\,m = 13,667809\,m^2$

$3,698\,m = 13,675204\,m^2$

por la derecha.

$3,700\,m = 13,69\,m^2$

$3,701\,m = 13,697\,m^2$

Ilustración 44. Representación analítica en la respuesta de Ana (¿Límite?, septiembre 9 de 2017)

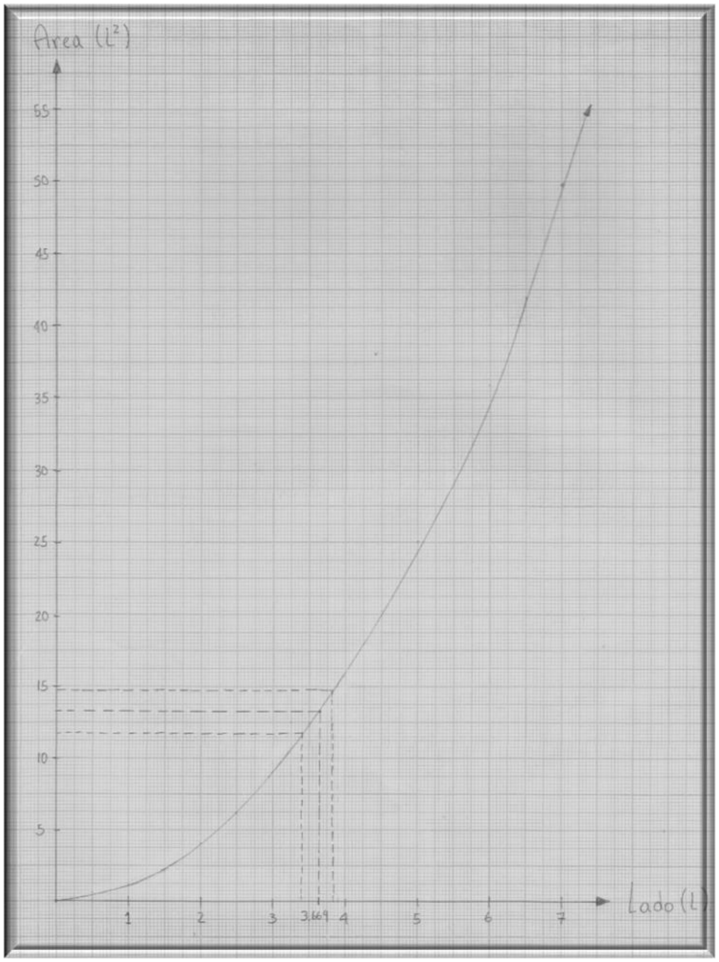


Ilustración 45. Representación gráfica en la respuesta de Ana (¿Límite?, septiembre 9 de 2017)

En las representaciones analíticas y gráficas hechas por Eliza y Dana se hace evidente que, a diferencia de Ana, no vieron necesidad de hacer un análisis infinitesimal para responder a la pregunta. Al parecer, consideraron suficiente hallar el valor de la variable dependiente en correspondencia con el valor de la variable independiente. Por lo tanto, para Eliza y Dana, el objeto no se modificó con respecto a la *Actividad Orientadora de Enseñanza* anterior; este continuó siendo el correspondiente al concepto de *función.* Contrariamente, en su relación con el objeto de estudio –concepto de *función*– determinada por la pregunta orientadora, Ana evidenció necesidad de realizar acciones y operaciones diferentes y, por lo tanto, el objeto de estudio se transformó para ella. De esa manera, Ana realizó una *actividad* mental que le posibilitó emplear el *infinitésimo* como un instrumento matemático para hallar el valor de la *función* en un punto, por aproximaciones sucesivas. Aunque Ana halló el *límite de la función*, no lo hizo de forma consciente. Sin embargo, en concordancia con Radford (2013), Ana se estaba aproximando paulatinamente al saber matemático construido social e históricamente respecto al *límite de una función*.

La movilización del *pensamiento* de Ana se hizo más evidente en el momento de la socialización, junto al tablero, mediante un diálogo sostenido con Dana –dirigiéndose a la vez a todo el grupo–. Ana argumentó la necesidad del uso del *infinitésimo,* aunque no fue solicitado directamente en la guía que orientó la *actividad*. A continuación, presento el diálogo en mención.

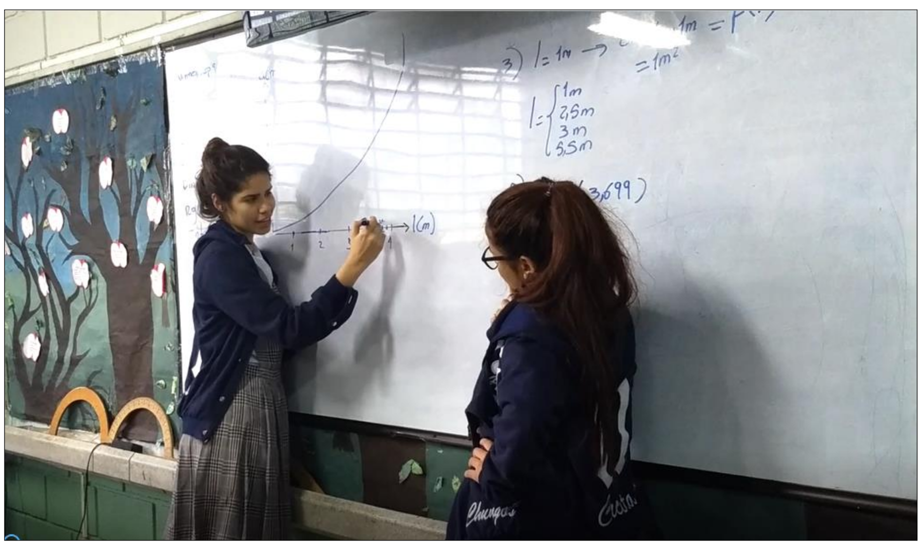


Ilustración 46. Ana le explica a Dana la necesidad del uso del *infinitésimo* como parte de la solución al problema planteado en la actividad (¿Límite?, septiembre 9 de 2017)

Ana: *Bueno, en ese punto* [de la guía] *nos pedían hallar el área pero cuando el lado se aproximaba a…* [se detiene un segundo para mirar en el tablero el valor del lado] *3, 699 metros. Entonces teníamos que acercarnos tanto por derecha* *como por izquierda, porque, recuerde lo que discutimos la clase pasada, aproximarnos a un número es movernos hasta él por los dos lados [indica el movimiento con su mano]*

Dana: *¡Ah, claro, yo no había entendido! Es que no es el punto exacto, sino en la…* [duda un momento en el término] *vecindad. ¡Ay, claro!* [Dana decide sentarse en la silla que acostumbra usar en las clases].

Maestra: *Muy bien. Continúa, Ana, por favor.*

Ana: *Bueno, y…pues, como lo que nos piden es hallar el área, entonces miro en el eje Y el valor al que le corresponde el 3, 6999, pero para estar segura lo hago en la calculadora.*

Maestra: *Y, ¿cómo lo hallaste en la calculadora?*

Ana: *Pues, fácil. Simplemente elevando 3,699 al cuadrado, porque esa es la función.*

Maestra: *La expresión analítica de la función.*

Ana: *Eso, sí, porque esto también es la función [señala la curva]. Y me dio, 13,682*

Maestra: *Bueno, muy bien.*

A ver… recuérdanos ¿cómo fue que hallaste estos números de acá de la vecindad del 13,682?

Ana: *También reemplazando en la expresión analítica.*

Maestra: *¿Por qué?*

Ana: *Porque son los que le corresponden a los de aquí, de la vecindad de este [señalando el 3,699]*

Maestra: Ah, ya. Pero, entonces, ¿será que esos números que hallaste tienen alguna relación con el que le corresponde a 3,699??

Ana: Ehhh…pues… sí. Pero no sé bien. Ay, no profe, no sé.

Maestra: *¿Muchachas qué dicen ustedes? [Refiriéndome a todo el grupo]*

Bueno, continúen pensando en esto último por favor, en las siguientes clases continuaremos trabajando estos conceptos.

Como lo expresé antes, al enfrentarse al objeto matemático contenido en la pregunta problematizadora, Ana acudió a un método que le permitiera responder dicha pregunta. Que Ana haya empleado el *infinitésimo* —como valores sucesivos de una variable en la vecindad del origen— para hallar la solución a la situación, denotó su apropiación del concepto de *infinitésimo ya que* hizo un uso consciente de éste como un instrumento matemático para estudiar un fenómeno en movimiento. Este hecho se evidenció cuando explicó a Dana, mediante la expresión: "*Entonces teníamos que acercarnos tanto por derecha como por izquierda, porque, recuerde lo que discutimos la clase pasada, aproximarnos a un número es movernos hasta él por los dos lados".* El concepto se transformó en un instrumento consustancial al razonamiento de Ana, encontrando así una forma de pensar pre-existente en la cultura; el concepto de *Infinitésimo*. Este hecho me lleva a interpretar que, en esta parte de su proceso de aprendizaje, Ana estaba comenzando a aproximarse, intuitivamente, a la idea de *límite de una función* en un punto, aunque de una manera fragmentada aún. Aunque halló el *límite* de la función en el punto 3,699, por aproximación, lo hizo sólo como una imagen resultante de la correspondencia entre las variables longitud y área y no como el número resultante de la interdependencia del conjunto de valores posibles de la función en la vecindad del punto en estudio.

Otro aspecto importante en este episodio es la interacción entre las estudiantes durante el proceso de *objetivación*, como proceso social en dialéctica con el desarrollo de la *Actividades*

Orientadoras de Enseñanza. Así, por ejemplo, cuando Ana le explicó a Dana el resultado de su reflexión, Dana logró ver lo que antes no había sido visible para ella. Es decir, cuando Dana enunció, "*¡Ah, claro, yo no había entendido! Es que no es el punto exacto, sino en la… vecindad. ¡Ay, claro!*, ello aparece como resultado de la influencia de la voz de Ana en su razonamiento. En términos vigotskianos, el proceso de formación de conceptos en Dana –específicamente la formación del concepto de *infinitésimo*– se encontraba en la "categoría interpsíquica" (1989, p. 144), en la cual la colaboración de su compañera se volvió fundamental en la solución del problema y, por consiguiente, en su proceso de aprendizaje.

Para finalizar la sesión, durante el desarrollo de esa *Actividad Orientadora de Enseñanza*, me referí al grupo con el siguiente planteamiento:

Maestra: *Bueno, para terminar la clase, vamos a ver lo siguiente.*

Este número que Ana halló es el límite de esta función que estamos estudiando. Más adelante profundizaremos en su concepto, pero hoy quiero mostrarles la expresión que generalmente se emplea para referirnos a él…

Finalicé la sesión mostrando la forma canónica de representar el *límite de una función en un punto*, sin enfatizar en el signo "tiende" (→), portador de un significado crucial en la comprensión del concepto de *límite* desde una mirada dinámica, lejos de un abordaje estático. Era fundamental una aproximación a éste por parte de las estudiantes, por medio de un proceso de *objetivación*, tal como los demás conceptos teóricos. Esto facilitaría las condiciones para que las estudiantes encontraran el significado cultural de dicho signo y que posteriormente lo emplearan en el proceso de aprendizaje del concepto de *límite de una función*.

Caraça (1951) plantea su conceptualización de *límite de una función* desde de una epistemología que discrepa del estudio inmutable de los fenómenos naturales y sociales. A continuación, presento la definición de *límite de una función* que este autor asume.

Definición de *Límite de una Función*. De las definiciones de *infinitésimo* y de los *infinitésimos* principales, $x - a$ y $1/x$, Caraça formula la definición del concepto de *límite de una función* en un punto, de la manera siguiente:

Consideremos la función $y(x)$, real de variable real definida en cierto intervalo y sea a un punto de ese intervalo.

Definición III. (Caraça, 1951, p. 295). Se dice que $y(x)$ tiene por *límite* el número L cuando x tiende hacia a, o que $y(x)$ tiende hacia L cuando x tiende hacia a y se escribe:

$$\underset{x \to a}{Lim}\, y(x) = L$$

cuando la diferencia $y(x) - L$ es *infinitésimo* con $x - a$.

Es claro que, decir que $y(x) - L$ es infinitésima con $x - a$, es lo mismo que decir que $y(x)$ es vecino de L cuando x es vecino de a.

El mismo autor enuncia que es posible que existan *funciones* en las que la condición de la definición III no se cumpla. En tal caso se dice que dichas *funciones* no tienen *límite* en el punto de interés.

El autor da un significado geométrico a la definición de *límite de una función*, mediante la gráfica que presento a continuación.

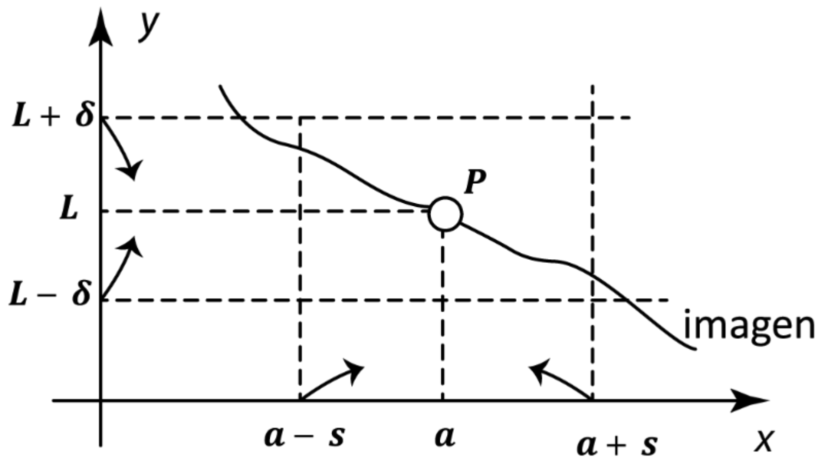


Ilustración 47. $\lim_{x \to a} y(x) = L$
La función está entre $L - \delta$ y $L + \delta$ para todos los puntos x comprendidos entre $a - s$ y $a + s$ excepto, posiblemente el punto a. δ es arbitrario y s depende de δ. La función puede no tomar el valor en el punto a. (Caraça, 1951, p. 297).

Así, *el límite de una función*, real de variable real, en un punto no depende del valor de la *función* en dicho punto, sino del conjunto de valores de la *función* en dicho punto; del resultado de su interdependencia. Es decir que,

$$\lim_{x \to a} y(x) \neq y(a)$$

y por lo tanto, *el estado de la función en el punto no coincide con el resultado de la interdependencia del conjunto de las posibilidades del comportamiento en la vecindad del punto* (Caraça, 1951, p.296).

Otra de las *Actividades Orientadoras de Enseñanza* que hace parte del tejido de esta tesis es la que denominé "Límite de una Función". Mediante esta *Actividades Orientadoras de Enseñanza* continué propiciando condiciones para el proceso de *objetivación* del concepto *límite de una función* por parte de las estudiantes. En primer lugar, se hizo mediante las acciones contenidas implícitamente en las preguntas formuladas en la guía que orientó la *Actividad*

Orientadora de Enseñanza y, *e*n segundo lugar, mediante la propuesta de trabajo colectivo. La *situación desencadenadora de aprendizaje* de estas *Actividades Orientadoras de Enseñanza* fue hallar el *límite* de varias *funciones*, presentadas mediante sistemas de signos alfanuméricos y gráficos. Al presentarles el objeto mediante diferentes sistemas de representación, tuve la intención de que las estudiantes se aproximaran al objeto matemático de diferentes maneras y descubrieran nexos existentes entre sus aspectos constitutivos. De esta forma, continué organizando mi *actividad* de enseñanza como instrumento mediador del desarrollo del *pensamiento teórico*.

Davidov (1988) expone que, contrariamente al *pensamiento empírico*, el *pensamiento teórico* posibilita al sujeto comprender la esencia del objeto estudiado, mediante la elaboración de los datos observados dialécticamente, esto es, hallar las conexiones internas de los objetos analizados, sus contradicciones y singularidades, como parte de un todo integrado. Es decir, como lo plantea Kopnin (1978), reflejar el objeto en sus relaciones internas y leyes de su movimiento, por medio de la elaboración mental del resultado inicial de la percepción; analizar el objeto en forma profunda.

De esta forma, en el *pensamiento teórico*, el concepto surge como un modo de *actividad intelectual* del sujeto que le posibilita la reproducción del objeto idealizado, develando su esencia. En esta misma línea, Leontiev (1984) plantea que el *pensamiento teórico*, como forma desarrollada de la *actividad intelectual*, posibilita interpretar la realidad objetiva sin la necesidad de interactuar directamente con ella, ya que este tipo de *pensamiento* “posee ilimitadas posibilidades de penetrar en la realidad, aun en una realidad totalmente inaccesible a nuestra influencia” (p.36).

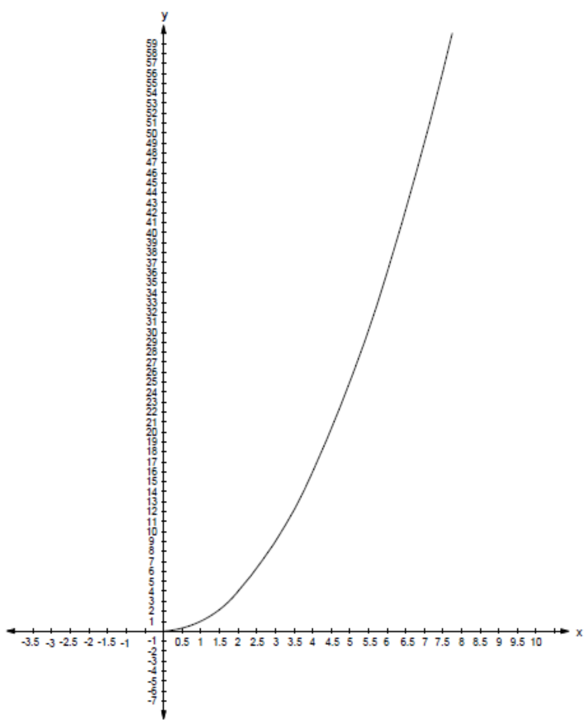
Las principales características del *pensamiento teórico*, según Moura (2010), son:

> La transformación del saber en teoría desarrollada mediante deducción y explicación; la elaboración por medio del análisis del papel y de la función de cierta relación entre las cosas en el interior de un sistema; la expresión por diferentes sistemas semióticos; la fundamentación en la transformación de los objetos; la presentación de una forma universal que caracteriza simultáneamente un representante de una clase y un objeto particular; la relación entre lo general y lo particular; y la representación de la relación entre las propiedades del objeto y sus conexiones internas. (p.75)

Parafraseando a Davidov (1988), el *pensamiento teórico* elabora los datos de la contemplación –que es activa– y los representa en forma de conceptos que se expresan mediante diferentes sistemas semióticos, a través de procesos de deducción y análisis de las relaciones existentes entre las cosas al interior de un sistema, identificando, además, la relación parte-todo entre ellas. El concepto actúa tanto como forma de reflejo del objeto, como medio de su estructuración, es decir, como una "acción mental especial" (Davidov, 1988, p. 126) mediante la cual el individuo reproduce el contenido del objeto. Mas estos conceptos son producidos de forma histórica y cultural en la *actividad intelectual* y son luego interiorizados por el individuo.

Tracé dos objetivos en la formulación de la primera pregunta, a la que me referiré como pregunta N°1 en la *Actividad Orientadora de Enseñanza*. El primero fue que las estudiantes descubrieran el significado socialmente atribuido al simbolismo empleado para el *límite de una función* y se apropiaran de él para así emplearlo de forma consciente en situaciones posteriores. El segundo objetivo fue que las estudiantes hallaran relación entre las representaciones gráficas y analíticas del *límite de la función* y que en el proceso vislumbraran que el *límite de una función* real de variable real en un punto no depende del valor de la *función* en dicho punto –aun cuando sean coincidentes como en este caso–, sino del conjunto de valores de dicha *función*; del resultado de su interdependencia (Caraça, 1951).

A continuación, la pregunta N°1.



Luego de observar la gráfica anterior, responde si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera, o no, y justifica tu respuesta.

a. $\operatorname*{Lim}_{x\to 2+} f(x) = \operatorname*{Lim}_{x\to 2-} f(x)$

b. $\operatorname*{Lim}_{x\to 7,5+} f(x) = \operatorname*{Lim}_{x\to 7,5-} f(x)$

c. $\mathrm{f}(2) = \operatorname*{Lim}_{x\to 2} f(x)$

El siguiente episodio corresponde a las respuestas escritas de las estudiantes protagonistas de la investigación, a la pregunta presentada.

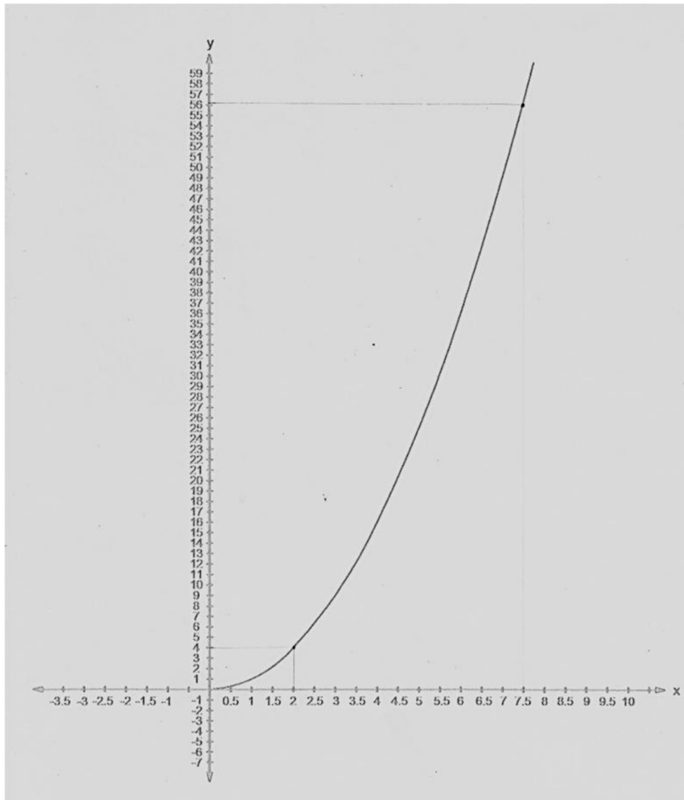


*Ilustración 48.*Respuesta de Eliza a la pregunta N°1. Representación gráfica. (“Límite de una Función”, septiembre 12 de 2017)

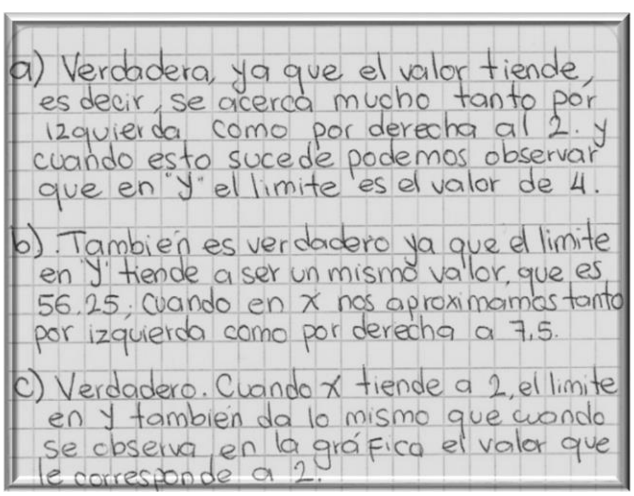


Ilustración 49. Respuesta de Eliza a la pregunta N°1. (“Límite de una Función”, septiembre 12 de 2017)

En su respuesta escrita, Eliza expresó el significado que cobraba para ella el signo "tiende". "…Y*a que el valor tiende, es decir, se acerca mucho tanto por izquierda como por derecha al 2 y cuando esto sucede, podemos observar que en Y el límite es el valor de 4*". Esta afirmación indica que este signo denota para ella movimiento y está imbricado con el concepto de *infinitésimo*. Si bien, esta última afirmación no es explícita, sí da cuenta de su apropiación, cuando expresa; "*cuando en X nos aproximamos tanto por derecha como por izquierda*..." considerándolo, además un elemento fundamental en la determinación del valor *límite de la función.* Aunque es obvio que Eliza se apoyó en la gráfica para hacer sus razonamientos, realizó trazos que indican un análisis estático, pues solamente indicó la correspondencia entre el valor de la variable independiente en el punto de interés y lo que ella nombró *límite* de la *función*. Sin embargo, en el momento de la realización de la guía, en discusión con su equipo de trabajo y dirigiéndose a su compañera, Eliza argumentó:

> *Es que vea, aquí en la gráfica, nos tenemos que aproximar, tanto por derecha como por izquierda, porque aquí [en la expresión analítica correspondiente a la pregunta problematizadora] nos están diciendo que es cuando tiende*… (Eliza, ("Límite de una Función", septiembre 12 de 2017).

Inferí que Eliza tenía claro la importancia del *infinitésimo* para hallar el *límite* y, así, justificar la respuesta a la pregunta problematizadora. Sin embargo, al parecer, ella no consideró necesario indicar la vecindad de los puntos de interés, por medio de la representación gráfica.

Por su parte, Dana, que se encontraba en el mismo equipo de trabajo de Ana, respondió:

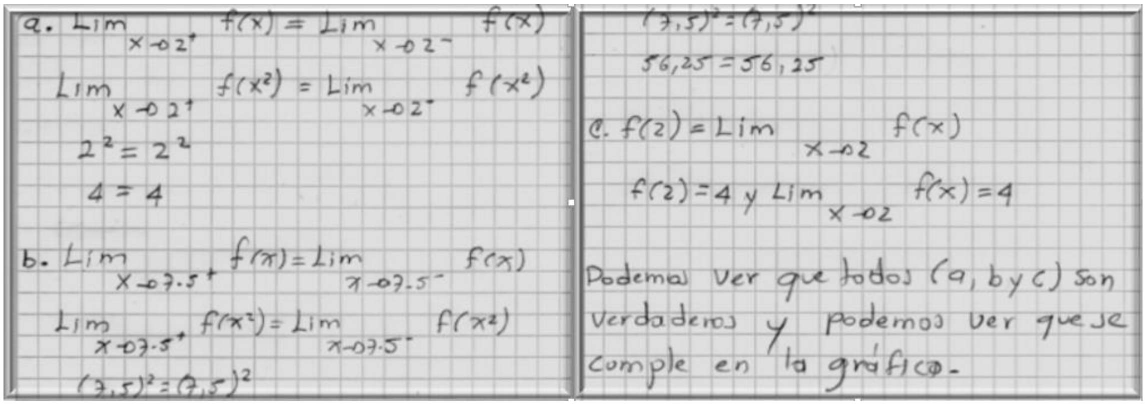


Ilustración 50. Respuesta de Dana a la pregunta N°1. (“Límite de una Función”, septiembre 12 de 2017).

En su respuesta a la pregunta N°1, Dana no hizo representación gráfica. Su argumento fue el haber trabajado en el mismo equipo que Ana. El argumento de Dana es coherente con su respuesta escrita (en la cual se evidencia imprecisiones en la notación), ya que el procedimiento para responder la pregunta problematizadora, realizado por ambas estudiantes, es similar. A continuación, la respuesta de Ana.

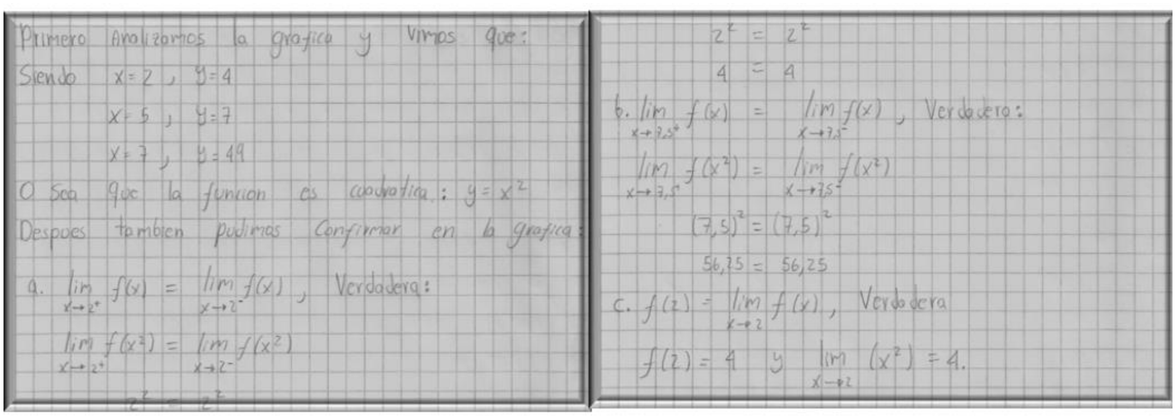


Ilustración 51. Respuesta de Ana la pregunta N°1. (“Límite de una Función”, septiembre 12 de 2017).

Considero importante aclarar que, aunque las estudiantes trabajaban en equipo, tenían como acuerdo tácito hacer reflexiones individuales al momento de escribir.

Respecto a esta aclaración, es posible notar tanto similitudes como diferencias en las respuestas de Ana y Dana, en este caso. Así, por ejemplo, la justificación dada por ambas al valor de verdad de cada una de las proposiciones contenidas en la pregunta, fue expresada mediante un lenguaje alfanumérico. Las estudiantes emplearon un algoritmo por medio del cual hallaron el *límite de una función*, según la conceptualización del objeto *límite* que estaban haciendo en dicho momento. Esto es, el *límite de una función,* como el valor de la *función* en dicho punto. Es decir que, en su proceso de *objetivación*, las estudiantes no se habían apropiado del concepto *límite*; el objeto era estudiado de modo fragmentado lo cual es característico de un *pensamiento empírico*, mas, no teórico. Dicho de otra forma, las estudiantes aún no habían realizado un uso consciente del *infinitésimo* –elaborado socialmente por generaciones anteriores– como un instrumento matemático para estudiar un fenómeno en movimiento. Sin embargo, en la gráfica correspondiente a la *función*, Ana y Dana indicaron una *vecindad* en ambos puntos de interés y su interdependencia con los valores correspondientes de la *función*.

Ana, a diferencia de Dana, explicitó el nexo entre *función* y *límite de la función*. Para ella fue necesario hallar la expresión analítica de la *función* para hallar posteriormente su *límite* de acuerdo con la aproximación que estaba haciendo a dicho constructo matemático. A continuación, se presenta el análisis gráfico de Ana y Dana.

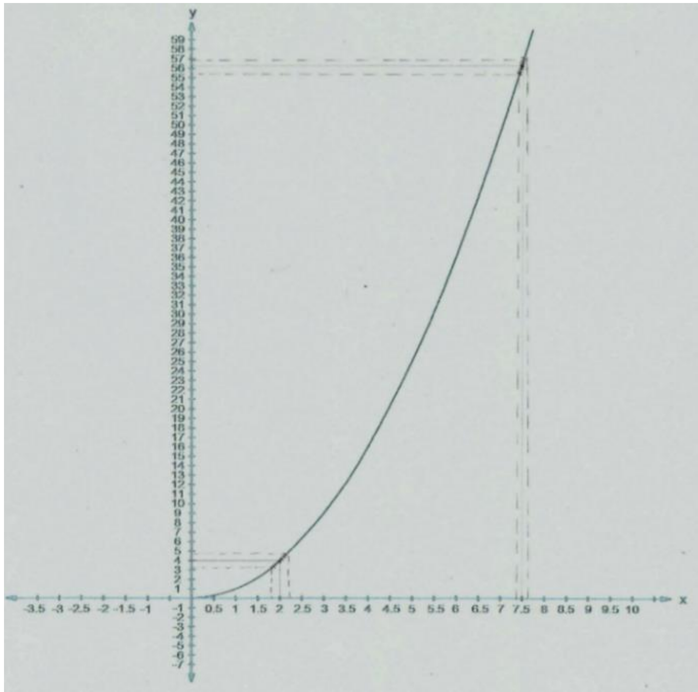


Ilustración 52. Respuesta de Dana y Ana a la pregunta N°1. Representación gráfica. ("Límite de una Función", septiembre 12 de 2017)

El episodio que presento a continuación corresponde al desarrollo de la pregunta N°2 de la guía orientadora de la *Actividades Orientadoras de Enseñanza*. Este episodio corresponde al encuentro en el aula una semana después de la realización de la pregunta N°1. Las estudiantes hicieron nuevas interpretaciones del objeto de estudio en este encuentro.

En correspondencia, tuve la intencionalidad de que las estudiantes continuaran aproximándose a los conceptos de *infinitésimo* y, por lo tanto, al de *límite de una función en un punto* a partir de dos acciones. En primer lugar, la identificación de la diferencia existente entre hallar el valor de la *función* en cierto punto de interés y el *límite de la función* en dicho punto. En segundo lugar, el reconocimiento de otros aspectos del objeto, tales como *funciones* que no poseen *límite* en el punto de interés y, de forma implícita, el *infinitésimo principal* $1/x$ –vecino de cero cuando x es vecino de infinito–. De esta forma, continué fomentando el desarrollo del *pensamiento teórico* de las estudiantes al enfrentarlas a contradicciones intrínsecas al objeto mismo.

En esa misma línea, pretendí, además, presentar a las estudiantes otros casos del *límite de una función*, en los que el concepto de infinito es abordado cuantitativamente. Caraça (1951) presenta dos de estos casos mediante las definiciones IV y V.

Definición IV. (Caraça, 1951, p.296). Se dice que $y(x)$ tiene por *límite* L cuando x tiende a más infinito, y se escribe,

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = L$$

cuando la diferencia $y(x) - L$ es infinitésima con $1/x$ positivo.

Definición V. (Caraça, 1951, p.297). Se dice que $y(x)$ tiene por *límite* más infinito cuando x tiende a a y se escribe,

$$\lim_{x \to a} y(x) = +\infty$$

Cuando, a todo número real n se puede hacer corresponder un intervalo,

$[a - s(n), a + s(n)]$, en todos los puntos en los cuales $y(x) > n$.

En lenguaje abreviado se puede decir que $y(x)$ es vecino de más infinito cuando x es vecino de a.

Caraça (1951) propone al lector que sea él mismo quien defina otros casos posibles en relación al infinito, dejándolos enunciados de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = L$$

$$\lim_{x \to a} y(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$$

Seguidamente, el autor ilustra geométricamente algunos de los casos en mención.

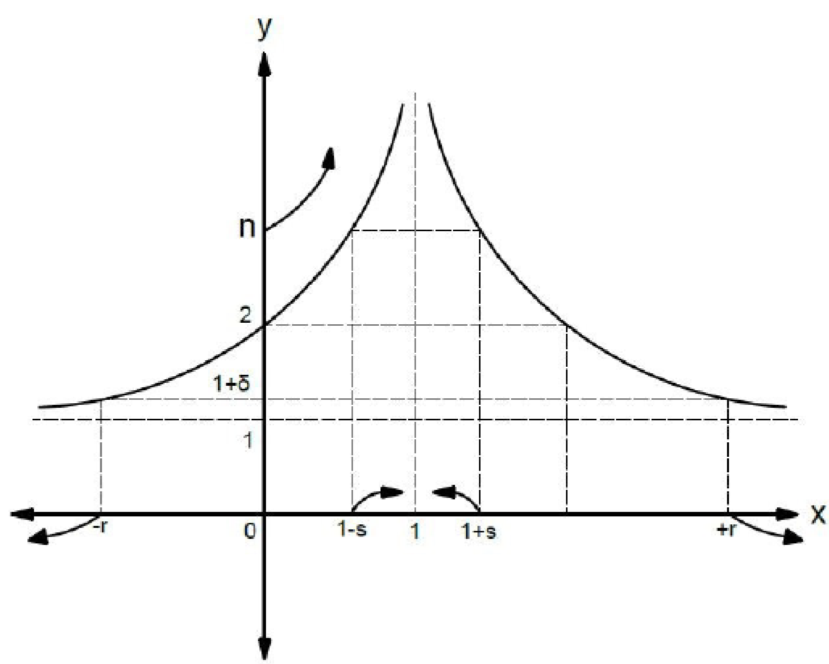


Ilustración 53. Esta figura ilustra tres casos: $\lim_{x \to 1} y(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 1$; $\lim_{x \to -\infty} y(x) = 1$
n es un número arbitrario y s depende de n

δ es un número arbitrario y r depende de δ (Caraça, 1951, p. 298)

La pregunta de la guía orientadora de la *actividad* a la que hago alusión es la siguiente:

2. Sea la función:

$$f(x) = 1/x,$$

a. Halla su representación gráfica.

b. ¿Es posible hallar el valor de $f(0)$? Explica.

A continuación, presento –mediante las ilustraciones 53 a 58– las respuestas que las estudiantes, protagonistas de la investigación, expresaron en forma escrita y a través del diálogo durante la socialización.

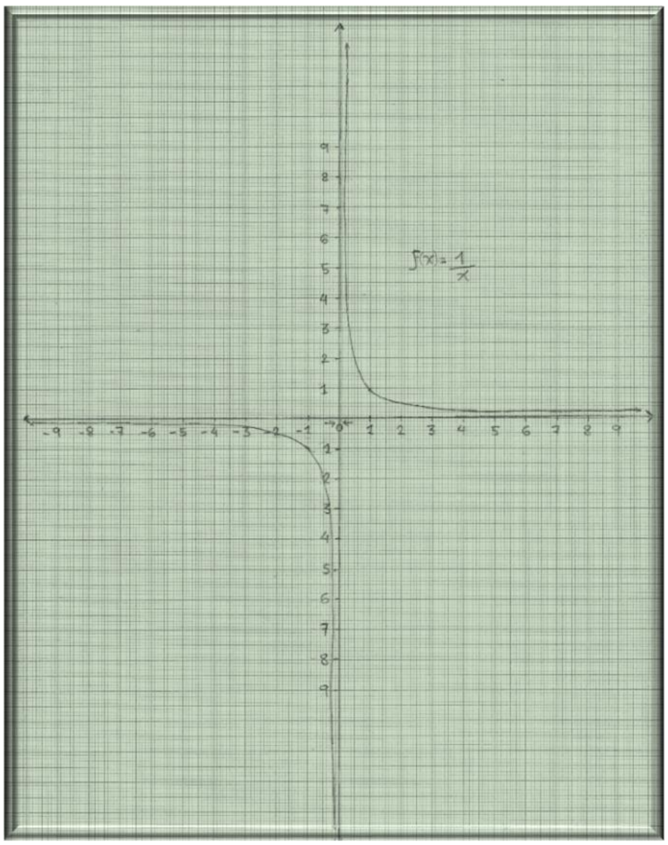
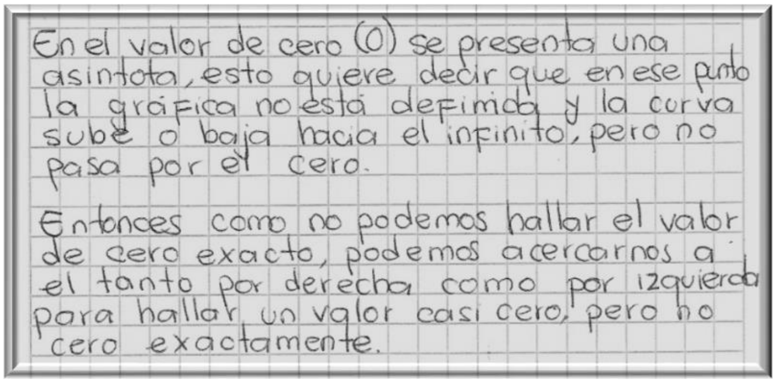


Ilustración 54.Respuesta de Eliza a la pregunta N°2. Representación gráfica. ("Límite de una Función", septiembre 19 de 2017).



En el valor de cero (0) se presenta una asintota, esto quiere decir que en ese punto la gráfica no está definida y la curva sube o baja hacia el infinito, pero no pasa por el cero.

Entonces como no podemos hallar el valor de cero exacto, podemos acercarnos a el tanto por derecha como por izquierda para hallar un valor casi cero, pero no cero exactamente.

Ilustración 55. Respuesta de Eliza a la pregunta N°2. Representación analítica. (“Límite de una Función”, septiembre 19 de 2017).

Percibo que, aunque Eliza no empleó un lenguaje preciso en su respuesta, sí evidenció coherencia con la representación gráfica que realizó de la *función*. En ambas relacionó el tipo de función y el comportamiento de ésta en la vecindad del origen, haciendo énfasis en el comportamiento asintótico de la curva. Además, en la representación gráfica, Eliza empleó flechas para destacar una aproximación al punto cero, lo que me llevó a inferir que ella se apropió del concepto de *infinitésimo*, pues lo usó para comunicar su reflexión respecto a la situación planteada; situación que conllevaba el movimiento como esencia de tal concepto.

A continuación, presento la respuesta de Dana.

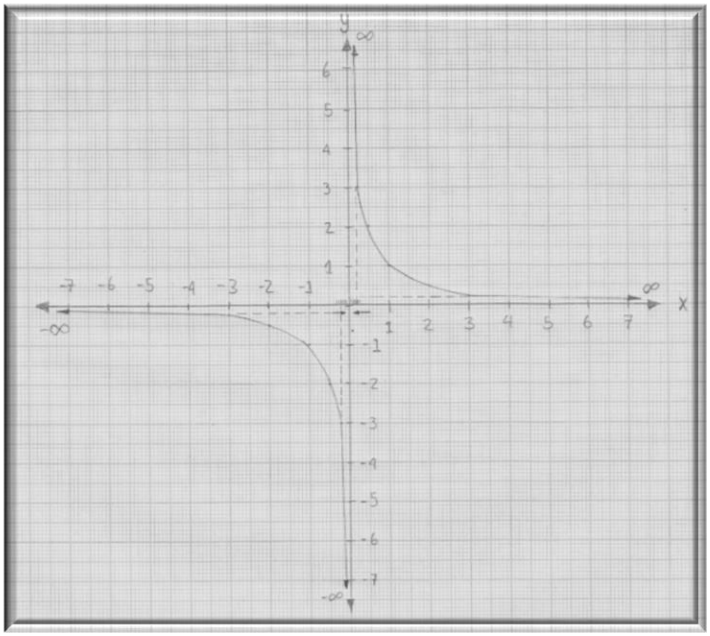
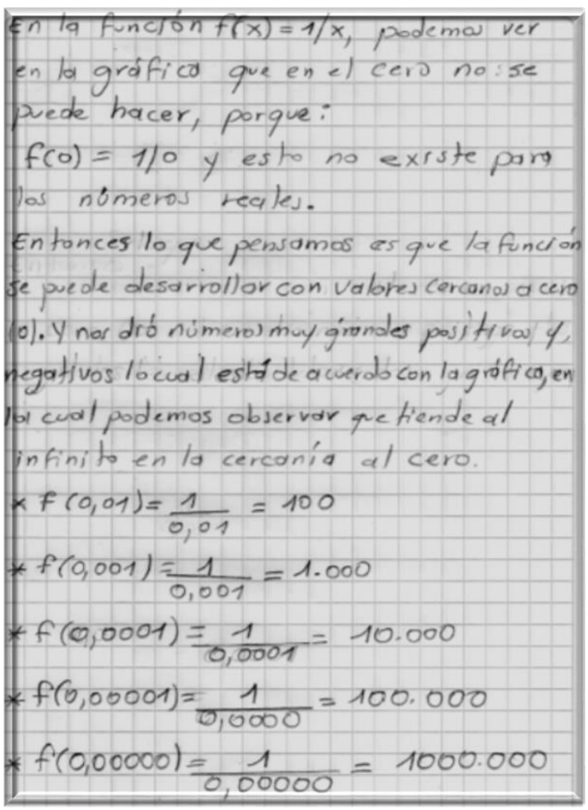


Ilustración 56. Respuesta de Dana a la pregunta N°2. Representación gráfica. (“Límite de una Función”, septiembre 19 de 2017).



En la función $f(x) = 1/x$, podemos ver en la gráfica que en el cero no se puede hacer, porque:
$f(0) = 1/0$ y esto no existe para los números reales.
Entonces lo que pensamos es que la función se puede desarrollar con valores cercanos a cero (0). Y nos dió números muy grandes positivos y negativos lo cual está de acuerdo con la gráfica, en la cual podemos observar que tiende al infinito en la cercanía al cero.

* $f(0,01) = \frac{1}{0,01} = 100$
* $f(0,001) = \frac{1}{0,001} = 1.000$
* $f(0,0001) = \frac{1}{0,0001} = 10.000$
* $f(0,00001) = \frac{1}{0,0000} = 100.000$
* $f(0,00000) = \frac{1}{0,00000} = 1000.000$

Ilustración 57. Respuesta de Dana a la pregunta N°2. Representación analítica. (“Límite de una Función”, septiembre 19 de 2017).

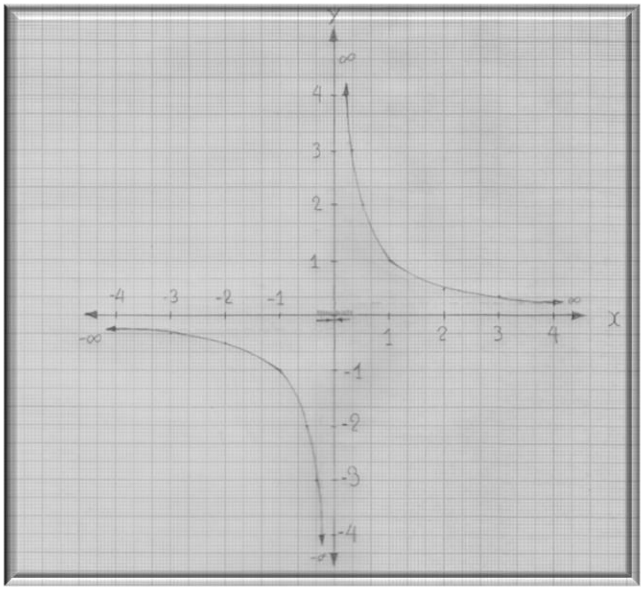
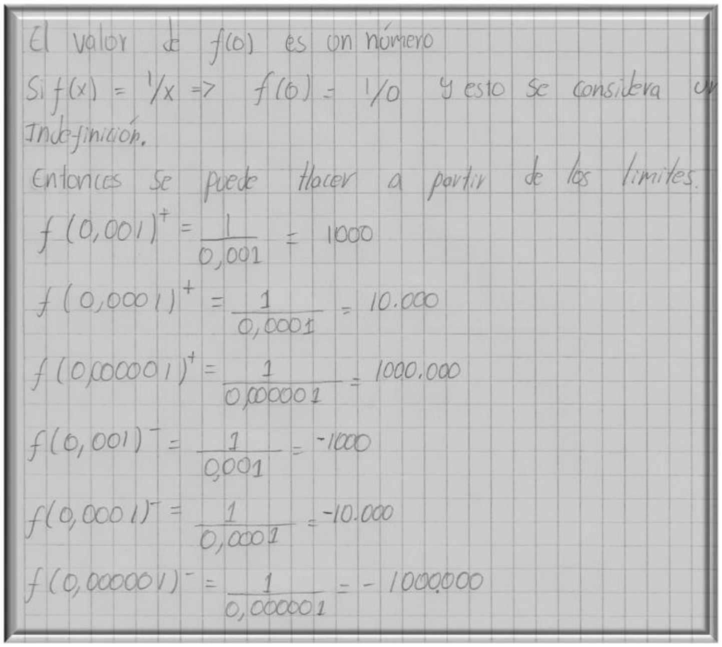


Ilustración 58. Respuesta de Ana a la pregunta N°2. Representación gráfica. (“Límite de una Función”, septiembre 19 de 2017).



El valor de f(0) es un número
Si $f(x) = 1/x \Rightarrow f(0) = 1/0$ y esto se considera un
Indefinición.
Entonces se puede hacer a partir de los límites.

$f(0{,}001)^+ = \frac{1}{0{,}001} = 1000$

$f(0{,}0001)^+ = \frac{1}{0{,}0001} = 10.000$

$f(0{,}000001)^+ = \frac{1}{0{,}000001} = 1000.000$

$f(0{,}001)^- = \frac{1}{0{,}001} = -1000$

$f(0{,}0001)^- = \frac{1}{0{,}0001} = -10.000$

$f(0{,}000001)^- = \frac{1}{0{,}000001} = -1000000$

Ilustración 59. Respuesta de Ana a la pregunta N°2. Representación analítica. (“Límite de una Función”, septiembre 19 de 2017).

Dana y Ana estaban en el mismo equipo de trabajo y presentaron coherencia –al igual que Eliza– entre la representación gráfica y alfanumérica que emplearon para solucionar la situación-problema. Ambas estudiantes realizaron aproximaciones al punto de interés, ante la imposibilidad de hallar el valor exacto de la *función* en dicho punto. Ana, además, enunció hallar "*los límites*" como solución.

Es interesante que, aunque en la pregunta problematizadora no era explícita la acción de hallar el *límite de la función* en el origen, las tres estudiantes emplearon el concepto de *límite* –como aproximaciones sucesivas– como instrumento para hallar la solución a la situación. Esto coincide con los planteamientos de Laurentiev y Nikolski (1976) cuando destacan el *límite de una función*, además de objeto matemático, como un método de análisis.

Según Laurentiev y Nikolski (1976), al igual que el concepto de *infinitésimo*, la idea de *límite* conlleva a un método *–el método de los límites–* para estudiar distintos fenómenos relacionados con el cambio y el movimiento. Según estos autores, para hallar el valor de cierta magnitud hacemos una serie de aproximaciones, cada una de ellas más pequeña que la inmediatamente anterior de manera que hallamos el valor exacto de la magnitud. Así, como lo expresan los mismos autores, "por este método, que es en esencia profundamente dialéctico, obtenemos una constante fija como resultado de un proceso o movimiento" (Laurentiev y Nikolski, 1976, p.95).

Comprendo el método dialéctico en el sentido dado por Kopnin (1978). Esto es, como un método de conocimiento de los fenómenos de la realidad objetiva; una realidad que es permeada por el cambio. Entender el concepto de *límite* bajo la óptica dialéctica —método dialéctico— es entender un modo de aproximarse a la esencia de un objeto o fenómeno en constante cambio y, por lo tanto, en movimiento. El *límite* es, por lo tanto, además de un instrumento matemático, un método para aproximarnos a la esencia del fenómeno a estudiar.

En ese mismo sentido, Caraça (1951) plantea el método de los *límites* como una operación que se realiza cuando, en el estudio de un fenómeno –de cualquier naturaleza–, se precise cuantificar uno de sus estados, en particular, en interdependencia con los estados de su vecindad. Es posible hacer tal cuantificación "por medio de un *límite* que es el resultado de una infinidad de posibilidades entre un punto y los puntos vecinos" (p. 251).

Fue en este sentido que las estudiantes buscaron la solución al problema que identificaron, al tratar de hallar el valor de la *función* en el punto correspondiente al origen. Ellas emplearon el *infinitésimo* como instrumento para aproximarse al punto de interés. Sin embargo, ninguna de las tres protagonistas de la investigación empleó el método –de los *límites*– para llegar a un número; lo emplearon sólo como proceso. Esto se evidencia tanto en las respuestas que presenté arriba, como en el extracto de la socialización de las soluciones que hallaron. Presento esta evidencia a continuación.

Maestra: *Bueno, según lo que algunas de ustedes hicieron [hallar el valor de la función en valores próximos a la vecindad del origen], veamos los resultados que obtuvieron*.

Luego de exponer en el tablero las operaciones realizadas por algunas estudiantes, pregunto a todo el grupo:

Maestra. *Cuando nos aproximábamos a cero por la derecha y por la izquierda, ¿cómo eran los valores de la función?*

Dana: *Por la derecha, muy grandes y por la izquierda, también pero negativos.*

Ana: *Más infinito y menos infinito* [interpelando a Dana].

Maestra *Exacto. Entonces, ¿cuál es el límite de la función cuando nos aproximamos al valor de cero?*

Eliza: *Ninguno, no tiene*.

Maestra: *¿Por qué?*

Eliza: *Porque son infinitos números, no es un número.*

Maestra: *Y, si te digo, ¿que el límite de la función cuando toma valores, en el dominio, próximos a cero por la derecha es más infinito y, por la izquierda es menos infinito?*

Ana: *Ah, ya entendí. O sea, no es un solo número en este caso, son muchos; muy grandes. Pero, si por la izquierda es menos infinito y por la derecha es más infinito, ¿sí hay límite?*

Eliza: *Es que suena muy abstracto llamar límite a algo que se está aproximando infinitamente…*

Aquí se evidencia que las estudiantes no habían interiorizado –en el sentido de Leontiev (1984)– el *límite* como un número, resultante de la cuantificación del movimiento. En sus reflexiones predominaba el método pero no el resultado.

La expresión de Eliza, "*Es que suena muy abstracto llamar límite a algo que se está aproximando infinitamente…",* me llevó a inferir que una de las razones por las que las estudiantes aún no visualizaban el *límite* como un resultado podía obedecer a su interpretación del infinito como un número resultante de la aproximación a un número dado, y no, como un comportamiento particular de la función.

Aunque no visualizaron un valor *límite*, considero que por medio de la *Actividad Orientadora de Enseñanza* –la cual recogía elementos teóricos de las *Actividades Orientadoras de Enseñanza* anteriores– las estudiantes protagonistas de la investigación hicieron conexiones entre *infinitésimo*, *límite* y movimiento; aspectos esenciales en la *objetivación* del concepto de *límite de una función*. En ese sentido, considero que se estaban aproximando al objeto de estudio al concatenar aspectos diversos. Por consiguiente, las estudiantes estaban haciendo algunas reflexiones propias de un *pensamiento teórico*.

La *Actividad Orientadora de Enseñanza* a la que me referiré en los párrafos siguientes la denominé "Límite de una Función en un punto" y constó de seis situaciones-problema enmarcadas en diversos contextos. En el diseño de esta *Actividad Orientadora de Enseñanza* tuve la intencionalidad de que el concepto de *límite de una función* se transformara en un medio esencial de los procesos de reflexión de las estudiantes en las operaciones realizadas. Es decir, que, en su *actividad mental*, operaran con el concepto –rasgo característico del *pensamiento teórico*– elaborado en su proceso de *objetivación* a lo largo de todas las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*. Acorde con Vigotsky (2013c) y Davidov (1982, 1988), el concepto es resultante de la elaboración racional de las diversas manifestaciones del objeto que posibilita conocerlo en su complejidad. En esa línea, pensar teóricamente es pensar en forma de conceptos.

El episodio que expongo a continuación corresponde tanto a las respuestas escritas como a fragmentos de los audios pertenecientes a las discusiones de las estudiantes durante el desarrollo de las situaciones-problema contenidas en la guía que orientó la *Actividad Orientadora de Enseñanza*.

La primera situación-problema planteada en la *Actividad Orientadora de Enseñanza*, a la que me referiré como pregunta N°1, pertenece a un contexto de la química y trata sobre la relación existente entre grados Celsius y Fahrenheit.

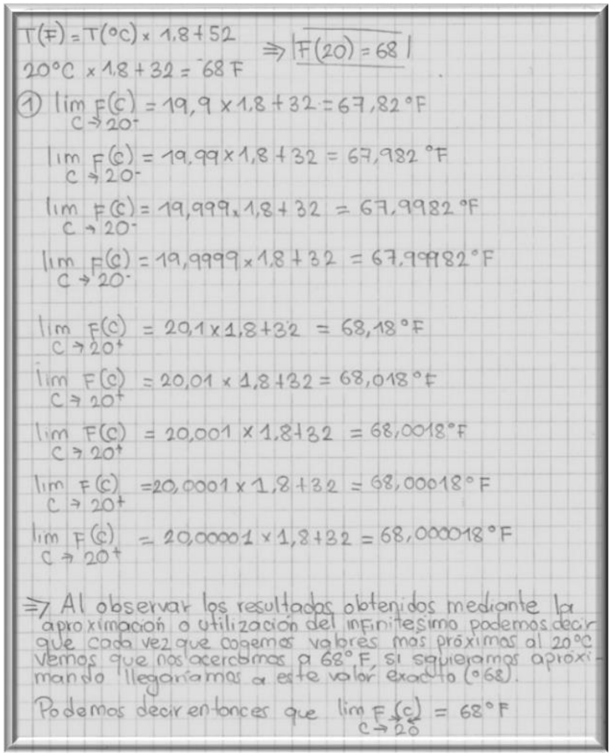
1. Como sabemos, las dos unidades de medida de la temperatura más usadas son: Fahrenheit (°F) y Celsius (°C) –o centígrados –. Sabemos además, que entre ambas unidades existe la siguiente relación:

   $$F= 1,8C + 32$$

   En donde C es la temperatura en grados Celsius, F es la temperatura en grados Fahrenheit y 32 es el punto de congelación del agua (en °F)

   Partiendo de la relación anterior y de que: el punto de ebullición del agua es de 100°C (212°F) y su punto de congelación es de 0°C (32°F), ¿cuál es la temperatura del agua, en grados Fahrenheit, en cierto momento en que un termómetro marca valores que tienden a 20°C?

A continuación presento las operaciones realizadas por las estudiantes protagonistas de la investigación. Cabe aclarar que Eliza y Dana trabajaron en el mismo equipo y esta vez, no redactaron la respuesta en forma individual.



$T(F) = T(°C) \times 1{,}8 + 52 \Rightarrow \boxed{F(20) = 68}$

$20°C \times 1{,}8 + 32 = 68\ F$

① $\lim_{C \to 20^-} F(C) = 19{,}9 \times 1{,}8 + 32 = 67{,}82\ °F$

$\lim_{C \to 20^-} F(C) = 19{,}99 \times 1{,}8 + 32 = 67{,}982\ °F$

$\lim_{C \to 20^-} F(C) = 19{,}999 \times 1{,}8 + 32 = 67{,}9982\ °F$

$\lim_{C \to 20^-} F(C) = 19{,}9999 \times 1{,}8 + 32 = 67{,}99982\ °F$

$\lim_{C \to 20^+} F(C) = 20{,}1 \times 1{,}8 + 32 = 68{,}18\ °F$

$\lim_{C \to 20^+} F(C) = 20{,}01 \times 1{,}8 + 32 = 68{,}018\ °F$

$\lim_{C \to 20^+} F(C) = 20{,}001 \times 1{,}8 + 32 = 68{,}0018\ °F$

$\lim_{C \to 20^+} F(C) = 20{,}0001 \times 1{,}8 + 32 = 68{,}00018\ °F$

$\lim_{C \to 20^+} F(C) = 20{,}00001 \times 1{,}8 + 32 = 68{,}000018\ °F$

⇒ Al observar los resultados obtenidos mediante la aproximación o utilización del infinitesimo podemos decir que cada vez que cogemos valores mas próximos al 20°C vemos que nos acercamos a 68°F, si siguieramos aproximando llegaríamos a este valor exacto (68).

Podemos decir entonces que $\lim_{C \to 20} F(C) = 68\ °F$

Ilustración 60. Respuesta de Eliza y Dana. Pregunta N°1(“Límite de una Función en un punto”, Septiembre 26 de 2017)

El siguiente es un extracto del diálogo de Eliza y Dana referente a la solución de la situación-problema.

Dana: *Bueno…ay, no sé qué hacer, no sé.*

Eliza: *Vea, como dice tiende, entonces, utilizamos el infinitésimo para aproximarnos a 20. Valores aproximados, por ejemplo, 19,9999 o 20, 0001.*

Dana *Ah, sí. Yo no lo había leído bien. Esto hay que subrayarlo: TIENDEEEE…*

Eliza: *Esto cambia todo, tooodo, todo: tiende.*

Dana: *Entonces nos aproximamos por izquierda y por derecha. Pero, ¿qué vamos a hacer con el resto de valores?*

Ante la duda que les surge, Eliza y Dana solicitan mi presencia.

Eliza: *Profe, nosotras estamos haciendo el análisis infinitesimal y, bueno, vamos a coger valores muy, muy cercanos al 20.*

Dana: *Si, por ejemplo, 19, 99999.*

Maestra: *¿Por qué?*

Dana: *Porque son valores que están en la vecindad y además tienden a 20 grados Celsius, entonces son muy, muy cercanos al 20.*

Maestra: *Bueno. Prosigan por favor.*

Eliza: *Entonces vamos a coger estos valores muy cercanos, por la derecha y por la izquierda, los vamos a reemplazar aquí [Señalando la expresión analítica de la función] y vamos a analizar a qué resultado se llega.*

Maestra: *Pero entonces, ¿por qué, veo que acá hallaron el valor de la función correspondiente a 20?*

Eliza: *No, no, sólo como para saber cuánto daría en 20 exactamente. Pero… ya me confundí, ¿el límite vendría siendo 68?*

Maestra: *A ver, pensemos, ¿qué dicen ustedes? [Refiriéndome a Dana y a la tercera integrante del equipo].*

Dana: *No, ese no sería. Porque ahí, no estamos haciendo recorrido, sólo estamos paradas ahí, cuando c es 20.*

Eliza: *Pero la duda que tenemos es que, cuando ya tengamos todos esos valores, los del movimiento, aquí [Señalando la vecindad de 20] ¿qué hacemos?*

Dana: *Eliza, cuando ya tengamos esos valores, ya decimos, el límite de $f(c)$ cuando c tiende a 20 es… ¿cierto profe?*

Maestra: *¿Qué dicen las demás?*

Eliza: *Ah sí... Entonces, esa sería la temperatura del agua en Fahrenheit, pero cuando nos aproximamos a 20 en Celsius.*

Maestra. *¿Esa, cuál?*

Eliza: *Pues, el valor de la función que nos dé, al aproximarnos.*

Maestra: *¿El valor de la función lo ubicamos en la vecindad del 20?*

Dana: *No, porque es que,…, es en la función, o sea en el eje y. Pues, en este caso, en f.*

Eliza: *O sea, como hacemos en equis, pero es en y.*

Maestra: *Muy bien. Continúen.*

Ana, quien decidió trabajar individualmente, realizó las operaciones que presento a continuación.

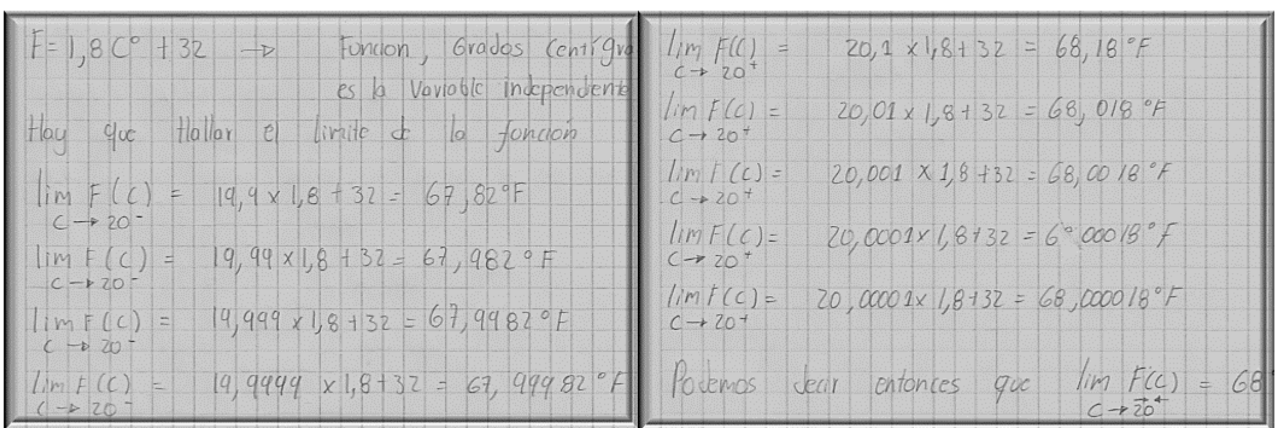


Ilustración 61. Respuesta de Ana. Pregunta N°1(“Límite de una Función en un punto”, Septiembre 26 de 2017)

Eliza, Dana y Ana no sólo emplearon el *límite de una función* como método para analizar el comportamiento de ésta en el punto dado, sino como un resultado. Así, por ejemplo, como parte de las operaciones ejecutadas para la solución de la situación-problema, las estudiantes utilizaron el criterio de unicidad para concluir sobre la existencia del *límite*. Respecto al criterio en mención, Caraca (1951) enuncia su constructo sobre *límites* laterales, como lo presento a continuación.

***Límite*s laterales.** Nos referimos al concepto de *límite* lateral cuando se abordan las *vecindades* a izquierda y a derecha de cierto punto de interés de la *función* que representa un fenómeno a estudiar, es decir, la interdependencia de las posibilidades tanto a izquierda como a derecha (Caraça, 1951). El autor plantea el concepto de *límite* lateral mediante la siguiente definición:

> ***Definición VI.*** (Caraça, 1951, p.299). L, finito o infinito, será límite lateral de una función $y(x)$ a la izquierda de a si $y(x)$ es vecino de L cuando x es vecino de a a su izquierda.

Concordando con Caraça (1951), para que exista el *límite* en un punto deben existir y ser iguales los dos *límite*s laterales de dicho punto. Por lo tanto, si los *límite*s laterales en un punto de la *función* son diferentes, no es posible hablar del *límite* en ese punto. Es decir, no existe un resultado único de la interdependencia de las posibilidades del comportamiento de la *función* en la *vecindad* del punto.

Eliza, Dana y Ana realizaron conexiones entre elementos constitutivos del *límite de una función*. Fue así como ellas emplearon el *infinitésimo* como instrumento para analizar un fenómeno en movimiento; el cambio de temperatura en este caso Tal operación mental se hace evidente en expresiones como:

> *Vea, como dice tiende, entonces, utilizamos el infinitésimo para aproximarnos a 20. Valores aproximados, por ejemplo, 19,9999 o 20, 0001(*Eliza, "Límite de una Función en un punto", Septiembre 26 de 2017).

*Ah, sí. Yo no lo había leído bien. Esto hay que subrayarlo: TIENDEEEE…(*Dana, "Límite de una Función en un punto", Septiembre 26 de 2017)

Esto cambia todo, tooodo, todo: tiende (Eliza, "Límite de una Función en un punto", Septiembre 26 de 2017).

Es notorio que el término "*tiende"* cobró sentido de movimiento. Por lo tanto, pasó de ser un simple signo representativo de un algoritmo matemático a una acción que aclaró la forma de aproximarse al objeto. Así mismo, las estudiantes se refirieron a conceptos asociados a *función* como dependencia y correspondencia entre variables, en imbricación con el *límite* y consideraron la posibilidad de la no existencia acorde al criterio de unicidad. Las siguientes voces constatan el enunciado anterior.

Ah sí... Entonces, esa sería la temperatura del agua en Fahrenheit, pero cuando nos aproximamos a 20 en Celsius (Eliza, "Límite de una Función en un punto", Septiembre 26 de 2017).

Pues, el valor de la función que nos dé, al aproximarnos (Eliza, "Límite de una Función en un punto", Septiembre 26 de 2017).

…es en la función, o sea en el eje ye. Pues, en este caso, en efe (Dana, "Límite de una Función en un punto", Septiembre 26 de 2017).

O sea, como hacemos en equis, pero es en ye (Eliza, "Límite de una Función en un punto", Septiembre 26 de 2017).

Para solucionar la situación, las tres estudiantes realizaron un reflejo del objeto transformándolo en uno nuevo, en un concepto teórico. Así, el concepto de *límite de una función,* objetivado por las estudiantes, cobró significado de instrumento de mediación para la realización de su *actividad mental*. Es decir, las estudiantes pensaron con el concepto, aspecto propio de un *pensamiento teórico*.

Para Kopnin (1978), Leontiev (1984), Luria (1984a) y Davidov (1988) el *pensamiento teórico* posibilita el conocimiento teórico. El conocimiento en su nivel teórico —a su vez, apoyado en el *pensamiento teórico*— trasgrede lo obtenido en la experiencia y lo lleva a lo racional; es decir, a operar con conceptos y profundizar en el estudio de su naturaleza. Según Luria (1984a), el ser humano posee formas complejas de elaborar la información captada por la "percepción inmediata" (p.12), lo que conlleva a afirmar que es poseedor "no sólo de un conocimiento sensorial, sino también de un conocimiento racional" (ibídem) lo que le posibilita penetrar en la esencia de las cosas. En la misma línea, Kopnin (1978) afirma que:

> Lo racional, tiene un carácter histórico, se desarrolla junto con la práctica humana y muestra el grado de dominio del hombre sobre los fenómenos de la realidad objetiva (…). (…) Lo racional es el conocimiento de la realidad bajo la formas del pensamiento que lanza ideas, cuya realización práctica crea el mundo de los objetos correspondientes a las necesidades del hombre. Lo no racional se opone a lo racional como algo que no satisface el nombre ni reconoce para este, formas racionales. (p. 140)

Por lo tanto, es notoria una imbricación entre *pensamiento teórico*, conocimiento (teórico) y lo racional. Interpreto estos tres conceptos como momentos diferentes de la *actividad intelectual* (interna) que, partiendo de la *actividad práctica* (externa) del ser humano, transforma los datos surgidos en la interacción de éste con la realidad —presente en forma sensorial—, en datos elaborados dialécticamente en forma de conceptos, en forma de un constructo teórico que posibilita el análisis y explicación de los objetos y fenómenos tanto naturales como sociales.

Concordando con Moraes & Moura (2009), Moretti & Moura. (2010) y con Moura *et al*. (2013), las *Actividades Orientadoras de Enseñanza* como mediatizadoras de la *actividad* de enseñanza deben contener en su seno la evaluación. Esta es una acción del maestro que le posibilita analizar si las estudiantes se apropiaron del concepto. De este modo, la evaluación, más que un medio para medir resultados, es mediadora de un proceso de "análisis y síntesis" (Moraes y Moura, 2009, p. 104) del maestro y del estudiante como sujetos en *actividad*. Por consiguiente, la evaluación es un elemento inmanente de la *actividad* de enseñanza.

En esa línea, todas las *Actividades Orientadoras de Enseñanza* que diseñé tuvieron un componente evaluativo propicio para analizar el proceso de desarrollo del *pensamiento* de las estudiantes. En este sentido, formulé las situaciones N°5 y N°6 de la *Actividad Orientadora de Enseñanza* "Límite de una Función en un Punto" aunque con un elemento diferente. Esto es, solicité a todo el grupo que resolvieran estas situaciones de forma individual con el fin de concretizar si las estudiantes se habían apropiado del *concepto de límite de una función* durante sus procesos de *objetivación*.

Las preguntas a las que hago referencia son:

5. Del estudio de cierto fenómeno natural se dedujo la función que lo representa, cuya expresión analítica es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & si\ x \geq -1 \\ x^2 + 2x & si\ x < -1 \end{cases}$$

Se desea saber el valor posible de la función cuando la variable independiente toma valores pertenecientes a la vecindad del -1. Resuelve la situación.

6. Responde las siguientes preguntas.

   a. ¿Qué entiendes por límite de una función en un punto?

   b. ¿Qué entiendes por *infinitésimo*?

   c. ¿Hallas relación entre *infinitésimo* y límite de una función? Explica.

Las ilustraciones 61 y 62 corresponden a las operaciones respectivas de Eliza y Dana en la solución de la situación N°5.

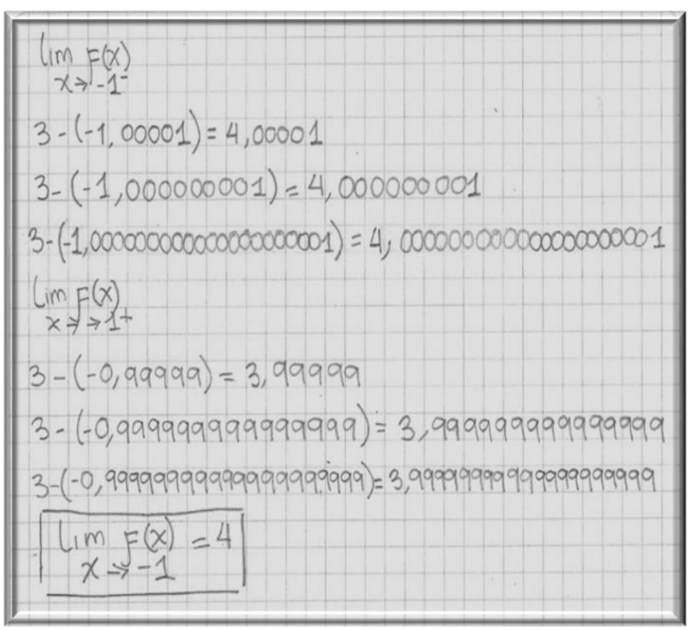


Ilustración 62. Respuesta de Eliza. Situación N°5(“Límite de una Función en un punto”, Octubre 5 de 2017)

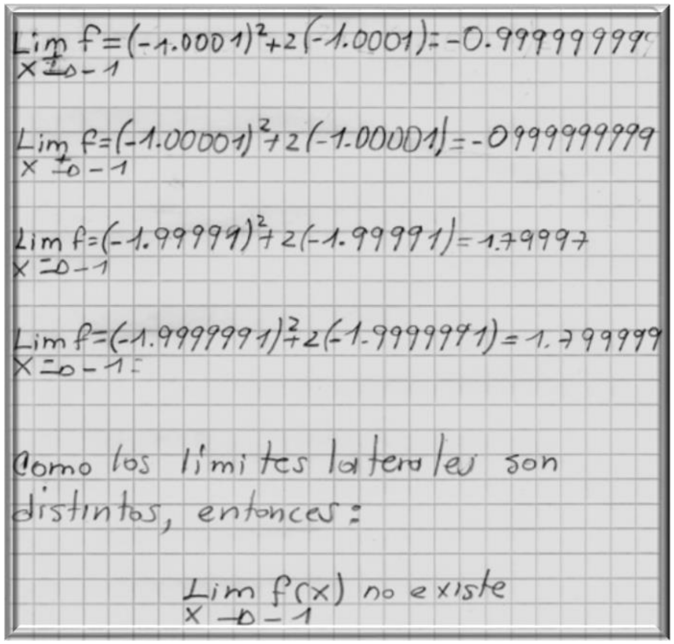
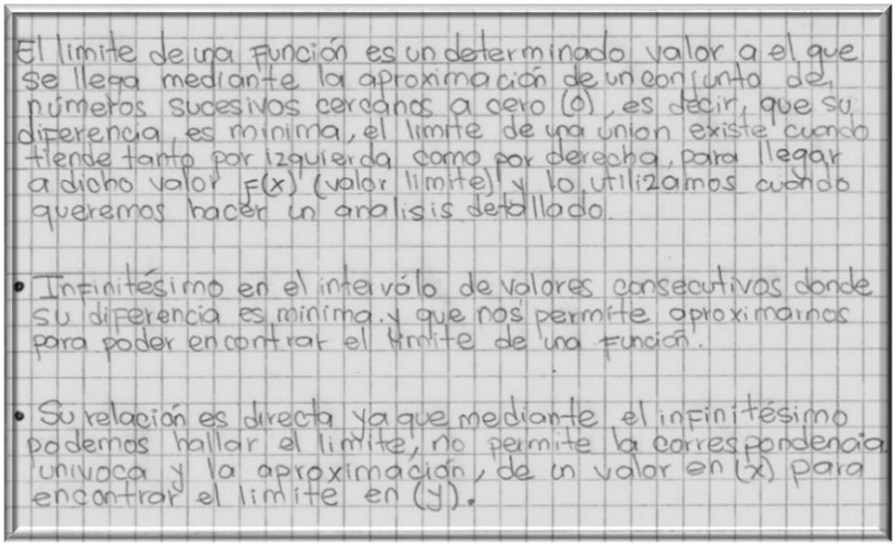


Ilustración 63. Respuesta de Dana. Situación N°5. ("Límite de una Función en un punto", Octubre 5 de 2017)

En el momento inicial del desarrollo de las situaciones, tanto Eliza como Dana manifestaron no tener claridad respecto al sentido de la desigualdad contenida en la *función* de la situación N°5. Aunque acudí a su llamado y les di respuesta, sus operaciones evidenciaron que mi explicación no fue suficiente para que eligieran de forma correcta el tramo correspondiente de la *función*, según los condicionantes que ésta planteaba. Se evidencia, además, que ninguna de las dos estudiantes interpretó de manera correcta el dominio de la función a trozos dada. Aunque este error podría tomarse en otro sentido: no haber reconocido un *infinitésimo* correcto en la vecindad del punto correspondiente a -1, las llevó a establecer relaciones de orden erradas.

Sin embargo, ambas estudiantes dieron cuenta del uso del concepto de *límite de una función*, en la búsqueda de una solución a la situación. En sus operaciones se denota la interrelación existente entre los aspectos fundamentales de tal concepto, como método y como resultado. La interrelación a la que me refiero puede notarse en sus respuestas a la situación N°6, las cuales expongo a continuación.


El limite de una Función es un determinado valor a el que se llega mediante la aproximación de un conjunto de números sucesivos cercanos a cero (0), es decir, que su diferencia es minima, el limite de una unión existe cuando tiende tanto por izquierda como por derecha, para llegar a dicho valor F(x) (valor limite) y lo utilizamos cuando queremos hacer un analisis detallado.

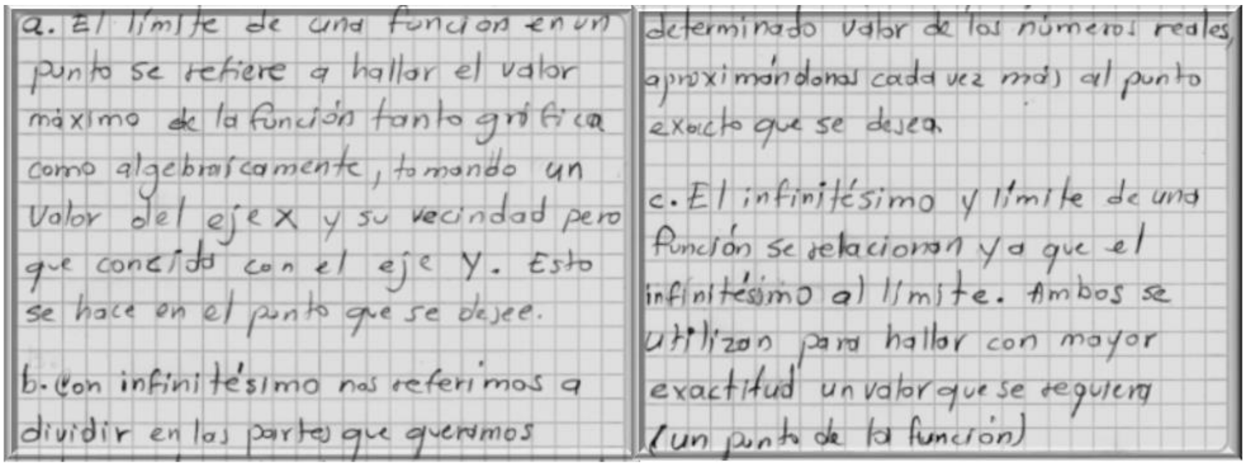
- Infinitésimo en el intervalo de valores consecutivos donde su diferencia es minima y que nos permite aproximarnos para poder encontrar el limite de una función.

- Su relación es directa ya que mediante el infinitésimo podemos hallar el limite, no permite la correspondencia univoca y la aproximación, de un valor en (x) para encontrar el limite en (y).

Ilustración 64. Respuesta de Eliza. Situación N°6(“Límite de una Función en un punto”, octubre 5 de 2017)

Eliza denota, además de la dialéctica parte/todo al interior del constructo teórico de *límite de una función*, tener claridad sobre la esencia del objeto *límite*; *el límite de una función* como el valor resultante de la interdependencia del conjunto de las posibilidades del comportamiento de la función en la vecindad del punto de interés. En ese sentido, Eliza relacionó los infinitésimos, lo que afirma su aproximación a dicho concepto. Teniendo en cuenta estas respuestas de Eliza y su proceso de *objetivación* durante los encuentros en el aula a través de la realización de las anteriores *Actividades Orientadoras de Enseñanza*, considero que las operaciones que realizó en la situación N°5, obedecieron a sus dificultades con algunos conceptos matemáticos (como el concepto de una función definida a trozos) y no a su aproximación al concepto de *límite de una función*. Sin embargo, la existencia de estas dificultades se transformó en una manera de impedimento para aplicar correctamente el concepto de *límite* en situaciones que exigían su empleo.

Por su parte, Dana respondió lo siguiente:


a. El límite de una función en un
punto se refiere a hallar el valor
máximo de la función tanto gráfica
como algebraicamente, tomando un
valor del eje x y su vecindad pero
que concida con el eje y. Esto
se hace en el punto que se dejee.

b. Con infinitésimo nos referimos a
dividir en las partes que queramos
determinado valor de los números reales,
aproximándonos cada vez más al punto
exacto que se desea.

c. El infinitésimo y límite de una
función se relacionan ya que el
infinitésimo al límite. Ambos se
utilizan para hallar con mayor
exactitud un valor que se requiera
(un punto de la función)

Ilustración 65. Respuesta de Dana. Situación N°6. ("Límite de una Función en un punto", octubre 5 de 2017)

Al igual que Eliza, Dana reconoció la relación mutua entre los aspectos del *límite de una función,* como cambio, infinitésimo, vecindad, aproximaciones sucesivas. Sin embargo, no es posible afirmar que se haya apropiado de este constructo teórico. La definición de Dana sobre el *límite de una función* como valor máximo sugiere que, en su proceso de *objetivación*, ella se aproximó a aspectos del objeto, mas no logró notar su esencia. Al parecer, su aproximación fue fragmentada, lo cual obedece a un *pensamiento empírico.* Así, pareciera que en su aproximación al objeto, Dana no logró trascender las abstracciones del objeto en su *actividad mental* hacia uno concreto.

Davidov (1988) plantea que una de las tareas del *pensamiento teórico* es revelar el movimiento, la esencia del fenómeno, por medio del proceso de la ascensión de lo abstracto a lo concreto. Esto es, el proceso en que el *pensamiento* aborda lo abstracto para luego reproducirlo como algo concreto; como un todo desarrollado que representa la unidad de lo diverso. Lo concreto y lo abstracto, desde el materialismo dialéctico, son momentos del análisis del objeto, por medio de la *actividad* del *pensamiento*. Este análisis comienza por lo inmediatamente obtenido en forma de abstracción, de caos, para luego ser concretizado.

Sin embargo, como lo expresa el mismo autor, las abstracciones deben develar las conexiones internas del fenómeno, sus contradicciones. Es decir, en el proceso de la ascensión de lo abstracto a lo concreto, las abstracciones de tipo empírico no corresponden a esta finalidad ya que sólo permiten hacer una clasificación de los objetos. Se precisa de una abstracción en el sentido enunciado por Lenin: "…lo abstracto aparece como momento de la realidad material en permanente cambio" (Lenin, citado por Davidov, 1988, p. 144). En ese mismo sentido, Kopnin (1978) plantea que las abstracciones en el *pensamiento teórico* representan objetos reales; ese es su contenido.

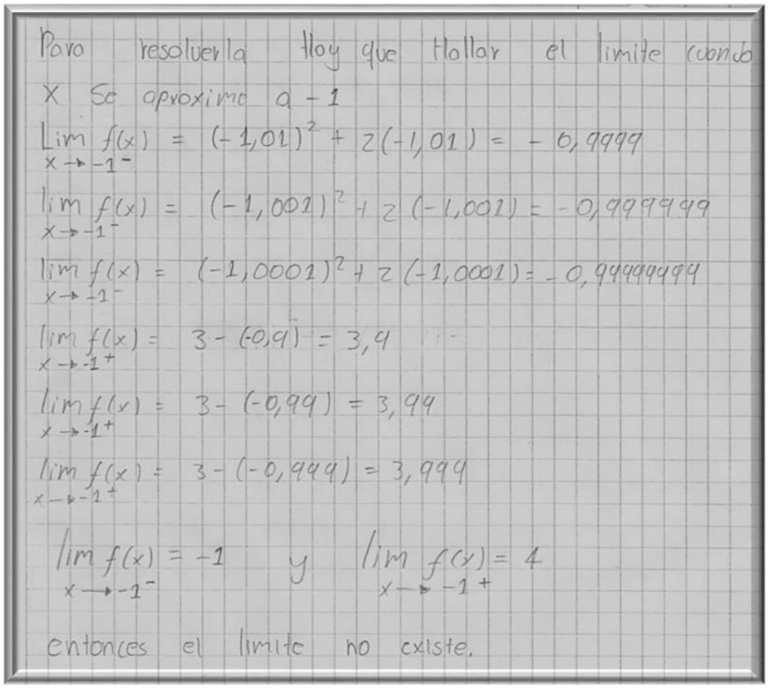
Para Kopnin (1978) lo concreto es el punto de llegada, pero también el punto de partida del conocimiento. Esto es, en el momento de la interacción con el objeto, la imagen que nos formamos de él es de carácter concreto-sensorial. En este nivel, la unidad de lo diverso es confusa ya que solo se da de forma empírica y, por lo tanto, el reflejo del objeto cobra carácter de inmediatez impidiendo distinguir lo singular de lo particular, lo general y lo esencial.

El mismo autor expone que para que el concreto-sensorial se transforme en concreticidad auténtica (p.158), el conocimiento debe pasar a su opuesto: lo abstracto. Un abstracto presenta aspectos parciales más reales del objeto; un abstracto está en movimiento y por lo tanto devela las contradicciones internas del fenómeno en estudio. De esa manera, este tipo de abstracción es necesaria y posibilita la ascensión, la evolución del conocimiento hacia un nuevo concreto. Este concreto "es el conocimiento más profundo y substancial de los fenómenos de la realidad" (Kopnin, 1978, p.162). Es decir, tiene aspectos esenciales del objeto, conexiones vinculadas internamente. Por lo tanto, el proceso de la ascensión de lo abstracto a lo concreto, como lo enuncia Moura (2010), debe revelar las contradicciones presentes en la abstracción inicial para así elaborar la concreción del objeto; la cual permite integrar lo singular y lo particular, la parte y el todo del objeto analizado —en movimiento.

Según Kopnin (1978), el movimiento del proceso de lo sensorial-concreto a lo abstracto y posteriormente a lo concreto es una manifestación de una de las leyes de la dialéctica: la negación de la negación. Esto es, en el análisis de un fenómeno, en el primer momento en que el sujeto interactúa con el objeto surge un concreto-sensorial que es negado por lo abstracto y éste, a su vez, es negado por lo concreto. Sin embargo, este último concreto no es el primero, es uno mental perteneciente a otro nivel, que tiene además un carácter de síntesis de las relaciones internas del objeto o fenómeno estudiado.

Este proceso de ascensión de lo abstracto a lo concreto, explicitado por Kopnin (1978) como una de las leyes de la dialéctica, apunta a una de las tesis del materialismo dialéctico respecto a la teoría del conocimiento. Desde esta perspectiva, me refiero a que el conocimiento –como reflejo de los fenómenos, objetos y procesos del mundo material en la conciencia del hombre" (Kopnin, 1978, p. 122)– se concretiza en forma de espiral: se parte de un punto para llegar a otro similar al primero, pero lo supera, manifestándose en un nuevo nivel de conocimiento mucho más desarrollado.

Mediante las ilustraciones 65 y 66, presento las respuestas de Ana a las situaciones N°5 y N°6 de la *Actividad Orientadora de Enseñanza*.



Para resolverla Hay que Hallar el limite cuando X se aproxima a -1

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = (-1,01)^2 + 2(-1,01) = -0,9999$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = (-1,001)^2 + 2(-1,001) = -0,999999$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = (-1,0001)^2 + 2(-1,0001) = -0,99999999$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 3 - (-0,9) = 3,9$

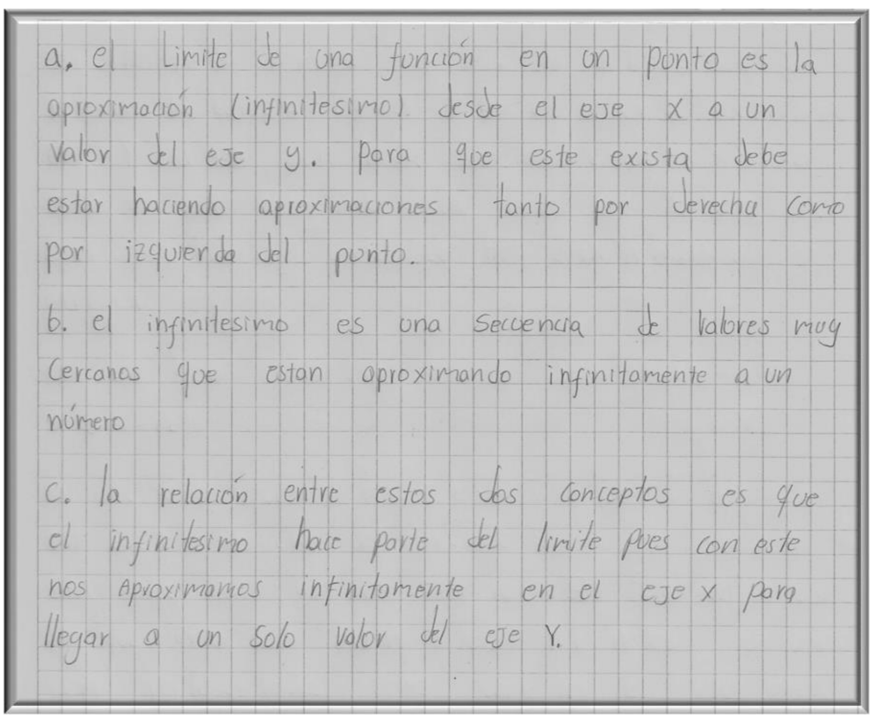
$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 3 - (-0,99) = 3,99$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 3 - (-0,999) = 3,999$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -1$ y $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 4$

entonces el limite no existe.

Ilustración 66. Respuesta de Ana. Situación N°5. ("Límite de una Función en un punto", Octubre 5 de 2017)



a. el Limite de una función en un punto es la aproximación (infinitesimo) desde el eje X a un Valor del eje y. Para que este exista debe estar haciendo aproximaciones tanto por derecha como por izquierda del punto.

b. el infinitesimo es una secuencia de valores muy cercanos que estan aproximando infinitamente a un número

c. la relación entre estos dos conceptos es que el infinitesimo hace parte del limite pues con este nos Aproximamos infinitamente en el eje x para llegar a un solo valor del eje Y.

Ilustración 67. Respuesta de Ana. Situación N°6. ("Límite de una Función en un punto", Octubre 5 de 2017)

Las respuestas de Ana sugieren que logró aproximarse paulatinamente a la esencia del objeto teórico depositado en la cultura. Aunque en su definición de *límite de una función* pareciera que aún lo concebía solo como un método, en la relación que estableció entre éste y el concepto de *infinitésimo*, hizo hincapié en el *límite de una función* como el resultado de las aproximaciones sucesivas al punto de interés. En otras palabras, Ana interiorizó la esencia del objeto *límite* –un instrumento matemático que posibilita conocer, de una manera particular, la mutabilidad de los fenómenos– y la transformó en un concepto que, a su vez, empleó como medio para sus construcciones teóricas. A través de un proceso de síntesis de las relaciones internas del objeto –*límite de una función*–, Ana realizó un movimiento desde un nivel de abstracción hasta un nivel en el que ascendió hacia un concreto.

Según Kopnin (1978), Leontiev (1984) y Davidov (1988), el *pensamiento teórico* se desarrolla mediante la lógica dialéctica, la cual posibilita traspasar la identificación de los rasgos aparentes del objeto de la contemplación y su determinación como concepto, solamente por el uso de la palabra como representación del aspecto invariante del objeto. La lógica dialéctica, como lo expresa Bernardes (2006), "considera el lenguaje como medio de existencia y funcionamiento del conocimiento" (p. 246). Es decir, desde una dimensión ontogenética, el lenguaje es un instrumento que mediatiza la interiorización del saber –producido histórico y culturalmente– por parte del sujeto a través de su *actividad intelectual*; el lenguaje es elemento consustancial del *pensamiento* en la formación de conceptos.

En esta línea, considero que durante los encuentros en el aula, Ana y Eliza alcanzaron de forma paulatina cierto nivel de desarrollo de *pensamiento teórico* que les posibilitó comprender los elementos constitutivos del objeto de estudio, a través del desarrollo de la *actividad de* *estudio* en que se sumergieron a partir de las *Actividades Orientadoras de Enseñanza* propuestas. Al igual que Dana, ellas hicieron uso del lenguaje en diferentes sistemas de signos, como instrumento de comunicación con sus compañeras de *actividad y* como mediador del desarrollo de su *pensamiento*; de sus funciones psíquicas.

Referirme aquí, a cierto nivel de desarrollo del *pensamiento teórico* va en la dirección, en primer lugar, de la concepción de desarrollo comprendida desde el materialismo dialéctico. Esto es, el desarrollo como una forma de movimiento permanente determinado por contradicciones internas. Es decir, el desarrollo comprendido desde la lógica dialéctica la cual no "no admite ninguna clase de *hard and fast lines* [líneas rígidas y fijas], ninguna clase de dilemas absolutos e incondicionales" (Engels, 1961, p.179). Es un desarrollo que no sigue una línea recta, en tanto que admite avances y retrocesos (más en un nuevo nivel, acorde a la ley dialéctica de la Negación de la negación) en diferentes momentos del proceso; es un desarrollo en espiral.

En segundo lugar, referirme al desarrollo del *pensamiento teórico* de las estudiantes en términos de niveles, va en la dirección de planteamientos de Rubinstein (1974), como los siguientes:

> La generalización del contenido de los conceptos científicos se hace conscientemente en el niño en diversos grados de profundización y adecuación en la penetración en la materia; se produce gradualmente por decirlo así. El nivel sobre el cual los niños se apropian los diferentes conceptos depende especialmente de la generalización contenido en el correspondiente concepto de la proximidad o distancia del contenido intuitivo y de la contigüidad de su mediación. (p.437)

> Según el nivel de desarrollo que ha alcanzado su entendimiento teórico, el niño y el adolescente van aprendiendo cada vez más a representarse las normas generalizadas de los fenómenos. El entendimiento empieza a pasar, libre del detalle, por lo particular a lo universal, de lo casual a lo necesario, de los fenómenos al ser, de una determinación individual del ser a su determinación más profunda, llegando así a un conocimiento cada vez más detallado de la realidad en la relación recíproca de sus diferentes aspectos y facetas. (p. 441)

En línea con los planteamientos anteriores, el desarrollo del *pensamiento* en general —y del *pensamiento teórico* en particular— no puede abordarse en términos absolutistas; éste admite gradaciones. En el caso de esta investigación tales gradaciones (no lineales) obedecieron, de un lado, al carácter mismo del desarrollo de todo fenómeno —natural o social— y, de otro lado a las condiciones singulares de las tres estudiantes. En el proceso de toma de conciencia progresiva al objeto cultural, las tres estudiantes protagonistas de la investigación realizaron un movimiento de lo particular (cada uno de los aspectos del *límite de una función* contenidos en cada *situación desencadenadora de aprendizaje*) a lo universal (el uso del concepto de *límite* como método general para resolver situaciones que lo contenían) y realizaron reflexiones teóricas que les posibilitaron hallar nexos al interior del objeto matemático en mención. Sin embargo, no me es posible afirmar que las estudiantes, especialmente Dana, hayan alcanzado un “nivel superior” (Rubinstein, 1974, p. 444) de su *pensamiento teórico.*

El concepto de *límite* fue producto de una construcción social, en un devenir histórico, en la que diferentes generaciones estudiaron durante varios siglos problemas que no podían resolverse por métodos simples de la aritmética, del álgebra y de la geometría elemental. Se requería una forma diferente de entender la mutabilidad de la realidad y, para ello, la creación de un instrumento matemático nuevo –de un método– no antes considerado, que posibilitara estudiar el estado de un fenómeno de cualquier naturaleza en interdependencia con sus estados vecinos (Caraça,1951). El instrumento matemático que posibilitó cuantificar la infinidad de posibilidades de la interrelación de dichos estados fue el concepto de *límite*. Fue precisamente en este sentido, en general, que las estudiantes protagonistas de la investigación, en diferentes niveles, se aproximaron teóricamente al concepto de *límite de una función.*

Conclusiones

La pregunta de investigación que orientó esta tesis fue, ¿cómo puede desarrollarse el *pensamiento teórico* de estudiantes de grado undécimo, en su proceso de *objetivación* del concepto de *límite de una función*?

Como parte del proceso de búsqueda de la respuesta a esta pregunta, abordé un marco teórico que fue el resultado de un tejido entre la Teoría de la Objetivación (Radford, 2006, 2008, 2013, 2014, 2017); el desarrollo del *pensamiento teórico* (Vigotsky, 1989, 1991; Kopnin, 1978; Davidov, 1982, 1988 y Moura, 1998, 2010) y el concepto de *límite de una función* real de variable real (Caraça, 1951; Laurentiev y Nikolski, 1976; Boyer, 1999; Eves, 2011 y Cantoral y Farfán, 2003, entre otros). Este tejido estuvo basado en una fundamentación epistemológica perteneciente al materialismo histórico-dialéctico.

En este mismo proceso de búsqueda, realicé un diseño metodológico desde un paradigma cualitativo, bajo un enfoque crítico-dialéctico. Elaboré la producción conjunta de registros y datos a partir de la interacción directa con tres estudiantes, protagonistas de la investigación, mediada por *Actividades Orientadoras de Enseñanza* enmarcadas dentro de la *Teoría de la Actividad*.

Para responder la pregunta de investigación establecí dos categorías de análisis emergentes: “El Movimiento: Carácter indefectible de la naturaleza”, y, “Límite de una Función real de variable real: Una manera particular de conocer la mutabilidad de los fenómenos”. En estas categorías analicé la manera en la que cada protagonista de la investigación, desde su modo particular de ser/aprender, fue aproximándose de forma paulatina al concepto de *límite de una función en un punto*.

Considero que el nivel de desarrollo del *pensamiento teórico* de las estudiantes protagonistas de la investigación, en su proceso de *objetivación* del *límite de una función,* se produjo en concordancia con el proceso socio-histórico del desarrollo del *pensamiento* del ser humano; esto es, a través de la *actividad —práctica y mental—*. Esta *actividad,* traducida al contexto escolar, corresponde a la *actividad pedagógica,* constituida por la *actividad* de enseñanza en dialéctica con la *actividad* de aprendizaje. En esa dirección, fueron las *Actividades Orientadoras de Enseñanza* las que posibilitaron a las estudiantes sumergirse en un proceso de *objetivación* de un objeto del saber matemático escolar. Un proceso de *objetivación* diferente para cada una de las estudiantes, acorde a sus particularidades, como lo fue el nivel de desarrollo del *pensamiento teórico* que cada una de ellas alcanzó en dicho proceso.

Conocimiento del objeto a partir de su contemplación directa

En el desarrollo de algunas *Actividades Orientadoras de Enseñanza* las estudiantes establecieron una relación con el objeto de estudio en la que primaron juicios aislados, como resultado de una descripción superficial de éste. Tal relación se pudo evidenciar, por ejemplo, en la *Actividad Orientadora de Enseñanza* denominada “Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado”. En ella las estudiantes realizaron asociaciones simples de elementos que observaron en la manifestación del fenómeno (el desplazamiento de un cuerpo en una trayectoria rectilínea). Estas asociaciones se hicieron evidentes en expresiones verbales enunciadas por las estudiantes respecto a una de las acciones contenidas en la *actividad* en mención: “explica el desplazamiento del cuerpo (la burbuja) en la manguera”.

Las expresiones de las estudiantes fueron:

> "*La burbuja tiene un movimiento que no es constante, pero es continuo*" (Eliza, "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado", 21 de julio de 2017).
>
> *"La burbuja posee un movimiento rectilíneo variante, más o menos rápido"* (Dana, "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado", 21 de julio de 2017).
>
> *"Esta tiene un movimiento rectilíneo variable"* (Ana, "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado", 21 de julio de 2017).

Mediante la acción planificada pretendí que las estudiantes profundizaran en el estudio del objeto y que en ese proceso realizaran un movimiento desde el plano externo —la contemplación directa— hacia el plano mental, de modo que su nivel de *pensamiento* comenzara una transición al nivel de *pensamiento teórico*. En esa línea, pretendí que las estudiantes se interesaran por profundizar en el contexto físico en el que se manifestaba el fenómeno al preguntarse, por ejemplo, por la velocidad promedio con que se desplazaba la burbuja. Sin embargo, las estudiantes sólo se refirieron al movimiento desde la contemplación directa sin profundizar en sus causas; expresaron sólo el resultado de su percepción.

El mismo tipo de *pensamiento* fue evidente en la *Actividad Orientadora de Enseñanza* denominada "Determinación de la Posición de un Cuerpo en un Instante Dado". En ella, la *situación desencadenadora de aprendizaje* fue generada mediante la pregunta, "¿Puedes hallar la posición exacta del móvil justo a los 8 segundos de su recorrido?" En el momento práctico de la *Actividad Orientadora de Enseñanza* Dana se anticipó al resultado (la imposibilidad de hallar lo sugerido en la pregunta) aduciendo el movimiento permanente de la burbuja como el motivo fundamental. Sin embargo, en el segundo momento de la *Actividad Orientadora de Enseñanza,* el cual constó de las respuestas por escrito de las estudiantes a las preguntas planteadas, Dana reportó que las dificultades en la manipulación del sistema *manguera-burbuja* fueron la razón principal de la imposibilidad para hallar la posición exacta del móvil a los 8 segundos exactos y no, el movimiento de la burbuja, como lo manifestó en el primer momento.

Según el enunciado "*Nosotras medimos varias veces y nos dio casi la misma posición, pero no igual*" ("Determinación de la posición de un cuerpo en un instante dado", julio 18 de 2017), ella esperaba obtener los mismos resultados todas las veces que midió los intervalos de tiempo debido, probablemente, a que su relación establecida con el objeto fue resultado de una reflexión inmediata de la práctica. Es posible que el cambio de argumento de Dana haya obedecido a un análisis inmediato del fenómeno en el momento de la *actividad práctica* y que, al hacer una reflexión posterior, no lograse conectar ambos momentos. Es decir, que haya realizado reflexiones superficiales.

Los dos ejemplos anteriores denotan una aproximación de las estudiantes al fenómeno a partir de la mera percepción y, por lo tanto, por medio del establecimiento de conexiones entre sus aspectos de forma fragmentada. Este tipo de aproximación es característico de un *pensamiento* perteneciente al plano sensorial y, por ende, de carácter inmediato. En otras palabras, el tipo de *pensamiento* que emplearon las tres estudiantes en la primera *Actividad Orientadora de Enseñanza* referida y, especialmente Dana, en la segunda, fue un *pensamiento* de carácter *empírico*. Sin embargo, el hecho de que las estudiantes comenzaran a aproximarse al objeto por medio de este tipo *de pensamiento* no fue un impedimento para que se interesaran por el estudio del objeto, o fenómeno, y que, posteriormente, comenzaran a visualizar algunos de sus aspectos teóricos y a transformarlo como parte de una elaboración mental en sus conciencias.

El proceso de Objetivación del límite de una función en un punto

En los dos momentos principales de cada *Actividad Orientadora de Enseñanza* —al interior de los subgrupos conformados por las estudiantes con el fin de resolver las *actividades* propuestas, y en la socialización general de los resultados construidos por cada subgrupo— las estudiantes se aproximaron de forma paulatina al objeto de estudio, por medio de la interacción con sus compañeras de aula y con la maestra, a través de una relación dialógica. Esta relación posibilitó que las estudiantes se posicionaran en el proceso de aproximación a un concepto teórico preexistente en la cultura, constituido en un devenir histórico. Estos dos momentos estuvieron permeados por el trabajo colectivo en el que la voz del otro —maestra o compañera de la *actividad* de estudio— cobró un significado fundamental tanto en el proceso de desarrollo del *pensamiento* de las estudiantes, como en su proceso de objetivación del concepto *límite de una función.*

Así, por ejemplo, durante el momento de la socialización de la *Actividades Orientadoras de Enseñanza,* "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado", mi voz se transformó en un mediatizador entre el fenómeno de estudio y las estudiantes como sujetos de la *actividad;* generó en ellas la necesidad de emplear la matemática como un instrumento con el fin de profundizar en su estudio. Este hecho se evidenció en las respuestas que Eliza y Dana dieron a mi pregunta, sobre cómo saber si el tipo de movimiento del cuerpo era rectilíneo uniforme.

> "*Ah, pero no, pues, sí y no. O sea, hallando la velocidad de la burbuja, pero cada dos segundos, para saber bien como era. ¿Cierto?" (Ana, "*Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado", 21 de julio de 2017)

"Pues, que así sabemos si la velocidad es la misma, en toda la manguerita o si cambia" (*Eliza,* "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado", 21 de julio de 2017).

Por medio de mi voz, las estudiantes visualizaron un instrumento matemático perteneciente a la aritmética para aplicarlo en el contexto físico y así poder solucionar la nueva situación planteada.

Un segundo ejemplo se encuentra en uno de los momentos de la *Actividad Orientadora de Enseñanza* denominada "¿Límite?" En ésta, Ana le explicó a Dana la necesidad del uso del *infinitésimo* como parte de la solución al problema planteado en dicha *actividad*. Así, cuando Ana expresó el resultado de su reflexión, Dana logró ver lo que antes no había sido visible para ella. Cuando Dana enunció, *"¡Ah, claro, yo no había entendido! Es que no es el punto exacto, sino en la… vecindad. ¡Ay, claro!*, su enunciado apareció como resultado de la influencia de la voz de Ana en su razonamiento. Es decir, el proceso de formación de conceptos en Dana —*infinitésimo y* vecindad— se encontraba en la categoría interpsíquica en la cual la colaboración de su compañera de *actividad* se volvió fundamental en la solución del problema y, por consiguiente, en su proceso de aprendizaje.

El concepto de *infinitésimo* que propuse a las estudiantes va en el mismo sentido de planteamientos de Cauchy y Caraça (ver el apartado correspondiente a la segunda categoría de análisis). Esto es, el *infinitésimo* como una variable que toma valores sucesivos, tan cercanos a cero cuánto se desee. Es un instrumento de naturaleza dinámica que, por lo tanto, posibilita analizar la infinidad de estados posibles entre dos estados cualquiera de un fenómeno en movimiento. Desde mi postura ontológica, es esta la esencia del *infinitésimo* y, por ende, fue a la luz de ésta que analicé su aproximación paulatina por las estudiantes protagonistas de la investigación.

Las tres estudiantes se aproximaron al concepto de *infinitésimo* —cimiento del concepto de *límite de una función de variable real*— en imbricación con el concepto de vecindad. Ellas se aproximaron a ambos conceptos de forma paulatina y, desde sus particularidades, mediante el desarrollo de las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*, las cuales están enmarcadas en la *Teoría de la Actividad*. Es decir, aquí, dichas *Actividades* cobraron un significado de mediación entre las estudiantes y el objeto cultural. Este significado se evidenció en los momentos en los que las estudiantes se sumergieron en *actividad mental* en su búsqueda de solucionar cada *situación desencadenadora de aprendizaje* contenida en las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*. Así, el desarrollo de tales *Actividades* generó, en las estudiantes, un movimiento del plano externo al interno al realizar acciones y operaciones que les posibilitó hacer reflexiones al solucionar lo sugerido en cada *Actividad Orientadora de Enseñanza*. En el momento de la socialización de la *Actividad Orientadora de Enseñanza* "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado", por ejemplo, las estudiantes dieron cuenta de su proceso de aproximación paulatina al concepto de *infinitésimo*, mediante enunciados verbales (y gestuales) como:

> *Ah, sí, sí. Si fuera un solo segmento, pues, no cambiaría, estaría ahí quieto…* (Ana, "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado"-Socialización 28 de julio de 2017).
>
> *O sea, ¿qué es como una especie de variable, o…algo así?* (Dana, "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado"-Socialización 28 de julio de 2017)

> *Sí. Es que… vea que según lo que usted dibujó ahí* [señalando la gráfica en la que resalté la variable] *se nota claramente que son todos esos números, pequeñitos que están en la vecindad del número y, obviamente, están cambiando* (Eliza, "Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado"-Socialización 28 de julio de 2017),

Así mismo, en la socialización respectiva a la *Actividad Orientadora de Enseñanza* denominada "¿Límite?", Ana le explicó a Dana lo comprendido por ella sobre *infinitésimo* mediante los siguientes enunciados (verbales y gestuales):

> *Bueno, en ese punto* [de la guía] *nos pedían hallar el área, pero cuando el lado se aproximaba a…* [se detiene un segundo para mirar en el tablero el valor del lado] *3, 699 metros. Entonces teníamos que acercarnos tanto por derecha como por izquierda, porque, […] aproximarnos a un número es movernos hasta él por los dos lados* [indica el movimiento con su mano].

Se hizo evidente, entonces, que durante los encuentros en el aula las tres estudiantes hicieron uso del lenguaje en diferentes sistemas semióticos para comunicarse con sus compañeras de *actividad*, convirtiéndose, así, en un instrumento simbólico que mediatizó sus aproximaciones a objetos matemáticos —el *infinitésimo* en este caso— y, a su vez, sus procesos de desarrollo de *pensamiento*.

Como lo expuse en el apartado correspondiente a la segunda categoría de análisis, el concepto teórico de *límite de una función en un punto* que pretendí que las estudiantes visualizaran y apropiaran fue, esencialmente, el planteado por Caraça (1951). Es decir, el concepto de *límite* como un objeto matemático y como un método que posibilita entender la mutabilidad de los fenómenos. Esto es, el *límite de una función* en *un punto*, como un número resultante de la interdependencia del conjunto de las posibilidades de los valores de la *función* en la vecindad del punto de interés. Un resultado que conlleva un método dialéctico para determinar el estado del fenómeno estudiado, en interrelación con sus estados vecinos. Dialéctico, en primer lugar, porque contiene en sí mismo una de las categorías fundamentales de la dialéctica: el movimiento —en este caso, el *límite de una función* mediante aproximaciones sucesivas—En segundo lugar, porque como método dialéctico posibilita explicar el fenómeno por medio de las concatenaciones de sus aspectos constitutivos.

Esta concepción ontológica del *límite de una función,* lejos de ser una concepción simplista, se aparta del formalismo matemático contenido en la definición topológica o en la definición métrica de Weierstrass; un formalismo que puede dificultar la comprensión de su esencia en estudiantes de secundaria. Dicha concepción ontológica va en la misma dirección de la planteada por Cauchy, la cual es también, de carácter dinámico, lo que la hace asequible para los estudiantes de nivel escolar medio. Este hecho se hizo evidente en los procesos de *objetivación* de las estudiantes protagonistas de esta investigación, especialmente en los procesos de Eliza y Ana.

Un ejemplo de lo enunciado en el párrafo anterior puede hallarse en la *Actividad Orientadora de Enseñanza* denominada, "Límite de una Función", y específicamente en la respuesta de la pregunta N°2 (la cual contenía la representación gráfica de la función a estudiar). La pregunta a la que hago alusión es, "¿Es posible hallar el valor de $f(0)$? Explica". Las respuestas de las tres estudiantes dieron cuenta del establecimiento de una relación entre el concepto de *función*, *infinitésimo* y *límite de la función* dada. Aunque en la pregunta problematizadora no era explícita la acción de hallar el *límite de la función* en el origen, las tres estudiantes emplearon dicho concepto —como aproximaciones sucesivas— como instrumento para hallar la solución a la situación.

Las estudiantes, en el proceso de su búsqueda de la respuesta a la pregunta que motivó su *actividad mental*, visualizaron el objeto *límite* como un método para solucionar la situación matemática presentada. Ellas usaron un objeto existente en la cultura por medio del cual realizaron una reflexión que traspasó la sola operación mental de percepción. El proceso de objetivación en el que estaban inmersas se transformó a la vez en un medio para hacer reflexiones más profundas, de tipo teórico. En el siguiente apartado presento otras reflexiones sobre *Actividades Orientadoras de Enseñanza* realizadas por las estudiantes que me llevaron a conclusiones semejantes.

Aproximación a un pensamiento teórico

El movimiento es concebido, desde el materialismo dialéctico, como la propiedad fundamental de la materia; la materia no puede ser concebida sin movimiento. Así, el movimiento es consustancial a todos los procesos existentes en el universo, sin importar su naturaleza, sea esta, física, biológica, mental o social. En esa línea, una de las formas del movimiento es el mecánico, el cual puede ser estudiado a través del *límite de una función*.

Esta forma de movimiento fue una de las identificadas por las estudiantes, lo que se hizo evidente, por ejemplo, en la *Actividad Orientadora de Enseñanza* "Determinación de la Posición de un Cuerpo en un Instante Dado". En esta, ante mi pregunta sobre sobre el fenómeno físico principal identificado por las estudiantes en el sistema burbuja-manguera, Eliza y Ana respondieron:

*Es el movimiento…Porque es lo que estamos viendo. La burbujita se desplaza por la manguera (*Ana*, "Determinación de la Posición de un Cuerpo en un Instante Dado,"18 de julio de 2017)*

*El movimiento de la burbuja…Porque es el cambio que la burbuja hace en su recorrido. En ningún momento, la burbuja para (*Eliza, "Determinación de la Posición de un Cuerpo en un Instante Dado,"18 de julio de 2017).

Ambas estudiantes identificaron el movimiento mecánico como fenómeno principal manifiesto en la *Actividad Orientadora de Enseñanza* en mención, lo que dio cuenta del reflejo del objeto en sus conciencias, como producto de su *actividad mental* en dialéctica con la *actividad práctica*.

Otro ejemplo en el que las estudiantes identificaron el movimiento —en dialéctica con el cambio— fue en la tercera *Actividad Orientadora de Enseñanza*, "¿Cómo ha sido el Desarrollo de tu Estatura?". En ella el movimiento estuvo presente en uno de los aspectos del desarrollo físico de las estudiantes y en su *actividad mental* durante la realización de la *actividad*. Cada una de las estudiantes, desde su propio discurso, desde su conciencia, identificó el cambio en las curvas resultantes del desarrollo de sus estaturas. El hecho de analizar cómo se había desarrollado sus estaturas, les posibilitó dar un sentido personal a un significado construido socialmente: una representación gráfica de un fenómeno en un determinado contexto.

De esta manera, en el desarrollo de la *actividad de aprendizaje* de las estudiantes —materializado en las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*— las estudiantes, especialmente Eliza y Ana, hallaron vínculos entre conceptos relacionados con el concepto de *límite* tales como, movimiento, variable, *función, infinitésimo y vecindad.* La deducción de estos vínculos surgió en el proceso de *objetivación* de las estudiantes, lo cual denotó cierto nivel de desarrollo de su *pensamiento teórico*.

En la *Actividad Orientadora de Enseñanza* denominada “Límite de una Función en un punto”, por ejemplo, las estudiantes emplearon el *infinitésimo* como instrumento para analizar el fenómeno en movimiento —el cambio de temperatura— relacionado con la vecindad del punto. Esta operación mental se hizo evidente en expresiones como:

> *Vea, como dice tiende, entonces, utilizamos el infinitésimo para aproximarnos a 20. Valores aproximados, por ejemplo, 19,9999 o 20, 0001*(Eliza, “Límite de una Función en un punto”, septiembre 26 de 2017).
>
> *Ah, sí. Yo no lo había leído bien. Esto hay que subrayarlo: TIENDEEEE…*(Dana, “Límite de una Función en un punto”, septiembre 26 de 2017)
>
> *Esto cambia todo, tooodo, todo: tiende* (Eliza, “Límite de una Función en un punto”, septiembre 26 de 2017).

Otro ejemplo es el referente a la *Actividad Orientadora de Enseñanza* “Límite de una Función”, donde las tres estudiantes presentaron coherencia entre la representación gráfica y alfanumérica que emplearon para solucionar la situación-problema. Eliza y Dana realizaron aproximaciones al punto de interés, ante la imposibilidad de hallar el valor exacto de la función en dicho punto. Ana, además, enunció hallar “los límites” como solución. En esta *Actividad Orientadora de Enseñanza*, las tres estudiantes hicieron conexiones entre *infinitésimo, límite* y movimiento; se estaban aproximando al objeto de estudio al concatenar aspectos fundamentales de éste. En la misma *Actividad,* Ana, a diferencia de Eliza y Dana, explicitó el nexo entre *función y límite de la función.* Ella halló la expresión analítica de la *función* —además del análisis en la gráfica dada— para hallar posteriormente su *límite* de acuerdo con la aproximación que estaba haciendo a dicho constructo matemático.

En la última *Actividad*, “Límite de una Función en un Punto”, en la situación N°5, tanto Eliza como Dana evidenciaron dificultad en sus operaciones matemáticas para hallar la solución a la situación-problema planteada. Dificultad ocasionada, principalmente, por la falta de apropiación del establecimiento de relaciones de orden en la recta numérica. Contrariamente, Ana resolvió la situación denotando apropiación del concepto en mención.

A partir de lo expresado en los párrafos anteriores de este apartado y de mi interacción con las estudiantes durante sus procesos de *objetivación*, puedo decir en cuanto al proceso de desarrollo del *pensamiento teórico* de Dana, que fue evidente una aproximación al objeto, inicialmente de una manera descriptiva y posteriormente, en el transcurso de la realización de las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*, más profunda. Así, Dana identificó los elementos constitutivos del objeto y estableció relaciones entre ellos; dedujo nexos entre aspectos del *límite de una función*. Sin embargo, algunas de sus operaciones en la última *Actividad Orientadora de Enseñanza*, la cual tuvo un carácter de síntesis, no me permiten afirmar que Dana se haya apropiado de este concepto matemático. Es decir, que Dana haya dotado de sentido el significado de *límite de una función* y lo haya empleado como medio de sus elaboraciones teóricas. Por ejemplo, el hecho que Dana haya definido el *límite de una función* en un punto como “hallar el *valor máximo de la función tanto gráfica como algebraicamente…*” (Dana, “Límite de una Función en un Punto, octubre 5 de 2017) da cuenta de que en su proceso de *objetivación* se aproximó a aspectos del objeto, mas, no visualizó su esencia. Al parecer, la aproximación que realizó aún era fragmentada y, por lo tanto, en su aproximación al objeto, no logró trascender las abstracciones del objeto hacia un concreto.

Aunque Eliza presentó dificultades en la solución de algunas situaciones-problema, contenidas en determinadas *Actividades Orientadoras de Enseñanza,* en general ella evidenció un proceso de toma de conciencia progresiva de la esencia del objeto cultural al que se aproximó. Las dificultades que aquí refiero obedecieron, principalmente, a la falta de apropiación de conceptos matemáticos que eran requisitos para la operatividad del *límite de una función.* Dificultades, principalmente, en operaciones algebraicas y en las propiedades de orden en el sistema de los números reales. Éstas se convirtieron, a su vez, en una forma de impedimento para aplicar correctamente el concepto de *límite* en situaciones que exigían su empleo.

Sin embargo, durante todo su proceso de *objetivación*, a lo largo de la realización de las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*, Eliza denotó algunas características del *pensamiento teórico* como la deducción de conexiones al interior del objeto (fenómeno/esencia, particular/general) y el uso consciente del *límite* como un método. El cálculo del valor resultante de la interdependencia del conjunto de las posibilidades del comportamiento de la *función* en la vecindad del punto de interés, Eliza lo halló mediante aproximaciones sucesivas, aunque, con la limitante expuesta en el párrafo anterior.

En la definición de *límite de una función* que Ana expresó en la última *Actividad Orientadora de Enseñanza* (que, como ya lo enuncié, tuvo un carácter de síntesis), pareciera que ella aún lo concibiera como un método solamente, "*El límite de una función en un punto es la aproximación (infinitésimo) desde el eje X a un valor del eje Y. Para que éste exista se deben hacer aproximaciones tanto por derecha como por izquierda del punto*" (Ana, "Límite de una

Función en un Punto", octubre 5 de 2017). Mas, en la relación que Ana estableció entre éste y el concepto de *infinitésimo,* ella enfatizó en el *límite de una función* como el resultado de las aproximaciones sucesivas al punto de interés. He de aclarar que, en la *Actividad Orientadora de Enseñanza* en mención, Ana expresó su concepción de *límite de una función* a través del uso de la palabra escrita, mas esa misma concepción la evidenció progresivamente en su proceso de *objetivación* a lo largo del desarrollo de todas las *Actividades Orientadoras de Enseñanza* desarrolladas y a través de diferentes medios semióticos.

En otras palabras, Ana interiorizó la esencia del objeto *límite* y la transformó en un concepto que, a su vez, empleó como medio para la solución de situaciones que contienen dicho concepto; Ana se apropió del concepto. De esta manera, ella dio cuenta de una aproximación a un *pensamiento teórico,* lo cual se evidenció, además de lo concluido en el párrafo anterior, *en* las *Actividades Orientadoras de Enseñanza* detalladas en la segunda categoría de análisis de esta tesis.

Desde el materialismo histórico-dialéctico, el desarrollo del *pensamiento* en general —y del *pensamiento teórico* en particular— no puede abordarse en términos absolutistas; admite gradaciones. Gradaciones (no lineales) que obedecen al mismo carácter dialéctico del desarrollo de todo fenómeno (natural o social). En ese sentido, es posible afirmar que cada una de las estudiantes alcanzó un nivel *teórico* en el proceso de desarrollo de su *pensamiento*. Un nivel –inacabado– determinado por las condiciones individuales de cada estudiante (en una dialéctica *yo*/ *otro*) y, por lo tanto, por sus formas particulares de aproximarse al objeto cultural. De esa manera, en sus procesos de toma de conciencia progresiva del objeto cultural, Eliza, Dana y Ana realizaron un movimiento de lo particular (cada aspecto del *límite de una función* contenido en cada *situación desencadenadora de aprendizaje*) a lo general (el uso del concepto de *límite* como método para resolver situaciones que lo contenían) y viceversa (especialmente Eliza y Ana). Así mismo, realizaron reflexiones que les posibilitaron hallar vínculos al interior del objeto matemático. Sin embargo, no me es posible afirmar que las estudiantes, especialmente Dana, hayan alcanzado un "nivel superior" (Rubinstein, 1974, p. 444) en el desarrollo de su *pensamiento teórico*.

Así entonces, tanto desde la concepción ontológica y epistemológica como desde el marco teórico que asumo, considero que Ana y Eliza, desde sus particularidades, desarrollaron un nivel de *pensamiento teórico* tal, que les posibilitó comprender elementos constitutivos del objeto de estudio, a través del desarrollo de la *actividad* de aprendizaje en que se sumergieron por medio de la realización de las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*. Un nivel que, probablemente, les posibilite aproximarse conscientemente al lenguaje formal del *límite de una función,* posteriormente, en un contexto que lo demande.

Aunque Dana evidenció reflexiones teóricas durante varias *Actividades Orientadoras de Enseñanza*, pienso que en su *pensamiento* predominaron características de un nivel *empírico*.

El presente estudio me posibilitó identificar, además, la existencia de un eje fundamental en el tejido de la educación en cuanto al desarrollo del *pensamiento teórico* de los estudiantes en su proceso de aprendizaje: la *actividad.* Y, en este caso, específicamente, la *Actividad Orientadora de Enseñanza*. Este tipo de *actividad* —enmarcada en la *Teoría de la Actividad*— contiene el trabajo colectivo como uno de sus pilares, promoviendo así el reconocimiento de la voz del otro (maestro, estudiante, objeto,…) en el proceso de aproximación (aproximación paulatina) de las estudiantes al objeto preexistente en la cultura (el *límite de una función* en este caso), constituido social e históricamente. Este tipo de aproximación, por ser de carácter dinámico, puede facilitar la visualización de la esencia del objeto en la conciencia del sujeto estudiante, esto es, la visualización del concepto.

Considero que la razón principal por la que las estudiantes no hubieran alcanzado un mayor nivel de desarrollo de su *pensamiento teórico* fue la limitación de tiempo; propia del contexto escolar donde desarrollé la investigación. Esto es, un contexto que posee una dinámica constituida no sólo por las intersubjetividades de los integrantes de la comunidad educativa (padres y madres de familia, estudiantes, maestros y directivas), sino, además por un sinnúmero de disposiciones provenientes de entidades oficiales —locales y nacionales— que modifican la cotidianidad de la escuela y específicamente la existente al interior del aula. En el caso de la investigación, estas disposiciones disminuyeron el tiempo del desarrollo de las *Actividades Orientadoras de la Enseñanza* durante el trabajo de campo.

Desde mis presupuestos ontológicos, gnoseológicos y epistemológicos, identifiqué la importancia de transformar nuestras prácticas de enseñanza de las matemáticas (la de otros maestros y también la mía) en otras que generen, a su vez, una transformación del *pensamiento* de nuestros estudiantes. Prácticas, como parte de la organización de nuestra *actividad* de enseñanza, que viabilicen el desarrollo de un *pensamiento* que trascienda de la generalización empírica —producto de establecimiento de relaciones mediante la sola percepción— hasta el desarrollo de un *pensamiento* que posibilite un análisis dialéctico del objeto o fenómeno a ser aprendido; esto es, hacia el desarrollo de un *pensamiento teórico*.

Bajo mis presupuestos, considero que los maestros de instituciones escolares podemos (re)significar nuestra práctica pedagógica para que el estudiante se acerque a los objetos matemáticos desde otra lente. Una aproximación que le posibilite, a ese estudiante, encontrar en los objetos matemáticos —en ese legado histórico y cultural— un algo que lo movilice y que, a su vez, lo constituya como un sujeto partícipe de la (re)significación del saber matemático escolar, en constante intersubjetividad con sus compañeros de aprendizaje.

En otras palabras, pienso que el maestro debe generar en los estudiantes, en la medida de lo posible, las condiciones materiales para el desarrollo de su *pensamiento teórico.* Esto es, un pensamiento por medio del cual el concepto *–teórico–* se transforme en un método general de reflexionar y de actuar en otros contextos y momentos diferentes a los escolares; un modo general de apropiarse del saber cultural; de comprender la realidad objetiva.

Finalmente, considero que esta investigación aporta elementos didácticos que posibilitan la (re)significación de procesos tanto de enseñanza como de aprendizaje del *cálculo* escolar de nivel medio, en tanto que muestra que es factible una enseñanza desarrollante, aun de objetos matemáticos que exigen de un alto nivel de abstracción teórica para su aprendizaje.

Referencias

Aleksandrov, A.D. (1976). Visión General de la Matemática. En: Aleksandrov A.D, Delone, B.N, Kolmogorov, A.N, Laurentiev, M.A; Nikolski, S.M y Petrovski I. G. *La Matemática: su contenido, métodos y significado*. Madrid: Alianza Editorial. p. 17-79.

Apostol, T.M. (1976). *Análisis Matemático*. Barcelona, España: Reverté.

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques. 9(3). p. 281-308. Recuperado de: http://www.numdam.org/article/PSMIR_1990-1991___5_A2_0.pdf.

Bajtín, M. (2004). *Problemas de la poética de Dostoievski*. Madrid, España: Fondo de Cultura Económica.

Bajtín, M. (2009). *Estética de la creación verbal*. Ciudad de México, México: Publimex.

Bernardes, M. E. M. (2006). *Mediaçoes Simbólicas na Actividade Pedagógica: Contribuçoes do Enfoque Histórico-Cultural para o Ensino e Aprendizagem* (Tesis doctoral). Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil. Recuperado de: http://biblioteca.universia.net/html_bura/ficha/params/title/media%C3%A7%C3%B5es-simbolicas-na-atividade-pedagogica/id/53355125.html.

Bernardes, M. E.M y Moura, M. O. (2009). Mediaçoes Simbólicas na Actividade Pedagógica. *Educação e Pesquisa, São Paulo, v.35, n.3, p. 463-478, set./dez.*

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002): Nueva definición de límite funcional. UNO, (30). p. 67-82. Barcelona, Espana: Graó.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S., y Benegas, J. (2006). *Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad*. Relime, 9, (2) pp. 189-209. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362006000200002

Boyer, C. B. (1999). *Historia de la Matemática*. Versión de Mariano Martínez Pérez. Madrid, España: Alianza Editorial, S.A.

Boyer, C. B (1993). *Tópicos de Historia da Matemática*. *Para uso em sala de aula. Cálculo.* Tradução de Hygino H domingues. São Paulo, Brasil: Atual Editora Ltda.

Cantoral R (1995). *Hacia una didáctica del Cálculo basada en la Cognición*. En: Antologías-I Publicaciones Centroamericanas, (7), pp.1-24. ISBN: 9977-64-769-0 Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/263010052_Hacia_una_didactica_del_calculo_basada_en_la_cognicion.

Cantoral R y Farfán R (2003). *Matemática Educativa: Una Visión de su Evolución.* Extraído de: http://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/revistaeyp/article/view/5953/5363.

Caraça, B de J. (1951). O Método dos Límites. En: *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Livraria Sá Da Costa. p. 213-227.

Cedro, W. L y Moura, M.O. (2010). Experimento didáctico: un camino metodológico para la investigación en la educación matemática. *Revista iberoamericana de educación matemática,* (22), 53-63.

Cornu, B. (1982). Quelques Obstacles à l´Apprentissage de la Notion de Limite. Séminaire de didactique et Pédagogie des Mathématiques, Nº 34, Grenoble, p. 236-268. Traducción de

César Delgado. Recuperado de: https://es.scribd.com/document/324360769/CORNU-Obstaculos-en-El-Aprendizaje-de-La-Nocion-de-Limite.

Davidov V. (1988). *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico. Investigación psicológica teórica y experimental*. Moscú: Progreso.

D'Ambrósio, U. (2005, janeiro/abril). Sociedade, cultura, matemática e seu ensino**.** *Educação e Pesquisa*, 31 (1), 99-120.

Delgado, C. (1995). *Estudio de la evolución de los esquemas conceptuales de estudiantes universitarios en su proceso de aprendizaje de los conceptos de límite y continuidad*. (Tesis de Maestría). Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Delgado C. (1998). *Estudio microgenético de esquemas conceptuales asociados a definiciones de límite y continuidad en universitarios de primer curso* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Denzin, N., Guba, E. & Lincoln, Y. (1994). Competing paradigms in qualitative research. *Handbook of qualitative research*. Park, CA: SAGE Publications.

Denzin, N. y Lincoln, Y. (2012). Introducción General: La Investigación Cualitativa como Disciplina y como Práctica. En: *El Campo de la Investigación Cualitativa: Manual de Investigación Cualitativa*. Gedisa: Barcelona. p. 43-101.

Engels, F. (1961). *Dialéctica de la Naturaleza*. Ciudad de México, México: Grijalbo, S. A Ediciones.

Eves H. (2011). *Introdução à história da matemática* (H.H. Domingues Trad). Recuperado de: https://www.passeidireto.com/arquivo/19724078/introducao-a-historia-da-matematica---howard-eves-traducao-hygino.

Fernández, J. (2015). *Significados escolares del concepto de límite finito de una función en un punto*. (Tesis de doctorado). Universidad de Granada, España.

Heller, A. (1978). *Sociología de la Vida Cotidiana*. Barcelona, España: Ediciones Península. Recuperado de: http://www.loslibros.info/descarga-libro-sociologia-de-la-vida-cotidiana-scan-pdf-de-heller-agnes/

Jaramillo, D. (2011). La educación matemática en una perspectiva sociocultural: tensiones, utopías, futuros posibles". *Educación y Pedagogía*, 23(59), 13-36.

Kline, M. (2000). *Matemáticas. La pérdida de la Certidumbre*. Delegación Coyoacán, México: Siglo XXI editores, S.A de C.V.

Kopnin, P.V. (1978). *A Dialéctica como Lógica y Teoría do Conhecimento*. Río de Janeiro: Civilização Brasileira.

Kozulin, A. (2000). *Instrumentos psicológicos*. Barcelona, España: Paidós Ibérica, S.A.

Laurentiev, M.A y Nikolski, S.M (1976). Límites. En A.D. Aleksandrov. (Ed). *La Matemática: su contenido, métodos y significado*. Madrid: Alianza Editorial. p. 108-117.

Leontiev, A.N. (1984). *Actividad, Conciencia y Personalidad*. Ciudad de México, México: Editorial Cartago.

Leontiev, A. N. (2004). *O Desenvolvimento do Psiquismo*. Sao Paulo: Centauro Editora.

Luria, A.R. (1984a). *Conciencia y Lenguaje*. Madrid, España: Visor Libros.

Luria, A.R. (1984b). *El Cerebro en Acción*. Barcelona, España: Ediciones Martínez Roca, S.A.

Marx, C. (2010). *El Capital. Libro Primero.* Madrid, España: Siglo XXI de España Editores, S.A. recuperado de: https://filosinsentido.files.wordpress.com/2013/07/77588940-karl-marx-el-capital-vol-i.pdf

Marx, K. y Engels, F. (1974). *La Ideología Alemana.* Barcelona, España: Grijalbo, S. A Ediciones.

Mol R. S. (2013). *Introdução à História da Matemática*. Belo Horizonte, Brasil: Editora Caed-Ufmg. Extraído el 20 de febrero de 2011, de: http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/introducao_a_historia_da_matematica.pdf

Molfino, V. y Buendía G. (2010). El límite de funciones en la escuela: un análisis de su institucionalización. *Revista electrón. Investigación, educación, ciencia*. 5(1) pp. 27-41. ISSN 1850-6666. Recuperado de: http://www.scielo.org.ar/scielo.php?pid=S1850-66662010000100003&script=sci_arttext

Monteiro, A, y Mendes, J. (2011). Prácticas sociales y organización curricular: cuestiones y desafíos. (E. Obregón Trad). *Educación y Pedagogía*, 23(59), 37-46.

Moraes, S. P. G, y Moura, M. O. (2009). Avaliação do Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática: contribuições da teoria histórico-cultural, *Bolema*, 22 (33), 97-116.

Moretti, V., y Moura, M. (2010). O sentido em movimento na formação de professores de matemática. *Zetetiké*, 18(34), 155-180.

Moura, M. O. (1998). A atividade de Ensino como Ação Formadora. In A. Castro, Domingues e Carvalho, A. Pessoa (Eds). *Ensinar a ensinar*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning Ltda. 143-162.

Moura, M. O. (2010). A atividade pedagógica na Teoría Histórico-Cultural. Brasilia: Liber Livro.

Moura, M.O, Faria y Araujo (2011). *Teoria e Prática da Educação*, 14(1), 39-50.

Moura, M. O, Araujo, E. S, Ribeiro, F. D, Panossian, M. L y Moretti, V. D. (2013). *A Atividade Orientadora de Ensino como Unidade entre Ensino e Aprendizagem.* Recuperado de: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/1963767/mod_resource/content/3.pdf.

Petrovski, A. (1980). *Psicología General*. Moscú, Rusia: Editorial Progreso.

Pons, J. (2014). *Análisis de la Comprensión en Estudiantes de Bachillerato del Concepto de Límite de una Función en un Punto*. (Tesis doctoral). Universidad de Alicante, España.

Radford, L (2004). *Semiótica Cultural y Cognición*. Recuperado de:

http://www.martes.laurentian.ca/NR/rdonlyres/808730CD-2FF4-45A3-AB1B-06BAFF87B51B/0/Tuxtla3.pdf.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de objetivación. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática educativa*. Número especial, p. 103-129.

Radford, L. (2008). The ethics of beingand knowing: Towards a cultural theory of Learning. En L. Radford, G. Schubring, & F.eeger (comps.). *Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture*, 215–234. Rotterdam: Sense Publishers.

Radford, L. (2013). Three key Concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2 (1), 7-44. Recuperado de: http://www.luisradford.ca/pub/2013%20REDIMAT%20-%203%20key%20concepts%20final%20version.pdf.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132- 150. Recuperado de: http://luisradford.ca/publications/#2014.

Radford, L. (2017a). Aprendizaje desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. En: D'Amore, B y Radford, L. *Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. p. 115-136.

Radford, L. (2017b). Ser, subjetividad y alienación. En: D'Amore, B y l. Radford. *Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. p. 137-167.

Radford, L. (2018). Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la teoría de la objetivación. PNA, 12(2), 61-80. Extraído de: http://www.luisradford.ca/pub/2018%20-%20Radford%20PNA%20algunos%20desafios%20de%20la%20TO.pdf.

Rubinstein, S.L. (1974). *Principios de Psicología General*. México, D.F: Grijalbo S.A

Sánchez, S. (1998). *Fundamentos para la Investigación Educativa*. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles Épistémologiques Relatifs à la Notion de Limite. Recherches en Didactique des Mathématiques. 6 (1). p. 5-67. Recuperado de:

http://www.smasi.ch/index.php?searchtext=sierpinska&option=com_booklibrary&task=search&Itemid=0&searchtype=simplesearch.

Stewart, I. (1998). *De aquí al Infinito*. Barcelona, España: Grijalbo Mondadori.

Talizina, N (2009). *La teoría de la actividad aplicada a la enseñanza*. Puebla, México: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Talizina, N. Solovieva, Y. y Quintanar, L. (2010). La Aproximación de la Actividad en Psicología*. Novedades educativas*. (230).

Tall, D. (1992). *The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof*. En Grouws D.A. (ed.) Handbook of Research on Mathematics Teaching andLearning. New York: Macmillan, pp. 495–511. Recuperado de: https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1992e-trans-to-amt.pdf.

Valero, P. *et al*. (2013). *Procesos de inclusión/exclusión: Subjetividades en educación matemática*. Bogotá: Universidad Pedagógica de Colombia, Fondo Editorial.

Vergel, R (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en estudiantes de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)* (Tesis doctoral). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

Vergel, R. (2015). *Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano*. PNA, 9(3), 193-215.

Vigotsky, L. S (1986). *Pensamiento y Lenguaje*. Barcelona, España: Ediciones Paidós Ibérica, S.A.

Vigotsky (1989). La génesis de las Funciones Psíquicas superiores. En *El Proceso de Formación de la Psicología Marxista*. Moscú: Rusia. Editorial Progreso p. 138-155.

Vigotsky, L. S. (1991). *A Formação Social da Mente*. Sao Paulo, Brasil: Martins Fontes Editora Ltda.

Vigotsky, L. S. (2013a). *Obras Escogidas Tomo I*. Recuperado de: www.passeidireto.com/arquivo/17278329/28805155- Vigotsky -obras-escogidas-tomo-I

Vigotsky, L. S. (2013b). *Obras Escogidas Tomo III.* Recuperado de: www.passeidireto.com/arquivo/17278329/28805155- Vigotsky -obras-escogidas-tomo-IIII.

Vigotsky, L. S. (2013c). *Obras Escogidas Tomo IV*. Recuperado de: www.passeidireto.com/arquivo/17278329/28805155- Vigotsky -obras-escogidas-tomo-4

Wertsch, J. V. (1993). *Voces de la Mente. Un estudio sociocultural para el Estudio de la Acción Mediada*. Madrid, España: Visor Distribuciones S.A.

Yin, R.K. (1984). *Case study research: design and methods*. Beverly Hills, CA: Sage.

Yin, R.K. (2010). *Estudo de Caso: Planejamento e Métodos*. Bookman: Sao Paulo.

Zumalabe, J.M. (2006, abril). El materialismo dialéctico, Fundamento de la Psicología Soviética. *International Journal of Psychology and Psychological Therapy*. *6* (1), 21-50. Recuperado de: http://www.redalyc.org/pdf/560/56060102.pdf.