

## UTILIZAÇÃO DE CÁLCULO ALGÉBRICO SIMBÓLICO (CAS) EM CONTEXTO DE ENSINO E APRENDIZAGEM COM ALUNOS DO 12.º ANO

Helder Martins

*Escola Secundária António Damásio*

heldermart@gmail.com

António Domingos

*Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, UIED FCT-UNL*

amdd@fct.unl.pt

**Resumo:** Tendo por base um estudo mais amplo, pretende-se discutir nesta comunicação a forma como se dá o processo de génese instrumental e que tipo de conexões estabelecem os alunos quando se introduz o *Cálculo Algébrico Simbólico* (CAS) na disciplina de Matemática A, no 12.º ano, recorrendo à utilização de calculadoras gráficas com CAS. Em termos de suporte teórico é analisada a forma como este tipo de recurso pode potenciar a aprendizagem da álgebra e do cálculo, à luz de duas teorias que se focam nos processos cognitivos, nomeadamente a teoria da Reificação e a teoria *APOS* (*Actions, Process, Objects, Schemes*). Fazendo uso de uma metodologia de cariz qualitativo e interpretativo, verificou-se que a utilização do CAS permitiu o estabelecimento de conexões entre os diferentes tipos de representações utilizadas pelos alunos e nesse sentido possibilitou a aquisição de um maior conhecimento matemático, fazendo com que cálculos aparentemente complexos fossem percecionados pelos alunos como algo relativamente mais simples.

**Palavras-chave:** Aprendizagem Matemática, Tecnologia e Educação, Calculadoras Gráficas, Cálculo Algébrico Simbólico, Ensino Secundário.

### 1. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos tem-se assistido a uma larga expansão de dispositivos eletrónicos sendo de destacar, além dos computadores pessoais, os *tablets* e os *smartphones*. Para cada um destes dispositivos têm sido feitas várias tentativas no sentido de os aplicar à educação em geral, e à Matemática em particular, criando-se ambientes de aprendizagem propícios que possibilitem a utilização destes suportes digitais na aula. Neste contexto foram desenvolvidas aplicações com o objetivo de incutir nos alunos o gosto pela Matemática e desta forma, através de um incremento da aprendizagem e, em consequência do raciocínio suscitado, possibilitar a resolução de problemas (Kissane, McConney, & Ho, 2015).

Para desenvolver conceitos de Estatística surgiu, por exemplo, o *Tinkerplots*, e várias folhas de cálculo resgatadas às empresas como, por exemplo, o *Excel* da Microsoft. Para o trabalho com a Geometria surgiram programas de geometria dinâmica, como o *Cabri Géomètre*, o *The Geometer's Sketchpad*, o *Cinderella*, ou ainda o *GeoGebra*, sendo que este último programa possibilitou o estabelecimento de conexões entre a Geometria, a Estatística, e as Funções e, mais recentemente, sofreu um incremento com a introdução

da realidade aumentada. Além destas aplicações, e com a rápida evolução verificada ao nível da utilização da internet, começaram a surgir múltiplos *sites* com diversas aplicações educacionais, quer de espectro mais largo, como por exemplo o *Moodle*, quer com pequenas aplicações que se podem utilizar na educação em geral como, por exemplo, o *Kahoot!*, ou na Matemática, o *Photomath*.

No meio de toda a tecnologia que foi sendo desenvolvida desde os finais do século XX, surgiram, na segunda metade da década de oitenta, nos países mais desenvolvidos, as calculadoras gráficas com capacidades numéricas, gráficas e estatísticas. Acompanhando o desenvolvimento do *software* e do *hardware* nos computadores, nomeadamente a introdução de sistemas algébricos, através de programas como o *Maple* ou o *Mathematica*, foram igualmente desenvolvidas aplicações para as calculadoras gráficas que permitiam a utilização do *cálculo algébrico simbólico* (CAS) por alunos (Kissane et al., 2015). E, se é verdade que tal utilização não é de todo relevante nas aulas portuguesas, tal aplicação é obrigatória em testes e exames finais na Dinamarca e na Noruega, por exemplo, sendo o seu uso permitido na Áustria e no estado de Vitória na Austrália e, na generalidade das províncias Germânicas (Heugl, 2017), bem como noutros países ditos desenvolvidos (Carvalho e Silva, Canavarro, Albuquerque, Mestre, Martins, Almiro, Santos, Gabriel, Seabra, & Correia, 2019).

A generalidade dos problemas de Matemática envolvendo álgebra e/ou cálculo que se colocam aos alunos no ensino secundário, nomeadamente factorização de polinómios, resolução de equações, ou cálculo diferencial, além de, na sua grande maioria, poderem ser resolvidos com técnicas usuais de manipulação algébrica, por vezes morosas e algo fastidiosas, podem igualmente ser resolvidos usando tecnologias com CAS, apresentando melhores resultados na compreensão conceptual (Handal, Cavanagh, Wood, & Petocz, 2011; Kramarski & Hirsch, 2003; Palmiter, 1991; Rakes, Valentine, McGatha, & Ronau, 2010).

Com a introdução do CAS nas aulas de Matemática pretende-se, tal como referem Heid, Thomas e Zbiek (2013), ajudar os alunos a desenvolver um *pensamento matemático versátil* que envolve pelo menos três tipos de competências:

- a possibilidade de troca entre sistemas representativos, nomeadamente entre a percepção de uma entidade matemática particular enquanto processo, e a percepção da entidade como um objeto;
- a exploração de esquemas de visualização, ligando-os a esquemas lógico/analíticos;
- a transposição entre representações, obtendo interações conceptuais e processuais com representações.

Ainda segundo Heid, Thomas e Zbiek (2013), o uso do CAS na investigação, quer na teoria, quer na prática, deve centrar-se nas interações entre conceitos e competências, na abordagem de conceitos em que se possa utilizar o CAS, e no pensamento e raciocínio requerido por este artefacto, sendo que o papel a desempenhar por esta ferramenta deve assumir e integrar as funções atribuídas à álgebra, como sejam: de generalização; de estudo da sua função; ajuda na resolução de problemas; o estudo de estruturas; e, uma ferramenta de modelação.

Tendo por base o programa de Matemática A do 12.º ano, nomeadamente os domínios sobre funções reais de variável real e trigonometria/funções trigonométricas, colocaram-se alunos deste ano de escolaridade a resolver vários tipos de tarefas matemáticas em aula,

utilizando diferentes processos, nomeadamente analíticos, gráficos e simbólicos, estes últimos recorrendo ao CAS, inserido nas calculadoras gráficas TI-*nspire*<sup>TM</sup> CX CAS.

## 2. REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1. GÉNESE INSTRUMENTAL E PROCESSOS COGNITIVOS

Atendendo a que se pretendeu estudar os processos que conduzem a uma apropriação da calculadora gráfica e do CAS, a teoria da atividade (TA), criada por Vygotsky, Leontiev e Luria, é uma das ferramentas de análise a considerar. Esta teoria constituiu-se como um esforço para a criação de uma psicologia que envolve aspetos sociais, históricos e culturais, assumindo o sistema com uma atividade coletiva, orientado por objetos e mediado por artefactos (Engeström, 2001).

A complexidade das relações existentes entre o uso do artefacto e a realização da tarefa permite formar aquilo a que usualmente se dá o nome de potencial semiótico do artefacto em relação à tarefa. A análise do potencial semiótico de um determinado artefacto tecnológico, segundo Bussi e Mariotti (2008), envolve duas observações: entre o artefacto e os signos pessoais que emergem do seu uso; e entre o artefacto e os signos matemáticos evocados pelo seu uso e reconhecíveis como sendo matemática por um especialista.

A abordagem instrumental estuda as especificidades existentes no artefacto e no instrumento, bem como os processos que envolvem a transformação do artefacto em instrumento, designada por génese instrumental (Rabardel, 1995). Esta ocorre quando o utilizador se apropria do artefacto, desenvolvendo esquemas mentais que envolvem capacidades de utilização eficazes e mobiliza conhecimentos de forma a tornar útil o artefacto.

A génese instrumental, para Rabardel (1995), é um processo descrito como tendo dois sentidos: um movimento de instrumentalização orientado para o artefacto (o artefacto é adaptado pelo sujeito aos seus hábitos e métodos de trabalho) e um movimento de instrumentação centrado no sujeito (o artefacto contribui para estruturar a atividade do utilizador).

Para Domingos (2003), interpretar um conceito implica encarar essa entidade com um determinado potencial, que se manifesta através de uma sequência de ações.

Neste contexto são analisadas duas teorias que se debruçam sobre a construção de conceitos matemáticos, a teoria da Reificação, desenvolvida por Anna Sfard, segundo a qual os conceitos matemáticos podem ser concebidos de duas formas: estruturalmente, como objetos, e operacionalmente, como processos (Sfard, 1991; Sfard & Linchevski, 1994), defendendo que as duas abordagens são complementares, uma vez que se referem a visões diferentes da mesma situação pelo que são necessárias e dependentes uma da outra.

Segundo Sfard (1991), e embora a aprendizagem não se processe de igual forma em todos os indivíduos, é possível identificar nos diferentes processos de aprendizagem três estádios ou fases de estruturação, que apelida de *interiorização*, *condensação* e *reificação*, definidos em seguida:

- a primeira fase, de *interiorização*, ocorre quando o sujeito se familiariza com os processos que, eventualmente, irão dar origem a um novo conceito (por exemplo, no estudo de funções, ocorre na manipulação de expressões algébricas, quando o

aluno adquire a noção do conceito de variável, quer independente, quer dependente, ao substituir a variável independente na expressão analítica da função por um ou mais valores);

- a segunda fase, de *condensação*, corresponde ao momento em que o indivíduo compreende as sequências dos processos, desenvolvendo a capacidade de pensar sobre um dado processo como um todo (por exemplo, no estudo de funções, corresponde à etapa em que o aluno apresenta facilidade em alternar entre diferentes representações), para Sfard este constitui o momento crucial na construção do conceito;
- a terceira e última fase, de *reificação*, verifica-se quando o aluno consegue “ver” uma nova entidade matemática como um objeto completo e autónomo, sob a forma de um todo integrado, já afastado dos processos que lhe deram origem.

Assim que o conceito se encontra reificado, este pode servir de base à formação de novos conceitos de nível superior. O aluno, ao tomar consciência da existência de um novo objeto matemático, pode iniciar um novo ciclo de aprendizagem, reiniciando outro processo, através da fase de interiorização, que culminará, em princípio, com a reificação desta nova entidade (Sfard, 1991). O esquema da Figura 1 pretende ilustrar a forma como os novos conceitos se formam.

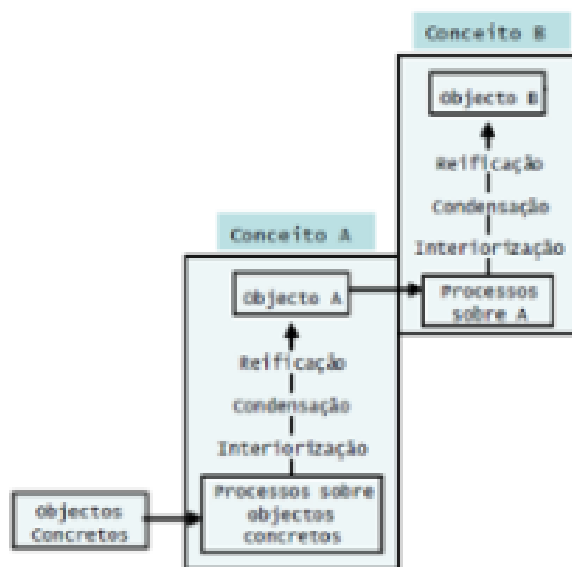


Figura 1. Modelo de formação de conceitos, segundo a teoria da Reificação.

Fonte: Sfard, 1991, p. 22.

A segunda teoria é a teoria *APOS* (*Actions, Process, Objects, Schemes*), desenvolvida inicialmente por Ed Dubinsky, que consiste numa teoria construtivista de aprendizagem cujo objetivo é compreender os mecanismos de uma abstração reflexiva, introduzidos por Piaget, para descrever o desenvolvimento do pensamento lógico de conceitos tais como aritmética, proporção e medida, estendendo Dubinsky esta ideia a conceitos matemáticos

avançados (Dubinsky, 1991; Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktac, Roa, Trigueros, & Weller, 2014).

A teoria *APOS* refere que se podem considerar cinco tipos diferentes de construção do pensamento matemático avançado, descritos igualmente por Piaget no desenvolvimento do raciocínio lógico de uma criança:

- *interiorização*, que corresponde à tradução de uma sucessão de ações materiais num sistema de operações interiorizada (por exemplo, a comutatividade da adição);
- *coordenação*, aparecendo em situações que envolvem a composição ou coordenação de dois ou mais processos para construir um novo;
- *capsular (encapsulation)*, conversão de um processo (dinâmico) num objeto (estático) (por exemplo, multiplicação, proporção e variação da variação);
- *generalização*, obtém-se quando um indivíduo consegue aplicar um esquema pré-existente a uma vasta coleção de fenómenos;
- *reversibilidade*, quando o sujeito consegue pensar num esquema ao contrário, isto é, consegue construir um esquema que consiste em inverter o processo original.

Em resumo, a teoria *APOS* pode e deve ser utilizada como forma de dar resposta à aprendizagem de conceitos matemáticos avançados, apoiada na implementação de metodologias didáticas adequadas para que o ensino dessas noções se concretize.

## 2.2. CÁLCULO ALGÉBRICO SIMBÓLICO (CAS)

O CAS é entendido atualmente como a utilização de processos relacionados com sistemas de *software* que permitem efetuar manipulação simbólica, podendo estar eventualmente associado a representações gráficas, numéricas e/ou tabelares, assim como à exploração de ligações a folhas de cálculo e a programas de geometria dinâmica.

A força do CAS está na forma como permite que os alunos pensem e raciocinem sobre as diversas conexões da matemática e na forma como formulam a sua argumentação, sendo que tal tem por suporte os objetos e as ferramentas utilizadas.

Existem muitos fatores intrínsecos que influenciam a decisão do professor no sentido de usar ou não a tecnologia, nomeadamente: as orientações dos programas oficiais; a génese instrumental dos artefactos; a perceção da natureza do conhecimento matemático e a forma como deve ser ensinado; o conteúdo do conhecimento matemático; e o seu conhecimento matemático para ensinar (Heid et al., 2013).

A utilização do CAS no ensino requer, por parte dos professores, a aquisição de algumas competências, sendo que a forma de utilizar o CAS na aula pode revestir-se de muitas características, quer por uma larga maioria não concordar com o seu uso nos testes e exames, quer por alguns matemáticos considerarem que a sua utilização pode prejudicar os alunos no entendimento que fazem da Matemática.

No entanto, tal como destaca Lagrange (2005), as diversas possibilidades de utilização do CAS, tendo por base as técnicas pré-existentes, permitem a criação de novas técnicas que os alunos poderão desenvolver, criando assim uma ponte entre tarefas e teoria, sendo

este certamente um aspeto que conduz a uma reflexão maior sobre as competências desenvolvidas versus conhecimento gerado.

Atendendo a Lokar e Lokar (2000), ao realizar tarefas para a aula, bem como questões para testes escritos, é possível distinguir cinco tipos de categorias principais de perguntas e respetivo grau de envolvimento com o CAS, sendo que, na prática, pode acontecer que uma mesma questão se encaixe em mais do que uma categoria, atendendo ao processo que se utiliza na sua resolução. Assim, tem-se:

*T0: Exercícios em que a utilização do CAS é mínima ou inexistente* – neste tipo de perguntas, o simples facto de se utilizar escrita simbólica conduz a um maior gasto de tempo do que aquele que seria necessário se a resolução fosse efetuada usando somente manipulação algébrica.

*T1: Exercícios tradicionais* – são exercícios que se conseguem resolver, quer recorrendo a técnicas de manipulação algébrica, quer usando manipulação simbólica com a calculadora, mas que, no entanto, podem ser resolvidos de forma muito rápida recorrendo ao CAS.

*T2: Exercícios que servem para testar a capacidade de utilização do CAS.*

*T3: Exercícios que resultam de um enunciado tradicional* – são exercícios que têm na base um problema simples e que, através, por exemplo, da introdução de parâmetros, podem ser facilmente resolvidos recorrendo ao CAS.

*T4: Exercícios que têm uma resolução difícil ou mesmo impossível utilizando exclusivamente técnicas de manipulação algébrica* – neste tipo de questões o uso de técnicas de manipulação algébrica é complexa ou mesmo inviável, sendo que o recurso ao CAS pode constituir-se como uma opção possível.

Em síntese, o CAS deve ser visto como um complemento a técnicas de manipulação algébrica utilizadas na álgebra e no cálculo, permitindo essencialmente um menor gasto de tempo para o aluno e possibilitando que este desenvolva processos de raciocínio criativos que o conduzam à resolução de problemas matemáticos. A escolha das tarefas a desenvolver deve ser feita com critério, não se cingindo a exercícios ditos tradicionais cujo CAS pouco ou nada acrescenta. O aluno deve ser submetido a tarefas que testem a verdadeira dimensão do CAS e sendo assim é necessário atender à génese instrumental suscitada pela utilização da calculadora gráfica com CAS.

### **3. METODOLOGIA, CONTEXTO E INTERVENIENTES**

Neste estudo seguiu-se uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994), com a pretensão de estudar os tipos de conexões estabelecidas pelos alunos com a introdução do CAS em aula.

No estudo mais amplo, no qual esta comunicação se insere, recorreu-se a uma metodologia designada por *Investigação Baseada em Design (IBD)*<sup>24</sup>. A introdução deste tipo de metodologia permitiu um maior conhecimento sobre os processos de aprendizagem, no sentido em que foram efetuadas análises simultâneas das tarefas e dos problemas colocados aos sujeitos do estudo (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble,

---

<sup>24</sup> *Design Based Research, Design Research* ou *Design Experiments*. A designação de *Investigação Baseada em Design (IBD)* foi introduzida por Ponte, Carvalho, Mata-Pereira e Quaresma (2016).

2003). Nesta comunicação pretendeu-se efetuar uma análise mais interpretativa das contribuições dos alunos.

O trabalho de campo deste estudo foi efetuado nos 1.º e 2.º períodos do ano letivo de 2018/19, em três turmas do curso de Ciências e Tecnologias, que apelidaremos de turmas A, B e C, de uma escola secundária da zona de Lisboa, do 12.º ano, num total de 18 sessões, seis por turma, tendo-se solicitado aos alunos dessas turmas que formassem, à sua escolha, grupos de 4 ou 5 elementos com o objetivo de trabalharem diversas tarefas sobre cálculo diferencial com funções reais de variável real e com trigonometria/funções trigonométricas, recorrendo a técnicas de manipulação algébrica e à utilização de calculadoras gráficas com CAS, utilizando para tal processos numéricos, gráficos e/ou simbólicos.

O estudo incidiu em 83 alunos, 43 do género masculino e 40 do género feminino, que se encontravam a frequentar a disciplina de Matemática A, no final do 1.º período de 2018/19, nas três turmas. A média de idades, no princípio do ano letivo, era de 17 anos.

Em todas as 18 sessões de introdução do CAS houve lugar à recolha de documentos escritos produzidos pelos alunos, bem como à coleta dos ecrãs produzidos nas calculadoras gráficas com CAS, quer guardando os ficheiros de trabalho, quer copiando alguns ecrãs das calculadoras enquanto os alunos se encontravam a trabalhar nas suas mesas, através da utilização da aplicação TI-Navigator™. Os discursos apresentados nesta comunicação foram registados no local, em papel, e pontualmente áudio-gravados.

Esta comunicação tem por base parte do trabalho efetuado nas 1.ª e 6.ª sessões de trabalho, em cada uma das três turmas.

## 4. ANÁLISE DE DADOS

### 4.1. PRIMEIROS PASSOS NA IMPLEMENTAÇÃO DO CAS

Na aplicação das tarefas propostas na sessão inicial, quando os alunos optavam por uma resolução com recurso à calculadora com CAS, surgiram alguns símbolos ou instruções que os alunos não estavam normalmente habituados a utilizar, como o símbolo “[ ]”, ou o comando *solve()*. Para cada um desses elementos e no momento em que foram objeto de utilização, foi dada uma sugestão de abordagem no próprio texto da atividade, como se pode verificar na Figura 2, e eventualmente foram dadas mais algumas indicações junto dos grupos de trabalho.

Considerando  $x = 1,2$  e  $y = -2$ , calcula o valor das expressões seguintes e comprova o valor obtido utilizando processos simbólicos:

a)  $4 \cdot x - 3 \cdot y$

b)  $\pi \cdot x^2 + y \cdot \pi$  (valor exato e com 2 c.d.)

Na calculadora: a)  $4 \cdot x - 3 \cdot y \mid x = 1,2 \text{ and } y = -2$

Figura 2. Tarefa proposta na sessão inicial de implementação do CAS\_I.

Apresenta-se em seguida o diálogo efetuado entre dois alunos do grupo 1A<sup>25</sup>, alunos alunoA\_1 e alunoA\_2, a propósito da alínea a) apresentada na figura 2:

**AlunoA\_1**<sup>26</sup>:

Onde se encontra a instrução com o traço vertical?

**AlunoA\_2**: Olha aqui. Está a azul, em cima da tecla do igual.

**AlunoA\_1**: Pois está. Temos que carregar primeiro na tecla ctrl. É isso, não é?

**AlunoA\_2**: Tenta!!! [pausa] Insere o resto da instrução.

**AlunoA\_1**: E o *and*? Onde está?

**AlunoA\_2**: Tenta escrever... [pausa] Resultou, deu 10,8!!! (A\_1<sup>27</sup>)

Como se verifica pela aplicação da tarefa apresentada na Figura 2, os alunos referidos no diálogo encontram-se numa fase de testar a calculadora com CAS de modo a conseguirem dominar o processo de génese instrumental. De referir igualmente que os menus apresentados nesta calculadora não são muito diferentes dos utilizados no modelo semelhante sem CAS que a generalidade dos alunos incluídos na experiência possuía. A grande dificuldade enfrentada pelos alunos nesta fase prendeu-se com o facto de, na sua maioria, estes estarem habituados a utilizar a calculadora para efetuar representações numéricas, bem mais simples, ou representações gráficas.

Outra das tarefas proposta aos alunos na fase inicial encontra-se na Figura 3, na qual se pretendia que os alunos obtivessem o conjunto-solução de equações e inequações, usando processos analíticos e simbólicos, neste último caso recorrendo à instrução *solve()*.

Determina o conjunto solução das condições seguintes, em ordem à variável indicada, usando papel e lápis, e posteriormente, com a calculadora, confirma o resultado obtido:

**a)**  $\frac{1}{x} + \frac{3}{x+2} = 2$  ( $x$ )

**b)**  $t \geq \frac{4}{t}$  ( $t$ )

Na calculadora: a) *solve*( $\frac{1}{x} + \frac{3}{x+2} = 2, x$ )

Figura 3. Tarefa proposta na sessão inicial de implementação do CAS\_II.

Relativamente à questão apresentada na Figura 3, alínea a), resolvida pelo grupo 3A, apresenta-se o diálogo efetuado entre o alunoA\_3 e a alunaA\_4, acompanhado de perto pelo investigador:

**AlunoA\_3**: Onde está o *solve*?

**AlunaA\_4**: Deixa ver. [pausa] Talvez na tecla *menu*.

**AlunoA\_3**: Será? Não encontro.

<sup>25</sup> Grupo 1 da turma A. Na expressão “grupo nT”, n designa o grupo, de 1 a 7, e T a turma, A, B ou C.

<sup>26</sup> Quando é feita uma referência a um determinado aluno neste texto esta tem uma determinada sequência que respeita a ordem com que esse aluno é referido no texto. Assim, tal referência virá na forma AlunoT\_n, com T ∈ {A, B, C}, n ∈ {1, ..., 30}.

<sup>27</sup> Aula 1 de implementação do CAS na turma A. Na expressão “T\_n”, T designa a turma e n a aula.



- AlunaA\_4:** Talvez esteja no *Cálculo*... [pausa] Não.
- AlunoA\_3:** Tenta em *Álgebra*.
- Investigador:** *solve* é a instrução equivalente a *Resolver*.
- AlunaA\_4:** Coloco *Resolver*?
- Investigador:** Tenta...
- AlunoA\_3:** Deixa ver. [o aluno coloca a instrução *Resolver*] Aparece *solve* no visor.
- AlunaA\_4:** Será que é assim? [mostra ao professor a instrução sem o  $x$  e carrega em *enter*]
- AlunoA\_3:** Não resultou. [mostra um ar admirado]
- Investigador:** Falta a indicação da variável  $x$ , no final.
- AlunoA\_3:** Pois é. [coloca a variável]
- AlunaA\_4:** As soluções são -1 e 1. E está aqui um triângulo a amarelo, no início da linha. [aponta para a calculadora]
- AlunoA\_3:** O que quer isto dizer? [dirigindo a pergunta ao professor] (A\_1)

Como se verifica pelo diálogo apresentado, existe aqui um processo de instrumentalização orientado para o artefacto, sendo que a calculadora em geral e, o CAS em particular, contribuíram para a estruturação da atividade dos utilizadores.

Na sequência desta pergunta, efetuada pelo aluno A\_3, o investigador, dirigindo-se a toda a turma e apontando para o visor da calculadora dos alunos citados, que se encontrava projetado no quadro, por via da aplicação TI-Navigator<sup>TM</sup>, afirmou que tal facto se fica a dever ao domínio da expressão não ser  $\mathbb{R}$ .

- Investigador:** Reparem que o domínio da expressão é  $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$  e cada uma das soluções, -1 e 1, verificam o domínio.
- AlunoA\_5:** E se o domínio fosse  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ ?
- Investigador:** O que acham que aconteceria?
- AlunoA\_6:** Seria somente o 1?!
- Investigador:** Muito bem. (A\_1)

Neste último diálogo entre a turma e o investigador constata-se que os alunos ultrapassaram a fase capsular e conseguiram proceder, quer a uma generalização, quer à reversão do processo, estabelecendo diversas conexões entre o conjunto-solução e as condições possíveis, o qual só foi possível obter por os alunos recorrerem à abstração.

Relativamente à alínea b) da questão apresentada na Figura 3, verificou-se que muitos dos alunos não efetuaram de forma inteiramente correta a manipulação algébrica da expressão assinalada, sendo que, acrescido ao facto de terem retirado os denominadores, apresentaram um processo de resolução para a inequação resultante ( $t^2 \geq 4$ ) como se de uma equação quadrática se tratasse.

A esses alunos foi sugerido pelo investigador que colocassem a expressão inicial na calculadora e indicassem o conjunto-solução, devendo depois resolver a inequação utilizando processos analíticos, sem retirar os denominadores e recorrendo a um quadro de sinais. Verificou neste caso que, relativamente à resolução algébrica de inequações racionais, o processo de resolução ainda não se encontrava suficientemente reificado.

De qualquer das formas o objetivo pretendido era que os alunos efetuassem conexões entre as diversas representações utilizadas na resolução da inequação, nomeadamente a manipulação algébrica e a resolução simbólica, com recurso à calculadora, e tal objetivo foi atingido no caso do grupo 2A. O resultado obtido na calculadora por este grupo encontra-se expresso na Figura 4.



Figura 4. Resolução simbólica da alínea b), grupo 2A (A\_1).

A perfeita interiorização nos alunos da génese instrumental dos artefactos, calculadora e CAS, fez com que a manipulação simbólica acabasse por criar nos alunos a necessidade de recorrer à manipulação algébrica para estabelecer a conexão entre os resultados obtidos. O procedimento analítico correto, utilizado posteriormente pelos alunos desse mesmo grupo, os quais falharam uma primeira tentativa de resolução, está na Figura 5, sendo que, como se pode constatar, onde se encontra  $t \leq 2$ , deveria estar  $t \geq 2$ .

e)  $t \geq \frac{4}{t} \Rightarrow t - \frac{4}{t} \geq 0 \Rightarrow \frac{t^2 - 4}{t} \geq 0$

$t = 0$   
 $t^2 - 4 = 0 \Rightarrow t = \sqrt{4} \vee t = -\sqrt{4} \Rightarrow t = 2 \vee t = -2$

|           |           |              |     |     |              |
|-----------|-----------|--------------|-----|-----|--------------|
|           | $-\infty$ | $-2$         | $0$ | $2$ | $+\infty$    |
| $t^2 - 4$ | +         | 0            | -   | -   | 0            |
| $t$       | -         | -            | 0   | +   | +            |
| Q         | -         | <del>+</del> | x   | -   | <del>+</del> |

$-2 \leq t < 0$   
 $t \leq 2$

Figura 5. Resolução analítica da alínea b), grupo 2A (A\_1).

Ainda no decurso desta abordagem inicial e no sentido de estabelecer conexões entre os três procedimentos possíveis de efetuar com a calculadora gráfica na resolução de condições, nomeadamente processos analíticos, gráficos e, simbólicos, foi solicitado aos alunos que resolvessem a equação  $-x^2 + 4x - 3 = 2 - |x|$  utilizando os três processos citados (Figura 6).

Considera a equação  $-x^2 + 4x - 3 = 2 - |x|$  .  
 Determina o conjunto-solução utilizando:  
 a) processos exclusivamente analíticos;  
 b) gráficos, recorrendo à calculadora;  
 c) o comando solve() na calculadora.  
 Nota: Na questão b), apresenta valores arredondados às centésimas.  
 Na calculadora: c) solve( $-x^2 + 4 \cdot x - 3 = 2 - |x|$ ,  $x$ )

Figura 6. Tarefa proposta na sessão inicial de implementação do CAS\_III.

Apresenta-se em seguida o diálogo tido entre a alunaB\_1 e a alunaB\_2, do grupo 7B, com o objetivo de obterem uma resolução por via analítica da questão apresentada na Figura 6.

- AlunaB\_1:** O que temos que fazer?
- AlunaB\_2:** Talvez isolar o módulo passando-o para o primeiro membro. O que achas?
- AlunaB\_1:** Acho que sim. Fica igual a  $x^2 - 4x + 5$
- AlunaB\_2:** Concordo. [pausa] A partir daqui basta colocar  $x$  igual à expressão que está no segundo membro ou ao seu simétrico.
- AlunaB\_1:** E depois é só aplicar a fórmula resolvente nas duas expressões. (B\_1)

Estes comentários tiveram como resultado a resolução que se encontra na Figura 7.

$$\begin{aligned}
 & -x^2 + 4x - 3 = 2 - |x| \\
 & a) |x| = x^2 - 4x + 3 + 2 \quad \text{e} \quad |x| \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \\
 & (-x^2 + 4x - 3 - 2 = x \wedge x \geq 0) \vee (-x^2 + 4x - 3 - 2 = -x \wedge x < 0) \quad \text{e} \\
 & \text{e} \quad (-x^2 + 3x - 5 = 0 \wedge x \geq 0) \vee (-x^2 + 5x - 5 = 0 \wedge x < 0) \quad \text{e} \\
 & \text{e} \quad x = 0 \quad \vee \quad (x^2 - 5x + 5 = 0 \wedge x < 0) \quad \text{e} \\
 & \text{e} \quad x = 0 \quad \vee \quad \left( x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 20}}{2} \right) \quad \text{e} \\
 & \text{e} \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad x = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad x = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \\
 & \text{c.s.} \quad \left\{ \frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right\}
 \end{aligned}$$

Figura 7. Resolução da alínea a), grupo 7B (B\_1).

De realçar o cuidado colocado por estas duas alunas e o seu grupo na distinção efetuada para o sinal de  $x$ , resultando numa resolução analítica com sucesso.

Este grupo, 7B, efetuou igualmente uma resolução gráfica recorrendo à calculadora gráfica com CAS, que foi posteriormente passada para a folha de respostas pelo grupo e que se encontra na Figura 8.

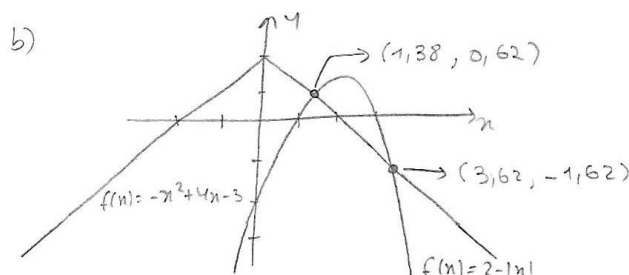


Figura 8. Resolução da alínea b), grupo 7B (B\_1).

Nesta resolução são destacadas as coordenadas dos pontos de interseção entre a função definida pela expressão  $2 - |x|$  e a função definida por  $-x^2 + 4x - 3$ , não sendo apresentada uma conclusão, nomeadamente não é referido o conjunto-solução. Este grupo apresentou igualmente uma resposta à alínea c) que se encontra na Figura 9.

Figura 9. Resolução da alínea c), grupo 7B (B\_1).

Embora nas resoluções apresentadas pelos alunos do grupo 7B não seja claro que estes tenham estabelecido conexões entre os diferentes processos de resolução, nomeadamente entre a manipulação algébrica, a representação gráfica das funções e a manipulação simbólica, os alunos foram questionados posteriormente e verificou-se que estas conexões foram efetivamente estabelecidas.

Em suma, a utilização do CAS, quer a manipulação simbólica, quer a utilização de gráficos, permite potenciar a utilização da manipulação algébrica e vice-versa. Aparentemente, os alunos efetuaram com maior segurança e fiabilidade manipulações algébricas quando tinham por perto a possibilidade de utilizar o CAS.

#### 4.2. FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

A tarefa proposta na Figura 10, sobre equações trigonométricas e continuidade, foi aplicada aos alunos na 6.<sup>a</sup> e última sessão de implementação do CAS.

Tendo em conta que os alunos já tinham tido previamente cinco sessões de implementação do CAS, em que as tarefas solicitadas requeriam que fosse efetuada manipulação simbólica com recurso à calculadora gráfica com CAS, na tarefa apresentada na Figura 10 pretendia-se verificar se os alunos conseguiam utilizar manipulação algébrica sem recorrer previamente à manipulação simbólica.

Considera a função  $g$ , de domínio  $[-2, 2]$ , definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) \cdot \cos(\pi x) & \text{se } -2 \leq x \leq 1 \\ \frac{2x^2 - x - 1}{\sin(1-x)} & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Recorrendo a processos analíticos, resolve os dois itens seguintes:

- a) Determina, em  $[-2, 1]$ , o conjunto-solução da equação  $g(x) = -\frac{1}{4}$   
 b) Averigua se  $g$  é contínua em  $x = 1$

Figura 10. Tarefa de equações trigonométricas e continuidade.

Verificou-se que todos os grupos, nas três turmas, seguiram as instruções apresentadas na questão, tendo usado processos exclusivamente analíticos para resolver ambas as alíneas. Nas Figuras 11 e 12 apresentam-se as resoluções elaboradas pelo grupo 3A, alíneas a) e b), respetivamente.

Como se verifica, na resolução da alínea a), os alunos recorreram à fórmula do seno da duplicação e, na alínea b), à definição de função contínua num ponto.

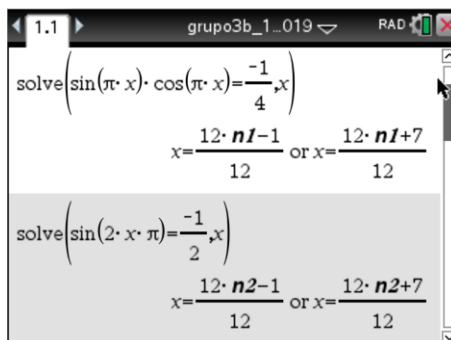
2- a)  $g(x) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin(\pi x) \times \cos(\pi x) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow 2 \sin(\pi x) \cos(\pi x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \sin(2\pi x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(2\pi x) = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 2\pi x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2\pi x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$   
 $\Leftrightarrow 2x = -\frac{1}{6} + 2k \vee 2x = -\frac{5}{6} + 2k, k \in \mathbb{Z}$   
 $\Leftrightarrow x = -\frac{1}{12} + k \vee x = -\frac{5}{12} + k, k \in \mathbb{Z}$   
 $k=0 \rightarrow x = -\frac{1}{12} \checkmark \quad x = -\frac{5}{12} \checkmark \quad \text{CS} = \left\{ -\frac{17}{12}, -\frac{13}{12}, -\frac{5}{12}, -\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, \frac{11}{12} \right\}$   
 $k=1 \rightarrow x = \frac{11}{12} \checkmark \quad x = \frac{7}{12} \checkmark$   
 $k=-1 \rightarrow x = -\frac{13}{12} \checkmark \quad x = -\frac{17}{12} \checkmark$

Figura 11. Resolução analítica da alínea a), grupo 3A (A\_6).

$$\begin{aligned}
 & b) \lim_{x \rightarrow 1^-} \sin(\pi x) \times \cos(\pi x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sin(\pi x) \times \lim_{x \rightarrow 1^-} \cos(\pi x) = \\
 & = \sin(\pi) \times \cos(\pi) = 0 \times (-1) = 0 \\
 & \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - x - 1}{\sin(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(2x+1)}{\sin(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(1-x)(2x+1)}{\sin(1-x)} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1-x)}{\sin(1-x)} \times \lim_{x \rightarrow 1^+} (-(2x+1)) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\sin(y)} \times \lim_{x \rightarrow 1^+} (-2x-1) = \\
 & = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-2x-1) = -3 \\
 & \begin{array}{c|ccc} & 2 & -1 & -1 \\ \hline 1 & & 2 & 1 \\ \hline & 2 & 1 & 0 \end{array} \\
 & g(1) = \sin \pi \times \cos \pi = 0 \\
 & \therefore \text{A função } g \text{ não é contínua em } x=1 \text{ pois } \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)
 \end{aligned}$$

Figura 12. Resolução analítica da alínea b), grupo 3A (A\_6).

Verificou-se igualmente, e apesar do enunciado apresentado, que a generalidade dos grupos não se limitou a cumprir o pretendido pois, como se constatou pela análise dos ficheiros encontrados nas calculadoras, por exemplo o grupo 3A teve necessidade de confirmar os resultados obtidos recorrendo à calculadora com CAS (Figura 13), verificando a validade da solução obtida na resposta dada à alínea a) através da obtenção de duas expressões gerais equivalentes, uma para as soluções da equação descrita no enunciado e outra para as soluções de uma equação equivalente, por aplicação da fórmula do seno da duplicação.



$$\begin{aligned}
 & \text{solve} \left( \sin(\pi \cdot x) \cdot \cos(\pi \cdot x) = \frac{-1}{4} \cdot x \right) \\
 & \quad x = \frac{12 \cdot n1 - 1}{12} \text{ or } x = \frac{12 \cdot n1 + 7}{12} \\
 & \text{solve} \left( \sin(2 \cdot x \cdot \pi) = \frac{-1}{2} \cdot x \right) \\
 & \quad x = \frac{12 \cdot n2 - 1}{12} \text{ or } x = \frac{12 \cdot n2 + 7}{12}
 \end{aligned}$$

Figura 13. Resolução simbólica da alínea a), grupo 3A (A\_6).

Apresenta-se, em seguida, o diálogo tido entre o investigador e dois alunos deste grupo, o alunoA\_3 e a alunaA\_4:

- Investigador:** Como sabem que as soluções obtidas são equivalentes? [dirigindo explicitamente a sua pergunta para os dois alunos alunoA\_3 e alunaA\_4]
- AlunaA\_4:** Utilizámos  $k$  na resolução analítica e a calculadora utilizou  $n1$  e  $n2$ .
- AlunoA\_3:** As soluções gerais apresentadas na calculadora são semelhantes...

**Investigador:** Sim? Como sabem?

**AlunaA\_4:** A primeira expressão geral apresentada na calculadora é equivalente a  $x = n1 - \frac{1}{12}$  [aponta para o ecrã, para a primeira expressão obtida na calculadora, exposta na Figura 13], a qual é equivalente à solução obtida por nós com k's.

**AlunoA\_3:** E a segunda expressão [referindo-se a  $x = \frac{12 \cdot n1 + 7}{12}$ ] é equivalente a  $x = -\frac{5}{12} + k$ . (A\_6)

Como se verifica pelo diálogo apresentado com estes dois alunos estes conseguem estabelecer a conexão entre as soluções obtidas por manipulação algébrica e as obtidas recorrendo à manipulação simbólica na calculadora gráfica com CAS. O papel desempenhado pelo CAS é determinante pois permitiu que os alunos refletissem sobre o resultado obtido, nomeadamente sobre as diversas representações possíveis da solução geral.

À semelhança do grupo 3A, e relativamente à questão b), apresentada na Figura 10, o grupo 7C, depois de efetuar a resolução analítica da alínea b), efetuou igualmente a resolução simbólica da mesma questão, na qual, como se pode observar na Figura 14, se encontram os cálculos dos limites da função  $g$ , à direita e à esquerda de 1, respetivamente, sendo que esta resolução pode ser classificada como sendo do tipo T1.

A resolução desta alínea, pelo grupo 7C, permite verificar novamente que os alunos são capazes de estabelecer a conexão entre as diferentes manipulações, algébrica e simbólica, sendo que o CAS funciona aqui como suporte para uma perfeita interiorização do conceito de continuidade de funções, neste caso funções trigonométricas.

The image shows a screenshot of a CAS calculator interface. At the top, there are navigation tabs labeled '1.1', '2.1', and '2.2', and a window title 'grupo7b\_1\_019'. The main display area shows two limit calculations. The first is  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 \cdot x^2 - x - 1}{\sin(1-x)}$  with the result '-3'. The second is  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (\sin(\pi \cdot x) \cdot \cos(\pi \cdot x))$  with the result '0'. The interface includes a 'RAD' indicator and a scroll bar on the right.

Figura 14. Resolução simbólica da alínea b), grupo 7C (C\_6).

O resultado obtido com a calculadora pelos alunos do grupo 7C permitiu, em particular, que estes alunos verificassem e reforçassem que a função dada não é contínua em  $x = 1$ , tal como o grupo 3A tinha concluído utilizando manipulação algébrica.

## 5. CONCLUSÕES

Pretendeu-se com este estudo analisar o processo de génese instrumental e que tipo de conexões se estabelecem quando é introduzido o *Cálculo Algébrico Simbólico* (CAS) na disciplina de Matemática A, no 12.º ano, recorrendo à utilização de calculadoras gráficas com CAS.

Os resultados obtidos na análise das tarefas propostas, essencialmente do tipo T0, T1 e T2, permitem perceber uma perfeita integração da calculadora gráfica com CAS,

nomeadamente um bom domínio instrumental dos dois artefactos, calculadora e CAS, sendo que a utilização da calculadora com estas características possibilitou a resolução das questões apresentadas utilizando manipulação simbólica e gráfica, processos esses que complementados com a utilização da manipulação algébrica permitiram que os alunos reificassem e consolidassem o seu conhecimento.

A utilização destes artefactos conduziu a que os alunos estabelecessem conexões entre os diversos tipos de representações para resolver uma mesma questão e desta forma adquirissem um conhecimento matemático mais consistente e sólido, nomeadamente por conseguirem atingir a fase capsular, isto é, conseguirem converter um processo num objeto, com uma consequente aplicação na generalidade dos casos.

O CAS possibilitou que os alunos executassem álgebra e cálculo de uma forma mais abrangente, pois tiveram que dominar alguma da simbologia inerente a estes dois campos da matemática, quer esta fosse de cariz eminentemente algébrico, como seja, por exemplo, o recurso às fórmulas trigonométricas, quer esta fosse de cariz mais analítico, como, por exemplo, o recurso ao estudo da continuidade de funções trigonométricas.

A utilização do CAS, com consequente interiorização de todos os processos inerentes à génese instrumental, fez com que cálculos que aparentemente são complexos para a generalidade dos alunos neste nível de ensino fossem vistos como algo mais simples, nomeadamente pela celeridade com que muitos desses cálculos foram corretamente efetuados, desmistificando assim o possível “medo” de efetuar um problema ou exercício que envolvesse Álgebra ou Análise.

### **AGRADECIMENTOS**

Este trabalho foi apoiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, I. P., no contexto do projeto PTDC/CED-EDG/32422/2017.

São devidos igualmente dois agradecimentos muito especiais, um à empresa TEXAS INSTRUMENTS, pela cedência do material necessário, e outro à escola onde decorreu o estudo, na pessoa do seu diretor.

### **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa, S., Trigueros, F., & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Nova Iorque: Springer.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.
- Bussi, M., & Mariotti, M. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. Em L. English, D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 746-783). New York: Taylor and Francis.
- Carvalho e Silva, J., Canavarro, A., Albuquerque, C., Mestre, C., Martins, H., Almiro, J., Santos, L., Gabriel, L., Seabra, O., & Correia, P., (2019). *Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática* (1.<sup>a</sup> versão do relatório produzido pelo Grupo de Trabalho de Matemática). Lisboa: DGE.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9–13.



- Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados – A Matemática no início do superior*. Tese de Doutoramento. Lisboa: FCT-UNL.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.
- Engeström, Y. (2001). Expansive learning at work: Toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, 14(1), 133-156.
- Handal, B., Cavanagh, M., Wood, L., & Petocz, P. (2011). Factors leading to the adoption of a learning technology: The case of graphics calculators. *Australasian Journal of Educational Technology*, 27(2), 343-360.
- Heid, M., Thomas, M., & Zbiek, R. (2013). How might computer algebra systems change the role of algebra in the school curriculum? In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung. (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 597-641). New York: Springer.
- Heugl, H. (2017). *The use of CAS in exams*. A lecture at the T3 conference in Chicago.
- Kissane, B., McConney, A., & Ho, K. F. (2015). *Review of the use of technology in Mathematics education and the related use of CAS calculators in external examinations and in post school tertiary education settings*. Perth, WA: School Curriculum and Standards Authority.
- Kramarski, B., & Hirsch, C. (2003). Using computer algebra systems in mathematical classrooms. *Journal of Computer Assisted Learning*, 19(1), 35-45. doi: 10.1046/j.0266-4909.2003.00004.x
- Lagrange, J. (2005). Using symbolic calculators to study mathematics. In D. Guin, K. Ruthven, & L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators: Turning a computational device into a mathematical instrument* (pp. 113-135). Boston: Springer.
- Lokar, M., & Lokar, M. (2000). Exam questions and basic skills in technology-supported mathematics teaching. In V. Kokol-Voljc et al. (Eds.), *Final Matura Examination – Matura in the View of CAS* (pp. 133-136). Hagenburg, Áustria.
- Palmiter, J. (1991). Effects of computer algebra systems on concept and skill acquisition in calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(2), 151-156.
- Ponte, J., Carvalho, R., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2016). Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. *Revista Quadrante*, 25(2), 77-98.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: Une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.
- Rakes, C., Valentine, J., McGatha, M., & Ronau, R. (2010). Methods of instructional improvement in algebra: A systematic review and meta-analysis. *Review of Educational Research*, 80(3), 372-400.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228.