UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA

Marcio Kléos Freire Pereira

EXTENSÕES DE PRIMEIRA ORDEM PARA A LÓGICA DO ANÚNCIO PÚBLICO

Florianópolis

2015

Marcio Kléos Freire Pereira

EXTENSÕES DE PRIMEIRA ORDEM PARA A LÓGICA DO ANÚNCIO PÚBLICO

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia para a obtenção do Grau de Doutor em Filosofia (Epistemologia e Lógica).
Orientador: Prof. Dr. Cezar Augusto Mortari

Florianópolis

2015

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Pereira, Marcio Kléos Freire
Extensões de primeira ordem para a lógica do anúncio público / Marcio Kléos Freire Pereira ; orientador, Cezar Augusto Mortari - Florianópolis, SC, 2015.
204 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Filosofia e Ciências Humanas. Programa de Pós-Graduação em Filosofia.

Inclui referências

1. Filosofia. 2. Lógica modal. 3. Lógica epistêmica de primeira ordem. 4. Lógica epistêmica dinâmica. 5. Lógica do anúncio público. I. Mortari, Cezar Augusto. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Filosofia. III. Título.

Marcio Kléos Freire Pereira

"Extensões de Primeira Ordem para a Lógica do Anúncio Público"

Esta tese foi julgada adequada para obtenção do Título de "Doutor em Filosofia", e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Filosofia.

Florianópolis, 24 de setembro de 2015.

Prof. Alexandre Meyer Luz, Dr.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Cezar Augusto Mortari, Dr. (Orientador)
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Marcelo Finger, Dr.
Universidade de São Paulo

Prof. Hércules de Araújo Feitosa, Dr.
Universidade Estadual Paulista

Prof. Newton Marques Peron, Dr.
Universidade Federal da Fronteira Sul

Jerusa Marchi

Prof[a]. Jerusa Marchi, Dr[a].
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Jonas Becker Arenhart, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Arthur Buchsbaum

Prof. Arthur Ronald de Vallauris Buchsbaum, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

AGRADECIMENTOS

Infelizmente, por razões de espaço, não tenho como citar cada parente ou amigo que me incentivou durante os anos dedicados ao meu doutoramento. Seu apoio tem sido fundamental. Enumerarei apenas os indivíduos que tiveram uma contribuição direta para que eu concluísse este trabalho.

Agradeço ao meu orientador Cezar Mortari, a razão principal e acertada de minha opção pelo PPGFIL-UFSC, pela orientação competente e precisa, pela incansável boa vontade e pelo acolhimento generoso desde o início; aos professores André Leclerc, Ana Lêda de Araújo e Matias Francisco Dias, pelas eloquentes e generosas cartas de recomendação; ao professor Marco Franciotti, pelo apoio logístico em momento crucial; ao professor Décio Krause, pelo impacto positivo que suas aulas e conversas tiveram sobre mim; ao professor Newton da Costa, pelo privilégio de assistir a suas aulas.

Agradeço novamente ao professor Décio Krause, bem como aos professores Jonas Arenhart e Jerusa Marchi, pelo incentivo e preciosas sugestões durante meu exame de qualificação. Agradeço aos professores Marcelo Finger, Hércules Feitosa, Newton Peron, Arthur Buchsbaum, Jerusa Marchi e Jonas Arenhart, que gentilmente se dispuseram a participar de minha banca examinadora. Um agradecimento especial ao professor Hércules Feitosa, pelas numerosas e úteis sugestões ao longo das semanas que precederam a defesa! Agradeço ao professor Alexandre Luz, coordenador do PPGFIL-UFSC, e especialmente à secretária Ângela Gasparini, por sua cordialidade, competência e dedicação incansável ao trabalho.

Agradeço aos amigos Wildoberto Gurgel, Hélder Passos e César Frederico, pela indispensável ajuda em muitos assuntos, inclusive sendo meus procuradores junto à UFMA em várias ocasiões; aos amigos Joedson Marcos, Renato Mendes, Jaison Schinaider, Valéria Gradinar, pelos diversos favores e estimulantes conversas; ao amigo Ederson Safra, pela inestimável amizade, pela ajuda com a impressão desta tese e outras providências burocráticas; e especialmente ao amigo Josnei Godinho, por tantos favores e tanto companheirismo que eu não teria como descrever com justiça.

Durante a maior parte de minha estadia em Florianópolis, fui financiado com uma bolsa de doutorado pela FAPEMA - Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão. Agradeço ao povo maranhense, que com seus impostos mantém essa instituição.

Que teu coração não se envaideça pelo que sabes. Ouve o conselho tanto do ignorante quanto do sábio, pois não há quem tenha alcançado os limites da arte, nem existe artesão que haja atingido a perfeição.

– Máximas de Ptah-hotep (cerca de 2.400 a.C.)

RESUMO

Dentre as lógicas multimodais, a lógica epistêmica dinâmica foi desenvolvida para modelar as mudanças de estados epistêmicos em grupos de agentes. Inspirada em recursos da lógica dinâmica (concebida para lidar com programas computacionais), aquela lógica permite representar a própria transição entre estados epistêmicos, tanto individuais como grupais, dos agentes considerados. Essa transição pode ser devida a diferentes ações epistêmicas (p.ex., o compartilhamento de uma informação com uma pessoa ou grupo em privado). A versão mais simples (e inicial) dessa lógica ficou conhecida como lógica do anúncio público, que considera apenas um tipo de ação epistêmica: a divulgação pública e simultânea de uma informação para todos os agentes. Essa divulgação é referida genericamente como "anúncio público"; porém, não precisa consistir, a rigor, em um anúncio típico, podendo ser um evento percebido simultaneamente por todos os agentes, contanto que cada agente saiba que todos os agentes estão acessando essa informação juntos, e que todos saibam desse mesmo fato, etc. A lógica do anúncio público apresenta pelo menos duas especificidades, não necessariamente preservadas por suas extensões que incluam outras ações epistêmicas: trata-se de uma lógica funcional (quando um anúncio for exequível, haverá somente uma maneira de fazê-lo) e dispensa o emprego de definições e provas por dupla indução (não há necessidade de se definir fórmulas e ações como duas categorias distintas e mutuamente dependentes de expressões da linguagem). Alguns trabalhos foram publicados sobre essa lógica, explorando diferentes axiomatizações, tratamentos semânticos e extensões; entretanto, quase todos se dedicam exclusivamente ao nível proposicional. Em nossa pesquisa bibliográfica, encontramos somente um artigo que desenvolve satisfatoriamente uma versão de primeira ordem para a lógica do anúncio público (KISHIDA, K. Public announcements under sheaves. In: *New Frontiers in Artificial Intelligence*, p. 96-108, 2013, ISBN 978-3-642-39930-5). Contudo, apesar da extrema sofisticação e elevado rigor técnico encontrados naquele trabalho, seu tratamento considera linguagens com anúncios públicos contendo somente fórmulas fechadas (sentenças), bem como um único agente epistêmico. Além disso, sua semântica, uma combinação de semântica de vizinhanças com semântica de feixes, motivada por um interesse filosófico bem específico (a interpretação intuitiva do operador epistêmico usual como representando *conhecimento verificável*), pode ser vista como desnecessariamente complicada se estamos interessados em uma interpretação *standard* para aquele operador, além de comprometer-se com uma perspectiva (um tanto polêmica) de contrapartes

individuais, segundo a qual o mesmo objeto do domínio de interpretação não pode estar associado a mais de um ponto no modelo. Nossa contribuição propõe duas famílias, por assim dizer, de extensões de primeira ordem para a lógica do anúncio público, para *quaisquer* conjuntos finitos não-vazios de agentes epistêmicos e para anúncios contendo *quaisquer* fórmulas de suas respectivas linguagens. Os sistemas da primeira família estendem os correspondentes sistemas epistêmicos estáticos, providos com os usuais operadores epistêmicos para agentes individuais; e os da segunda fazem o mesmo com seus correspondentes sistemas estáticos, os quais, além de operadores epistêmicos individuais, adotam operadores de conhecimento distribuído em grupos de agentes. Além disso, nosso *framework* é o tradicional (modelos relacionais), o que simplifica consideravelmente o tratamento do assunto e não se compromete com indivíduos *world-bounded*. Antes de construir aquelas extensões dinâmicas, dedicamos alguns capítulos ao estudo dos vários sistemas epistêmicos estáticos que servirão como lógicas de base para nossa lógica do anúncio público, inclusive detalhando sistemas epistêmicos com conhecimento distribuído, e mostramos a completude em cada caso. Em se tratando de lógica epistêmica de primeira ordem, também fazemos brevemente uma defesa filosófica do emprego de quantificadores atualistas na lógica modal, com curiosos resultados relacionados com os esquemas conhecidos como *Fórmula de Barcan* e sua recíproca.
Palavras-chave: Lógica modal. Lógica epistêmica de primeira ordem. Lógica epistêmica dinâmica. Lógica do anúncio público. Conhecimento distribuído. Fórmula de Barcan.

ABSTRACT

Among multimodal logics, Dynamic Epistemic Logic has been developed for modelling changes in epistemic states for groups of agents. Inspired by resources from Dynamic Logic (designed for dealing with computational programs), Dynamic Epistemic Logic manages to represent the very transition between epistemic states, either individual or collective, involving relevant agents. That transition might be caused by several epistemic actions (ex., sharing privately an information with a person or group). The simplest (and earliest) version for that logic became known as Public Announcement Logic, which considers a single type of epistemic action: a public and simultaneous disclosure of an information for all agents. This disclosure is generically referred as a "public announcement"; however, it doesn't have to be a typical announcement, and it might be an event, provided that this event be simultaneously realized by every agent, and that each agent knows that everybody is accessing that information together, and that everyone know this later fact, etc. Public Announcement Logic displays at least two peculiarities, not necessarily shared with its extensions including other epistemic actions: it's a functional logic (meaning that, when an announcement is feasible, there should be a unique way of doing it), and it dispenses with definitions and proofs based on double induction (i.e, there's no need for defining formulas and actions as two distinct and mutually dependent categories of language expressions). Some results have been published on this logic, exploring different axiomatizations, semantic treatments and extensions; however, almost all of them deal exclusively with propositional level. In our bibliographical survey, we found a single paper with a satisfactory study on first-order Public Announcement Logic (KISHIDA, K. Public announcements under sheaves. In: *New Frontiers in Artificial Intelligence*, p. 96-108, 2013, ISBN 978-3-642-39930-5). Nevertheless, in spite of its extreme refinement and high technical rigor, its approach is restricted to single-agent languages where announcements contain only closed formulas (sentences). Besides, its semantics, a combination of neighborhood semantics with sheaf semantics, motivated by a peculiar philosophical interest (the intuitive interpretation of the usual epistemic operator as representing *verifiable knowledge*), might be seen as unnecessarily complicated, especially if we are interested in the standard intepretation for that operator, and it forcibly commits itself with the (somewhat controversial) perspective of individual counterparts, according to which the same object in the interpretation domain must be uniquely associated to a point in the model. Our contribution provides two families, so to speak, of first-order extensions

for Public Announcement Logic, for *any* non-empty finite sets of agents, as well as for announcements containing *any* formulas from their respective languages. The systems in the first family extend their correspondent static epistemic systems, containing the usual epistemic operators for individual agents; and the systems in the second one, do the same with their correspondent static systems, which, beside individual epistemic operators, include operators for distributed knowledge in groups of agents. Moreover, our framework is traditional (relational models), which considerably simplifies the approach and doesn't commit itself to world-bounded individuals. Before presenting those dynamic extensions, we dedicate a few chapters to the study of those static epistemic systems which shall be the basis for our Public Announcement Logic, also detailing some epistemic systems with distributed knowledge, and we prove completeness for each case. Concerning first-order epistemic logic, we additionally make a brief philosophical defense for actualist quantification in modal logic, with interesting results related to the schemes known as *Barcan Formula* and its converse.
Keywords: Modal logic. First-order epistemic logic. Dynamic epistemic logic. Public announcement logic. Distributed knowledge. Barcan Formula.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LISTA DE SÍMBOLOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os resultados contidos nesta tese dizem respeito a um campo de investigação bem preciso: a formalização lógica das mudanças produzidas nos estados epistêmicos de agentes após a divulgação de informações, sejam estas acerca de fatos objetivos ou do próprio estado epistêmico desses mesmos agentes. Esse programa de pesquisa é chamado de lógica epistêmica dinâmica,[1] e, por razões que ficarão claras mais adiante, estaremos particularmente ocupados com sua formulação mais simples, denominada "lógica do anúncio público".

Nossos principais objetivos consistem em desenvolver extensões de primeira ordem para essa lógica do anúncio público, oferecer algumas discussões pontuais relacionadas com esse programa, bem como detalhar uma lógica epistêmica (estática) de primeira ordem que lhe sirva de base.

Entretanto, considerando-se as complexas relações desse estudo com outras áreas da lógica, precisaremos aqui de uma introdução inusualmente extensa, para compreender as motivações, tanto formais como filosóficas, subjacentes a esse campo de investigação, bem como as delimitações teóricas e estratégias metodológicas adotadas em nosso tratamento do assunto.

Esta exposição introdutória, apesar de bastante informal, pressuporá alguma familiaridade com os sistemas usuais da lógica modal, tanto em suas versões proposicionais como de primeira ordem, bem como a semântica *standard* para esses sistemas (estilo kripkeano ou de *mundos possíveis*).[2] Minimizaremos, o quanto for possível, o emprego de formalismos, de modo a evitarmos nos estender prematuramente em detalhes de notação ou definições neste primeiro momento.

---

[1] Ao longo desta introdução, bem como nos capítulos seguintes, empregaremos o termo "lógica" de modo um tanto ambíguo, para facilitar a fluência da exposição. Assim, ele tanto pode se referir à disciplina como um todo, quando empregado isoladamente – mais ou menos como "matemática" ou "filosofia" o fazem –, como pode se referir a uma área de estudos dentro da disciplina, quando qualificado com um adjetivo – como "lógica proposicional" ou "lógica modal" – sem delimitar precisamente qual sistema está sendo considerado. Neste último caso, obviamente, as áreas consideradas não precisam ser disjuntas – por exemplo, podemos estar interessados na "lógica modal proposicional" ou na "lógica epistêmica dinâmica". Esperamos que o contexto torne inteligível cada uso.

[2] Alguns manuais clássicos sobre lógica modal são *Modal Logic: an introduction*, de Chellas (1980), *A New Introduction to Modal Logic*, de Hughes e Cresswell (1996), *Modal Logic*, de Blackburn et al. (2002). Destacamos ainda os recentes *Modalities and Multimodalities*, de Carnielli e Pizzi (2009), e *Modal Logic for Open Minds*, de van Benthem (2010).

1.1 REPRESENTANDO ATITUDES EPISTÊMICAS

De modo geral, o presente trabalho se ocupa com alguns sistemas de lógica epistêmica cujas especificidades serão esclarecidas mais adiante. Começaremos rastreando as origens desse programa de pesquisa, para depois descrever o estado da arte e em que consiste exatamente nossa contribuição. Não temos a pretensão de oferecer uma revisão exaustiva da literatura disponível, o que parece bastante aceitável quando percebemos que muitos resultados publicados fogem totalmente aos interesses de nosso recorte investigativo. Os autores e fontes citadas deverão, portanto, bastar para os propósitos desta introdução.

A lógica epistêmica é um vasto campo de investigação dentro das chamadas lógicas modais, e caracteriza-se por interpretar intuitivamente o operador modal forte $\Box$ (ou, na notação mais usual: a letra $\mathscr{K}$ de *knowledge*) como "sabe-se que", ou variações como "acredita-se que" (modalidade doxástica), "todos os agentes sabem que" (conhecimento universal), "o agente *a* sabe que" (conhecimento relativizado por agente), etc.

Podemos seguramente distinguir três etapas principais, desde seu surgimento em nossa época até o presente momento – uma etapa inicial (de interesse predominantemente filosófico), a sua redescoberta pelos teóricos da computação, e a *virada dinâmica* –, as quais comentaremos a seguir.

A interpretação dos operadores modais enquanto operadores epistêmicos começou com indicações genéricas em um breve capítulo de *An Essay on Modal Logic* de von Wright (1951). Entretanto, o primeiro estudo monográfico sobre o assunto a oferecer um aparato semântico satisfatório, aliado a uma rica análise filosófica, foi *Knowledge and Belief: An Introduction to the Logic of the Two Notions*, publicado em 1962 por Jaakko Hintikka (2005). Uma considerável literatura derivou desse estudo, e foi sumarizada por Lenzen (1978) em seu famoso *Recent work in epistemic logic*.

Com o surgimento da lógica epistêmica, a semântica usual para a lógica modal foi reinterpretada, de modo que os pontos no domínio de um modelo, tradicionalmente chamados de mundos possíveis, correspondessem a estados epistêmicos abstratos – ou seja, conjuntos de informações, ou, ainda, de descrições possíveis do mundo – e a relação de acessibilidade entre estados passou a ser vista como uma espécie de acessibilidade epistêmica.

Desse modo, dizer que um estado é epistemicamente acessível (ou *possível*) significa simplesmente dizer que aquele conjunto de informações é consistente com o que o agente sabe (ou, dito de outro modo, é uma descrição possível dos fatos, *do ponto de vista do agente*). Outra apresentação, bastante frequente, da relação de acessibilidade epistêmica, especialmente apropriada para modelos epistêmicos empregados em ciência da computação e inteligência artificial, define aquela relação como uma *indistinguibilidade*, da parte do agente, entre pontos em um modelo – ou seja, dois pontos são indistinguíveis para um agente quando este não consegue dizer qual dos pontos é a descrição verdadeira dos fatos. Essa perspectiva, como será comentado em capítulo posterior, compromete-nos logo de saída com uma lógica do tipo *S5*. De qualquer modo, a atitude cognitiva "saber que p" (onde p é uma proposição), representada pelo operador de necessidade $\Box$, é interpretada semanticamente como expressando que p pertence a todos os estados acessíveis ao agente (intuitivamente falando: o agente não contempla a possibilidade de uma descrição do mundo na qual p não seja o caso).

Esses modelos são facilmente estendidos de modo a incluir um conjunto de distintas relações de acessibilidade epistêmica, uma para cada agente epistêmico considerado, tornando a semântica apropriada para linguagens com vários operadores $\Box_a$, $\Box_b$, $\Box_c$, ...(ou: $\mathscr{K}_a$, $\mathscr{K}_b$, $\mathscr{K}_c$, ...), indexados por agente (indicados pelos subscritos a, b, c, etc.).

Possuindo distintos operadores epistêmicos indexados por agente, a descrição dos estados epistêmicos de grupos de agentes considerados abstratamente requer, logo de início, que a lógica epistêmica seja *multimodal*. Como sabemos, os sistemas mais conhecidos de lógica modal contam com somente um operador modal primitivo, e o seu operador dual é introduzido via definição. Esses sistemas são denominados, por essa razão, de *monomodais*. A lógica epistêmica com n agentes requer uma linguagem com *no mínimo n* operadores modais primitivos – sendo que seus respectivos duais são introduzidos da maneira usual –, daí a nomenclatura "multimodais".

Esse cenário multimodal ampliou sensivelmente a versatilidade daquela lógica – afinal, em um grupo, frequentemente ocorre que nem todos os agentes detenham o mesmo conjunto de informações –, bem como permitiu a consideração de noções peculiares à lógica epistêmica e sem análogos em outras lógicas modais – por exemplo, os operadores de *conhecimento universal*, de *conhecimento distribuído* e de *conhecimento comum*.

Para efeito de ilustração, consideremos a Figura 1, na qual um modelo bastante intuitivo e com um mínimo de formalismo é mostrado. É fácil perceber que se trata de um modelo do tipo *S5* (com relações de acessibilidade reflexivas, simétricas e transitivas para cada agente) e que, além disso, se trata de um modelo pontuado (*pointed model*), no qual um dos pontos (ou mundos) é distinguido (representa o mundo atual) – no caso de nossa ilustração, o mundo 2.

Nesse modelo, três (descrições de) mundos e três agentes epistêmicos estão coordenados, de modo que: Lucas sabe que está chovendo em Florianópolis (porque, em todas as suas possibilidades epistêmicas, isso é o caso), mas não sabe se está ou não chovendo em Curitiba (porque, até onde ele sabe,

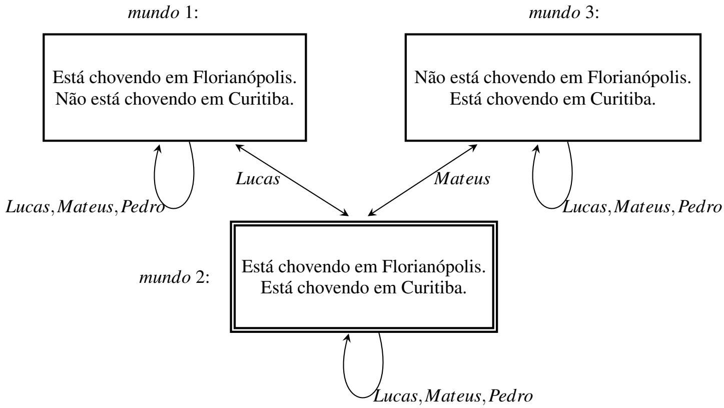

Figura 1 – Exemplo bastante intuitivo de um modelo multiagente.

uma ou outra situação pode ser o caso). A perspectiva epistêmica de Mateus é justamente a oposta, por razões análogas; e Pedro não tem dúvidas sobre qual é o caso (ele sabe exatamente o que está acontecendo). Para facilitar o entendimento do diagrama, o mundo real está indicado como um retângulo com borda dupla.

Esse tipo de modelo, apesar de sua simplicidade, é suficientemente versátil para descrever inclusive estados epistêmicos *de ordem superior* (ou seja, acerca do estado epistêmico dos próprios agentes ou de grupos destes). Se explicitássemos mais as informações verdadeiras em cada mundo, decorrentes da formulação desse modelo em particular, visualizaríamos uma variedade muito maior de descrições dos conteúdos cognitivos dos agentes considerados.

Assim, por exemplo, da perspectiva do mundo *real* 2, Lucas não sabe se Mateus sabe que está chovendo em Florianópolis; pois, no mundo 1 (ou *possibilidade epistêmica* 1), Mateus sabe que está chovendo em Florianópolis, e no mundo 2, Mateus não sabe que está chovendo em Florianópolis, e esses dois mundos são indistinguíveis (no sentido explicado antes) para Lucas. Pelo mesmo raciocínio, embora Lucas não saiba se está chovendo ou não em Curitiba, ele sabe que Mateus tem a resposta. Isto ocorre porque, em ambos os mundos acessados por Lucas (1 e 2), Mateus sabe o que está acontecendo, e, novamente, esses dois mundos são indistinguíveis (no sentido explicado antes) para Lucas. Por um raciocínio similar, Lucas sabe que

Pedro não tem quaisquer dúvidas sobre esse assunto.

As perspectivas de ordem superior, por parte dos demais agentes, podem ser facilmente inferidas pelo leitor. Na verdade, uma lista infinita de informações, cada vez mais complicadas (e menos intuitivas), está implícita nesse modelo – para citar só um caso ligeiramente mais complicado (cuja justificação deixaremos a cargo do leitor): no mundo 2, como dissemos, Mateus não sabe se está chovendo em Florianópolis, mas ele também não sabe se Lucas está ciente de que ele (Mateus) não sabe disso (se está chovendo em Florianópolis).

Com base em um exemplo tão simplório como o da Figura 1, já é possível antever a relevância da lógica epistêmica, não apenas para a epistemologia, mas também para áreas como a linguística (na semântica das atitudes proposicionais), a economia (na qual barganhas e contratos dependem visceralmente das informações disponíveis para as partes envolvidas), e a ciência da computação (especialmente em se tratando de administrar o fluxo e armazenamento de informações em redes).

A partir da década de 1980, a lógica epistêmica chamou a atenção dos cientistas da computação e pesquisadores de inteligência artificial, atraindo também economistas, linguistas e cientistas cognitivos. Novas semânticas foram implementadas, como os sistemas interpretados e a teoria de jogos. Resultados importantes desse período foram reunidos pela primeira vez de maneira abrangente nos manuais *Reasoning about Knowledge* (FAGIN et al., 1995) e *Epistemic Logic for AI and Computer Science* (MEYER; HOEK, 2004).

Desde então, uma vasta literatura vem sendo produzida acerca de sistemas multiagentes abstratos (quer se tratem de agentes humanos ideais, processos computacionais, *modems* em uma rede, etc.), sistemas distribuídos e *message-passing systems*, empregando resultados de lógica epistêmica (às vezes combinados com lógica temporal). A lógica epistêmica passou a contar principalmente (embora não de modo exclusivo, é claro) com as contribuições vindas da ciência da computação e da inteligência artificial.

Nesse período, surgem também as combinações de lógica epistêmica com lógica temporal (FAGIN et al., 1995; BELARDINELLI; LOMUSCIO, 2008), com base em uma motivação bastante intuitiva (a mesma que motivará depois a combinação daquela com a lógica dinâmica): agentes epistêmicos adquirem ou revisam informações ao longo do tempo; portanto, seus estados epistêmicos (conjuntos de informações disponíveis) não são sempre os mesmos.[3]

[3] A lógica temporal interpreta operadores modais como modificadores especificando se uma informação (proposição) será o caso em algum momento futuro, ou foi o caso em algum momento passado, ou será o caso em todos os momentos futuros, ou será o caso imediatamente

1.2 A *VIRADA DINÂMICA* NA LÓGICA EPISTÊMICA

Contudo, a formulação *simpliciter* de uma lógica epistêmica temporal consegue, no máximo, formalizar estados epistêmicos em momentos *estáticos* dispostos ao longo de um fluxo temporal – intuitivamente, corresponderia a algo como um cálculo envolvendo a descrição do que um agente ou grupo de agentes sabe agora, sabia antes e saberá no futuro. O *processo de mudança* em si é formalizado somente no nível da metalinguagem, seja mediante relações de *acessibilidade temporal entre instantes* na semântica kripkeana usual, seja por meio de *funções de transição entre estados globais*, na semântica de sistemas interpretados; mas a lógica empregada continua sendo *estática* – ou seja, descreve cada estado do sistema como consistindo em situações fixas, previamente fornecidas com o modelo em questão, e que simplesmente se relacionam umas com as outras segundo a acessibilidade definida no modelo (tempo linear, ramificado, denso, etc).

Na tentativa de se formalizar as mudanças de estados cognitivos e fluxos de informações entre agentes, a principal guinada no programa da lógica epistêmica, sem dúvida, ocorreu a partir de sua combinação com os recursos da lógica dinâmica. Esta lógica foi desenvolvida para se raciocinar acerca de programas computacionais considerados abstratamente, incluindo a formalização de suas especificações, a comparação ou determinação da equivalência entre programas, entre outras finalidades. Portanto, a lógica dinâmica não se ocupa com a descrição de algoritmos ou programas em particular, mas *prima facie* com a descrição e análise abstrata dos efeitos de sua interação e combinação sobre o valor das asserções relevantes, e, consequentemente, sobre os estados do processo computacional.[4]

Uma característica importante dessa lógica é a adoção de operadores modais como construtos sintáticos representando *a execução de programas*, os quais, ao alterarem o valor das variáveis (numéricas ou de outra natureza) das fórmulas em seu escopo, podem eventualmente alterar o valor semântico dessas fórmulas. Dessa maneira, o caráter dinâmico das transições entre estados de um sistema é capturado pela sintaxe da linguagem lógica.[5] Outra

---

a seguir, etc – os recursos modais são muito variados, incluindo um programa de pesquisa específico de lógica temporal metrificada. Historicamente, ambos os programas de pesquisa em lógica temporal começaram em 1957 com *Time and Modality* (PRIOR, 2003). Uma excelente e detalhada introdução pode ser encontrada em Burgess (1984), bem como no capítulo dedicado ao assunto em *Modalities and Multimodalities* (CARNIELLI; PIZZI, 2009).

[4]O manual mais importante e abrangente sobre o assunto parece ainda ser *Dynamic Logic* (HAREL et al., 2000).

[5]De acordo com Harel et al. (2000), a primeira contribuição para a lógica dinâmica como a conhecemos hoje – i.e., adotando uma abordagem em termos de *modalidades* para análise de programas tomados de um ponto de vista abstrato – deve-se a Pratt (1976), embora a análise

característica importante é que a semântica para a lógica dinâmica dispensa a consideração de relações de acessibilidade entre estados – algo típico da semântica de mundos possíveis, a interpretação *standard* para as lógicas modais – pois adota operações envolvendo os próprios modelos, em vez de simplesmente pontos (estados, mundos) no domínio do modelo. Essa novidade (transição entre modelos) terá um impacto significativo na lógica epistêmica.

Pois bem, a combinação de lógica epistêmica e lógica dinâmica nos deu a *lógica epistêmica dinâmica*. Sua primeira versão foi justamente a *lógica do anúncio público*, o interesse central de nosso trabalho.[6] Os trabalhos seminais foram os artigos "Logic of public communications" (PLAZA, 2007), publicado originalmente em 1989, e "Reasoning about information change" (GERBRANDY; GROENEVELD, 1997), bem posterior ao primeiro mas elaborado de modo independente.

Algumas diferenças entre esses dois trabalhos são de que somente o primeiro introduz o procedimento – que depois se tornaria bastante usual – de redução da lógica do anúncio público à lógica epistêmica estática (sem anúncios) como estratégia para prova da completude, enquanto somente o segundo adota uma semântica de atualizações (ou *updates*) – que também se tornaria a abordagem *standard* para essa lógica – baseada no influente trabalho "Defaults in Update Semantics" (VELTMAN, 1996), além de pressupor como teoria de conjuntos o sistema *ZFA* – ou seja, *ZFC* sem o axioma do fundamento e com o axioma para conjuntos não-bem-fundados, como apresentado em Aczel (1988).[7]

Após essas contribuições iniciais, outras se seguiram, discutindo diferentes axiomatizações, abordagens semânticas e extensões; algumas se ocupando apenas com o anúncio público, e outras expandindo a investigação de modo a incluir o estudo da lógica epistêmica dinâmica como um todo. Naturalmente, não teremos tempo para uma detalhada revisão de literatura; entretanto, esperamos conseguir, com as referências citadas ao longo desta introdução, oferecer ao leitor boas direções para pesquisas específicas que não estejam contempladas na presente tese.

Em linhas bem gerais, como funciona a semântica (usual, via atualizações) para um anúncio público? Semanticamente, o anúncio público de uma

---

lógica de algoritmos, sem o emprego explícito de modalidades, tenha começado pelo menos uma década antes.

[6] A justificativa para concentrar nosso estudo em um subcálculo da lógica epistêmica dinâmica, em vez de estudar sistemas para essa lógica como um todo, será detalhada mais à frente nesta introdução.

[7] Posteriormente, Gerbrandy chegou, também de modo independente, à estratégia de redução à lógica epistêmica estática em sua famosa tese de doutorado *Bisimulations on Planet Kripke* (GERBRANDY, 1999), premiada com o *E. W. Beth Dissertation Prize* pela *Association for Logic, Language and Information* (FoLLI).

informação corresponde a uma restrição do modelo adotado para representar os estados epistêmicos dos agentes relevantes, de modo que somente os pontos em que aquela informação seja verdadeira permaneçam no novo modelo. Dizer que o anúncio de certa sentença φ faz com que outra sentença ψ seja o caso corresponde semanticamente a dizer que, se restringirmos o modelo adotado, de modo que somente sejam considerados os pontos em que φ acontece, então ψ certamente será o caso no ponto considerado.

A notação que adotaremos simboliza essa asserção como $[\varphi]\,\psi$. Os colchetes envolvendo a sentença anunciada correspondem a uma variante notacional do operador modal forte $\Box$ com uma informação em seu interior. Em versões mais gerais da lógica epistêmica dinâmica, os colchetes são frequentemente usados para indicar todos os diferentes tipos de ações epistêmicas, distinguidos uns dos outros por meio de recursos notacionais auxiliares, como, por exemplo, o sinal de exclamação no caso do anúncio público. A fim de evitarmos notações desnecessariamente confusas, por ocasião de anúncios contendo informações complexas ou mesmo outros anúncios, optaremos por essa apresentação mais econômica.

Retomemos o modelo rudimentar da Figura 1, para ilustrar como representamos o efeito de um anúncio público sobre os estados epistêmicos dos três agentes. Esse anúncio pode, por exemplo, ser feito por *Pedro*, que sabe qual descrição corresponde ao mundo real; mas, a rigor, não precisa ser realizado por algum dos agentes. De fato, nem precisa ser um anúncio propriamente dito, mas algo que funcione de maneira similar, como um evento público do qual todos os agentes tomam conhecimento simultaneamente e – importante! – percebem que estão todos tomando ciência do evento juntos.

Para simplificar a presente exposição introdutória, estamos omitindo certos detalhes essenciais, os quais serão aprofundados no devido momento. Por exemplo, além do que dissemos nos parágrafos acima, um anúncio público pressupõe que a informação sendo divulgada é verdadeira – ou seja, no ponto (ou mundo) do modelo original no qual será feito o anúncio, aquilo que é anunciado deve ser o caso.

Outro detalhe importante é que, como é praxe em teoria dos modelos, a descrição de cada ponto consiste apenas nas sentenças atômicas que nele valem; assim, o valor semântico das demais sentenças estritamente booleanas (não modais) naquele ponto não se altera com o anúncio. Entretanto, os valores semânticos das sentenças modais – as quais, via de regra, dependem dos pontos acessíveis àquele ponto considerado – podem ser radicalmente modificados dependendo do novo modelo que construímos para avaliar o resultado de um anúncio. Isso porque, no novo modelo, alguns pontos, antes acessíveis, podem, por exemplo, nem mais existir.

A Figura 2 nos fornece uma visão, bastante preliminar e ainda sem

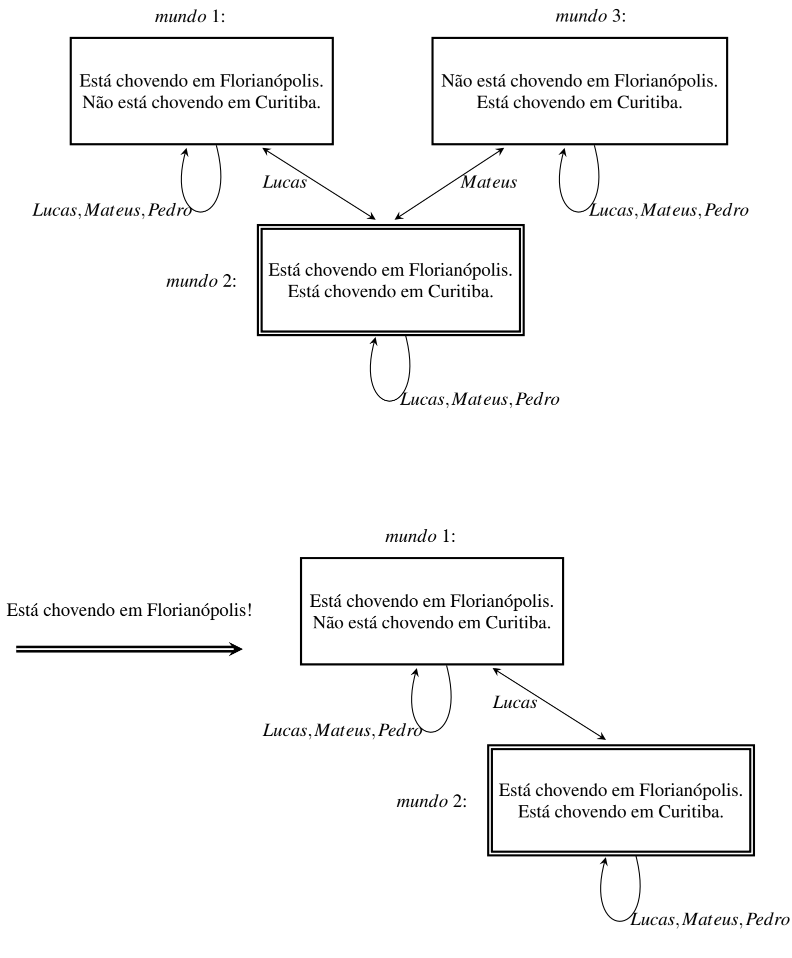

Figura 2 – Efeito de um anúncio público sobre um modelo epistêmico.

muito rigor, de como funciona a semântica *standard* para a lógica do anúncio público, na qual podemos observar o efeito do anúncio de que *Está chovendo em Florianópolis* no modelo fornecido antes. Os pontos nos quais essa informação é falsa são descartados, e o modelo é restrito aos pontos e relações de acessibilidade restantes.

No diagrama em questão, é fácil verificar nossa afirmação anterior de que um anúncio público não afeta o *status* semântico de nenhuma sentença não modal (que não inclua quaisquer operadores modais em sua estrutura). Todo o interesse pela lógica do anúncio público está nas mudanças que podem ser provocadas nos estados epistêmicos dos agentes envolvidos. Em nosso exemplo, um dos efeitos desse tipo, após o anúncio em questão, é que Mateus e, consequentemente, todos os agentes passam a saber que está chovendo em Florianópolis. E mais: todos sabem que todos sabem disso, etc.

Também é importante não confundir uma sentença enunciando um anúncio público e seu efeito, com uma sentença condicional – ou seja, algo como: se a sentença que está sendo anunciada publicamente for verdade, então segue-se a outra sentença que é dita ser seu efeito. A diferença se mostra bem óbvia quando examinamos o anúncio público de uma sentença gerando a própria sentença como resultado. Um dos comportamentos mais excêntricos da lógica do anúncio público e que estudaremos depois com mais profundidade, é que nem sempre um anúncio público preserva a verdade do que está sendo anunciado.

Em outras palavras, embora seja uma tautologia dizer que uma sentença sempre implica a si mesma (em notação usual: $\vDash \varphi \rightarrow \varphi$), nem sempre um anúncio preserva a verdade do que está sendo anunciado – ou seja: $\nvDash [\varphi]\varphi$. Essa peculiaridade é bastante fácil de ser percebida. Observemos novamente a Figura 2. Se o conteúdo do anúncio público tivesse sido "Está chovendo em Florianópolis e Mateus não sabe disso", seria falso dizer que este anúncio público faria com que a mesma informação fosse verdadeira (pois Mateus passaria a saber que estaria chovendo em Florianópolis).

Nas próximas seções desta introdução, voltaremos a falar acerca da lógica do anúncio público.

Continuando a contextualização do estudo que faremos nesta tese, embora não esteja em seu escopo a investigação da lógica epistêmica dinâmica que inclua outras ações epistêmicas além de anúncios públicos, certamente é recomendável esboçar, ainda que em linhas gerais, algumas de suas especificidades.

A diferença mais óbvia entre essas duas lógicas é a riqueza de recursos adicionais da lógica epistêmica dinâmica, uma vez que outras ações epistêmicas, além do anúncio público, são formalmente tratadas em sua sintaxe e semântica.

Assim, *anúncios privados* (feitos para um agente ou grupo de agentes em particular, mas não para todos), a *aquisição individual de informações*, bem como *suspeitas* (um ou mais agentes suspeitarem de que outros detenham alguma informação acerca de um dado evento, mesmo que aqueles primeiros não saibam se o evento ocorreu ou não), entre outros recursos, são as principais novidades da lógica epistêmica dinâmica, além de operadores dinâmicos com um importante papel auxiliar, como o operador $\cup$ de *escolha não determinística* ou o operador ; de *sequencialidade* de ações (DITMARSCH et al., 2007, p. 113).

Um tratamento para essa variedade de ações epistêmicas pode ser encontrado, por exemplo, na assim chamada *lógica da ação epistêmica*, cujos primeiros resultados foram devidos a van Ditmarsch (1999, 2000, 2002), os quais generalizaram a lógica do anúncio público de modo a abranger outras ações epistêmicas. Uma apresentação bastante didática pode ser encontrada em van Ditmarsch et al. (2007).

Infelizmente, apesar dessa lógica apresentar tanto uma linguagem bastante expressiva, como uma semântica (relacional) bem apropriada, até onde sabemos, ainda não se conhece uma axiomatização completa para a mesma, principalmente devido a algumas dificuldades com a interação entre o operador usual de conhecimento e as várias ações epistêmicas (DITMARSCH et al., 2007, p. 124-126). Entretanto, essa lacuna (talvez temporária) não afeta a utilidade dessa lógica como uma eficiente linguagem de especificação para sistemas dinâmicos multiagentes, devidamente sustentada por uma semântica e uma lista de princípios válidos (candidatos a axiomas).

Outra formulação para a lógica epistêmica dinâmica é chamada de *lógica dos modelos de ação*, desenvolvida por Baltag et al. (1999, 2004). Uma reformulação dessa abordagem pode ser encontrada em van Ditmarsch (1999, 2000) e especialmente em van Ditmarsch et al. (2007, cap. 6). Não entraremos em maiores detalhes aqui, devido ao complicado teor técnico requerido; apenas diremos que a lógica dos modelos de ação emprega uma categoria de objetos semânticos (os *modelos de ação*) que funcionam também como ações epistêmicas (objetos sintáticos).

Essa aparente confusão entre sintaxe e semântica é devidamente esclarecida pelos autores, e se revela bastante perspicaz.[8] Para essa lógica, inclusive, existe uma axiomatização completa e as demonstrações podem ser conferidas nos textos citados. A abordagem peculiar, contudo, requer que as relações de acessibilidade sejam tomadas como primitivas na própria sintaxe, e que os modelos de ação sejam fornecidos de antemão. Isso poderia ser visto, talvez, como uma certa desvantagem, quando comparamos com a lógica das

[8]Basicamente, é como se os próprios modelos recebessem nomes na linguagem. Uma discussão detalhada sobre o assunto pode ser lida em van Ditmarsch et al. (2007, p. 145-149).

ações epistêmicas, na qual, à maneira da lógica do anúncio público, dispomos de estratégias efetivas para construir os novos modelos desejados diretamente a partir do modelo epistêmico inicial.

Para todos os efeitos, sempre que nos referirmos à lógica epistêmica dinâmica no decorrer do texto, estaremos tomando como caso paradigmático a lógica das ações epistêmicas (de van Ditmarsch), e não a lógica dos modelos de ação (de Baltag, Moss e Solecki). À parte quaisquer considerações de fundo extrateórico, a justificativa é de que a lógica das ações epistêmicas foi desenvolvida como uma generalização da lógica do anúncio público e reproduz claramente o comportamento dos anúncios públicos entre suas ações epistêmicas.

1.3 UM PANORAMA DA VIZINHANÇA DE *LAP*

Na Figura 3, sintetizando esquematicamente o que dissemos até aqui, para indicar de que maneira a lógica do anúncio público (ou simplesmente *LAP*) se relaciona com outras áreas que lhe são bem próximas, convencionamos representar, por meio de um grafo direcionado, de que modo as sucessivas extensões do cálculo proposicional acabam gerando (ou estendendo ainda mais) aquela lógica. É importante avisar que o esquema apresentado não é exaustivo, nem rigoroso; porém, pode ser útil como um panorama daquelas lógicas, desde que atentemos para alguns detalhes, discriminados a seguir.

Por comodidade, as abreviações empregadas são: *LP*: lógica proposicional; *LQ*: lógica quantificacional (de primeira ordem); *LE*: lógica epistêmica; *LD*: lógica dinâmica; *LAP*: lógica do anúncio público; *LED*: lógica epistêmica dinâmica. As especificações (P) e (Q) referem-se, respectivamente, aos casos proposicional e quantificacional (de primeira ordem) de cada lógica considerada. A linha tracejada diagonal separa as lógicas proposicionais (abaixo) e as de primeira ordem (acima); enquanto a linha tracejada vertical separa as lógicas estáticas (esquerda) e as dinâmicas (direita).

Primeiro, como avisamos no início desta introdução, quando empregamos o termo "lógica" aqui, queremos indicar um campo de investigação, e não *sistemas* lógicos específicos. Por exemplo, a lógica de base para todas as extensões indicadas é referida genericamente como "lógica proposicional" (*LP*). Essa lógica é usualmente a lógica proposicional *clássica*, em qualquer de suas formulações – por exemplo, com uma axiomatização completa ao estilo hilbertiano como em Mendelson (2009) – e assim estará subentendida ao longo de nosso trabalho. Entretanto, nada impede que a lógica proposicional de base para *LAP* seja não-clássica, como, de fato, já foi explorado recentemente com *LAP* intuicionista (MA et al., 2014). É claro que uma mudança na

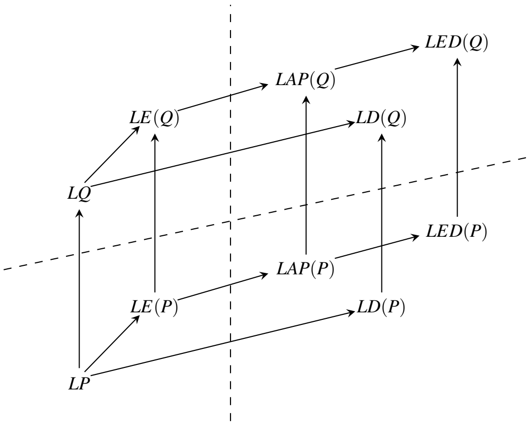

Figura 3 – Genealogia informal das lógicas epistêmicas dinâmicas.

lógica de base deve afetar todas as respectivas extensões.

Além disso, cada nodo do grafo pode ser entendido como uma espécie de parada no desdobramento para o nodo seguinte, no sentido de que a lógica indicada a seguir no grafo direcionado normalmente inclui os recursos da(s) lógica(s) indicadas nos nodos precedentes. Por exemplo, a lógica de primeira ordem (*LQ*) pode ser concebida incluindo a lógica proposicional (*LP*) como um subcálculo.

Outro aspecto a ser considerado é que cada lógica indicada pode representar também extensões que incluam operadores ou recursos sintáticos adicionais. Seria o caso se acrescentássemos à lógica epistêmica mais simples (*LE*) um operador especial (como o de conhecimento distribuído ou o de conhecimento comum), obrigando-nos a visualizar as lógicas dos nodos seguintes como correspondentemente ampliadas para contemplar esses recursos.[9] Representar essas possibilidades separadamente em nosso esquema exigiria grafos bem mais complexos, inconvenientes para a presente exposição de cunho geral e introdutório.

Além disso, uma outra peculiaridade é a de que, a rigor, tanto *LAP* como *LED* só devem ser consideradas como lógicas *dinâmicas* no sentido

[9] Situações como essa vêm sendo exploradas em *LAP*, com frequência estendida de modo a incluir o operador de conhecimento comum (DITMARSCH et al., 2007), ou estendida com o operador de conhecimento distribuído (WANG; AGOTNES, 2011) e operadores da lógica híbrida (HANSEN, 2011).

amplo do termo (por formalizarem uma categoria de mudanças, as epistêmicas); porém, não se tratam de lógicas dinâmicas à maneira de LD por não envolverem mudanças fatuais, nas quais proposições atômicas (não modais) admitem mudanças em seu valor semântico. Por essa razão, não incluímos no esquema, por exemplo, setas indo de $LD(P)$ para $LAP(P)$ nem para $LED(P)$. Fazendo um trocadilho, lógicas epistêmicas dinâmicas não devem ser confundidas com eventuais lógicas dinâmicas epistêmicas (lógicas da mudança fatual com operadores epistêmicos).

Finalmente, devemos estar atentos para uma situação peculiar envolvendo LAP e LED. Embora aquela possa eventualmente ser concebida como um subcálculo desta (ou, equivalentemente, esta uma extensão daquela), há propriedades exibidas apenas na primeira e não na segunda. Isso será comentado logo a seguir, na próxima seção.

Com a Figura 3, esperamos ter deixado mais claro o contexto do nosso trabalho, a saber, $LAP(Q)$, com relação a diversas lógicas em sua circunvizinhança. (Por razões que ficarão claras posteriormente, além de $LAP(Q)$, $LE(Q)$ também receberá bastante nossa atenção.)

1.4 ESPECIFICIDADES DE *LAP*

Duas propriedades importantes de LAP, também compartilhadas por LED, merecem ser mencionadas aqui. A primeira é de que essas lógicas, pelo menos em suas formulações usuais, não são fechadas pela regra de substituição uniforme.[10] Em consequência, mesmo quando sua formulação admita o fecho epistêmico em fórmulas condicionais[11] e a regra de necessitação[12], critérios geralmente indicados para se reconhecer uma lógica modal como *normal*, essas lógicas devem ser classificadas como *não-normais*.[13]

É bastante fácil mostrar intuitivamente por que a substituição uniforme não pode valer em LAP (nem em suas extensões). Como explicamos antes, um anúncio público não altera o valor semântico das fórmulas atômicas (e, portanto, nem de suas combinações booleanas) nos pontos de um modelo. Por essa razão, e como demonstraremos depois, deve ser um princípio válido dessa lógica que $\vDash [p]p$, onde p seja qualquer fórmula atômica. Entretanto, já mostramos também que, de maneira geral, $\nvDash [\varphi]\varphi$ (quando indicamos que o

[10]Para quaisquer fórmulas φ e ψ, e qualquer variável proposicional p, uma vez dado que $\vdash \varphi$, podemos sempre inferir $\vdash \varphi(p/\ \psi)$, onde $\varphi(p/\ \psi)$ é o resultado de se substituir uniformemente todas as ocorrências da fórmula atômica p em φ por ocorrências da fórmula ψ.

[11]Para quaisquer fórmulas φ, γ e δ, vale: $\vDash [\varphi]\ (\gamma \to \delta) \to ([\varphi]\gamma \to [\varphi]\delta)$.

[12]Para quaisquer fórmulas φ e ψ, uma vez dado que $\vdash \psi$, podemos inferir que $\vdash [\varphi]\ \psi$.

[13]Sobre a distinção entre lógicas modais normais e não-normais, bem como suas respectivas características, sugerimos consultar qualquer dos manuais introdutórios já citados anteriormente.

anúncio público “Está chovendo em Florianópolis e Mateus não sabe disso”, mesmo expressando um conteúdo verdadeiro, automaticamente tornaria esse conteúdo falso em razão do próprio anúncio), o que claramente deriva da substituição uniforme de p por φ naquela fórmula.

A outra propriedade em comum é de que o operador modal forte, pelo menos no caso de um anúncio público, tem um comportamento parcial; ou seja, nem sempre uma ação epistêmica é *executável*. Consideremos, no modelo epistêmico de nosso exemplo (Figura 1), qual seria o efeito do anúncio “Nem está chovendo em Florianópolis, nem está chovendo em Curitiba”. A consequente restrição desse modelo eliminaria todos os mundos e suas relações de acessibilidade, não restando modelo algum! (Isso é obviamente contraintuitivo e indesejável, porque a eliminação progressiva de informações falsas eventualmente seria interrompida antes de ser descartado o ponto correspondente à descrição do mundo real.) Portanto, precisaremos considerar ações que nem sempre podem ser implementadas (efetivamente realizadas).

No jargão da lógica modal, isso corresponde a dizer que não vale aqui o princípio de *serialidade* $[\varphi]\psi \to \langle\varphi\rangle\,\psi$; e, em consequência, nem o princípio de *reflexividade*, considerado mais forte: $[\varphi]\psi \to \psi$. Curiosamente, embora $\nvDash \langle\varphi\rangle\,\top$, temos que, para qualquer φ, vale $\vDash [\varphi]\top$, e, além disso, $\vDash \langle\varphi\rangle\,\top \to \varphi$. Esses resultados serão devidamente demonstrados a seu tempo.

Dissemos acima que *LAP* é um subcaso da *LED*. A pergunta que naturalmente surge é: qual o interesse em se estudar o subcaso quando poderíamos examinar diretamente o caso mais geral? A resposta mais direta é de que *LAP* possui pelo menos duas especificidades, não necessariamente compartilhadas por suas extensões que incluam outros operadores dinâmicos. Essas peculiaridades, por si só, justificam nosso interesse especial nessa lógica (e a investigação de suas consequências em suas extensões que não incluam outras ações epistêmicas – por exemplo, extensões de primeira ordem, o principal foco desta tese).

A primeira peculiaridade é que, possuindo apenas um operador dinâmico (o de anúncio público), *LAP* permite um tratamento notavelmente mais simples do que o de *LED*, não apenas pelo óbvio fato de considerar apenas um tipo de ação epistêmica, mas principalmente porque dispensa a necessidade de definirmos recursivamente duas categorias distintas e ao mesmo tempo interdependentes de expressões da linguagem de base: as fórmulas e as ações epistêmicas.

Essa excêntrica estratégia indutiva, herdada de *LD*, aparentemente se torna inevitável se quisermos considerar ações complexas, resultantes da combinação de diversas outras ações mais simples, da mesma forma que construímos fórmulas a partir de fórmulas. A necessidade de indução mútua na definição recursiva das duas categorias de expressões em *LED* tem um impacto significativo em todo o restante dessa lógica, forçando o emprego de induções mútuas em todas as demonstrações importantes.

Assim, embora seja possível, em *LAP*, considerar diferentes combinações de anúncios públicos e seus resultados; a rigor, não temos iterações de anúncios como uma espécie de *ação composta*, nem precisamos disso. Por exemplo, a fórmula $[[\varphi]\,\psi]\,\chi$ inclui a descrição de um anúncio público no próprio anúncio, mas obviamente não se trata de uma ação composta; pois o conteúdo do anúncio continua sendo uma fórmula, e não uma ação – leia-se: $[([\varphi]\,\psi)]\,\chi$. O mesmo raciocínio se aplica a fórmulas como $[\varphi]\,[\psi]\,\chi$, a qual deve ser lida como $[\varphi]\,([\psi]\,\chi)$. Naturalmente, é possível, caso queiramos, formular *LAP* da mesma maneira que *LED*, por meio de mútua indução; porém, seria uma complicação desnecessária para nossos propósitos neste trabalho.

A segunda peculiaridade é que a semântica e axiomatizações usuais de *LAP* caracterizam os anúncios públicos como *funcionais* – ou seja, caso o anúncio em questão seja exequível, ele o será de uma única maneira. Esse comportamento é representado pelo princípio: $\vDash \langle\varphi\rangle\,\psi \to [\varphi]\,\psi$ (onde φ e ψ são fórmulas quaisquer). De um ponto de vista semântico, isso equivale a dizer que, *se houver* um modelo obtido mediante aquele procedimento específico de atualização (explicado anteriormente em linhas gerais) no qual valha uma certa sentença, esse modelo restrito é único. Isso é bastante óbvio, mesmo a partir do modelo simplificado que apresentamos.

Essa propriedade não é, em geral, compartilhada com *LED* devido ao fato de que esta usualmente inclui operadores dinâmicos não-determinísticos em sua formulação, os quais são necessários para formalizar algumas situações envolvendo anúncios privados e também suspeitas. Nesses casos, nem sempre procedemos via restrição de modelos, precisando com frequência *expandir* o modelo original para conseguirmos formalizar os efeitos de anúncios privados. Como não avançaremos para o estudo de *LED* nesta tese, essas indicações superficiais devem bastar.[14]

1.5 ESTADO DA ARTE

Tendo apresentado o contexto em que *LAP* se insere, indicaremos brevemente os problemas em aberto mais importantes,[15] bem como algumas contribuições recentes para o assunto.

Explicamos, na seção anterior, que *LAP* não é fechada pela regra de

[14] A expansão de modelos, na verdade, é adotada na semântica da *lógica da ação epistêmica*, uma das duas formulações para *LED*. Para maiores detalhes, conferir van Ditmarsch et al. (2007).

[15] Nossa seleção dos principais problemas em aberto baseia-se em *Open Problems in Logical Dynamics*, de van Benthem (2006).

substituição uniforme. Entretanto, é possível determinar que algumas de suas fórmulas são *esquematicamente válidas*; ou seja, que todas as instâncias resultantes da aplicação da regra de substituição uniforme a essas fórmulas são válidas. Para citar apenas alguns exemplos conhecidos de tais esquemas substitucionalmente válidos, temos $\vDash [\varphi]\perp \leftrightarrow \neg\,\varphi$ e também $\vDash [\mathscr{C}\varphi]\mathscr{C}\varphi$ (este envolvendo o operador epistêmico $\mathscr{C}$ de conhecimento comum). Duas questões que naturalmente se colocam são: (1) o conjunto das fórmulas esquematicamente válidas em *LAP* é axiomatizável?; e (2) esse conjunto, caso seja axiomatizável, é decidível?

Essas duas questões foram parcialmente respondidas desde sua formulação. Holliday et al. (2012) propuseram uma *lógica do anúncio público uniforme* (ou *UPAL: Uniform Public Announcement Logic*), com axiomatizações para o chamado *núcleo substitucional* de *LAP* (seu conjunto de fórmulas esquematicamente válidas), completas com respeito às correspondentes classes de modelos relacionais (estilo kripkeano: K, T, *S4* e *S5*), desde que considerada uma quantidade infinita de agentes. No ano seguinte, os mesmos autores (2013) responderam afirmativamente à questão (2), para modelos com finitamente muitos agentes plenamente introspectivos,[16] bem como para modelos com quantidade infinita de agentes com ou sem introspecção.

Em seções anteriores, também comentamos que a execução de um anúncio público nem sempre preserva a verdade de seu conteúdo. Consideremos os seguintes anúncios públicos: (1) “Pedro sabe que está chovendo em Florianópolis” e (2)“Está chovendo em Florianópolis e Mateus não sabe disso”. Qualquer execução de (1) sempre faz com que seu conteúdo continue verdadeiro; por sua vez, qualquer execução de (2) torna automaticamente falso o conteúdo anunciado. Dizemos, nesses casos, que (1) é uma fórmula *bem sucedida*, mas (2) não o é.

Em outras palavras, uma fórmula φ é bem sucedida se e somente se $\vDash [\varphi]\,\varphi$. Van Benthem (2006) prefere a denominação “autorrealizável” (*self-fulfilling*). A propósito, uma sentença pode simplesmente falhar em ser autorrealizável, ou acabar caindo em uma categoria mais específica: a de “autorrefutável” (*self-refuting*) — como é o caso de nosso exemplo no texto (“Está chovendo em Florianópolis e Mateus não sabe disso”), cujo anúncio público *sempre* a torna falsa em razão do próprio anúncio.

Na semântica *standard* para *LAP* (via atualizações ou restrição de modelos), isso equivale a dizer que φ é bem sucedida se e somente se, para

[16]Em lógica epistêmica, chamamos de *introspecção positiva* o princípio **4**: $\mathscr{K}\varphi \rightarrow \mathscr{K}\mathscr{K}\varphi$, e de *introspecção negativa* o princípio **5**: $\neg\mathscr{K}\varphi \rightarrow \mathscr{K}\neg\mathscr{K}\varphi$. Àquele corresponde a tese de que, se um agente sabe que algo é o caso, então, ele sabe que sabe disso; e ao segundo, a tese de que, se um agente não sabe que algo é o caso, então, ele sabe que não sabe disso. Ambos são princípios controversos — o segundo mais do que o primeiro — e têm motivado bastante debate filosófico desde o trabalho seminal de Hintikka (2005).

qualquer ponto de um modelo no qual ela seja verdadeira, φ permanece verdadeira após a eliminação de todos os pontos nos quais ela é falsa naquele mesmo modelo. Sabendo que há numerosos casos que satisfazem (e outros que não satisfazem) essa definição, uma questão em aberto consiste em como caracterizar (sintaticamente) o conjunto das fórmulas bem sucedidas em *LAP*. O mesmo problema é colocado em outros termos por van Benthem (*op. cit.*, p. 153), que pergunta qual estrutura sintática para φ garantiria que seu anúncio público resultasse no conhecimento comum de φ — ou seja, para quais fórmulas φ é o caso que $\models [\varphi]\,\mathscr{C}\varphi$?

A esse respeito, Holliday et al. (2010) mostraram que, para *LAP* com um único agente, bem como para os casos com agentes plenamente introspectivos, a estrutura por trás de nosso exemplo — ou seja, $\varphi \wedge \neg\mathscr{K}\varphi$, que caracteriza as chamadas *sentenças mooreanas* — é responsável por todos os casos de sentenças autorrefutáveis. Para casos com muitos agentes não-introspectivos, outras instâncias (não-mooreanas) de sentenças autorrefutáveis podem aparecer.

Finalmente, destacamos um artigo recente de Wang e Cao (2013) que discute a completude de *LAP*, comparando as várias axiomatizações disponíveis na literatura, e mostrando que algumas dessas axiomatizações – projetadas para garantir a redução de *LAP* a *LE* – não são completas sem a adoção de axiomas ou regras adicionais. Os autores propõem também estratégias semânticas alternativas.

A propósito, embora os resultados contidos nesta tese não contribuam diretamente para resolver nenhum dos problemas listados, ela oferece uma contribuição efetiva para o programa de pesquisa em *LAP*, não apenas no sentido meramente cartográfico de mapear um território pouco explorado (suas extensões de primeira ordem), mas principalmente de identificar e resolver novos problemas, os quais não poderiam sequer ser formulados no seu nível proposicional.

Apenas a título de informação: em se tratando de extensões de primeira ordem, um tratamento para $LED(Q)$ foi esboçado em Kooi (2007), embora conte com a dificuldade adicional de resistir a axiomatizações completas. Esse impedimento é herdado da versão de primeira ordem para *LD*, por conta do caráter infinitário de alguns operadores dinâmicos. Exatamente pela mesma razão, um tratamento de primeira ordem para *LAP* acrescida do operador epistêmico de conhecimento comum também não poderia ser completamente axiomatizado, pois mesmo na versão estática, sua lógica quantificacional de base *LE*, quando acrescida do operador de conhecimento comum, já apresenta o mesmo problema (WOLTER, 2000).

Sobre nosso interesse específico, encontramos somente duas publicações, ambas bem recentes. Na seção final de seu artigo sobre um tratamento algébrico para *LAP* intuicionista, Minghui Ma (2011) fornece algumas breves indicações sobre extensões de primeira ordem para *LAP*, propondo esquemas de axiomas que garantiriam sua completude. Entretanto, Kishida (2013) destaca que há um erro naquele artigo, o qual compromete a prova de completude, e que, antes de seu próprio trabalho, ainda não havia sido oferecida nenhuma axiomatização completa para $LAP(Q)$, mesmo considerando apenas domínios constantes.

Empregando uma refinada (e complexa) combinação de semântica de vizinhanças com semântica de feixes, Kishida desenvolve com sucesso extensões completas de primeira ordem para *LAP* com um único agente e considerando apenas anúncios públicos de sentenças fechadas. O elevado nível técnico de seu *framework* se deve ao interesse em evitar o fecho epistêmico dos enunciados condicionais, nem tanto pela preocupação com o problema da onisciência lógica, mas principalmente pelo interesse em formalizar sua interpretação do operador epistêmico como representando uma espécie de *conhecimento verificável*.

Nesta tese, forneceremos axiomatizações para $LAP(Q)$ sem aquelas restrições – ou seja, para qualquer quantidade finita de agentes e quaisquer anúncios públicos (inclusive de fórmulas abertas). Além disso, na exposição preliminar ao capítulo sobre $LAP(Q)$ nesta tese, discutiremos rapidamente em que outros aspectos nossa apresentação difere da de Kishida, e justificaremos filosoficamente nossas preferências.

Apesar da aparente simplicidade de *LAP* e de seu *status* subalterno ao de *LED*, o interesse por aquela lógica tem estado bastante presente nos recentes simpósios internacionais sobre lógica modal, ciência da computação e inteligência artificial, como se pode atestar a partir das referências citadas. Contudo, em nosso levantamento bibliográfico, talvez devido a buscas insuficientes, para nossa surpresa, não encontramos publicações de pesquisadores nacionais sobre o assunto, justificando ainda mais a importância de nossa pesquisa.

1.6 OBJETIVOS E ESTRUTURA DESTE TRABALHO

Embora uma apreciação adequada das contribuições desta tese talvez requeira a leitura prévia do segundo e do quinto capítulos, uma descrição de nossos objetivos específicos pode mostrar-se útil neste momento, em particular para aqueles leitores já familiarizados com o assunto.

De modo geral, pretendemos oferecer um tratamento formal para as mudanças de estado epistêmico, tanto em agentes individuais como em grupos de agentes, combinando *LAP* com os recursos de uma linguagem de primeira ordem. Especificamente, detalharemos sistemas axiomáticos corretos e completos para $LE(Q)$, tanto em sua versão típica (com operadores epistêmicos indexados por agentes) como em sua versão com operadores de conhecimento distribuído em grupos de agentes. Daí, faremos o mesmo para as extensões daqueles sistemas obtidas pelo acréscimo de operadores de anúncio público em sua gramática.

Nossa estratégia formal deverá ser capaz de lidar com o problema das identidades contingentes em contextos epistêmicos, e, além disso, se desenvolverá a partir de uma opção, filosoficamente justificada ao longo do texto, pela quantificação atualista (enquanto contraposta a uma possibilista) como primitiva na linguagem adotada.

A originalidade de nosso tratamento consiste na combinação das características que passamos a descrever.

Providenciaremos uma semântica apropriada e relativamente simples, com modelos relacionais, para anúncios públicos que contenham fórmulas de primeira ordem e múltiplos agentes epistêmicos. O desafio deste empreendimento envolverá lidar adequadamente com os objetos no domínio de quantificação após a atualização do modelo epistêmico. A única tentativa bem sucedida anterior[17] resolveu o problema comprometendo-se com domínios disjuntos entre si e, portanto, com objetos que não podiam pertencer a mais de um domínio de quantificação ao longo dos pontos de um modelo. Além disso, até onde sabemos, o caso multiagente não está disponível na literatura.

Nossa contribuição utiliza modelos relacionais típicos, nos quais, em que pese a exigência de domínios (possivelmente) variáveis em diferentes pontos de um modelo, objetos possam pertencer a mais de um desses domínios. O caso particular com objetos *world-bounded* é imediatamente derivável com a restrição apropriada e será ignorado.

Forneceremos axiomatizações corretas e completas em relação a essa semântica, tanto para $LE(Q)$ como para $LAP(Q)$, abrangendo sistemas epistêmicos nos estilos que o jargão modal convencionou chamar de *K*, *T*, *S4* e *S5*, inclusive nas respectivas versões com operadores de conhecimento distribuído.

Nossa contribuição mais importante, combinados todos os aspectos supracitados, será a apresentação inédita de $LAP(Q)$ *propriamente dita* e não de uma versão restrita, uma vez que a literatura disponível limitava-se a um fragmento de linguagem de primeira ordem, no qual o conteúdo dos anúncios somente poderia consistir em fórmulas fechadas (sem variáveis livres). Naturalmente, anúncios com fórmulas abertas também são informativos e não deveriam ser excluídos mediante restrições *ad hoc*.

Finalmente, tendo contextualizado o programa de pesquisa em *LAP*,

[17](KISHIDA, 2013).

suas delimitações e justificativas mais importantes, bem como os objetivos de nossa contribuição particular, a estrutura geral deste trabalho pode agora ser descrita.

Nesta tese, estudaremos duas *famílias* de sistemas de primeira ordem para *LE* (estática), uma contendo apenas os operadores epistêmicos usuais para agentes, e outra contendo também operadores de conhecimento distribuído para grupos de agentes. Os resultados, desenvolvidos ao longo de três capítulos, apesar de terem sido incluídos por sua relevância para o estudo de *LAP* de primeira ordem, têm um mérito por si mesmos; pois, embora a lógica modal de primeira ordem conte com bastante literatura publicada,[18] não é fácil encontrar uma apresentação voltada especificamente para $LE(Q)$.[19] Em particular, o detalhamento de sistemas epistêmicos mais fracos do que *S5* contendo operadores de conhecimento distribuído, até onde conseguimos investigar, não está disponível na literatura, nem depende de demonstrações triviais a partir das disponíveis.

Aproveitaremos também o capítulo preliminar sobre $LE(Q)$, de caráter predominantemente discursivo, para tecer algumas considerações acerca de nossas escolhas metodológicas; em especial, faremos uma defesa filosófica do emprego de quantificadores atualistas em nosso *framework*, com curiosas consequências para o debate acerca dos esquemas conhecidos como *Fórmula de Barcan* e sua recíproca (incluídas em apêndice no final).

Os capítulos subsequentes explorarão extensões de primeira ordem para *LAP*, a partir dos sistemas para $LE(Q)$ apresentados nos capítulos anteriores. Além de propormos uma semântica para essas extensões, forneceremos axiomatizações completas para duas famílias de $LAP(Q)$, estendendo cada sistema das outras duas famílias mencionadas acima para $LE(Q)$. Esse estudo será também precedido por um capítulo preliminar, no qual discutiremos as características mais interessantes de nossa proposta, aprofundando os pontos indicados acima nesta seção.

No capítulo final, como de praxe, avaliaremos os resultados obtidos, apontando, a partir deles, diversas possibilidades de pesquisa futura, estendendo ou variando os recursos disponibilizados neste trabalho.

[18] Sobre lógicas modais de primeira ordem, ver, por exemplo, os manuais clássicos escritos por Hughes e Cresswell (1996) e Blackburn et al. (2002), mas também van Benthem (2010), Carnielli e Pizzi (2009), e especialmente Fitting e Mendelsohn (1999).

[19] Ver, entretanto, os artigos de Belardinelli e Lomuscio (2009b, 2007, 2008) para diversas variações em sistemas com propriedades de *S5*.

2 SOBRE LÓGICAS EPISTÊMICAS DE PRIMEIRA ORDEM

Como a lógica do anúncio público consiste em uma extensão da lógica epistêmica (estática), é natural que quaisquer escolhas metodológicas ou preferências formais no tratamento da lógica epistêmica de base acarretem algum tipo de consequência ao construirmos sua extensão dinâmica, o que certamente também é o caso com uma lógica do anúncio público de primeira ordem (ou $LAP(Q)$) que estende $LE(Q)$. (Por comodidade, usaremos de agora em diante $LAPQ$ e LEQ, respectivamente, em vez de $LAP(Q)$ e $LE(Q)$.)

O interesse geral por linguagens de primeira ordem é claramente justificável quando pensamos em termos de expressividade. Se pretendemos explorar a atribuição de conhecimento acerca de propriedades ou relações envolvendo objetos (indivíduos), precisamos de uma linguagem contendo, no mínimo, termos individuais, símbolos de predicados e os quantificadores usuais. No caso de extensões quantificacionais para a lógica modal, o ganho em expressividade nos permite formalizar sutilezas muito importantes na consideração daquelas propriedades e relações.

A ilustração paradigmática para esse aumento de expressividade consiste na capacidade de distinguir claramente entre atribuições *de re* e *de dicto* em asserções modais. Consideremos, por exemplo, a seguinte sentença, gramaticalmente correta, porém ambígua na linguagem natural:

(1) É necessário que o número de satélites naturais da Terra seja ímpar.

Uma análise mais detida revela pelo menos duas interpretações distintas de (1), tornadas explícitas a partir de um rearranjo gramatical, das quais uma é falsa e outra verdadeira; a saber, respectivamente:

(2) É necessário que a Terra tenha uma quantidade ímpar de satélites naturais.

(3) O número que de fato corresponde à quantidade de satélites naturais da Terra é necessariamente ímpar.

A interpretação (2), envolvendo uma modalidade *de dicto*, corresponde ao reconhecimento de que qualquer objeto que satisfaça a descrição "número de satélites naturais da Terra" obrigatoriamente satisfará a propriedade "número ímpar"; enquanto (3) afirma, através de uma atribuição de modalidade *de re*, acerca do número 1, denotado pela descrição "número de satélites naturais da Terra", que este tem que possuir a propriedade de ser um número ímpar. Empregando a notação usual, tanto da linguagem de primeira ordem, como da linguagem modal (alética), podemos facilmente distinguir as duas leituras, que resultariam, respectivamente, em:[1]

(4) $\Box\forall x(Sat(x) \rightarrow Imp(x))$

(5) $\forall x\Box(Sat(x) \rightarrow Imp(x))$

Se reinterpretarmos as asserções acima em termos de modalidade epistêmica, perceberemos mais nuances expressivas:

(6) $\mathscr{K}_a\forall x(Sat(x) \rightarrow Imp(x))$

(7) $\forall x\mathscr{K}_a(Sat(x) \rightarrow Imp(x))$

significando respectivamente:

(8) O agente *a* sabe que a Terra possui uma quantidade ímpar de satélites naturais.

(9) Acerca da quantidade de satélites naturais da Terra, o agente *a* sabe que é uma quantidade ímpar.

Ou seja, a leitura (9) pressupõe que o agente epistêmico *a* sabe de que quantidade específica estamos falando, o que não é garantido pela leitura (8), a qual apenas enuncia que *a* sabe, para qualquer que seja a quantidade de satélites em questão, que é uma quantidade ímpar (sem necessariamente saber que se trata de apenas um satélite).

Obviamente, por admitirem valores distintos, as proposições (2) e (3) não se equivalem em geral; tampouco é o caso entre (8) e (9). Essa peculiaridade deve ser contemplada em um tratamento formal adequado para *LEQ*, e, como veremos mais adiante, está relacionada com o debate envolvendo os chamados *Esquemas de Barcan*.

Infelizmente, o custo para se alcançar maior expressividade de uma linguagem costuma ser desproporcionalmente alto, exigindo com frequência que sacrifiquemos a decidibilidade de teorias e, pior ainda, sua completude. São resultados bem conhecidos em lógica que ao se avançar em expressividade da lógica proposicional clássica — decidível e completa — para a lógica clássica de primeira ordem, esta resulta indecidível mas ainda completa; e, se estendermos mais a linguagem para uma quantificação de segunda ordem, mesmo a completude (pelo menos com respeito a sua semântica *standard*) é perdida.

A propósito, vale a pena lembrar que os sistemas mais conhecidos de lógica modal proposicional – por exemplo, *T*, *S4* ou *S5* – são tidos como um

[1] Por simplicidade, estamos deliberadamente omitindo na formalização a cláusula de unicidade correspondente ao artigo definido na descrição.

meio termo entre a lógica clássica proposicional (decidível) e sua extensão de primeira ordem (indecidível), ampliando a expressividade daquela sem necessariamente comprometer a decidibilidade da teoria. Essa situação peculiar da lógica modal proposicional permite, inclusive, investigar com mais clareza os limites da decidibilidade ao se estender teorias, na medida em que sua tradução padrão para a lógica clássica de primeira ordem delimita um fragmento decidível desta, permitindo a comparação com outros de seus fragmentos decidíveis (como o *fragmento monádico* e o *fragmento guardado* — ou *guarded fragment*).[2]

De todo modo, tendo apresentado as justificações acima para se construir extensões de primeira ordem para a lógica epistêmica, diversas considerações preliminares ainda precisam ser feitas, antes de nos dedicarmos a análises mais técnicas de caráter estritamente lógico.

2.1 BREVE REVISÃO DE LITERATURA

A esta altura, importa saber o quanto está desenvolvido o estudo de *LEQ*. Aparentemente, considerando-se que há bastante literatura disponível acerca da lógica modal de primeira ordem, poderíamos pensar que a elaboração de *LEQ* envolve uma simples reinterpretação epistêmica dos operadores modais usuais, e todo o resto se comportaria de maneira similar ao caso alético. Ocorre que, como vimos anteriormente, mesmo em se tratando de suas versões proposicionais, a reinterpretação epistêmica daqueles operadores já tem um impacto significativo na teoria subsequente, no mínimo devido a três fatores: (i) por requerer um tratamento multimodal no caso de sistemas multiagentes, (ii) por considerar operadores peculiares para grupos de agentes — como os de conhecimento universal, distribuído e comum — e (iii) de um ponto de vista mais epistemológico, por suscitar a preocupação com o formalismo adequado para a atribuição de atitudes epistêmicas.

Acerca deste último fator, que enfrentará ainda maiores complicações no caso quantificacional (de primeira ordem), em se tratando da interpretação típica para o operador epistêmico forte — como representando atribuição de *conhecimento consciente e explícito* a um agente —, mesmo a axiomatização mais simples para uma lógica modal normal (o sistema *K*) parece filosoficamente indigesta, dado o seu compromisso implícito com algum tipo de *onisciência lógica* por parte dos agentes epistêmicos. Essa onisciência

[2] Um breve estudo comparativo da decidibilidade de alguns desses fragmentos pode ser encontrado em van Benthem (2011, cap. 7). A lógica *modal temporal* de primeira ordem também admite pelo menos um fragmento decidível: o monódico (WOLTER; ZAKHARYASCHEV, 2002).

lógica estaria garantida pelo fecho epistêmico em enunciados condicionais e pela regra de necessitação — ver início da Seção 1.4. Entretanto, a despeito de sua importância epistemológica, uma discussão satisfatória sobre esse assunto nos desviaria dos propósitos principais desta tese, e será omitida aqui.[3]

Adicionalmente, em que pese o fato de que, mesmo em suas versões aléticas, as extensões de primeira ordem para a lógica modal apresentem numerosas peculiaridades e (inesperadas) complicações,[4] a reinterpretação epistêmica dos operadores modais combinada com uma linguagem dotada de quantificadores e, especialmente, um símbolo para a relação de identidade nos obriga a decidir entre diferentes estratégias de formalização, na tentativa de encontrar aquela que melhor se adeque às nossas intuições e preferências filosóficas.

Pois bem, até onde pudemos constatar, a literatura tratando explicitamente de *LEQ* é bem escassa quando comparada a outras lógicas modais de primeira ordem (como, por exemplo, a alética[5] ou a temporal[6]), o que, por outro lado, facilita o levantamento do que ainda precisa ser explorado.

A esse respeito, destacamos aqui uma série de artigos produzidos por Belardinelli e Lomuscio. Em "Quantified Epistemic Logic with Flexible Terms" (2007), aqueles autores exploram uma axiomatização para *LEQ* admitindo termos intensionais (cuja denotação varia em cada ponto do modelo); em "A Complete First-Order Logic of Knowledge and Time" (2008), eles detalham a combinação de *LEQ* com operadores temporais usuais, mas sem incluir termos intensionais na linguagem e sem explorar a interação entre operadores epistêmicos e temporais; em "First-Order Linear-Time Epistemic Logic with Group Knowledge: An Axiomatisation of the Monodic Fragment" (2009a) e "Interactions between Time and Knowledge in a First-Order Logic for Multi-Agent Systems" (2010), avançam ainda mais ao explorar esse tipo de interação; e, finalmente, o que nos interessa mais de perto, em "Quantified epistemic logics for reasoning about knowledge in multi-agent systems" (2009b), aqueles autores dedicam-se a uma extensa análise, muito técnica e

[3]Para tentar solucionar esse problema, uma linha promissora de investigação se volta para as lógicas não-normais. A respeito das lógicas não-normais, nas quais não valem, em geral, nem a distribuição do operador modal forte em enunciados condicionais, nem a regra de necessitação, ver Hughes e Cresswell (1996) e Chellas (1980).

[4]Garson (1984) examina detalhadamente mais de uma dezena de formulações bem distintas para a lógica modal (alética) de primeira ordem, cada uma desenvolvida a partir de justificativas filosóficas muito específicas. Naturalmente, esse desconcertante panorama nem chega a incluir importantes contribuições posteriores, como, por exemplo, a família de sistemas *FOIL* desenvolvidos por Fitting (2006) ou aqueles apresentados antes em Fitting e Mendelsohn (1999).

[5]Ver Garson (1984), Hughes e Cresswell (1996), Fitting e Mendelson (1999), Fitting (2006), para citar apenas algumas referências mais conhecidas.

[6]Uma investigação extensa e detalhada pode ser encontrada em Gabbay (1994), além de uma profusão de outras publicações.

detalhada, de *LEQ*, em sua versão estática e sem modalidades temporais.

Em todos os artigos supracitados, a ênfase é totalmente voltada para aplicações na ciência da computação e em inteligência artificial, com um considerável espaço dedicado a ilustrar aplicações dos resultados naquelas áreas. Por essa mesma razão, o tratamento semântico por eles privilegiado consiste no uso de *sistemas interpretados*, uma semântica concebida para modelar as transições entre estados de um sistema computacional. Os autores estendem a formulação original da semântica de sistemas interpretados (FAGIN et al., 1995) de modo a servir para a interpretação de linguagens de primeira ordem, produzindo assim os *sistemas interpretados quantificados*. Por razões práticas, entretanto, para efeito de demonstração dos metateoremas usuais, é sempre fornecida uma estratégia rigorosa de mapeamento desses sistemas interpretados em modelos relacionais (estilo kripkeano) e vice-versa, sendo a completude provada da maneira usual (via modelos canônicos). De todo modo, os resultados alcançados são muito importantes e com aplicações promissoras em diversas áreas.

A motivação daqueles artigos, voltados prioritariamente para aplicações computacionais, induz seus autores a restringir-se a axiomatizações de *LEQ* com propriedades dos sistemas modais conhecidos como *S5*, de maneira a implementar a semântica adotada.

A justificativa é simples. Como é de conhecimento notório no estudo das lógicas modais, o comportamento dos operadores epistêmicos em *S5* é adequadamente caracterizado pelas estruturas (ou *frames*) relacionais cujas relações de acessibilidade sejam relações de equivalência. Ocorre que, na semântica de sistemas interpretados, seus modelos dispensam as relações de acessibilidade e a interpretação dos operadores epistêmicos é definida exatamente a partir da coincidência entre os *estados locais* de um dado agente em diferentes estados globais do sistema. O estado local corresponde intuitivamente ao conjunto de informações que um agente possui, e um estado global do sistema corresponde, grosseiramente falando, a um cenário (ou mundo) possível; portanto, se o estado local do agente é exatamente o mesmo em estados globais diferentes, isso só pode significar que esse agente não sabe a diferença entre as duas situações. Essa *indistinguibilidade entre estados globais* na perspectiva do agente epistêmico funciona obviamente como uma relação de equivalência.

Em consequência, os axiomas característicos de *S5* são *validados automaticamente ao descrevermos os sistemas interpretados*, sem a necessidade de especificarmos quaisquer comportamentos das relações de acessibilidade (que sequer existem naquela semântica), e isso é bastante satisfatório para aplicações computacionais, nas quais sistemas epistêmicos com aquelas características são os mais apropriados. Teorias modais no estilo *S5*, por admitirem perfeitamente uma semântica de sistemas interpretados, se incluem, portanto, entre as teorias ditas *computacionalmente fundadas*.

Em linhas gerais, uma teoria é computacionalmente fundada quando pode ser interpretada de maneira bem sucedida em uma semântica capaz de modelar o comportamento de um programa computacional – ou seja, sua classe de execuções (WOOLDRIDGE, 2000). Isso não precisa ser feito diretamente, podendo ser resultado de um mapeamento preciso do comportamento desse programa em um conjunto de fórmulas da linguagem lógica que sejam modeladas por aquela semântica, como é o caso de sistemas epistêmicos do tipo *S5*.

Contudo, de um ponto de vista mais filosófico do que computacional, qualquer formulação de uma lógica epistêmica que inclua, como faz *S5*, o princípio sintático $\hat{\mathscr{K}}_i\varphi \rightarrow \mathscr{K}_i\hat{\mathscr{K}}_i\varphi$ (ou, em sua notação alética, mais conhecida: $\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$), o qual corresponde a estruturas relacionais euclideanas, tende a sofrer rejeição por parte dos filósofos do conhecimento; uma vez que a interpretação epistêmica de um princípio que lhe é equivalente corresponde intuitivamente à propriedade da *introspecção negativa*: $\neg\mathscr{K}_i\varphi \rightarrow \mathscr{K}_i\neg\mathscr{K}_i\varphi$ — ou seja, se um agente não sabe que algo ocorre, então ele sabe que não sabe disso. Excluindo-se as aplicações computacionais, a introspecção negativa é uma propriedade que causa ainda mais estranheza do que a admissão do fecho epistêmico e da introspecção positiva.

Diferente dos autores acima, a preocupação eminentemente filosófica é o que distingue outra contribuição para o estudo de *LEQ*, bem mais recente, que precisa ser citada em razão de sua importância: "Roles, Rigidity, and Quantification in Epistemic Logic" (HOLLIDAY; PERRY, 2014). Trata-se de uma rica e detalhada discussão epistemológica acerca das interações entre modalidades epistêmicas e aléticas, implementando recursos da lógica intensional de primeira ordem (*FOIL*) desenvolvida por Fitting (2006) — por isso mesmo, a exposição, embora bastante rica em formalismo, não se ocupa com detalhes formais além do estritamente necessário para empreender as análises dos vários problemas filosóficos que lhe interessam, remetendo ao artigo sobre *FOIL* para outros aspectos técnicos (como axiomatização, completude, etc.).

A motivação dos autores, na verdade, deve-se muito mais a peculiaridades no comportamento da modalidade doxástica $\mathscr{B}$ (representando a atitude de crença), cuja interpretação semântica *standard* (via relações de acessibilidade entre estados de um modelo), é considerada uma espécie de caso mais geral (menos restrito) do que o da modalidade epistêmica propriamente dita (sendo que a acessibilidade doxástica, diferente da epistêmica, não seria necessariamente reflexiva, mas apenas serial). Isso coloca, claro, a atitude epistêmica como um subcaso próprio da atitude doxástica (saber inclui necessariamente acreditar, mas não vice-versa).

A título de informação, embora essa perspectiva seja a predominante na epistemologia contemporânea, diversos autores têm questionado essa relação entre conhecimento e crença. Em particular, a *tese do acarretamento* — ou seja, a ideia de que conhecimento acarreta crença: $\mathscr{K}_i\varphi \to \mathscr{B}_i\varphi$ — vem sendo criticada em diversas publicações, apesar da forte resistência em contrário. Ver, por exemplo, Armstrong (1969), Halpern (1996), Williamson (2000), Myers-Schulz e Schwitzgebel (2013), Murray et al. (2013).

2.2 O QUE ESPERAR DE *LEQ*?

A revisão de literatura acima nos conduz a outra consideração preliminar: quais interesses heurísticos nortearão nosso estudo, uma vez que numerosas possibilidades estão disponíveis? Nos próximos capítulos, estaremos interessados em formulações de *LEQ* que atendam às seguintes diretrizes:

(i) que explorem também formalizações mais *fracas* do que *S5* para atitudes epistêmicas;
(ii) que distingam os domínios de quantificação em cada estado epistêmico, os quais devem ser variáveis;
(iii) que levem em conta asserções contingentes acerca da identidade de indivíduos;
(iv) que preferencialmente admitam axiomatizações completas, de modo a permitir comparação com suas extensões dinâmicas de primeira ordem, nesse quesito.

Sobre o primeiro ponto: *S4* foi a opção original em Hintikka (2005) para a lógica epistêmica, mas os autores têm diversificado as escolhas por sistemas variando de *S4* a *S5*. Lenzen (2003), por exemplo, propõe que um sistema aceitável para a lógica epistêmica deveria situar-se entre *S4.2* e *S4.4*, enquanto *S4.3* é a escolha em van der Hoek (1993) e *S5* em van Ditmarsch et al. (2007).

Como não faz sentido falar em uma lógica epistêmica na qual não valha o princípio da veridicalidade — só é possível saber que uma informação é o caso quando essa informação for de fato o caso —, também conhecido como esquema **T**, e tendo em vista a razoabilidade do princípio de introspecção positiva — se um agente sabe que algo é o caso, então ele sabe que sabe disso —, também conhecido como esquema **4** ou ainda **KK**, nossa preferência estaria com alguma base axiomática que contenha pelo menos o sistema *S4*. (A propósito, em Hintikka (2005), a defesa desse princípio **4** nem mesmo depende da consideração de faculdades introspectivas por parte do agente epistêmico, sendo simplesmente reduzida a uma questão de redundância linguística.)

De todo modo, examinaremos neste trabalho axiomatizações para versões de primeira ordem dos sistemas epistêmicos *K*, *T*, *S4* e *S5*. Porém, como nosso foco principal é estabelecer formulações razoáveis de *LEQ* e estendê-las para a lógica do anúncio público, não nos aprofundaremos na comparação filosófica entre os diversos sistemas, os quais, embora muito importantes, mereceriam mais espaço em um trabalho voltado exclusivamente para *LEQ*, o que não é o presente caso.

Além disso, em nossa investigação, não nos ocuparemos com a tentativa de desenvolver tratamentos lógicos que enfraqueçam ou eliminem a chamada onisciência lógica por parte dos agentes epistêmicos, o que provavelmente nos conduziria ao território das lógicas não-normais e ao consequente abandono da semântica relacional em favor de outras candidatas promissoras, como a semântica de vizinhanças. Essas possibilidades, por razões óbvias, serão deixadas para trabalhos futuros.

Ainda a esse respeito, em que pese o fato de que modelos que satisfaçam alguma propriedade de onisciência lógica se mostrem obviamente inadequados para representar a atribuição de atitudes epistêmicas a agentes humanos (dotados, portanto, de racionalidade limitada e sujeitos a diversos erros de julgamento), o emprego desses modelos tem servido como referência ou ponto de partida no desenvolvimento de modelos mais refinados que atendam a objetivos específicos (inclusive a representação de uma racionalidade limitada), justificando a manutenção do seu interesse intrínseco. Além disso, cenários idealizados, como o de modelos que prevejam a onisciência lógica de agentes, servem a diversos propósitos argumentativos, de maneira similar às idealizações na base das ciências empíricas, cujos resultados podem depois ser implementados em cenários mais factíveis.[7]

Quanto aos demais pontos, serão comentados em sequência ao longo das próximas seções. Dentro dos limites estabelecidos por esses quatro requisitos, tentaremos, portanto, preencher uma lacuna muito específica, além de filosoficamente motivada.

2.3 QUANTIFICAÇÃO POSSIBILISTA OU ATUALISTA?

Como se sabe,[8] adicionar o aparato clássico de primeira ordem aos sistemas modais normais valida (semanticamente) de modo automático os

[7] Ver Holliday (2014, Seção 7). Para discussões acerca do emprego de idealizações em epistemologia, ver Hendricks e Roy (2010, cap. 25).

[8] Ver, por exemplo, Hughes e Cresswell (1996, cap. 13), para maiores detalhes.

esquemas conhecidos como *Fórmula de Barcan* e sua recíproca, respectivamente enunciados a seguir:

(*FB*) $\forall x\Box\varphi \rightarrow \Box\forall x\varphi$ (ou, equivalentemente: $\Diamond\exists x\varphi \rightarrow \exists x\Diamond\varphi$)

(*RFB*) $\Box\forall x\varphi \rightarrow \forall x\Box\varphi$ (ou, equivalentemente: $\exists x\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\exists x\varphi$)

Ao longo deste trabalho, usaremos, como acima, a expressão "esquemas de Barcan" para nos referirmos de modo ambíguo tanto à *Fórmula de Barcan* como à *Recíproca da Fórmula de Barcan*. Posteriormente, também usaremos, nos capítulos sobre *LAPQ*, a expressão "Esquema de Barcan" (no singular) para indicar *a conjunção* da Fórmula de Barcan e sua recíproca — ou, o que dá no mesmo, para nos referirmos ao resultado de substituirmos o operador condicional pelo bicondicional na Fórmula de Barcan:

(*EB*) $\forall x\Box\varphi \leftrightarrow \Box\forall x\varphi$ (equivalentemente: $\Diamond\exists x\varphi \leftrightarrow \exists x\Diamond\varphi$)

Uma das primeiras informações que aprendemos no estudo da lógica modal de primeira ordem é de que o esquema (*RFB*) pode ser derivado como teorema a partir das regras de inferência usuais tão logo adicionemos o sistema axiomático *K* ao cálculo clássico de predicados. Além disso, sabemos que o esquema (*FB*) é derivável em qualquer sistema normal que inclua o sistema *B*; por isso, em sistemas como *S4* ou mesmo *K*, o esquema (*FB*) precisa ser acrescentado ao conjunto de axiomas de modo a garantir uma axiomatização completa.[9]

Isso foi percebido bem cedo na literatura, e tem motivado um amplo debate, tanto de uma perspectiva puramente formal como filosófica. O ponto principal consiste nos fatos de que (*FB*) corresponde semanticamente a modelos com domínios *antimonotônicos* — ou seja, os mundos acessíveis a partir de um mundo *w* não podem conter em seus domínios mais indivíduos do que o domínio de *w* — e de que (*RFB*) corresponde a modelos com domínios *monotônicos* [10] — ou seja, os mundos acessíveis a partir de *w* não podem conter menos indivíduos em seus respectivos domínios do que o domínio de *w*.

As primeiras formulações de primeira ordem para a lógica modal pressupunham um modelo com domínio único; portanto, o domínio resultava constante em cada mundo do modelo (CARNAP, 1947). Contudo, rapidamente se tornou óbvio que essa estratégia não era apropriada em qualquer caso. Por exemplo, ao interpretarmos os operadores modais como expressando modalidades temporais — isto é, exercendo uma modificação no tempo

[9] O esquema (*FB*), contudo, surgiu primeiro em uma extensão de primeira ordem para o sistema não-normal/lewisiano *S2* em Barcan (1946).

[10] Também conhecidos como modelos com "domínios aninhados" (*nested domains*), a opção empregada em Hughes e Cresswell (1996).

verbal (*tense logic*) das proposições envolvidas —, ambos os esquemas de Barcan se tornam contraintuitivos.

É fácil mostrar isso. Seja o operador modal fraco $\Diamond$ significando, como numa lógica temporal típica, a modalidade "será o caso que" e $P(x)$ a fórmula (aberta) "x é autor de *Naming and Necessity*". Tomando cada ponto do modelo, não como um mundo possível, mas como instantes no tempo, e fazendo seus domínios consistirem nos indivíduos existentes naquele momento; em algum dia do ano 1939, a seguinte asserção, se enunciada, seria verdadeira:

(10) Existirá alguém que será autor de *Naming and Necessity*.

que corresponde simbolicamente a

(11) $\Diamond \exists x P(x)$

Contudo, não seria razoável afirmar, nas mesmas circunstâncias, que:

(12) Existe alguém que será autor de *Naming and Necessity*.

Ou seja, que

(13) $\exists x \Diamond P(x)$

uma vez que, naquele ano, Saul Kripke ainda não havia nascido.

Essa situação é aparentemente incompatível com (*FB*), conforme enunciada acima. É igualmente simples conceber contraexemplos intuitivos também para (*RFB*), empregando a mesma linha de raciocínio na outra direção (indivíduos que deixam de existir em algum momento).

Além disso, mesmo em uma interpretação intuitiva para o caráter alético (não temporal) das modalidades, causa estranheza conceber todos os mundos possíveis como contendo, em seus domínios, exatamente os mesmos indivíduos ou objetos; visto que é perfeitamente razoável raciocinar acerca de situações contrafactuais em que indivíduos que de fato existem poderiam não existir, ou vice-versa.

Uma defesa famosa, de cunho filosófico, para os esquemas de Barcan sustenta que a leitura adotada para os quantificadores deveria ser *possibilista* — ou seja, os quantificadores deveriam ser entendidos como variando sobre todos os indivíduos *possíveis*, quer de fato existentes, quer meramente possíveis não atuais. Toda a dificuldade que apontamos acima depende de uma leitura *atualista* dos quantificadores, a qual considera somente os indivíduos atualmente existentes — por exemplo, o quantificador existencial acarreta que há, de fato, pelo menos um indivíduo ou objeto que satisfaz a propriedade indicada.

Como seria de se esperar, um certo debate filosófico se desenvolveu a partir das posições possibilistas e atualistas. Naturalmente, não nos aventuraremos nessa direção aqui, por razões de espaço e delimitação investigativa; mas, comentaremos ainda um pouco mais sobre os aspectos formais relevantes, a fim de justificar nossa escolha metodológica pela quantificação atualista.

À primeira vista, de uma perspectiva puramente formal, a escolha por empregar modelos com domínios constantes ou com domínios variáveis em cada ponto parece pouco importante. Claramente, os resultados demonstrados para a última categoria deverão necessariamente se aplicar à primeira; uma vez que modelos com domínio constante em todos os seus pontos podem ser considerados como um caso específico na categoria dos modelos com domínios variáveis (de maneira análoga ao fato de que funções constantes são um caso particular de funções em geral).

Por outro lado, é sempre possível, a partir de um domínio único contendo todos os *possibilia* e uma linguagem com quantificadores possibilistas, trabalhar com domínios variáveis em cada ponto, bastando especificar subconjuntos do domínio geral do modelo como sendo domínios específicos associados a cada mundo, e adotar um predicado especial de existência para selecionar os indivíduos possíveis que de fato existem em cada mundo — i.e, os indivíduos que pertencem ao subconjunto (do domínio geral do modelo) associado àquele ponto.

Neste último caso, também é bastante simples introduzir quantificadores atualistas a partir dos quantificadores possibilistas primitivos. Digamos que Π seja o quantificador universal e Σ seja o existencial (ambos possibilistas). É sempre possível definir os quantificadores atualistas — digamos, $\forall$ para o universal e $\exists$ para o existencial –, na presença do predicado especial de existência E — satisfeito somente pelos objetos que definirmos como pertencendo ao domínio daquele mundo em particular —, da seguinte maneira:

(14) $\quad \forall x\varphi =_{def} \Pi x(\mathsf{E}(x) \rightarrow \varphi)$

(15) $\quad \exists x\varphi =_{def} \Sigma x(\mathsf{E}(x) \wedge \varphi)$

Uma peculiaridade digna de menção é de que mesmo na ausência de quantificadores possibilistas em nossa linguagem, é possível combinar uma quantificação atualista com um domínio que inclua todos os *possibilia*, desde que, como explicamos, se discriminem subclasses desse domínio para funcionarem como os domínios de quantificação em cada mundo.[11]

Dessa maneira, na presença de um símbolo para a relação de igualdade, mesmo o supracitado predicado de existência E é dispensável da lista

[11] Conforme veremos no próximo capítulo, essa será nossa escolha metodológica.

de símbolos primitivos, podendo ser introduzido por definição a partir do quantificador existencial atualista $\exists$, da seguinte maneira (onde t é um termo individual qualquer):[12]

(16) $\mathsf{E}(t) =_{def} \exists x(x = t)$

Para efeito ilustrativo, retomemos o exemplo envolvendo o autor de *Naming and Necessity* e acrescentemos o símbolo de constante individual s para representar Saul Kripke. Pela regra de generalização existencial do cálculo clássico de predicados, normalmente estamos habilitados a fazer a seguinte inferência:

(17) $\varphi(x/t) \Rightarrow \exists x\varphi$

onde, como usual, φ representa esquematicamente uma fórmula de nossa linguagem formal, e $\varphi(x/t)$ é o resultado de substituirmos cada ocorrência da variável x em φ, caso haja alguma, por algum termo individual t. Uma simples aplicação de (17) consiste em:

(18) $P(s) \Rightarrow \exists xP(x)$

Porém, ao combinar aquele cálculo com o aparato da lógica modal, uma das instâncias de aplicação de (17) seria:

(19) $\Diamond P(s) \Rightarrow \exists x \Diamond P(x)$

significando que, como no futuro Saul Kripke escreverá *Naming and Necessity*, podemos inferir que *existe* um indivíduo que no futuro escreverá aquele livro. Se interpretarmos o quantificador existencial como atualista, essa inferência se torna inaceitável, porque, como vimos, (11) pode ser verdadeira e (13) falsa no mesmo ponto do modelo (por exemplo, em 1939).

Como já indicamos, uma solução consiste em considerar o quantificador existencial como possibilista, significando que há (sempre houve, e sempre haverá) um *indivíduo possível*, ainda que não existente *de fato*, e que esse indivíduo específico em algum momento futuro escreverá o livro em questão.

Consideramos que essa é uma posição razoável de um ponto de vista formal, porém metafisicamente muito comprometedora. Não nos deteremos explorando os detalhes dessa polêmica filosófica, mas faremos alguns comentários justificando nossa opção pelo emprego de quantificadores atualistas.

Talvez haja casos em que, na linguagem ordinária, empreguemos os quantificadores "para todo" e "para algum" de maneira inequívoca em suas acepções possibilistas; porém, acreditamos que o uso mais natural (ou mais

[12]Para mais detalhes, remetemos o leitor a Hughes e Cresswell (1996, p.303), bem como Fitting e Mendelsohn (1999, p.106).

frequente) seja a leitura "para todos os indivíduos existentes" e "existe de fato pelo menos um indivíduo".

Por exemplo, suponhamos que nosso domínio de quantificação inclua somente seres humanos. Quando dizemos

(20) Todos os seres humanos possuem os mesmos direitos básicos

parece óbvio que estamos considerando indivíduos atuais — é no mínimo contraintuitivo, senão bizarro, pretender que um indivíduo meramente possível (não existente) — digamos, Sherlock Holmes — *tenha efetivamente* direitos básicos (liberdade, moradia, etc.)!

Em uma situação menos óbvia, dependendo do contexto, podemos sim estar falando de todo ser humano em qualquer época, inclusive os que já não mais existem e aqueles que ainda virão a existir — uma quantificação, pelo menos em certa medida, possibilista.[13] Neste último caso, porém, parece bastante razoável sermos cobrados por nossos interlocutores acerca da abrangência (inusual) pretendida por nosso uso de quantificadores.

Normalmente, em asserções com essa quantificação possibilista, se o próprio contexto não deixar clara nossa intenção (por meio, digamos, de uma implicatura conversacional), precisaremos qualificar de modo explícito a abrangência do quantificador.

Como, à primeira vista, (20) parece uma situação incompatível com uma leitura possibilista do quantificador usado na linguagem natural, consideremos o que nos vem à mente ao ouvirmos uma asserção aparentemente mais suscetível a essa leitura:

(21) Todos os seres humanos são mamíferos.

Devido ao caráter normativo frequentemente implícito nessa asserção — não se trata de uma simples generalização acidental a partir da constatação de que todos os humanos contabilizados em uma certa lista finita são mamíferos, mas de uma classificação taxonômica necessariamente verdadeira —, o sentido usual pretendido é algo como:

(22) Todos os seres humanos, tanto os que existem, como os que já existiram e os que virão a existir, são mamíferos.

Entretanto, nosso entendimento é de que essa ampliação do domínio quantificado se deve ao caráter normativo da proposição, e, portanto, a uma quali-

[13] Por simplicidade, estamos acompanhando os exemplos anteriores, concebidos em um *framework* apenas temporal. Dependendo das preferências metafísicas do leitor, uma qualificação exaustiva para a abrangência necessária do exemplo em questão deveria incluir também os humanos que poderiam ter existido/vir a existir, mas que nunca existiram nem existirão.

ficação modal desta, uma qualificação que nos induz a considerar uma variedade de domínios (não necessariamente disjuntos entre si). Essa ampliação do domínio quantificado para incluir os *possibilia* não se mostra intrínseca ao comportamento do quantificador, o qual está sempre considerando indivíduos atuais *em cada ponto*, mesmo que apenas possíveis para os demais pontos.

Nossa posição é de que a leitura atualista dos quantificadores não apenas corresponde mais proximamente aos quantificadores da linguagem natural, como também é mais precisa; visto que uma ampliação do domínio quantificado requer uma qualificação adicional (ainda que esta permaneça apenas implícita no contexto de enunciação) a fim de comunicar o sentido ampliado pretendido.

Assim, como a qualificação da abrangência do quantificador parece ser mais razoavelmente cobrada na segunda situação (considerando todos os *possibilia*) do que na primeira (considerando apenas indivíduos atuais), optaremos neste trabalho por considerar a quantificação atualista como mais *primitiva*, por assim dizer, espelhando o uso ordinário da linguagem cotidiana.

Apesar de haver referências na literatura de que linguagens com quantificadores possibilistas são *mais expressivas* do que aquelas adotando apenas quantificadores atualistas (CRESSWELL, 1991), e que, a despeito destes poderem ser definidos a partir daqueles (como acabamos de mostrar), aqueles não teriam como ser definidos a partir destes, parece-nos que essa conclusão precisa ser aceita *cum grano salis*.

Consideremos as definições abaixo para novos quantificadores (*candidatos a* possibilistas) Π' e Σ' a partir dos quantificadores atualistas correspondentes:

(23) $\Pi' x\varphi =_{def} \forall x\varphi \wedge \Box\forall x\Box\varphi$

(24) $\Sigma' x\varphi =_{def} \exists x\varphi \vee \Diamond\exists x\Diamond\varphi$

o que, em estruturas (*frames*) reflexivas, reduz-se a:

(23′) $\Pi' x\varphi =_{def} \Box\forall x\Box\varphi$

(24′) $\Sigma' x\varphi =_{def} \Diamond\exists x\Diamond\varphi$

Claramente, Π' e Σ' são duais entre si, mas será que simulam o comportamento de seus análogos Π e Σ? Em outras palavras, será que as definições que propusemos em (23) e (24) resultam suficientes para caracterizar os correspondentes quantificadores possibilistas?

A resposta é de que, a rigor, elas só funcionariam exatamente como quantificadores possibilistas (no sentido explicado antes) em modelos nos quais todos os mundos fossem acessíveis entre si (acessibilidade universal). Bastaria um mundo inacessível a um ponto de avaliação, e cujo domínio particular contivesse pelo menos um indivíduo não pertencente a qualquer outro domínio acessível ao mesmo ponto, para que as definições propostas falhem como caracterizando uma quantificação possibilista irrestrita.[14]

Sendo assim, por que sugerimos acima que a maior expressividade da quantificação possibilista em relação à atualista deveria ser aceita com ressalvas? Devemos considerar o fato de que, numa semântica relacional típica, só faz sentido falar em possibilidades *relativas a cada ponto*. Desse modo, mesmo que Π' e Σ' se comportem como uma espécie de quantificadores possibilistas *relativos*, pensamos que são suficientes para formalizar a intuição envolvendo quantificação sobre todos os indivíduos possíveis *relevantes* (sejam atuais, sejam meramente possíveis não-atuais), uma vez que não faz o menor sentido enunciar algo sobre situações que não sejam possíveis (acessíveis) a partir de um mundo, e, por conseguinte, acerca de indivíduos que nem mesmo estejam inseridos em uma situação possível.

Em resumo, a menos que novos argumentos nos sejam apresentados, pensamos que se, por um lado, os quantificadores possibilistas usuais são inevitavelmente mais expressivos do que seus análogos atualistas; por outro lado, eles o são apenas em um sentido puramente técnico e sem um correspondente óbvio na linguagem natural. Para todos os efeitos, na eventualidade de precisarmos quantificar sobre *possibilia*, os quantificadores possibilistas relativos que definimos farão todo o trabalho.

Tendo pacificado a questão dos quantificadores atualistas, e havendo justificado filosoficamente a opção por modelos com domínios variáveis em nossa semântica relacional, também dissemos que a combinação do cálculo clássico de predicados com as axiomatizações usuais para a lógica modal normal requerem modelos com domínio constante (isto é, nos quais valham tanto (*FB*) como (*RFB*)); precisamos saber, então, como desenvolver lógicas modais de primeira ordem que admitam modelos com domínios variáveis — afinal, este seria naturalmente o caso mais geral, e modelos com domínio constante um caso particular.

A resposta está na escolha de uma lógica de predicados não-clássica, desenvolvida originalmente para tratar de termos não-denotativos: a *lógica livre* — assim conhecida porque é elaborada sem a pressuposição de que a todo termo individual deveria corresponder algum objeto no domínio.[15]

[14]No apêndice A, acrescentamos outras breves considerações acerca de Π' e Σ', as quais ficariam um tanto deslocadas a esta altura por envolverem um aparato formal (sintático e semântico) que só estará desenvolvido a partir do próximo capítulo. Em especial, mostramos que, pelo menos para estruturas reflexivas transitivas, as versões de (*FB*) e (*RFB*), reformuladas usando nossos quantificadores possibilistas relativos, são válidas, mesmo em se tratando de modelos com domínios variáveis.

[15]Uma exposição detalhada sobre lógicas livres pode ser conferida em Bencivenga (2002). Uma formulação ainda mais peculiar da lógica livre dispensa inclusive a exigência de que os

As modificações requeridas são perspicazes, porém bastante simples, consistindo numa modificação cuidadosa dos axiomas e regras clássicos, conforme veremos no próximo capítulo.

Além disso, algumas complicações da lógica livre no caso não modal são dispensadas ao combinarmos os seus (esquemas de) axiomas com aqueles da lógica modal — por exemplo, o que seriam termos individuais não denotativos na lógica livre não-modal podem simplesmente passar a denotar objetos pertencentes a outros domínios.

De todo modo, mudando dessa maneira a lógica de base, resolvemos os problemas apontados; uma vez que, com essa axiomatização alternativa para nossa base de primeira ordem, não temos mais como derivar (*RFB*) enquanto teorema da lógica modal normal minimal *K*, nem precisamos mais incluir como axioma o esquema (*FB*) em sistemas normais que não incluam o sistema *B* para assegurar a completude. Para ver de que maneira isso será implementado formalmente, precisamos aguardar ainda um pouco, enquanto outros tópicos importantes são comentados.

2.4 INDIVÍDUOS OU CONCEITOS INDIVIDUAIS?

Ainda acerca do estatuto ontológico de indivíduos — já discutimos a necessidade de representar se *existem* ou não ao longo dos pontos em um mesmo modelo —, outro tópico sensível diz respeito ao tratamento da identidade individual ao longo daqueles pontos. Em outras palavras, quando podemos atribuir seguramente a um agente epistêmico conhecimento de que certo indivíduo é idêntico a si mesmo, quando não é óbvio para o agente que estamos falando do mesmo indivíduo?

A abordagem formal mais simples, na qual a categoria dos termos contém apenas variáveis individuais, evita diversas complicações (KRIPKE, 1963; HUGHES; CRESSWELL, 1996). Isso certamente se deve ao fato de que as atribuições de valores às variáveis são em geral feitas de modo, digamos, independente da construção do próprio modelo.

Assim, quando enunciamos algo do tipo "$x = y$", normalmente queremos dizer que x e y denotam o *mesmo* objeto, pelo menos sempre que x e y forem típicas variáveis objetuais (não intensionais) variando sobre um domínio de objetos (e não um domínio de funções). Essa leitura é a usual, inclusive em modelos com domínios variáveis, nos quais aquele objeto possa não existir em todos os pontos. Nesses casos, parece bastante seguro inferir que, uma vez que aceitemos "$x = y$", deveremos aceitar também que isso *sempre* é assim, ou que essa identidade é *necessária*.

---

domínios de quantificação não sejam vazios.

Entretanto, na linguagem natural, nos deparamos frequentemente com situações em que enunciamos identidades cujo caráter não parece nem um pouco necessário. Consideremos, como ilustração, a próxima sentença (na qual, para todos os efeitos, o verbo "ser" está sendo entendido como uma relação binária de identidade), seguido de uma formalização típica para a mesma enunciação (com os símbolos de constantes individuais *dodgson* e *carroll* desempenhando seus papéis óbvios).

(25) Charles Dodgson é Lewis Carroll.

(25′) $dodgson = carroll$

Da maneira como está enunciada, não nos parece muito claro se essa identidade é ou não necessária, mesmo sendo uma afirmação verdadeira a respeito dos indivíduos denotados por "Charles Dodgson" e "Lewis Carroll". O que parece claro é que o caráter necessário ou contingente dessa afirmação depende de como consideramos a *maneira* pela qual aqueles nomes denotam seu objeto coextensional. Se ao nome "Charles Dodgson" associamos, via interpretação fornecida na construção do modelo, o mesmo indivíduo associado, mediante a mesma interpretação no mesmo modelo, ao nome "Lewis Carroll", e dada a interpretação usual para o símbolo de identidade, (25) resulta necessária, conforme explicitamos a seguir, acompanhado novamente de uma formalização usual:

(26) É necessário que Charles Dodgson seja Lewis Carroll.

(26′) $\Box\,(dodgson = carroll)$

A dificuldade se mostra mais evidente, contudo, quando interpretamos o operador modal forte $\Box$ como uma modalidade epistêmica. Nesse caso, para um agente arbitrário a, (26) e (26′) seriam assim reformuladas, respectivamente:

(27) O agente a sabe que Charles Dodgson é Lewis Carroll.

(27′) $\mathscr{K}_a\,(dodgson = carroll)$

Deixando de lado quaisquer polêmicas envolvendo onisciência lógica de agentes — ou seja, mesmo que a seja logicamente onisciente no sentido usual —, não nos parece, de um ponto de vista intuitivo, justificável concluir (27), nem a partir de (25), nem mesmo a partir de (26). Um agente (seja ou não onisciente no que diz respeito a verdades lógicas) pode ignorar uma verdade *metafisicamente* necessária — em especial, se essa verdade necessária tiver caráter *a posteriori*, como bem argumentou Kripke (1981).

Uma dificuldade similar, envolvendo atitudes epistêmicas, pode ser obtida mesmo em uma linguagem modal *sem* a relação de identidade, ao analisarmos a afirmação de propriedades necessárias. Senão, vejamos:

(28) Todas as baleias são mamíferos.

(28′) $\forall x\,(Baleia(x) \rightarrow Mamífero(x))$

Como é (metafisicamente) necessário que todas as baleias sejam mamíferos, deveríamos aceitar a sentença (29), mas continuamos rejeitando intuitivamente (30) como uma consequência segura a partir da verdade necessária de (28).

(29) É necessário que todas as baleias sejam mamíferos.

(29′) $\Box\forall x\,(Baleia(x) \rightarrow Mamífero(x))$

(30) O agente *a* sabe que todas as baleias são mamíferos.

(30′) $\mathscr{K}_a\forall x\,(Baleia(x) \rightarrow Mamífero(x))$

Sendo assim, parece haver uma evidente assimetria entre a interpretação usual para a modalidade alética (como representando a necessidade *metafísica* ou, às vezes, a necessidade *lógica*) e aquela da modalidade epistêmica. Por essa razão, elaborar sistemas modais para a lógica epistêmica que pareçam razoáveis na análise de proposições envolvendo atribuição de conhecimento a agentes requer um refinamento adicional ao tratar, tanto dos termos denotando indivíduos, quanto dos predicados presentes na linguagem empregada.

No que diz respeito aos termos individuais, esse refinamento tem sido feito na literatura por meio do uso de termos *flexíveis* (ou *não-rígidos*), entendidos como termos cuja denotação pode variar ao longo dos pontos de um modelo.

Há basicamente duas maneiras de implementarmos essa flexibilidade na interpretação associada aos termos em um modelo. A primeira é fazendo o termo flexível — digamos, uma constante individual — denotar, não um indivíduo no domínio usual do modelo, mas um *conceito individual*: uma função que, para cada ponto tomado como argumento, denota um objeto no domínio (possivelmente o mesmo). Precisaremos, nesse caso, além do domínio de objetos, de um domínio especial contendo funções de pontos no domínio de objetos.

A segunda maneira envolve definir a interpretação do termo flexível como requerendo dois argumentos: o termo e o ponto no qual queremos avaliar o termo. Assim, a interpretação associará a um par termo-ponto um objeto no domínio do modelo. Adotando esse tratamento, podemos dispensar a necessidade de um domínio à parte para os termos intensionais.

A primeira estratégia é típica das chamadas lógicas intensionais — ver, por exemplo, Fitting (2006), além de Belardinelli e Lomuscio (2007). A peculiaridade desses artigos é que ambos consideram em suas linguagens a presença de variáveis individuais intensionais, com seus respectivos domínios de interpretação (contendo funções de pontos no domínio de objetos). O primeiro artigo, a propósito, nem lida com constantes individuais. A segunda estratégia pode ser encontrada em Hughes e Cresswell (1996), bem como Fitting e Mendelsohn (1999); em cujas obras o leitor também encontrará excelentes e detalhadas análises acerca do problema das identidades contingentes e do emprego de termos não-rígidos.

Em qualquer das estratégias, a solução se torna natural. A asserção (27′) pode facilmente ser tornada falsa se houver uma situação epistêmica (um ponto em um modelo epistêmico) compatível com tudo que o agente sabe, e na qual a denotação da constante *dodgson* não coincida com a de *carroll*, mesmo que coincidam na situação correspondendo ao mundo atual (o ponto no qual é feita a avaliação).

Similarmente, no que diz respeito aos predicados, a solução pode ser implementada via predicados intensionais (a interpretação do modelo entenderá esses predicados enquanto *propriedades*: funções que, para cada ponto do modelo, determinam conjuntos de uplas no domínio de objetos) ou via uma interpretação não-rígida para os símbolos de predicado na linguagem (a interpretação associada ao modelo considera sempre um par predicado-ponto na determinação do respectivo conjunto de uplas que desejamos seja denotado pelo predicado naquele ponto).

Entretanto, de um ponto de vista mais prático, à primeira vista, as complicações decorrentes da admissão de predicados intensionais aparentemente não são compensadas por qualquer ganho significativo — ver Hughes e Cresswell (1996, p. 344 a 347). De todo modo, por qualquer das estratégias, quando a extensão de um predicado admite variação em cada ponto do modelo, também percebemos uma solução viável para representar a falsidade de (30′).[16]

Além disso, a adoção de linguagens modais intensionais, mesmo que apenas para termos individuais, requer muito mais cuidado na especificação de sua semântica, porque facilmente produzem sistemas incompletos, como é mostrado com detalhes em Garson (1984, p. 289 a 302) e em Hughes e

[16]Estamos deliberadamente ignorando uma discussão muito pertinente, cuja complexidade, porém, nos desviaria bastante dos objetivos do presente estudo, e que tem a ver com a comparação ou possível combinação das modalidades aléticas e epistêmicas. Em linhas gerais, a pergunta principal seria: como podemos representar a ignorância epistêmica acerca de verdades metafisicamente necessárias em um *mesmo* modelo; uma vez que, por exemplo, a extensão desejada para o predicado *Baleia* deveria estar sempre incluída na extensão de *Mamífero*? Um excelente estudo nessa direção pode ser encontrado em Holliday e Perry (2014).

Cresswell (1996, p. 335 a 342). Em particular, o emprego de constantes individuais não-rígidas exige uma considerável complicação quando se trata de obter a completude da maneira usual (via modelos canônicos).

Apesar da riqueza expressiva da lógica intensional, usaremos a segunda abordagem em nosso tratamento do problema epistêmico das propriedades contingentes, por exigir uma semântica bem mais simples e que deve permitir, portanto, uma base razoavelmente segura para desenvolvimentos posteriores e mais refinados. Pela mesma razão, também escolheremos empregar uma linguagem epistêmica *mínima*, cujos termos individuais se restrinjam a variáveis, de modo a evitar complicações desnecessárias na demonstração de metateoremas importantes.

Entretanto, sem o uso de constantes individuais e contando somente com as variáveis individuais costumeiras (objetuais, ou *não intensionais*), nosso tratamento formal para casos de identidades contingentes (na linguagem natural) será realizado apenas de maneira indireta. Sempre que quisermos denotar indivíduos por meio de descrições, a estratégia consistirá em recorrer a predicados monádicos que correspondam semanticamente a classes unitárias, não necessariamente as mesmas em cada ponto de avaliação.

Assim, a asserção de identidades contingentes será representada por meio da equivalência entre as propriedades satisfeitas por apenas um indivíduo em cada ponto do modelo. Ilustrando de modo intuitivo, nosso exemplo anterior (25′) envolvendo Charles Dogdson e Lewis Carroll seria reformulado da seguinte maneira (na qual, *Dodgson* e *Carroll* agora representam símbolos de predicados com aquela restrição semântica):

(25″) $\quad Dodgson(x) \leftrightarrow Carroll(x)$

Ou seja, dizer que Charles Dodgson e Lewis Carroll são exatamente a mesma pessoa, para todos os efeitos, significará o mesmo que dizer que ter a propriedade de *ser Charles Dodgson* equivale a ter a propriedade de *ser Lewis Carroll*. É fácil perceber que (25″) pode ser verdadeira sem ser necessariamente verdadeira, bastando que os predicados *Dodgson* e *Carroll* não sejam coextensivos em algum ponto acessível àquele considerado.

Naturalmente, é possível construir um tratamento cujo formalismo evidencie melhor o caráter contingente da identidade entre indivíduos; porém, deixaremos linguagens com recursos expressivos mais sofisticados, como o uso de constantes individuais não-rígidas, ou mesmo de operadores como λ (abstração de predicados) ou ι (descrição definida), para futuros refinamentos da linguagem básica adotada neste trabalho.[17]

[17] Sobre abstração de predicados, ver o Capítulo 9 em Fitting e Mendelson (1999), e sobre descrições definidas, o Capítulo 12 do mesmo livro.

2.5 O PROBLEMA DA COMPLETUDE

Como dissemos no início deste capítulo, construir extensões de primeira ordem para a lógica modal conduz com frequência à perda da decidibilidade, pelo simples fato dessas extensões usualmente incluírem em sua base uma lógica de predicados inteira (seja clássica, seja livre) e não apenas fragmentos desta. Mesmo assim, o ganho em expressividade e a manutenção da completude, quando possível, parecem uma compensação razoável, como na lógica não-modal de primeira ordem.

De todo modo, mesmo naquelas formulações que resistem a axiomatizações recursivas, o interesse ainda seria justificado, devido a importantes aplicações em verificação de modelos (*model-checking*), nas quais a preocupação com determinar quais fórmulas são válidas em uma teoria é substituída pela preocupação acerca de se um dado conjunto de fórmulas é satisfeito por um modelo específico.

Apesar das possíveis aplicações de sistemas incompletos, nossa prioridade será a investigação de axiomatizações para *LEQ* que sejam completas com respeito à semântica relacional pretendida. Ao oferecer um estudo razoável sobre teorias bem comportadas, esperamos facilitar a generalização para os demais casos em estudos futuros.

A investigação sobre a completude dos diversos sistemas modais oferece, com frequência, resultados inesperados, especialmente ao compararmos versões proposicionais e de primeira ordem para a mesma lógica.

Por exemplo, o sistema *S4.2* — definido pelo acréscimo dos esquemas de axiomas **T**: $\Box\varphi \to \varphi$, **4**: $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ e **G**: $\Diamond\Box\varphi \to \Box\Diamond\varphi$ ao sistema minimal *K* — é completo com respeito às estruturas reflexivas, transitivas e convergentes em sua versão proposicional, mas incompleto em sua versão de primeira ordem com (*FB*). Curiosamente, sua versão de primeira ordem é completa sem (*FB*)!

Um resultado inverso acontece com alguns sistemas modais quantificados situados (propriamente) entre *S4.3* e *S5*, os quais são completos com (*FB*) e incompletos sem ela. É o caso de *S4.4*, caracterizado por estruturas reflexivas transitivas e semieuclidianas, e de *S4.9*, correspondendo a estruturas com cadeias infinitas de mundos (acessíveis). Em outro caso peculiar, o sistema *KG* é completo com respeito às estruturas convergentes em sua versão proposicional, mas incompleto em sua versão de primeira ordem — com ou sem (*FB*).[18]

Se incluirmos termos intensionais para lidar com identidades contin-

[18]Um estudo detalhado de algumas dessas comparações pode ser encontrado em Hughes e Cresswell (1996, cap. 15).

gentes, a situação se torna ainda mais complicada. Nesses casos, se optarmos por fazer os símbolos de constantes individuais denotarem, em vez de objetos no domínio, funções de cada ponto (mundo) no domínio do modelo, e se o conjunto de funções denotadas por essas constantes contiver todas as funções levando do conjunto de mundos naquele domínio, os vários subsistemas próprios de *S5* resultam incompletos, embora *S5* mesmo seja completo.[19]

Uma solução, caso queiramos evitar a incompletude nesse caso (para sistemas mais fracos do que *S5*), é considerar, na denotação de termos intensionais, funções parciais — essa estratégia é denominada de *interpretação substancial* em Garson (1984, p. 267 a 269), e pressuposta também em Belardinelli e Lomuscio (2007). Algo similar é feito com a família de sistemas $FOIL$ (de *First-Order Intensional Logic*), cuja completude é mostrada em Fitting (2006). De qualquer maneira, nossa exposição de LEQ empregando uma linguagem epistêmica mínima não incluirá, como já dissemos antes, símbolos de constantes individuais, e estará imune a esses problemas.

Uma última consideração sobre completude, desta vez envolvendo linguagens epistêmicas propriamente ditas e operadores de conhecimento comum, será feita logo a seguir, no início do próximo capítulo. Encerramos aqui, por enquanto, as considerações mais gerais, e partiremos agora para o estudo mais técnico.

[19] A demonstração desse resultado pode ser encontrada em Garson (1984, p. 289 a 302) e também em Hughes e Cresswell (1996, cap. 18). Em linhas gerais, a incompletude é mostrada mediante uma espécie de redução daqueles sistemas com identidade contingente à lógica de segunda ordem, sabidamente incompleta.

3 UMA LÓGICA EPISTÊMICA DE PRIMEIRA ORDEM

Introduziremos agora uma linguagem epistêmica *mínima* de primeira ordem $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$ (para m agentes), com sua respectiva semântica relacional e axiomatizações (com os metateoremas usuais), para, no próximo capítulo, apresentarmos uma extensão $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$ daquela linguagem, mediante o acréscimo de operadores de conhecimento distribuído $\mathscr{D}_G$ (para cada grupo G de agentes), também com seus axiomas e propriedades semânticas mais importantes. Essa extensão é apresentada separadamente por requerer uma estratégia mais complicada na demonstração de sua completude.

Duas outras extensões da linguagem mínima poderiam ter sido incluídas em nossa exposição — a saber, $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{C}}$ a partir do acréscimo de operadores de conhecimento comum $\mathscr{C}_G$, e $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}\mathscr{C}}$ com ambas as classes de operadores $\mathscr{D}_G$ e $\mathscr{C}_G$. Porém, conforme avisado anteriormente, delimitamos nosso interesse em sistemas epistêmicos de primeira ordem *axiomatizáveis*, e a inclusão de operadores de conhecimento comum inviabilizaria, em geral, essa axiomatização. Embora tenhamos axiomatizações completas para a lógica epistêmica (proposicional) com conhecimento comum — ver, por exemplo, van Ditmarsch et al. (2007) —, sua extensão de primeira ordem não é, em geral, axiomatizável (WOLTER, 2000).

3.1 SINTAXE E SEMÂNTICA DE $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$

Seja $A = \{i_1, \dots, i_m\}$ um conjunto não-vazio com m agentes epistêmicos (para $m \in \mathbb{N}$). Uma linguagem epistêmica *mínima* de primeira ordem $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$ contém as seguintes listas de símbolos:

1. variáveis individuais $x_0, x_1, \dots$;
2. predicados n-ários $P^n_0, P^n_1, \dots$;
3. a constante proposicional $\perp$;
4. o símbolo de identidade $=$;
5. um operador proposicional (booleano) $\rightarrow$;
6. um quantificador universal (atualista) $\forall$;
7. operadores modais epistêmicos $\mathscr{K}_i$ (para $i \in A$).

Para todos os efeitos, estamos considerando $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$ como uma linguagem epistêmica mínima por ser a mais simples a oferecer um tratamento para a ignorância epistêmica acerca de identidades contingentes na linguagem natural, sem recorrer a termos individuais flexíveis (não-rígidos). Isso pode ser feito mediante uma estratégia que reescreve, por assim dizer, a afirmação de identidade contingente em termos de uma equivalência entre propriedades que determinam univocamente os indivíduos que as possuem, conforme exemplificamos no capítulo anterior, sem fazer qualquer uso explícito do símbolo primitivo de identidade, o qual ficará reservado para os casos de identidade necessária.

Como de hábito, predicados de aridade zero, caso ocorram, correspondem a constantes proposicionais (como é, inclusive, o caso de $\perp$). Por economia de notação, omitiremos os índices (superescritos) indicando a aridade dos predicados, facilmente apreendida em cada contexto, bem como serão omitidos os índices (subscritos) para distinguir entre variáveis ou entre predicados, sempre que estivermos lidando com a mesma variável individual ou o mesmo predicado, ou ainda quando esses índices forem irrelevantes. Por comodidade, usaremos com frequência, x, y, z para indicar metalinguisticamente variáveis individuais arbitrárias.

A título de exemplo, a expressão: $\forall x P(x) \to P(y)$ permite abreviar, quando conveniente, $\forall x_1 P^1_1(x_1) \to P^1_1(x_2)$. As convenções para abreviação de parênteses também serão as habituais — i.e, exceto na ocorrência de parênteses indicando de outra forma, o arranjo de fórmulas considerará a seguinte ordem: operadores unários (negação e modais), conjunção, disjunção, condicional, bicondicional; e as fórmulas deverão ser desambiguadas, quando for o caso, da esquerda para a direita.

Definição 3.1.1 (Fórmulas de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$)**.** *As fórmulas de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$ estão definidas, respectivamente, pela seguinte gramática, na notação BNF usual:*

$$\varphi :: \perp \mid P^k(\vec{x}) \mid (x = y) \mid \varphi \to \varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \mid \forall x\varphi$$

Consideraremos *fórmulas atômicas* somente a constante $\perp$ e as instâncias dos esquemas $P^k(\vec{x})$ e $(x = y)$. Letras gregas minúsculas φ, ψ, etc., serão metavariáveis para fórmulas; letras latinas minúsculas p, q, etc., serão metavariáveis para fórmulas atômicas.

Definição 3.1.2 (Abreviações de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$)**.** *As seguintes expressões obedecem às respectivas definições:*

1. $\neg\varphi =_{def} \varphi \to \perp$;
2. $\top =_{def} \neg\perp$;
3. $(x \neq y) =_{def} \neg(x = y)$;

4. $\varphi \wedge \psi =_{def} \neg(\varphi \to \neg\psi)$*;*

5. $\varphi \vee \psi =_{def} \neg\varphi \to \psi$*;*

6. $\varphi \leftrightarrow \psi =_{def} (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$*;*

7. $\exists x\varphi =_{def} \neg\forall x\neg\varphi$*;*

8. $\mathsf{E}(x) =_{def} \exists y(y = x)$ *(onde y é qualquer variável distinta de x);*

9. $\hat{\mathscr{K}_i}\varphi =_{def} \neg\mathscr{K}_i\neg\varphi$*;*

10. $\mathscr{E}_G\varphi =_{def} \bigwedge_{i\in G}\mathscr{K}_i\varphi$ *(para $G \subseteq A$).*

Definição 3.1.3 (Variáveis livres e ligadas)**.** *Uma ocorrência de uma variável individual x em uma fórmula φ de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$ é dita* ligada *sse ocorrer em alguma subfórmula $\forall x\psi$ de φ. Uma ocorrência de x em φ é dita* livre *sse não for uma ocorrência ligada. Uma variável individual x é dita ser* ligada *(respec.,* livre*) em φ sse houver pelo menos uma ocorrência ligada (respec., livre) de x em φ.*

Como habitual, chamaremos de *sentença (ou fórmula fechada) de* $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$ a uma fórmula de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$ que não contenha quaisquer variáveis livres; de outro modo, será uma *fórmula aberta* (com variáveis livres).

Além disso, uma ocorrência livre da variável individual x em φ é substituível por y sse y não ocorra em uma subfórmula $\forall y\psi$ de φ. Representaremos esquematicamente como $\varphi(x/y)$ o resultado de substituir as ocorrências livres de x em φ, se houver, por ocorrências de y, quando x for substituível por y em φ.

Enfim, na expressão $\varphi(\vec{x})$, $\vec{x} = x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ são todas as variáveis individuais que ocorrem livres em φ — não confundir com $P^k(\vec{x})$, usado antes, onde $(\vec{x})$ lista todas as variáveis individuais tomadas como argumentos por P^k. Desse modo, $\varphi(\vec{x}/\vec{y})$ refere-se à fórmula que resulta da substituição simultânea das ocorrências livres de $\vec{x}$ por $\vec{y} = y_{i_1}, \ldots, y_{i_n}$, renomeando-se da maneira usual, caso necessário, as variáveis livres em $\vec{y}$ que se tornariam ligadas após essa substituição.

Tendo estabelecido a sintaxe básica de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$, descreveremos agora a semântica relacional que interpretará nossa linguagem epistêmica.

Definição 3.1.4 (Estrutura epistêmica)**.** *Seja A um conjunto finito não-vazio de agentes epistêmicos. Uma* estrutura epistêmica *S para $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$ é um par $(W, \{R_i\}_{i\in A})$, tal que W é um conjunto não vazio (de índices) e cada R_i é uma relação binária entre elementos de W. Além disso:*

1. *S é reflexiva sse, para todo* $w \in W$ *e cada* R_i*:* $(w,w) \in R_i$*;*

2. *S é transitiva sse, para* $w,w',w'' \in W$ *e cada* R_i*:* $(w,w') \in R_i$ & $(w',w'') \in R_i \Rightarrow (w,w'') \in R_i$*;*

3. *S é euclideana sse, para* $w,w',w'' \in W$ *e cada* R_i*:* $(w,w') \in R_i$ & $(w,w'') \in R_i \Rightarrow (w',w'') \in R_i$*.*

Denotaremos a classe de todas as estruturas por $\mathscr{S}$, e de todas as estruturas epistêmicas reflexivas, transitivas, euclideanas, reflexivas transitivas, e reflexivas euclideanas, respectivamente, por $\mathscr{S}^r$, $\mathscr{S}^t$, $\mathscr{S}^e$, $\mathscr{S}^{rt}$ e $\mathscr{S}^{re}$. É trivial mostrar que estruturas reflexivas euclideanas são também transitivas. Estaremos interessados, primariamente, nas classes $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}^r$, $\mathscr{S}^{rt}$ e $\mathscr{S}^{re}$, as quais correspondem, no jargão ordinário da lógica modal, respectivamente, a estruturas do tipo K, T, *S4* e *S5*.

Ao longo do texto, chamaremos os elementos de W de *pontos*, *cenários* ou *mundos*, indiferentemente — ainda que "pontos" soe de maneira mais neutra ou abstrata, enquanto "cenários" ou "mundos" pareçam mais carregados de conotações metafísicas. Além disso, por comodidade, quando o contexto for suficientemente claro, usaremos apenas "estruturas" para nos referirmos a uma das classes de estruturas acima.

Definição 3.1.5 (Estrutura epistêmica aumentada)**.** *Seja* $S = (W, \{R_i\}_{i\in A})$ *uma estrutura epistêmica para* $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$*. Chamaremos de* estrutura epistêmica aumentada *à upla* $S^a = (W, \{R_i\}_{i\in A}, D)$*, onde* D *é um conjunto não-vazio. Dizemos, nesse caso, que* S^a *é* baseada em S*. Também chamaremos* D *de* domínio da estrutura epistêmica aumentada S^a*, representando-o por* $D(S^a)$*.*

Similarmente, por simplicidade, usaremos com frequência *domínio da estrutura* S^a para nos referirmos ao domínio da estrutura epistêmica aumentada S^a. Nenhuma ambiguidade deverá resultar dessa economia.

Definição 3.1.6 (Modelo epistêmico)**.** *Um* modelo epistêmico *M para* $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$ *é uma upla* (S^a, Q, I)*, tal que* S^a *é uma estrutura epistêmica aumentada qualquer para* $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$*,* Q *é uma função de* W *em* 2^D*, e* I *é uma interpretação para* $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$ *tal que* $I(P^k, w) \subseteq D^k$*. Por comodidade, defina-se* $Q(M)$ *(ou* domínio do modelo M*) como* $\bigcup_{w\in W} Q(w)$*. Também dizemos, nesse caso, que* S^a *é uma* estrutura aumentada para M*, ou ainda, que* M *é* baseado em S^a*. Caso* S^a *seja, por sua vez, baseada em uma estrutura epistêmica* S*, também dizemos que* S *é uma* estrutura para M*, ou alternativamente, que* M *é* baseado em S*.*

Como podemos perceber, Q é uma função que determina, para cada ponto w, o seu domínio particular de quantificação. Observemos que D não precisa coincidir com $\bigcup_{w\in W} Q(w)$, embora obviamente $\bigcup_{w\in W} Q(w) \subseteq D$.

É importante também observarmos, em se tratando dos predicados, que sua extensão tanto pode variar em diferentes pontos do modelo, como pode também conter objetos que não pertençam ao domínio associado àquele ponto.

Novamente, por comodidade, usaremos ao longo da nossa exposição simplesmente "modelos" para nos referirmos a modelos epistêmicos.

Definição 3.1.7 (Variante de uma atribuição)**.** *Sejam um modelo epistêmico $M = (S^a, Q, I)$ e uma atribuição σ de elementos de $D(S^a)$ a cada variável individual x_0, $x_1, \ldots$ de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$. Uma* variante de σ com respeito à variável x_i *é uma atribuição $\sigma\binom{x_i}{o}$ idêntica a σ exceto no máximo na i-ésima posição, onde $\sigma\binom{x_i}{o}(x_i) = o$, para $o \in D(S^a)$.*

Estamos agora em condições de estabelecer as condições de satisfação para fórmulas de nossa linguagem, da maneira usual.

Definição 3.1.8 (Satisfatibilidade de fórmulas em M)**.** *Sejam um modelo epistêmico M baseado em uma estrutura epistêmica qualquer para $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$, uma atribuição σ como descrita na Definição 3.1.7, e um índice $w \in W$. Definimos o comportamento da relação $\models$ de satisfatibilidade da seguinte maneira:*

1. $(M^\sigma, w) \not\models \bot$;
2. $(M^\sigma, w) \models P^k(x_{i_1}, ..., x_{i_k})$ *sse* $(\sigma(x_{i_1}), \ldots, \sigma(x_{i_k})) \in I(P^k, w)$;
3. $(M^\sigma, w) \models (x = y)$ *sse* $\sigma(x) = \sigma(y)$;
4. $(M^\sigma, w) \models \varphi \rightarrow \psi$ *sse* $(M^\sigma, w) \not\models \varphi$ *ou* $(M^\sigma, w) \models \psi$;
5. $(M^\sigma, w) \models \forall x \varphi$ *sse, para todo* $o \in Q(w)$, $(M^{\sigma\binom{x}{o}}, w) \models \varphi$;
6. $(M^\sigma, w) \models \mathscr{K}_i \varphi$ *sse, para todo* $w' \in W$, $wR_iw' \Rightarrow (M^\sigma, w') \models \varphi$.

Definição 3.1.9 (Verdade e validade de fórmulas)**.** *Lemos $(M^\sigma, w) \models \varphi$ como φ é satisfeita pela atribuição σ em um ponto w do modelo M — ou, simplesmente: φ é satisfeita por σ no ponto (M, w). Dizemos que φ é* verdadeira no ponto *w sse $(M^\sigma, w) \models \varphi$ para toda atribuição σ; que $M \models \varphi$ (leia-se: φ é* válida em *M) sse φ for verdadeira em todo $w \in W$; e que $\mathscr{M} \models \varphi$ (leia-se: φ é* válida na classe *$\mathscr{M}$ de modelos) sse $M \models \varphi$ para todo $M \in \mathscr{M}$. Dizemos ainda que $S^a \models \varphi$ (leia-se: φ é* válida na estrutura aumentada *S^a) sse $M \models \varphi$ para todo M baseado em S^a; que $S \models \varphi$ (leia-se: φ é* válida na estrutura *S) sse $S^a \models \varphi$ para todo S^a baseado em S; e, finalmente, que $\mathscr{S} \models \varphi$ (leia-se: φ é* válida na classe *$\mathscr{S}$ de estruturas) sse $S \models \varphi$ para todo $S \in \mathscr{S}$. Em particular, quando a classe $\mathscr{S}$ em questão estiver devidamente subentendida, empregaremos simplesmente $\models \varphi$.*

A relação $=$ se comportará como uma identidade entre termos, significando intuitivamente que a denotação do primeiro termo coincide com a do segundo. Como os termos individuais de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$ serão sempre variáveis individuais, a relação de identidade se comportará como uma identidade necessária. O tratamento de identidades contingentes será feito de maneira indireta, como indicamos anteriormente e mostraremos na próxima seção.

Além disso, como podemos facilmente perceber, o objeto atribuído a uma variável individual que ocorre em uma fórmula pode não existir naquele ponto considerado — ou seja, o objeto denotado pode não pertencer àquele domínio em particular. Dessa maneira, poderemos nos referir a objetos possíveis não-atuais (que façam parte de cenários epistêmicos distintos do atual), o que é obviamente desejável na expressividade de uma linguagem epistêmica.

Corolário 3.1.10. *As seguintes condições semânticas decorrem das definições 3.1.2 e 3.1.8:*

1. $(M^\sigma, w) \vDash \top$;
2. $(M^\sigma, w) \vDash \neg\varphi$ *sse* $(M^\sigma, w) \nvDash \varphi$;
3. $(M^\sigma, w) \vDash (x \neq y)$ *sse* $(M^\sigma, w) \nvDash (x = y)$;
4. $(M^\sigma, w) \vDash \varphi \wedge \psi$ *sse* $(M^\sigma, w) \vDash \varphi$ *e* $(M^\sigma, w) \vDash \psi$;
5. $(M^\sigma, w) \vDash \varphi \vee \psi$ *sse* $(M^\sigma, w) \vDash \varphi$ *ou* $(M^\sigma, w) \vDash \psi$;
6. $(M^\sigma, w) \vDash \varphi \leftrightarrow \psi$ *sse:* $(M^\sigma, w) \vDash \varphi$ *sse* $(M^\sigma, w) \vDash \psi$;
7. $(M^\sigma, w) \vDash \exists x\varphi$ *sse, para algum* $o \in Q(w)$, $(M^{\sigma\binom{x}{o}}, w) \vDash \varphi$;
8. $(M^\sigma, w) \vDash \mathsf{E}(x)$ *sse* $\sigma(x) \in Q(w)$;
9. $(M^\sigma, w) \vDash \hat{\mathscr{K}_i}\varphi$ *sse, para algum* $w' \in W$, wR_iw' *e* $(M^\sigma, w') \vDash \varphi$;
10. $(M^\sigma, w) \vDash \mathscr{E}_G\varphi$ *sse, para todo* $i \in G$, $(M^\sigma, w) \vDash \mathscr{K}_i\varphi$.

Demonstração. Dada a simplicidade das provas, por economia de espaço, apresentaremos somente o item 8. Suponhamos, para um ponto w em um modelo M arbitrário, e uma atribuição qualquer σ, que $(M^\sigma, w) \vDash \mathsf{E}(x)$; o que, por definição, significa dizer que $(M^\sigma, w) \vDash \exists y(y = x)$, para uma variável y qualquer distinta de x (a escolha da variável individual y aqui é irrelevante, desde que respeitada a restrição). Isso, por sua vez, equivale a afirmar que, para algum $o \in Q(w)$, acontece $(M^{\sigma\binom{y}{o}}, w) \vDash y = x$, ou seja, que $\sigma\binom{y}{o}(y)$ coincide com $\sigma\binom{y}{o}(x)$. Ora, como $o \in Q(w)$ e $\sigma\binom{y}{o}(y) = o$, obviamente, $\sigma\binom{y}{o}(x) \in Q(w)$. Como sabemos pela definição que y é distinta de x, daí temos que $\sigma\binom{y}{o}(x) = \sigma(x)$ (uma vez que as atribuições $\sigma\binom{y}{o}$ e σ coincidem, exceto no máximo no objeto atribuído a y), e, portanto, que $\sigma(x) \in Q(w)$. A volta é trivial, visto que a suposição de que $\sigma(x) \in Q(w)$ equivale a dizer que há pelo menos um objeto em $Q(w)$ que também é a denotação de $\sigma(x)$ — isto é, $\exists y(y = x)$.

$\square$

3.2 VALIDADES E INVALIDADES IMPORTANTES

Examinaremos agora alguns resultados interessantes, relativos à semântica adotada; em particular, mostraremos que os esquemas (*FB*) e (*RFB*) não são válidos sem que se imponham restrições adicionais para os domínios dos modelos considerados — o que seria de se esperar pois nossa base de primeira ordem não é clássica, e sim livre.[1]

Esquemas com identidade

(1) $\models (x = y) \to \mathscr{K}_i(x = y)$

Demonstração. Suponhamos que, para uma atribuição σ e um ponto w de um modelo M arbitrário, seja o caso que $(M^\sigma, w) \not\models \mathscr{K}_i(x = y)$. Isso equivale a dizer que, para algum w' tal que wR_iw': $(M^\sigma, w') \not\models (x = y)$, o que, por sua vez, acontece sse $\sigma(x) \neq \sigma(y)$. Como a atribuição σ não varia ao longo dos pontos do modelo, isso é o mesmo que dizer que $(M^\sigma, w) \not\models (x = y)$, conforme queríamos demonstrar. Como a prova emprega uma cadeia de equivalências, valida também a recíproca do condicional. $\square$

(2) $\models (x \neq y) \to \mathscr{K}_i(x \neq y)$

Demonstração. Muito similar à anterior.

$\square$

(3) $\not\models (P(x) \leftrightarrow P'(x)) \to (\mathscr{K}_iP(x) \leftrightarrow \mathscr{K}_iP'(x))$

O esquema inválido acima, apesar de não empregar o símbolo de identidade, ilustra de que modo nossa semântica trata adequadamente a ignorância epistêmica acerca de identidades contingentes, discutida no capítulo anterior. Embora nenhuma restrição especial tenha sido enunciada para os predicados P e P', a invalidade do esquema pode ser mostrada mesmo no caso em que

[1] Entretanto, mostraremos em capítulos posteriores um curioso resultado em *LAPQ* com base quantificacional livre que valida algumas instâncias dos esquemas de Barcan, quando consideramos uma simples restrição no conteúdo de anúncios públicos.

os predicados em questão denotem sempre conjuntos unitários em cada ponto do modelo.

Demonstração. Seja o contramodelo M com um agente epistêmico arbitrário i, tal que $W = \{w_1, w_2\}$, $R_i = \{(w_1,w_1), (w_2,w_2), (w_1,w_2), (w_2,w_1)\}$, $Q(w_1) = Q(w_2) = \{a,b\}$, $I(P,w_1) = I(P,w_2) = \{a\}$, $I(P',w_1) = \{a\}$, $I(P',w_2) = \{b\}$. Seja ainda uma atribuição σ tal que $\sigma(x) = a$. Ora, é simples perceber que $(M^\sigma, w_1) \vDash P(x) \leftrightarrow P'(x)$ e que $(M^\sigma, w_1) \vDash \mathscr{K}_i P(x)$, mas $(M^\sigma, w_1) \nvDash \mathscr{K}_i P'(x)$. Senão, vejamos:

$(M^\sigma, w_1) \vDash P(x) \leftrightarrow P'(x)$ pois $(M^\sigma, w_1) \vDash P(x)$ sse $(M^\sigma, w_1) \vDash P'(x)$, o que é o caso porque ambas as situações ocorrem ($\sigma(x) \in I(P,w_1)$ e $\sigma(x) \in I(P',w_1)$). Além disso, $(M^\sigma, w_1) \vDash \mathscr{K}_i P(x)$ pois, para todo w' tal que wR_iw' (ou seja, w_1 e w_2), acontece $(M^\sigma, w') \vDash P(x)$ (uma vez que $\sigma(x) \in I(P,w_1)$ e $\sigma(x) \in I(P,w_2)$). Por sua vez, $(M^\sigma, w_1) \nvDash \mathscr{K}_i P'(x)$, pois $w_1 R_i w_2$ e $(M^\sigma, w_2) \nvDash P'(x)$ (uma vez que $\sigma(x) \notin I(P',w_2)$).

□

Esquemas de Barcan

(4) $\nvDash \forall x \mathscr{K}_i \varphi \to \mathscr{K}_i \forall x \varphi$

Demonstração. Conforme explicamos anteriormente, o esquema em questão não vale em geral para modelos com domínios variáveis. Seja o contramodelo M com um agente epistêmico arbitrário i, tal que $W = \{w_1, w_2\}$, $R_i = \{(w_1,w_1), (w_2,w_2), (w_1,w_2), (w_2,w_1)\}$, $Q(w_1) = \{a\}$, $Q(w_2) = \{a,b\}$, $I(P,w_1) = I(P,w_2) = \{a\}$. Assim, temos que $(M^\sigma, w_1) \vDash \forall x \mathscr{K}_i P(x)$, mas $(M^\sigma, w_1) \nvDash \mathscr{K}_i \forall x P(x)$, como podemos facilmente verificar:

$(M^\sigma, w_1) \vDash \forall x \mathscr{K}_i P(x)$; pois, para todo $o \in Q(w_1)$ (ou seja para a), é o caso que $(M^{\sigma\binom{x}{a}}, w_1) \vDash \mathscr{K}_i P(x)$, e isto acontece porque, para todo w' tal que $w_1 R_i w'$, $(M^{\sigma\binom{x}{a}}, w') \vDash P(x)$, uma vez que $a \in I(P,w')$. Por outro lado, $(M^\sigma, w_1) \nvDash \mathscr{K}_i \forall x P(x)$, pois, $w_1 R_i w_2$ e $(M^\sigma, w_2) \nvDash \forall x P(x)$, visto que há um $o \in Q(w_2)$ (a saber, b) tal que $(M^{\sigma\binom{x}{b}}, w_2) \nvDash P(x)$ devido a $b \notin I(P,w_2)$. □

(5) $\nvDash \mathscr{K}_i \forall x \varphi \to \forall x \mathscr{K}_i \varphi$

Demonstração. O esquema acima também não vale de modo geral em modelos com domínios variáveis. Para mostrar sua invalidade, seja o mesmo contramodelo anterior, com a seguinte alteração: $I(P,w_1) = \{a\}$, $I(P,w_2) = \{a,b\}$. É fácil de checar que $(M^\sigma, w_2) \vDash \mathscr{K}_i \forall x P(x)$; visto que, para todo w' tal que $w_2 R_i w'$ (ou seja, em w_1 e w_2), é o caso que $(M^\sigma, w') \vDash \forall x P(x)$, pois, em ambos os pontos, para todo $o \in Q(w')$, ocorre $(M^{\sigma\binom{x}{o}}, w') \vDash P(x)$. Entretanto, $(M^{\sigma}, w_2) \nvDash \forall x \mathscr{K}_i P(x)$; pois há um $o \in Q(w_2)$ (a saber, b) tal que $(M^{\sigma\binom{x}{b}}, w_2) \nvDash \mathscr{K}_i P(x)$, uma vez que $w_2 R_i w_1$ e acontece $(M^{\sigma\binom{x}{b}}, w_1) \nvDash P(x)$, visto que $b \notin I(P, w_1)$. $\square$

Esquemas de Barcan em modelos com restrições sobre domínios

Sejam uma atribuição qualquer σ e um ponto w de um modelo M arbitrário. Assim, valem os três seguintes esquemas:

(6) $(M^{\sigma}, w) \vDash \forall x \mathscr{K}_i \varphi \to \mathscr{K}_i \forall x \varphi$
sse, para todo $w, w' \in W$, $wR_i w' \Rightarrow Q(w') \subseteq Q(w)$

Demonstração. Volta: Suponhamos que $(M^{\sigma}, w) \nvDash \forall x \mathscr{K}_i \varphi \to \mathscr{K}_i \forall x \varphi$. Isso equivale a dizer que (i) $(M^{\sigma}, w) \vDash \forall x \mathscr{K}_i \varphi$ e ao mesmo tempo (ii) $(M^{\sigma}, w) \nvDash \mathscr{K}_i \forall x \varphi$. De (i), deduzimos que, para todo $o \in Q(w)$, é o caso que $(M^{\sigma\binom{x}{o}}, w) \vDash \mathscr{K}_i \varphi$, e que, portanto, para todo w' tal que $wR_i w'$: $(M^{\sigma\binom{x}{o}}, w') \vDash \varphi$. De (ii) se segue que, para um w_j arbitrário tal que $wR_i w_j$: $(M^{\sigma}, w_j) \nvDash \forall x \varphi$, e que, portanto, para algum $o' \in Q(w_j)$, ocorre: $(M^{\sigma\binom{x}{o'}}, w_j) \nvDash \varphi$. Em outras palavras, todos os objetos no domínio de w satisfazem φ (ao serem atribuídos às ocorrências livres de x em φ), em todos os w' tal que $wR_i w'$ — em particular, em w_j —; e, por outro lado, há um objeto o' no domínio de w_j que não satisfaz φ nas mesmas condições de atribuição. Logo, há um w_j tal que $wR_i w_j$ e um objeto $o' \in Q(w_j)$ tal que $o' \notin Q(w)$; por conseguinte, $Q(w_j) \nsubseteq Q(w)$.

Ida: Suponhamos que, para dois pontos arbitrários w, w_j e uma relação R_i de um modelo M, não seja o caso que $wR_i w_j \Rightarrow Q(w_j) \subseteq Q(w)$ — isto é, ocorram $wR_i w_j$ e $Q(w_j) \nsubseteq Q(w)$. Adicionalmente, suponhamos que, para uma atribuição qualquer σ, $(M^{\sigma}, w) \vDash \forall x \mathscr{K}_i \varphi$. Como, para todo $o \in Q(w)$, é o caso que $(M^{\sigma\binom{x}{o}}, w) \vDash \mathscr{K}_i \varphi$; segue-se que, para todo w' tal que $wR_i w'$, $(M^{\sigma\binom{x}{o}}, w') \vDash \varphi$. Ora, por hipótese, $wR_i w_j$; logo, para todo $o \in Q(w)$, $(M^{\sigma\binom{x}{o}}, w_j) \vDash \varphi$. Suponhamos agora, em virtude de $Q(w_j) \nsubseteq Q(w)$ e sem perda de generalidade, que haja $o' \in Q(w_j)$ tal que $o' \notin Q(w)$, e que $(M^{\sigma\binom{x}{o'}}, w_j) \nvDash \varphi$; portanto, $(M^{\sigma}, w_j) \nvDash \forall x \varphi$. Como $wR_i w_j$, segue-se que $(M^{\sigma}, w) \nvDash \mathscr{K}_i \forall x \varphi$, como queríamos demonstrar. $\square$

Lembrando que, conforme indicamos no capítulo anterior, quando restrita da maneira acima indicada, a relação R_i é dita *antimonotônica* — ou seja, os pontos acessados pelo agente i a partir de w nunca contêm, em seus domínios, mais objetos do que o domínio de w.

(7) $(M^\sigma, w) \models \mathscr{K}_i \forall x \varphi \to \forall x \mathscr{K}_i \varphi$
sse, para todo $w, w' \in W$, $wR_iw' \Rightarrow Q(w) \subseteq Q(w')$

Demonstração. Bastante análoga à anterior, tomando-se o devido cuidado com as alterações relevantes — por ex., $Q(w) \subseteq Q(w')$ em vez de $Q(w') \subseteq Q(w)$, etc. $\square$

Lembrando mais uma vez o que foi dito no capítulo anterior, quando se comporta da maneira acima, dizemos que R_i é *monotônica* – ou seja, os pontos acessados pelo agente i a partir de w nunca contêm, em seus domínios, menos objetos do que o domínio de w.

(8) $M \models \mathscr{K}_i \forall x \varphi \leftrightarrow \forall x \mathscr{K}_i \varphi$
sse, para toda R_i em M, $wR_iw' \Rightarrow Q(w) = Q(w')$

É trivial mostrar, com base nos resultados anteriores, que a proposição acima vale para qualquer modelo epistêmico M. Apesar disso, não teremos *necessariamente* modelos com domínios constantes (invariáveis ao longo de todos os pontos do modelo); pois a restrição é feita com base no comportamento das várias R_i, e não diretamente sobre os pontos w. Porém, estender-se ainda mais nessa análise tornaria nossa exposição demasiado prolixa.

3.3 AXIOMATIZAÇÃO E ALGUNS TEOREMAS

Antes de apresentarmos uma axiomatização minimal $\mathbf{QK}^m$ em $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$, seguem algumas definições usuais.

Seja uma fórmula φ de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$. A expressão $\vdash \varphi$ significa que φ é teorema de $\mathbf{QK}^m$. A relação $\Rightarrow$ representa a inferência de fórmulas em $\mathbf{QK}^m$. Uma fórmula φ é derivável em $\mathbf{QK}^m$ de um conjunto Δ de fórmulas de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$ (ou simplesmente: $\Delta \vdash \varphi$) sse, para alguns $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \Delta$, for o caso que $\vdash \delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_n \to \varphi$.

Na Figura 4, estão listados os esquemas de axiomas para $\mathbf{QK}^m$, adaptados de Hughes e Cresswell (1996, p. 293) onde necessário. Para facilitar, dividiremos os axiomas por afinidade; respectivamente, a base proposicional (clássica), a base epistêmica K, a base de primeira ordem (lógica livre), uma regra especial envolvendo quantificação e modalidade, e os axiomas para a igualdade. Chamamos a atenção para o esquema **Subst**, no qual entenderemos φ' como sendo a fórmula idêntica a φ, exceto por conter ocorrências livres da variável y em zero ou mais lugares (possivelmente todos) nos quais φ contenha ocorrências livres da variável x.

No restante deste capítulo, exceto quando explicitamente discriminado

LP	*(todas as instâncias de tautologias clássicas)*
MP	$\varphi \to \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$
K	$\mathscr{K}_i(\varphi \to \psi) \to (\mathscr{K}_i\varphi \to \mathscr{K}_i\psi)$
Nec	$\varphi \Rightarrow \mathscr{K}_i\varphi$
Vac$\forall$	$\forall x\varphi \leftrightarrow \varphi$ (onde x não ocorre livre em φ)
Distr$\forall$	$\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$
Inst$\forall$	$(\forall x\varphi \wedge \mathsf{E}(y)) \to \varphi(x/y))$
$\mathsf{E}\forall$	$\forall x\mathsf{E}(x)$
Gen$\forall$	$\varphi \Rightarrow \forall x\varphi$
Gen$\forall^n$	$\varphi_1 \to \mathscr{K}_i(\varphi_2 \to \ldots \mathscr{K}_i(\varphi_n \to \mathscr{K}_i\psi)\ldots)$ $\Rightarrow \varphi_1 \to \mathscr{K}_i(\varphi_2 \to \ldots \mathscr{K}_i(\varphi_n \to \mathscr{K}_i\forall x\psi)\ldots)$ (onde x não ocorre livre em $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$)
Id	$(x = x)$
Subst	$(x = y) \to (\varphi \to \varphi')$ (onde φ' é como φ exceto por conter y livre em 0 ou mais lugares nos quais φ contém x livre)
NecDif	$(x \neq y) \to \mathscr{K}_i(x \neq y)$

Figura 4 – O sistema $\mathbf{QK}^m$

de outra maneira, todos os resultados, teoremas e demonstrações serão relativos ao sistema $\mathbf{QK}^m$ conforme a Definição 3.3.1.

Definição 3.3.1. *A axiomatização contida na Figura 4 define o sistema epistêmico de primeira ordem* $\mathbf{QK}^m$*. Além disso, seja uma fórmula* φ *qualquer de* $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$ *e os seguintes três esquemas:*

1. $\mathbf{T}$ = $\mathscr{K}_i\varphi \to \varphi$

2. $\mathbf{4}$ = $\mathscr{K}_i\varphi \to \mathscr{K}_i\mathscr{K}_i\varphi$

3. $\mathbf{5}$ = $\neg\mathscr{K}_i\varphi \to \mathscr{K}_i\neg\mathscr{K}_i\varphi$.

Definimos, mediante o acréscimo dos seguintes esquemas de axiomas a $\mathbf{QK}^m$*, os correspondentes sistemas:*

1. $\mathbf{QK}^m$ *acrescido de* $\mathbf{T}$ = $\mathbf{QT}^m$

2. $\mathbf{QK}^m$ *acrescido de* $\mathbf{T}$ *e* $\mathbf{4}$ = $\mathbf{QS4}^m$

3. $\mathbf{QK}^m$ *acrescido de* $\mathbf{T}$ *e* $\mathbf{5}$ = $\mathbf{QS5}^m$.

Duas peculiaridades devem ser mencionadas. Tanto a regra **Gen**$\forall^n$ como o axioma **NecDif** são deriváveis em **QS5**^{m} (e suas extensões), dispensando a necessidade de serem listadas na axiomatização desses sistemas.[2] Por economia de espaço, não nos estenderemos sobre esse ponto, e recomendamos conferir suas derivações em Hughes e Cresswell (1996, p. 295–296, 314). De todo modo, para facilitar a comparação entre os sistemas, preservando alguma uniformidade na base axiomática à medida que construímos as extensões para **QK**^{m}, ambos os esquemas serão mantidos como primitivos.

Teorema 3.3.2 (Substituição de equivalentes)**.** *Sejam, em $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$, φ, ψ e ζ fórmulas quaisquer. Pela expressão $\zeta(\varphi/\psi)$, entenderemos o resultado de substituirmos algumas (ou todas as) ocorrências de φ, caso haja tais ocorrências, na fórmula ζ, por ocorrências de ψ. Assim, vale a seguinte regra:*

$$\textbf{(RE)} \quad \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \quad \Rightarrow \quad \vdash \zeta \leftrightarrow \zeta(\varphi/\psi)$$

Demonstração. Prova por indução sobre ζ.

(Base) ζ é uma fórmula atômica p. Se φ for diferente de p, o teorema fica vacuamente satisfeito. Se φ for a própria p, o resultado se segue obviamente.

(Hipótese indutiva) O enunciado vale para ζ de comprimento $< n$.

(Casos indutivos) Nos passos seguintes, sempre que ζ não contiver ocorrências de φ, o resultado se segue vacuamente. Examinaremos apenas os demais casos.

(1) ζ tem a forma $\zeta' \to \zeta''$. Por hipótese, ζ contém pelo menos uma ocorrência de φ. Naturalmente, quaisquer ocorrências assim de φ ocorrerão ou em ζ', ou em ζ'', ou em ambas. Em quaisquer dos casos, por h.i., sabemos que $\vdash \zeta' \leftrightarrow \zeta'(\varphi/\psi)$ e que $\vdash \zeta'' \leftrightarrow \zeta''(\varphi/\psi)$. Ora, por aplicações de **LP** — em particular, do esquema $\vdash ((\alpha \leftrightarrow \beta) \wedge (\gamma \leftrightarrow \delta)) \to ((\alpha \to \gamma) \leftrightarrow (\beta \to \delta))$ — e de **MP**, obtemos facilmente $\vdash (\zeta' \to \zeta'') \leftrightarrow (\zeta'(\varphi/\psi) \to \zeta''(\varphi/\psi))$; o que equivale a dizer $\vdash (\zeta' \to \zeta'') \leftrightarrow (\zeta' \to \zeta'')(\varphi/\psi)$.

(2) ζ tem a forma $\forall x \zeta'$. É claro que quaisquer ocorrências de φ serão subfórmulas de ζ'. Assim, do teorema $\vdash \zeta' \to \zeta'$, é natural inferir, usando a h.i., $\vdash \zeta' \to \zeta'(\varphi/\psi)$. Usando **Gen**$\forall$ e **Distr**$\forall$, obtemos $\vdash \forall x \zeta' \to \forall x \zeta'(\varphi/\psi)$; o que equivale a dizer $\vdash \forall x \zeta' \to (\forall x \zeta')(\varphi/\psi)$. Feitas as devidas adaptações, a mesma linha de raciocínio prova $\vdash (\forall x \zeta')(\varphi/\psi) \to \forall x \zeta'$, fechando, por assim dizer, a equivalência.

(3) ζ tem a forma $\mathscr{K}_i \zeta'$. Obviamente, as ocorrências de φ só poderão ocorrer em ζ'. Desse modo, do teorema $\vdash \zeta' \to \zeta'$, inferimos, usando a h.i., $\vdash$

[2]Mais precisamente, ambos os esquemas podem ser derivados em extensões de primeira ordem do sistema modal às vezes referido na literatura como *KTB* (ou simplesmente *B*), um subsistema do conhecido *S5*, empregando a seguinte regra válida em *KTB*: $\vdash \hat{\mathscr{K}}_i \varphi \to \psi \;\Rightarrow\; \vdash \varphi \to \mathscr{K}_i \psi$.

$\zeta' \to \zeta'(\varphi/\psi)$. Por aplicações óbvias de **Nec**, **K** e **MP**, vemos que $\vdash \mathscr{K}_i\zeta' \to \mathscr{K}_i\zeta'(\varphi/\psi)$, o que é o mesmo que dizer $\vdash \mathscr{K}_i\zeta' \to (\mathscr{K}_i\zeta')(\varphi/\psi)$. Como no caso (2), a mesma estratégia pode ser usada para obter $\vdash (\mathscr{K}_i\zeta')(\varphi/\psi) \to \mathscr{K}_i\zeta'$, e daí completar o passo.

□

Teorema 3.3.3. *Sejam φ e ψ fórmulas quaisquer de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$. São teoremas de* **QK**^{m}*:*

1. $\forall y(\forall x\varphi \to \varphi(x/y))$*;*
2. $\forall x\varphi \leftrightarrow \forall y\varphi(x/y)$ *(onde y não ocorre livre em φ);*
3. $\exists y(\varphi(x/y) \to \forall x\varphi)$*;*
4. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x\psi)$ *(onde x não ocorre livre em φ);*

Demonstração. Seguem as respectivas provas para cada item, adaptadas de Hughes e Cresswell (1996, p. 294–295).

1. $\vdash \forall y(\forall x\varphi \to \varphi(x/y))$

1. $\forall y((\forall x\varphi \wedge \mathsf{E}(y)) \to \varphi(x/y))$	– **Inst**$\forall$ e **Gen**$\forall$
2. $\forall y(\mathsf{E}(y) \to (\forall x\varphi \to \varphi(x/y)))$	– de 1, **LP** e **RE**
3. $\forall y\mathsf{E}(y) \to \forall y(\forall x\varphi \to \varphi(x/y))$	– de 2, **Distr**$\forall$ e **MP**
4. $\forall y\mathsf{E}(y)$	– $\mathbf{E}\forall$
5. $\forall y(\forall x\varphi \to \varphi(x/y))$	– de 3, 4 e **MP**

2. $\vdash \forall x\varphi \leftrightarrow \forall y\varphi(x/y)$ (onde y não ocorre livre em φ)

1. $\forall y(\forall x\varphi \to \varphi(x/y))$	– item (i) acima
2. $\forall y(\forall x\varphi \to \varphi(x/y)) \to (\forall y\forall x\varphi(y/x) \to \forall y\varphi(x/y))$	– **Distr**$\forall$
3. $\forall y\forall x\varphi \to \forall y\varphi(x/y)$	– de 1, 2, **MP**
4. $\forall x\varphi \to \forall y\varphi(x/y)$	– de 3, **Vac**$\forall$ e **RE**

3. $\vdash \exists y(\varphi(x/y) \to \forall x\varphi)$

1. $\forall y(\varphi(x/y) \wedge \neg\forall x\varphi) \to \forall y\varphi(x/y)$	– de **LP**, **Gen**$\forall$, **Distr**$\forall$ e **MP**
2. $\forall y(\varphi(x/y) \wedge \neg\forall x\varphi) \to \forall x\varphi$	– de 1, item (ii) acima e **RE**
3. $\forall y(\varphi(x/y) \wedge \neg\forall x\varphi) \to \forall y\neg\forall x\varphi$	– de **LP**, **Gen**$\forall$, **Distr**$\forall$ e **MP**
4. $\forall y(\varphi(x/y) \wedge \neg\forall x\varphi) \to \neg\forall x\varphi$	– de 3, **Vac**$\forall$ e **RE**
5. $\neg\forall y(\varphi(x/y) \wedge \neg\forall x\varphi)$	– de 2, 4, **LP** e **MP**
6. $\exists y(\varphi(x/y) \to \forall x\varphi)$	– de 5, **LP** e **RE**

4. $\vdash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x\psi)$ (onde x não ocorre livre em φ)

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$ – **Distr**$\forall$
2. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x\psi)$ – de 1, **Vac**$\forall$ e **RE**

$\square$

Teorema 3.3.4. *Sejam φ e ψ fórmulas quaisquer de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$. São teoremas de* **QK**^{m}*:*

1. $\mathscr{K}_i(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\mathscr{K}_i\varphi \wedge \mathscr{K}_i\psi)$
2. $\mathscr{K}_i\forall x(\varphi \to \psi) \to (\mathscr{K}_i\forall x\varphi \to \mathscr{K}_i\forall x\psi)$
3. $\mathscr{K}_i(\varphi \to \psi) \to (\mathscr{K}_i\neg\psi \to \mathscr{K}_i\neg\varphi)$

Demonstração. Seguem as derivações.

1. $\vdash \mathscr{K}_i(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\mathscr{K}_i\varphi \wedge \mathscr{K}_i\psi)$

1. $\mathscr{K}_i(\varphi \wedge \psi) \to \mathscr{K}_i\varphi$ – **LP**, **Nec**, **K** e **MP**
2. $\mathscr{K}_i(\varphi \wedge \psi) \to \mathscr{K}_i\psi$ – **LP**, **Nec**, **K** e **MP**
3. $\mathscr{K}_i(\varphi \wedge \psi) \to (\mathscr{K}_i\varphi \wedge \mathscr{K}_i\varphi)$ – de 1, 2, **LP** e **MP**
4. $\mathscr{K}_i\varphi \to \mathscr{K}_i(\psi \to (\varphi \wedge \psi))$ – **LP**, **Nec**, **K** e **MP**
5. $\mathscr{K}_i\varphi \to (\mathscr{K}_i\psi \to \mathscr{K}_i(\varphi \wedge \psi))$ – de 4, **K**, **LP** e **MP**
6. $(\mathscr{K}_i\varphi \wedge \mathscr{K}_i\psi) \to \mathscr{K}_i(\varphi \wedge \psi))$ – de 5, **LP** e **RE**
7. $\mathscr{K}_i(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\mathscr{K}_i\varphi \wedge \mathscr{K}_i\psi)$ – de 3, 6, **LP** e **MP**

2. $\vdash \mathscr{K}_i\forall x(\varphi \to \psi) \to (\mathscr{K}_i\forall x\varphi \to \mathscr{K}_i\forall x\psi)$

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$ – **Distr**$\forall$
2. $\mathscr{K}_i\forall x(\varphi \to \psi) \to \mathscr{K}_i(\forall x\varphi \to \forall x\psi)$ – de 1, **Nec**, **K** e **MP**
3. $\mathscr{K}_i(\forall x\varphi \to \forall x\psi) \to (\mathscr{K}_i\forall x\varphi \to \mathscr{K}_i\forall x\psi)$ – **K**
4. $\mathscr{K}_i\forall x(\varphi \to \psi) \to (\mathscr{K}_i\forall x\varphi \to \mathscr{K}_i\forall x\psi)$ – de 2, 3, **LP** e **MP**.

3. $\vdash \mathscr{K}_i(\varphi \to \psi) \to (\mathscr{K}_i\neg\psi \to \mathscr{K}_i\neg\varphi)$

1. $(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ – **LP**
2. $\mathscr{K}_i(\varphi \to \psi) \to \mathscr{K}_i(\neg\psi \to \neg\varphi)$ – de 1, **Nec**, **K** e **MP**
3. $\mathscr{K}_i(\varphi \to \psi) \to (\mathscr{K}_i\neg\psi \to \mathscr{K}_i\neg\varphi)$ – de 2, **K**, **LP** e **MP**.

$\square$

O teorema a seguir garante o caráter necessário das asserções envolvendo identidade entre variáveis individuais, de maneira análoga ao que o axioma **NecDif** faz com a diferença (negação da identidade) entre variáveis.

Teorema 3.3.5. *É teorema de* **QK**^{m}*:*

$$\textbf{(NecId)} \quad (x = y) \to \mathscr{K}_i(x = y)$$

Demonstração. Segue a derivação.

1. $(x = y) \to (\mathscr{K}_i(x = x) \to \mathscr{K}_i(x = y))$ – **Subst**
2. $\mathscr{K}_i(x = x) \to ((x = y) \to \mathscr{K}_i(x = y))$ – de 1, **LP** e **MP**
3. $\mathscr{K}_i(x = x)$ – de **Id** e **Nec**
4. $(x = y) \to \mathscr{K}_i(x = y)$ – de 2, 3 e **MP**

□

Os próximos teoremas estabelecem regras que facilitarão importantes demonstrações ainda neste capítulo.

Teorema 3.3.6. *Sejam φ, ψ, ζ e $\xi_1, \ldots, \xi_k$ ($k \in \mathbb{N}$) fórmulas quaisquer de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$. A seguinte regra pode ser derivada em* $\mathbf{QK}^m$*:*

$$\vdash \varphi \to \psi, \vdash \zeta \to \mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \varphi) \ldots)$$
$$\Rightarrow \qquad \vdash \zeta \to \mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \psi) \ldots)$$

Demonstração. Segue a derivação.

1. $\varphi \to \psi$ – hipótese
2. $\xi_k \to (\varphi \to \psi)$ – de 1, **LP** e **MP**
3. $(\xi_k \to \varphi) \to (\xi_k \to \psi)$ – de 2, **LP** e **MP**
4. $\mathscr{K}_i(\xi_k \to \varphi) \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \psi)$ – de 3, **Nec**, **K** e **MP**
5. $\mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \varphi) \ldots) \to \mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \psi) \ldots)$

– de 4, repetindo a estratégia 2–4 acima, usando consecutivamente $\xi_{k-1}, \ldots, \xi_1$ como foi feito com ξ_k

6. $(\zeta \to \mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \mathscr{K}_i\varphi) \ldots)) \to (\zeta \to \mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \mathscr{K}_i\psi) \ldots))$ – de 5, **LP** e **MP**
7. $\zeta \to \mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \varphi) \ldots)$ – hipótese
8. $\zeta \to \mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \psi) \ldots)$ – de 6, 7, por **MP**.

□

Teorema 3.3.7. *Sejam φ, ψ, ζ, ξ e λ fórmulas quaisquer de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$. As seguintes regras podem ser derivadas em* $\mathbf{QK}^m$*:*

1. $$\vdash \varphi \to \mathscr{K}_i(\psi \to (\zeta \to \neg(\xi \to \lambda)))$$
$$\Rightarrow$$
$$\vdash \varphi \to \mathscr{K}_i(\psi \to (\zeta \to \xi))$$

2. $$\vdash \varphi \to \mathscr{K}_i(\psi \to (\zeta \to \neg(\xi \to \lambda)))$$
$$\Rightarrow$$
$$\vdash \varphi \to \mathscr{K}_i(\psi \to (\zeta \to \neg\lambda))$$

Demonstração. Por comodidade, as derivações de ambas as regras serão combinadas em uma única.

1. $\varphi \to \mathscr{K}_i(\psi \to (\zeta \to \neg(\xi \to \lambda)))$ – hipótese
2. $(\zeta \to \neg(\xi \to \lambda)) \to ((\zeta \to \xi) \wedge (\zeta \to \neg\lambda))$ – **LP**
3. $(\psi \to (\zeta \to \neg(\xi \to \lambda))) \to (\psi \to ((\zeta \to \xi) \wedge (\zeta \to \neg\lambda)))$ – de 2, **LP**, **MP**
4. $(\psi \to (\zeta \to \neg(\xi \to \lambda))) \to ((\psi \to (\zeta \to \xi)) \wedge (\psi \to (\zeta \to \neg\lambda)))$ – de 3, **LP** e **RE**
5. $\mathscr{K}_i(\psi \to (\zeta \to \neg(\xi \to \lambda))) \to (\mathscr{K}_i(\psi \to (\zeta \to \xi)) \wedge \mathscr{K}_i(\psi \to (\zeta \to \neg\lambda)))$ – de 4, **Nec**, **K**, **MP**, item (i) do Teorema 3.3.4 e **RE**
6. $(\varphi \to \mathscr{K}_i(\psi \to (\zeta \to \neg(\xi \to \lambda)))) \to ((\varphi \to \mathscr{K}_i(\psi \to (\zeta \to \xi))) \wedge (\varphi \to \mathscr{K}_i(\psi \to (\zeta \to \neg\lambda))))$ – de 5, **LP** e **MP**
7. $(\varphi \to \mathscr{K}_i(\psi \to (\zeta \to \xi))) \wedge (\varphi \to \mathscr{K}_i(\psi \to (\zeta \to \neg\lambda)))$ – de 1, 6 e **MP**
8. $\varphi \to \mathscr{K}_i(\psi \to (\zeta \to \xi))$ – de 7, **LP** e **MP**
9. $\varphi \to \mathscr{K}_i(\psi \to (\zeta \to \neg\lambda))$ – de 7, **LP** e **MP**

Os passos 8 e 9 da derivação correspondem, respectivamente, aos resultados das duas regras, para a mesma hipótese.

□

3.4 CORREÇÃO E COMPLETUDE

Acerca de $\mathbf{QK}^m$, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.4.1 (Correção de $\mathbf{QK}^m$ com respeito a $\mathscr{S}$)**.** *O sistema* $\mathbf{QK}^m$ *é correto com respeito a* $\mathscr{S}$ *(a classe de todas as estruturas epistêmicas).*

A prova, embora demorada e tediosa, é rotineira, consistindo na verificação da validade de todos os axiomas de $\mathbf{QK}^m$ com respeito à classe de todas as estruturas, a partir das cláusulas de satisfatibilidade para modelos baseados nessas estruturas, e de que suas regras de inferência (**MP**, **Nec**, **Gen**$\forall$ e **Gen**$\forall^n$) preservam aquela validade.

Por economia de espaço, apresentaremos somente os casos menos usuais, envolvendo a base de primeira ordem e os esquemas para a identidade. Os demais casos são facilmente derivados adaptando-se as provas para os casos aléticos na literatura — por exemplo, em Hughes e Cresswell (1996, p. 41). Nas provas a seguir, a consideração de um modelo qualquer deve sempre pressupor que estamos lidando com modelos epistêmicos baseados em estruturas arbitrárias, e que, portanto, a validade geral está demonstrada para a classe $\mathscr{S}$ de todas as estruturas.

(9) **Vac**$\forall$: $\vDash \forall x\, \varphi \leftrightarrow \varphi$ (onde x não ocorre livre em φ)

Demonstração. Suponhamos que, para uma atribuição σ e ponto w arbitrários de um modelo M, seja o caso que $(M^{\sigma}, w) \vDash \forall x\varphi$. Isso equivale a dizer que, para todo $o \in Q(w)$, $(M^{\sigma\binom{x}{o}}, w) \vDash \varphi$. Entretanto, como x não ocorre livre em φ e $\sigma\binom{x}{o}$ é idêntica a σ, exceto no máximo em $\sigma(x)$, segue-se que $(M^{\sigma}, w) \vDash \varphi$. Agora, suponha que $(M^{\sigma}, w) \vDash \varphi$. Como, por hipótese, x não ocorre livre em φ, para qualquer variante de σ em w com respeito a x, e qualquer $o \in Q(w)$, ocorre que $(M^{\sigma\binom{x}{o}}, w) \vDash \varphi$; o que, por definição equivale a $(M^{\sigma}, w) \vDash \forall x\varphi$, como se queria demonstrar. □

(10) **Distr**$\forall$: $\vDash \forall x\,(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\,\varphi \rightarrow \forall x\,\psi)$

Demonstração. Suponhamos que, para uma atribuição σ e ponto w arbitrários de um modelo M, seja o caso que $(M^{\sigma}, w) \vDash \forall x(\varphi \rightarrow \psi)$ e que $(M^{\sigma}, w) \vDash \forall x\varphi$. Assim, por definição, para todo $o \in Q(w)$, é o caso que $(M^{\sigma\binom{x}{o}}, w) \vDash \varphi \rightarrow \psi$ e que $(M^{\sigma\binom{x}{o}}, w) \vDash \varphi$. Como é impossível, nessas circunstâncias, que $(M^{\sigma\binom{x}{o}}, w) \nvDash \psi$, segue-se também que $(M^{\sigma}, w) \vDash \forall x\psi$, como se queria demonstrar. □

(11) **Inst**$\forall$: $\vDash (\forall x\varphi \wedge \mathsf{E}(y)) \rightarrow \varphi(x/y))$

Demonstração. Suponhamos que, para uma atribuição σ e ponto w arbitrários de um modelo M, seja o caso que (i) $(M^{\sigma}, w) \vDash \forall x\varphi$ e que (ii) $(M^{\sigma}, w) \vDash \exists z(z = y)$. De (i) inferimos que, para todo $o \in Q(w)$, ocorre $(M^{\sigma\binom{x}{o}}, w) \vDash \varphi$; e de (ii) inferimos que, para algum $o' \in Q(w)$, ocorre $(M^{\sigma\binom{z}{o'}}, w) \vDash (z = y)$ (ou seja, que $\sigma\binom{z}{o'}(z) = \sigma\binom{z}{o'}(y) = o'$). Como $o' \in Q(w)$, segue-se que $\sigma\binom{z}{o'}(y) \in Q(w)$. Além disso, pela definição de $\mathsf{E}(y)$, a variável z é diferente de y; portanto, $\sigma\binom{z}{o'}(y) = \sigma(y)$ e também $\sigma(y) \in Q(w)$. Suponhamos, agora, que (iii) $(M^{\sigma}, w) \nvDash \varphi(x/y)$. Ora, sabendo que $\sigma(y) = o'$, e que $\varphi(x/y)$ difere de φ somente nas ocorrências (livres) de x, não é difícil perceber que (iii) equivale a dizer que quando o' for atribuído às ocorrências de x em φ, esta fórmula será falsa nesse ponto; em outras palavras: $(M^{\sigma\binom{x}{o'}}, w) \nvDash \varphi$, contradizendo a exigência anterior de que, para todo $o \in Q(w)$, ocorre $(M^{\sigma\binom{x}{o}}, w) \vDash \varphi$. □

(12) $\mathsf{E}\forall$: $\vDash \forall x\mathsf{E}(x)$

Demonstração. Suponhamos que, para uma atribuição σ e ponto w arbitrários de um modelo M, seja o caso que $(M^{\sigma}, w) \nvDash \forall x\mathsf{E}(x)$. Isso equivale a dizer que, para algum $o' \in Q(w)$, ocorre $(M^{\sigma\binom{x}{o'}}, w) \nvDash \mathsf{E}(x)$; ou seja, por definição, acontece $(M^{\sigma\binom{x}{o'}}, w) \nvDash \exists y(y = x)$. Por sua vez, isso quer dizer que, para todo $o \in Q(w)$, é o caso que $(M^{\sigma\binom{x}{o'}\binom{y}{o}}, w) \vDash (y \neq x)$. Dizendo de outra maneira, temos, para todo $o \in Q(w)$ e um específico $o' \in Q(w)$, que $\sigma\binom{x}{o'}\binom{y}{o}(y)$ nunca coincide com $\sigma\binom{x}{o'}\binom{y}{o}(x)$, o que contradiz a exigência anterior de que $o' \in Q(w)$.

$\square$

(13) **Gen$\forall$**: $\vDash \varphi \Rightarrow \vDash \forall x\, \varphi$

Demonstração. Suponhamos que φ seja válida. Por definição, isso acarreta dizer que φ é verdadeira em todos os pontos (M^{σ}, w), para toda atribuição σ em todo modelo M. Caso $\nvDash \forall x\varphi$, isso acarretaria dizer que, para alguma atribuição σ' em algum ponto w' de um modelo M' baseado em alguma estrutura S, seria o caso que $(M'^{\sigma'}, w') \nvDash \forall x\varphi$. Isso equivaleria a dizer que há uma variante de σ' em w' tal que, para algum $o \in Q(w')$ específico, $(M^{\sigma'\binom{x}{o}}, w') \nvDash \varphi$, contradizendo a suposição inicial. $\square$

(14) **Gen$\forall^n$**: $\vDash \varphi_1 \to \mathcal{K}_i(\varphi_2 \to \ldots \mathcal{K}_i(\varphi_n \to \mathcal{K}_i\psi)\ldots)$
$\Rightarrow \vDash \varphi_1 \to \mathcal{K}_i(\varphi_2 \to \ldots \mathcal{K}_i(\varphi_n \to \mathcal{K}_i\forall x\psi)\ldots)$
(onde x não ocorre livre em $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$)

Demonstração. Suponhamos que $\nvDash \varphi_1 \to \mathcal{K}_i(\varphi_2 \to \ldots \mathcal{K}_i(\varphi_n \to \mathcal{K}_i\forall x\psi)\ldots)$ (para algum $i \in A$, $n \geq 1$ e onde x não tem ocorrências livres em $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$). Isso quer dizer que, para alguma atribuição σ e ponto w em um modelo M, acontece $(M^{\sigma}, w) \nvDash \varphi_1 \to \mathcal{K}_i(\varphi_2 \to \ldots \mathcal{K}_i(\varphi_n \to \mathcal{K}_i\forall x\psi)\ldots)$. Claramente, isso acarreta dizer que há uma cadeia de pontos $w_1, \ldots, w_{n+1}$, tal que *(1)* $w_1 = w$, *(2)* $(w_j, w_{j+1}) \in R_i$ $(1 \leq j \leq n)$, *(3)* $(M^{\sigma}, w_j) \vDash \varphi_j$ $(1 \leq j \leq n)$ e *(4)* $(M^{\sigma}, w_{n+1}) \nvDash \forall x\psi$. Ora, de *(4)* inferimos que, para algum $o \in Q(w_{n+1})$, acontece $(M^{\sigma\binom{x}{o}}, w_{n+1}) \nvDash \psi$. Como x não ocorre livre em nenhuma φ_j, de *(3)* também em cada caso: $(M^{\sigma\binom{x}{o}}, w_j) \vDash \varphi_j$; por conseguinte, $(M^{\sigma\binom{x}{o}}, w) \nvDash \varphi_1 \to \mathcal{K}_i(\varphi_2 \to \ldots \mathcal{K}_i(\varphi_n \to \mathcal{K}_i\psi)\ldots)$. Em consequência, $\nvDash \varphi_1 \to \mathcal{K}_i(\varphi_2 \to \ldots \mathcal{K}_i(\varphi_n \to \mathcal{K}_i\psi)\ldots)$, como queríamos mostrar.[3]

$\square$

(15) **Id**: $\vDash (x = x)$

Demonstração. Trivial. $\square$

(16) **Subst**: $\vDash (x = y) \to (\varphi \to \varphi')$

[3] Ver Hughes e Cresswell (1996, p. 295).

Demonstração. Por indução sobre φ.

Base atômica: Além do caso em que φ seria $\perp$, cuja prova resultaria trivial, φ pode ser da forma (i) $P^k(x_{i_1},\dots,x_{i_k})$ ou (ii) $(x=z)$ (ou $(z=x)$, essa ordem de termos sendo irrelevante, sem perda de generalidade). Tecnicamente, o caso (ii) é um subcaso de (i), provado em separado para efeito de destaque apenas. Além disso, os casos atômicos em que φ tiver a forma $(x=x)$ ou não contiver ocorrências de x são triviais e não serão comentados.

(i) Suponhamos que $(M^\sigma,w)\vDash(x=y)$ e $(M^\sigma,w)\vDash P^k(x_{i_1},\dots,x,\dots x_{i_k})$. Isso acarreta que $(\sigma(x_{i_1}),\dots,\ \sigma(x),\dots,\ \sigma(x_{i_k}))\in I(P^k,w)$. Ora, como $\sigma(x)$ coincide, por hipótese, com $\sigma(y)$, segue-se que $(\sigma(x_{i_1}),\dots,\ \sigma(y),\dots,\ \sigma(x_{i_k}))\in I(P^k,w)$, e, por conseguinte, que $(M^\sigma,w)\vDash P^k(x_{i_1},\dots,y,\dots x_{i_k})$.

(ii) Suponhamos que $(M^\sigma,w)\vDash(x=y)$ e que φ seja $(x=z)$. Nesse caso, φ' seria $(y=z)$. Ora, o esquema inteiro ficaria assim: $(x=y)\to((x=z)\to(y=z))$, cuja validade é facilmente demonstrável.

Hipótese indutiva: o esquema é válido para φ de comprimento $<n$.

Precisamos provar o caso booleano (iii) φ com a forma $\psi\to\xi$, o caso quantificacional (iv) φ com a forma $\forall z\psi$, e o caso modal (v) φ com a forma $\mathscr{K}_i\psi$.

(iii) Suponhamos que $(M^\sigma,w)\vDash(x=y)$ e $(M^\sigma,w)\vDash\psi\to\xi$. Se não houver ocorrências de x em $\psi\to\xi$, o esquema fica vacuamente satisfeito. Consideremos agora o caso interessante, com ocorrências de x em $\psi\to\xi$. De $(M^\sigma,w)\vDash\psi\to\xi$ se segue que $(M^\sigma,w)\nvDash\psi$ ou $(M^\sigma,w)\vDash\xi$. Só precisamos considerar a segunda alternativa. Como ξ tem comprimento menor do que φ, está sujeita à hipótese da indução. Assim, por passos triviais, $(M^\sigma,w)\vDash\xi'$; o que garante, por sua vez, mediante raciocínios proposicionais simples, que $(M^\sigma,w)\vDash\psi'\to\xi'$, e portanto: $(M^\sigma,w)\vDash\varphi'$.

(iv) Suponhamos que $(M^\sigma,w)\vDash(x=y)$ e $(M^\sigma,w)\vDash\forall z\psi$. O caso relevante é aquele em que a variável z é distinta de x. Isso equivale a dizer que, para todo $o\in Q(w)$, ocorre $(M^{\sigma\binom{z}{o}},w)\vDash\psi$. Examinaremos somente o caso em que ψ contenha ocorrências livres de x. Por h.i., obtemos $(M^{\sigma\binom{z}{o}},w)\vDash\psi'$, o que é garantido porque $\sigma(x)=\sigma(y)=\sigma\binom{z}{o}(x)$. Daí, temos que $(M^\sigma,w)\vDash\forall z\psi'$, e portanto: $(M^\sigma,w)\vDash\varphi'$.

(v) Suponhamos, finalmente, que $(M^\sigma,w)\vDash(x=y)$ e $(M^\sigma,w)\vDash\mathscr{K}_i\psi$. Examinaremos apenas o caso em que ψ contenha ocorrências livres de x. Pois bem, inferimos daí que para todo ponto w' tal que wR_iw', ocorre $(M^\sigma,w')\vDash\psi$. Como σ não varia de um ponto a outro no modelo, podemos aplicar com segurança a h.i. e obter $(M^\sigma,w')\vDash\psi'$. É fácil ver que isso equivale a dizer que $(M^\sigma,w)\vDash\mathscr{K}_i\psi'$, e portanto: $(M^\sigma,w)\vDash\varphi'$, como queríamos demonstrar. $\square$

A seguir, um corolário trivial, mas necessário, no qual estendemos o resultado para os outros sistemas em nossa lista de interesse.

Corolário 3.4.2. *Os seguintes sistemas são corretos com respeito às respectivas classes de estruturas epistêmicas:*

1. $\mathbf{QT}^m$ *é correto com respeito a* $\mathscr{S}^r$ *(estruturas reflexivas);*

2. $\mathbf{QS4}^m$ *é correto com respeito a* $\mathscr{S}^{rt}$ *(estruturas reflexivas transitivas);*

3. $\mathbf{QS5}^m$ *é correto com respeito a* $\mathscr{S}^{re}$ *(estruturas reflexivas euclideanas).*

Demonstração. Omitiremos as provas de cada subcaso, bastante conhecidas na literatura. A estratégia usual consiste em acrescentar a demonstração da validade dos esquemas de axiomas característicos dos sistemas em questão às provas já disponíveis para $\mathbf{QK}^m$. □

Uma vez assegurado que todos os teoremas em $\mathbf{QK}^m$, $\mathbf{QT}^m$, $\mathbf{QS4}^m$ e $\mathbf{QS5}^m$ são válidos com respeito às suas respectivas classes de estruturas epistêmicas, resta-nos agora mostrar a volta — ou seja, que todas as fórmulas válidas naquelas classes de estruturas são demonstráveis nos correspondentes sistemas. Novamente, a completude de $\mathbf{QK}^m$ será mostrada primeiro e os demais casos derivados como corolários.

Nossa estratégia para prova da completude respeitará a maneira usual — isto é, via modelos canônicos. Primeiro, seguem algumas definições importantes.

Definição 3.4.3. *Seja* Γ *um conjunto de fórmulas de* $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$*. Dizemos que:*

1. Γ *é inconsistente sse* $\vdash \neg(\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_j)$ *(para* $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_j\} \subseteq \Gamma$ *e* $j \in \mathbb{N}$*);*

2. Γ *é consistente sse não for inconsistente;*

3. Γ *é maximal sse, para toda* $\varphi \in \mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$*, ou* $\varphi \in \Gamma$ *ou* $\neg\varphi \in \Gamma$*;*

4. Γ *é maximal consistente sse* Γ *for maximal e consistente;*

5. Γ *é enriquecido sse, para toda fórmula* $\varphi \in \mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$ *e alguma variável individual* $y \in \mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$, $\mathsf{E}(y) \wedge (\varphi(x/y) \to \forall x\varphi) \in \Gamma$*;*

6. Γ *é enriquecido-*$\mathscr{K}_i$ *sse, para quaisquer fórmulas* $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ *(*$k \geq 0$*) e* ψ *de* $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$*, e qualquer variável* x *que não ocorra livre em* $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$*, há uma variável* $y \in \mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$ *tal que* $\mathscr{K}_i(\varphi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\varphi_k \to \mathscr{K}_i(\mathsf{E}(y) \to \psi(x/y))\ldots) \to \mathscr{K}_i(\varphi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\varphi_k \to \mathscr{K}_i\forall x\psi)\ldots) \in \Gamma$*;* [4]

[4] Ver Hughes e Cresswell (1996, p. 296). A formulação original dessa complicada propriedade foi proposta por Thomason (1970, p. 64–74).

7. *Γ é saturado sse Γ for maximal consistente, enriquecido e enriquecido-$\mathscr{K}_i$ (para todo $i \in A$).*

Conjuntos saturados, por definição, são maximais consistentes, e, por isso, possuem algumas propriedades bastante úteis, demonstradas a seguir.

Lema 3.4.4. *Seja Γ um conjunto maximal consistente de fórmulas de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$, e sejam φ e ψ fórmulas quaisquer de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$. Então,*

1. *não acontece $\varphi, \neg\varphi \in \Gamma$;*
2. *se $\varphi \in \Gamma$ e $\varphi \to \psi \in \Gamma$, então $\psi \in \Gamma$;*
3. *$\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ sse $\varphi \in \Gamma$ e $\psi \in \Gamma$;*
4. *$\varphi \vee \psi \in \Gamma$ sse $\varphi \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$;*
5. *$\varphi \to \psi \in \Gamma$ sse ou $\varphi \notin \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$;*
6. *$\varphi \to \psi \notin \Gamma$ sse $\varphi \in \Gamma$ e $\psi \notin \Gamma$.*

Demonstração. Trivial. Provaremos somente os itens *3* e *5*, ilustrando a mesma estratégia que demonstra facilmente os demais itens.

3: Suponhamos $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$, mas ou $\varphi \notin \Gamma$, ou $\psi \notin \Gamma$. Como Γ é maximal, isso quer dizer também que ou $\neg\varphi \in \Gamma$, ou $\neg\psi \in \Gamma$. Porém, aplicando a Definição 3.4.3, tanto $\{\varphi \wedge \psi, \neg\varphi\}$ como $\{\varphi \wedge \psi, \neg\psi\}$ são inconsistentes, pois $\vdash \neg((\varphi \wedge \psi) \wedge \neg\varphi)$ e $\vdash \neg((\varphi \wedge \psi) \wedge \neg\psi)$. Portanto, $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ acarreta que $\varphi \in \Gamma$ e $\psi \in \Gamma$. Suponhamos, agora, que $\varphi \in \Gamma$ e $\psi \in \Gamma$, mas $\varphi \wedge \psi \notin \Gamma$. Isso quer dizer, pela maximalidade de Γ, que $\neg(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$. Porém $\{\neg(\varphi \wedge \psi), \varphi, \psi\}$ é inconsistente, pois $\vdash \neg(\neg(\varphi \wedge \psi) \wedge \varphi \wedge \psi)$ (ou seja, $\vdash \varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$, contrariando a suposição inicial.

5: Suponhamos $\varphi \to \psi \in \Gamma$, mas nem $\varphi \notin \Gamma$, nem $\psi \in \Gamma$. Pela maximalidade de Γ, isso também quer dizer que $\varphi \in \Gamma$ e que $\neg\psi \in \Gamma$. Mas é fácil ver que $\{\varphi \to \psi, \varphi, \neg\psi\}$ é inconsistente. Para a volta, suponhamos que ou $\varphi \notin \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$, mas que $\varphi \to \psi \notin \Gamma$. Pela maximalidade de Γ, isso também quer dizer que ou $\neg\varphi \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$, e que $\neg(\varphi \to \psi) \in \Gamma$. Porém, é relativamente fácil ver que tanto $\{\neg(\varphi \to \psi), \neg\varphi\}$ como $\{\neg(\varphi \to \psi), \psi\}$ são inconsistentes.

□

Lema 3.4.5. *Seja Γ um conjunto maximal consistente de fórmulas de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$, e sejam φ e ψ fórmulas quaisquer de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$. Então,*

1. *se $\vdash \varphi$, então, $\varphi \in \Gamma$;*

2. *se* $\varphi \in \Gamma$ *e* $\vdash \varphi \rightarrow \psi$*, então* $\psi \in \Gamma$*.*

Demonstração. *1*: Suponhamos que $\varphi \notin \Gamma$. Pela maximalidade de Γ, segue-se que $\neg\varphi \in \Gamma$. Como Γ é consistente, pela Definição 3.4.3, inferimos que $\nvdash \neg\neg\varphi$, o que equivale a dizer que $\nvdash \varphi$.

2: Suponhamos que $\varphi \in \Gamma$ e $\vdash \varphi \rightarrow \psi$. Pelo item anterior deste lema, $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$. Pela maximalidade de Γ, ou ψ ou $\neg\psi$ pertencem a Γ. Porém, não pode ser $\neg\psi$, pois $\{\varphi \rightarrow \psi, \varphi, \neg\psi\}$ é obviamente inconsistente, pois $\vdash \neg((\varphi \rightarrow \psi) \wedge \varphi \wedge \neg\psi)$, contrariando nossa suposição de que Γ é consistente. $\square$

A demonstração do próximo teorema é bastante extensa; porém, trata-se de resultado essencial para mostrarmos a completude de $\mathbf{QK}^m$ por meio de modelos canônicos.[5]

Teorema 3.4.6 (Saturação)**.** *Se* Γ *for um conjunto consistente de fórmulas de* $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$*, então* Γ *pode ser estendido a um conjunto saturado* Δ *em uma linguagem expandida* $\mathscr{L}^{m+}_{\mathscr{K}}$ *obtida a partir de* $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$ *mediante o acréscimo de conjuntos enumeráveis de novas variáveis individuais.*

Demonstração. Primeiro, seja uma expansão simples $\mathscr{L}^{m+}_{\mathscr{K}}$ a partir de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$ pelo acréscimo dos conjuntos enumeráveis Y e Z, onde $Y = \{y_0, y_1, \ldots\}$ e $Z = \{z_0, z_1, \ldots\}$ são conjuntos com novas variáveis individuais, e tais que $Y \cap Z = \varnothing$.

A seguir, façamos duas enumerações distintas de fórmulas de $\mathscr{L}^{m+}_{\mathscr{K}}$. A primeira com todas as φ com a forma $\forall x\psi$, e a segunda com todas as ζ com a forma $\mathscr{K}_i(\xi_1 \rightarrow \ldots \rightarrow \mathscr{K}_i(\xi_k \rightarrow \mathscr{K}_i\forall x\theta)\ldots)$ (para $k \geq 0$ e tal que x não ocorra livre em $\xi_1, \ldots, \xi_k$), de modo que possamos falar de cada φ_j e cada ζ_j ($j \in \mathbb{N}$) nas respectivas listas.

Assumamos, agora, que Γ é consistente. Lembrando que Γ contém apenas fórmulas de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$, construímos uma cadeia de extensões:

$$\Gamma_0\ (=\Gamma)\ \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \ldots$$

tal que:

$$\Gamma_{j+1} = \Gamma_j \cup \{\mathsf{E}(y) \wedge (\psi(x/y) \rightarrow \forall x\psi), \mathscr{K}_i(\xi_1 \rightarrow \ldots \rightarrow \mathscr{K}_i(\xi_k \rightarrow \mathscr{K}_i(\mathsf{E}(z) \rightarrow \theta(x/z)))\ldots) \rightarrow \mathscr{K}_i(\xi_1 \rightarrow \ldots \rightarrow \mathscr{K}_i(\xi_k \rightarrow \mathscr{K}_i\forall x\theta)\ldots)\}$$

onde $\forall x\psi$ é a $j+1$-ésima φ na primeira lista, $\mathscr{K}_i(\xi_1 \rightarrow \ldots \rightarrow \mathscr{K}_i(\xi_k \rightarrow \mathscr{K}_i\forall x\theta)\ldots)$ é a $j+1$-ésima ζ na segunda lista (para cuja ζ, lembramos novamente, x não ocorre livre em $\xi_1, \ldots, \xi_k$), e y e z são, respectivamente, as

[5] Adaptado de Hughes e Cresswell (1996, p. 296–298).

primeiras variáveis dos conjuntos Y e Z que não ocorram em nenhuma fórmula de Γ_j, nem em ψ, nem em $\xi_1, \ldots, \xi_k$, nem em θ. É possível mostrar que cada Γ_j é consistente, e que, além disso, $\Gamma' = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Gamma_j$ também o é.

Verificaremos o primeiro caso, mostrando que, se Γ_{j+1} for inconsistente (para um Γ_{j+1} arbitrário na cadeia), seu conjunto precedente Γ_j será inconsistente, o que recursivamente acabará por fazer com que Γ_0 também o seja, contradizendo a suposição inicial.

Suponhamos, assim, que Γ_{j+1} seja inconsistente. A partir da Definição 3.4.3 e da estratégia de construção para Γ_{j+1}, isso quer dizer que, para $\gamma_1, \cdots, \gamma_m \in \Gamma_j$, e para aquelas fórmulas acrescentadas no $j+1$-ésimo passo da cadeia de extensões:

$$\vdash \neg(\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_m \wedge (\mathsf{E}(y) \wedge (\psi(x/y) \to \forall x\psi)) \wedge (\mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \mathscr{K}_i(\mathsf{E}(z) \to \theta(x/z)))\ldots) \to \mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \mathscr{K}_i\forall x\theta)\ldots)))$$

o que proposicionalmente acarreta dizer que:

$$\vdash (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_m \wedge (\mathsf{E}(y) \wedge (\psi(x/y) \to \forall x\psi))) \to \neg(\mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \mathscr{K}_i(\mathsf{E}(z) \to \theta(x/z)))\ldots) \to \mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \mathscr{K}_i\forall x\theta)\ldots))$$

e, consequentemente, que temos as duas seguintes condições:

$(i) \vdash (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_m \wedge (\mathsf{E}(y) \wedge (\psi(x/y) \to \forall x\psi))) \to \mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \mathscr{K}_i(\mathsf{E}(z) \to \theta(x/z)))\ldots)$

$(ii) \vdash (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_m \wedge (\mathsf{E}(y) \wedge (\psi(x/y) \to \forall x\psi))) \to \neg\mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \mathscr{K}_i\forall x\theta)\ldots)$

Como a variável z em questão satisfaz as restrições exigidas por $\mathbf{Gen}\forall^k$, empregando a dita regra em (i), inferimos:

$(iv) \vdash (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_m \wedge (\mathsf{E}(y) \wedge (\psi(x/y) \to \forall x\psi))) \to \mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \mathscr{K}_i\forall z(\mathsf{E}(z) \to \theta(x/z)))\ldots)$

Do passo anterior, usando os teoremas 3.3.4(ii) e 3.3.6:

$(v) \vdash (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_m \wedge (\mathsf{E}(y) \wedge (\psi(x/y) \to \forall x\psi))) \to \mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to (\mathscr{K}_i\forall z\mathsf{E}(z) \to \mathscr{K}_i\forall z\theta(x/z)))\ldots)$

De (v) acima, usando **LP** (permutação de premissas) e **RE**:

$(vi) \vdash (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_m \wedge (\mathsf{E}(y) \wedge (\psi(x/y) \to \forall x\psi))) \to \mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\mathscr{K}_i\forall z\mathsf{E}(z) \to (\xi_k \to \mathscr{K}_i\forall z\theta(x/z)))\ldots)$

Do último passo, empregando o axioma **K** e novamente o Teorema 3.3.6:

$(vii) \vdash (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_m \wedge (\mathsf{E}(y) \wedge (\psi(x/y) \to \forall x\psi))) \to \mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to (\mathscr{K}_i\mathscr{K}_i\forall z\mathsf{E}(z) \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \mathscr{K}_i\forall z\theta(x/z)))\ldots)$

Mediante repetidas aplicações dos raciocínios acima, inferimos:

$(viii)$ $\vdash (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_m \wedge (\mathsf{E}(y) \wedge (\psi(x/y) \rightarrow \forall x\psi))) \rightarrow (\mathscr{K}_i^{k+1}\forall z\mathsf{E}(z) \rightarrow \mathscr{K}_i(\xi_1 \rightarrow \ldots \rightarrow \mathscr{K}_i(\xi_k \rightarrow \mathscr{K}_i\forall z\theta(x/z))\ldots))$

onde $\mathscr{K}_i^{k+1}$ indica $k+1$ iterações do operador $\mathscr{K}_i$. Em seguida, empregando **LP** e **MP**:

(ix) $\vdash \mathscr{K}_i^{k+1}\forall z\mathsf{E}(z) \rightarrow ((\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_m \wedge (\mathsf{E}(y) \wedge (\psi(x/y) \rightarrow \forall x\psi))) \rightarrow \mathscr{K}_i(\xi_1 \rightarrow \ldots \rightarrow \mathscr{K}_i(\xi_k \rightarrow \mathscr{K}_i\forall z\theta(x/z))\ldots))$

Consideremos o axioma **E**$\forall$. Aplicando **Nec** por $k+1$ vezes e **MP** com o passo (ix) acima, conseguimos desse modo:

(x) $\vdash (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_m \wedge (\mathsf{E}(y) \wedge (\psi(x/y) \rightarrow \forall x\psi))) \rightarrow \mathscr{K}_i(\xi_1 \rightarrow \ldots \rightarrow \mathscr{K}_i(\xi_k \rightarrow \mathscr{K}_i\forall z\theta(x/z))\ldots)$

Pelo item (ii) do Teorema 3.3.3 (variantes alfabéticas) e **RE**:

(xi) $\vdash (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_m \wedge (\mathsf{E}(y) \wedge (\psi(x/y) \rightarrow \forall x\psi))) \rightarrow \mathscr{K}_i(\xi_1 \rightarrow \ldots \rightarrow \mathscr{K}_i(\xi_k \rightarrow \mathscr{K}_i\forall x\theta)\ldots)$

Combinando os passos (ii) e (xi), e usando **LP** e **MP**, obtemos:

(xii) $\vdash \neg(\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_m \wedge (\mathsf{E}(y) \wedge (\psi(x/y) \rightarrow \forall x\psi)))$

o que equivale proposicionalmente a dizer:

$(xiii)$ $\vdash (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_m) \rightarrow \neg(\mathsf{E}(y) \wedge (\psi(x/y) \rightarrow \forall x\psi))$

Por sua vez, o passo acima acarreta (xiv) abaixo:

(xiv) $\vdash (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_m) \rightarrow (\mathsf{E}(y) \rightarrow \neg(\psi(x/y) \rightarrow \forall x\psi))$

Por **Gen**$\forall$, pelo item (iv) do Teorema 3.3.3 e **MP**, inferimos:

(xv) $\vdash (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_m) \rightarrow \forall y(\mathsf{E}(y) \rightarrow \neg(\psi(x/y) \rightarrow \forall x\psi))$

Por aplicações óbvias de **Distr**$\forall$, **LP** e **MP**, garantimos que:

(xvi) $\vdash (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_m) \rightarrow (\forall y\mathsf{E}(y) \rightarrow \forall y\neg(\psi(x/y) \rightarrow \forall x\psi))$

É fácil ver que, por **LP** (permutação de premissas) e **RE**, temos também:

$(xvii)$ $\vdash \forall y\mathsf{E}(y) \rightarrow ((\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_m) \rightarrow \forall y\neg(\psi(x/y) \rightarrow \forall x\psi))$

Como antes, usando **E**$\forall$ e **MP**:

$(xviii)$ $\vdash (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_m) \rightarrow \forall y\neg(\psi(x/y) \rightarrow \forall x\psi)$

Combinando o passo $(xviii)$ acima com o item (iii) do Teorema 3.3.3, somos levados a inferir, por **LP** e **MP** que:

(xix) $\vdash \neg(\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_m)$

Mas, isso significa dizer, por definição, que Γ_j teria que ser inconsistente, contradizendo a suposição inicial.

Para mostrar que $\Gamma' = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Gamma_j$ também é consistente, basta empregarmos o raciocínio habitual que mostra ser contraditória a suposição de que algum subconjunto de Γ' possa ser inconsistente. Além disso, Γ', por construção, é evidentemente enriquecida e enriquecida-$\mathscr{K}_i$ (para todo $i \in A$).

Não é difícil ver que Γ', por sua vez, pode ser estendido a um conjunto maximal consistente da maneira usual (via estratégia de Lindenbaum,[6] omitida aqui por economia de espaço e por se tratar de um procedimento rotineiro), resultando assim em um conjunto saturado Δ, como queríamos mostrar.

$\square$

Lema 3.4.7. *Seja Γ um conjunto consistente de fórmulas de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$ contendo $\neg\mathscr{K}_i\psi$. Então, o conjunto $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in \Gamma\} \cup \{\neg\psi\}$ é consistente.*

Demonstração. Suponhamos que $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in \Gamma\} \cup \{\neg\psi\}$ seja inconsistente. Assim, há $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in \{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in \Gamma\}$, tais que:

$\vdash \neg(\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_k \wedge \neg\psi)$

o que, por **LP** e **RE**, acarreta:

$\vdash (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_k) \rightarrow \psi$

Empregando **Nec**, **K** e **MP**:

$\vdash \mathscr{K}_i(\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_k) \rightarrow \mathscr{K}_i\psi$

Usando múltiplas vezes o item (i) do Teorema 3.3.4 e **RE**

$\vdash (\mathscr{K}_i\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \mathscr{K}_i\gamma_k) \rightarrow \mathscr{K}_i\psi$

Novamente por **LP** e **RE**, isso nos garante:

$\vdash \neg(\mathscr{K}_i\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \mathscr{K}_i\gamma_k \wedge \neg\mathscr{K}_i\psi)$

Ora, mas é fácil ver que $\{\mathscr{K}_i\gamma_1, \ldots, \mathscr{K}_i\gamma_k, \neg\mathscr{K}_i\psi\} \subseteq \Gamma$, o que, por definição a partir do último passo acima, torna Γ inconsistente, contradizendo a suposição inicial.[7]

$\square$

Teorema 3.4.8. *Seja Γ um conjunto saturado de fórmulas contendo $\neg\mathscr{K}_i\psi$. Então, há um conjunto saturado Γ' contendo $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in \Gamma\} \cup \{\neg\psi\}$.*

[6] Ver, por exemplo, Hughes e Cresswell (1996, p. 115).

[7] (HUGHES; CRESSWELL, 1996, p. 117).

Demonstração. Suponhamos, como na prova do Teorema 3.4.6, uma enumeração com todas as fórmulas ζ de $\mathscr{L}^{m+}_{\mathscr{K}}$ com a forma $\mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \mathscr{K}_i\forall x\theta)\ldots)$ (para $k \geq 0$ e tal que x não ocorra livre em $\xi_1,\ldots,\xi_k$), de modo que possamos falar de cada ζ_j ($j \in \mathbb{N}$) na lista. Em seguida, definiremos uma lista de fórmulas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ tal que α_0 é $\neg\psi$, e tal que, para cada α_n, será construída uma α_n^+ de modo a obtermos em seguida α_{n+1} segundo um procedimento que passaremos a detalhar.[8]

Seja $\forall x\xi$ a $n+1$-ésima fórmula de $\mathscr{L}^{m+}_{\mathscr{K}}$ com essa forma, seja y a primeira variável tal que:

(♠) $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in \Gamma\} \cup \{\alpha_n \wedge (\mathsf{E}(y) \wedge (\xi(x/y) \to \forall x\xi))\}$ seja consistente.

Assim, definiremos α_n^+ como essa $\alpha_n \wedge (\mathsf{E}(y) \wedge (\xi(x/y) \to \forall x\xi)$ nas condições acima. Contudo, para que essa definição seja implementada, precisamos nos assegurar de que haverá uma variável y apropriada para cada instância de (♠).

Ora, no Lema 3.4.7, já mostramos que $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in \Gamma\} \cup \{\alpha_0\}$ tem que ser consistente. Resta-nos garantir que, para cada n, uma vez que $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in \Gamma\} \cup \{\alpha_n\}$ seja consistente, sempre haverá uma variável y tal que $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in \Gamma\} \cup \{\alpha_n^+\}$ também seja consistente.

Suponhamos que nem sempre haja uma y apropriada. Então, para alguma α_j na sequência, e para toda variável $y \in \mathscr{L}^{m+}_{\mathscr{K}}$, haverá sempre algum conjunto $\{\mathscr{K}_i\gamma_1,\ldots,\mathscr{K}_i\gamma_k\} \subseteq \Gamma$ tal que:

$$\vdash \neg(\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_k \wedge \alpha_j \wedge (\mathsf{E}(y) \wedge (\xi(x/y) \to \forall x\xi)))$$

ou seja:

$$\vdash (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_k) \to (\alpha_j \to (\mathsf{E}(y) \to \neg(\xi(x/y) \to \forall x\xi)))$$

Do passo anterior, por **Nec**, **K**, **MP**, item (i) do Teorema 3.3.4 e **RE**:

$$\vdash (\mathscr{K}_i\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \mathscr{K}_i\gamma_k) \to \mathscr{K}_i(\alpha_j \to (\mathsf{E}(y) \to \neg(\xi(x/y) \to \forall x\xi)))$$

Considerando **LP** (permutação de premissas) e **RE** sobre o passo anterior:

$$\vdash (\mathscr{K}_i\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \mathscr{K}_i\gamma_k) \to \mathscr{K}_i(\mathsf{E}(y) \to (\alpha_j \to \neg(\xi(x/y) \to \forall x\xi)))$$

Como Γ é saturado, por definição, é também maximal consistente. Além disso, é fácil perceber que $\mathscr{K}_i\gamma_1,\ldots,\mathscr{K}_i\gamma_k \in \Gamma$. Por aplicações simples dos lemas 3.4.4(3) e 3.4.5(2) e do passo anterior, inferimos que:

$$\mathscr{K}_i(\mathsf{E}(y) \to (\alpha_j \to \neg(\xi(x/y) \to \forall x\xi))) \in \Gamma$$

Lembramos que esse resultado deveria valer para *toda* variável $y \in \mathscr{L}^{m+}_{\mathscr{K}}$. Sendo assim, seja agora uma variável z qualquer tal que z não ocorra em α_j, nem em ξ. Podemos reescrever o último passo assim:

[8](HUGHES; CRESSWELL, 1996, p. 298–301).

$\mathscr{K}_i(\mathsf{E}(z) \to (\alpha_j \to \neg(\xi(x/z) \to \forall x\xi))) \in \Gamma$

Considerando-se também que Γ é enriquecido-$\mathscr{K}_i$, sabemos que

$\mathscr{K}_i(\mathsf{E}(z) \to (\alpha_j \to \neg(\xi(x/z) \to \forall x\xi))) \to \mathscr{K}_i\forall z(\alpha_j \to \neg(\xi(x/z) \to \forall x\xi))$

pertence a Γ. Como nosso resultado anterior valeria para toda variável y, também seria o caso com a variável z específica. Podemos inferir das informações anteriores e novamente por 3.4.5(2), que:

$\mathscr{K}_i\forall z(\alpha_j \to \neg(\xi(x/z) \to \forall x\xi)) \in \Gamma$

O raciocínio que garante o resultado acima fica mais evidente quando percebemos que, devido à restrição sobre ocorrências de z, temos que $\alpha_j = \alpha_j(z/z)$, que $\xi(x/z) = \xi(x/z)(z/z)$, que $\forall x\xi = (\forall x\xi)(z/z)$, e, consequentemente, que $\alpha_j \to \neg(\xi(x/z) \to \forall x\xi)$ coincide (vacuamente) com $(\alpha_j \to \neg(\xi(x/z) \to \forall x\xi))(z/z)$, justificando o recurso ao enriquecimento-$\mathscr{K}_i$ de Γ.

Agora, sabendo que z não ocorre livre em α_j, e considerando o item (iv) do Teorema 3.3.3, mais **Nec**, **K**, **MP**, inferimos que:

$\vdash \mathscr{K}_i\forall z(\alpha_j \to \neg(\xi(x/y) \to \forall x\xi)) \to \mathscr{K}_i(\alpha_j \to \forall z\neg(\xi(x/y) \to \forall x\xi))$

Assim, com base nos últimos passos, e novamente usando o Lema 3.4.5(2) é fácil ver que:

$\mathscr{K}_i(\alpha_j \to \forall z\neg(\xi(x/y) \to \forall x\xi)) \ \in \Gamma$

Agora, a partir do Teorema 3.3.4(iii) e novamente do Lema 3.4.5(2), deduzimos que

$\mathscr{K}_i\neg\forall z\neg(\xi(x/y) \to \forall x\xi)) \to \mathscr{K}_i\neg\alpha_j \ \in \Gamma$

Além disso, aplicando a regra **Nec** no item (iii) do Teorema 3.3.3 temos que

$\vdash \mathscr{K}_i\neg\forall z\neg(\xi(x/z) \to \forall x\xi)$.

Por ser teorema, a fórmula acima pertence a Γ, e dos passos anteriores, empregando o Lema 3.4.4(2), deduzimos que:

$\mathscr{K}_i\neg\alpha_j \in \Gamma$

Deste último resultado, sabemos que $\neg\alpha_j \in \{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in \Gamma\}$, o que naturalmente tornaria $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in \Gamma\} \cup \{\alpha_j\}$ inconsistente. Resumindo o raciocínio feito até aqui, temos que $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in \Gamma\} \cup \{\alpha_j^+\}$ é consistente se $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in \Gamma\} \cup \{\alpha_j\}$ também o for.

Agora, mostraremos como obter α_{n+1} a partir de α_n^+. Seja a j-ésima fórmula de $\mathscr{L}_{\mathscr{K}}^{m+}$ com a forma $\mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \mathscr{K}_i\forall x\theta)\ldots)$ nas condições especificadas no início desta demonstração, e seja y a primeira variável tal que:

($\clubsuit$) $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in \Gamma\} \cup \{\alpha_j^+ \wedge (\mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \mathscr{K}_i(\mathsf{E}(y) \to \theta(x/y)))$ $\ldots) \to \mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \mathscr{K}_i\forall x\theta)\ldots))\}$ seja consistente.

Definimos α_{j+1} como sendo:

$\alpha_j^+ \wedge (\mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \mathscr{K}_i(\mathsf{E}(y) \to \theta(x/y))) \ldots) \to \mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \mathscr{K}_i\forall x\theta)\ldots))$.

Podemos tranquilamente assumir que x também não ocorre livre em α_j^+; pois, caso necessário, poderíamos escolher uma variante alfabética (ver item (*ii*) do Teorema 3.3.3) para $\forall x\theta$ tal que a variável escolhida também não ocorresse livre em $\xi_1, \ldots, \xi_k$, nem em α_j^+.

Novamente, suponhamos que não haja uma variável y que satisfaça a condição ($\clubsuit$). Isso quer dizer que, para alguma α_j^+, e para *toda* $y \in \mathscr{L}_{\mathscr{K}}^{m+}$, haverá sempre algum conjunto $\{\mathscr{K}_i\gamma_1, \ldots, \mathscr{K}_i\gamma_k\} \subseteq \Gamma$ tal que:

$(i) \vdash (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_k) \to (\alpha_j^+ \to \neg(\mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \mathscr{K}_i(\mathsf{E}(y) \to \theta(x/y)))$ $\ldots) \to \mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \mathscr{K}_i\forall x\theta)\ldots)))$

o que, de acordo com o Teorema 3.3.7, acarreta dizer (*ii*) e (*iii*) abaixo:

$(ii) \vdash (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_k) \to (\alpha_j^+ \to \mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \mathscr{K}_i(\mathsf{E}(y) \to \theta(x/y)))$ $\ldots))$

$(iii) \vdash (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_k) \to (\alpha_j^+ \to \neg\mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \mathscr{K}_i\forall x\theta)\ldots))$

A partir de (*ii*), por aplicações rotineiras de **Nec**, **K**, **MP**, item (*i*) do Teorema 3.3.4 e **RE**:

$(iv) \vdash (\mathscr{K}_i\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \mathscr{K}_i\gamma_k) \to \mathscr{K}_i(\alpha_j^+ \to \mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \mathscr{K}_i(\mathsf{E}(y) \to$ $\theta(x/y))) \ldots))$

Sabemos que $\mathscr{K}_i\gamma_1, \ldots, \mathscr{K}_i\gamma_k \in \Gamma$. Do passo anterior, e por raciocínios usuais (lemas 3.4.4 e 3.4.5), inferimos que:

$(v)\ \mathscr{K}_i(\alpha_j^+ \to \mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \mathscr{K}_i(\mathsf{E}(y) \to \theta(x/y))) \ldots)) \in \Gamma$

Como esse resultado se aplicaria a qualquer variável y de $\mathscr{L}_{\mathscr{K}}^{m+}$, e como Γ é enriquecido-$\mathscr{K}_i$, é relativamente fácil deduzir que:

$(vi)\ \mathscr{K}_i(\alpha_j^+ \to \mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \mathscr{K}_i\forall x\theta) \ldots)) \in \Gamma$

e, portanto, que:

$(vii)\ \alpha_j^+ \to \mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \mathscr{K}_i\forall x\theta) \ldots) \in \{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in \Gamma\}$

Ora, do passo (*iii*) acima, do fato de que $\mathscr{K}_i\gamma_1, \ldots, \mathscr{K}_i\gamma_k \in \Gamma$, por raciocínios similares aos já utilizados, também sabemos que:

$(viii)\ \alpha_j^+ \to \neg\mathscr{K}_i(\xi_1 \to \ldots \to \mathscr{K}_i(\xi_k \to \mathscr{K}_i\forall x\theta)\ldots) \in \{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in \Gamma\}$

Os passos (vii) e $(viii)$, combinados nos fazem concluir, por raciocínios usuais (lemas 3.4.4 e 3.4.5), que:

(ix) $\neg\alpha_j^+ \in \{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in \Gamma\}$

e, portanto, que $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in \Gamma\} \cup \{\alpha_j^+\}$ resulta inconsistente.

Dessa maneira, concluímos que, se $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in \Gamma\} \cup \{\alpha_j^+\}$ for consistente, então $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in \Gamma\} \cup \{\alpha_{j+1}\}$ também o será. Como já vimos antes que, uma vez que $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in \Gamma\} \cup \{\alpha_j\}$ é consistente, $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in \Gamma\} \cup \{\alpha_j^+\}$ também será, obviamente a consistência de $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in \Gamma\} \cup \{\alpha_j\}$ assegura a consistência de $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in \Gamma\} \cup \{\alpha_{j+1}\}$. A consistência de cada α_j fica, assim, recursivamente garantida.

Seja Δ a união de $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in \Gamma\}$ e $\{\alpha_j\}$ (para cada α_j, conforme descritos acima). Como cada $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in \Gamma\} \cup \{\alpha_j\}$ é consistente, e como não é difícil perceber que $\vdash \alpha_h \to \alpha_j$ $(h \geq j)$ — uma forma generalizada de $\vdash \varphi \wedge \psi \to \varphi$ —, também Δ deve ser consistente. Por construção, Δ é maximal consistente, enriquecido e enriquecido-$\mathscr{K}_i$, e, portanto, saturado.

$\square$

Descreveremos agora o modelo canônico para $\mathbf{QK}^m$.

Definição 3.4.9 (Modelo canônico). *Seja uma enumeração de todas as variáveis individuais em* $\mathscr{L}_{\mathscr{K}}^{m+}$. *O modelo canônico* $M^\dagger$ *para* $\mathbf{QK}^m$ *na linguagem* $\mathscr{L}_{\mathscr{K}}^{m}$ *com uma expansão simples* $\mathscr{L}_{\mathscr{K}}^{m+}$ *é definido como a upla* $(W^\dagger, \{R_i^\dagger\}_{i\in A}, D^\dagger, Q^\dagger, I^\dagger)$, *tal que:*

1. $W^\dagger$ *é o conjunto dos conjuntos saturados de fórmulas em* $\mathscr{L}_{\mathscr{K}}^{m+}$;

2. *para* $i \in A$, $w, w' \in W^\dagger$, $wR_i^\dagger w'$ *sse* $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in w\} \subseteq w'$;

3. $D^\dagger = \{x \mid x$ *é a primeira variável em* $\mathscr{L}_{\mathscr{K}}^{m+}$ *tal que* $(y = x) \in w$ *(para cada* $y \in \mathscr{L}_{\mathscr{K}}^{m+}$ *e cada* $w \in W^\dagger$*)*$\}$;

4. *para* $w \in W^\dagger$, $Q^\dagger(w) = \{x \mid x \in D^\dagger$ *e* $\mathsf{E}(x) \in w\}$;

5. *para* $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \in D^\dagger$, $(\vec{x}) \in I^\dagger(P^k, w)$ *sse* $P^k(\vec{x}) \in w$.

Naturalmente, o conjunto das variáveis em $\mathscr{L}_{\mathscr{K}}^{m+}$ é enumerável, por consistir simplesmente da lista primitiva enumerável $x_0, x_1, \ldots$ mais os conjuntos Y e Z (ver a prova do Teorema 3.4.6), também enumeráveis.

Um exame do modelo canônico $M^\dagger$ acima mostraria que ele satisfaz as exigências para ser um modelo epistêmico, de acordo com a Definição 3.1.6. Em particular, se $\nvdash \varphi$, então pelo Lema de Saturação, há no mínimo um conjunto saturado que contém $\{\neg\varphi\}$; logo $W^\dagger$ é não vazio.

Entretanto, como estamos lidando com um símbolo primitivo de identidade em $\mathscr{L}^{m+}_{\mathscr{K}}$, nosso modelo canônico não será suficiente para validar as asserções que envolvem identidade entre variáveis distintas.[9] Isso fica mais evidente quando consideramos que, em uma situação na qual, para x e y distintas, $(x = y)$ seja verdadeira segundo uma dada atribuição, precisamos garantir que a dita atribuição associe o mesmo objeto no domínio do modelo tanto a x como a y, de modo a satisfazer a condição semântica para fórmulas com identidade.

Para solucionarmos essa dificuldade, precisaremos antes acrescentar algumas definições, generalizando as definições similares encontradas em Hughes e Cresswell (1996, p. 136–137).

Definição 3.4.10 (Trilha). *Seja um modelo epistêmico* $M = (W, \{R_i\}_{i \in A}, D, Q, I)$. *Para arbitrários* $w, w' \in W$, *dizemos que* $w \sim w'$ *(ou seja, que há uma* trilha *entre* w *e* w'*) sse houver uma sequência* $(w_1, i_1, w_2, \ldots, w_{k-1}, i_{k-1}, w_k)$ *tal que:*

1. $w_1 = w$ *e* $w_k = w'$;

2. *cada* w_j *na sequência pertence a* W;

3. *cada* i_j *na sequência pertence a* A;

4. $(w_j, w_{j+1}) \in R_{i_j}$ *ou* $(w_{j+1}, w_j) \in R_{i_j}$.

Intuitivamente, a definição acima considera sequências de pontos, nas quais cada ponto acessa ou é acessado pelo ponto seguinte de acordo com pelo menos uma das relações de acessibilidade epistêmica previstas no modelo, não necessariamente a mesma para cada par de pontos.

É claro que pode haver uma quantidade imensa de trilhas entre dois pontos específicos, mesmo que consideremos a mesma exata sequência de pontos entre aqueles dois, variando apenas as relações de acessibilidade entre cada par na sequência. Contudo, para todos os efeitos, será de pouca importância especificar quais relações compõem a trilha, contanto que haja pelo menos uma, para cada par de pontos, que atenda às exigências da definição. Similarmente, para nossos propósitos, será também irrelevante a direção dessa acessibilidade, contanto que cada par de pontos esteja conectado de alguma forma por cada R_i na sequência.

Definição 3.4.11 (Modelo conexo). *Dizemos que um modelo epistêmico* M *é* conexo *sse, para quaisquer* $w, w' \in W$, *há pelo menos uma trilha entre os pontos* w *e* w'.

[9](HUGHES; CRESSWELL, 1996, p.315–316).

Obviamente, nem todos os modelos epistêmicos são conexos. Por outro lado, se considerarmos o conjunto W de um modelo epistêmico não-conexo, podemos facilmente mapear seus fragmentos conexos, e tratá-los, feitas as devidas restrições nos demais elementos do modelo, como modelos conexos propriamente ditos. É justamente o que faremos a seguir com o modelo canônico $M^\dagger$ para $\mathbf{QK}^m$.

Definição 3.4.12 (Modelo subcanônico)**.** *Seja o modelo canônico $M^\dagger$ para* $\mathbf{QK}^m$ *na linguagem expandida $\mathscr{L}^{m+}_{\mathscr{K}}$ conforme a Definição 3.4.9. Chamaremos de* modelo subcanônico *(para o mesmo sistema na mesma linguagem) a cada modelo $M^\ddagger = (W^\ddagger, \{R^\ddagger_i\}_{i\in A}, D^\ddagger, Q^\ddagger, I^\ddagger)$, tal que:*

1. *$W^\ddagger \subseteq W^\dagger$ e, para quaisquer $w, w' \in W^\ddagger$, há pelo menos uma trilha entre w e w';*

2. *para $i \in A$, e para $w, w' \in W^\ddagger$, $R^\ddagger_i = R^\dagger_i \cap W^\ddagger \times W^\ddagger$;*

3. *$D^\ddagger = \{x \mid x$ é a primeira variável em $\mathscr{L}^{m+}_{\mathscr{K}}$ tal que $(y = x) \in w$ (para cada $y \in \mathscr{L}^{m+}_{\mathscr{K}}$ e algum $w \in W^\ddagger$)$\}$;*

4. *para $w \in W^\ddagger$, $Q^\ddagger(w) = \{x \mid x \in D^\dagger$ e $\mathsf{E}(x) \in w\}$;*

5. *para cada $w \in W^\ddagger$ e para $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \in D^\ddagger$, $(\vec{x}) \in I^\ddagger(P^k, w)$ sse $(\vec{x}) \in I^\dagger(P^k, w)$.*

Estamos chamando de modelos subcanônicos a cada submodelo obtido a partir de fragmentos conexos do modelo canônico. Agora, mostraremos um resultado interessante, que ajuda a esclarecer a importância de usarmos modelos conexos.

Corolário 3.4.13. *Seja um modelo subcanônico $M^\ddagger$ conforme a Definição 3.4.12. Assim, dado qualquer $w \in W^\ddagger$:*

1. *Se $(x = y) \in w$, então, $(x = y) \in w'$ para todo $w' \in W^\ddagger$;*

2. *Se $(x \neq y) \in w$, então, $(x \neq y) \in w'$ para todo $w' \in W^\ddagger$.*

Demonstração. 1. Indução sobre comprimento k de qualquer trilha entre quaisquer dois pontos arbitrários $w, w' \in W^\ddagger$. Como há pelo menos uma trilha entre *todos* os pontos de $W^\ddagger$, essa indução é suficiente para provar o teorema.

Base: k = 1.

(i) Para alguma $R^\ddagger_i$, $wR^\ddagger_i w'$. Neste caso, da suposição de que $(x = y) \in w$, de **NecId** (Teorema 3.3.5) e do Lema 3.4.5(2), inferimos que $\mathscr{K}_i(x = y) \in w$. Pela construção de $M^\dagger$ e, consequentemente, de $M^\ddagger$, sabemos que $(x = y) \in w'$.

(ii) Para alguma $R_i^{\ddagger}$, $w'R_i^{\ddagger}w$. Suponhamos que $(x = y) \notin w'$. Como w' é maximal consistente, $(x \neq y) \in w'$. Por **NecDif** e novamente pelo Lema 3.4.5(2), inferimos que $\mathscr{K}_i(x \neq y) \in w'$. Como $w'R_i^{\ddagger}w$, segue-se que $(x \neq y) \in w$, contradizendo a consistência de w.

Hipótese indutiva: o item vale para trilhas de comprimento < k.

(iii) Para alguma $R_i^{\ddagger}$, e algum ponto $w'' \in W^{\ddagger}$, $w \sim w''$ e $w''R_i^{\ddagger}w'$. Usando a h.i., deduzimos que $(x = y) \in w''$. Usando o mesmo raciocínio do passo (i), garantimos também este passo.

(iv) Para alguma $R_i^{\ddagger}$, e algum ponto $w'' \in W^{\ddagger}$, $w \sim w''$ e $w'R_i^{\ddagger}w''$. Usando a h.i., deduzimos que $(x = y) \in w''$. Usando o mesmo raciocínio do passo (ii), garantimos também este passo.

2. A prova deste item é muito similar à do anterior. □

Em outras palavras, acabamos de demonstrar um resultado ainda mais forte do que o enunciado do corolário acima, a saber: exatamente as *mesmas* fórmulas expressando identidade (ou diferença) estarão presentes em todos os pontos de um modelo subcanônico para $\mathbf{QK}^m$ na linguagem expandida $\mathscr{L}_{\mathscr{K}}^{m+}$, e isso, claro, vale para cada modelo subcanônico considerado. Por essa razão, é indiferente qual ponto/conjunto saturado w deve ser usado na construção de $D^{\ddagger}$ na Definição 3.4.12.

Definição 3.4.14 (Atribuição subcanônica)**.** *Seja um modelo subcanônico $M^{\ddagger}$ conforme a Definição 3.4.12, e seja um ordenamento qualquer sobre os elementos de $D^{\ddagger}$. Dado um ponto arbitrário $w \in W^{\ddagger}$, uma* atribuição subcanônica *σ de elementos de $D^{\ddagger}$ às variáveis individuais de $\mathscr{L}_{\mathscr{K}}^{m+}$ é uma atribuição segundo a qual, para cada variável x, temos que $\sigma(x)$ consiste na primeira variável $y \in D^{\ddagger}$ tal que $(x = y) \in w$.*

Recordemos que $D^{\ddagger}$ (assim como $D^{\dagger}$) contém todas as variáveis individuais de $\mathscr{L}_{\mathscr{K}}^{m}$, bem como os conjuntos Y e Z de variáveis individuais da expansão $\mathscr{L}_{\mathscr{K}}^{m+}$ (ver Teorema 3.4.6). Todas essas listas são enumeráveis, e portanto, o conjunto das três listas é também enumerável. Outro detalhe importante é que, embora precisemos levar em conta algum ponto $w \in W^{\ddagger}$ para saber qual, entre as variáveis y tais que $(x = y) \in w$, é a primeira no ordenamento imposto a $D^{\ddagger}$, o ponto w escolhido é irrelevante, visto que, de acordo com o Corolário 3.4.13, todos os pontos em $W^{\ddagger}$ contém exatamente as mesmas fórmulas com identidade (e diferença).

À primeira vista, pode parecer estranho que uma atribuição para as variáveis da linguagem se comporte de maneira tão caprichosa. Entretanto, no conjunto de todas as atribuições possíveis para cada modelo, a atribuição subcanônica é apenas mais uma entre as disponíveis, e não apresenta nenhuma incompatibilidade com a ideia de atribuição de objetos do domínio do modelo às variáveis individuais da linguagem, denotando de maneira unívoca um elemento do domínio para cada variável, e ainda respeitando a condição semântica prevista para fórmulas atômicas com o símbolo de identidade (Definição 3.1.8).

Em particular, temos a garantia de que sempre haverá um objeto satisfazendo a restrição, pois $(x = x)$ é axioma de $\mathbf{QK}^m$ e pertence a cada ponto w de cada modelo subcanônico — ou seja, na pior das hipóteses, por assim dizer, quando não houvesse em w nenhuma outra fórmula afirmando a identidade de x com outra variável, teríamos a própria x como o valor de $\sigma(x)$.[10]

O último e mais importante lema preliminar à prova da completude de $\mathbf{QK}^m$ pode agora ser enunciado.

Lema 3.4.15 (Lema da Verdade)**.** *Seja um modelo subcanônico qualquer $M^{\ddagger}$ obtido da maneira descrita na Definição 3.4.12 a partir do modelo canônico $M^{\dagger}$ conforme a Definição 3.4.9, e seja uma atribuição subcanônica σ de elementos de $D^{\ddagger}$ às variáveis individuais da linguagem expandida $\mathscr{L}^{m+}_{\mathscr{K}}$ de acordo com a Definição 3.4.14. Sendo assim, para qualquer fórmula φ dessa linguagem expandida, e para cada ponto $w \in W^{\ddagger}$:*

$$(M^{\ddagger\sigma}, w) \vDash \varphi \quad sse \quad \varphi \in w.$$

Demonstração. Por indução sobre o comprimento de φ.

Casos atômicos:

(*i*) φ é $\perp$. Trivial, porque w é sempre consistente.

(*ii*) φ tem a forma $P^k(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$. Suponhamos que $(M^{\ddagger\sigma}, w) \vDash P^k(\vec{x})$. Por definição, $(M^{\ddagger\sigma}, w) \vDash P^k(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ sse $(\sigma(x_{i_1}), \ldots, \sigma(x_{i_k})) \in I^{\ddagger}(P^k, w)$. Ora, para cada x na sequência $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$, de acordo com $M^{\ddagger}$, $\sigma(x)$ é, das variáveis y tais que $(x = y) \in w$, a primeira que ocorre no ordenamento de $D^{\ddagger}$. Dessa maneira, temos $(y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}) \in I^{\ddagger}(P^k, w)$, e, pela construção de $M^{\ddagger}$, segue-se que $P^k(y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}) \in w$. Ora, esse resultado se deve a ocorrerem em w as fórmulas $(x_{i_1} = y_{i_1})$, …, $(x_{i_k} = y_{i_k})$; assim, por repetidas aplicações do Lema 3.4.5(2) nas instâncias relevantes de **Subst**, obtemos facilmente $P^k(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \in w$. A volta é análoga, a partir da suposição de que $(M^{\dagger\sigma}, w) \nvDash P^k(\vec{x})$, e será omitida.

(*iii*) φ tem a forma $(x = y)$. Suponhamos $(M^{\ddagger\sigma}, w) \vDash (x = y)$. Isso equivale a dizer que $\sigma(x) = \sigma(y)$. Pelo modo como σ foi definida, temos daí que, das variáveis y tais $(x = y) \in w$, $\sigma(x)$ denota a primeira y no ordenamento de $D^{\ddagger}$, digamos, a variável z. O mesmo raciocínio deve mostrar que $\sigma(y) = z$ para a mesma z, pois certamente $(y = z) \in w$. Ora, tanto $(x = z)$ como $(y = z)$

[10](HUGHES; CRESSWELL, 1996, p. 316).

pertencem a w; assim, da instância de **Subst**: $(y = z) \to ((x = z) \to (x = y))$, e por aplicações simples do Lema 3.4.5(2), obtemos que $(x = y) \in w$. A volta é análoga, supondo $(M^{\ddagger\sigma}, w) \nvDash (x = y)$.

Hipótese indutiva: O lema se aplica para φ de comprimento arbitrário k. Precisamos agora provar o caso booleano (*iv*) φ é da forma $\psi \to \xi$; o caso quantificacional (*v*) φ é da forma $\forall x\psi$; e o caso modal (*vi*) φ é da forma $\mathscr{K}_i\psi$.

(*iv*) φ é da forma $\psi \to \xi$. Suponhamos que $(M^{\ddagger\sigma}, w) \vDash \psi \to \xi$. Isso equivale a dizer que ou $(M^{\ddagger\sigma}, w) \nvDash \psi$ ou $(M^{\ddagger\sigma}, w) \vDash \xi$. Por h.i., $(M^{\ddagger\sigma}, w) \nvDash \psi$ sse $\psi \notin w$, e $(M^{\ddagger\sigma}, w) \vDash \xi$ sse $\xi \in w$. Como ou $\psi \notin w$ ou $\xi \in w$; temos que, por uma aplicação óbvia do Lema 3.4.4(5), $\psi \to \xi \in w$. Para a volta, suponhamos que $(M^{\ddagger\sigma}, w) \nvDash \psi \to \xi$. Isso equivale a dizer que tanto $(M^{\ddagger\sigma}, w) \vDash \psi$ como $(M^{\ddagger\sigma}, w) \nvDash \xi$. Por h.i., $(M^{\ddagger\sigma}, w) \vDash \psi$ sse $\psi \in w$; e $(M^{\ddagger\sigma}, w) \nvDash \xi$ sse $\xi \notin w$. Como $\psi \in w$ e $\xi \notin w$; inferimos, pelo Lema 3.4.4(6), que $\psi \to \xi \notin w$.

(*v*) φ é da forma $\forall x\psi$. Suponhamos $\forall x\psi \notin w$, e, portanto, pela maximalidade de w, que $\neg\forall x\psi \in w$. A condição para o enriquecimento de w requer que haja alguma variável y tal que $\mathsf{E}(y) \wedge (\psi(x/y) \to \forall x\psi) \in w$ — ver Definição 3.4.3(5). Mas, isso também pode ser dito, de maneira equivalente, assim: para alguma variável y, acontece $\mathsf{E}(y) \wedge (\neg\forall x\psi \to \neg\psi(x/y)) \in w$.

Sendo assim, como w é enriquecido, temos pelo menos uma variável que satisfaz a essa condição, digamos, uma variável específica y. Empregando o Lema 3.4.4(2) e raciocínios proposicionais, inferimos que $\neg\psi(x/y) \in w$; ou seja, que $\psi(x/y) \notin w$. Por h.i., $(M^{\ddagger\sigma}, w) \nvDash \psi(x/y)$. Como também é garantido que $(M^{\ddagger\sigma}, w) \vDash \mathsf{E}(y)$, podemos deduzir, por aplicações simples de **LP** e **MP** sobre o axioma **Inst**$\forall$, que $(M^{\ddagger\sigma}, w) \nvDash \forall x\psi$.

Para a volta, suponhamos, agora, que $\forall x\psi \in w$. Consideremos todas as variáveis y tais que $\mathsf{E}(y) \in w$. Empregando **Inst**$\forall$ e o Lema 3.4.5(2), podemos inferir que, em cada caso, $\psi(x/y) \in w$. Por h.i., $(M^{\ddagger\sigma}, w) \vDash \psi(x/y)$. Naturalmente, para cada y escolhida acima, $\sigma(y) \in Q^{\ddagger}(w)$. Seja, pois, em cada caso, $\sigma(y) = z$, para alguma $z \in Q^{\ddagger}(w)$, de modo que a abranger todo o conjunto $Q^{\ddagger}(w)$, como esperado.

Em outras palavras, para toda $z \in Q^{\ddagger}(w)$, acontece que $(M^{\ddagger\sigma\binom{y}{z}}, w) \vDash \psi(x/y)$. (Isso fica mais claro quando nos damos conta de que qualquer atribuição é uma variante de si mesma.) Por definição, isso nos garante que $(M^{\ddagger\sigma}, w) \vDash \forall y\psi(x/y)$. Por conveniência, e sem perda de generalidade, consideremos apenas aquelas variáveis y que não ocorram livres em ψ. Raciocinando a partir da correção de $\mathbf{QK}^m$ e do Teorema 3.3.3(2), finalmente garantimos que $(M^{\ddagger\sigma}, w) \vDash \forall x\psi$.

(*vi*) φ é da forma $\mathscr{K}_i\psi$. Suponhamos que $\mathscr{K}_i\psi \notin w$. Pela maximalidade de w, sabemos então que $\neg\mathscr{K}_i\psi \in w$. Desse último passo, pelo Lema 3.4.7, sabemos que $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in w\} \cup \{\neg\psi\}$ é consistente. Portanto, pelo Teorema 3.4.8, deve haver um conjunto saturado w' tal que $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in w\} \subseteq w'$

e que $\neg\psi \in w'$. Pela maximalidade de w', temos que $\psi \notin w'$, e, por h.i., que $(M^{\ddagger\sigma}, w') \not\models \psi$. Como $wR_i^{\ddagger}w'$, isso acarreta dizer que $(M^{\ddagger\sigma}, w) \not\models \mathscr{K}_i\psi$.

Para a volta, suponhamos $(M^{\ddagger\sigma}, w) \not\models \mathscr{K}_i\psi$. Isso quer dizer que, para algum w' tal que $wR_i^{\ddagger}w'$, $(M^{\ddagger\sigma}, w') \not\models \psi$. Por h.i., $\psi \notin w'$. Como $wR_i^{\ddagger}w'$, pela construção do modelo canônico, $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in w\} \subseteq w'$. Assim, se $\psi \notin w'$, segue-se que $\mathscr{K}_i\psi \notin w$, como queríamos provar. □

O seguinte teorema de completude é provado sem maiores dificuldades a partir dos lemas e definições anteriores.

Teorema 3.4.16 (Completude de $\mathbf{QK}^m$ com respeito a $\mathscr{S}$)**.** *O sistema* $\mathbf{QK}^m$ *é completo com respeito à classe* $\mathscr{S}$ *de todas as estruturas epistêmicas. Ou seja: para* $\varphi \in \mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$,

$$\models \varphi \quad \textit{acarreta} \quad \vdash \varphi.$$

Demonstração. Suponhamos $\nvdash \varphi$. Pela Definição 3.4.3, isso acarreta dizer que $\{\neg\varphi\}$ é consistente, e, portanto, de acordo com o Teorema 3.4.6, que há uma extensão saturada w em algum modelo subcanônico $M^{\ddagger}$ tal que $\{\neg\varphi\} \subseteq w$. De $\neg\varphi \in w$, pelo Lema 3.4.15, garantimos que $(M^{\ddagger\sigma}, w) \models \neg\varphi$, e, por conseguinte, $(M^{\ddagger\sigma}, w) \not\models \varphi$. Como $M^{\ddagger}$ é evidentemente baseado em uma estrutura $S \in \mathscr{S}$, segue-se que $\mathscr{S} \not\models \varphi$. □

Com base nos resultados acima, é bastante fácil mostrar a completude dos demais sistemas $\mathbf{QT}^m$, $\mathbf{QS4}^m$ e $\mathbf{QS5}^m$, sendo suficiente construir os correspondentes modelos canônicos (e subcanônicos), considerando-se nas provas as respectivas axiomatizações que definem cada sistema.

Lema 3.4.17. *Os modelos subcanônicos* $M^{\ddagger}$ *para* $\mathbf{QT}^m$, $\mathbf{QS4}^m$ *e* $\mathbf{QS5}^m$ *são baseados, respectivamente, em estruturas reflexivas, estruturas reflexivas transitivas, e estruturas reflexivas euclideanas.*

Demonstração. Provaremos somente o caso do modelo subcanônico para $\mathbf{QS4}^m$. Precisamos mostrar que a estrutura subjacente $(W^{\ddagger}, \{R_i^{\ddagger}\}_{i\in A})$ tem aquelas propriedades.

(i) Reflexividade: Pela construção de $M^{\ddagger}$, para quaisquer $w, w' \in W^{\ddagger}$, é o caso que $wR_i^{\ddagger}w'$ sse $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in w\} \subseteq w'$. Ora, as instâncias do esquema de axioma **T** pertencem a cada $w \in W^{\ddagger}$; assim, para toda fórmula do tipo $\mathscr{K}_i\varphi \in w$, por aplicação do Lema 3.4.5(2), temos que $\varphi \in w$. Logo, para cada $w \in W$, $wR_i^{\ddagger}w$.

(ii) Transitividade: Sejam $w, w', w'' \in W^{\ddagger}$ tais que $wR_i^{\ddagger}w'$ e $w'R_i^{\ddagger}w''$. Pela construção de $M^{\ddagger}$, isso quer dizer que $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in w\} \subseteq w'$ e que $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in w'\} \subseteq w''$. Ora, as instâncias do axioma **4** pertencem a cada $w \in W^{\ddagger}$.

Assim, para toda fórmula do tipo $\mathscr{K}_i\varphi \in w$, por aplicação do Lema 3.4.5(2), temos que $\mathscr{K}_i\mathscr{K}_i\varphi \in w$. Por construção de $M^\ddagger$, e pelas suposições iniciais, isso acarreta dizer que $\mathscr{K}_i\varphi \in w'$ e, consequentemente, que $\varphi \in w''$. Ora, segue-se que $wR_i^\ddagger w''$, pois $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in w\} \subseteq w''$. $\square$

Teorema 3.4.18 (Completude de $\mathbf{QT}^m$, $\mathbf{QS4}^m$ e $\mathbf{QS5}^m$). *Os sistemas* $\mathbf{QT}^m$*,* $\mathbf{QS4}^m$ *e* $\mathbf{QS5}^m$ *são completos com respeito, respectivamente, à classe* $\mathscr{S}^r$ *de todas as estruturas reflexivas, à classe* $\mathscr{S}^{rt}$ *de todas as estruturas reflexivas transitivas, e à classe* $\mathscr{S}^{re}$ *de todas as estruturas reflexivas euclideanas.*

Ou seja: para $\varphi \in \mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$*, em cada um dos três casos discriminados,*

$$\vDash \varphi \quad \textit{acarreta} \quad \vdash \varphi.$$

Demonstração. Muito similar ao Teorema 3.4.16, com as óbvias alterações nas classes de estruturas consideradas. $\square$

4 ACRESCENTANDO CONHECIMENTO DISTRIBUÍDO

Neste capítulo, apresentaremos uma extensão $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$ para a linguagem $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$, obtida a partir do acréscimo de fórmulas com um operador modal primitivo $\mathscr{D}$ para *conhecimento distribuído no conjunto dos agentes epistêmicos*. Antes, porém, realizaremos uma breve introdução acerca desse peculiar operador epistêmico.

Ao lado daquele de conhecimento comum $\mathscr{C}$, não explorado nesta tese (pelas razões já discutidas no Capítulo 2), o operador de conhecimento distribuído $\mathscr{D}$ é um operador epistêmico grupal (coletivo), não definível em termos dos vários $\mathscr{K}_i$'s. (Um terceiro operador coletivo, o de conhecimento universal $\mathscr{E}$, se distingue dos dois acima referidos justamente por não aumentar a expressividade de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$ — ver Definição 3.1.2.)

Como os casos mais interessantes envolvem a relativização do conhecimento coletivo a grupos específicos de agentes (em vez de envolverem todos os agentes), consideraremos sempre operadores indexados $\mathscr{D}_G$ descrevendo conhecimento distribuído em um grupo particular G ($G \subseteq A$), de modo similar ao que costuma ser feito também com $\mathscr{E}_G$ e $\mathscr{C}_G$.

A formalização do conhecimento distribuído foi introduzida em 1984 por Halpern e Moses (1990) e desenvolvida em numerosos outros artigos por diversos cientistas da computação. Uma estratégia de completude para axiomatizações contendo $\mathscr{D}_G$ aparece detalhada em Fagin, Halpern e Vardi (1992), e estendida para linguagens de primeira ordem em Belardinelli e Lomuscio (2008, 2009b).

Intuitivamente, um grupo G tem conhecimento distribuído de que φ quando um agente *hipotético* que soubesse tudo que cada membro de G sabe, saberia também que φ (mesmo que nenhum agente de fato contido em G saiba que φ). Outra maneira, embora equivalente, de entender conhecimento distribuído em um grupo consiste em considerar esse conhecimento como aquilo que seria inevitavelmente obtido caso todos os agentes em G reunissem todas as informações sabidas individualmente e, se necessário, derivassem as consequências dessa reunião de informações.

É importante não confundir conhecimento distribuído com noções não correlatas e bem menos precisas, como conhecimento implícito ou tácito. Conhecimento tácito usualmente remete àquilo que é pressuposto pelas informações que um agente (ou grupo) sabe, e conhecimento implícito tanto pode ser confundido com conhecimento tácito, como também com aquilo que seria derivável a partir das informações efetivamente sabidas por um agente (ou grupo).

Em outras palavras, um grupo pode ter conhecimento distribuído de uma proposição φ ainda que nenhum de seus agentes individuais isoladamente saiba (conhecimento *efetivo*), pressuponha (conhecimento *tácito*) ou tenha como derivar (conhecimento *implícito*) φ a partir de todo seu conhecimento disponível.

A ilustração clássica e mais simples envolve o cenário em que G contenha dois agentes, um dos quais sabe apenas que ψ, e o outro sabe apenas que $\psi \to \varphi$; neste caso, dizemos que os dois, juntos, têm conhecimento distribuído de que φ, ainda que nenhum deles isoladamente saiba que φ é o caso (HALPERN; MOSES, 1990).

Claro, que, no caso mais óbvio, o grupo G tem conhecimento distribuído de cada proposição sabida por cada um de seus agentes. Isso é formalizado por meio do princípio válido $\mathscr{K}_i\varphi \to \mathscr{D}_G\varphi$ ($i \in G$), facilmente derivável a partir dos esquemas de axiomas $\mathscr{K}_i\varphi \leftrightarrow \mathscr{D}_{\{i\}}\varphi$ e $\mathscr{D}_{G'}\varphi \to \mathscr{D}_G\varphi$ (para $G' \subseteq G$) — os esquemas *mínimos* que determinam o comportamento sintático de $\mathscr{D}_G$.

Como veremos nas próximas seções, o comportamento semântico de fórmulas contendo $\mathscr{D}_G$ depende diretamente da interseção entre as relações de acessibilidade de todos os agentes em G. Em modelos tipicamente epistêmicos, como cada relação de acessibilidade é no mínimo reflexiva, a descrição *efetiva* do mundo — ou seja, que corresponde ao mundo real no qual os agentes se encontram de fato — é sempre consistente com tudo que cada agente sabe, e, portanto, inevitavelmente estará na interseção das possibilidades contempladas, digamos assim, por cada agente.

Desse modo, quando uma proposição φ for verdadeira em todos os pontos (descrições, mundos) na interseção de todas as possibilidades epistêmicas dos agentes em G, certamente φ será verdadeira também na possibilidade que corresponde ao mundo atual. Nesse caso, dizemos que há conhecimento distribuído em G de que φ acontece, pois φ é o caso em todas as possibilidades epistêmicas consideradas por G distributivamente *enquanto grupo*.

Enfim, é preciso destacar que, em nossa exposição, a lista dos sistemas epistêmicos inclui o sistema minimal $\mathbf{QK}^m$ (que corresponde a modelos sem garantia de reflexividade) apenas para efeito comparativo. Naturalmente, em modelos que admitam, para algum agente i, uma relação de acessibilidade *epistêmica* não reflexiva, a intuição por trás não apenas de cada operador $\mathscr{D}_G$, mas dos próprios $\mathscr{K}_i$'s estaria seriamente comprometida, embora, de um ponto de vista formal, a consideração desses modelos possa oferecer elementos para a eventual generalização de resultados da lógica epistêmica para outras lógicas (talvez, algum tipo de lógica doxástica).

4.1 SINTAXE E SEMÂNTICA DE $\mathscr{L}^n_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$

Seja um conjunto finito não-vazio $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ com n agentes epistêmicos (para $n \in \mathbb{N}$). A linguagem epistêmica de primeira ordem $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$ contém as mesmas listas de símbolos de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$, acrescentando-se somente o seguinte:

8. operadores modais de conhecimento distribuído $\mathscr{D}_G$ (para $G \subseteq A$).

Definição 4.1.1 (Fórmulas de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$)**.** *As fórmulas de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$ obedecem à seguinte gramática, na notação BNF:*

$\varphi :: \bot \mid P^k(\vec{x}) \mid (x = y) \mid \varphi \to \varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \mid \mathscr{D}_G\varphi \mid \forall x\varphi$

Como podemos perceber, a linguagem estendida $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$ se distingue da anterior apenas pela admissão de $\mathscr{D}_G\varphi$ entre seus esquemas de fórmulas. Todas as demais convenções e definições são preservadas.

Definição 4.1.2 (Abreviações de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$)**.** *Às abreviações listadas na Definição 3.1.2, acrescente-se a seguinte expressão:*

11. $\hat{\mathscr{D}}_G\varphi =_{def} \neg\mathscr{D}_G\neg\varphi$.

O operador dual de $\mathscr{D}_G$, embora pouco usado, expressa a noção de que uma dada proposição φ é *consistente com o conhecimento distribuído* em G; ou seja, diante de todo o conhecimento distribuído atribuído a G, φ é uma possibilidade epistêmica (ou seja, algo que eventualmente pode vir a tornar-se conhecimento distribuído em G — talvez ao considerarmos um grupo G' de agentes que contenha propriamente G, e que restrinja ainda mais os pontos na interseção das possibilidades epistêmicas de todos os agentes).

No que diz respeito à semântica para $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$, segue a definição de satisfatibilidade, com a condição para fórmulas contendo $\mathscr{D}_G$, antecipada informalmente no início deste capítulo.

Definição 4.1.3 (Satisfatibilidade de fórmulas em M)**.** *Sejam uma linguagem epistêmica $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$, bem como uma estrutura epistêmica aumentada S^a, um modelo epistêmico M baseado em S^a, uma atribuição σ e um índice $w \in W$, conforme definidos ao longo da Seção 3.1.*

Assim, as condições de satisfatibilidade para cada fórmula φ de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$ serão exatamente como aquelas para fórmulas de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$ na Definição 3.1.8, acrescentando-se somente a seguinte cláusula:

7. $(M^\sigma, w) \vDash \mathscr{D}_G\varphi$ *sse, para todo* $w' \in W$, $(w, w') \in \bigcap_{i \in G} R_i$ *acarreta* $(M^\sigma, w') \vDash \varphi$.

4.2 VALIDADES E INVALIDADES IMPORTANTES

Aos resultados anteriormente demonstrados na Seção 3.2, podemos acrescentar os seguintes.

Esquemas com identidade

(1) **NecId$\mathscr{D}$**: $\models (x = y) \to \mathscr{D}_G(x = y)$

Demonstração. Suponhamos que, para $G \subseteq A$, para uma atribuição σ e ponto w arbitrários de um modelo M, seja o caso que $(M^\sigma, w) \not\models \mathscr{D}_G(x = y)$. Isso equivale a dizer que, para algum w' tal que $(w, w') \in \bigcap_{i \in G} R_i$, é o caso que: $(M^\sigma, w') \not\models (x = y)$; o que, por sua vez, acontece sse $\sigma(x)$ for distinta de $\sigma(y)$. Como a atribuição σ não varia ao longo dos pontos do modelo, isso também equivale a dizer que $(M^\sigma, w) \not\models (x = y)$, como queríamos mostrar. Observemos que a prova emprega uma cadeia de equivalências, validando também a inversa do condicional. □

(2) **NecDif$\mathscr{D}$**: $\models (x \neq y) \to \mathscr{D}_G(x \neq y)$

Demonstração. Raciocínio muito similar ao anterior. □

Necessitação do conhecimento distribuído

(3) **Nec$\mathscr{D}$**: $\models \varphi \Rightarrow \models \mathscr{D}_G\varphi$

Demonstração. Suponhamos que, para $G \subseteq A$ e um modelo M, seja o caso que $\not\models \mathscr{D}_G\varphi$. Isso equivale a dizer que, para algum ponto w e atribuição σ em um modelo M, ocorre $(M^\sigma, w) \not\models \mathscr{D}_G\varphi$; o que acarreta que, para algum w' tal que $(w, w') \in \bigcap_{i \in G} R_i$, acontece $(M^\sigma, w') \not\models \varphi$. Por definição, esse resultado, por sua vez, tem como consequência $\not\models \varphi$, como queríamos mostrar. □

Alguns esquemas inválidos

Para conferir a invalidade dos próximos esquemas, basta empregarmos exatamente os mesmos contramodelos da seção sobre validades e invalidades da Seção 3.2, acrescentando $G = \{i\}$ à descrição dos modelos. Suas refutações serão omitidas, devido a sua obviedade, lembrando apenas que $\bigcap_{i \in G} R_i$ consiste exatamente em R_i, para $G = \{i\}$.

(4) $\not\models \forall x \mathscr{D}_G\varphi \to \mathscr{D}_G \forall x \varphi$

(5) $\not\models \mathscr{D}_G \forall x \varphi \to \forall x \mathscr{D}_G\varphi$

Esquemas de Barcan em modelos com restrições sobre domínios

Sejam uma subclasse $G \subseteq A$, uma atribuição σ e um ponto w arbitrários de um modelo M. Assim, valem os três seguintes esquemas:

(6) $(M^{\sigma}, w) \vDash \forall x \mathscr{D}_G \varphi \rightarrow \mathscr{D}_G \forall x \varphi$
sse, para todo $w' \in W$, $(w, w') \in \bigcap_{i \in G} R_i \Rightarrow Q(w') \subseteq Q(w)$

Demonstração. (Volta) Suponhamos que, para $G \subseteq A$, uma atribuição σ e ponto w_j arbitrários de um modelo M, aconteça $(M^{\sigma}, w_j) \nvDash \forall x \mathscr{D}_G \varphi \rightarrow \mathscr{D}_G \forall x \varphi$. Isso equivale a dizer que (i) $(M^{\sigma}, w_j) \vDash \forall x \mathscr{D}_G \varphi$ e que (ii) $(M^{\sigma}, w_j) \nvDash \mathscr{D}_G \forall x \varphi$. De (i), deduzimos que, para todo $o \in Q(w_j)$, é o caso que $(M^{\sigma\binom{x}{o}}, w_j) \vDash \mathscr{D}_G \varphi$, e que, portanto, para todo w' tal que $(w_j, w') \in \bigcap_{i \in G} R_i$, ocorre: $(M^{\sigma\binom{x}{o}}, w') \vDash \varphi$. De (ii) se segue que, para um w_k arbitrário tal que $(w_j, w_k) \in \bigcap_{i \in G} R_i$, ocorre: $(M^{\sigma}, w_k) \nvDash \forall x \varphi$, e que, portanto, para algum $o' \in Q(w_k)$, ocorre: $(M^{\sigma\binom{x}{o'}}, w_k) \nvDash \varphi$. Em outras palavras, todos os objetos no domínio de w_j satisfazem φ (ao serem atribuídos às suas ocorrências livres de x), em todos os w' tal que $(w_j, w') \in \bigcap_{i \in G} R_i$ — em particular, em w_k —; e, por outro lado, há um objeto o' no domínio de w_k que não satisfaz φ nas mesmas condições de atribuição. Logo, há um w' tal que $(w_j, w') \in \bigcap_{i \in G} R_i$ e um objeto $o' \in Q(w')$ tal que $o' \notin Q(w_j)$; como w_j era arbitrário, $Q(w') \nsubseteq Q(w)$.

(Ida) Suponhamos que, para $G \subseteq A$, para dois pontos arbitrários w_j, w_k de um modelo M, não seja o caso que $(w_j, w_k) \in \bigcap_{i \in G} R_i \Rightarrow Q(w_k) \subseteq Q(w_j)$ — isto é, ocorre $(w_j, w_k) \in \bigcap_{i \in G} R_i$ e $Q(w_k) \nsubseteq Q(w_j)$. Adicionalmente, suponhamos que, para uma atribuição qualquer σ, $(M^{\sigma}, w_j) \vDash \forall x \mathscr{D}_G \varphi$. Como, para todo $o \in Q(w_j)$, é o caso que $(M^{\sigma\binom{x}{o}}, w_j) \vDash \mathscr{D}_G \varphi$; segue-se que, para todo w' tal que $(w_j, w') \in \bigcap_{i \in G} R_i$, $(M^{\sigma\binom{x}{o}}, w') \vDash \varphi$. Ora, por hipótese, $(w_j, w_k) \in \bigcap_{i \in G} R_i$; logo, para todo $o \in Q(w_j)$, $(M^{\sigma\binom{x}{o}}, w_k) \vDash \varphi$. Suponhamos agora, em virtude de $Q(w_k) \nsubseteq Q(w_j)$ e sem prejuízo de generalidade, que haja $o' \in Q(w_k)$ tal que $o' \notin Q(w_j)$, e que $(M^{\sigma\binom{x}{o'}}, w_k) \nvDash \varphi$; portanto, $(M^{\sigma}, w_k) \nvDash \forall x \varphi$. Como $(w_j, w_k) \in \bigcap_{i \in G} R_i$, segue-se que $(M^{\sigma}, w_j) \nvDash \mathscr{D}_G \forall x \varphi$. Como w_j e w_k eram arbitrários, a prova está garantida. □

(7) $(M^{\sigma}, w) \vDash \mathscr{D}_G \forall x \varphi \rightarrow \forall x \mathscr{D}_G \varphi$
sse, para todo $w' \in W$, $(w, w') \in \bigcap_{i \in G} R_i \Rightarrow Q(w) \subseteq Q(w')$

Demonstração. Bastante similar à anterior, tomando-se o devido cuidado com as alterações relevantes — por ex., $Q(w) \subseteq Q(w')$ em vez de $Q(w') \subseteq Q(w)$, etc. □

(8) $(M^{\sigma}, w) \models \mathscr{D}_G \forall x \varphi \leftrightarrow \forall x \mathscr{D}_G \varphi$
sse, para todo $w' \in W$, $(w, w') \in \bigcap_{i \in G} R_i \Rightarrow Q(w) = Q(w')$

O enunciado acima segue-se trivialmente dos dois resultados anteriores. E aqui vale também a observação feita ao final da Seção 3.2.

4.3 AXIOMATIZAÇÃO E ALGUNS TEOREMAS

Apesar da axiomatização para $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$ fornecida nesta seção ser uma extensão óbvia de $\mathbf{QK}^m$, repetiremos, na Figura 5, por comodidade de referência, a lista de esquemas de axiomas já fornecidos na Figura 4, acrescentando-se os esquemas específicos de $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$.

Uma apresentação mais elegante poderia reescrever os esquemas de axiomas e regras de maneira mais genérica, empregando um único operador modal abstrato $\Box$ para representar (uniformemente no mesmo esquema) um mesmo operador $\mathscr{K}_i$ ou, alternativamente, um mesmo operador $\mathscr{D}_G$ (para $i \in A$ e $G \subseteq A$). Contudo, em geral, preferimos sacrificar a elegância em favor da clareza, quando isso fizer diferença.

Chamamos a atenção para os importantes esquemas $\mathscr{D}\mathbf{1}$ e $\mathscr{D}\mathbf{2}$, os quais são os únicos a governar, em nossa linguagem, a interação entre conhecimento distribuído entre grupos de agentes e seus respectivos subgrupos, bem como entre grupos e seus respectivos agentes individuais. Sem esses esquemas, não haveria qualquer diferença relevante entre os comportamentos sintáticos dos operadores $\mathscr{K}_i$ e $\mathscr{D}_G$, a despeito de suas condições semânticas peculiares.

Outra particularidade é de que não precisamos incluir na axiomatização os esquemas válidos da seção anterior **NecId**$\mathscr{D}$: $(x = y) \to \mathscr{D}_G(x = y)$ e **NecDif**$\mathscr{D}$: $(x \neq y) \to \mathscr{D}_G(x \neq y)$, por derivarem facilmente de **NecId**, **NecDif**, $\mathscr{D}\mathbf{1}$ e $\mathscr{D}\mathbf{2}$. Tampouco precisamos assumir a regra **Nec**$\mathscr{D}$: $\varphi \Rightarrow \mathscr{D}_G\varphi$ como primitiva, por ser demonstrável a partir de **Nec**, $\mathscr{D}\mathbf{1}$ e $\mathscr{D}\mathbf{2}$.

Definição 4.3.1. *A axiomatização contida na Figura 5 define o sistema epistêmico de primeira ordem* $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$*. Além disso, seja uma fórmula* φ *qualquer de* $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$*, os esquemas fornecidos na Definição 3.3.1 e os demais esquemas abaixo discriminados:*

1. $\mathbf{T}\mathscr{D} = \mathscr{D}_G\varphi \to \varphi$

2. $\mathbf{4}\mathscr{D} = \mathscr{D}_G\varphi \to \mathscr{D}_G\mathscr{D}_G\varphi$

3. $\mathbf{5}\mathscr{D} = \neg\mathscr{D}_G\varphi \to \mathscr{D}_G\neg\mathscr{D}_G\varphi$.

LP **MP**	*(todas as instâncias de tautologias clássicas)* $\varphi \to \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$
K **Nec**	$\mathscr{K}_i(\varphi \to \psi) \to (\mathscr{K}_i\varphi \to \mathscr{K}_i\psi)$ $\varphi \Rightarrow \mathscr{K}_i\varphi$
K$\mathscr{D}$ $\mathscr{D}$**1** $\mathscr{D}$**2**	$\mathscr{D}_G(\varphi \to \psi) \to (\mathscr{D}_G\varphi \to \mathscr{D}_G\psi)$ $\mathscr{D}_{\{i\}}\varphi \leftrightarrow \mathscr{K}_i\varphi$ $\mathscr{D}_G\varphi \to \mathscr{D}_{G'}\varphi$ (para $G \subseteq G'$)
Vac$\forall$ **Distr**$\forall$ **Inst**$\forall$ $\mathsf{E}\forall$ **Gen**$\forall$	$\forall x\varphi \leftrightarrow \varphi$ (onde x não ocorre livre em φ) $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$ $(\forall x\varphi \wedge \mathsf{E}(y)) \to \varphi(x/y))$ $\forall x\mathsf{E}(x)$ $\varphi \Rightarrow \forall x\varphi$
Gen$\forall^n$	$\varphi_1 \to \mathscr{K}_i(\varphi_2 \to \ldots\mathscr{K}_i(\varphi_n \to \mathscr{K}_i\psi)\ldots)$ $\Rightarrow \varphi_1 \to \mathscr{K}_i(\varphi_2 \to \ldots\mathscr{K}_i(\varphi_n \to \mathscr{K}_i\forall x\psi)\ldots)$ (onde x não ocorre livre em $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$)
Id **Subst** **NecDif**	$(x = x)$ $(x = y) \to (\varphi \to \varphi')$ (onde φ' é como φ exceto por conter y livre em 0 ou mais lugares nos quais φ contém x livre) $(x \neq y) \to \mathscr{K}_i(x \neq y)$

Figura 5 – O sistema **QK**$\mathscr{D}^m$

Definimos, mediante o acréscimo dos seguintes esquemas de axiomas a **QK**$\mathscr{D}^m$*, os correspondentes sistemas:*

1. **QK**$\mathscr{D}^m$ *com* **T** *e* **T**$\mathscr{D}$ = **QT**$\mathscr{D}^m$
2. **QK**$\mathscr{D}^m$ *com* **T**, **4**, **T**$\mathscr{D}$ *e* **4**$\mathscr{D}$ = **QS4**$\mathscr{D}^m$
3. **QK**$\mathscr{D}^m$ *com* **T**, **5**, **T**$\mathscr{D}$ *e* **5**$\mathscr{D}$ = **QS5**$\mathscr{D}^m$.

A similaridade com os esquemas da Definição 3.3.1 é óbvia. Por sua vez, a definição acima visa preservar uma certa coerência ao estendermos cada sistema em questão, o que pode ser melhor visualizado na Figura 6. Naturalmente, em se tratando de **QS5**$\mathscr{D}^m$, também se aplicam aqui as mesmas observações feitas a respeito de **Gen**$\forall^n$ e **NecDif** na Seção 3.3.

Outro aspecto óbvio, mas ainda interessante, representado na Figura 6 é de que os sistemas **QT**$\mathscr{D}^m$, **QS4**$\mathscr{D}^m$ e **QS5**$\mathscr{D}^m$ podem ser obtidos, respectivamente, a partir dos correspondentes **QT**^{m}, **QS4**^{m} e **QS5**^{m}, mediante

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{QK}\mathscr{D}^m \arrow[r] & \mathbf{QT}\mathscr{D}^m \arrow[r] & \mathbf{QS4}\mathscr{D}^m \arrow[r] & \mathbf{QS5}\mathscr{D}^m \\
\mathbf{QK}^m \arrow[r] \arrow[u] & \mathbf{QT}^m \arrow[r] \arrow[u] & \mathbf{QS4}^m \arrow[r] \arrow[u] & \mathbf{QS5}^m \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Figura 6 – Alguns sistemas epistêmicos com suas extensões.

o simples acréscimo dos esquemas de axiomas apropriados — por exemplo, $\mathbf{QS4}\mathscr{D}^m$ = $\mathbf{QS4}^m$ acrescido de $\mathbf{K}\mathscr{D}$, $\mathscr{D}\mathbf{1}$, $\mathscr{D}\mathbf{2}$, $\mathbf{T}\mathscr{D}$ e $\mathbf{4}\mathscr{D}$.

De toda maneira, no restante deste capítulo, exceto quando explicitamente discriminado de outra maneira, todos os resultados, teoremas e demonstrações serão relativos ao sistema $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$ acima definido.

Teorema 4.3.2. *São teoremas de* $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$*:*

1. (**NecId**$\mathscr{D}$) $\quad (x = y) \to \mathscr{D}_G(x = y)$;
2. (**NecDif**$\mathscr{D}$) $\quad (x \neq y) \to \mathscr{D}_G(x \neq y)$.

Demonstração. Segue a derivação de **NecId**$\mathscr{D}$. A outra é muito similar, usando o axioma **NecDif** em vez do princípio **NecId** (Teorema 3.3.5).

1. $(x = y) \to \mathscr{K}_i(x = y)$	– **NecId** (Teorema 3.3.5) (qualquer $i \in G$)
2. $(x = y) \to \mathscr{D}_{\{i\}}(x = y)$	– de 1, $\mathscr{D}\mathbf{1}$, **LP** e **MP**
3. $(x = y) \to \mathscr{D}_G(x = y)$	– de 2, $\mathscr{D}\mathbf{2}$, **LP** e **MP**

□

Teorema 4.3.3. *Seja* φ *uma fórmula qualquer de* $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$. *A seguinte regra é derivável em* $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$*:*

$$(\mathbf{Nec}\mathscr{D}) \quad \vdash \varphi \;\Rightarrow\; \vdash \mathscr{D}_G\varphi$$

Demonstração. Segue a derivação.

1. φ	– hipótese
2. $\mathscr{K}_i\varphi$	– de 1, por **Nec** (para qualquer $i \in G$)
3. $\mathscr{D}_{\{i\}}\varphi$	– de 2, $\mathscr{D}\mathbf{1}$, **LP** e **MP**
4. $\mathscr{D}_G\varphi$	– de 3, $\mathscr{D}\mathbf{2}$, **LP** e **MP**

□

Naturalmente, todas as regras e resultados demonstrados em $\mathbf{QK}^m$ valem em $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$, e similarmente para suas respectivas extensões. Em particular, a regra **RE**, demonstrada no Teorema 3.3.2, vale em geral, requerendo, em sua demonstração, apenas um caso indutivo adicional para fórmulas do tipo $\mathscr{D}_G\zeta$, provado de maneira muito similar ao caso $\mathscr{K}_i\zeta$. Essa prova será omitida aqui e, por comodidade, indicaremos de modo ambíguo por **RE** a substituição de equivalentes, tanto nos sistemas do capítulo precedente como do atual.

4.4 CORREÇÃO E COMPLETUDE

Acerca de $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.4.1 (Correção de $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$ com respeito a $\mathscr{S}$). *O sistema* $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$ *é correto com respeito a* $\mathscr{S}$ *(a classe de todas as estruturas epistêmicas).*

A prova da correção é rotineira — ver explicação para o Teorema 3.4.1. Novamente, por economia de espaço, mostraremos somente a validade dos esquemas de axiomas envolvendo o operador $\mathscr{D}_G$.

(9) $\quad$ $\mathbf{K}\mathscr{D}$: $\models \mathscr{D}_G(\varphi \to \psi) \to (\mathscr{D}_G\varphi \to \mathscr{D}_G\psi)$

Demonstração. Suponhamos que, para $G \subseteq A$, para uma atribuição σ e ponto w_j arbitrários de um modelo M, seja o caso que $(M^\sigma, w_j) \not\models \mathscr{D}_G\varphi \to \mathscr{D}_G\psi$. Isso equivale a dizer que (i) $(M^\sigma, w_j) \models \mathscr{D}_G\varphi$ e que (ii) $(M^\sigma, w_j) \not\models \mathscr{D}_G\psi$. Ora, de (i) segue-se que, para todo w' tal que $(w_j, w') \in \bigcap_{i\in G} R_i$, é o caso que $(M^\sigma, w') \models \varphi$; e de (ii) que, para algum w_k tal que $(w_j, w_k) \in \bigcap_{i\in G} R_i$, é o caso que $(M^\sigma, w_k) \not\models \psi$. Ora, como w_k é um daqueles w', segue-se também de (i) que $(M^\sigma, w_k) \models \varphi$; e, portanto, que $(M^\sigma, w_k) \not\models \varphi \to \psi$. Como $(w_j, w_k) \in \bigcap_{i\in G} R_i$, concluímos que $(M^\sigma, w_j) \not\models \mathscr{D}_G(\varphi \to \psi)$, como queríamos. $\square$

(10) $\quad$ $\mathscr{D}\mathbf{1}$: $\models \mathscr{D}_{\{i\}}\varphi \leftrightarrow \mathscr{K}_i\varphi$

Demonstração. Suponhamos que, para $G = \{i\}$, para uma atribuição σ e ponto w_j arbitrários de um modelo M, seja o caso que $(M^\sigma, w_j) \not\models \mathscr{K}_i\varphi$. Isso é o mesmo que dizer que, para algum w' tal que wR_iw', $(M^\sigma, w') \not\models \varphi$. Ora, obviamente, $\bigcap_{i\in\{i\}} R_i$ coincide com a própria R_i; portanto, $(w_j, w') \in R_i$ sse $(w_j, w') \in \bigcap_{i\in\{i\}} R_i$. Nessa condições, os passos anteriores equivalem a dizer que $(M^\sigma, w_j) \not\models \mathscr{D}_{\{i\}}\varphi$. A volta é similar. $\square$

(11) $\quad$ $\mathscr{D}\mathbf{2}$: $\models \mathscr{D}_G\varphi \to \mathscr{D}_{G'}\varphi$ $\quad$ (para $G \subseteq G'$)

Demonstração. Suponhamos, para $G \subseteq G' \subseteq A$, para uma atribuição σ e ponto w_j arbitrários de um modelo M, que $(M^\sigma, w_j) \nvDash \mathscr{D}_{G'}\varphi$. Ora, isso é o mesmo que dizer que, para algum w' tal que $(w_j, w') \in \bigcap_{i \in G'} R_i$, ocorre $(M^\sigma, w') \nvDash \varphi$. Está claro que $(w_j, w') \in R_i$ para *todo* agente $i \in G'$. Como, em razão de $G \subseteq G'$, para todo $j \in G$, ocorre que $j \in G'$; segue-se naturalmente que (w_j, w') também pertence a toda R_j, e, portanto, seguramente pertence também a $\bigcap_{j \in G} R_j$. Daí, uma vez que $(M^\sigma, w') \nvDash \varphi$, podemos concluir $(M^\sigma, w_j) \nvDash \mathscr{D}_G\varphi$, como queríamos demonstrar. $\square$

Como seria de se esperar, precisamos estender agora o resultado da correção para os demais sistemas de interesse.

Corolário 4.4.2. *Os seguintes sistemas são corretos com respeito às respectivas classes de estruturas epistêmicas:*

1. **QT**$\mathscr{D}^m$ *é correto com respeito a* $\mathscr{S}^r$ *(estruturas reflexivas);*

2. **QS4**$\mathscr{D}^m$ *é correto com respeito a* $\mathscr{S}^{rt}$ *(estruturas reflexivas transitivas);*

3. **QS5**$\mathscr{D}^m$ *é correto com respeito a* $\mathscr{S}^{re}$ *(estruturas reflexivas euclideanas).*

Demonstração. Conforme indicado no corolário análogo 3.4.2, a prova requer apenas que a garantia da validade dos esquemas de axiomas característicos de cada sistema seja acrescentada à prova de correção para **QK**$\mathscr{D}^m$. O procedimento é simples, e mostraremos somente o caso *2* (relativo a **QS4**$\mathscr{D}^m$ e $\mathscr{S}^{rt}$). Como os esquemas **T** e **4** já foram demonstrados válidos para estruturas reflexivas transitivas, resta-nos apenas verificar a mesma validade para **T**$\mathscr{D}$ e **4**$\mathscr{D}$. Os casos *1* e *3* do corolário seguem a mesma estratégia geral de prova.

$\vDash \mathscr{D}_G\varphi \rightarrow \varphi$

Suponhamos que, para $G \subseteq A$, para uma atribuição σ e ponto w_j arbitrários de um modelo epistêmico reflexivo transitivo M, seja o caso que $(M^\sigma, w_j) \vDash \mathscr{D}_G\varphi$. Isso equivale a dizer que para todo w' tal que $(w_j, w') \in \bigcap_{i \in G} R_i$, é o caso que $(M^\sigma, w') \vDash \varphi$. Ora, como M é reflexivo, para qualquer agente i e todo w em M, acontece wR_iw — inclusive para todo $i \in G$. Logo, $(w_j, w_j) \in \bigcap_{i \in G} R_i$, e daí temos: $(M^\sigma, w_j) \vDash \varphi$.

$\vDash \mathscr{D}_G\varphi \rightarrow \mathscr{D}_G\mathscr{D}_G\varphi$

Suponhamos agora que $(M^\sigma, w_j) \nvDash \mathscr{D}_G\mathscr{D}_G\varphi$. Isso equivale a dizer que, para algum w_k tal que $(w_j, w_k) \in \bigcap_{i \in G} R_i$, é o caso que $(M^\sigma, w_k) \nvDash \mathscr{D}_G\varphi$;

e, novamente, que para algum w_l tal que $(w_k, w_l) \in \bigcap_{i \in G} R_i$, é o caso que $(M^\sigma, w_l) \nvDash \varphi$. Ora, como M é, por hipótese, baseado em uma estrutura transitiva, segue-se que, para quaisquer pontos w, w' e w'', e para toda R_i, se wR_iw' e $w'R_iw''$, então wR_iw'' — inclusive para todo $i \in G$. Por conseguinte, se tanto (w_j, w_k) como (w_k, w_l) pertencem a $\bigcap_{i \in G} R_i$, isso quer dizer que, para todo $i \in G$, tanto $w_jR_iw_k$ como $w_kR_iw_l$ — e, assim, que $w_jR_iw_l$. Concluímos que $(w_j, w_l) \in \bigcap_{i \in G} R_i$, e juntamente com $(M^\sigma, w_l) \nvDash \varphi$, em consequência da definição semântica, que $(M^\sigma, w_j) \nvDash \mathscr{D}_G\varphi$, como queríamos demonstrar. □

A completude de $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$ será provada, não da mesma maneira que $\mathbf{QK}^m$ — a partir tão somente de um modelo subcanônico numa linguagem expandida $\mathscr{L}^{m+}_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$ —, mas mediante um modelo intermediário no qual valem exatamente as mesmas fórmulas satisfeitas pelo modelo subcanônico em questão. A necessidade desse desvio deve ficar clara mais adiante, quando descrevermos os referidos modelos. As etapas de nossa demonstração adaptam livremente as estratégias em Fagin et al. (1992).

De resto, todos os resultados e definições apresentados na Seção 3.4 para $\mathbf{QK}^m$ se aplicam, trocando-se naturalmente as indicações da linguagem e sistema em cada enunciado e restando-nos apenas incrementar o modelo subcanônico requerido, antes de prosseguirmos com as demonstrações. Embora o novo modelo subcanônico seja bastante similar àquele para $\mathbf{QK}^m$, será enunciado novamente em detalhes, acrescido com as devidas modificações, de modo a facilitar sua consulta e evitar confusões.

Primeiro, descreveremos o modelo canônico para $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$, para em seguida isolar seus submodelos conexos. Seja novamente um conjunto não vazio finito A de agentes epistêmicos. Na definição abaixo, a expressão $\mathscr{P}(A) - \varnothing$ se refere ao conjunto potência de A (ou seja, 2^A) sem o conjunto vazio $\varnothing$ entre seus elementos.

Definição 4.4.3 (Modelo canônico). *O modelo canônico $M^\dagger$ para $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$ na linguagem $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$ com uma expansão simples $\mathscr{L}^{m+}_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$ consiste em uma upla $(W^\dagger, \{R^\dagger_l\}_{l \in A \cup \mathscr{P}(A) - \varnothing}, D^\dagger, Q^\dagger, I^\dagger)$, e tal que:*

1. *$W^\dagger$ é o conjunto dos conjuntos saturados de fórmulas em $\mathscr{L}^{m+}_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$;*
2. *para $i \in A$, $w, w' \in W^\dagger$, $wR^\dagger_iw'$ sse $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in w\} \subseteq w'$;*
3. *para $G \subseteq A$, $w, w' \in W^\dagger$, $wR^\dagger_Gw'$ sse $\{\varphi \mid \mathscr{D}_G\varphi \in w\} \subseteq w'$;*
4. *$D^\dagger = \{x \mid x$ é a primeira variável em $\mathscr{L}^{m+}_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$ tal que $(y = x) \in w$ (para cada $y \in \mathscr{L}^{m+}_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$ e cada $w \in W^\dagger$)$\}$;*
5. *para $w \in W^\dagger$, $Q^\dagger(w) = \{x \mid x \in D^\dagger$ e $\mathsf{E}(x) \in w\}$;*

6. *para* $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \in D^\dagger$, $(\vec{x}) \in I^\dagger(P^k, w)$ *sse* $P^k(\vec{x}) \in w$.

Como ocorreu no modelo canônico para $\mathbf{QK}^m$, é fácil perceber que o nosso novo modelo canônico também satisfaz as condições para ser um modelo epistêmico. Entretanto, pelas mesmas razões apresentadas no capítulo anterior, precisamos introduzir a noção de modelos subcanônicos para lidar adequadamente com o problema da identidade entre variáveis individuais.

Definição 4.4.4 (Modelo subcanônico)**.** *Seja o modelo canônico* $M^\dagger$ *para* $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$ *na linguagem expandida* $\mathscr{L}^{m+}_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$ *conforme a Definição 4.4.3. Chamaremos de* modelo subcanônico *(para o mesmo sistema na mesma linguagem) a cada modelo* $M^\ddagger = (W^\ddagger, \{R^\ddagger_j\}_{l \in A \cup \mathscr{P}(A) - \varnothing}, D^\ddagger, Q^\ddagger, I^\ddagger)$*, tal que:*

1. $W^\ddagger \subseteq W^\dagger$ *e, para quaisquer* $w, w' \in W^\ddagger$*, há pelo menos uma trilha entre* w *e* w'*;*

2. *para* $l \in A \cup \mathscr{P}(A) - \varnothing$*, e para* $w, w' \in W^\ddagger$, $R^\ddagger_l = R^\dagger_l \cap W^\ddagger \times W^\ddagger$*;*

3. $D^\ddagger = \{x \mid x$ *é a primeira variável em* $\mathscr{L}^{m+}_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$ *tal que* $(y = x) \in w$ *(para cada* $y \in \mathscr{L}^{m+}_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$ *e algum* $w \in W^\ddagger$*)*$\}$*;*

4. *para* $w \in W^\ddagger$, $Q^\ddagger(w) = \{x \mid x \in D^\dagger$ *e* $\mathsf{E}(x) \in w\}$*;*

5. *para cada* $w \in W^\ddagger$ *e para* $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \in D^\ddagger$, $(\vec{x}) \in I^\ddagger(P^k, w)$ *sse* $(\vec{x}) \in I^\dagger(P^k, w)$.

Naturalmente, aplicam-se, ao modelo canônico para $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$ e aos novos modelos subcanônicos, as mesmas definições e resultados relativos a conjuntos saturados do capítulo anterior.

Mostraremos, a seguir, alguns resultados muito importantes acerca de $M^\dagger$. Na prova do lema abaixo, empregaremos alguns (esquemas de) teoremas de $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$, deriváveis facilmente a partir de **LP** e **MP**.

Lema 4.4.5. *Em cada modelo subcanônico* $M^\ddagger$*, valem:*

1. *para cada* $i \in A$, $R^\ddagger_i = R^\ddagger_{\{i\}}$*;*

2. *cada* $R^\ddagger_G \subseteq \bigcap_{i \in G} R^\ddagger_i$*;*

3. *em geral,* $R^\ddagger_G$ *não coincide com* $\bigcap_{i \in G} R^\ddagger_i$.

Demonstração. Seguem as provas para cada item.

1. Precisamos provar que $R^\ddagger_i \subseteq R^\ddagger_{\{i\}}$ e que $R^\ddagger_{\{i\}} \subseteq R^\ddagger_i$. Para a primeira parte, suponhamos que $R^\ddagger_i \nsubseteq R^\ddagger_{\{i\}}$. Isso equivale a dizer que, para pelo menos um par

(w,w'), é o caso que $(w,w') \in R_i^{\ddagger}$ mas $(w,w') \notin R_{\{i\}}^{\ddagger}$. Daí, em consequência da construção de $M^{\ddagger}$, temos que, $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in w\} \subseteq w'$ porém $\{\varphi \mid \mathscr{D}_{\{i\}}\varphi \in w\} \nsubseteq w'$.

Sem perda de generalidade, para satisfazer a segunda condição, seja ψ uma fórmula tal que $\mathscr{D}_{\{i\}}\psi \in w$ e que $\psi \notin w'$. Sabemos que $\vdash \mathscr{D}_{\{i\}}\psi \leftrightarrow \mathscr{K}_i\psi$, e daí, por aplicações simples de **LP**, **MP** e do Lema 3.4.5(2), que $\mathscr{K}_i\psi$ também pertence a w. Por suposição, $\{\varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \in w\} \subseteq w'$; assim, $\psi \in w'$, o que é absurdo. Concluímos, então, que $R_i^{\ddagger} \subseteq R_{\{i\}}^{\ddagger}$. A segunda parte é muito similar, empregando-se o mesmo esquema de axioma. As duas partes juntas acarretam $R_i^{\ddagger} = R_{\{i\}}^{\ddagger}$, como se queria provar.

2. Suponhamos que $R_G^{\ddagger} \nsubseteq \bigcap_{i\in G} R_i^{\ddagger}$; ou seja, que para pelo menos um par (w,w'), seja o caso que $(w,w') \in R_G^{\ddagger}$ mas $(w,w') \notin \bigcap_{i\in G} R_i^{\ddagger}$. Dessa última condição, segue-se que, para pelo menos um $a \in G$, $(w,w') \notin R_a^{\ddagger}$; o que acarreta dizer que $\{\varphi \mid \mathscr{K}_a\varphi \in w\} \nsubseteq w'$. Seja, agora, uma ψ arbitrária tal que $\mathscr{K}_a\psi \in w$ e que $\psi \notin w'$. Como $\psi \notin w'$ e, da suposição anterior de que $(w,w') \in R_G^{\ddagger}$, decorre $\{\varphi \mid \mathscr{D}_G\varphi \in w\} \subseteq w'$; obtemos que $\psi \notin \{\varphi \mid \mathscr{D}_G\varphi \in w\}$, e, daí, que $\mathscr{D}_G\psi \notin w$. Como w é maximal, $\neg\mathscr{D}_G\psi \in w$.

Consideremos agora o esquema $\vdash \neg\mathscr{D}_G\psi \to \neg\mathscr{D}_{\{a\}}\psi$, o qual consiste em uma instância da contrapositiva do axioma $\mathscr{D}\mathbf{2}$: $\vdash \neg\mathscr{D}_{G'}\varphi \to \neg\mathscr{D}_G\varphi$ (para $G \subseteq G'$), e do fato de que $a \in G$. Também deve valer o esquema: $\vdash \neg\mathscr{D}_{\{a\}}\psi \leftrightarrow \neg\mathscr{K}_a\psi$, uma instância para a contrapositiva do axioma $\mathscr{D}\mathbf{1}$. Por aplicações óbvias de **LP** e **MP**, obtemos $\vdash \neg\mathscr{D}_G\psi \to \neg\mathscr{K}_a\psi$. Como $\neg\mathscr{D}_G\psi \in w$, aplicando-se o Lema 3.4.5(2), derivamos que $\neg\mathscr{K}_a\psi \in w$ — ou seja, devido à maximalidade de w, que $\mathscr{K}_a\psi \notin w$ — contradizendo resultado anterior. Conclui-se que $R_G^{\ddagger} \subseteq \bigcap_{i\in G} R_i^{\ddagger}$.

3. Este resultado é importante porque a ele devemos a principal dificuldade na demonstração de completude para $\mathbf{QK}^m$, como veremos depois. Pois bem, considerando-se o item *2* deste lema, dizer que $R_G^{\ddagger}$, em geral, não coincide com $\bigcap_{i\in G} R_i^{\ddagger}$ acarreta dizer que podem existir dois $w,w' \in W^{\ddagger}$ tais que $(w,w') \in \bigcap_{i\in G} R_i^{\ddagger}$ mas que $(w,w') \notin R_G^{\ddagger}$.

Para percebermos essa possibilidade, basta lembrarmos que, em algum conjunto saturado w, devido a uma espécie de efeito colateral das condições para a construção do modelo canônico (e dos subcanônicos), podemos ter a situação de que, para toda fórmula φ *contingente* — ou seja, que pertença a pelo menos um ponto do modelo mas não a todos os pontos — , seja o caso que, para dois agentes a e b em particular, que o conjunto $\{\neg\mathscr{K}_a\varphi, \neg\mathscr{K}_a\neg\varphi, \neg\mathscr{K}_b\varphi, \neg\mathscr{K}_b\neg\varphi\} \subseteq w$. Assim, se tomarmos um ponto w arbitrário no qual a e b não sabem de nada que não seja válido (não têm conhecimento de proposições contingentes) — é fácil também mostrar que essa restrição epistêmica contamina, por assim dizer, todos os $w' \in W^{\ddagger}$, e, portanto, que $R^{\ddagger}_a$ e $R^{\ddagger}_b$ são relações universais sobre $W^{\ddagger}$; ou seja, tanto $R^{\ddagger}_a$ como $R^{\ddagger}_b$ coincidem com $W^{\ddagger} \times W^{\ddagger}$. Dessa maneira, para cada w, sendo que tanto $\{\varphi \mid \mathscr{K}_a\varphi \in w\}$ como $\{\varphi \mid \mathscr{K}_b\varphi \in w\}$ coincidem com $\{\varphi \mid M \vDash \varphi\}$, e que $\{\varphi \mid M \vDash \varphi\} \subseteq w'$ para todo $w' \in W^{\ddagger}$, segue-se que (w,w') pertence tanto a $R^{\ddagger}_a$ como a $R^{\ddagger}_b$, e, por conseguinte, $(w,w') \in \bigcap_{i\in\{a,b\}} R^{\ddagger}_i$.

Consideremos agora o fato de que, para uma fórmula ψ contingente e arbitrária, o conjunto $\Gamma = \{\mathscr{D}_{\{a,b\}}\psi, \neg\mathscr{K}_a\psi, \neg\mathscr{K}_a\neg\psi, \neg\mathscr{K}_b\psi, \neg\mathscr{K}_b\neg\psi\}$ é consistente. Seja outra fórmula contingente ξ qualquer, distinta de ψ, e seja $\Gamma' = \{\neg\mathscr{D}_{\{a,b\}}\xi, \neg\mathscr{D}_{\{a,b\}}\neg\xi\} \cup \Gamma$ (e assim, que o grupo $\{a,b\}$ somente tem conhecimento distribuído de ψ). Por construção, $W^{\ddagger}$ contém um w tal que $\Gamma' \subseteq w$. Como ψ é contingente, há algum w' tal que $\neg\psi \in w'$. Neste caso $\{\varphi \mid \mathscr{D}_{\{a,b\}}\varphi \in w\} \nsubseteq w'$ (e, portanto, pela construção do modelo subcanônico, $(w,w') \notin R^{\ddagger}_{\{a,b\}}$), mas $(w,w') \in \bigcap_{i\in\{a,b\}} R^{\ddagger}_i$, já que, como vimos, $R^{\ddagger}_a$ e $R^{\ddagger}_b$ são universais.

É também importante destacar (e fácil de perceber) que este resultado depende da admissão de algum $G = \{a_1, \ldots, a_j\}$ com $j \geq 2$. $\square$

Os itens do lema acima estão indicados, rapidamente e de maneira mais ou menos similar, para o caso de **S5** proposicional, em Fagin et al. (1992), bem como em Belardinelli e Lomuscio (2008, 2009b) para sua versão de primeira ordem. Por uma questão de clareza, e por não considerá-los triviais, decidimos incluir esses resultados como parte de um lema, acrescidos das devidas demonstrações.

O terceiro item desse lema indiretamente mostra que, embora por construção, os esquemas $\mathbf{K}\mathscr{D}$, $\mathscr{D}\mathbf{1}$, $\mathscr{D}\mathbf{2}$ (bem como seus consequentes teoremas) pertençam a cada conjunto saturado em $W^{\ddagger}$, não temos garantia alguma de que a semântica *standard* para $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$ funcione no modelo canônico (tampouco nos subcanônicos). Justamente por conta disso, precisaremos construir, a partir de cada modelo subcanônico, um modelo especial para demonstrar a completude de nosso sistema, no qual $R^{\ddagger}_G$ coincida com $\bigcap_{i\in G} R^{\ddagger}_i$.

Antes, introduziremos a noção de pseudossatisfação, que será útil para esse propósito.

Definição 4.4.6 (Pseudossatisfação)**.** *Seja uma relação $R^{\ddagger}_G$ em um modelo subcanônico, conforme as definições 4.4.3 e 4.4.4. Definimos a relação de pseudossatisfação $\vDash^p$ exatamente como $\vDash$, exceto pela seguinte cláusula em substituição à condição 7 na Definição 4.1.3:*

7′. $(M^{\sigma},w) \vDash^p \mathscr{D}_G\varphi$ sse, para todo $w' \in W^{\ddagger}$, $wR^{\ddagger}_G w' \Rightarrow (M^{\sigma},w') \vDash^p \varphi$.

Intuitivamente, apenas para efeito de pseudossatisfação, cada $R^{\ddagger}_{G}$ em um modelo subcanônico será considerada comportando-se como mais uma $R^{\ddagger}_{i}$, exceto no que diz respeito às restrições específicas impostas pelos esquemas $\mathscr{D}\mathbf{1}$ e $\mathscr{D}\mathbf{2}$ para o operador $\mathscr{D}_G$. No caso em que $G = \{i\}$, as noções de satisfação (usual) e pseudossatisfação colapsam uma na outra; porém, precisamos de um resultado mais geral para efeito de completude do sistema.

Seguimos com mais resultados essenciais pensando nesse objetivo.

Lema 4.4.7 (Pseudoverdade)**.** *Seja $M^{\ddagger}$ um modelo subcanônico a partir do modelo canônico para $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$, de acordo com a Definição 4.4.4. Para $w \in W^{\ddagger}$, $\varphi \in \mathscr{L}^{m+}_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$, e uma atribuição subcanônica σ conforme a Definição 3.4.14:*

$$(M^{\ddagger\sigma}, w) \vDash^p \varphi \quad sse \quad \varphi \in w.$$

Demonstração. Por indução sobre o comprimento de φ. Como a relação de pseudossatisfação $\vDash^p$ se comporta exatamente como a relação de satisfação $\vDash$ em todas as cláusulas semânticas, exceto para fórmulas do tipo $\mathscr{D}_G\varphi$, a demonstração é quase a mesma que aquela feita no Lema 3.4.15, substituindo-se cada ocorrência de $\vDash$ por $\vDash^p$, e restando-nos apenas checar a aplicação da hipótese da indução para o caso abaixo.

(*vii*) φ é da forma $\mathscr{D}_G\psi$. Suponhamos $(M^{\ddagger\sigma}, w) \nvDash^p \mathscr{D}_G\psi$. Isso quer dizer que, para algum $w' \in W^{\ddagger}$ tal que $wR^{\ddagger}_{G}w'$, $(M^{\ddagger\sigma}, w') \nvDash^p \psi$. Por h.i., $\psi \notin w'$. Como ocorre $wR^{\ddagger}_{G}w'$, pela construção do modelo subcanônico, sabemos que $\{\varphi \mid \mathscr{D}_G\varphi \in w\} \subseteq w'$. Assim, se $\psi \notin w'$, segue-se que $\mathscr{D}_G\psi \notin w$. Para a outra direção do lema, suponhamos que $\mathscr{D}_G\psi \notin w$. Pela maximalidade de w, sabemos então que $\neg\mathscr{D}_G\psi \in w$. Ora, pela construção do modelo subcanônico, $R^{\ddagger}_{G}$ se comporta como apenas outra $R^{\ddagger}_{i}$. Assim, pelo Teorema 3.4.8, como $\neg\mathscr{D}_G\psi \in w$, o conjunto $\{\varphi \mid \mathscr{D}_G\varphi \in w\} \cup \{\neg\psi\}$ é consistente. Assim, pelo Teorema 3.4.6, deve haver um conjunto saturado w' tal que $\{\varphi \mid \mathscr{D}_G\varphi \in w\} \subseteq w'$ e que $\neg\psi \in w'$. Pela maximalidade de w', temos que $\psi \notin w'$; e, por h.i., que $(M^{\ddagger\sigma}, w') \nvDash^p \psi$. Como $wR^{\ddagger}_{G}w'$, isso acarreta dizer que $(M^{\ddagger\sigma}, w) \nvDash^p \mathscr{D}_G\psi$. □

Dado um modelo subcanônico qualquer nos moldes acima, mostraremos agora como construir um modelo epistêmico especial, para cujas R_i's, $R^{\dagger}_{G} = \bigcap_{i \in G} R_i$ $(i \in G)$ e no qual valham as mesmas fórmulas que são pseudoválidas no respectivo modelo subcanônico de origem. Como informado antes, a técnica empregada baseia-se livremente, com as necessárias modificações, em Fagin et al. (1992) para o caso proposicional de **S5** com conhecimento distribuído.

Precisaremos, antes, de algumas definições, começando por uma semelhante à de trilha, porém mais sofisticada. Estaremos pressupondo modelos epistêmicos contendo, entre seus agentes, tanto agentes individuais quanto coletivos, à maneira de cada modelo subcanônico $M^{\ddagger}$ para $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$. Do ponto de vista puramente formal, isso é irrelevante porque cada agente coletivo será tratado como se fosse apenas outro agente individual — ver comentário à Definição 4.4.6 acima.

Definição 4.4.8 (Caminho). *Seja um modelo epistêmico M e sejam $w, w' \in W$ em M. Adotaremos as seguintes definições:*

1. *Um* caminho de w até w' *é uma sequência* $(w_1, l_1, w_2, \ldots, l_{k-1}, w_k)$ *tal que:*

   (1) $w = w_1$ *e* $w' = w_k$*;*

   (2) cada w_j *na sequência pertence a* W*;*

   (3) cada l_j *é um agente ou grupo de agentes;*

   (4) $(w_j, w_{j+1}) \in R_{l_j}$.

2. *A* redução de um caminho $(w_1, l_1, w_2, \ldots, l_{k-1}, w_k)$ *é obtida ao substituirmos cada subsequência maximal consecutiva* $(w_q, l_q, w_{q+1}, l_{q+1} \ldots, l_{r-1}, w_r)$ *daquele caminho, na qual* $l_q = l_{q+1} = \ldots = l_{r-1}$*, pela sequência* (w_q, l_q, w_r).

3. *Um caminho é dito* reduzido *sse coincide com sua redução — ou seja, se* $l_j \neq l_{j+1}$*, para* $1 \leq j < k$.

Definição 4.4.9 (Modelo-árvore). *Sejam um conjunto finito não-vazio A de agentes e $M^{\ddagger} = (W^{\ddagger}, \{R_l^{\ddagger}\}_{l \in A \cup \mathscr{P}(A) - \varnothing}, D^{\ddagger}, Q^{\ddagger}, I^{\ddagger})$ um modelo subcanônico para $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$, conforme a Definição 4.4.4. Um* modelo-árvore *$M^{\curlywedge}$ é uma upla*

$$M^{\curlywedge} = (W^{\curlywedge}, \{R_l^{\curlywedge}\}_{l \in A \cup \mathscr{P}(A) - \varnothing}, D^{\curlywedge}, Q^{\curlywedge}, I^{\curlywedge})$$

com uma função sobrejetiva $h : W^{\curlywedge} \longrightarrow W^{\ddagger}$, onde:

1. $W^{\curlywedge} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} W_k^{\curlywedge}$ *tal que:*

   (i) $W_0^{\curlywedge} = W^{\ddagger}$*;*

   (ii) $W_{k+1}^{\curlywedge}$ *é o conjunto dos mundos* $v_{w,l,w'}$ *tais que* $w \in W^{\ddagger}$*,* $w' \in W_k^{\curlywedge}$ *e l é um agente ou grupo de agentes.*

2. *Para* $w, w' \in W^{\curlywedge}$ *e cada* $l \in A \cup \mathscr{P}(A) - \varnothing$*, dizemos que w' é* filho-l *de w sse w' tem a forma* $v_{w'',l,w}$*, para algum* $w'' \in W^{\ddagger}$.

3. *h é definida recursivamente da seguinte maneira:*

   (i) $h(w) = w$ *para* $w \in W_0^{\curlywedge}$*,*

   (ii) $h(v_{w,l,w'}) = w$ *para* $v_{w,l,w'} \in W_k^{\curlywedge}$ $(k \geq 1)$.

4. *$D^{\curlywedge} = D^{\ddagger}$ e, para cada $w \in W^{\curlywedge}$, $Q^{\curlywedge}(w) = Q^{\ddagger}(h(w))$.*

5. *$(w,w') \in R_l^{\curlywedge}$ sse w é filho-l de w' e $h(w)R_l^{\ddagger}h(w')$.*

6. *Para cada $w \in W^{\curlywedge}$, $I^{\curlywedge}(P^k,w) = I^{\ddagger}(P^k,h(w))$.*

Na explicação a seguir, chamaremos informalmente de *descendência* cada sequência linear $w_1, w_2, \cdots, w_{k-1}, w_k$ tal que cada w_j $(1 < j \leq k)$ na sequência é filho-l de w_{j-1} (para algum $l \in A \cup \mathscr{P} - \varnothing$, não necessariamente o mesmo l ao longo de toda a sequência).

Pois bem, a Definição 4.4.9 foi concebida para implementar objetivos simples: que cada relação de acessibilidade seja *única* — no sentido de que nenhum par de pontos seja compartilhado por mais de uma relação. Isso é conseguido distribuindo-se as relações de acessibilidade ao longo das *descendências* de cada ponto no modelo original. A utilidade desse procedimento fará sentido depois, quando definirmos, a partir do modelo-árvore $M^{\curlywedge}$ baseado em um modelo subcanônico $M^{\ddagger}$, um modelo especial $M^{\star}$ no Lema 4.4.12, desta vez sem agentes coletivos.

Para efeito ilustrativo e de maneira um tanto informal, representamos na Figura 7 como seria a construção de um modelo-árvore a partir de um modelo epistêmico bem simples. O modelo inicial contém apenas dois pontos w_1 e w_2, e três agentes a, b e G (sendo G um agente coletivo). As respectivas relações de acessibilidade desses agentes foram concebidas de modo que o modelo fosse bastante geral (não é reflexivo, transitivo, nem euclideano), e estão indicadas pelas setas usuais, rotuladas com os devidos índices.

Na figura em questão, o modelo-árvore que deriva do modelo inicial está apenas parcialmente representado, por óbvias razões de espaço. Afinal, mesmo a partir de um modelo epistêmico tão simples quanto o primeiro, o modelo-árvore resultante já seria infinito, pelas suas condições de construção. Por isso, escolhemos ignorar as descendências de w_2, explicitando somente as seis descendências encontradas a partir de w_1 no nível $W_1^{\curlywedge}$; e, ainda assim, das trinta e seis seguintes no nível $W_2^{\curlywedge}$, indicamos apenas as seis que coincidiam com alguma relação de acessibilidade. A propósito, a relação que estamos chamando informalmente de descendência (ser *filho-l* de outro ponto) está representada por linhas tracejadas e os índices l rotulando cada descendência indicam obviamente que o ponto em questão é filho-l do ponto imediatamente acima.

Com o auxílio das intuições fornecidas pela Figura 7, esperamos que se torne evidente como, da Definição 4.4.9, inferimos muito facilmente o seguinte resultado, cuja prova será omitida.

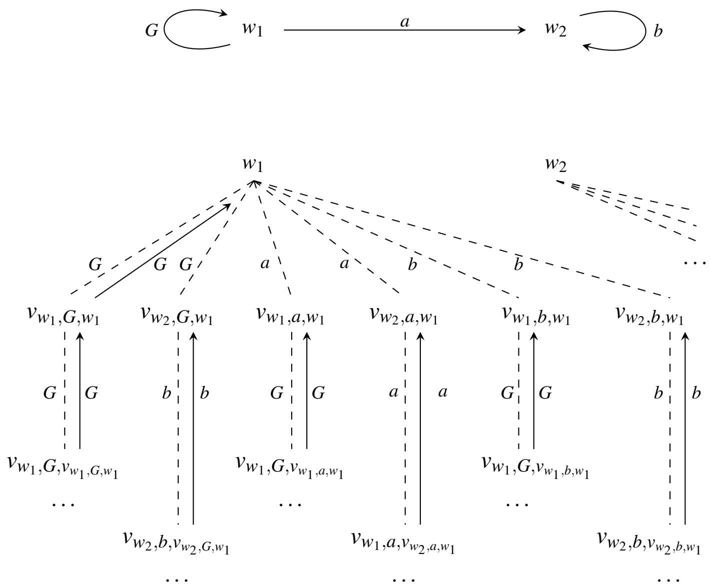

Figura 7 – Fragmento de um modelo-árvore a partir de outro modelo.

Lema 4.4.10. *Sejam $M^{\curlywedge}$ e h conforme a Definição 4.4.9. Assim, $M^{\curlywedge}$ e h satisfazem as seguintes condições:*

1. *há no máximo um caminho reduzido de w até w';*
2. *$wR_i^{\curlywedge}w'$ acarreta que $h(w)R_i^{\ddagger}h(w')$;*
3. *$wR_G^{\curlywedge}w'$ acarreta que $h(w)R_G^{\ddagger}h(w')$;*
4. *para $\vec{x} \in D^{\curlywedge}$, $(\vec{x}) \in I^{\curlywedge}(P^k, w)$ sse $(\vec{x}) \in I^{\ddagger}(P^k, h(w))$.*

O lema anterior evidencia algumas propriedades de $M^{\curlywedge}$ que serão essenciais nas provas a seguir, como veremos.

Lema 4.4.11. *Seja um modelo subcanônico $M^{\ddagger}$ a partir do modelo canônico $M^{\dagger}$ para* **QK**$\mathscr{D}^m$*, conforme a Definição 4.4.4, e um modelo-árvore $M^{\curlywedge}$ a partir de $M^{\ddagger}$ conforme a Definição 4.4.9. Para $w \in W^{\curlywedge}$, $\varphi \in \mathscr{L}^{m+}_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$ e uma atribuição subcanônica σ sobre $M^{\curlywedge}$, temos o seguinte resultado:*

$$(M^{\curlywedge\sigma}, w) \vDash^p \varphi \quad sse \quad (M^{\ddagger\sigma}, h(w)) \vDash^p \varphi.$$

Demonstração. Prova por indução sobre φ.

Base: (i) φ é $\perp$. Trivial.

(ii) φ é alguma $P(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$. Suponhamos, para algum $w \in W^{\curlywedge}$ e alguma atribuição subcanônica σ sobre $M^{\curlywedge}$, que $(M^{\curlywedge\sigma}, w) \vDash^p P(x_{i_1}, \ldots, x_{i_x})$. Isso equivale a dizer que $(\sigma(x_{i_1}), \ldots, \sigma(x_{i_k})) \in I^{\curlywedge}(P, w)$. Por definição, sabemos que $I^{\curlywedge}(P, w) = I^{\ddagger}(P, h(w))$; ou seja, $(\vec{x}) \in I^{\curlywedge}(P, w)$ sse $(\vec{x}) \in I^{\ddagger}(P, h(w))$. Por conseguinte, $(\sigma(x_{i_1}), \ldots, \sigma(x_{i_k})) \in I^{\ddagger}(P, h(w))$; e, em consequência, temos $(M^{\ddagger\sigma}, h(w)) \vDash^p P(x_{i_1}, \ldots, x_{i_1})$. A volta é similar.

(iii) φ tem a forma $(x = y)$. Suponhamos que $(M^{\curlywedge\sigma}, w) \vDash^p (x = y)$; o que equivale a dizer que $\sigma(x)$ coincide com $\sigma(y)$ em $D^{\curlywedge}$. Ora, por definição, $D^{\curlywedge} = D^{\ddagger}$. Logo, é fácil ver que $(M^{\ddagger\sigma}, h(w)) \vDash^p (x = y)$.

Hipótese indutiva: O lema vale para φ de comprimento $< n$.

(iv) φ tem a forma $\psi \to \xi$. Suponhamos, para algum $w \in W^{\curlywedge}$, que $(M^{\curlywedge\sigma}, w) \vDash^p \psi \to \xi$. Em outras palavras, ou $(M^{\curlywedge\sigma}, w) \nvDash^p \psi$ ou $(M^{\curlywedge\sigma}, w) \vDash^p \xi$. Por h.i., inferimos que ou $(M^{\ddagger\sigma}, h(w)) \nvDash^p \psi$ ou $(M^{\ddagger\sigma}, h(w)) \vDash^p \xi$; por conseguinte, $(M^{\ddagger\sigma}, h(w)) \vDash^p \psi \to \xi$. A volta é similar.

(v) φ tem a forma $\forall x\psi$. Suponhamos, para algum $w \in W^{\curlywedge}$, que $(M^{\curlywedge\sigma}, w) \vDash^p \forall x\psi$; ou seja, para todo $z \in Q^{\curlywedge}(w)$, $(M^{\curlywedge\sigma\binom{x}{z}}, w) \vDash^p \psi$. Ora, $Q^{\curlywedge}(w) = Q^{\ddagger}(h(w))$. Portanto, usando também a h.i., temos que, para todo $z \in Q^{\ddagger}(h(w))$, $(M^{\ddagger\sigma\binom{x}{z}}, h(w)) \vDash^p \psi$; e, assim, que $(M^{\ddagger\sigma}, h(w)) \vDash^p \forall x\psi$. A volta é similar.

(vi) φ tem a forma $\mathscr{K}_i\psi$. *(Volta)* Suponhamos, para algum $w \in W^{\curlywedge}$, que $(M^{\curlywedge\sigma}, w) \nvDash^p \mathscr{K}_i\psi$. Isso equivale a dizer que, para algum w' tal que

$wR_i^{\curlywedge}w'$, acontece $(M^{\curlywedge\sigma}, w') \nvDash^p \psi$. Por h.i., temos $(M^{\ddagger\sigma}, h(w')) \nvDash^p \psi$. Ora, por definição, $wR_i^{\curlywedge}w'$ sse w' é filho-i de w e $h(w)R_i^{\ddagger}h(w')$. Como sabemos que $wR_i^{\curlywedge}w'$, segue-se que $h(w)R_i^{\ddagger}h(w')$. Concluímos que $(M^{\ddagger\sigma}, h(w)) \nvDash^p \mathscr{K}_i\psi$.

(Ida) Suponhamos agora que $(M^{\curlywedge\sigma}, w) \vDash^p \mathscr{K}_i\psi$. Isso equivale a dizer que, para todo w' tal que $wR_i^{\curlywedge}w'$, acontece $(M^{\curlywedge\sigma}, w') \vDash^p \psi$. Consideremos, pois, todos esses w'. Como sabemos que, em cada caso, temos $wR_i^{\curlywedge}w'$, uma das consequências da definição de $R^{\curlywedge}$ é que $h(w)R_i^{\ddagger}h(w')$. Estamos falando, pois, de todos os $h(w')$ tais que $h(w)R_i^{\ddagger}h(w')$.

Mas, será que estamos considerando também todos os pontos de $W^{\ddagger}$ acessados por $h(w)$? Vale lembrar que h é sobrejetiva; portanto, se houver algum $w_j \in W^{\ddagger}$ tal que $h(w)R_i^{\ddagger}w_j$, por construção de $W^{\curlywedge}$, haverá pelo menos um w'' que seja filho-i de w e tal que $h(w'') = w_j$; daí, por definição, $wR_i^{\curlywedge}w''$ (portanto, w'' será um daqueles w' mencionados acima). Aplicando a h.i., temos que $(M^{\ddagger\sigma}, h(w')) \vDash^p \psi$ para cada $h(w')$ tal que $h(w)R_i^{\ddagger}h(w')$. Como vimos que esse resultado efetivamente cobre todos os pontos em $W^{\ddagger}$ acessados por $h(w)$, inferimos, assim, que $(M^{\ddagger\sigma}, h(w)) \vDash^p \mathscr{K}_i\psi$.

(vii) φ tem a forma $\mathscr{D}_G\psi$. A prova segue muito similar à anterior, visto que estamos lidando com pseudossatisfação. É suficiente substituir, na prova do caso (vi), todas as ocorrências de $\mathscr{K}_i$ por ocorrências de $\mathscr{D}_G$, e as demais ocorrências de i por ocorrências de G. $\square$

Agora, mostraremos um último e importante lema antes de provarmos a completude para $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$.

Lema 4.4.12. *Seja $M^{\ddagger}$ um modelo subcanônico qualquer a partir do modelo canônico $M^{\dagger}$ para $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$, conforme as definições 4.4.4 e 4.4.3. Há um modelo epistêmico, que chamaremos de $M^{\star}$, tal que, para toda $\varphi \in \mathscr{L}^{m+}_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$:*

$$M^{\star} \vDash \varphi \quad sse \quad M^{\ddagger} \vDash^p \varphi$$

Demonstração. Definamos, a partir do modelo-árvore $M^{\curlywedge}$ na Definição 4.4.9, um modelo epistêmico $M^{\star} = (W^{\star}, \{R_i^{\star}\}_{i\in A}, D^{\star}, Q^{\star}, I^{\star})$ tal que $W^{\star} = W^{\curlywedge}$, $D^{\star} = D^{\curlywedge}$, $Q^{\star} = Q^{\curlywedge}$, $I^{\star} = I^{\curlywedge}$, porém tal que cada $R_i^{\star} = R_i^{\curlywedge} \cup \bigcup_{i\in G} R_G^{\curlywedge}$. Provaremos primeiro o seguinte resultado chave:

$$\textstyle\bigcap_{i\in G} R_i^{\star} \quad \text{coincide com} \quad R_G^{\curlywedge}$$

Mostraremos, como usual, as duas direções $\subseteq$ e $\supseteq$. Para efeito de prova e por uma questão de clareza notacional, usaremos sempre G como uma variável para grupos de agentes e G' para denotar um grupo arbitrário de agentes.

(Ida) Provaremos, para G' arbitrário, que $\bigcap_{i\in G'} R_i^{\star} \subseteq R_{G'}^{\curlywedge}$. Suponhamos um par arbitrário (w_j, w_k) (onde $w_j, w_k \in W^{\star}$) tal que $(w_j, w_k) \in \bigcap_{i\in G'} R_i^{\star}$.

Por conseguinte, $(w_j, w_k) \in R_i^\star$ para todo $i \in G'$. Disso se segue, pela definição de $R_i^\star$, que, para todo $i \in G'$, $(w_j, w_k) \in (R_i^\curlywedge \cup \bigcup_{i \in G} R_G^\curlywedge)$; ou seja, que para todo $i \in G'$, ou $(w_j, w_k) \in R_i^\curlywedge$ ou $(w_j, w_k) \in \bigcup_{i \in G} R_G^\curlywedge$.

Ora, uma das condições para que $(w_j, w_k) \in R_i^\curlywedge$ é que w_k seja filho-i de w_j. Porém, por construção, para cada $w, w' \in W^\curlywedge$, há no máximo um caminho reduzido de w até w'. Não é possível, pois, que (w, w') pertença a mais de uma $R_i^\curlywedge$. Dizendo de outro modo, não é possível, devido à construção de $W^\curlywedge$, que w' seja filho-i de mais de um w. Naturalmente, cada (w, w') só pode pertencer a uma única $R_i^\curlywedge$, e $\bigcap_{i \in G'} R_i^\curlywedge$ é vazia. Sendo assim, resta-nos dizer, *nota bene*: para *todo* $i \in G'$, que $(w_j, w_k) \in \bigcup_{i \in G} R_G^\curlywedge$. Mas, isso é o mesmo que (w_j, w_k) $\in R_{G'}^\curlywedge$, pois $R_{G'}^\curlywedge$ coincide com a interseção de todos os $R_G^\curlywedge$ tal que $G' \subseteq G$.

(Volta) Provaremos, para G' arbitrário, que $R_{G'}^\curlywedge \subseteq \bigcap_{i \in G'} R_i^\star$. Suponhamos que $R_{G'}^\curlywedge \nsubseteq \bigcap_{i \in G'} R_i^\star$. Isso implica dizer que, para $w, w' \in W^\curlywedge$, há pelo menos um (w, w') tal que $(w, w') \in R_{G'}^\curlywedge$ e $(w, w') \notin \bigcap_{i \in G'} R_i^\star$. Além disso, por definição, $W^\star = W^\curlywedge$. Da segunda condição, segue-se que, para algum $a \in G'$, $(w, w') \notin R_a^\star$. Em consequência da definição de $R_a^\star$, segue-se que $(w, w') \notin R_a^\curlywedge$ e que $(w, w') \notin \bigcup_{a \in G} R_G^\curlywedge$. Como, obviamente, $R_{G'}^\curlywedge \subseteq \bigcup_{a \in G} R_G^\curlywedge$ (pois $a \in G'$); inferimos seguramente que $(w, w') \notin R_{G'}^\curlywedge$, contradizendo a suposição inicial.

Dispondo do resultado acima, podemos nos ocupar com o principal objetivo do lema, que pode ser assim reformulado sem problemas:

$$(M^{\star\sigma}, w) \vDash \varphi \quad \text{sse} \quad (M^{\curlywedge\sigma}, w) \vDash^p \varphi$$

Prova por indução sobre φ. Como $M^\star$ e $M^\curlywedge$ são muito similares, diferindo apenas na construção das várias R_i, e como a relação de pseudossatisfação coincide com a de satisfação exceto para fórmulas envolvendo o operador $\mathscr{D}_G$, mostraremos a aplicação da hipótese indutiva somente nos dois casos interessantes, em que o comportamento das relações de acessibilidade é relevante.

φ tem a forma $\mathscr{K}_a\psi$. (Por questão de clareza, usaremos a e G' para, respectivamente, um agente arbitrário e um grupo arbitrário de agentes, e usaremos i e G como, respectivamente, variáveis para agentes e para grupos de agentes.)

(Ida) Suponhamos, para um agente $a \in A$ e um ponto $w_j \in W^\curlywedge$, que $(M^{\curlywedge\sigma}, w_j) \nvDash^p \mathscr{K}_a\psi$. Isso equivale a dizer que, para algum w_k tal que $w_j R_a^\curlywedge w_k$, acontece $(M^{\curlywedge\sigma}, w_k) \nvDash^p \psi$. Por h.i., $(M^{\star\sigma}, w_k) \nvDash \psi$. Como, em consequência de sua definição, $R_a^\curlywedge \subseteq R_a^\star$, segue-se que $w_j R_a^\star w_k$; e, por conseguinte, que $(M^{\star\sigma}, w_j) \nvDash \mathscr{K}_a\psi$.

(Volta) Suponhamos, para algum $w_j \in W^\star$, que $(M^{\star\sigma}, w_j) \nvDash \mathscr{K}_a\psi$. Precisamos mostrar que isso acarreta $(M^{\curlywedge\sigma}, w_j) \nvDash^p \mathscr{K}_a\psi$. Da suposição inicial, inferimos que há algum $w_k \in W^\star$ tal que $(w_j, w_k) \in R_a^\star$ e que $(M^{\star\sigma}, w_k) \nvDash \psi$.

Como sabemos que $w_j R^\star_a w_k$, e que $R^\star_a$ consiste em $R^\curlywedge_a \cup \bigcup_{a\in G} R^\curlywedge_G$; segue-se que ou (i) $(w_j,w_k) \in R^\curlywedge_a$, ou (ii) $(w_j,w_k) \in \bigcup_{a\in G} R^\curlywedge_G$.

(i) Suponhamos que $(w_j,w_k) \in R^\curlywedge_a$. De $(M^{\star\sigma},w_k) \not\models \psi$, por h.i., temos $(M^{\curlywedge\sigma},w_k) \not\models^p \psi$; consequentemente, $(M^{\curlywedge\sigma},w_j) \not\models^p \mathscr{K}_a\psi$.

(ii) Suponhamos que $(w_j,w_k) \in \bigcup_{a\in G} R^\curlywedge_G$. Isso acarreta dizer que, para pelo menos uma $R^\curlywedge_{G'} \subseteq \bigcup_{a\in G} R^\curlywedge_G$ tal que $a \in G'$, acontece que $(w_j,w_k) \in R^\curlywedge_{G'}$.[1] Seja uma G' arbitrária desse tipo (o resultado valerá para qualquer G nas mesmas condições). Pela construção de $R^\curlywedge_{G'}$, sabemos que $(h(w_j),h(w_k)) \in R^\ddagger_{G'}$. Como, por hipótese, $a \in G'$, e pelo Lema 4.4.5, $R^\ddagger_{G'} \subseteq \bigcap_{i\in G'} R^\ddagger_i$, inferimos que $(h(w_j),h(w_k)) \in R^\ddagger_a$. Do resultado $(M^{\star\sigma},w_k) \not\models \psi$ acima, por h.i. temos que $(M^{\curlywedge\sigma},w_k) \not\models^p \psi$. Pelo Lema 4.4.11, isso equivale a $(M^{\ddagger\sigma},h(w_k)) \not\models^p \psi$. Desse modo, concluímos que $(M^{\ddagger\sigma},h(w_j)) \not\models^p \mathscr{K}_a\psi$ e, finalmente, pelo mesmo lema, que $(M^{\curlywedge\sigma},w_j) \not\models^p \mathscr{K}_a\psi$.

φ tem a forma $\mathscr{D}_{G'}\psi$.

(Ida) Suponhamos, para $w_j \in W^\curlywedge$ e G' arbitrários, que $(M^{\curlywedge\sigma},w_j) \not\models^p \mathscr{D}_{G'}\psi$. Isso equivale a dizer que, para algum w_k tal que $(w_j,w_k) \in R^\curlywedge_{G'}$, acontece $(M^{\curlywedge\sigma},w_k) \not\models^p \psi$. Por h.i., $(M^{\star\sigma},w_k) \not\models \psi$. Ora, por resultado anterior, já vimos que $\bigcap_{i\in G} R^\star_i$ coincide com $R^\curlywedge_G$. Disso se segue obviamente que $(w_j,w_k) \in \bigcap_{a\in G'} R^\star_i$; e, como $(M^{\star\sigma},w_k) \not\models \psi$, concluímos que $(M^{\star\sigma},w_j) \not\models \mathscr{D}_{G'}\psi$.

(Volta) Suponhamos, para um $w_j \in W^\star$ e G' arbitrários, que $(M^{\star\sigma},w_j) \not\models \mathscr{D}_{G'}\psi$. Isso equivale a dizer que, para algum w_k tal que $(w_j,w_k) \in \bigcap_{i\in G'} R^\star_i$, acontece $(M^{\star\sigma},w_k) \not\models \psi$. Por h.i., $(M^{\curlywedge\sigma},w_k) \not\models^p \psi$. Novamente, como $\bigcap_{i\in G} R^\star_i$ coincide com $R^\curlywedge_G$, $(w_j,w_k) \in R^\curlywedge_{G'}$; consequentemente, $(M^{\curlywedge\sigma},w_j) \not\models^p \mathscr{D}_{G'}\psi$, como queríamos mostrar. $\square$

Recapitulando os resultados precedentes, temos que

$$M^\ddagger \models^p \varphi \quad \text{sse} \quad M^\curlywedge \models^p \varphi \quad \text{sse} \quad M^\star \models \varphi$$

Como usual, após o considerável esforço dedicado aos lemas auxiliares, a prova do teorema principal é facilmente derivada.

Teorema 4.4.13 (Completude de $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$ com respeito a $\mathscr{S}$)**.** *O sistema $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$ é completo com respeito à classe $\mathscr{S}$ de todas as estruturas epistêmicas. Em outras palavras, para qualquer fórmula φ em $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$,*

$$\models \varphi \quad \Rightarrow \quad \vdash \varphi.$$

---

[1] É essencial selecionar um G' assim para o raciocínio, pois outras $R^\curlywedge_G$ sem essa condição podem (acidentalmente) estar contidas em $\bigcup_{a\in G} R^\curlywedge_G$. Além disso, sabemos que a escolha de G' nessas condições está sempre garantida, pela construção de $\bigcup_{a\in G} R^\curlywedge_G$.

Demonstração. Suponhamos $\nvdash \varphi$. Pela Definição 3.4.3, isso acarreta dizer que $\{\neg\varphi\}$ é consistente, e, portanto, de acordo com o Teorema 3.4.6, que há uma extensão saturada w em algum modelo subcanônico $M^{\ddagger}$, obtido a partir do modelo canônico $M^{\dagger}$ para $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$, tal que $\{\neg\varphi\} \subseteq w$. De $\neg\varphi \in w$, pelo Lema 4.4.7, $(M^{\ddagger\sigma}, w) \vDash^p \neg\varphi$, e, pelo Lema 4.4.12, há um modelo epistêmico $M^{\star}$ tal que $(M^{\star\sigma}, w) \vDash \neg\varphi$. Portanto, há um modelo epistêmico $M^{\star}$ tal que $M^{\star} \nvDash \varphi$. Como $M^{\star}$ é evidentemente baseado em uma estrutura $S \in \mathscr{S}$, segue-se que $\mathscr{S} \nvDash \varphi$. □

Nossa preocupação seguinte será estender o Teorema 4.4.13 de modo a mostrarmos a completude dos sistemas $\mathbf{QT}\mathscr{D}^m$, $\mathbf{QS4}\mathscr{D}^m$ e $\mathbf{QS5}\mathscr{D}^m$. O detalhamento rigoroso de todo o procedimento seria extremamente entediante e desnecessariamente extenso, além de muito repetitivo. Por economia de espaço e para comodidade do leitor, forneceremos somente indicações gerais, porém seguras, em cada prova, de como aproveitar os resultados anteriores na obtenção dos novos. Com efeito, apenas precisaremos alterar, em cada caso, o enunciado do Lema 4.4.12, e refazer sua correspondente demonstração, para em seguida obtermos a completude daquelas extensões.

Apresentaremos, em ordem, as três variações do referido lema.

Lema 4.4.14. *Seja $M^{\ddagger}$ um modelo subcanônico qualquer a partir do modelo canônico $M^{\dagger}$ para $\mathbf{QT}\mathscr{D}^m$, análogos aos descritos pelas definições 4.4.4 e 4.4.3. Há um modelo epistêmico reflexivo, que chamaremos de $M^{\star}$, tal que, para toda $\varphi \in \mathscr{L}^{m+}_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$:*

$$M^{\star} \vDash \varphi \quad \textit{sse} \quad M^{\ddagger} \vDash^p \varphi$$

Demonstração. Exatamente como no Lema 4.4.12, exceto que cada $R^{\star}_i$ deve consistir no *fecho reflexivo* de $R^{\curlywedge}_i \cup \bigcup_{i \in G} R^{\curlywedge}_G$. No decorrer da prova, que será omitida aqui, o único passo que requer especial atenção diz respeito à volta do caso em que φ tem a forma $\mathscr{K}_i\psi$. Enunciando mais claramente, precisamos da garantia de que, assumida a hipótese indutiva, aconteça

$$(M^{\curlywedge\sigma}, w) \vDash^p \mathscr{K}_i\psi \quad \Rightarrow \quad (M^{\star\sigma}, w) \vDash \mathscr{K}_i\psi$$

E nos asseguramos disso assim: suponhamos, para w_j arbitrário em $W^{\star}$, que $(M^{\star\sigma}, w_j) \nvDash \mathscr{K}_a\psi$. Isso equivale a dizer que há algum $w_k \in W^{\star}$ tal que $(w_j, w_k) \in R^{\star}_a$ e $(M^{\star\sigma}, w_k) \nvDash \psi$. Por construção, ou (i) $(w_j, w_k) \in R^{\curlywedge}_a$; ou (ii) $(w_j, w_k) \in \bigcup_{a \in G} R^{\curlywedge}_G$; ou (iii) $w_j = w_k$ (para $w_j, w_k \in W^{\star}$). Os dois primeiros casos são exatamente como antes. Examinemos o terceiro:

(iii) Por h.i., $(M^{\curlywedge\sigma}, w_j) \nvDash^p \psi$. De novo, pelo Lema 4.4.11, deduzimos que $(M^{\ddagger\sigma}, h(w_j)) \nvDash^p \psi$. Pelo Lema 3.4.4(1), como $\neg\psi \to \neg\mathscr{K}_a\psi$ é teorema de $\mathbf{QT}\mathscr{D}^m$, pertence a todo conjunto saturado em $W^{\ddagger}$. Por raciocínios usuais a partir do Lema 3.4.5, inferimos que $(M^{\ddagger\sigma}, h(w_j)) \not\models^p \mathscr{K}_a\psi$, e novamente pelo Lema 4.4.11, que $(M^{\curlywedge\sigma}, w_j) \not\models^p \mathscr{K}_a\psi$, como queríamos mostrar. □

Como, na prova acima, os parâmetros relevantes eram arbitrários, a volta daquele passo indutivo está garantida, e poderemos mostrar daqui a pouco a completude com a mesma estratégia do Teorema 4.4.13, fazendo as óbvias alterações no enunciado do teorema e em sua correspondente demonstração.

De modo similar, se pretendemos provar a completude de $\mathbf{QS4}\mathscr{D}^m$ com respeito a $\mathscr{S}^{rt}$, precisaremos especificar no enunciado do Lema 4.4.12, acerca do modelo $M^\star$, que se trata de um modelo reflexivo transitivo, e na definição de cada $R_i^\star$, que deve consistir no *fecho reflexivo e transitivo* de $R_i^\curlywedge \cup \bigcup_{i\in G} R_G^\curlywedge$.

Lema 4.4.15. *Seja $M^\ddagger$ um modelo subcanônico qualquer a partir do modelo canônico $M^\dagger$ para $\mathbf{QS4}\mathscr{D}^m$, análogos aos descritos pelas definições 4.4.4 e 4.4.3. Há um modelo epistêmico reflexivo e transitivo, que chamaremos de $M^\star$, tal que, para toda $\varphi \in \mathscr{L}^{m+}_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$:*

$$M^\star \models \varphi \quad sse \quad M^\ddagger \models^p \varphi$$

Demonstração. Exatamente como na prova do Lema 4.4.12, exceto que cada $R_i^\star$ deve consistir no *fecho reflexivo transitivo* de $R_i^\curlywedge \cup \bigcup_{i\in G} R_G^\curlywedge$. Novamente, o caso problemático é o mesmo (a volta do passo indutivo envolvendo $\mathscr{K}_i\psi$). Podemos aproveitar o esboço de demonstração do Lema 4.4.14 acima (que já exige a reflexividade de $M^\star$), apenas acrescentando, acerca do ponto $w_k \in W^\star$ tal que $(w_j, w_k) \in R_a^\star$ e $(M^{\star\sigma}, w_k) \not\models \psi$, que, além das três possibilidades acima mencionadas, também temos que contemplar (iv) (w_j, w_k) pertencer ao *fecho transitivo* de $R_a^\curlywedge \cup \bigcup_{a\in G} R_G^\curlywedge$, ou seja:

(iv) há uma sequência finita $(w'_0, w'_1, \cdots, w'_{m-1}, w'_m)$ tal que $w'_0 = w_j$, $w'_m = w_k$, e cada (w_{n-1}, w_n) $(0 < n \leq m) \in R_a^\star$.

Para simplificar a prova e sem perda de generalidade, suponhamos que cada par (w'_{n-1}, w'_n) não dependa, ele próprio, do fecho transitivo de $R_a^\curlywedge \cup \bigcup_{a\in G} R_G^\curlywedge$ para pertencer a $R_a^\star$. O caso sem restrição deriva naturalmente deste caso primitivo.

Pois bem, para cada (w_{n-1}, w_n) naquela sequência, ou acontece que $(w_{n-1}, w_n) \in R_a^\curlywedge$, ou $(w_{n-1}, w_n) \in \bigcup_{a\in G} R_G^\curlywedge$ — e, portanto, pertence a alguma $R_G^\curlywedge$ neste conjunto tal que $a \in G$. Precisamos mostrar que, para cada w' naquela sequência (inclusive w_j), $(M^{\curlywedge\sigma}, w') \not\models^p \mathscr{K}_a\psi$.

Sabemos, por h.i., que $(M^{\curlywedge\sigma}, w_k) \not\models^p \psi$. Pelo Lema 4.4.11, obtemos $(M^{\ddagger\sigma}, h(w_k)) \not\models^p \psi$. Se $(w_{k-1}, w_k) \in R_a^\curlywedge$, por construção está garantido que

$(h(w_{k-1}), h(w_k)) \in R^{\ddagger}_a$. É claro que disso resulta que $(M^{\ddagger\sigma}, h(w_{k-1})) \not\models^p \mathscr{K}_a\psi$.

Se, por outro lado, $(w_{k-1}, w_k) \in R^{\curlywedge}_{G'}$ para alguma $R^{\curlywedge}_{G'} \subseteq \bigcup_{a \in G} R^{\curlywedge}_G$ tal que $a \in G'$, por construção está garantido que $(h(w_{k-1}), h(w_k)) \in R^{\ddagger}_{G'}$, e, consequentemente, é fácil perceber que $(M^{\ddagger\sigma}, h(w_{k-1})) \not\models^p \mathscr{D}_{G'}\psi$. Como $\neg\mathscr{D}_{G'}\psi \to \neg\mathscr{K}_a\psi$ (para $a \in G'$) é teorema de **QS4**$\mathscr{D}^m$, segue-se que pertence a todo ponto saturado em $W^{\ddagger}$; e, por aplicações do Lema 3.4.5(2), inferimos que $(M^{\ddagger\sigma}, h(w_{k-1})) \not\models^p \mathscr{K}_a\psi$. Pelo Lema 4.4.11, obtemos $(M^{\curlywedge\sigma}, w_{k-1}) \not\models^p \mathscr{K}_a\psi$.

Para assegurar que a recursão funciona, tomemos agora um par arbitrário (w'_{n-1}, w'_n) $(0 < n \leq m)$ naquela sequência. Suponhamos, para forçar a contradição, que $(M^{\curlywedge\sigma}, w_{n-1}) \models^p \mathscr{K}_a\psi$.

Caso $(w'_{n-1}, w'_n) \in R^{\curlywedge}_a$, por construção temos que $(h(w'_{n-1}), h(w'_n)) \in R^{\ddagger}_a$. Pelo Lema 4.4.11, $(M^{\ddagger\sigma}, h(w_{n-1})) \models^p \mathscr{K}_a\psi$. Como $\mathscr{K}_a\psi \to \mathscr{K}_a\mathscr{K}_a\psi$ é teorema de **QS4**$\mathscr{D}^m$, obtemos a partir do Lema 3.4.5(2), que $(M^{\ddagger\sigma}, h(w_{n-1})) \models^p \mathscr{K}_a\mathscr{K}_a\psi$. Sabendo que $(h(w'_{n-1}), h(w'_n)) \in R^{\ddagger}_a$, inferimos que $(M^{\ddagger\sigma}, h(w_n)) \models^p \mathscr{K}_a\psi$.

Caso $(w'_{n-1}, w'_n) \in R^{\curlywedge}_{G'}$ para alguma $R^{\curlywedge}_{G'} \subseteq \bigcup_{a \in G} R^{\curlywedge}_G$ tal que $a \in G'$, por construção sabemos que $(h(w'_{n-1}), h(w'_n)) \in R^{\ddagger}_{G'}$. Pelo mesmo raciocínio do parágrafo anterior, temos garantido que $(M^{\ddagger\sigma}, h(w_{n-1})) \models^p \mathscr{K}_a\mathscr{K}_a\psi$. Recordemos que $\mathscr{K}_a\psi \to \mathscr{D}_{G'}\psi$ (para $a \in G'$) é teorema de **QS4**$\mathscr{D}^m$. Combinando os resultados, e por aplicações do Lema 3.4.5(2), deduzimos que $(M^{\ddagger\sigma}, h(w_{n-1})) \models^p \mathscr{D}_{G'}\mathscr{K}_a\psi$. Como temos $(w'_{n-1}, w'_n) \in R^{\curlywedge}_{G'}$, podemos concluir que $(M^{\ddagger\sigma}, h(w_n)) \models^p \mathscr{K}_a\psi$.

Resumindo, sempre que $(M^{\curlywedge\sigma}, w_{n-1}) \models^p \mathscr{K}_a\psi$, teremos $(M^{\curlywedge\sigma}, w_n) \models^p \mathscr{K}_a\psi$, independentemente de $(w'_{n-1}, w'_n) \in R^{\curlywedge}_a$ ou de $(w'_{n-1}, w'_n) \in R^{\curlywedge}_{G'}$ (para alguma G' tal que $a \in G'$). Como a sequência inteira eventualmente alcança o ponto em que $(M^{\curlywedge\sigma}, w_k) \not\models^p \mathscr{K}_a\psi$, somos obrigados a aceitar que, nessas condições, $(M^{\curlywedge\sigma}, w_j) \models^p \mathscr{K}_a\psi$.

□

Finalmente, a terceira variação do Lema 4.4.12, que permitirá depois a completude do sistema **QS5**$\mathscr{D}^m$.

Lema 4.4.16. *Seja $M^{\ddagger}$ um modelo subcanônico qualquer a partir do modelo canônico $M^{\dagger}$ para* **QS5**$\mathscr{D}^m$*, análogos aos descritos pelas definições 4.4.4 e 4.4.3. Há um modelo epistêmico reflexivo e euclideano, que chamaremos de $M^{\star}$, tal que, para toda $\varphi \in \mathscr{L}^{m+}_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$:*

$$M^{\star} \models \varphi \quad sse \quad M^{\ddagger} \models^p \varphi$$

Demonstração. Exatamente como na prova do Lema 4.4.12, exceto que cada

$R_i^\star$ deve consistir no *fecho reflexivo euclideano* de $R_i^\curlywedge \cup \bigcup_{i\in G} R_G^\curlywedge$ — o que significa dizer, como já indicamos antes, que cada $R_i^\star$ é também transitiva. (Não é difícil perceber que $R_i^\star$ é precisamente uma relação de equivalência: reflexiva, transitiva e simétrica.)

Novamente, o caso problemático é o mesmo (a volta do passo indutivo envolvendo $\mathscr{K}_i\psi$) e aproveitaremos o esboço de demonstração do Lema 4.4.14 acima (que já exige a reflexividade de $M^\star$), apenas acrescentando, acerca do ponto $w_k \in W^\star$ tal que $(w_j, w_k) \in R_a^\star$ e $(M^{\star\sigma}, w_k) \not\models \psi$, que, além das três possibilidades acima mencionadas, também temos que contemplar (iv) (w_j, w_k) pertence ao *fecho euclideano* de $R_a^\curlywedge \cup \bigcup_{a\in G} R_G^\curlywedge$, ou seja:

(iv) há um ponto $w \in W^\star$ tal que $(w, w_j) \in R_a^\star$ e que $(w, w_k) \in R_a^\star$.

Seja, então, w_i esse ponto arbitrário. Por simplicidade, como na prova do Lema 4.4.15, estaremos supondo que os pares (w_i, w_j) e (w_i, w_k) não estão, eles próprios, no fecho euclideano de $R_a^\curlywedge \cup \bigcup_{a\in G} R_G^\curlywedge$ — ou seja, consideraremos que tanto w_j como w_k são acessíveis a partir de w_i tão somente por $R_a^\curlywedge \cup \bigcup_{a\in G} R_G^\curlywedge$. O caso geral deriva naturalmente.

Sabemos que ou (a) $(w_i, w_k) \in R_a^\curlywedge$, ou (b) $(w_i, w_k) \in \bigcup_{a\in G} R_G^\curlywedge$.

(a) Disso se segue que, por construção de $R_a^\curlywedge$, que $(h(w_i), h(w_k)) \in R_a^\ddagger$. Como, por h.i., dispomos de $(M^{\curlywedge\sigma}, w_k) \not\models^p \psi$, obtemos, pelo Lema 4.4.11, que $(M^{\ddagger\sigma}, h(w_k)) \not\models^p \psi$. Daí, inferimos que $(M^{\ddagger\sigma}, h(w_i)) \not\models^p \mathscr{K}_a\psi$.

(b) Isso acarreta dizer que, para alguma $R_{G'}^\curlywedge \subseteq \bigcup_{a\in G} R_G^\curlywedge$ e tal que $a \in G'$, acontece $(w_i, w_k) \in R_{G'}^\curlywedge$, e, por construção de $R_{G'}^\curlywedge$, $(h(w_i), h(w_k)) \in R_{G'}^\ddagger$. Por h.i., sabemos que $(M^{\curlywedge\sigma}, w_k) \not\models^p \psi$, e, novamente pelo Lema 4.4.11, que $(M^{\ddagger\sigma}, h(w_k)) \not\models^p \psi$. Assim, podemos inferir que $(M^{\ddagger\sigma}, h(w_i)) \not\models^p \mathscr{D}_{G'}\psi$. Como $\neg\mathscr{D}_{G'}\psi \to \neg\mathscr{K}_a\psi$ (para $a \in G'$) é teorema de $\mathbf{QS5}\mathscr{D}^m$, pertence a todo ponto em $W^\ddagger$; obtemos, assim, por aplicações simples do Lema 3.4.5(2), que $(M^{\ddagger\sigma}, h(w_i)) \not\models^p \mathscr{K}_a\psi$.

Agora, consideremos que também: ou (c) $(w_i, w_j) \in R_a^\curlywedge$, ou (d) $(w_i, w_j) \in \bigcup_{a\in G} R_G^\curlywedge$. Por raciocínios análogos aos casos (a) e (b), é fácil mostrar que ou $(h(w_i), h(w_j)) \in R_a^\ddagger$, ou $(h(w_i), h(w_j)) \in R_{G'}^\ddagger$ (para $a \in G'$).

Combinaremos os resultados obtidos até o momento. Por (a) e (b), já sabemos que, em qualquer caso, $(M^{\ddagger\sigma}, h(w_i)) \not\models^p \mathscr{K}_a\psi$, o que equivale a dizer que $(M^{\ddagger\sigma}, h(w_i)) \models^p \neg\mathscr{K}_a\psi$. Como $\neg\mathscr{K}_a\psi \to \mathscr{K}_a\neg\mathscr{K}_a\psi$ é teorema de $\mathbf{QS5}\mathscr{D}^m$, pertence a todo ponto em $W^\ddagger$; seguindo-se daí, por aplicações óbvias do Lema 3.4.5(2), que $(M^{\ddagger\sigma}, h(w_i)) \models^p \mathscr{K}_a\neg\mathscr{K}_a\psi$.

Quer aconteça $(h(w_i), h(w_j)) \in R_a^\ddagger$, quer aconteça $(h(w_i), h(w_j)) \in R_{G'}^\ddagger$ (para $a \in G'$), é fácil ver que podemos sempre deduzir $(M^{\ddagger\sigma}, h(w_j)) \models^p \neg\mathscr{K}_a\psi$. Isso equivale a dizer $(M^{\ddagger\sigma}, h(w_j)) \not\models^p \mathscr{K}_a\psi$, e, pelo Lema 4.4.11, que $(M^{\curlywedge\sigma}, w_j) \not\models^p \mathscr{K}_a\psi$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Finalmente, estamos autorizados a enunciar o próximo teorema.

Teorema 4.4.17 (Completude de $\mathbf{QT}\mathscr{D}^m$, $\mathbf{QS4}\mathscr{D}^m$ e $\mathbf{QS5}\mathscr{D}^m$)**.** *Os sistemas $\mathbf{QT}\mathscr{D}^m$, $\mathbf{QS4}\mathscr{D}^m$ e $\mathbf{QS5}\mathscr{D}^m$ são completos com respeito, respectivamente, à classe $\mathscr{S}^r$ de todas as estruturas reflexivas, à classe $\mathscr{S}^{rt}$ de todas as estruturas reflexivas transitivas, e à classe $\mathscr{S}^{re}$ de todas as estruturas reflexivas euclideanas.*

Ou seja: para $\varphi \in \mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$, em cada um dos três casos discriminados,

$$\models \varphi \quad \Rightarrow \quad \vdash \varphi.$$

Demonstração. Exatamente como no Teorema 4.4.13, fazendo as óbvias alterações em cada caso: para a completude de $\mathbf{QT}\mathscr{D}^m$, considerando o respectivo modelo subcanônico $M^{\ddagger}$ e o Lema 4.4.14, e similarmente, para $\mathbf{QS4}\mathscr{D}^m$ e o Lema 4.4.15, e para $\mathbf{QS5}\mathscr{D}^m$ e o Lema 4.4.16. $\square$

5 QUANTIFICAÇÃO E ANÚNCIO PÚBLICO

Antes de detalharmos nossos sistemas formais para *LAPQ*, dedicaremos este capítulo ao aprofundamento de algumas informações preliminares, além daquelas já fornecidas na introdução. Com isso, esperamos providenciar uma melhor perspectiva da importância de *LAPQ*, bem como de nossa contribuição em particular.

5.1 ALGUMAS INTUIÇÕES ACERCA DE ANÚNCIOS

Como já indicamos antes, a noção por trás de cada operador de anúncio público $[\cdot]$ corresponde, grosso modo, ao conhecido operador modal (estático) $\Box$, como se este contivesse, por assim dizer, uma proposição em seu interior. Seu operador dual $\langle\cdot\rangle$, naturalmente, permite a correspondente analogia com o operador fraco $\Diamond$. Essa comparação, embora pouco rigorosa, se revela bastante útil do ponto de vista intuitivo, facilitando o reconhecimento de numerosas propriedades interessantes e a obtenção de teoremas.

Dizendo mais claramente, de maneira similar a como entendemos $\Box\varphi$, da perspectiva semântica, como significando "em *todos os pontos acessíveis*, φ é o caso", é bastante apropriado interpretar uma fórmula $[\varphi]\psi$ como expressando algo do tipo "após *todo e qualquer anúncio público* de que φ é o caso, ψ é o caso". É trivial mostrar que, a partir dessa leitura, expressões como $\langle\varphi\rangle\psi$ devem ser semanticamente entendidas como "*há pelo menos um anúncio público* de que φ é o caso, após o qual ψ é o caso".

É importante voltarmos a destacar que uma proposição φ pode simplesmente não ser, digamos, *anunciável*, devido a um fator essencial: φ se trata de uma informação falsa naquele ponto. Dissemos, na introdução, que um pressuposto indispensável em *LAP* é de que o conteúdo do anúncio seja verdadeiro; do contrário, como mostramos naquela ocasião, o ponto do modelo no qual estamos avaliando o enunciado não sobreviverá, digamos assim, à restrição do modelo aos pontos nos quais φ é verdadeira.

Isso acarreta dizer que, quando φ for falsa, a fórmula $[\varphi]\psi$ se torna vacuamente satisfeita, de modo similar a um enunciado modal $\Box\psi$ em um ponto *cego* ou *terminal* de um modelo (como às vezes o jargão modal se refere a mundos que não acessem nenhum outro, nem a si mesmos). Por outro lado, uma expressão da forma $\langle\varphi\rangle\psi$, que pode seguramente ser lida como "após um anúncio público *realizável* de que φ é o caso, ψ é o caso", quando verdadeira, garante não apenas que há uma restrição do modelo na qual ψ é verdadeira naquele ponto, como também que φ é verdadeira no mesmo ponto *do modelo inicial*. A analogia óbvia é com uma fórmula modal $\Diamond\psi$, a qual indica explicitamente, quando verdadeira, a existência, no modelo, de um ponto acessível no qual ψ seja o caso — ou seja, de que deve haver pelo menos um ponto (mundo, cenário) no qual ψ acontece.

Para ilustrar o interesse por modelar formalmente anúncios públicos, descreveremos uma situação menos trivial do que aquela fornecida na introdução, e que consiste em uma ligeira variação de um dos *puzzles* preferidos pelos que investigam lógica epistêmica.

Exemplo 5.1.1 (Crianças sujas). *Três irmãos a, b e c estão distraidamente brincando no quintal quando seu pai os chama para o interior de casa. Após entrarem, dois deles, digamos a e b, estão com as testas sujas de lama, mas não sabem disso. Tampouco c sabe que sua própria testa está limpa. O pai dera antes instruções explícitas para que não se sujassem durante a brincadeira. Obviamente, cada criança conhece o estado em que se encontram as testas das outras duas, mas não a sua própria; porém, a despeito de serem extremamente inteligentes e honestas, devido à proverbial rivalidade entre irmãos, ninguém avisa aos demais sobre a lama em suas testas antes da inspeção paterna.*

Ao deparar-se com esse cenário, o pai resolve divertir-se com a situação: "ora, ora, vejo que pelo menos um de vocês está com a testa enlameada... deem um passo à frente aqueles que souberem como estão suas próprias testas!" Os irmãos sabem que seu pai é um homem razoável e nunca agressivo; por isso, estão mais do que dispostos a admitirem sua própria transgressão e suportarem o habitual discurso reprovador. Entretanto, nenhum tem certeza suficiente para dar o passo à frente. Ainda bem humorado, o pai repete o comando, e apenas os dois culpados avançam. Dirige-se, então, ao terceiro filho que ainda estava em dúvida, e repete: "Avance agora somente se também tiver certeza de como está sua testa!", e finalmente a criança c dá um passo à frente.

Talvez o principal atrativo dessa curta história se deva ao modo como ela exemplifica de que maneira a percepção individual da ignorância coletiva acerca de uma certa informação pode conduzir a um conhecimento efetivo (não trivial) acerca da mesma. É claro que algum *background* apropriado precisa estar garantido de antemão. Contudo, deixaremos esses detalhes de lado, uma vez que nosso interesse aqui diz respeito apenas à representação formal da dinâmica de informações envolvida.

Uma contemplação cuidadosa de nosso exemplo revelará que as reações das crianças se baseiam em uma curta série de conclusões estritamente lógicas a partir das reações do grupo após cada intervenção do pai. De fato, pode ser formalmente demonstrado que, dadas as mesmas circunstâncias e pressupostos, para qualquer número finito de crianças, e para uma quantidade k de enlameados entre elas, aquelas que estiverem sujas deduzirão seu *status* individual após o $k-1$-ésimo comando do pai para que se adiantem (FAGIN et al., 1995, p. 25 a 31). (Obviamente, estamos aqui lidando com idealizações formais, e desconsiderando, portanto, as limitações do raciocínio humano em se tratando de uma quantidade muito numerosa de variáveis sob consideração.)

Pois bem, examinando o exemplo 5.1.1 acima, não é complicado reconstituir, do ponto de vista intuitivo, a dinâmica de informações momento a momento. Ao retornarem do quintal, é claro que cada criança sabe que pelo menos uma delas tem a testa suja, antes que seu pai as informe disso. Essa situação é assegurada sempre que $k > 1$ (ou seja, haja mais de um enlameado). Entretanto, apesar das aparências, esse conhecimento prévio não torna inócuo o primeiro anúncio do pai, como veremos mais adiante.

Uma vez que cada criança desconhece o estado em que se encontra a própria testa, admite ambas as possibilidades (limpa ou suja). Com a revelação paterna de que há no mínimo um culpado, se qualquer dos agentes estivesse vendo as outras duas testas limpas, naturalmente concluiria, por silogismo disjuntivo, que a sua própria estava suja, e teria reagido à primeira convocação do pai, adiantando-se. Como ninguém o fez, deve haver mais de um com a testa suja, e todas as crianças aprendem isso *a partir da ignorância coletivamente exibida* antes, a qual, para todos os efeitos, funcionou exatamente como mais um anúncio público, além do anúncio, propriamente dito, feito pelo pai.

Ora, cada uma das crianças sujas agora conhece sua própria situação; visto que, sabendo que há pelo menos dois culpados, e enxergando apenas um companheiro com a testa suja (lembremo-nos de que c está limpo), tanto a como b concluem que suas próprias testas devem estar enlameadas. Ao ouvirem a segunda convocação paterna, finalmente todas as crianças sujas se adiantam.

Ao ouvir a segunda chamada, o agente c não avançou imediatamente porque, vendo as testas de a e b sujas, não tinha como saber de antemão se a sua própria estava limpa ou não. Contudo, se sua testa estivesse suja, a e b continuariam sem reagir ao segundo chamado paterno, pelo mesmo exato motivo que levou c a continuar em dúvida. Assim, a constatação de que a e b agora sabem quais seus respectivos estados individuais, funcionando como um novo anúncio público, faz com que finalmente a dúvida de c se dissipe, e ele possa também avançar por ocasião da última chamada.

O papel essencial desempenhado pelo primeiro anúncio paterno consiste em assegurar *o conhecimento comum* de que há pelo menos uma criança suja. Dizemos que há conhecimento comum em um grupo de agentes, acerca de uma proposição φ, se e somente se não apenas todos os agentes sabem que φ é o caso, mas também todos sabem que todos sabem disso, e assim por diante. Trata-se, portanto, de uma definição infinitária, embora tratável axiomaticamente no nível proposicional.[1]

Não é difícil perceber que, se aquele primeiro anúncio público (de que há pelo menos uma criança suja) não tivesse ocorrido, ocasionando conhecimento comum acerca daquela informação, nenhuma daquelas constatações seguintes de ignorância coletiva, por si só, teria levado ao desfecho desejado (a autoidentificação das crianças sujas).

Para mostrar um formalismo modelando essa dinâmica de informações, simbolizemos por S_a a sentença "a testa de a está suja", e assim por diante. Também, usaremos a notação $\mathcal{K}_a S_b$ para significar "a sabe que a testa de b está suja", etc. No presente cenário, a representação do pai não é necessária no grupo de agentes, e cada anúncio público de que φ é o caso está simbolizado por $[\varphi]$. Em nosso exemplo, como já dissemos acima, contam claramente como anúncios cada evidência *pública* de ignorância ou conhecimento de algum dos irmãos.

Dessa maneira, conseguimos representar as mudanças epistêmicas no exemplo 5.1.1 pelo modelo pontuado na Figura 8, iniciando com um típico modelo epistêmico e efetuando consecutivas restrições a partir do mesmo. Cada ponto está representado pela lista das três informações relevantes em cada caso (se cada criança está suja ou não), e o ponto duplamente sublinhado descreve a situação real. Como habitual, as relações de acessibilidade de cada agente estarão indicadas por setas legendadas. Além disso, para simplificar a visualização dos modelos, as setas indicando acessibilidade reflexiva por parte de cada agente estarão subentendidas em cada ponto. Com esse detalhe, o modelo fornecido é claramente do tipo *S5* — ou seja, reflexivo, transitivo e simétrico.

Os modelos exibidos devem ser facilmente inteligíveis quando comparados à narrativa no exemplo 5.1.1. Não nos estenderemos acerca dos numerosos detalhes e relações ali representados. Apenas chamaremos a atenção para os três anúncios públicos relevantes e seus efeitos.

O modelo inicial representa a ignorância de cada agente, não apenas a respeito da condição de sua própria testa, mas também a respeito do *estado epistêmico* dos demais irmãos acerca de suas próprias condições. Com o anúncio $S_a \vee S_b \vee S_c$ (de que há pelo menos um enlameado), eliminamos do primeiro modelo aquela possibilidade epistêmica de que nenhum agente estivesse sujo (o ponto $\neg S_a, \neg S_b, \neg S_c$); ou seja, ninguém mais considera que um dos agentes admita essa possibilidade.

Com a constatação de que, mesmo assim, ninguém ainda sabe de sua

[1] Ver Meyer e van der Hoek (2004, cap. 2) ou van Ditmarsch et al. (2007, cap. 2).

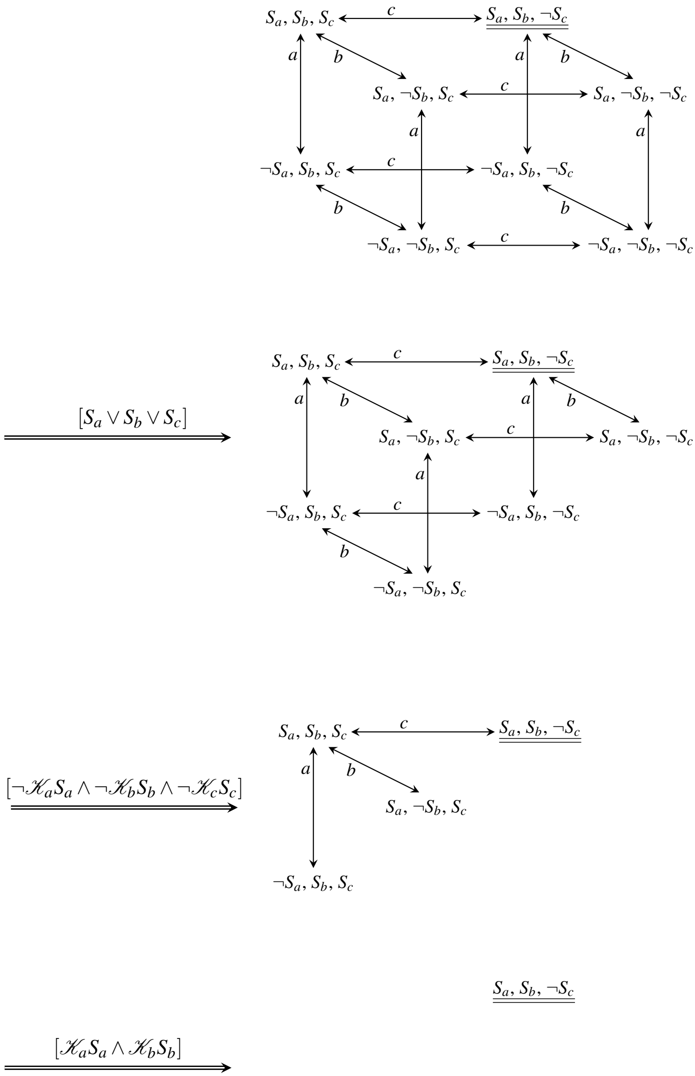

Figura 8 – Dinâmica da informação no exemplo 5.1.1.

própria condição, ou seja a constatação de que $\neg\mathcal{K}_aS_a \wedge \neg\mathcal{K}_bS_b \wedge \neg\mathcal{K}_cS_c$, somos obrigados a eliminar também os pontos nos quais qualquer dos agentes saiba se está ou não sujo. O que faz com que, no ponto $S_a, S_b, \neg S_c$ designado, os agentes a e b aprendam automaticamente qual sua situação, embora c continue sem distinguir entre essa situação em que seus irmãos sabem o que se passa e aquela outra (S_a, S_b, S_c) na qual todos continuam ignorantes.

A evidência de que $\mathcal{K}_aS_a \wedge \mathcal{K}_bS_b$ é o caso finalmente elimina essa indecisão de c, apagando os pontos nos quais a e b seriam ignorantes, e resultando no ponto designado, no qual, pela relação de acessibilidade reflexiva, todos os agentes sabem exatamente o que se passa.

Embora a sintaxe para *LAPQ* ainda não tenha sido rigorosamente definida, é possível formalizar os vários anúncios e seus efeitos, com base nas indicações gerais de notação já fornecidas. Seguem, apenas para efeito ilustrativo, alguns enunciados verdadeiros no ponto designado do *primeiro* modelo no alto da Figura 8.

(1) $[S_a \vee S_b \vee S_c]\neg\mathcal{K}_aS_a \wedge \neg\mathcal{K}_bS_b \wedge \neg\mathcal{K}_cS_c$

(2) $[S_a \vee S_b \vee S_c][\neg\mathcal{K}_aS_a \wedge \neg\mathcal{K}_bS_b \wedge \neg\mathcal{K}_cS_c]\mathcal{K}_aS_a \wedge \mathcal{K}_bS_b$

(3) $[S_a \vee S_b \vee S_c][\neg\mathcal{K}_aS_a \wedge \neg\mathcal{K}_bS_b \wedge \neg\mathcal{K}_cS_c]\neg\mathcal{K}_cS_c \wedge \neg\mathcal{K}_c\neg S_c$

(4) $[S_a \vee S_b \vee S_c][\neg\mathcal{K}_aS_a \wedge \neg\mathcal{K}_bS_b \wedge \neg\mathcal{K}_cS_c][\mathcal{K}_aS_a \wedge \mathcal{K}_bS_b]\mathcal{K}_c\neg S_c$

Com as intuições fornecidas nesta seção, podemos nos ocupar agora com o tópico que mais nos interessa neste trabalho.

5.2 O QUE ESPERAR DE *LAPQ*?

Por que nos preocuparmos com a combinação de um aparato de primeira ordem com *LAP*? Longe de consistir em uma mera curiosidade formal ou simples catalogação de sistemas, a motivação é filosoficamente bastante natural, e atende a uma clara necessidade, como veremos.

Convidamos o leitor a examinar o exemplo 5.2.1, no qual é possível anteciparmos a importância de uma combinação apropriada de anúncios públicos e cálculo de primeira ordem no tratamento de mudanças epistêmicas envolvendo relações ou propriedades individuais.

Exemplo 5.2.1 (A identidade do Sr. Hyde)**.** *No famoso romance gótico do século XIX "O estranho caso do Dr. Jekyll e do Sr. Hyde" (Robert Louis Stevenson, 1886), o respeitado médico Henry Jekyll emprega uma misteriosa droga para drasticamente alterar sua aparência física e cancelar suas inibições morais, tornando-se assim o perverso Edward Hyde. O que parecia a* *princípio uma experiência agradável e libertadora, dá terrivelmente errado quando Hyde assassina Sir Danvers Carew. A trama se desenrola até o ponto em que Gabriel Utterson, amigo de Jekyll, investiga a autoria do crime, bem como o paradeiro do assassino Hyde, sem suspeitar de que o criminoso e seu estimado amigo Jekyll são de fato o mesmo indivíduo. O clímax acontece quando a ignorância de Utterson é desfeita.*

Consideremos o fato de que Utterson sabe que Hyde assassinou Carew, e, claro, o fato de que ele não sabe que Jekyll é Hyde. Naturalmente, Utterson não sabe que Jekyll assassinou Carew. Não deve ser difícil perceber que uma simples constatação (digamos, um anúncio público) de que Jekyll e Hyde são (numericamente) idênticos — isto é, são o mesmo indivíduo, apesar das aparências — certamente levaria Utterson a saber que Jekyll assassinou Carew.

Para representarmos adequadamente essa mudança epistêmica em Utterson, uma linguagem (apenas) proposicional não é suficiente, e precisamos recorrer a linguagens de primeira ordem, capazes de expressar formalmente propriedades e relações envolvendo indivíduos. Pelo menos duas estratégias se apresentam: o emprego de termos individuais flexíveis (cuja denotação possa variar ao longo dos pontos de um modelo) ou um tratamento indireto via equivalência de propriedades individuais.

Na primeira alternativa, podemos fazer com que o termo "Hyde" no contexto modal — por exemplo, em uma atitude epistêmica de Utterson — possa denotar um indivíduo distinto de "Jekyll", embora de fato os dois termos denotem o mesmo indivíduo no mundo efetivo. Além disso, como a princípio Utterson está (implicitamente) convicto de que Jekyll e Hyde são indivíduos distintos, sua confusão faz, por vezes, o termo "Hyde" em suas atitudes epistêmicas referir-se a um indivíduo possível *não-atual*, distinto de Jekyll e distinto de todas as pessoas que não mataram Carew. Por isso, para Utterson, em pelo menos uma de suas possibilidades epistêmicas, há no mínimo *um indivíduo a mais* do que na possibilidade que corresponde à descrição efetiva do mundo (aquele objeto denotado por "Hyde" mas distinto do denotado por "Jekyll"). Consequentemente, também por esse motivo, é bastante desejável que nossa semântica seja capaz de trabalhar com domínios variáveis ao longo dos pontos de um mesmo modelo.[2]

Obviamente, nada disso pode ser satisfatoriamente tratado em um nível puramente proposicional, justificando assim a preocupação com o emprego de linguagens de primeira ordem no tratamento daquelas mudanças

[2]Para todos os efeitos, estamos transferindo a confusão perceptiva de Utterson — não reconhecer, em Hyde, seu amigo Jekyll — para o nível puramente linguístico (denotativo). Assim, evitamos desviar de nosso interesse principal para discutir tópicos que, embora interessantes, são de natureza mais epistemológica.

epistêmicas que dependam especificamente da consideração de propriedades ou relações de indivíduos, bem como de denotações flexíveis.

A despeito de linguagens formais com termos (por exemplo, constantes individuais) flexíveis serem visualmente mais simples ou intuitivas, sua combinação com símbolos de identidade (em particular, quando representando identidades contingentes) requer estratégias bastante complicadas na demonstração de completude para sistemas mais fracos do que $\mathbf{QS5}^m$, razão pela qual aquelas linguagens foram preteridas neste trabalho.

Nosso interesse se limita a fornecer (e explorar) linguagens minimamente interessantes que sirvam de base para suas respectivas extensões dinâmicas e que, ao mesmo tempo, sejam capazes de lidar com a ignorância epistêmica acerca de identidades contingentes *na linguagem natural*, como no caso de Utterson no exemplo 5.2.1, ainda que por meio de expressões formais que dispensem o símbolo de identidade. Uma vez garantido o sucesso neste empreendimento, esperamos que tratamentos alternativos (e possivelmente mais sofisticados) possam se beneficiar de nossos resultados.

Assim, como vimos nos capítulos precedentes, o símbolo de identidade nas duas linguagens epistêmicas (estáticas) $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$ e $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$ está reservado para a relação de identidade necessária (Teorema 3.3.5). Mostraremos, agora, de maneira intuitiva, como essas linguagens podem satisfatoriamente representar a ignorância de Utterson.

Na Figura 9, vemos uma representação razoavelmente aproximada do cenário descrito no exemplo 5.2.1, com diagramas baseados na semântica dos capítulos anteriores. Os símbolos de predicados monádicos C, H, J correspondem grosseiramente às respectivas expressões “ser Carew”, “ser Hyde” e “ser Jekyll”, e denotam, em cada caso, conjuntos unitários cuja extensão pode variar de um ponto a outro do modelo. Além disso, $A(x,y)$ está sendo usada para a expressão “x assassinou y”, $\mathscr{K}_a A(x,y)$ para “Utterson sabe que x assassinou y”, e assim por diante.

Enquanto no ponto w_1 as extensões de H e J não coincidem, por outro lado, H e J são coextensivas no ponto designado w_2. Os domínios de quantificação dos respectivos pontos são indicados por $Q(w_1)$ e $Q(w_2)$, e o agente epistêmico Utterson, representado pelo índice subscrito a, foi incluído em ambos os domínios por conveniência. Para completar o quadro, o indivíduo Henry Jekyll está representado no domínio como o objeto b, Danvers Carew como c, e um outro indivíduo qualquer como d.

As fórmulas no interior de cada retângulo indicam fórmulas verdadeiras naquele ponto. A constatação de que Jekyll e Hyde são o mesmo indivíduo está representada formalmente de maneira indireta, por meio do anúncio de que as duas propriedades relevantes (“ser Jekyll” e “ser Hyde”) se equivalem, em razão de cujo anúncio efetuamos a consequente restrição no modelo.

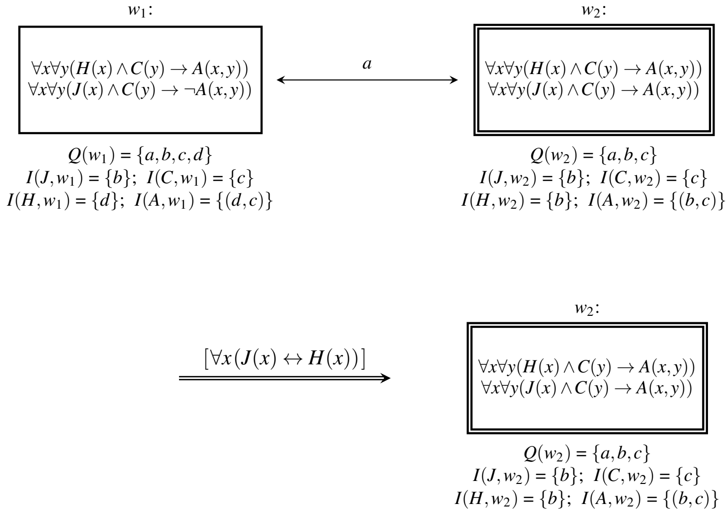

Figura 9 – Efeito de anúncio público no exemplo 5.2.1

Finalmente, uma verificação cuidadosa, que deixaremos para o leitor, mostraria com segurança que as fórmulas são verdadeiras nos respectivos pontos do modelo em que estão indicadas, de acordo com a interpretação explicitada logo abaixo de cada retângulo para aquele ponto.

Embora não tenhamos ainda apresentado de maneira rigorosa a sintaxe e a semântica para anúncios públicos, apenas para efeito de ilustração seguem algumas fórmulas verdadeiras no ponto w_2 do modelo inicial, além daquelas já listadas no diagrama, com suas respectivas versões aproximadas em linguagem natural.[3]

(5) $\neg \mathscr{K}_a \forall x(J(x) \leftrightarrow H(x))$

Utterson não sabe que Jekyll é Hyde.

(6) $\mathscr{K}_a \forall x \forall y(H(x) \wedge C(y) \to A(x,y))$

Utterson sabe que Hyde assassinou Carew.

[3]Como escolhemos enunciar somente fórmulas fechadas, por simplicidade, dispensamos a especificação das devidas atribuições para variáveis.

(7) $\neg\mathscr{K}_a\forall x\forall y(J(x)\wedge C(y)\rightarrow A(x,y))$

Utterson não sabe que Jekyll assassinou Carew.

(8) $\neg\exists x(H(x)\wedge\neg J(x))\wedge\hat{\mathscr{K}}_a\exists x(H(x)\wedge\neg J(x))$

Embora não exista alguém que seja Hyde e não seja Jekyll, Utterson admite essa possibilidade.

(9) $[\forall x(J(x)\leftrightarrow H(x))]\mathscr{K}_a\neg\exists x(H(x)\wedge\neg J(x))$

Após a constatação de que Jekyll é Hyde, Utterson sabe que Hyde não é outro senão Jekyll.

(10) $[\forall x(J(x)\leftrightarrow H(x))]\mathscr{K}_a\forall x(J(x)\leftrightarrow H(x))$

Após a constatação de que Jekyll é Hyde, Utterson sabe que Jekyll é Hyde.

(11) $[\forall x(J(x)\leftrightarrow H(x))]\mathscr{K}_a\forall x\forall y(J(x)\wedge C(y)\rightarrow A(x,y))$

Após a constatação de que Jekyll é Hyde, Utterson sabe que Jekyll assassinou Carew.

(12) $\neg[\forall x(J(x)\leftrightarrow H(x))]\neg\mathscr{K}_a\forall x(J(x)\leftrightarrow H(x))$

Não acontece que, após a constatação de que Jekyll é Hyde, Utterson continue sem saber disso.

Se a utilidade da combinação de linguagens de primeira ordem com anúncios públicos é aparentemente tão clara, poderíamos nos perguntar por que quase não há literatura a respeito (exceto pelos dois trabalhos citados na introdução, sobre os quais voltaremos a comentar daqui a pouco). A esse respeito, é provável que mais de uma justificativa possa ser apresentada.

Talvez isso se deva ao caráter relativamente novo de *LAP*, ou mais provavelmente ao fato de que, assim como nas lógicas modais estáticas, suas versões proposicionais ainda apresentem importantes problemas em aberto ou permitam possibilidades investigativas muito promissoras. Nesse sentido, encontramos, por exemplo, linhas de pesquisa voltadas para a axiomatização de seu núcleo substitucional (HOLLIDAY et al., 2012), sua combinação com operadores da lógica híbrida (HANSEN, 2011), a generalização para anúncios arbitrários (BALBIANI et al., 2007; FRENCH; DITMARSCH, 2008), uma base proposicional intuicionista (MA, 2011; MA et al., 2014), sua complexidade computacional (LUTZ, 2006), axiomatizações e semânticas não-*standard* (WANG; CAO, 2013), etc.

Além disso, um aspecto de especial importância para teóricos da computação diz respeito à *tratabilidade computacional* de sistemas lógicos, restringindo o interesse dos mesmos preferencialmente a sistemas decidíveis, ou pelo menos, fragmentos decidíveis de sistemas; o que potencialmente inibe o interesse por sistemas formulados em linguagens de primeira ordem (com frequência, indecidíveis).

De todo modo, estender *LAP* proposicional para uma linguagem de primeira ordem não deveria ser visto como um empreendimento trivial. A maior dificuldade talvez esteja na interação entre quantificadores e operadores de anúncios; em particular, na maneira de lidar com os domínios de quantificação e atribuições de variáveis individuais durante o processo de restrição dos modelos. A esse respeito, continuaremos falando na próxima seção.

5.3 AXIOMATIZANDO *LAPQ*

Um procedimento que se tornou padrão e remonta ao trabalho pioneiro de Plaza (2007 [1989]), consiste em mostrar a completude de *LAP* por meio de uma espécie de redução a sua base epistêmica estática. Assim, adicionar um certo conjunto de axiomas para anúncios públicos a uma base axiomática do tipo, digamos, *S5* produziria um sistema dinâmico no qual cada uma de suas fórmulas seria logicamente equivalente a alguma fórmula de *S5* (sem operadores dinâmicos, portanto). Desse modo, é possível demonstrar que o sistema de *LAP* em questão é completo se e somente se sua base estática também o for.

Claro que essa não é a única maneira de mostrar a completude de sistemas em *LAP*, nem qualquer sistema dessa lógica é redutível a sua base estática. Em van Ditmarsch et al. (2007, p. 231 a 235), por exemplo, aprendemos que a versão proposicional de *LAP*, a partir de *S5* com operadores $\mathscr{C}$ de conhecimento comum, embora seja um sistema completo com respeito à semântica *standard*, não é redutível a sua lógica (estática) de base com esses mesmos operadores.

Os esquemas axiomáticos responsáveis por garantir a viabilidade do procedimento de redução estabelecem equivalências lógicas entre fórmulas, de modo que, progressivamente, todos os operadores de anúncio público em uma fórmula tenham seu escopo cada vez mais estreito até abrangerem somente fórmulas atômicas, quando então um dos esquemas garante o desaparecimento daqueles operadores de anúncio.

Os detalhes do procedimento serão devidamente explicados no próximo capítulo; porém, ilustraremos com um caso bastante simples, de modo a permitir a compreensão intuitiva de qual é a dificuldade com esquemas de redução para fórmulas com anúncios e quantificadores. Para reduzirmos, ou mais rigorosamente falando, *encontrarmos a equivalente estática* do seguinte esquema com operadores de anúncio público, em que tanto φ como p são fórmulas quaisquer de nossa linguagem dinâmica, desde que φ não contenha quaisquer operadores de anúncio público e p seja uma fórmula atômica:

(13) $[\varphi]\mathcal{K}_a p$

basta constatarmos que a redução está garantida por aplicações óbvias da substituição de equivalentes mais os dois esquemas de axiomas:

(14) $[\varphi]\mathcal{K}_a\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \mathcal{K}_a[\varphi]\psi)$

(15) $[\varphi]p \leftrightarrow (\varphi \rightarrow p)$

da seguinte maneira:

$$[\varphi]\mathcal{K}_a p \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \rightarrow \mathcal{K}_a[\varphi]p \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \rightarrow \mathcal{K}_a(\varphi \rightarrow p)$$

Quando lidamos com modelos para linguagens de primeira ordem, entretanto, precisamos de um cuidado adicional se queremos trabalhar com aquela estratégia de redução de *LAPQ* ao correspondente caso estático. Ocorre que, para implementarmos a estratégia de progressiva redução do escopo de cada operador de anúncio até conter apenas fórmulas atômicas, em algum momento teremos que mover, por assim dizer, algum quantificador que esteja no referido escopo para fora do anúncio. Esse movimento, porém, em alguns casos, pode alterar drasticamente o *status* das variáveis de fórmulas no interior do operador de anúncio, no que diz respeito a ocorrerem livres ou ligadas.

Dizendo mais claramente, precisamos de uma maneira segundo a qual fórmulas do tipo $[\varphi]\forall x\psi$ possam equivaler logicamente a (algum arranjo de) fórmulas contendo $\forall x[\varphi]\psi$, o que pode ser um problema se φ contiver ocorrências livres da variável x (visto que essas ocorrências se tornariam ligadas com a alteração).

Um problema similar acontece quando queremos que uma fórmula contendo anúncios mas iniciando com quantificadores não permita que ocorrências ligadas de variáveis na fórmula do anúncio se tornem livres ao movermos o quantificador para o escopo do anúncio. (Essa possibilidade também deve ser contemplada, pois o esquema relevante precisa consistir em uma equivalência para que o procedimento de redução esteja garantido, como veremos no próximo capítulo.)

Aparentemente, por analogia aos dois esquemas de redução mostrados acima, um esquema do tipo:

(16) $[\varphi]\forall x\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \forall x[\varphi]\psi)$

talvez cumprisse esse papel. Entretanto, consideremos a seguinte instância do mesmo esquema:

(17) $[P(x)]\forall x\psi \leftrightarrow (P(x) \to \forall x[P(x)]\psi)$

Embora não tenhamos especificado ainda, de modo rigoroso, a semântica para *LAPQ*, não acreditamos ser necessário fornecer um contramodelo detalhado para mostrar que o esquema (17) não é válido. Basta atentarmos para o fato de que a primeira ocorrência de x é livre, e, por isso, pode estar denotando, segundo alguma atribuição σ, um objeto que não pertença ao domínio de quantificação associado àquele ponto do modelo. Como justificamos nas seções 2.3 e 2.4, é desejável que nossa semântica permita falarmos de objetos possíveis não-atuais, os quais portanto podem exibir propriedades como P.

Pois bem, a primeira parte do esquema de maneira alguma garante que todos os indivíduos *atuais* — ou seja, pertencentes ao domínio daquele ponto — exibam aquela propriedade P, como pretende a segunda parte do esquema (17), na qual a última ocorrência de x, mesmo no interior do anúncio, acontece no escopo do quantificador $\forall x$.

Um raciocínio similar deve descartar também a seguinte versão do Esquema de Barcan para operadores de anúncio, a qual, caso fosse válida, permitiria uma redução bastante simples:

(18) $[\varphi]\forall x\psi \leftrightarrow \forall x[\varphi]\psi$

A primeira formulação para *LAPQ*, fornecida brevemente em uma seção do artigo "Mathematics of Public Announcements" (MA, 2011), propõe o supracitado esquema de redução (16) em sua prova de completude (apenas esboçada em linhas gerais). Claro que o esquema, como já explicamos, é intuitivamente inválido.[4]

No artigo "Public Announcements Under Sheaves" (KISHIDA, 2013), finalmente encontramos um desenvolvimento satisfatório e bastante sofisticado para *LAPQ*. O autor combina a semântica de feixes (*sheaf semantics*) com a semântica de vizinhanças (*neighborhood semantics*) para elaborar uma versão bem geral de *LAPQ*, motivada por uma interpretação para o operador de conhecimento $\mathscr{K}$ como significando *conhecimento verificável*, o que também se mostra interessante para enfraquecer a indesejada onisciência lógica por parte dos agentes epistêmicos.

Em que pese o fato de que a opção metodológica pela semântica de vizinhanças certamente seja algo a ser perseguido, por incluir a semântica relacional típica como caso particular, destacamos outras quatro características

[4]Essa invalidade também pode ser demonstrada formalmente, porém exigiria um rigor técnico que só será possível a partir do próximo capítulo.

importantes daquele trabalho, as quais devem fornecer, por constraste, uma melhor perspectiva de nosso próprio tratamento do assunto, possivelmente convencendo o leitor de suas vantagens.

A primeira é de que a combinação de vizinhanças e feixes permite um tratamento poderoso pela sua generalidade, porém muito complicado. Se uma formulação mais simples, e mesmo assim satisfatória, para *LAPQ* for viável, acreditamos que valha a pena ser desenvolvida.

A segunda característica é de que o emprego de feixes compromete aquele tratamento com a tese de *contrapartes individuais*; ou seja, cada indivíduo no domínio do modelo está associado a um único ponto. Intuitivamente, é como se os domínios de cada mundo possível nunca se sobrepusessem, nem mesmo de maneira parcial, e a interseção entre os domínios associados a cada mundo fosse sempre vazia.

Esse tipo de compromisso talvez represente uma fraqueza, visto que nos encontramos aqui em um território filosoficamente polêmico, com argumentos interessantes de ambos os lados, tanto dos que defendem quanto dos que rejeitam a ideia de contrapartes individuais, seja no plano semântico, seja no âmbito metafísico. De todo modo, enquanto a questão não se decide entre os filósofos, pensamos que seria preferível adotar o tratamento mais geral, que consiste na admissão de que o mesmo indivíduo possa pertencer ao domínio de distintos pontos em um modelo. A perspectiva de contrapartes individuais poderia ser vista como um caso particular em relação a anterior, enquanto o inverso certamente não é o caso.[5]

Para satisfazer o leitor metafisicamente mais exigente, podemos nos abster de compromissos com o estatuto ontológico de indivíduos ao longo de vários pontos (ou mundos possíveis), recorrendo ao fato de que, em modelos epistêmicos, estamos explicitamente lidando com *estados epistêmicos* contendo *descrições* possíveis do mundo, e não literalmente com mundos possíveis.

A terceira característica que apontamos no artigo de Kishida é de que seu tratamento de *LAPQ*, por simplicidade, pressupõe apenas *um* agente epistêmico, e o caso multiagente é considerado como uma derivação natural.

Enfim, a quarta e última característica diz respeito a uma restrição peculiar no conteúdo dos anúncios públicos: a de que só podem conter fórmulas fechadas (sentenças). Em outras palavras, as especificações sintáticas para fórmulas do tipo $[\varphi]\psi$ exigem que φ não contenha variáveis livres. A linguagem empregada para desenvolver *LAPQ* acaba sendo, por conseguinte, um caso *restrito* da esperada combinação entre linguagem de primeira ordem e linguagem epistêmica com anúncios públicos.

[5]Mais a respeito do emprego de contrapartes individuais para lidar com identidades contingentes pode ser lido em Hughes e Cresswell (1996, p. 353 a 358).

A vantagem obtida com essa restrição é de fato compensadora, do ponto de vista prático. É possível mostrar, como faremos depois no Corolário 6.2.8, que o Esquema de Barcan é válido sempre que essa restrição seja adotada. Além disso, o axioma de redução escolhido por Kishida também resulta válido (inclusive em nossa semântica), e garante o procedimento geral de redução de *LAPQ* para *LEQ*:

(19) $[\varphi]\exists x\psi \leftrightarrow \exists x[\varphi]\psi$ (para φ sendo fórmula fechada).

Contudo, como o próprio Kishida comenta, anúncios públicos contendo fórmulas abertas também são informativos, e ainda precisamos de uma versão de *LAPQ* sem a restrição para o conteúdo de anúncios.

Com a análise feita neste capítulo, nossa contribuição pode ser melhor avaliada. No próximo capítulo, apresentaremos duas famílias de sistemas corretos e completos para *LAPQ* (oito sistemas ao todo), com características bem distintas daquelas que identificamos no trabalho de Kishida.

6 LÓGICA DO ANÚNCIO PÚBLICO DE PRIMEIRA ORDEM

Tendo examinado alguns dos aspectos mais importantes envolvendo *LAP*, de um ponto de vista discursivo, procederemos neste capítulo a uma exposição técnica e mais formal do assunto, oferecendo axiomatizações completas para *LAPQ*.

Conforme indicamos antes, nossa contribuição pretende estabelecer uma versão menos restrita do que a apresentada em Kishida (2013), para o caso multiagente e sem a condição de anúncios contendo somente sentenças (fórmulas fechadas), além de empregar uma semântica relacional típica, consideravelmente mais simples do que o *framework* adotado por aquele autor, em que pese a extrema sofisticação e as importantes motivações do mesmo. Além disso, estenderemos nossos resultados de modo a incluir uma linguagem epistêmica com operadores de conhecimento distribuído $\mathscr{D}_G$.

6.1 SINTAXE E SEMÂNTICA DE $\mathscr{L}^n_{\mathscr{K}[\cdot]}$

Descreveremos a seguir, uma linguagem epistêmica de primeira ordem com anúncios (ou $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$) para tratar *LAPQ*. Essa linguagem consiste em uma extensão para $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$, mediante o simples acréscimo de operadores para anúncio público à lista de símbolos fornecida na Seção 3.1:

8. operadores modais dinâmicos de anúncio público $[\cdot]$.

Definição 6.1.1 (Fórmulas de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$)**.** *As fórmulas de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$ estão definidas pela seguinte gramática, na notação BNF:*

$\varphi :: \perp \mid P^k(\vec{x}) \mid (x = y) \mid \varphi \to \varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \mid [\varphi]\varphi \mid \forall x\varphi$

Como podemos perceber, a linguagem estendida $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$ se distingue de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$ apenas pela admissão de $[\varphi]\psi$ entre seus esquemas de fórmulas (para φ e ψ fórmulas quaisquer de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$). Todas as demais convenções e definições são preservadas, acrescentando-se apenas o dual do operador (primitivo) de anúncio público:

Definição 6.1.2 (Abreviações de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$)**.** *Adotaremos em $\mathscr{L}^m_{QK[\cdot]}$ as mesmas abreviações definidas em 3.1.2, mais a seguinte cláusula:*

11. $\langle\varphi\rangle\psi =_{def} \neg[\varphi]\neg\psi$.

As intuições por trás de $[\varphi]\psi$ e $\langle\varphi\rangle\psi$ foram discutidas no capítulo anterior, para o qual remetemos o leitor, caso necessário.

De resto, ainda sobre a sintaxe, as noções de variáveis livres e ligadas serão exatamente as mesmas que na Definição 3.1.3, bem como as demais convenções notacionais da Seção 3.1, feitas as óbvias adaptações onde houver referência à linguagem relevante, substituindo-a por $\mathscr{L}^m_{QK[\cdot]}$.

De maneira similar, no nível semântico, estaremos também trabalhando com as mesmas estruturas e modelos epistêmicos da Seção 3.1, em cujas definições e provas, novamente, as referências específicas à linguagem epistêmica relevante devem ser substituídas em cada caso por $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$. Seguiremos acrescentando aqui apenas o que for necessário.

Com as próximas definições, começaremos a perceber com mais clareza as especificidades no comportamento semântico do anúncio público.

Definição 6.1.3 (Atualização de modelo)**.** *Sejam uma fórmula qualquer φ de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$, uma estrutura epistêmica aumentada $S^a = (W, \{R_i\}_{i\in A}, D)$ para $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$, uma atribuição σ e um modelo epistêmico $M = (S^a, Q, I)$ sobre S^a. A* atualização de *M* com respeito a φ e uma atribuição σ *é um modelo $M|_{\varphi^\sigma}$ $= (W^!, \{R_i^!\}_{i\in A}, D^!, Q^!, I^!)$ tal que:*

1. *$W^! = [\![\varphi]\!]^\sigma_M = \{w \in W : (M^\sigma, w) \vDash \varphi\}$;*

2. *$D^! = D$ e, para cada $w \in W^!$, $Q^!(w) = Q(w)$;*

3. *cada atribuição τ sobre $M|_{\varphi^\sigma}$ se comporta exatamente como sua homônima sobre M;*

4. *$R_i^! = R_i \cap (\ [\![\varphi]\!]^\sigma_M \times [\![\varphi]\!]^\sigma_M\ )$;*

5. *Para cada $w \in W^!$, $I^!(P^k, w) = I(P^k, w)$ e $I^!(\bot, w) = I(\bot, w)$.*

Por conveniência, chamaremos $M|_{\varphi^\sigma}$ também de modelo atualizado por φ e σ*; e nos referiremos por $S^a|_{\varphi^\sigma}$ à estrutura aumentada na qual se baseia o modelo atualizado $M|_{\varphi^\sigma}$.*

Chamamos a atenção para o fato de que, embora o conjunto W sofra uma restrição ao atualizarmos o modelo M, levando-nos com frequência a identificarmos outra estrutura subjacente, o domínio D associado à estrutura original não se altera após uma atualização; por isso, uma atribuição de valores às variáveis da linguagem se comporta da mesma maneira em um modelo epistêmico e na sua atualização, apesar desses modelos estarem possivelmente baseados em estruturas distintas. Além disso, a indicação explícita da atribuição σ em $[\![\varphi]\!]^\sigma_M$ nos permite *rastrear*, por assim dizer, a atribuição original σ, ao sermos conduzidos a trabalhar com suas variantes ou mesmo outras atribuições no modelo atualizado.

Definição 6.1.4 (Satisfatibilidade de fórmulas em M)**.** *Seja um modelo epistêmico M. Para uma atribuição σ e um índice $w \in W$ em M, dizemos que M é um modelo para $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$ sse valem as mesmas condições estabelecidas na Definição 3.1.8 mais:*

7. $(M^\sigma, w) \vDash [\varphi]\psi$ *sse,*
para todo (M', w'), $\quad M' = M|_{\varphi^\sigma} \;\;\&\;\; w' = w \quad \Rightarrow \quad (M'^\sigma, w') \vDash \psi.$

Antes de explicar melhor a Definição 6.1.4, precisamos tecer algumas considerações importantes. Uma formulação natural para essa cláusula semântica, pelo menos adaptando a versão *standard* para *LAP* proposicional,[1] deveria ser algo como:

(1) $\qquad (M^\sigma, w) \vDash [\varphi]\psi \quad \text{sse} \quad (M^\sigma, w) \vDash \varphi \;\Rightarrow\; (M|^\sigma_{\varphi^\sigma}, w) \vDash \psi.$

Apesar de sua versão proposicional ser largamente utilizada por sua simplicidade,[2] o problema com essa condição semântica, mesmo no nível proposicional, é sua imprecisão. Quando ocorrer $(M^\sigma, w) \nvDash [\varphi]\psi$, saberemos por definição que $(M^\sigma, w) \vDash \varphi$ e que $(M|^\sigma_{\varphi^\sigma}, w) \nvDash \psi$. Entretanto, a verdade de $[\varphi]\psi$ admite duas possibilidades: (i) a de que acontecem tanto $(M^\sigma, w) \vDash \varphi$ como $(M|^\sigma_{\varphi^\sigma}, w) \vDash \psi$; e (ii) a de que acontece $(M^\sigma, w) \nvDash \varphi$, satisfazendo vacuamente o enunciado condicional.

A imprecisão está justamente na segunda possibilidade, uma vez que $(M^\sigma, w) \nvDash \varphi$ obviamente deixaria a expressão $(M|^\sigma_{\varphi^\sigma}, w) \vDash \psi$ indefinida. A rigor, mesmo que possamos construir um modelo atualizado $M|_{\varphi^\sigma}$, não haveria um ponto $(M|^\sigma_{\varphi^\sigma}, w)$ para ser examinado, a fim de determinarmos a verdade ou falsidade de ψ nesse ponto específico, pois obviamente $w \notin [\![\varphi]\!]^\sigma_M$. Desse modo, sob pena de se tornar uma definição parcial, a condição semântica para estabelecer a verdade de $[\varphi]\psi$ considera informalmente que um enunciado condicional (pelo menos na metalinguagem) é vacuamente satisfeito pela falsidade do seu antecedente, *mesmo que seu consequente não esteja definido* (i.e, não faça sentido).

Essa imprecisão foi observada em van Ditmarsch et al. (2007), onde os autores propõem, ao final da exposição sobre *LAP*, uma formulação alternativa da condição correspondente a (1) para o nível proposicional, envolvendo a ideia de uma relação binária entre estados epistêmicos. Em linhas gerais (e adaptando para o nosso cenário de primeira ordem), diríamos que dois estados epistêmicos (M^σ, w) e (M'^σ, w') pertencem à relação $[\![\varphi]\!]^\sigma$ — ou seja: $(M^\sigma, w)[\![\varphi]\!]^\sigma(M'^\sigma, w')$ —, se e somente se $M'^\sigma = M|_{\varphi^\sigma}$ e $w = w'$.

[1] Usualmente, algo como: $(M, w) \vDash [\varphi]\psi$ sse $(M^\sigma, w) \vDash \varphi \Rightarrow (M|_\varphi, w) \vDash \psi$.

[2] Conferir, por exemplo, van Ditmarsch et al. (2007), van Benthem (2010, 2011), Holliday e Icard III (2010), Holliday et al. (2012), Wang e Cao (2013).

De acordo com essa perspectiva, a condição semântica que nos interessa seria estabelecida assim:

(2) $(M^\sigma, w) \vDash [\varphi]\psi$ sse,
para todo (M'^σ, w'), $(M^\sigma, w)[\![\varphi]\!]^\sigma(M'^\sigma, w') \;\Rightarrow\; (M'^\sigma, w') \vDash \psi$.

Estaria excluída, portanto, a possibilidade de a condição semântica conter um trecho indefinido (sem sentido). Caso ocorra $(M^\sigma, w) \nvDash \varphi$, o domínio de quantificação previsto pela expressão "para todo (M', w')", que obviamente não seria vazio, apenas não conteria nenhum elemento que satisfizesse o antecedente, sem, contudo, ter que admitir um consequente não definido.

Nossa Definição 6.1.4 consiste numa variante de (2), com a vantagem de dispensar a necessidade de postular uma relação entre estados epistêmicos, descrevendo de modo direto a maneira de determinar a satisfatibilidade de uma fórmula com anúncio público.

Como em (2), nossa condição semântica para fórmulas com anúncios públicos requer uma quantificação metalinguística sobre o conjunto de todos os modelos pontuados; porém, isso não deve ser visto como inconveniente ou pouco prático, uma vez que, se houver algum modelo atualizado a partir de M obedecendo àquelas condições, ele será único (isso será mostrado logo mais na Seção 6.2), obtido de maneira efetiva mediante procedimentos bastante precisos, e, para saber se tal modelo existe, basta verificar se $(M^\sigma, w) \vDash \varphi$. Por outro lado, se não houver tal modelo, a condição fica vacuamente satisfeita, dada a falsidade do antecedente, e teremos de todo modo a equivalência desejada para garantir a satisfação de $(M^\sigma, w) \vDash [\varphi]\psi$.

O corolário a seguir deriva naturalmente a partir da definição anterior.

Corolário 6.1.5. *Da Definição 6.1.4, decorrem as mesmas condições previstas no Corolário 3.1.10, mais:*

9. $(M^\sigma, w) \vDash \langle\varphi\rangle\psi$ *sse*
existe um (M', w') *tal que:* $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w$ & $(M'^\sigma, w') \vDash \psi$.

Demonstração. Recordemos que $\langle\varphi\rangle\psi$ é uma abreviação para $\neg[\varphi]\neg\psi$. Suponhamos que $(M^\sigma, w) \vDash \neg[\varphi]\neg\psi$. Pela Definição 6.1.4 (no que esta reproduz a Definição 3.1.8), isso acontece sse $(M^\sigma, w) \nvDash [\varphi]\neg\psi$, o que, por sua vez, equivale a dizer que não acontece que, para todo (M', w'): $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w \Rightarrow (M'^\sigma, w') \vDash \neg\psi$. Este último passo significa dizer que existe algum (M', w'): $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w$ & $(M'^\sigma, w') \nvDash \neg\psi$, e, consequentemente, que existe algum (M', w'): $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w$ & $(M'^\sigma, w') \vDash \psi$. Como empregamos uma cadeia de equivalências, o corolário está demonstrado nas duas direções. $\square$

O seguinte lema será útil em futuras demonstrações.

Lema 6.1.6. *Sejam um modelo epistêmico M, um ponto w em M, e uma atribuição σ arbitrários. Para quaisquer fórmulas φ e ψ em $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$:*

1. $(M^\sigma, w) \vDash \neg[\varphi]\neg\psi$ *sse* $(M^\sigma, w) \vDash \langle\varphi\rangle\psi$
2. $(M^\sigma, w) \vDash \neg\langle\varphi\rangle\neg\psi$ *sse* $(M^\sigma, w) \vDash [\varphi]\psi$
3. $(M^\sigma, w) \vDash [\varphi]\neg\psi$ *sse* $(M^\sigma, w) \vDash \neg\langle\varphi\rangle\psi$
4. $(M^\sigma, w) \vDash \neg[\varphi]\psi$ *sse* $(M^\sigma, w) \vDash \langle\varphi\rangle\neg\psi$

Demonstração. O primeiro item é imediato a partir da definição de $\langle\cdot\rangle$. Mostraremos apenas o segundo item. Os demais empregam estratégias similares. Suponhamos, pois, que $(M^\sigma, w) \vDash [\varphi]\psi$. Por raciocínios proposicionais, isso equivale a dizer que $(M^\sigma, w) \vDash \neg\neg[\varphi]\neg\neg\psi$. Por definição, isso é o mesmo que $(M^\sigma, w) \vDash \neg\langle\varphi\rangle\neg\psi$. □

A maneira como reformulamos a condição de satisfatibilidade para fórmulas com anúncios, por outro lado, acabará complicando consideravelmente numerosas demonstrações. Para ajudar a contornar essa dificuldade, consideremos o seguinte teorema:

Teorema 6.1.7. *Sejam um modelo epistêmico M, um ponto w em M, e uma atribuição σ arbitrários. Para quaisquer fórmulas φ e ψ, bem como qualquer fórmula atômica p em $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$:*

1. $(M^\sigma, w) \vDash \langle\varphi\rangle\psi \Rightarrow (M^\sigma, w) \vDash \varphi$
2. $(M^\sigma, w) \nvDash [\varphi]\psi \Rightarrow (M^\sigma, w) \vDash \varphi$
3. $(M^\sigma, w) \vDash \varphi \Rightarrow (M^\sigma, w) \vDash \langle\varphi\rangle\top$
4. $(M^\sigma, w) \nvDash \varphi \Rightarrow (M^\sigma, w) \vDash [\varphi]\psi$
5. $(M|^\sigma_{\varphi^\sigma}, w) \vDash p \Rightarrow (M^\sigma, w) \vDash p$
6. $(M|^\sigma_{\varphi^\sigma}, w) \nvDash p \Rightarrow (M^\sigma, w) \nvDash p$
7. $(M|^\sigma_{\varphi^\sigma}, w) \vDash p \Leftrightarrow (M^\sigma, w) \vDash p$ *(desde que o ponto $(M|_{\varphi^\sigma}, w)$ exista).*

Demonstração. 1. Suponhamos que (i) $(M^\sigma, w) \vDash \langle\varphi\rangle\psi$, mas (ii) $(M^\sigma, w) \nvDash \varphi$. De (i) concluímos que deve existir um (M', w') tal que: $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w$ & $(M'^\sigma, w') \vDash \psi$. De (ii), deduzimos que, *se houver* algum $M|_{\varphi^\sigma}$, certamente $w \notin W^!$, pois obviamente $w \notin [\![\varphi]\!]^\sigma_M$. Assim, nenhum w' será esse w, o que é um resultado incompatível com (i).

2. Suponhamos que $(M^\sigma, w) \nvDash [\varphi]\psi$. Usando o Lema 6.1.6, isso equivale a dizer que $(M^\sigma, w) \vDash \langle\varphi\rangle\neg\psi$. Pelo item anterior deste teorema, concluímos que $(M^\sigma, w) \vDash \varphi$.

3. Suponhamos que $(M^\sigma, w) \nvDash \langle\varphi\rangle\top$. Pelo Corolário 6.1.5, isso equivale a dizer que não existe um (M', w') tal que: $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w$ & $(M'^\sigma, w') \vDash \top$; ou seja, que para todo (M', w'): $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w \Rightarrow (M'^\sigma, w') \nvDash \top$. Como é impossível que $(M'^\sigma, w') \nvDash \top$, segue-se que, para todo (M', w'), ou $M' \neq M|_{\varphi^\sigma}$ ou $w' \neq w$. Em outras palavras, isso quer dizer que, para todo (M', w'), ocorre $M' = M|_{\varphi^\sigma} \Rightarrow w' \neq w$. Caso não exista nenhum $M|_{\varphi^\sigma}$, isso acarreta $(M^\sigma, w) \nvDash \varphi$. Caso exista algum modelo atualizado desse tipo, pela construção de $M|_{\varphi^\sigma}$, deduzimos que $w \notin [\![\varphi]\!]^\sigma_M$, e, por conseguinte, que $(M^\sigma, w) \nvDash \varphi$.

4. Suponhamos que $(M^\sigma, w) \nvDash \varphi$. Caso exista algum $M|_{\varphi^\sigma}$, de todo modo não haverá, entre os $w' \in W^!$, algum que seja o próprio w, posto que $w \notin [\![\varphi]\!]^\sigma_M$; por conseguinte, a condição semântica para $(M^\sigma, w) \vDash [\varphi]\psi$ ficará vacuamente satisfeita. Caso não exista um $M|_{\varphi^\sigma}$, acontecerá o mesmo, pois nenhum M' coincidirá com $M|_{\varphi^\sigma}$.

5. O valor de fórmulas atômicas em um ponto nunca se altera em uma atualização de modelo para cada ponto que sobreviva, por assim dizer, à atualização (ou seja, que continue pertencendo ao modelo atualizado). Suponhamos que (i) $(M|^\sigma_{\varphi^\sigma}, w) \vDash p$, mas também que (ii) $(M^\sigma, w) \nvDash p$. De (i), sabemos que existe um $M|_{\varphi^\sigma}$ (o qual chamaremos de $M^!$ para simplificar a exposição) e, além disso, que $w \in W^!$ (portanto, $w \in W$). Como p é atômica, deve ter a forma $P(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$. Assim, de $(M^{!\sigma}, w) \vDash P(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$, por definição, temos que $(\sigma(x_{i_1}), \ldots, \sigma(x_{i_k})) \in I^!(P, w)$. Contudo, de (ii), sabemos que $(\sigma(x_{i_1}), \ldots, \sigma(x_{i_k})) \notin I(P, w)$. Como, pela construção de $M|_{\varphi^\sigma}$, para cada $w \in W^!$, $I^! = I$ (e mesmo a atribuição σ é feita sobre D, que coincide com $D^!$), temos desse modo uma contradição.

6. Similar ao anterior.

7. Decorre dos dois últimos itens. □

Finalmente, em $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$, continuam valendo as mesmas convenções da Definição 3.1.9.

6.2 VALIDADES E INVALIDADES IMPORTANTES

Agora, demonstraremos diversas propriedades importantes asseguradas pelas condições semânticas da seção anterior.

Teorema 6.2.1. *Para quaisquer fórmulas φ e ψ, bem como para qualquer fórmula atômica p, as seguintes propriedades semânticas podem ser demons-*

tradas em $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$*:*

1. $\vDash \langle\varphi\rangle\psi \to [\varphi]\psi$ *(anúncios públicos são funcionais)*

2. $\nvDash \langle\varphi\rangle\top$ *(anúncios públicos são parciais)*

3. $\vDash [p]p$ *(anúncios preservam a verdade de fórmulas atômicas)*

Demonstração. 1. Suponhamos, para um modelo pontuado (M,w) arbitrário, que $(M^\sigma,w) \nvDash [\varphi]\psi$. Pela Definição 6.1.4, isso é o mesmo que dizer que não acontece que, para todo (M',w'): $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w \Rightarrow (M'^\sigma,w') \vDash \psi$. Isso equivale a dizer que existe um (M',w') tal que: $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w$ & $(M'^\sigma,w') \nvDash \psi$; ou seja, pelo Corolário 6.1.5, que $(M^\sigma,w) \nvDash \langle\varphi\rangle\psi$.

2. Suponhamos uma fórmula arbitrária φ tal que $(M^\sigma,w) \nvDash \varphi$. Mesmo que exista algum modelo atualizado $M|_{\varphi^\sigma}$, não haveria um ponto $(M|_{\varphi^\sigma},w)$ tal que $(M|_{\varphi^\sigma},w) \vDash \top$ pois obviamente $w \notin [\![\varphi]\!]^\sigma_M$. Em outras palavras, nessa circunstância particular, $(M^\sigma,w) \nvDash \langle\varphi\rangle\top$, pois não poderíamos dizer que *existe* um (M',w') tal que: $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w$ & $(M'^\sigma,w') \vDash \top$ (no mínimo, o segundo conjuntivo é falso).

3. Suponhamos, então, para algum (M^σ,w), que $(M^\sigma,w) \nvDash [P(\vec{x})]P(\vec{x})$. Usando o Lema 6.1.6(2), isso equivale a dizer que $(M^\sigma,w) \vDash \langle P(\vec{x})\rangle\neg P(\vec{x})$. Pelo Teorema 6.1.7(1), isso acarreta dizer que $(M^\sigma,w) \vDash P(\vec{x})$, ou seja, que $(\sigma(x_{i_1}),\dots,\sigma(x_{i_k})) \in I(P,w)$. Como há um (M',w') tal que: $M' = M|_{(P(\vec{x}))^\sigma}$ & $w' = w$ & $(M'^\sigma,w') \nvDash P(\vec{x})$, isso acarreta dizer que $(\sigma(x_{i_1}),\dots,\sigma(x_{i_k})) \notin I^!(P,w)$. Porém, como σ é a mesma em D e $D^!$, como $w = w'$, e como, pela Definição 6.1.3, $I^! = I$, também temos que $(\sigma(x_{i_1}),\dots,\sigma(x_{i_k})) \notin I(P,w)$, o que é absurdo. $\square$

Teorema 6.2.2. *Para quaisquer fórmulas* φ *e* ψ *em* $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$*, os seguintes esquemas são semanticamente equivalentes entre si:*

1. $\langle\varphi\rangle\psi$

2. $\varphi \wedge \langle\varphi\rangle\psi$

3. $\varphi \wedge [\varphi]\psi$

Demonstração. (3 ⇒ 1) Suponhamos, para (M,w) arbitrário, que $(M^\sigma,w) \vDash \varphi \wedge [\varphi]\psi$. Isso quer dizer que (i) $(M^\sigma,w) \vDash \varphi$ e que (ii) $(M^\sigma,w) \vDash [\varphi]\psi$. De (ii), inferimos que, para todo (M',w'): $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w \Rightarrow (M'^\sigma,w') \vDash \psi$. De (i), pelo Teorema 6.1.7(3), existe um modelo atualizado $M|_{\varphi^\sigma}$ e, além disso, obviamente $w \in [\![\varphi]\!]^\sigma_M$. Em conjunção com (ii), inferimos facilmente que $(M|^\sigma_{\varphi^\sigma},w) \vDash \psi$. Ora, como existe um (M',w') tal que $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' =$

w & $(M'^{\sigma}, w') \vDash \psi$; concluímos, aplicando o corolário 6.1.5, que $(M^{\sigma}, w) \vDash \langle\varphi\rangle\psi$.

(1 ⇒ 2) Suponhamos, agora, que $(M^{\sigma}, w) \vDash \langle\varphi\rangle\psi$. Pelo Teorema 6.1.7(1), sabemos que $(M^{\sigma}, w) \vDash \varphi$. Logo, $(M^{\sigma}, w) \vDash \varphi \wedge \langle\varphi\rangle\psi$.

(2 ⇒ 3) Suponhamos, finalmente, que $(M^{\sigma}, w) \vDash \varphi \wedge \langle\varphi\rangle\psi$. Empregando o Teorema 6.2.1(1), é trivial obter $(M^{\sigma}, w) \vDash \varphi \wedge [\varphi]\psi$. □

Teorema 6.2.3. *Para quaisquer fórmulas φ e ψ em $\mathscr{L}^{m}_{\mathscr{K}[\cdot]}$, os seguintes esquemas são semanticamente equivalentes entre si:*

1. $[\varphi]\psi$
2. $\varphi \to [\varphi]\psi$
3. $\varphi \to \langle\varphi\rangle\psi$

Demonstração. (1 ⇒ 2) Suponhamos, para (M, w) arbitrário, que $(M^{\sigma}, w) \vDash [\varphi]\psi$. Por raciocínios proposicionais simples, inferimos $(M^{\sigma}, w) \vDash \varphi \to [\varphi]\psi$.

(2 ⇒ 3) Suponhamos, agora, que $(M^{\sigma}, w) \vDash \varphi \to [\varphi]\psi$. Daí, é fácil perceber, por raciocínios proposicionais, que $(M^{\sigma}, w) \vDash \varphi \to (\varphi \wedge [\varphi]\psi)$; o que equivale a dizer que ou $(M^{\sigma}, w) \nvDash \varphi$ ou $(M^{\sigma}, w) \vDash \varphi \wedge [\varphi]\psi$. Ora, aplicando-se o Teorema 6.2.2, isso é o mesmo que afirmar: ou $(M^{\sigma}, w) \nvDash \varphi$, ou $(M^{\sigma}, w) \vDash \langle\varphi\rangle\psi$. Em outras palavras, temos que $(M^{\sigma}, w) \vDash \varphi \to \langle\varphi\rangle\psi$.

(3 ⇒ 1) Suponhamos, finalmente, por contraposição, que $(M^{\sigma}, w) \nvDash [\varphi]\psi$. Em consequência das condições semânticas na Definição 6.1.4, podemos ver que há um (M', w') tal que $M' = M|_{\varphi^{\sigma}}$ & $w' = w$ & $(M'^{\sigma}, w') \nvDash \psi$. Isso também quer dizer que $(M^{\sigma}, w) \nvDash \langle\varphi\rangle\psi$ — ou seja, que $(M^{\sigma}, w) \vDash \neg\langle\varphi\rangle\psi$. Da suposição inicial, também podemos perceber, empregando o Teorema 6.1.7(2), que $(M^{\sigma}, w) \vDash \varphi$. Ora, de $(M^{\sigma}, w) \vDash \varphi \wedge \neg\langle\varphi\rangle\psi$, é fácil perceber, por raciocínios proposicionais, que $(M^{\sigma}, w) \nvDash \varphi \to \langle\varphi\rangle\psi$. □

O próximo teorema é de extrema importância, e assegura a validade de alguns esquemas usados na próxima seção para axiomatizarmos *LAPQ*.

Teorema 6.2.4. *Sejam, em $\mathscr{L}^{m}_{\mathscr{K}[\cdot]}$, φ, ψ e ξ, fórmulas quaisquer, e p uma fórmula atômica qualquer. De acordo com as condições estabelecidas na Definição 6.1.4, valem os seguintes esquemas:*

1. $\vDash [\varphi]p \leftrightarrow (\varphi \to p)$ *(anúncio e atomicidade)*
2. $\vDash [\varphi](\psi \to \xi) \leftrightarrow ([\varphi]\psi \to [\varphi]\xi)$ *(anúncio e condicional)*
3. $\vDash [\varphi]\mathscr{K}_i\psi \leftrightarrow (\varphi \to \mathscr{K}_i[\varphi]\psi)$ *(anúncio e conhecimento)*
4. $\vDash [\varphi][\psi]\xi \leftrightarrow [(\varphi \wedge [\varphi]\psi)]\xi$ *(composição de anúncios)*

5. $\vDash (x = y) \to [\varphi](x = y)$ *(anúncio e identidade)*

6. $\vDash (x \neq y) \to [\varphi](x \neq y)$ *(anúncio e diferença)*

7. $\vDash \psi \quad \Rightarrow \quad \vDash [\varphi]\psi$ *(necessitação de anúncio)*

Demonstração. 1. Anúncio e atomicidade: (Ida) Suponhamos, para (M, w) e σ arbitrários, que acontecem $(M^\sigma, w) \vDash [\varphi]p$ e $(M^\sigma, w) \vDash \varphi$. Pelo Teorema 6.2.2, inferimos que $(M^\sigma, w) \vDash \langle\varphi\rangle p$, o que equivale a dizer que, para algum (M', w'), acontece que $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w$ & $(M'^\sigma, w') \vDash p$. De $(M'^\sigma, w') \vDash p$, pelo Teorema 6.1.7(5), concluímos que $(M^\sigma, w) \vDash p$.

(Volta) Suponhamos, agora, que $(M^\sigma, w) \nvDash [\varphi]p$. Pelo Teorema 6.1.7(2), sabemos que $(M^\sigma, w) \vDash \varphi$. Da suposição inicial, para algum (M', w'), acontece que $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w$ & $(M'^\sigma, w') \nvDash p$. De $(M'^\sigma, w') \nvDash p$, pelo Teorema 6.1.7(6), sabemos que $(M^\sigma, w) \nvDash p$. Combinando os resultados, $(M^\sigma, w) \nvDash \varphi \to p$, como queríamos mostrar.

2. Anúncio e condicional: (Ida) Suponhamos que $(M^\sigma, w) \nvDash [\varphi]\psi \to [\varphi]\xi$. Isso equivale a dizer que (i) $(M^\sigma, w) \vDash [\varphi]\psi$ e que (ii) $(M^\sigma, w) \nvDash [\varphi]\xi$. De (i), sabemos que, para todo (M', w'), $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w \Rightarrow (M'^\sigma, w') \vDash \psi$. De (ii), sabemos que, para algum (M', w'), acontecem $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w$ & $(M'^\sigma, w') \nvDash \xi$. Naturalmente, pela condição (i), neste modelo atualizado $M|_{\varphi^\sigma}$ (que sabemos existir) também acontece $(M|^\sigma_{\varphi^\sigma}, w') \vDash \psi$. Combinando os dois resultados, obtemos que, para algum (M', w'), acontecem $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w$ & $(M'^\sigma, w') \vDash \psi$ & $(M'^\sigma, w') \nvDash \xi$. Ou seja, para algum (M', w'), acontecem $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w$ & $(M'^\sigma, w') \nvDash \psi \to \xi$; e, finalmente, por raciocínios simples, que $(M^\sigma, w) \nvDash [\varphi](\psi \to \xi)$.

(Volta) Suponhamos que $(M^\sigma, w) \nvDash [\varphi](\psi \to \xi)$. Isso equivale a dizer que, para algum (M', w'), acontecem $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w$ & $(M'^\sigma, w') \nvDash \psi \to \xi$. Como $(M'^\sigma, w') \nvDash \psi \to \xi$ equivale a dizer que $(M'^\sigma, w') \vDash \psi$ e $(M'^\sigma, w') \nvDash \xi$; podemos inferir que, para algum (M', w'), $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w$ & $(M'^\sigma, w') \vDash \psi$ & $(M'^\sigma, w') \nvDash \xi$. Não é difícil perceber que temos (i) $(M^\sigma, w) \vDash \langle\varphi\rangle\psi$ e que (ii) $(M^\sigma, w) \vDash \langle\varphi\rangle\neg\xi$. De (i), usando o Teorema 6.1.7(1), temos $(M^\sigma, w) \vDash [\varphi]\psi$; e de (ii), pelo Lema 6.1.6(4), temos que $(M^\sigma, w) \nvDash [\varphi]\xi$. Combinando os resultados, concluímos que $(M^\sigma, w) \nvDash [\varphi]\psi \to [\varphi]\xi$, como queríamos provar.

3. Anúncio e conhecimento: (Ida) Suponhamos que $(M^\sigma, w) \nvDash \varphi \to \mathscr{K}_i[\varphi]\psi$; ou seja, que (i) $(M^\sigma, w) \vDash \varphi$ e que (ii) $(M^\sigma, w) \nvDash \mathscr{K}_i[\varphi]\psi$. De (ii), inferimos que, para algum $w_j \in W$: $(w, w_j) \in R_i$ & $(M^\sigma, w_j) \nvDash [\varphi]\psi$, e também, pelo Teorema 6.1.7(2), que $(M^\sigma, w_j) \vDash \varphi$. Consequentemente, obtemos que, para algum (M', w'), acontecem $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w_j$ & $(M'^\sigma, w') \nvDash \psi$. Ora, como obviamente tanto w quanto w_j pertencem a $W^!$, pela construção de

$M|_{\varphi^\sigma}$ e $R_i^!$, sabemos que $(w, w_j) \in R_i^!$, e, portanto, que $(M'^\sigma, w) \nvDash \mathcal{K}_i\psi$. Além disso, considerando-se, pelo que acabamos de dizer, que há um (M', w') no qual acontecem $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w$ & $(M'^\sigma, w) \vDash \neg\mathcal{K}_i\psi$; concluímos seguramente que $(M^\sigma, w) \vDash \langle\varphi\rangle\neg\mathcal{K}_i\psi$. Ora, pelo Lema 6.1.6(4), isso é o mesmo que dizer $(M^\sigma, w) \nvDash [\varphi]\mathcal{K}_i\psi$.

(Volta) Suponhamos, agora, que $(M^\sigma, w) \nvDash [\varphi]\mathcal{K}_i\psi$. Usando novamente o Lema 6.1.6(4), isso equivale a dizer que $(M^\sigma, w) \vDash \langle\varphi\rangle\neg\mathcal{K}_i\psi$, e, portanto, que para algum (M', w'), acontecem $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w$ & $(M'^\sigma, w') \nvDash \mathcal{K}_i\psi$. Ora, de $(M'^\sigma, w') \nvDash \mathcal{K}_i\psi$, inferimos que para algum $w_j \in W^!$, acontecem $(w', w_j) \in R_i^!$ & $(M'^\sigma, w_j) \nvDash \psi$. Naturalmente, isso quer dizer que há também um (M', w') tal que $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w_j$ & $(M'^\sigma, w_j) \nvDash \psi$; e, por conseguinte, que $(M^\sigma, w_j) \nvDash [\varphi]\psi$. Como sabemos que $(w, w_j) \in R_i^!$, e, pela construção de $R_i^!$, é fácil observar que $R_i^! \subseteq R_i$, concluímos que $(M^\sigma, w) \nvDash \mathcal{K}_i[\varphi]\psi$. Combinado ao resultado anterior de que $(M^\sigma, w) \vDash \varphi$, obtemos finalmente que $(M^\sigma, w) \nvDash \varphi \to \mathcal{K}_i[\varphi]\psi$, como queríamos provar.

4. Composição de anúncios: Provar a validade do quarto item requer uma estratégia peculiar. Basicamente, mostraremos que, dado um modelo M e uma atribuição σ arbitrários, o modelo atualizado $M|_{(\varphi\wedge[\varphi]\psi)^\sigma}$ (abreviado como $M^\triangle$) coincide com $M|_{\varphi^\sigma|_{\psi^\sigma}}$ (abreviado como $M^\triangledown$). Para tanto, basta mostrarmos que o conjunto $W^\triangle$ de pontos do modelo $M^\triangle$ é exatamente o mesmo que o conjunto $W^\triangledown$ de pontos de $M^\triangledown$.

Uma maneira evidente de fazermos isso é provando que, para todo $w \in W$, $w \in W^\triangle$ sse $w \in W^\triangledown$. Considerando-se que a construção de um modelo atualizado é totalmente definida a partir de um determinado conjunto de pontos no modelo original M, isso mostraria que não há diferença alguma entre os modelos $M^\triangle$ e $M^\triangledown$, apesar das duas estratégias distintas em sua construção a partir de M. Uma vez mostrada essa coincidência, é fácil perceber que a validade do item em questão está garantida.

Sendo assim, suponhamos que $W^\triangle \neq W^\triangledown$. Para isso acontecer, ou (i) $W^\triangle \nsubseteq W^\triangledown$ (há algum $w \in W^\triangle$ tal que $w \notin W^\triangledown$), ou (ii) $W^\triangledown \nsubseteq W^\triangle$ (há algum $w \in W^\triangledown$ tal que $w \notin W^\triangle$). Sem perda de generalidade, consideremos um w_j arbitrário em W satisfazendo essas condições.

(i) $w_j \in W^\triangle$ significa que $w_j \in \{w \in W : (M^\sigma, w) \vDash \varphi \wedge [\varphi]\psi\}$, e, por conseguinte, que $w_j \in \{w \in W : (M^\sigma, w) \vDash \varphi\} \cap \{w \in W : (M^\sigma, w) \vDash [\varphi]\psi\}$; e daí, que tanto $(M^\sigma, w_j) \vDash \varphi$ como $(M^\sigma, w_j) \vDash [\varphi]\psi$.

Deste último conjuntivo, por definição, temos que, para todo (M', w'), $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w_j \Rightarrow (M'^\sigma, w') \vDash \psi$. Em outras palavras, $w_j \in \{w \in W :$ para todo (M', w'), $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w \Rightarrow (M'^\sigma, w') \vDash \psi\}$.

Porém, $w_j \notin W^\triangledown$, por sua vez, significa que $w \notin \{w \in W : (M^\sigma, w) \vDash \varphi$ e para todo (M', w'), $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w \Rightarrow (M'^\sigma, w') \vDash \psi\}$.

Como já sabemos que $w_j \in \{w \in W : (M^\sigma, w) \vDash \varphi\}$, inferimos que

$w_j \notin \{w \in W :$ para todo (M', w'), $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w \Rightarrow (M'^\sigma, w') \vDash \psi\}$, contradizendo o resultado anterior.

(ii) $w_j \in W^\triangledown$ significa que $w_j \in \{w \in W : (M^\sigma, w) \vDash \varphi$ e para todo (M', w'), $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w \Rightarrow (M'^\sigma, w') \vDash \psi\}$; e, portanto, que $w_j \in \{w \in W : (M^\sigma, w) \vDash \varphi\}$ e também que $w_j \in \{w \in W :$ para todo (M', w'), $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w \Rightarrow (M'^\sigma, w') \vDash \psi\}$

Contudo, $w_j \notin W^\triangle$ significa que $w_j \notin \{w \in W : (M^\sigma, w) \vDash \varphi \wedge [\varphi]\psi\}$; em outras palavras, $(M^\sigma, w_j) \nvDash \varphi \wedge [\varphi]\psi$. Assim, sabemos que ou $(M^\sigma, w_j) \nvDash \varphi$ ou $(M^\sigma, w_j) \nvDash [\varphi]\psi$.

Já sabemos que $(M^\sigma, w_j) \vDash \varphi$ (pois $w_j \in \{w \in W : (M^\sigma, w) \vDash \varphi\}$); por isso, resta-nos aceitar que $(M^\sigma, w_j) \nvDash [\varphi]\psi$. Por definição, isso quer dizer que há um (M', w') tal que $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w_j$ & $(M'^\sigma, w') \nvDash \psi$. Em outras palavras, $w_j \notin \{w \in W :$ para todo (M', w'), $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w \Rightarrow (M'^\sigma, w') \vDash \psi\}$, contradizendo resultado anterior.

Por conseguinte, não é possível que $W^\triangle \neq W^\triangledown$, e a validade do esquema fica, desse modo, assegurada.

5. Anúncio e identidade: Suponhamos que $(M^\sigma, w) \vDash (x = y)$. Sem perda de generalidade, consideremos uma fórmula φ arbitrária de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$. Caso $(M^\sigma, w) \nvDash \varphi$, pelo Teorema 6.1.7(4), concluímos $(M^\sigma, w) \vDash [\varphi](x = y)$. Caso $(M^\sigma, w) \vDash \varphi$, pelo item *3* do mesmo teorema, sabemos que $(M^\sigma, w) \vDash \langle\varphi\rangle\top$; e, portanto, que existe algum (M', w') tal que $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w$ & $(M'^\sigma, w') \vDash \top$. Consideremos, então, esse ponto $(M|^\sigma_{\varphi^\sigma}, w)$, o qual sabemos existir. Como, por construção, o conjunto $D^!$ do modelo atualizado é o mesmo que o do modelo original, e a atribuição σ é também a mesma; estamos assegurados de que $(M|^\sigma_{\varphi^\sigma}, w) \vDash (x = y)$, uma vez que o objeto denotado por $\sigma(x)$ é o mesmo que $\sigma(y)$ em M, isso certamente também é o caso em $M|_{\varphi^\sigma}$. Assim, de $(M|^\sigma_{\varphi^\sigma}, w) \vDash (x = y)$, inferimos facilmente que $(M^\sigma, w) \vDash \langle\varphi\rangle(x = y)$, e, pelo Teorema 6.2.1(1), que $(M^\sigma, w) \vDash [\varphi](x = y)$, como queríamos mostrar.

6. Anúncio e diferença: Prova muito similar à anterior, bastando supor $(M^\sigma, w) \vDash (x \neq y)$. Omitida por economia de espaço.

7. Necessitação de anúncio: Suponhamos que ocorra $\vDash \psi$. Isso equivale a dizer que, para qualquer modelo M, e quaisquer ponto w e atribuição σ arbitrárias em M, acontece $(M^\sigma, w) \vDash \psi$. Consideremos uma fórmula φ arbitrária em $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$. Caso $(M^\sigma, w) \nvDash \varphi$, pelo Teorema 6.1.7(4), inferimos que $(M^\sigma, w) \vDash [\varphi]\psi$. Caso $(M^\sigma, w) \vDash \varphi$, pelo item *3* do mesmo teorema, sabemos que $(M^\sigma, w) \vDash \langle\varphi\rangle\top$. Isso equivale a dizer que há algum (M', w') tal que $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w = w'$ & $(M'^\sigma, w') \vDash \top$. Ora, por hipótese, sabemos que $\vDash \psi$; portanto, $(M'^\sigma, w') \vDash \psi$. Por definição, isso acarreta dizer $(M^\sigma, w) \vDash \langle\varphi\rangle\psi$, e, pelo Teorema 6.2.1(1), que $(M^\sigma, w) \vDash [\varphi]\psi$. Como M, w, σ, ψ e φ eram todos arbitrários, $\vDash [\varphi]\psi$. $\square$

Como as axiomatizações mais usuais disponíveis na literatura para *LAP* proposicional empregam outros dois princípios,[3] o seguinte corolário mostra que os referidos princípios continuam válidos em nossa semântica.

Corolário 6.2.5. *Sejam φ, ψ e ξ, fórmulas quaisquer de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$. De acordo com as condições estabelecidas na Definição 6.1.4, valem os seguintes princípios:*

1. $\vDash [\varphi]\neg\psi \leftrightarrow (\varphi \to \neg[\varphi]\psi)$ *(anúncio e negação)*

2. $\vDash [\varphi](\psi \wedge \xi) \leftrightarrow ([\varphi]\psi \wedge [\varphi]\xi)$ *(anúncio e conjunção)*

Demonstração. 1. Anúncio e negação: (Ida) Suponhamos, para (M, w) e σ arbitrários, que (i) $(M^\sigma, w) \vDash [\varphi]\neg\psi$ e (ii) $(M^\sigma, w) \vDash \varphi$. De (i), inferimos que, para todo (M', w'), $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w \Rightarrow (M'^\sigma, w') \vDash \neg\psi$. Ora, de (ii), pelo Teorema 6.1.7(3), sabemos que há um $M|_{\varphi^\sigma}$; além disso, também sabemos que $w \in W^!$ (pois $w \in [\![\varphi]\!]^\sigma_M$). Como $M|_{\varphi^\sigma}$ é único e $w \in [\![\varphi]\!]^\sigma_M$, seja $w' = w$. Dessa maneira, para algum (M', w'), acontecem $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w$ & $(M'^\sigma, w') \vDash \neg\psi$; e, portanto, $(M^\sigma, w) \vDash \langle\varphi\rangle\neg\psi$, que pelo Lema 6.1.6(4) equivale a dizer $(M^\sigma, w) \vDash \neg[\varphi]\psi$.

(Volta) Suponhamos, agora, que $(M^\sigma, w) \nvDash [\varphi]\neg\psi$. Naturalmente, por definição, isso equivale a dizer $(M^\sigma, w) \vDash \langle\varphi\rangle\psi$. Considerando-se o primeiro item, tanto do Teorema 6.1.7, como do Teorema 6.2.1, é fácil obter $(M^\sigma, w) \vDash \varphi \wedge [\varphi]\psi$; o que, por sua vez, por raciocínios proposicionais simples, equivale a dizer que $(M^\sigma, w) \nvDash \varphi \to \neg[\varphi]\psi$.

2. Anúncio e conjunção: Suponhamos que $(M^\sigma, w) \vDash [\varphi](\psi \wedge \xi)$. Por definição, para todo (M', w'), $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w \Rightarrow (M'^\sigma, w') \vDash \psi \wedge \xi$. Ora isso acarreta dizer que $(M'^\sigma, w') \vDash \psi$ e que $(M'^\sigma, w') \vDash \xi$. É fácil ver que, também por definição, disso inferimos que $(M^\sigma, w) \vDash [\varphi]\psi$ e que $(M^\sigma, w) \vDash [\varphi]\xi$; e, finalmente, temos $(M^\sigma, w) \vDash [\varphi]\psi \wedge [\varphi]\xi$. A volta emprega um raciocínio muito similar. $\square$

Estabeleceremos, agora, um lema bastante útil.

Lema 6.2.6. *Sejam φ e ψ fórmulas quaisquer de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$, um ponto w arbitrário em um modelo epistêmico M, e atribuições σ e τ quaisquer. Adicionalmente, suponhamos que uma determinada variável x não ocorre livre em φ. Assim, para $o \in Q(w)$ arbitrário:*

[3] Ver, por exemplo, van Ditmarsch et al. (2007, p.89) ou van Benthem (2011, p. 53).

1. $(M^{\sigma}, w) \vDash \varphi$ *sse* $(M^{\sigma\binom{x}{o}}, w) \vDash \varphi$;

2. $[\![\varphi]\!]^{\sigma}_{M} = [\![\varphi]\!]^{\sigma\binom{x}{o}}_{M}$;

3. $(M|^{\tau}_{\varphi^{\sigma}}, w) \vDash \psi$ *sse* $(M|^{\tau}_{\varphi^{\sigma\binom{x}{o}}}, w) \vDash \psi$.

Demonstração. 1. Suponhamos que $(M^{\sigma}, w) \vDash \varphi$ e seja $\sigma\binom{x_j}{o_j}$, como usual, exatamente como σ exceto, no máximo, para uma certa variável x_j, onde $\sigma\binom{x_j}{o_j}(x_j) = o_j$ (para um certo $o_j \in Q(w)$). Suponhamos, agora, que x_j não ocorre livre em φ. Duas possibilidades se colocam: ou (i) as subfórmulas φ' de φ não contém quaisquer ocorrências de x_j, ou (ii) x_j ocorre apenas em subfórmulas $\forall x_j \varphi'$ de φ. No caso (i), o objeto denotado por σ para x_j é completamente irrelevante, e $(M^{\sigma}, w) \vDash \varphi'$ sempre coincide com $(M^{\sigma\binom{x_j}{o_j}}, w) \vDash \varphi'$.

Para o caso (ii), basta mostrarmos que $(M^{\sigma}, w) \vDash \forall x_j \varphi'$ sempre coincide com $(M^{\sigma\binom{x_j}{o_j}}, w) \vDash \forall x_j \varphi'$. Isso é relativamente fácil de se ver. Recordemos que a primeira condição equivale a dizer que, para todo $o \in Q(w)$, $(M^{\sigma\binom{x_j}{o}}, w) \vDash \varphi'$, e a segunda, por sua vez, equivale a dizer que, para todo $o \in Q(w)$, $(M^{\sigma\binom{x_j}{o_j}\binom{x_j}{o}}, w) \vDash \varphi'$. Ora, as atribuições σ e $\sigma\binom{x_j}{o_j}$ concordam em todas as variáveis, exceto no máximo x_j, e ambas as condições acima acarretam que φ' é satisfeita no ponto w de M para *qualquer* objeto $o \in Q(w)$ que substitua as denotações tanto de $\sigma(x_j)$ como de $\sigma\binom{x_j}{o_j}(x_j)$, justamente o único lugar em que ambas poderiam discordar. Logo, $(M^{\sigma}, w) \vDash \forall x_j \varphi'$ sse $(M^{\sigma\binom{x_j}{o_j}}, w) \vDash \forall x_j \varphi'$.

Como a condição $(M^{\sigma}, w) \vDash \varphi$ é completamente determinada pela satisfatibilidade de suas subfórmulas φ'; ao mostrarmos que, para cada subfórmula φ' de φ, $(M^{\sigma}, w) \vDash \varphi'$ coincide com $(M^{\sigma\binom{x_j}{o_j}}, w) \vDash \varphi'$, naturalmente estamos mostrando que $(M^{\sigma}, w) \vDash \varphi$ também coincide com $(M^{\sigma\binom{x_j}{o_j}}, w) \vDash \varphi$. Como x_j e o_j também eram arbitrários, o item *1* do lema está garantido. (O raciocínio empregado dispensa a volta da demonstração.)

2. Como w era arbitrário no item anterior, este se segue naturalmente a partir da definição para os conjuntos $[\![\varphi]\!]^{\sigma}_{M}$ e $[\![\varphi]\!]^{\sigma\binom{x}{o}}_{M}$.

3. Trivial com base nos itens anteriores, na Definição 6.1.3 e uma vez que se perceba que $M|_{\varphi^{\sigma}}$ e $M|_{\varphi^{\sigma\binom{x}{o}}}$ são exatamente o mesmo modelo. □

Dada a importância do próximo teorema, decidimos mostrar sua validade separadamente dos demais esquemas no Teorema 6.2.4. De fato, ele é *o* *esquema característico* de *LAPQ*, posto que os anteriores são também compartilhados com suas versões proposicionais, e terá um papel fundamental na prova de completude para nossos sistemas, como veremos depois.

Teorema 6.2.7 (Esquema de Barcan para anúncios públicos)**.** *Sejam φ e ψ fórmulas quaisquer em $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$. Em consequência da Definição 6.1.4, vale o seguinte princípio:*

$$\vDash [\varphi]\forall x\psi \leftrightarrow \forall y[\varphi]\psi(x/y) \text{ (onde } y \text{ não ocorre livre em } \varphi\text{, nem } \psi)$$

Demonstração. (Ida) Suponhamos, para (M,w) e σ arbitrários, que acontece $(M^\sigma,w) \nvDash \forall y[\varphi]\psi(x/y)$ (onde y não ocorre livre em φ, nem ψ). Aplicando as definições e equivalências usuais, temos que $(M^\sigma,w) \vDash \exists y\langle\varphi\rangle\neg\psi(x/y)$; ou seja, que para algum $o \in Q(w)$, ocorre $(M^{\sigma\binom{y}{o}},w) \vDash \langle\varphi\rangle\neg\psi(x/y)$. Pelo Corolário 6.1.5, há algum (M',w') tal que $M' = M|_{\varphi^{\sigma\binom{y}{o}}}$ & $w' = w$ & $(M'^{\sigma\binom{y}{o}},w') \vDash \neg\psi(x/y)$. Instanciando para visualizar melhor, isso significa que, para todo $o \in Q(w)$, $(M|^{\sigma\binom{y}{o}}_{\varphi^{\sigma\binom{y}{o}}},w) \vDash \neg\psi(x/y)$.

Ora, pela Definição 6.1.3, sabemos que $Q^!(w) = Q(w)$; por conseguinte, é seguro inferir que $(M|^{\sigma}_{\varphi^{\sigma\binom{y}{o}}},w) \vDash \exists y\neg\psi(x/y)$. Como, por hipótese, φ não contém ocorrências livres de y, aplicando o Lema 6.2.6(3), deduzimos que $(M|^{\sigma}_{\varphi^\sigma},w) \vDash \exists y\neg\psi(x/y)$. Em outras palavras, há algum (M',w') tal que $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w$ & $(M'^\sigma,w') \vDash \exists y\neg\psi(x/y)$; o que, por definição, nos dá $(M^\sigma,w) \vDash \langle\varphi\rangle\exists y\neg\psi(x/y)$; e, finalmente, $(M^\sigma,w) \nvDash [\varphi]\forall y\psi(x/y)$. Pelo Teorema 3.3.3(2), $\forall y\psi(x/y)$ é, nas condições especificadas, simplesmente uma variante alfabética de $\forall x\psi$, sendo razoável inferir que $(M^\sigma,w) \nvDash [\varphi]\forall x\psi$.

(Volta) Suponhamos, agora, que $(M^\sigma,w) \nvDash [\varphi]\forall x\psi$. Pelos raciocínios usuais, isso equivale a dizer que $(M^\sigma,w) \vDash \langle\varphi\rangle\exists x\neg\psi$. Pelo Corolário 6.1.5, temos que, para algum (M',w'), acontecem $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w$ & $(M'^\sigma,w') \vDash \exists x\neg\psi$. Sem perda de generalidade, seja agora uma variável qualquer y sem ocorrências livres em φ, nem em ψ. Ora, é fácil ver, a partir do Teorema 3.3.3(2), que $\exists x\neg\psi$ é logicamente equivalente a $\exists y\neg\psi(x/y)$; e portanto, que $(M'^\sigma,w') \vDash \exists y\neg\psi(x/y)$. Desse modo, para algum $o \in Q^!(w')$, $(M'^{\sigma\binom{y}{o}},w') \vDash \neg\psi(x/y)$. Para simplificar, com as devidas instanciações, obtivemos: para algum $o \in Q^!(w')$, $(M|^{\sigma\binom{y}{o}}_{\varphi^\sigma},w) \vDash \neg\psi(x/y)$.

Pelo Lema 6.2.6(3), isso equivale a dizer que, para algum $o \in Q^!(w')$, $(M|^{\sigma\binom{y}{o}}_{\varphi^{\sigma\binom{y}{o}}},w) \vDash \neg\psi(x/y)$; ou seja, para algum (M',w'), acontecem $M' = M|_{\varphi^{\sigma\binom{y}{o}}}$ & $w' = w$ & $(M'^{\sigma\binom{y}{o}},w') \vDash \neg\psi(x/y)$. Sabemos, pela Definição 6.1.3, que $Q^!(w) = Q(w)$. Dos resultados até aqui garantidos, e aplicando o Corolário 6.1.5, temos que, para algum $o \in Q(w)$, $(M^{\sigma\binom{y}{o}}, w) \vDash \langle\varphi\rangle\neg\psi(x/y)$; e, portanto, $(M^{\sigma}, w) \vDash \exists y\langle\varphi\rangle\neg\psi(x/y)$. Daí, por raciocínios usuais, obtemos $(M^{\sigma}, w) \nvDash \forall y[\varphi]\psi(x/y)$, como queríamos demonstrar. $\square$

Definiremos informalmente como *anúncios públicos fechados* aquelas fórmulas cujos operadores de anúncio público contenham somente fórmulas fechadas (sem ocorrências livres de variáveis). A esse respeito, podemos mostrar o seguinte corolário como caso particular do teorema anterior, salientando apenas que não precisamos mais substituir a variável quantificada por uma variante alfabética para garantir a equivalência.

Corolário 6.2.8 (Esquema de Barcan para anúncios públicos fechados). *Sejam, em $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$, uma fórmula fechada qualquer φ e uma fórmula qualquer ψ. Em decorrência da Definição 6.1.4, vale o seguinte princípio:*

$$\vDash\ [\varphi]\forall x\psi\ \leftrightarrow\ \forall x[\varphi]\psi$$

Demonstração. Trivial a partir do Teorema 6.2.7. $\square$

Para encerrar esta seção, mostraremos um importante teorema garantindo que **RE**, a regra de substituição de equivalentes, demonstrada antes no Teorema 3.3.2, continua válida em *LAPQ*, desde que respeitada uma restrição simples. Antes, porém, precisaremos de uma breve definição.

Definição 6.2.9 (Ocorrência fora de anúncio). *Dizemos para fórmulas quaisquer φ, ψ e ξ de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$, que uma ocorrência de φ se trata de* ocorrência fora de anúncio *sempre que essa ocorrência não for subfórmula de uma ocorrência de ψ tal que $[\psi]\xi$.*

Para garantir a clareza da definição acima, destacamos que uma ocorrência fora de anúncio pode estar no escopo de um operador de anúncio, bem como ela própria conter um anúncio. Assim, são exemplos de ocorrências fora de anúncio a ocorrência de φ em $[\psi]\varphi$, bem como a ocorrência de $[\psi]\xi$ em $[\varphi][\psi]\xi$. Obviamente, nesta última, a ocorrência de φ indicada não é uma ocorrência fora de anúncio.

Na demonstração do próximo lema, por comodidade de referência empregaremos esquemas de axiomas e regras cujas validades já foram demonstradas na Seção 3.4. A rigor, não estaremos derivando teoremas a partir dos ditos axiomas e regras, mas demonstrando uma propriedade semântica, a saber, que a regra de substituição de equivalentes fora de anúncios é preservadora de validade; e para isso, por praticidade, indicaremos os princípios válidos que garantem esse resultado mencionando os nomes pelos quais foram referidos antes no sistema estático inicial.

Lema 6.2.10 (Substituição de equivalentes fora de anúncios)**.** *Sejam, em* $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$, φ, ψ, ξ *e* ζ *fórmulas quaisquer. Pela expressão* $\zeta(\varphi/\psi)$, *entenderemos o resultado de substituirmos algumas (ou todas as) ocorrências de* φ *fora de anúncio, caso haja tais ocorrências, na fórmula* ζ, *por ocorrências de* ψ. *Em decorrência da Definição 6.1.4, temos que:*

$$\vDash \varphi \leftrightarrow \psi \quad \Rightarrow \quad \vDash \zeta \leftrightarrow \zeta(\varphi/\psi)$$

Demonstração. Prova por indução sobre ζ. *Base:* (i) ζ é uma fórmula atômica p. Se φ for diferente de p, o lema fica vacuamente satisfeito. Se φ for a própria p, o resultado se segue obviamente.

Hipótese indutiva: O lema vale para ζ de comprimento $< n$. Nos casos indutivos seguintes, sempre que ζ não contiver ocorrências de φ fora de anúncio, o lema se segue vacuamente. Examinaremos apenas os casos relevantes.

(ii) ζ tem a forma $\zeta' \to \zeta''$. Naturalmente, quaisquer ocorrências assim de φ ocorrerão ou em ζ', ou em ζ'', ou em ambas. Em quaisquer dos casos, por h.i., sabemos que $\zeta' \leftrightarrow \zeta'(\varphi/\psi)$ e que $\zeta'' \leftrightarrow \zeta''(\varphi/\psi)$. Ora, por raciocínios proposicionais — a saber, aplicações de $\vDash ((\alpha \leftrightarrow \beta) \wedge (\gamma \leftrightarrow \delta)) \to ((\alpha \to \gamma) \leftrightarrow (\beta \to \delta))$ —, obtemos facilmente $(\zeta' \to \zeta'') \leftrightarrow (\zeta'(\varphi/\psi) \to \zeta''(\varphi/\psi))$; o que, obviamente, equivale a dizer $(\zeta' \to \zeta'') \leftrightarrow (\zeta' \to \zeta'')(\varphi/\psi)$.

(iii) ζ tem a forma $\forall x\zeta'$. É claro que quaisquer ocorrências de φ serão subfórmulas de ζ'. Assim, da tautologia $\zeta' \to \zeta'$, é natural inferir, baseando-se na h.i., $\zeta' \to \zeta'(\varphi/\psi)$.[4] Vimos na Seção 3.4 que a regra **Gen**$\forall$ preserva essa validade e, na mesma ocasião, que **Distr**$\forall$ também é um princípio válido; a partir dos mesmos, obtemos $\forall x\zeta' \to \forall x\zeta'(\varphi/\psi)$; o que equivale a dizer $\forall x\zeta' \to (\forall x\zeta')(\varphi/\psi)$. Feitas as devidas adaptações, a mesma linha de raciocínio prova $(\forall x\zeta')(\varphi/\psi) \to \forall x\zeta'$, fechando, por assim dizer, a equivalência.

(iv) ζ tem a forma $\mathscr{K}_i\zeta'$. Obviamente, as ocorrências de φ só poderão ocorrer em ζ'. Desse modo, da tautologia $\zeta' \to \zeta'$, inferimos, baseando-se na h.i., $\zeta' \to \zeta'(\varphi/\psi)$. Por aplicações óbvias de **Nec**, **K** e **MP**, cujas validades também foram garantidas na Seção 3.4, vemos que $\mathscr{K}_i\zeta' \to \mathscr{K}_i\zeta'(\varphi/\psi)$, o que é o mesmo que dizer $\mathscr{K}_i\zeta' \to (\mathscr{K}_i\zeta')(\varphi/\psi)$. A mesma estratégia pode ser usada para obter $(\mathscr{K}_i\zeta')(\varphi/\psi) \to \mathscr{K}_i\zeta'$, e daí completar o passo.

(v) ζ tem a forma $[\zeta']\zeta''$. Como estamos lidando somente com ocorrências de φ fora de anúncio, as mesmas só poderão ocorrer em ζ''. Assim, da tautologia $\zeta'' \to \zeta''$, inferimos, baseando-se na h.i., $\zeta'' \to \zeta''(\varphi/\psi)$. Por aplicações dos itens *7* e *2* do Teorema 6.2.4, deduzimos facilmente $[\zeta']\zeta'' \to [\zeta']\zeta''(\varphi/\psi)$; o que equivale a dizer $[\zeta']\zeta'' \to ([\zeta']\zeta'')(\varphi/\psi)$. Como nos

[4] A rigor, a hipótese indutiva nos forneceria aqui uma equivalência.

LP	*(todas as instâncias de tautologias clássicas)*
MP	$\varphi \to \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$
K	$\mathscr{K}_i(\varphi \to \psi) \to (\mathscr{K}_i\varphi \to \mathscr{K}_i\psi)$
Nec	$\varphi \Rightarrow \mathscr{K}_i\varphi$
Atom$[\cdot]$	$[\varphi]p \leftrightarrow (\varphi \to p)$
Distr$[\cdot]$	$[\varphi](\psi \to \xi) \leftrightarrow ([\varphi]\psi \to [\varphi]\xi)$
Conhec$[\cdot]$	$[\varphi]\mathscr{K}_i\psi \leftrightarrow (\varphi \to \mathscr{K}_i[\varphi]\psi)$
Comp$[\cdot]$	$[\varphi][\psi]\xi \leftrightarrow [(\varphi \wedge [\varphi]\psi)]\xi$
Barcan$[\cdot]$	$[\varphi]\forall x\psi \leftrightarrow \forall y[\varphi]\psi(x/\,y)$ (onde y não ocorre livre em φ, ψ)
Nec$[\cdot]$	$\varphi \Rightarrow [\psi]\varphi$
Vac$\forall$	$\forall x\varphi \leftrightarrow \varphi$ (onde x não ocorre livre em φ)
Distr$\forall$	$\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$
Inst$\forall$	$(\forall x\varphi \wedge \mathsf{E}(y)) \to \varphi(x/y))$
$\mathsf{E}\forall$	$\forall x\mathsf{E}(x)$
Gen$\forall$	$\varphi \Rightarrow \forall x\varphi$
Gen$\forall^n$	$\varphi_1 \to \mathscr{K}_i(\varphi_2 \to \ldots \mathscr{K}_i(\varphi_n \to \mathscr{K}_i\psi)\ldots)$ $\Rightarrow \varphi_1 \to \mathscr{K}_i(\varphi_2 \to \ldots \mathscr{K}_i(\varphi_n \to \mathscr{K}_i\forall x\psi)\ldots)$ (onde x não ocorre livre em $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$)
Id	$(x = x)$
Subst	$(x = y) \to (\varphi \to \varphi')$ (onde φ' é como φ exceto por conter y livre em 0 ou mais lugares nos quais φ contém x livre)
NecDif	$(x \neq y) \to \mathscr{K}_i(x \neq y)$

Figura 10 – O sistema $\mathbf{QK}[\cdot]^m$

precedentes, a volta neste caso é similar, e completa, finalmente, o lema. □

6.3 AXIOMATIZAÇÃO E ALGUNS TEOREMAS

Apesar de estarmos trabalhando com uma óbvia extensão de $\mathbf{QK}^m$, repetiremos, por comodidade de referência, a lista de esquemas de axiomas já fornecidos, acrescentando os esquemas específicos de $\mathbf{QK}[\cdot]^m$, como podemos verificar na Figura 10. Nos esquemas apresentados, consideremos φ, ψ e ξ fórmulas quaisquer de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$; bem como p uma fórmula atômica qualquer da mesma linguagem.

Uma observação importante: o Esquema de Barcan, que já mostramos na Seção 3.2 não ser válido em geral ao descrever a interação entre operadores epistêmicos usuais (estáticos) e quantificadores, se mostra *válido* na semântica adotada, quando descreve a interação entre operadores de anúncio público e quantificadores (ver o Teorema 6.2.7 e seu Corolário 6.2.8), pelo menos enquanto considerarmos restrições relacionadas às ocorrências de variáveis. Por essa razão, e sabendo, conforme indicado na Seção 2.3, que esse esquema não deriva dedutivamente de uma lógica modal de primeira ordem que tome como base uma lógica de predicados livre, o mesmo é adotado como postulado primitivo em nossa axiomatização (referido como **Barcan**$[\cdot]$), de modo a assegurar a completude do sistema.

O postulado em questão se torna particularmente interessante quando percebemos que todos os sistemas epistêmicos (estáticos) abordados nesta tese até o momento carecem de uma característica em especial: a interação significativa entre modalidades e quantificadores (cujos exemplos mais célebres são justamente os esquemas de Barcan). Por interação significativa, queremos nos referir a teoremas que expressem algo não derivável da mera justaposição de um sistema modal e um aparato de primeira ordem, com suas respectivas linguagens e axiomatizações.

Essa ausência de interação, longe de ser uma fraqueza peculiar a nossos sistemas, é de fato o efeito colateral de uma axiomatização para *LEQ* que seja válida em quaisquer estruturas epistêmicas, e não apenas naquelas classes de estruturas determinadas por restrições no comportamento de seus domínios de quantificação ao longo dos pontos de seus modelos.[5]

Pois bem, não deixa de ser intrigante o fato de que aqueles mesmos sistemas estáticos, ao serem estendidos para suas correspondentes formulações em *LAPQ*, acabem validando um esquema, o qual, exceto por uma pequena restrição no comportamento de suas variáveis, tem a mesma formulação do Esquema de Barcan. A importância do referido esquema para a completude de $\mathbf{QK}[\cdot]^m$ será melhor compreendida ao longo da próxima seção.

Definição 6.3.1. *A axiomatização contida na Figura 10 define o sistema epistêmico de primeira ordem* $\mathbf{QK}[\cdot]^m$*. Além disso, sejam os esquemas fornecidos na Definição 3.3.1. Mediante o acréscimo dos seguintes esquemas de axiomas a* $\mathbf{QK}[\cdot]^m$*, definimos os correspondentes sistemas:*

1. $\mathbf{QK}[\cdot]^m$ *com* $\mathbf{T} = \mathbf{QT}[\cdot]^m$

[5] Apesar disso, remetemos o leitor ao apêndice A, no qual mostramos que, pelo menos para uma expressiva parcela dos sistemas epistêmicos estudados nesta tese — a saber, aqueles que correspondem a estruturas epistêmicas reflexivas transitivas —, vale o Esquema de Barcan para a modalidade epistêmica usual (estática), desde que aquele esquema seja reescrito em termos dos quantificadores possibilistas relativos Π' e Σ' descritos na Seção 2.3.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{QK}[\cdot]^m \arrow[r] & \mathbf{QT}[\cdot]^m \arrow[r] & \mathbf{QS4}[\cdot]^m \arrow[r] & \mathbf{QS5}[\cdot]^m \\
\mathbf{QK}^m \arrow[r] \arrow[u] & \mathbf{QT}^m \arrow[r] \arrow[u] & \mathbf{QS4}^m \arrow[r] \arrow[u] & \mathbf{QS5}^m \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Figura 11 – Alguns sistemas epistêmicos para *LAPQ*.

2. $\mathbf{QK}[\cdot]^m$ *com* **T** *e* **4** = $\mathbf{QS4}[\cdot]^m$

3. $\mathbf{QK}[\cdot]^m$ *com* **T** *e* **5** = $\mathbf{QS5}[\cdot]^m$.

As extensões descritas na Definição 6.3.1 podem ser melhor visualizadas na Figura 11 em sua relação com os correspondentes sistemas epistêmicos estáticos estudados antes. O diagrama permite conceber também maneiras alternativas de produzir cada extensão — por exemplo, $\mathbf{QT}[\cdot]^m$ a partir de $\mathbf{QT}^m$ acrescentando-se apenas os mesmos esquemas de axiomas envolvendo anúncios públicos e que produzem $\mathbf{QK}[\cdot]^m$ a partir de $\mathbf{QK}^m$. Lembramos novamente que, em se tratando de $\mathbf{QS5}[\cdot]^m$, também se aplicam aqui as mesmas observações feitas a respeito de $\mathbf{Gen}\forall^n$ e **NecDif** na Seção 3.3.

Já vimos, no Lema 6.2.10, que a substituição de fórmulas equivalentes em ocorrências fora de anúncios preserva a validade daquela equivalência. Enunciaremos, agora, a regra derivada $\mathbf{RE}[\cdot]$ em $\mathbf{QK}[\cdot]^m$ que garante sintaticamente essa substituição.

Lema 6.3.2. *Sejam, em $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$, φ, ψ, ξ e ζ fórmulas quaisquer. Pela expressão $\zeta(\varphi/\psi)$, entenderemos o resultado de substituirmos algumas (ou todas as) ocorrências de φ fora de anúncio, caso haja tais ocorrências, na fórmula ζ, por ocorrências de ψ. A seguinte regra pode ser derivada em $\mathbf{QK}[\cdot]^m$:*

$$(\mathbf{RE}[\cdot]) \qquad \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \quad \Rightarrow \quad \vdash \zeta \leftrightarrow \zeta(\varphi/\psi)$$

Demonstração. A derivação de $\mathbf{RE}[\cdot]$ pode ser efetuada por uma indução sobre ζ, de maneira muito similar ao Lema 6.2.10, considerando-se agora que todos os princípios usados na prova daquele lema são teoremas de $\mathbf{QK}[\cdot]^m$. Os detalhes serão omitidos aqui. □

Teorema 6.3.3. *Sejam, em* $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$, φ, ψ *e* ξ *fórmulas quaisquer. Os seguintes esquemas de redução são demonstráveis em* $\mathbf{QK}[\cdot]^m$*:*

(**Neg**$[\cdot]$) $\quad [\varphi]\neg\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \neg[\varphi]\psi)$

(**Conj**$[\cdot]$) $\quad [\varphi](\psi \wedge \xi) \leftrightarrow ([\varphi]\psi \wedge [\varphi]\xi)$

Demonstração. Derivação de **Neg**$[\cdot]$:

1. $[\varphi](\psi \rightarrow \bot) \leftrightarrow [\varphi](\psi \rightarrow \bot)$ – **LP**
2. $[\varphi](\psi \rightarrow \bot) \leftrightarrow ([\varphi]\psi \rightarrow [\varphi]\bot)$ – de 1 por **Distr**$[\cdot]$ e **RE**$[\cdot]$
3. $[\varphi](\psi \rightarrow \bot) \leftrightarrow ([\varphi]\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \bot))$ – de 2 por **Atom**$[\cdot]$ e **RE**$[\cdot]$
4. $[\varphi](\psi \rightarrow \bot) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow ([\varphi]\psi \rightarrow \bot))$ – de 3 por **LP** e **RE**$[\cdot]$
5. $[\varphi]\neg\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \neg[\varphi]\psi)$ – de 4 por definição de $\bot$

Derivação de **Conj**$[\cdot]$:

1. $[\varphi](\psi \wedge \xi) \rightarrow [\varphi]\psi$ – **LP**, **Nec**$[\cdot]$, **Distr**$[\cdot]$ e **MP**
2. $[\varphi](\psi \wedge \xi) \rightarrow [\varphi]\xi$ – **LP**, **Nec**$[\cdot]$, **Distr**$[\cdot]$ e **MP**
3. $[\varphi](\psi \wedge \xi) \rightarrow ([\varphi]\psi \wedge [\varphi]\xi)$ – de 1, 2, **LP** e **MP**
4. $[\varphi]\psi \rightarrow [\varphi](\xi \rightarrow (\psi \wedge \xi))$ – **LP**, **Nec**$[\cdot]$, **Distr**$[\cdot]$ e **MP**
5. $[\varphi]\psi \rightarrow ([\varphi]\xi \rightarrow [\varphi](\psi \wedge \xi))$ – de 4, **Distr**$[\cdot]$, **LP** e **MP**
6. $([\varphi]\psi \wedge [\varphi]\xi) \rightarrow [\varphi](\psi \wedge \xi))$ – de 5, **LP** e **RE**
7. $[\varphi](\psi \wedge \xi) \leftrightarrow ([\varphi]\psi \wedge [\varphi]\xi)$ – de 3, 6, **LP** e **MP**

□

Para ilustrar algumas de suas propriedades sintáticas interessantes, mostraremos mais resultados de $\mathbf{QK}[\cdot]^m$, alguns triviais, outros nem tanto. Naturalmente, esses resultados também são demonstráveis em todas as suas extensões. Além disso, exceto quando envolvam explicitamente fórmulas quantificadas, não são específicos de *LAPQ*, e valem também em sua versão proposicional.

Primeiro, algumas regras derivadas usuais em lógica modal, que facilitarão bastante as demais provas.

Teorema 6.3.4 (Regras derivadas)**.** *Sejam* φ, ψ *e* ξ *fórmulas quaisquer de* $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$*. As seguintes regras de inferência são deriváveis em* $\mathbf{QK}[\cdot]^m$*:*

(**RD1**) $\quad \psi \rightarrow \xi \Rightarrow [\varphi]\psi \rightarrow [\varphi]\xi$

(**RD2**) $\quad \psi \rightarrow \xi \Rightarrow \langle\varphi\rangle\psi \rightarrow \langle\varphi\rangle\xi$

(**RD3**) $\quad \psi \leftrightarrow \xi \Rightarrow [\varphi]\psi \leftrightarrow [\varphi]\xi$

(**RD4**) $\quad \psi \leftrightarrow \xi \Rightarrow \langle\varphi\rangle\psi \leftrightarrow \langle\varphi\rangle\xi$

Demonstração. As provas serão omitidas por serem muito similares às análogas para $\Box$ e $\Diamond$ (em vez de $[\cdot]$ e $\langle\cdot\rangle$) nos sistemas usuais para a lógica modal estática — ver, por exemplo, Hughes e Cresswell (1996, p. 30 a 36). $\Box$

Na próxima lista de esquemas, merece um destaque especial a maneira como ambos os operadores de anúncio público $[\cdot]$ e $\langle\cdot\rangle$ interagem com fórmulas disjuntivas e conjuntivas nos itens *6* e *7*, destoando do comportamento típico dos sistemas modais mais conhecidos. A razão, como pode facilmente ser percebida, consiste principalmente no caráter funcional de *LAPQ*, representado sintaticamente pelo item *4*.

Teorema 6.3.5. *Sejam, em $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$, φ, ψ e ξ fórmulas quaisquer. Os seguintes esquemas são demonstráveis em* $\mathbf{QK}[\cdot]^m$*:*

1. $\vdash [\varphi]\psi \leftrightarrow \neg\langle\varphi\rangle\neg\psi$

2. $\vdash \neg[\varphi]\psi \leftrightarrow \langle\varphi\rangle\neg\psi$

3. $\vdash [\varphi]\neg\psi \leftrightarrow \neg\langle\varphi\rangle\psi$

4. $\vdash \langle\varphi\rangle\psi \rightarrow [\varphi]\psi$

5. $\vdash \langle\varphi\rangle(\psi \vee \xi) \leftrightarrow (\langle\varphi\rangle\psi \vee \langle\varphi\rangle\xi)$

6. $\vdash [\varphi](\psi \vee \xi) \leftrightarrow ([\varphi]\psi \vee [\varphi]\xi)$

7. $\vdash \langle\varphi\rangle(\psi \wedge \xi) \leftrightarrow (\langle\varphi\rangle\psi \wedge \langle\varphi\rangle\xi)$

Demonstração. Seguem as respectivas provas. Os itens *1 – 3* são triviais, a partir de **LP**, **RE**$[\cdot]$ e definição de $\langle\cdot\rangle$; por isso, serão omitidos.

(4) $\vdash \langle\varphi\rangle\psi \rightarrow [\varphi]\psi$

1. $[\varphi]\neg\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \neg[\varphi]\psi)$	– **Neg**$[\cdot]$
2. $\neg[\varphi]\neg\psi \leftrightarrow \neg(\varphi \rightarrow \neg[\varphi]\psi)$	– de 1 por **LP** e **MP**
3. $\langle\varphi\rangle\psi \leftrightarrow \neg(\varphi \rightarrow \neg[\varphi]\psi)$	– de 2 por definição
4. $\langle\varphi\rangle\psi \leftrightarrow (\varphi \wedge [\varphi]\psi)$	– de 3 por **LP** e **RE**$[\cdot]$
5. $\langle\varphi\rangle\psi \rightarrow (\varphi \wedge [\varphi]\psi)$	– de 4 por **LP** e **MP**
6. $\langle\varphi\rangle\psi \rightarrow [\varphi]\psi$	– de 5 por **LP** e **MP**

(5) $\vdash \langle\varphi\rangle(\psi \vee \xi) \leftrightarrow (\langle\varphi\rangle\psi \vee \langle\varphi\rangle\xi)$

A prova relativa ao item *5* é muito similar ao caso estático análogo. Ver, por exemplo, Hughes e Cresswell (1996, p. 34).

(6) $\vdash [\varphi](\psi \vee \xi) \leftrightarrow ([\varphi]\psi \vee [\varphi]\xi)$

1. $[\varphi]\psi \rightarrow [\varphi](\psi \vee \xi)$	– **LP** e **RD1**

2. $[\varphi]\xi \to [\varphi](\psi \vee \xi)$ – **LP** e **RD1**
3. $([\varphi]\psi \vee [\varphi]\xi) \to [\varphi](\psi \vee \xi)$ – 1, 2, **LP** e **MP**
4. $[\varphi](\neg\psi \to \xi) \to ([\varphi]\neg\psi \to [\varphi]\xi)$ – **Distr**$[\cdot]$
5. $[\varphi](\neg\psi \to \xi) \to (\neg[\varphi]\xi \to \neg[\varphi]\neg\psi)$ – de 4, **LP** e **RE**$[\cdot]$
6. $[\varphi](\neg\psi \to \xi) \to (\neg[\varphi]\xi \to \langle\varphi\rangle\psi)$ – de 5, por definição
7. $[\varphi](\neg\psi \to \xi) \wedge \neg[\varphi]\xi \to \langle\varphi\rangle\psi$ – de 6, **LP** e **MP**
8. $[\varphi](\neg\psi \to \xi) \wedge \neg[\varphi]\xi \to [\varphi]\psi$ – de 7, item *4*, **LP** e **MP**
9. $[\varphi](\neg\psi \to \xi) \to (\neg[\varphi]\xi \to [\varphi]\psi)$ – de 8, **LP** e **MP**
10. $[\varphi](\psi \vee \xi) \to ([\varphi]\psi \vee [\varphi]\xi)$ – de 9, **LP**, **RE**$[\cdot]$ e definição
11. $[\varphi](\psi \vee \xi) \leftrightarrow ([\varphi]\psi \vee [\varphi]\xi)$ – de 3, 10, **LP**, **MP** e definição.

(7) $\vdash \langle\varphi\rangle(\psi \wedge \xi) \leftrightarrow (\langle\varphi\rangle\psi \wedge \langle\varphi\rangle\xi)$

1. $[\varphi](\neg\psi \vee \neg\xi) \leftrightarrow ([\varphi]\neg\psi \vee [\varphi]\neg\xi)$ – item *6*
2. $\neg[\varphi](\neg\psi \vee \neg\xi) \leftrightarrow \neg([\varphi]\neg\psi \vee [\varphi]\neg\xi)$ – de 1, **LP** e **MP**
3. $\langle\varphi\rangle\neg(\neg\psi \vee \neg\xi) \leftrightarrow (\neg[\varphi]\neg\psi \wedge \neg[\varphi]\neg\xi)$ – de 2, item *2*, **LP** e **RE**$[\cdot]$
4. $\langle\varphi\rangle(\psi \wedge \xi) \leftrightarrow (\neg[\varphi]\neg\psi \wedge \neg[\varphi]\neg\xi)$ – de 3, **LP** e **RE**$[\cdot]$
5. $\langle\varphi\rangle(\psi \wedge \xi) \leftrightarrow (\langle\varphi\rangle\psi \wedge \langle\varphi\rangle\xi)$ – de 4, definição e **RE**$[\cdot]$

□

Na lista seguinte, estão demonstradas em **QK**$[\cdot]$ algumas equivalências cujas validades foram provadas nos teoremas 6.2.2 e 6.2.3.

Teorema 6.3.6. *Sejam, em* $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$, φ *e* ψ *fórmulas quaisquer. As seguintes equivalências são demonstráveis em* **QK**$[\cdot]^m$*:*

1. $\vdash \langle\varphi\rangle\psi \leftrightarrow (\varphi \wedge [\varphi]\psi)$

2. $\vdash \langle\varphi\rangle\psi \leftrightarrow (\varphi \wedge \langle\varphi\rangle\psi)$

3. $\vdash [\varphi]\psi \leftrightarrow (\varphi \to [\varphi]\psi)$

4. $\vdash [\varphi]\psi \leftrightarrow (\varphi \to \langle\varphi\rangle\psi)$

Demonstração. Seguem as provas.

(1) $\vdash \langle\varphi\rangle\psi \leftrightarrow (\varphi \wedge [\varphi]\psi)$

1. $[\varphi]\neg\psi \leftrightarrow (\varphi \to \neg[\varphi]\psi)$ – **Neg**$[\cdot]$
2. $\neg\langle\varphi\rangle\psi \leftrightarrow \neg(\varphi \wedge [\varphi]\psi)$ – de 1, **LP**, **RE**$[\cdot]$ e item *3* de 6.3.5
3. $\langle\varphi\rangle\psi \leftrightarrow (\varphi \wedge [\varphi]\psi)$ – de 2, **LP**e **MP**

(2) $\vdash \langle\varphi\rangle\psi \leftrightarrow (\varphi \wedge \langle\varphi\rangle\psi)$

1. $(\varphi \wedge \langle\varphi\rangle\psi) \to \langle\varphi\rangle\psi$ – **LP**
2. $\langle\varphi\rangle\psi \to \varphi$ – do item *1*, **LP** e **MP**

3. $\langle\varphi\rangle\psi \to \langle\varphi\rangle\psi$ – **LP**
4. $\langle\varphi\rangle\psi \to (\varphi \wedge \langle\varphi\rangle\psi)$ – de 2, 3, **LP** e **MP**
5. $\langle\varphi\rangle\psi \leftrightarrow (\varphi \wedge \langle\varphi\rangle\psi)$ – de 1, 4, **LP**, **MP** e definição

(3) $\vdash [\varphi]\psi \leftrightarrow (\varphi \to [\varphi]\psi)$

1. $\langle\varphi\rangle\neg\psi \leftrightarrow (\varphi \wedge \langle\varphi\rangle\neg\psi)$ – item *2*
2. $\neg[\varphi]\psi \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg[\varphi]\psi)$ – de 1, item *2* de 6.3.5, **RE**$[\cdot]$
3. $\neg[\varphi]\psi \leftrightarrow \neg(\varphi \to [\varphi]\psi)$ – de 2, **LP** e **RE**$[\cdot]$
4. $[\varphi]\psi \leftrightarrow (\varphi \to [\varphi]\psi)$ – de 3, **LP** e **MP**

(4) $\vdash [\varphi]\psi \leftrightarrow (\varphi \to \langle\varphi\rangle\psi)$

1. $\langle\varphi\rangle\neg\psi \leftrightarrow (\varphi \wedge [\varphi]\neg\psi)$ – item *1*
2. $\neg[\varphi]\psi \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\langle\varphi\rangle\psi)$ – de 1, itens *2* e *3* de 6.3.5, **RE**$[\cdot]$
3. $\neg[\varphi]\psi \leftrightarrow \neg(\varphi \to \langle\varphi\rangle\psi)$ – de 2, **LP** e **RE**$[\cdot]$
4. $[\varphi]\psi \leftrightarrow (\varphi \to \langle\varphi\rangle\psi)$ – de 3, **LP** e **MP**

□

A próxima lista de teoremas ilustra outras propriedades simples, porém interessantes, dos operadores de anúncio público interagindo com as constantes proposicionais $\perp$ e $\top$.

Teorema 6.3.7. *Seja φ uma fórmula qualquer de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$. Os seguintes esquemas são demonstráveis em* $\mathbf{QK}[\cdot]^m$*:*

1. $\vdash [\varphi]\perp \leftrightarrow \neg\varphi$

2. $\vdash \langle\varphi\rangle\top \leftrightarrow \varphi$

3. $\vdash [\varphi]\top$

4. $\vdash [\perp]\varphi$

Demonstração. Seguem as provas.

(1) $\vdash [\varphi]\perp \leftrightarrow \neg\varphi$

1. $(\varphi \to \perp) \leftrightarrow (\varphi \to \perp)$ – **LP**
2. $[\varphi]\perp \leftrightarrow \neg\varphi$ – de 1, **Atom**$[\cdot]$, **RE**$[\cdot]$ e definição

(2) $\vdash \langle\varphi\rangle\top \leftrightarrow \varphi$

1. $[\varphi]\perp \leftrightarrow \neg\varphi$ – item *1*
2. $\neg[\varphi]\perp \leftrightarrow \neg\neg\varphi$ – de 1, **LP** e **MP**
3. $\langle\varphi\rangle\neg\perp \leftrightarrow \neg\neg\varphi$ – de 2, item *2* de 6.3.6
4. $\langle\varphi\rangle\top \leftrightarrow \varphi$ – de 3, **LP**, **RE**$[\cdot]$ e definições

(3) $\vdash [\varphi]\top$

1. $[\varphi](\bot \to \bot)$ – **LP** e **Nec**$[\cdot]$
2. $[\varphi]\top$ – de 1 e definição

(4) $\vdash [\bot]\varphi$

Por indução sobre φ. *(Base)* (i) φ é fórmula atômica. Por **LP**, $\vdash \bot \to p$, e, por **Atom**$[\cdot]$, **LP** e **MP**: $\vdash [\bot]p$. Em particular, $\vdash [\bot]\bot$.

(Casos indutivos) (ii) φ é $\psi \to \xi$. Por **LP**, $\vdash \bot \to (\psi \to \xi)$, e, por *RD1*, $\vdash [\bot]\bot \to [\bot](\psi \to \xi)$. Como $\vdash [\bot]\bot$, segue-se, por **MP**, que $\vdash [\bot](\psi \to \xi)$.

Os demais casos (iii) φ é $\forall x\psi$, (iv) φ é $\mathscr{K}_i\psi$, e (v) φ é $[\psi]\xi$ são mostrados exatamente com a mesma estratégia. (Observemos que, embora a prova empregue um tipo de recursão, nenhuma hipótese indutiva precisou ser usada.) □

E, finalmente, uma curta lista de teoremas ilustrando a interação de operadores de anúncio público com fórmulas atômicas arbitrárias (na lista anterior, vimos somente resultados específicos para $\bot$).

Teorema 6.3.8. *Seja em $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$ uma fórmula atômica qualquer p. Os seguintes esquemas são demonstráveis em* **QK**$[\cdot]^m$*:*

1. $\vdash [p]p$
2. $\vdash [p]\mathscr{K}_i p$
3. $\vdash [p]\mathscr{E}_G p$

Demonstração. Seguem as provas.

(1) $\vdash [p]p$

1. $p \to p$ – **LP**
2. $[p]p$ – de 1, **Atom**$[\cdot]$ e **RE**$[\cdot]$

(2) $\vdash [p]\mathscr{K}_i p$

1. $[p]p$ – item *1* acima
2. $\mathscr{K}_i[p]p$ – de 1, por **Nec**
3. $p \to \mathscr{K}_i[p]p$ – de 2, por **LP** e **MP**
4. $[p]\mathscr{K}_i p$ – de 3, por **Conhec**$[\cdot]$ e **RE**$[\cdot]$

(3) $\vdash [p]\mathscr{E}_G p$

1. $[p]\mathscr{K}_{i_1} p \wedge \ldots \wedge [p]\mathscr{K}_{i_j} p$ $(i_1, \ldots, i_j \in G)$ – de *2*, **LP** e **MP**
2. $[p](\mathscr{K}_{i_1} p \wedge \ldots \wedge \mathscr{K}_{i_j} p)$ $(i_1, \ldots, i_j \in G)$ – de 1, **Conj**$[\cdot]$ e **RE**$[\cdot]$
3. $[p]\mathscr{E}_G p$ – de 2, pela Definição 3.1.2.

□

6.4 CORREÇÃO E COMPLETUDE

Na Seção 6.2, demonstramos a validade daqueles esquemas de axiomas específicos de $\mathbf{QK}[\cdot]^m$, bem como mostramos que suas regras de inferência preservam a validade das respectivas premissas. Consequentemente, como a validade dos demais esquemas havia sido provada antes, todos os seus teoremas serão válidos. O próximo resultado, portanto, está automaticamente garantido.

Teorema 6.4.1 (Correção de $\mathbf{QK}[\cdot]^m$ com respeito a $\mathscr{S}$)**.** *O sistema* $\mathbf{QK}[\cdot]^m$ *é correto com respeito a* $\mathscr{S}$ *(a classe de todas as estruturas epistêmicas).*

Corolário 6.4.2. *Os seguintes sistemas são corretos com respeito às respectivas classes de estruturas epistêmicas:*

1. $\mathbf{QT}[\cdot]^m$ *é correto com respeito a* $\mathscr{S}^r$ *(estruturas reflexivas);*

2. $\mathbf{QS4}[\cdot]^m$ *é correto com respeito a* $\mathscr{S}^{rt}$ *(estruturas reflexivas transitivas);*

3. $\mathbf{QS5}[\cdot]^m$ *é correto com respeito a* $\mathscr{S}^{re}$ *(estruturas reflexivas euclideanas).*

Demonstração. Daremos apenas uma indicação geral da prova. Como os axiomas e regras característicos dos operadores de anúncio público são válidos em $\mathscr{S}$, são também válidos nas subclasses $\mathscr{S}^r$, $\mathscr{S}^{rt}$ e $\mathscr{S}^{re}$ de $\mathscr{S}$. As respectivas extensões acima se distinguem de $\mathbf{QK}[\cdot]^m$ somente pelo acréscimo dos esquemas **T**, **4** e **5**, os quais, nos casos estáticos, provam somente fórmulas válidas nas correspondentes classes de estruturas. É relativamente simples estender o resultado do Teorema 6.4.1 para se obter este corolário. $\square$

No que diz respeito à completude de $\mathbf{QK}[\cdot]^m$, a estratégia empregada consistirá numa espécie de *redução* do presente sistema ao já conhecido $\mathbf{QK}^m$; ou seja, mostraremos que $\mathbf{QK}[\cdot]^m$ é completo com respeito a $\mathscr{S}$ se e somente se $\mathbf{QK}^m$ também o for. Os resultados no restante deste capítulo apoiam-se bastante naqueles encontrados em van Ditmarsch et al. (2007, p. 186 a 189), adaptando-os livremente para um contexto de primeira ordem, bem como às diversas escolhas metodológicas que distinguem nosso texto e impactam nossas definições e provas.

Duas ferramentas serão essenciais para implementarmos essa estratégia, a primeira das quais será uma *função-tradução* de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$ em $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$, cujo comportamento segue detalhado na Definição 6.4.3.

Definição 6.4.3 (Tradução de uma fórmula de $\mathscr{L}^n_{\mathscr{K}[\cdot]}$)**.** *Definiremos recursivamente a* tradução de uma fórmula de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$ em $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$ *como a função* $\mathbf{t}$*:* $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]} \longrightarrow \mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$ *tal que:*

1. $\mathbf{t}(p) = p$
2. $\mathbf{t}(\varphi \to \psi) = \mathbf{t}(\varphi) \to \mathbf{t}(\psi)$
3. $\mathbf{t}(\forall x\varphi) = \forall x\, \mathbf{t}(\varphi)$
4. $\mathbf{t}(\mathscr{K}_i\varphi) = \mathscr{K}_i\, \mathbf{t}(\varphi)$
5. $\mathbf{t}([\varphi]p) = \mathbf{t}(\varphi \to p)$
6. $\mathbf{t}([\varphi](\psi \to \xi)) = \mathbf{t}([\varphi]\psi \to [\varphi]\xi)$
7. $\mathbf{t}([\varphi]\mathscr{K}_i\psi) = \mathbf{t}(\varphi \to \mathscr{K}_i[\varphi]\psi)$
8. $\mathbf{t}([\varphi]\forall x\psi) = \mathbf{t}(\forall y[\varphi]\psi(x/\,y))$
   (onde y é qualquer variável que não ocorra livre em φ*)*
9. $\mathbf{t}([\varphi][\psi]\xi) = \mathbf{t}([\varphi \wedge [\varphi]\psi]\xi)$

Para garantir que a definição acima seja suficientemente prática, abrangendo os casos de enunciados que contenham operadores de negação e de conjunção, apresentamos o seguinte corolário.

Corolário 6.4.4. *A Definição 6.4.3 nos permite derivar ainda:*

1. $\mathbf{t}(\neg\varphi) = \neg\, \mathbf{t}(\varphi)$
2. $\mathbf{t}([\varphi]\neg\psi) = \mathbf{t}(\varphi \to \neg[\varphi]\psi)$
3. $\mathbf{t}(\varphi \wedge \psi) = \mathbf{t}(\varphi) \wedge \mathbf{t}(\psi)$

Demonstração. 1. Consideremos $\mathbf{t}(\neg\varphi)$. Por definição, isso equivale a $\mathbf{t}(\varphi \to \bot)$; que, por sua vez, consiste em $\mathbf{t}(\varphi) \to \mathbf{t}(\bot)$. Como $\bot$ é atômica, temos $\mathbf{t}(\varphi) \to \bot$; e, consequentemente, $\neg\, \mathbf{t}(\varphi)$.

2. Consideremos $\mathbf{t}([\varphi]\neg\psi)$. Por definição, isso é $\mathbf{t}([\varphi](\psi \to \bot))$, e pelo esquema **Distr**$[\cdot]$, $\mathbf{t}([\varphi]\psi \to [\varphi]\bot)$. Esta última expressão equivale a dizer que $\mathbf{t}([\varphi]\psi) \to \mathbf{t}([\varphi]\bot)$, e isto, por sua vez, consiste em $\mathbf{t}([\varphi]\psi) \to \mathbf{t}(\varphi \to \bot)$. Daí, é fácil obter $\mathbf{t}([\varphi]\psi) \to (\mathbf{t}(\varphi) \to \mathbf{t}(\bot))$, e, equivalentemente, $\mathbf{t}([\varphi]\psi) \to (\mathbf{t}(\varphi) \to \bot)$; ou seja, $\mathbf{t}([\varphi]\psi) \to \neg\, \mathbf{t}(\varphi)$. Por contraposição, $\mathbf{t}(\varphi) \to \neg\, \mathbf{t}([\varphi]\psi)$. Pelo item anterior deste corolário, isto equivale a $\mathbf{t}(\varphi) \to \mathbf{t}(\neg[\varphi]\psi)$; e, finalmente, $\mathbf{t}(\varphi \to \neg[\varphi]\psi)$.

3. Consideremos $\mathbf{t}(\varphi \wedge \psi)$. Por definição, isso é $\mathbf{t}(\neg(\varphi \to \neg\psi))$. Pelo primeiro item deste corolário, isso consiste em $\neg\mathbf{t}(\varphi \to \neg\psi)$, e daí, $\neg(\mathbf{t}(\varphi) \to \mathbf{t}(\neg\psi))$. Esta última expressão equivale, pelo mesmo item, a $\neg(\mathbf{t}(\varphi) \to \neg\mathbf{t}(\psi))$, e, por definição, a $\mathbf{t}(\varphi) \wedge \mathbf{t}(\psi)$. $\square$

Como é fácil de perceber, a função $\mathbf{t}$ depende diretamente daqueles esquemas a que nos referimos antes como *axiomas de redução* em $\mathbf{QK}[\cdot]^m$, o que também deixa clara a motivação para aqueles esquemas: precisamente, a migração progressiva do operador de anúncio público no interior de fórmulas epistêmicas dinâmicas, subfórmula a subfórmula, até o ponto em que o escopo do operador de anúncio abranja somente fórmulas atômicas, em cuja altura toda a fórmula pode ser substituída por sua equivalente estática (sem operadores de anúncio).

A função $\mathbf{t}$ servirá ao propósito de demonstrar que esse procedimento sempre pode ser feito e de fato preserva a validade da fórmula dinâmica inicial. Porém, mesmo sem o emprego de $\mathbf{t}$, é possível mostrar a aplicação em situações particulares, apenas para efeito de clareza. Por exemplo, para um agente qualquer a, uma fórmula qualquer φ em $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$ (sem operadores de anúncio) e uma fórmula atômica qualquer p, a seguinte sequência de passos emprega somente a regra $\mathbf{RE}[\cdot]$ e os esquemas de redução $\mathbf{Conhec}[\cdot]$, $\mathbf{Neg}[\cdot]$ (demonstrado no Teorema 6.3.3) e $\mathbf{Atom}[\cdot]$, para reduzir, por assim dizer, uma fórmula aleatória de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$ à sua equivalente estática em $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$:

1. $[\neg\mathscr{K}_a\varphi]\mathscr{K}_a\neg\mathscr{K}_a p$
2. $\neg\mathscr{K}_a\varphi \to \mathscr{K}_a[\neg\mathscr{K}_a\varphi]\neg\mathscr{K}_a p$
3. $\neg\mathscr{K}_a\varphi \to \mathscr{K}_a(\neg\mathscr{K}_a\varphi \to \neg[\neg\mathscr{K}_a\varphi]\mathscr{K}_a p)$
4. $\neg\mathscr{K}_a\varphi \to \mathscr{K}_a(\neg\mathscr{K}_a\varphi \to \neg(\neg\mathscr{K}_a\varphi \to \mathscr{K}_a[\neg\mathscr{K}_a\varphi]p))$
5. $\neg\mathscr{K}_a\varphi \to \mathscr{K}_a(\neg\mathscr{K}_a\varphi \to \neg(\neg\mathscr{K}_a\varphi \to \mathscr{K}_a(\neg\mathscr{K}_a\varphi \to p)))$

Naturalmente, poderíamos prosseguir aplicando $\mathbf{RE}[\cdot]$ e outras equivalências, tentando simplificar o máximo possível a fórmula no passo 5. Contudo, nosso objetivo era apenas ilustrar como obter uma fórmula sem operadores de anúncio, empregando os axiomas de redução e a substituição de equivalentes usual.

Nessa linha de raciocínio, é bem provável que o item *8* na Definição 6.4.3 tenha chamado mais a atenção do leitor, e requeira uma boa justificativa para sua aceitação. Claramente, ele está relacionado com o esquema $\mathbf{Barcan}[\cdot]$, cuja validade já foi demonstrada no Teorema 6.2.7. Resta-nos saber se ele funciona a contento em um típico processo de eliminação de operadores de anúncio público. Examinemos, então, o referido esquema.

A restrição nele prevista acerca de ocorrências de variáveis livres no conteúdo do anúncio se deve a nossa necessidade de que, ao fazermos $[\varphi]\forall x\psi$ acarretar $\forall x[\varphi]\psi$, nenhuma ocorrência de variável livre em φ se torne ligada ao prefixarmos a expressão $\forall x$, e, ao fazermos $\forall x[\varphi]\psi$ acarretar $[\varphi]\forall x\psi$, nenhuma ocorrência de variável ligada em φ se torne livre ao restringirmos o escopo de $\forall x$. Qualquer uma dessas possibilidades afetaria claramente as condições semânticas (e o significado intuitivo da expressão), as quais deveriam ser as mesmas para as fórmulas nos dois lados da equivalência. A restrição no esquema satisfaz essa necessidade.

Contudo, estando agrupado com os demais axiomas de redução, a equivalência descrita em **Barcan**$[\cdot]$ aparenta destoar do restante do grupo devido a sua restrição sobre variáveis. Se nosso objetivo último é, como veremos mais adiante, mostrar como reduzir cada fórmula de *LAPQ* ao seu correspondente estático em *LEQ*, não basta um esquema válido que assegure uma espécie de migração progressiva do operador de anúncio $[\cdot]$ cada vez mais para o interior de fórmulas não atômicas, até que, prefixando uma fórmula atômica, possamos substituir, autorizados por **Atom**$[\cdot]$, aquela expressão por uma fórmula completamente desprovida de operadores dinâmicos. Precisamos também que cada esquema em questão seja uma equivalência para que, munidos da regra derivada **RE**$[\cdot]$, tenhamos como operar essa redução mediante substituições no interior de quaisquer fórmulas fora de anúncio.

Lembramos ao leitor acerca da equivalência (fácil de ser mostrada tanto em lógicas de primeira ordem, tanto clássica quanto livre) entre quaisquer fórmulas $\forall x\psi$ e $\forall y\psi(x/y)$ (onde y não ocorra livre em ψ), bem como da validade mostrada no Teorema 6.2.7. O esquema é certamente legítimo.

A restrição no esquema **Barcan**$[\cdot]$, entretanto, pode provocar dúvidas sobre sua capacidade para funcionar como uma ferramenta de redução em *quaisquer* fórmulas quantificadas. Estamos pensando especificamente naqueles casos em que φ contenha ocorrências livres de x em uma fórmula arbitrária $\forall x[\varphi]\psi$.

Nessas situações, seguramente não há prejuízo algum para o procedimento de eliminação de operadores de anúncio público; pois, neste caso, não temos mais interesse em, por assim dizer, mover de volta (para a esquerda) o operador de anúncio público, de modo a abranger em seu escopo a expressão $\forall x\psi$. Normalmente, seguimos transformando as fórmulas no escopo do operador até restarem somente fórmulas atômicas nesse escopo, e, então, o operador de anúncio desaparece pela aplicação de **Atom**$[\cdot]$.

Tomemos como exemplo, o seguinte (esquema de) fórmula em $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$, bastante simples, ilustrando as situações mencionadas acima e sua consequente redução ao caso estático (sem operadores de anúncios). Uma verificação simples, que dispensaremos aqui, mostraria a equivalência semântica entre cada passo na derivação abaixo, da mesma maneira que, pela aplicação da regra **RE**$[\cdot]$ com os esquemas **Barcan**$[\cdot]$ e **Atom**$[\cdot]$, estabelecemos abaixo uma equivalência sintática.

1. $\forall x[P(x)]P(x) \to [P(x)]\forall xP(x)$
2. $\forall x[P(x)]P(x) \to \forall y[P(x)]P(y)$
3. $\forall x(P(x) \to P(x)) \to \forall y(P(x) \to P(y))$

Novamente, poderíamos seguir aplicando **RE**$[\cdot]$, **LP** e outras equivalências (como **Distr**$\forall$ e **Vac**$\forall$), além da substituição de $\forall xP(x)$ pela sua equivalente $\forall yP(y)$ por se tratar do que às vezes é chamado de uma *variante alfabética* — ver Teorema 3.3.3(2) — e obter o último passo a seguir, explicitado apenas por curiosidade.

4. $P(x) \to \forall y((P(y) \to P(y)) \to P(y))$

De todo modo, acreditamos que, uma vez feitas todas as considerações acima, a adoção do axioma **Barcan**$[\cdot]$ está devidamente justificada.

Uma outra curiosidade natural, diante da possibilidade do procedimento de redução — ou, alternativamente, de *eliminação dos operadores de anúncio público*—, talvez nos induza a perguntar pela utilidade de um sistema dinâmico que não acrescente (aparentemente) nada substancial ao seu equivalente estático.

Três ponderações podem responder a essa curiosidade. A primeira tem a ver com a economia notacional: fórmulas com operadores dinâmicos usualmente abreviam, por assim dizer, de modo considerável suas correspondentes estáticas. (Tais fórmulas dinâmicas, entretanto, não devem ser consideradas abreviações *stricto sensu*, pois não são introduzidas por definição a partir de suas correspondentes estáticas.)

As vantagens práticas da economia notacional são bem conhecidas entre os lógicos. É quase inevitável lembrar da complicada e prolixa notação baseada no operador de Sheffer $\uparrow$ (ou, alternativamente, no de Peirce $\downarrow$), ou mesmo da notação original usada por Frege em seu *Begriffschrift*. Por outro lado, a economia de notação não é garantia de adesão universal pela comunidade de lógicos; basta lembrarmos do quão raros são os usuários da famosa notação polonesa (tão econômica que dispensa até mesmo parênteses sem engendrar ambiguidades).

Contudo, essa não é a consideração mais importante. Mesmo ignorando as vantagens de uma economia notacional, a própria intuição por trás de proposições contendo anúncios públicos não é representada de maneira muito óbvia em termos estritamente estáticos. Para ilustrar, consideremos a seguinte proposição, seguida por suas correspondentes formalizações dinâmica e estática, respectivamente:

(3) O anúncio público de que p é o caso e de que o agente a não sabe disso, faria com que a soubesse que p acontece.

(4) $[p \wedge \neg \mathscr{K}_a p]\, \mathscr{K}_a p$

(5) $(p \wedge \neg \mathscr{K}_a p) \rightarrow \mathscr{K}_a((p \wedge \neg \mathscr{K}_a p) \rightarrow p)$

Mesmo o mais simples dos esquemas de redução, correspondente a **Atom**$[\cdot]$, não parece garantir que a intuição que acomodamos na expressão $[\varphi]p$ também se sinta à vontade em $\varphi \rightarrow p$. O ponto importante aqui é simplesmente nos assegurarmos de que as referidas formalizações *concordem sempre entre si quanto à verdade ou falsidade*, de modo a construirmos uma prova bastante simples de completude para $\mathbf{QK}[\cdot]^m$.

A última consideração é de que a estratégia de redução não funciona para qualquer versão de *LAP*. Por exemplo, aprendemos em van Ditmarsch et al. (2007, p. 231 a 235) que mesmo o fragmento proposicional de $\mathbf{QS5}\mathscr{C}[\cdot]^m$ não é redutível ao seu correspondente estático. A propriedade relevante para essa discussão, como o leitor pode já ter suspeitado, diz respeito à *equivalência expressiva* entre os sistemas epistêmicos envolvidos, a qual nem sempre existe. (Em linhas gerais, dizemos que uma linguagem é mais expressiva do que outra sempre que, quando interpretadas na mesma classe de modelos, há pelo menos uma fórmula da primeira que não equivale a nenhuma fórmula da segunda, com respeito àquela classe de modelos.)

Isso nos leva a suspeitar de que haja algo intrínseco a *LAP* que não seja expressável em *LE*, mas que *em uma formulação suficientemente simples* e ainda legítima da primeira (como nos sistemas abordados até aqui), permite uma equivalência semântica entre as condições de satisfação para pares de fórmulas, uma fórmula de cada lógica.[6]

De todo modo, retomando a discussão da completude para $\mathbf{QK}[\cdot]^m$, a redução somente estará garantida se conseguirmos demonstrar indutivamente a equivalência entre cada fórmula de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$ e sua correspondente estática em $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$ mediante a tradução $\mathbf{t}$.

Para tanto, não seria suficiente considerarmos uma indução sobre a complexidade (ou comprimento) usual das fórmulas (a hipótese indutiva se aplicando às respectivas subfórmulas e permitindo o passo indutivo seguinte); visto que, uma vez completado esse passo, não teríamos, ainda assim, provado a equivalência desejada para todos os casos. (Para fornecer apenas um exemplo simples: é intuitivo perceber que uma instância do esquema $\varphi \rightarrow p$ não é subfórmula de $[\varphi]p$, nem vice-versa; impossibilitando-nos a aplicação da hipótese indutiva para provar uma redução no subcaso indicado.)

[6]É importante que se diga que há algum questionamento na literatura acerca da conveniência do método de redução, bem como axiomatizações que são motivadas de outras maneiras (WANG; CAO, 2013).

Essa é justamente a motivação para a nossa segunda ferramenta metodológica, a qual consistirá em outra função, responsável por impor um ordenamento conveniente e rigoroso, baseado em uma *medida de complexidade*, para todas as fórmulas de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$, um ordenamento que não dependa exclusivamente da relação entre uma fórmula e suas subfórmulas, embora também contemple ou inclua, do modo apropriado, essa relação.

Definição 6.4.5 (Complexidade de uma fórmula)**.** *Sejam, em $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$, fórmulas quaisquer φ e ψ, e uma fórmula atômica qualquer p.* A complexidade de uma fórmula de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$ *é a função* $\mathbf{c}$*:* $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]} \longrightarrow \mathbb{N}$*, definida recursivamente da seguinte maneira:*

1. $\mathbf{c}(p) = 1$

2. $\mathbf{c}(\varphi \to \psi) = 1 + max(\mathbf{c}(\varphi), \mathbf{c}(\psi))$

3. $\mathbf{c}(\mathscr{K}_i\varphi) = 1 + \mathbf{c}(\varphi)$

4. $\mathbf{c}(\forall x\varphi) = 1 + \mathbf{c}(\varphi)$

5. $\mathbf{c}([\varphi]\psi) = (2 + \mathbf{c}(\varphi))\cdot \mathbf{c}(\psi)$

De modo a facilitar provas futuras, consideremos também o seguinte corolário para a definição anterior.

Corolário 6.4.6. *A Definição 6.4.5 nos permite derivar ainda:*

1. $\mathbf{c}(\neg\varphi) = 1 + \mathbf{c}(\varphi)$

2. $\mathbf{c}(\varphi \wedge \psi) = 2 + max(\mathbf{c}(\varphi), 1 + \mathbf{c}(\psi))$

Demonstração. 1. Consideremos $\mathbf{c}(\neg\varphi)$. Por definição da negação, temos $\mathbf{c}(\varphi \to \perp)$, que, por definição, consiste em $1 + max(\mathbf{c}(\varphi), \mathbf{c}(\perp))$. Como $\perp$ é atômica, aquela expressão equivale a dizer $1 + max(\mathbf{c}(\varphi), 1)$. Ora, se φ for também atômica, $\mathbf{c}(\varphi) = \mathbf{c}(\perp) = 1$. Se φ não for atômica, certamente $\mathbf{c}(\varphi) > \mathbf{c}(\perp)$. É óbvio, pois, que podemos sempre desconsiderar $\mathbf{c}(\perp)$ em $max(\mathbf{c}(\varphi), \mathbf{c}(\perp))$; portanto, a expressão inicial equivale a $1 + \mathbf{c}(\varphi)$.

2. Consideremos $\mathbf{c}(\varphi \wedge \psi)$. Por definição da conjunção, temos $\mathbf{c}(\neg(\varphi \to \neg\psi))$, que, pelo item anterior, equivale a $1 + \mathbf{c}(\varphi \to \neg\psi)$. Esta última expressão denota o mesmo que $1 + (1 + max(\mathbf{c}(\varphi), \mathbf{c}(\neg\psi)))$, ou seja, $2 + max(\mathbf{c}(\varphi), \mathbf{c}(\neg\psi))$. Novamente, pelo item anterior, isso é o mesmo que $2 + max(\mathbf{c}(\varphi), 1 + \mathbf{c}(\psi))$. $\square$

O lema a seguir nos assegurará de que a função $\mathbf{c}$ impõe de fato um ordenamento rigoroso para as fórmulas de $\mathscr{L}^m_{QK[\cdot]}$, ao satisfazer certas propriedades. Além disso, poderemos entender, a partir de sua demonstração, a escolha da constante numérica 2 no item 5 da Definição 6.4.5. De fato, esse é o menor número natural que satisfaz o lema a seguir.[7]

Lema 6.4.7. *Seja $sub(\varphi)$ o conjunto das subfórmulas de φ e sejam, em $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$, fórmulas quaisquer φ, ψ e ξ, bem como uma fórmula atômica qualquer p. Assim, valem as seguintes propriedades:*

1. *se $\varphi \in sub(\psi)$, então $\boldsymbol{c}(\varphi) \leq \boldsymbol{c}(\psi)$*
2. $\boldsymbol{c}(\varphi \to p) < \boldsymbol{c}([\varphi]p)$
3. $\boldsymbol{c}([\varphi]\psi \to [\varphi]\xi) < \boldsymbol{c}([\varphi](\psi \to \xi))$
4. $\boldsymbol{c}(\mathscr{K}_i[\varphi]\psi) < \boldsymbol{c}([\varphi]\mathscr{K}_i\psi)$
5. $\boldsymbol{c}(\forall x[\varphi]\psi) < \boldsymbol{c}([\varphi]\forall x\psi)$
6. $\boldsymbol{c}([\varphi \wedge [\varphi]\psi]\xi) < \boldsymbol{c}([\varphi][\psi]\xi)$

Demonstração. 1. Indução sobre ψ. (i) ψ é atômica, e, portanto, também sua única subfórmula. Obviamente, $\mathbf{c}(\psi) \leq \mathbf{c}(\psi)$.

Hipótese indutiva: Para $\mathbf{c}(\psi) = n$ (arbitrário), se $\varphi \in sub(\psi)$, então $\mathbf{c}(\varphi) \leq \mathbf{c}(\psi)$. Suponhamos, em cada caso a seguir, $\varphi \in sub(\psi)$. (Os respectivos subcasos em que $\varphi = \psi$ serão omitidos pela sua obviedade.)

(ii) *ψ é $\psi' \to \psi''$:* Claramente, ou $\varphi \in sub(\psi')$, ou $\varphi \in sub(\psi'')$. Por h.i., ou $\mathbf{c}(\varphi) \leq \mathbf{c}(\psi')$, ou $\mathbf{c}(\varphi) \leq \mathbf{c}(\psi'')$. Pela Definição 6.4.5, $\mathbf{c}(\psi' \to \psi'') = 1 + max(\mathbf{c}(\psi'), \mathbf{c}(\psi''))$. É fácil perceber que, em qualquer caso, $\mathbf{c}(\varphi) \leq \mathbf{c}(\psi)$.

(iii) *ψ é $\forall x\psi'$:* Naturalmente, $\varphi \in sub(\psi')$. Por h.i., $\mathbf{c}(\varphi) \leq \mathbf{c}(\psi')$; e, como $\mathbf{c}(\forall x\psi') = 1 + \mathbf{c}(\psi')$, inferimos $\mathbf{c}(\varphi) \leq \mathbf{c}(\forall x\psi')$.

(iv) *ψ é $\mathscr{K}_i\psi'$:* Similar ao caso anterior.

(v) *ψ é $[\psi']\psi''$:* Ou $\varphi \in sub(\psi')$, ou $\varphi \in sub(\psi'')$. Por h.i., ou $\mathbf{c}(\varphi) \leq \mathbf{c}(\psi')$, ou $\mathbf{c}(\varphi) \leq \mathbf{c}(\psi'')$. Pela Definição 6.4.5, $\mathbf{c}([\psi']\psi'') = (2 + \mathbf{c}(\psi'))\cdot \mathbf{c}(\psi'')$. É claro que, em qualquer caso, $\mathbf{c}(\varphi) \leq \mathbf{c}([\psi']\psi'')$.

2. Por definição,
$$\begin{aligned}\mathbf{c}(\varphi \to p) &= 1 + max(\mathbf{c}(\varphi), \mathbf{c}(p)) \\ &= 1 + max(\mathbf{c}(\varphi), 1)\end{aligned}$$

[7] Apenas a título de curiosidade, o leitor poderia comparar, entre outras diferenças, nossa escolha do número 2 com a usada no mesmo contexto em van Ditmarsch et al. (2007, p. 188) — a saber, o número 4 — e tentar perceber, por si mesmo, por que pudemos escolher outra constante numérica.

$= 1 + \mathbf{c}(\varphi)$ (pois: $\mathbf{c}(\varphi) \geq 1$).

Por sua vez, $\mathbf{c}([\varphi]p) = (2 + \mathbf{c}(\varphi))\cdot \mathbf{c}(p)$
$= (2 + \mathbf{c}(\varphi)) \cdot 1$
$= 2 + \mathbf{c}(\varphi)$

Obviamente, $1 + \mathbf{c}(\varphi) < 2 + \mathbf{c}(\varphi)$.

3. Sem perda de generalidade, seja $\mathbf{c}(\psi) \leq \mathbf{c}(\xi)$.

Assim, $\mathbf{c}([\varphi]\psi \to [\varphi]\xi) = 1 + max(\mathbf{c}([\varphi]\psi), \mathbf{c}([\varphi]\xi))$
$= 1 + max((2+\mathbf{c}(\varphi))\cdot \mathbf{c}(\psi), (2+\mathbf{c}(\varphi))\cdot \mathbf{c}(\xi))$
$= 1 + (2+\mathbf{c}(\varphi))\cdot \mathbf{c}(\xi)$
$= 1 + 2\cdot \mathbf{c}(\xi) + \mathbf{c}(\varphi)\cdot \mathbf{c}(\xi)$.

Por sua vez, $\mathbf{c}([\varphi](\psi \to \xi)) = (2 + \mathbf{c}(\varphi))\cdot \mathbf{c}(\psi \to \xi)$
$= (2 + \mathbf{c}(\varphi)) \cdot (1 + max(\mathbf{c}(\psi), \mathbf{c}(\xi)))$
$= (2 + \mathbf{c}(\varphi)) \cdot (1 + \mathbf{c}(\xi))$
$= 2 + \mathbf{c}(\varphi) + 2 \cdot \mathbf{c}(\xi) + \mathbf{c}(\varphi)\cdot \mathbf{c}(\xi)$.

Enfim, $1 + 2\cdot \mathbf{c}(\xi) + \mathbf{c}(\varphi)\cdot \mathbf{c}(\xi) < 2 + \mathbf{c}(\varphi) + 2\cdot \mathbf{c}(\xi) + \mathbf{c}(\varphi)\cdot \mathbf{c}(\xi)$.

4. Por definição, $\mathbf{c}(\mathscr{K}_i[\varphi]\psi) = 1 + \mathbf{c}([\varphi]\psi)$
$= 1 + ((2 + \mathbf{c}(\varphi)) \cdot \mathbf{c}(\psi))$
$= 1 + 2 \cdot \mathbf{c}(\psi) + \mathbf{c}(\varphi)\cdot \mathbf{c}(\psi)$

Por sua vez, $\mathbf{c}([\varphi]\mathscr{K}_i\psi) = (2+ \mathbf{c}(\varphi))\cdot \mathbf{c}(\mathscr{K}_i\psi)$
$= (2+ \mathbf{c}(\varphi))\cdot (1+ \mathbf{c}(\psi))$
$= 2+ \mathbf{c}(\varphi) + 2\cdot \mathbf{c}(\psi) + \mathbf{c}(\varphi)\cdot \mathbf{c}(\psi)$.

Daí, $1 + 2\cdot \mathbf{c}(\psi) + \mathbf{c}(\varphi)\cdot \mathbf{c}(\psi) < 2 + \mathbf{c}(\varphi) + 2\cdot \mathbf{c}(\psi) + \mathbf{c}(\varphi)\cdot \mathbf{c}(\psi)$.

5. Muito similar ao caso anterior. Omitida por economia de espaço.

6. Por definição, $\mathbf{c}([\varphi \wedge [\varphi]\chi]\psi) = (2 + \mathbf{c}(\varphi \wedge [\varphi]\chi)) \cdot \mathbf{c}(\psi)$
$= (2 + (2 + max(\mathbf{c}(\varphi), 1+ \mathbf{c}([\varphi]\chi)))) \cdot \mathbf{c}(\psi)$
$= (4 + max(\mathbf{c}(\varphi), 1+ \mathbf{c}([\varphi]\chi))) \cdot \mathbf{c}(\psi)$
$= (4 + max(\mathbf{c}(\varphi), 1 + ((2+ \mathbf{c}(\varphi))\cdot \mathbf{c}(\chi))))\cdot \mathbf{c}(\psi)$
$= (4 + (1 + ((2+ \mathbf{c}(\varphi))\cdot \mathbf{c}(\chi))))\cdot \mathbf{c}(\psi)$
$= (4 + (1 + (2\cdot \mathbf{c}(\chi)+ \mathbf{c}(\varphi)\cdot \mathbf{c}(\chi))))\cdot \mathbf{c}(\psi)$
$= (5 + 2\cdot \mathbf{c}(\chi)+ \mathbf{c}(\varphi)\cdot \mathbf{c}(\chi))\cdot \mathbf{c}(\psi)$.

Por sua vez, $\mathbf{c}([\varphi][\chi]\psi) = (2 + \mathbf{c}(\varphi))\cdot \mathbf{c}([\chi]\psi)$
$= (2 + \mathbf{c}(\varphi))\cdot (2 + \mathbf{c}(\chi))\cdot \mathbf{c}(\psi)$
$= (4 + 2\cdot \mathbf{c}(\varphi) + 2\cdot \mathbf{c}(\chi) + \mathbf{c}(\varphi)\cdot \mathbf{c}(\chi)) \cdot \mathbf{c}(\psi)$.

Claro que: $(5 + 2\cdot \mathbf{c}(\chi)+ \mathbf{c}(\varphi)\cdot \mathbf{c}(\chi))\cdot \mathbf{c}(\psi)$
$< (4 + 2\cdot \mathbf{c}(\varphi) + 2\cdot \mathbf{c}(\chi)+ \mathbf{c}(\varphi)\cdot \mathbf{c}(\chi))\cdot \mathbf{c}(\psi)$.

(Como seguramente o valor de $\mathbf{c}(\varphi) \geq 1$, o resultado está garantido.)

$\square$

Finalmente, a demonstração do próximo enunciado é a razão de ser das definições e lemas até o momento na presente seção.

Lema 6.4.8 (Equivalência entre uma fórmula e sua tradução)**.** *Seja φ uma fórmula qualquer de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$. Assim,*

$$\vdash \quad \varphi \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{t}\,(\varphi)$$

Demonstração. Indução sobre a *complexidade* de φ. *Base:* φ é atômica. Trivial a partir da Definição 6.4.3, pois obviamente $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi$.

Hipótese indutiva: Para toda φ tal que $\mathbf{c}(\varphi) < n$: $\vdash \varphi \leftrightarrow \mathbf{t}(\varphi)$.

(i) *φ é $\varphi' \to \varphi''$.* Seja $\vdash (\varphi' \to \varphi'') \leftrightarrow (\varphi' \to \varphi'')$. Como tanto φ' como φ'' são subfórmulas de φ, sabemos, pelo item *1* do Lema 6.4.7, que a h.i. se aplica, pois tanto $\mathbf{c}(\varphi') \leq \mathbf{c}(\varphi)$ como $\mathbf{c}(\varphi'') \leq \mathbf{c}(\varphi)$. É fácil perceber, portanto, que $\vdash (\varphi' \to \varphi'') \leftrightarrow (\mathbf{t}(\varphi') \to \mathbf{t}(\varphi''))$, o que sabemos, pela Definição 6.4.3, coincidir com $\vdash (\varphi' \to \varphi'') \leftrightarrow \mathbf{t}(\varphi' \to \varphi'')$.

(ii) *φ é $\mathscr{K}_i\varphi'$.* Como φ' é subfórmula de φ, pelo Lema 6.4.7 e h.i., obtemos $\vdash \varphi' \leftrightarrow \mathbf{t}(\varphi')$. Aplicando **Nec** e **K**, temos $\vdash \mathscr{K}_i\varphi' \leftrightarrow \mathscr{K}_i\,\mathbf{t}(\varphi')$. Por definição, $\mathscr{K}_i\,\mathbf{t}(\varphi') = \mathbf{t}(\mathscr{K}_i\varphi')$; portanto, $\vdash \mathscr{K}_i\varphi' \leftrightarrow \mathbf{t}(\mathscr{K}_i\varphi')$.

(iii) *φ é $\forall x\varphi'$.* Raciocínio análogo ao anterior, empregando desta vez, além do Lema 6.4.7, os esquemas **Gen**$\forall$, **Distr**$\forall$ e **MP** sobre a hipótese indutiva. Enfim, aplicando a Definição 6.4.3, de $\vdash \forall x\varphi' \leftrightarrow \forall x\,\mathbf{t}(\varphi')$, obtemos $\vdash \forall x\varphi' \leftrightarrow \mathbf{t}(\forall x\varphi')$.

Temos, ainda, mais cinco casos em que $\mathbf{c}(\varphi) > k$, não envolvendo necessariamente subfórmulas de φ:

(iv) *φ é $[\varphi']p$.* Sabemos, por **Atom**$[\cdot]$, que $\vdash [\varphi']p \leftrightarrow (\varphi' \to p)$. Pelo item *2* do Lema 6.4.7 e por h.i., inferimos facilmente que $\vdash (\varphi' \to p) \leftrightarrow \mathbf{t}(\varphi' \to p)$ e, daí, que $\vdash [\varphi']p \leftrightarrow \mathbf{t}(\varphi' \to p)$. Aplicando a Definição 6.4.3, obtemos $\vdash [\varphi']p \leftrightarrow \mathbf{t}([\varphi']p)$.

(v) *φ é $[\varphi'](\varphi'' \to \varphi''')$.* Similar ao item anterior, desta vez usando **Distr**$[\cdot]$, o item *3* do Lema 6.4.7, e novamente a Definição 6.4.3.

(vi) *φ é $[\varphi']\mathscr{K}_i\varphi''$.* Similar aos anteriores, desta vez usando **Conhec**$[\cdot]$, o item *4* do Lema 6.4.7, e novamente a Definição 6.4.3.

(vii) *φ é $[\varphi']\forall x\varphi''$.* Similar aos anteriores, desta vez usando **Barcan**$[\cdot]$, o item *5* do Lema 6.4.7, e novamente a Definição 6.4.3.

$(viii)$ *φ é $[\varphi'][\varphi'']\varphi'''$.* Similar aos anteriores, desta vez usando **Comp**$[\cdot]$, o item *6* do Lema 6.4.7, e novamente a definição 6.4.3. □

A completude de $\mathbf{QK}[\cdot]^m$ pode agora ser derivada facilmente a partir dos lemas e definições anteriores.

Teorema 6.4.9 (Completude de $\mathbf{QK}[\cdot]^m$ com respeito a $\mathscr{S}$)**.** *Seja φ uma fórmula qualquer de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$. Considerando-se a classe $\mathscr{S}$ de todas as estruturas epistêmicas e o sistema $\mathbf{QK}[\cdot]^m$:*

$$\vDash \varphi \ \Rightarrow \vdash \varphi$$

Ou seja, todas as fórmulas de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$ válidas em $\mathscr{S}$ são teoremas de $\mathbf{QK}[\cdot]^m$.

Demonstração. Suponhamos que $\vDash \varphi$. Como $\mathbf{QK}[\cdot]^m$ é correto, inferimos, a partir do Lema 6.4.8, que $\vDash \varphi \leftrightarrow \mathbf{t}(\varphi)$. Disso e da suposição inicial, é fácil ver que $\vDash \mathbf{t}(\varphi)$. Pela Definição 6.4.3, $\mathbf{t}(\varphi)$ pertence a $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$ e, portanto, não contém anúncios públicos. Sabemos que estamos lidando com exatamente o mesmo tipo de modelo epistêmico que usamos para $\mathbf{QK}^m$, e também que as condições semânticas para fórmulas de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$ sem operadores de anúncio público são exatamente as mesmas que as de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}}$. Assim, como $\mathbf{QK}^m$ é completo, de $\vDash \mathbf{t}(\varphi)$, inferimos que ele contém o teorema $\vdash \mathbf{t}(\varphi)$. Sendo $\mathbf{QK}[\cdot]^m$ uma extensão de $\mathbf{QK}^m$, segue-se que $\vdash \mathbf{t}(\varphi)$ também é teorema de $\mathbf{QK}[\cdot]^m$. Finalmente, sabendo que $\vdash \varphi \leftrightarrow \mathbf{t}(\varphi)$, concluímos $\vdash \varphi$, como queríamos demonstrar. □

A prova do teorema a seguir será omitida, por repetir exatamente a estratégia anterior, alterando-se somente os sistemas e classes de estruturas correspondentes.

Teorema 6.4.10 (Completude de $\mathbf{QT}[\cdot]^m$, $\mathbf{QS4}[\cdot]^m$ e $\mathbf{QS5}[\cdot]^m$)**.** *Os sistemas epistêmicos $\mathbf{QT}[\cdot]^m$, $\mathbf{QS4}[\cdot]^m$ e $\mathbf{QS5}[\cdot]^m$ são completos com respeito, respectivamente, à classe $\mathscr{S}^r$ de todas as estruturas reflexivas, à classe $\mathscr{S}^{rt}$ de todas as estruturas reflexivas transitivas, e à classe $\mathscr{S}^{re}$ de todas as estruturas reflexivas euclideanas. Em outras palavras, para qualquer fórmula φ em $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$, em cada um dos três casos discriminados,*

$$\vDash \varphi \ \Rightarrow \vdash \varphi$$

Recapitulando, consideremos todas as fórmulas de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$. Todas aquelas que forem válidas em $\mathscr{S}$ serão teoremas de $\mathbf{QK}[\cdot]^m$; todas que forem válidas em $\mathscr{S}^r$ serão teoremas de $\mathbf{QT}[\cdot]^m$; todas que forem válidas em $\mathscr{S}^{rt}$ serão teoremas de $\mathbf{QS4}[\cdot]^m$; e, finalmente, todas que forem válidas em $\mathscr{S}^{re}$ serão teoremas de $\mathbf{QS5}[\cdot]^m$.

6.5 ANÚNCIOS COM CONHECIMENTO DISTRIBUÍDO

Após detalharmos as extensões dinâmicas relativas aos sistemas epistêmicos $\mathbf{QK}^m$, $\mathbf{QT}^m$, $\mathbf{QS4}^m$ e $\mathbf{QS5}^m$, é natural pensarmos na possibilidade de acrescentar anúncios públicos também a $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$, $\mathbf{QT}\mathscr{D}^m$, $\mathbf{QS4}\mathscr{D}^m$ e $\mathbf{QS5}\mathscr{D}^m$.[8]

---

[8] Já explicamos na introdução a principal dificuldade com tentativas de construir $\mathbf{QK}\mathscr{C}^m$, $\mathbf{QT}\mathscr{C}^m$, $\mathbf{QS4}\mathscr{C}^m$ e $\mathbf{QS5}\mathscr{C}^m$, deixados de fora desta tese.

É justamente o que faremos na presente seção, aproveitando os resultados e definições fornecidos até o momento.

Sejam os símbolos da linguagem epistêmica $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}[\cdot]}$ exatamente como $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$, exceto pelo acréscimo da seguinte lista:

10. operadores modais de conhecimento distribuído $\mathscr{D}_G$ (para $G \subseteq A$).

Definição 6.5.1 (Fórmulas de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}[\cdot]}$)**.** *As fórmulas de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}[\cdot]}$ são definidas pela seguinte gramática, na notação BNF:*

$\varphi :: \perp \mid P^k(\vec{x}) \mid (x = y) \mid \varphi \to \varphi \mid \mathscr{K}_i\varphi \mid \mathscr{D}_G\varphi \mid \forall x\varphi \mid [\varphi]\varphi$

Evidentemente, a linguagem epistêmica $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}[\cdot]}$ consiste na exata combinação de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$ e $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}[\cdot]}$. Todas as convenções e definições destas duas devem ser consideradas também naquela. Por economia de espaço, omitiremos as condições semânticas, as quais são precisamente as mesmas das definições 3.1.8, 4.1.3 e 6.1.4, bem como seus respectivos corolários. Evitando a repetição desnecessária desses detalhes formais, podemos nos concentrar no que realmente interessa nesta tese: a axiomatizabilidade de $\mathbf{QK}\mathscr{D}[\cdot]^m$ e suas extensões.

Com esse propósito, se queremos reproduzir a mesma estratégia de redução de $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$ ao seu caso estático, precisamos, como nos demais casos estudados, de um esquema válido que, ao exibir a interação entre operadores de anúncio público e operadores de conhecimento distribuído, assegure a equivalência entre quaisquer fórmulas de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}[\cdot]}$ e suas correspondentes em $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$.

O esquema de redução que empregaremos foi coincidentemente citado de passagem em Wang e Ågotnes (2011), e é facilmente concebido a partir de **Conhec**$[\cdot]$. Trata-se de:

(6) $\qquad [\varphi]\mathscr{D}_G\psi \leftrightarrow (\varphi \to \mathscr{D}_G[\varphi]\psi)$

cuja validade mostramos a seguir.

Demonstração. (Ida) Suponhamos, para um grupo $G \subseteq A$ de agentes, algum modelo epistêmico M, um ponto w e atribuição σ arbitrárias, que $(M^\sigma, w) \nvDash \varphi \to \mathscr{D}_G[\varphi]\psi$; ou seja, que (i) $(M^\sigma, w) \vDash \varphi$ e que (ii) $(M^\sigma, w) \nvDash \mathscr{D}_G[\varphi]\psi$. De (ii), inferimos que, para algum $w_j \in W$: $(w, w_j) \in \bigcap_{i \in G} R_i$ & $(M^\sigma, w_j) \nvDash [\varphi]\psi$. Consequentemente, obtemos que, para algum (M', w'), acontecem $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w_j$ & $(M'^\sigma, w') \nvDash \psi$. Ora, como tanto w quanto w_j pertencem a $W^!$, pois ambos pertencem a $[\![\varphi]\!]^\sigma_M$, pela construção de $M|_{\varphi^\sigma}$ e de cada $R^!_i$, sabemos que $(w, w_j) \in \bigcap_{i \in G} R^!_i$, e, portanto, que $(M'^\sigma, w) \nvDash \mathscr{D}_G\psi$. Além disso, considerando-se, pelo que acabamos de dizer, que há um (M', w') no qual acontecem $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w$ & $(M'^\sigma, w) \vDash \neg\mathscr{D}_G\psi$; concluímos seguramente que $(M^\sigma, w) \vDash \langle\varphi\rangle\neg\mathscr{D}_G\psi$. Já vimos que, pelo Lema 6.1.6(4), isso é o mesmo que dizer $(M^\sigma, w) \nvDash [\varphi]\mathscr{D}_G\psi$.

(Volta) Suponhamos agora que $(M^\sigma, w) \nvDash [\varphi]\mathscr{D}_G\psi$. Isso equivale a dizer que, para algum (M', w'), acontecem $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w' = w$ & $(M'^\sigma, w') \nvDash \mathscr{D}_G\psi$. Ora, de $(M'^\sigma, w') \nvDash \mathscr{D}_G\psi$, inferimos que para algum $w_j \in W^!$, acontecem $(w', w_j) \in \bigcap_{i \in G} R_i^!$ & $(M'^\sigma, w_j) \nvDash \psi$. Obviamente, w_j também pertence a W. Podemos, é claro, dizer, acerca do mesmo modelo atualizado M', que há um (M', w'') tal que $M' = M|_{\varphi^\sigma}$ & $w'' = w_j$ & $(M'^\sigma, w'') \nvDash \psi$; e, por conseguinte, que $(M^\sigma, w_j) \nvDash [\varphi]\psi$. Como sabemos que $(w, w_j) \in \bigcap_{i \in G} R_i^!$, e, pela construção de cada $R_i^!$, não é difícil observar que $\bigcap_{i \in G} R_i^! \subseteq \bigcap_{i \in G} R_i$, concluímos que $(w, w_j) \in \bigcap_{i \in G} R_i$, e daí, que $(M^\sigma, w) \nvDash \mathscr{D}_G[\varphi]\psi$. Combinado ao resultado anterior de que $(M^\sigma, w) \vDash \varphi$, obtemos finalmente que $(M^\sigma, w) \nvDash \varphi \to \mathscr{D}_G[\varphi]\psi$, como queríamos provar. $\square$

Com o resultado acima, estamos autorizados a construir a axiomatização na Figura 12 para $\mathbf{QK}\mathscr{D}[\cdot]^m$. Todos os axiomas e regras dos sistemas epistêmicos anteriores estão repetidos, para comodidade do leitor. Além disso, como fizemos nos capítulos precedentes, definiremos as correspondentes extensões para $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$ logo a seguir.

Definição 6.5.2. *A axiomatização contida na Figura 12 define o sistema epistêmico de primeira ordem $\mathbf{QK}\mathscr{D}[\cdot]^m$. Além disso, seja uma fórmula φ qualquer de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}[\cdot]}$. Definimos, mediante o acréscimo dos seguintes esquemas de axiomas a $\mathbf{QK}\mathscr{D}[\cdot]^m$, os correspondentes sistemas:*

1. $\mathbf{QK}\mathscr{D}[\cdot]^m$ *com* **T** *e* $\mathbf{T}\mathscr{D}$ = $\mathbf{QT}\mathscr{D}[\cdot]^m$
2. $\mathbf{QK}\mathscr{D}[\cdot]^m$ *com* **T**, **4**, $\mathbf{T}\mathscr{D}$ *e* $\mathbf{4}\mathscr{D}$ = $\mathbf{QS4}\mathscr{D}[\cdot]^m$
3. $\mathbf{QK}\mathscr{D}[\cdot]^m$ *com* **T**, **5**, $\mathbf{T}\mathscr{D}$ *e* $\mathbf{5}\mathscr{D}$ = $\mathbf{QS5}\mathscr{D}[\cdot]^m$.

As extensões previstas na Definição 6.5.2 podem ser melhor visualizadas na Figura 13. Novamente, o diagrama sugere outras maneiras naturais de se obter as mesmas extensões; por exemplo, o sistema $\mathbf{QS5}\mathscr{D}[\cdot]^m$ também resulta de acrescentarmos os axiomas e regras relacionados com anúncios públicos à axiomatização já conhecida para o sistema estático $\mathbf{QS5}\mathscr{D}^m$. Em se tratando de $\mathbf{QS5}\mathscr{D}^m$, também se aplicam as mesmas observações feitas a respeito de $\mathbf{Gen}\forall^n$ e **NecDif** na Seção 3.3.

LP	*(todas as instâncias de tautologias clássicas)*
MP	$\varphi \to \psi,\ \varphi \Rightarrow \psi$
K	$\mathscr{K}_i(\varphi \to \psi) \to (\mathscr{K}_i\varphi \to \mathscr{K}_i\psi)$
Nec	$\varphi \Rightarrow \mathscr{K}_i\varphi$
K$\mathscr{D}$	$\mathscr{D}_G(\varphi \to \psi) \to (\mathscr{D}_G\varphi \to \mathscr{D}_G\psi)$
$\mathscr{D}$**1**	$\mathscr{D}_{\{i\}}\varphi \leftrightarrow \mathscr{K}_i\varphi$
$\mathscr{D}$**2**	$\mathscr{D}_G\varphi \to \mathscr{D}_{G'}\varphi$ (para $G \subseteq G'$)
Atom$[\cdot]$	$[\varphi]p \leftrightarrow (\varphi \to p)$
Distr$[\cdot]$	$[\varphi](\psi \to \xi) \leftrightarrow ([\varphi]\psi \to [\varphi]\xi)$
Conhec$[\cdot]$	$[\varphi]\mathscr{K}_i\psi \leftrightarrow (\varphi \to \mathscr{K}_i[\varphi]\psi)$
Comp$[\cdot]$	$[\varphi][\psi]\xi \leftrightarrow [(\varphi \wedge [\varphi]\psi)]\xi$
Barcan$[\cdot]$	$[\varphi]\forall x\psi \leftrightarrow \forall y[\varphi]\psi(x/\,y)$ (onde y não ocorre livre em φ, ψ)
Nec$[\cdot]$	$\varphi \Rightarrow [\psi]\varphi$
Vac$\forall$	$\forall x\varphi \leftrightarrow \varphi$ (onde x não ocorre livre em φ)
Distr$\forall$	$\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$
Inst$\forall$	$(\forall x\varphi \wedge \mathsf{E}(y)) \to \varphi(x/y))$
$\mathsf{E}\forall$	$\forall x\mathsf{E}(x)$
Gen$\forall$	$\varphi \Rightarrow \forall x\varphi$
Gen$\forall^n$	$\varphi_1 \to \mathscr{K}_i(\varphi_2 \to \ldots \mathscr{K}_i(\varphi_n \to \mathscr{K}_i\psi)\ldots)$ $\Rightarrow \varphi_1 \to \mathscr{K}_i(\varphi_2 \to \ldots \mathscr{K}_i(\varphi_n \to \mathscr{K}_i\forall x\psi)\ldots)$ (onde x não ocorre livre em $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$)
Id	$(x = x)$
Subst	$(x = y) \to (\varphi \to \varphi')$ (onde φ' é como φ exceto por conter y livre em 0 ou mais lugares nos quais φ contém x livre)
NecDif	$(x \neq y) \to \mathscr{K}_i(x \neq y)$

Figura 12 – O sistema $\mathbf{QK}\mathscr{D}[\cdot]^m$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{QK}\mathscr{D}[\cdot]^m \arrow[r] & \mathbf{QT}\mathscr{D}[\cdot]^m \arrow[r] & \mathbf{QS4}\mathscr{D}[\cdot]^m \arrow[r] & \mathbf{QS5}\mathscr{D}[\cdot]^m \\
\mathbf{QK}\mathscr{D}^m \arrow[r] \arrow[u] & \mathbf{QT}\mathscr{D}^m \arrow[r] \arrow[u] & \mathbf{QS4}\mathscr{D}^m \arrow[r] \arrow[u] & \mathbf{QS5}\mathscr{D}^m \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Figura 13 – Mais sistemas epistêmicos para *LAPQ*.

Repetindo o percurso habitual, enunciaremos a correção de $\mathbf{QK}\mathscr{D}[\cdot]^m$ e suas extensões, para em seguida, indicarmos, em linhas gerais, como podemos provar a completude desses sistemas acrescentando apenas alguns detalhes nos passos já usados para $\mathbf{QK}[\cdot]^m$.

Teorema 6.5.3 (Correção de $\mathbf{QK}\mathscr{D}[\cdot]^m$ com respeito a $\mathscr{S}$)**.** *O sistema* $\mathbf{QK}\mathscr{D}[\cdot]^m$ *é correto com respeito a $\mathscr{S}$ (a classe de todas as estruturas epistêmicas).*

Não detalharemos a prova do Teorema 6.5.3, pois decorre naturalmente dos teoremas 4.4.1 e 6.4.1.

Corolário 6.5.4. *Os seguintes sistemas são corretos com respeito às respectivas classes de estruturas epistêmicas:*

1. $\mathbf{QT}\mathscr{D}[\cdot]^m$ *é correto com respeito a $\mathscr{S}^r$;*

2. $\mathbf{QS4}\mathscr{D}[\cdot]^m$ *é correto com respeito a $\mathscr{S}^{rt}$;*

3. $\mathbf{QS5}\mathscr{D}[\cdot]^m$ *é correto com respeito a $\mathscr{S}^{re}$.*

Demonstração. Daremos apenas uma indicação geral da prova. Como os axiomas e regras característicos dos operadores de anúncio público são válidos em $\mathscr{S}$, são também válidos nas suas subclasses $\mathscr{S}^r$, $\mathscr{S}^{rt}$ e $\mathscr{S}^{re}$. Comparando as definições 4.3.1 e 6.5.2, é fácil percebermos que as respectivas extensões acima se distinguem de $\mathbf{QK}\mathscr{D}[\cdot]^m$ pelo acréscimo de esquemas específicos, os quais, nos casos estáticos, de acordo com o Corolário 4.4.2, provam somente fórmulas válidas naquelas correspondentes classes de estruturas discriminadas acima. Daí, é relativamente simples, embora tedioso, estender o resultado daquele Corolário 4.4.2 e do Teorema 6.5.3 para obtermos o presente resultado. $\square$

O próximo passo em direção à completude, repetindo a estratégia da Seção 6.4 requer uma função-tradução com cláusulas adicionais, quando comparada a $\mathbf{t}$.

Definição 6.5.5 (Tradução de uma fórmula de $\mathscr{L}^n_{\mathscr{K}\mathscr{D}[\cdot]}$)**.** *Definiremos recursivamente a* tradução de uma fórmula de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}[\cdot]}$ em $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$ *como a função* $\mathbf{t}'$*:* $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}[\cdot]} \longrightarrow \mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$ *comportando-se exatamente como a função* $\mathbf{t}$ *na Definição 6.4.3, exceto pelo acréscimo das duas condições seguintes:*

10. $\mathbf{t}'(\mathscr{D}_G\varphi) = \mathscr{D}_G\, \mathbf{t}'(\varphi)$

11. $\mathbf{t}'([\varphi]\mathscr{D}_G\psi) = \mathbf{t}'(\varphi \to \mathscr{D}_G[\varphi]\psi)$

De maneira correspondente, precisamos redefinir ligeiramente a medida de complexidade para fórmulas, acrescentando apenas uma condição.

Definição 6.5.6 (Complexidade de uma fórmula)**.** *Sejam φ e ψ fórmulas quaisquer de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}[\cdot]}$. A* complexidade de uma fórmula de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}[\cdot]}$ *é a função* $\mathbf{c}'$*:* $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}[\cdot]} \longrightarrow \mathbb{N}$*, comportando-se exatamente como a função* $\mathbf{c}$ *na Definição 6.4.5, exceto pelo acréscimo da condição:*

6. $\mathbf{c}'(\mathscr{D}_G\varphi) = 1 + \mathbf{c}'(\varphi)$

No antepenúltimo passo, nos asseguramos de que valem as seguintes propriedades.

Lema 6.5.7. *Em $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}[\cdot]}$, a função* $\mathbf{c}'$ *exibe as mesmas propriedades previstas para sua análoga* $\mathbf{c}$ *no Lema 6.4.7, e mais a seguinte:*

7. $\mathbf{c}'(\mathscr{D}_G[\varphi]\psi) < \mathbf{c}'([\varphi]\mathscr{D}_G\psi)$

O lema acima é garantido pela mesma demonstração de 6.4.7, uma vez acrescentado o caso relevante acima, cuja prova será omitida por ser muito similar à do item *4* naquele lema, substituindo-se apenas as ocorrências do operador $\mathscr{K}_i$ por $\mathscr{D}_G$ onde necessário.

Lema 6.5.8 (Equivalência entre uma fórmula e sua tradução)**.** *Seja φ uma fórmula qualquer de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}[\cdot]}$. Assim,*

$$\vdash \ \varphi \ \leftrightarrow \ \mathbf{t}'(\varphi)$$

Demonstração. A prova sai por indução sobre φ exatamente como no Lema 6.4.8, desde que garantidos os dois casos indutivos adicionais, detalhados a seguir.

φ é $\mathscr{D}_G\varphi'$. Como φ' é subfórmula de φ, pelo Lema 6.5.7 e por raciocínios usuais a partir da h.i., obtemos $\vdash \varphi' \to \mathbf{t}'(\varphi')$. Aplicando **Nec**$\mathscr{D}$ e **K**$\mathscr{D}$, temos $\vdash \mathscr{D}_G\varphi' \to \mathscr{D}_G\ \mathbf{t}'(\varphi')$. Por definição, $\mathscr{D}_G\ \mathbf{t}'(\varphi') = \mathbf{t}'(\mathscr{D}_G\varphi')$; portanto, $\vdash \mathscr{D}_G\varphi' \to \mathbf{t}'(\mathscr{D}_G\varphi')$. A volta do bicondicional usa a mesma estratégia.

φ é $[\varphi']\mathscr{D}_G\varphi''$. Sabemos, por **Conhec**$\mathscr{D}[\cdot]$, que $\vdash [\varphi']\mathscr{D}_G\varphi'' \leftrightarrow (\varphi' \to \mathscr{D}_G[\varphi']\varphi'')$. Pelo item *7* do Lema 6.5.7 e por raciocínios usuais a partir da h.i., inferimos facilmente $\vdash (\varphi' \to \mathscr{D}_G[\varphi']\varphi'') \to \mathbf{t}'(\varphi' \to \mathscr{D}_G[\varphi']\varphi'')$, e daí, que $\vdash [\varphi']\mathscr{D}_G\varphi'' \to \mathbf{t}'(\varphi' \to \mathscr{D}_G[\varphi']\varphi'')$. Aplicando o item *11* da Definição 6.5.5, obtemos $\vdash [\varphi']\mathscr{D}_G\varphi'' \to \mathbf{t}'([\varphi']\mathscr{D}_G\varphi'')$. A volta do bicondicional é óbvia. $\square$

E, finalmente, o resultado principal.

Teorema 6.5.9 (Completude de $\mathbf{QK}[\cdot]^m$ com respeito a $\mathscr{S}$)**.** *Seja φ uma fórmula qualquer de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}[\cdot]}$. Considerando-se a classe $\mathscr{S}$ de todas as estruturas epistêmicas e o sistema $\mathbf{QK}\mathscr{D}[\cdot]^m$:*

$$\models \varphi \ \Rightarrow \vdash \varphi$$

Ou seja, todas as fórmulas de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}[\cdot]}$ *válidas em* $\mathscr{S}$ *são teoremas de* $\mathbf{QK}\mathscr{D}[\cdot]^m$.

A prova do teorema acima é muito semelhante àquela do Teorema 6.4.9, requerendo as devidas alterações, mas será detalhada para comodidade do leitor, por conta das mudanças nas definições e teoremas relevantes.

Demonstração. Suponhamos $\models \varphi$. Como $\mathbf{QK}\mathscr{D}[\cdot]^m$ é correto, inferimos, a partir do Lema 6.5.8, que $\models \varphi \leftrightarrow \mathbf{t}'(\varphi)$. Disso e da suposição inicial, obtemos que $\models \mathbf{t}'(\varphi)$. Pela Definição 6.5.5, $\mathbf{t}'(\varphi)$ pertence a $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$ e, portanto, não contém anúncios públicos. Sabemos que estamos lidando com exatamente o mesmo tipo de modelo epistêmico que usamos para $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$, e também que as condições semânticas para fórmulas de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}[\cdot]}$ sem operadores de anúncio público são exatamente as mesmas que as de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}}$. Assim, como $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$ é completo, de $\models \mathbf{t}'(\varphi)$, inferimos que ele contém o teorema $\vdash \mathbf{t}'(\varphi)$. Sendo $\mathbf{QK}\mathscr{D}[\cdot]^m$ uma extensão de $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$, segue-se que $\vdash \mathbf{t}'(\varphi)$ também é teorema de $\mathbf{QK}\mathscr{D}[\cdot]^m$. Finalmente, sabendo que $\vdash \varphi \leftrightarrow \mathbf{t}'(\varphi)$, concluímos $\vdash \varphi$, como queríamos demonstrar. □

A prova do teorema a seguir é tediosa, porém fácil; e será omitida por repetir exatamente a estratégia anterior, alterando-se somente os sistemas e classes de estruturas correspondentes.

Teorema 6.5.10 (Completude de $\mathbf{QT}\mathscr{D}[\cdot]^m$, $\mathbf{QS4}\mathscr{D}[\cdot]^m$ e $\mathbf{QS5}\mathscr{D}[\cdot]^m$)**.** *Os sistemas epistêmicos* $\mathbf{QT}\mathscr{D}[\cdot]^m$, $\mathbf{QS4}\mathscr{D}[\cdot]^m$ *e* $\mathbf{QS5}\mathscr{D}[\cdot]^m$ *são completos com respeito, respectivamente, à classe* $\mathscr{S}^r$ *de todas as estruturas reflexivas, à classe* $\mathscr{S}^{rt}$ *de todas as estruturas reflexivas transitivas, e à classe* $\mathscr{S}^{re}$ *de todas as estruturas reflexivas euclideanas. Em outras palavras, para qualquer fórmula* φ *em* $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}[\cdot]}$*, em cada um dos três casos discriminados,*

$$\models \varphi \ \Rightarrow \vdash \varphi$$

Recapitulando, consideremos o conjunto das fórmulas de $\mathscr{L}^m_{\mathscr{K}\mathscr{D}[\cdot]}$. Todas aquelas que forem válidas em $\mathscr{S}$ serão teoremas de $\mathbf{QK}\mathscr{D}[\cdot]^m$; todas que forem válidas em $\mathscr{S}^r$ serão teoremas de $\mathbf{QT}\mathscr{D}[\cdot]^m$; todas que forem válidas em $\mathscr{S}^{rt}$ serão teoremas de $\mathbf{QS4}\mathscr{D}[\cdot]^m$; e, finalmente, todas que forem válidas em $\mathscr{S}^{re}$ serão teoremas de $\mathbf{QS5}\mathscr{D}[\cdot]^m$.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta tese, apresentamos duas famílias de sistemas para a lógica epistêmica de primeira ordem: uma de sistemas que chamamos de *estáticos* por não conterem operadores de anúncio público, e a outra, com as respectivas extensões da primeira mediante o acréscimo dos referidos operadores. Um panorama dos sistemas abordados pode ser visto na Figura 14. Faremos aqui, como esperado, alguns comentários de natureza mais geral acerca dos resultados obtidos, e apontaremos direções possíveis para pesquisa futura.

Nosso principal objetivo consistiu em desenvolver uma lógica do anúncio público de primeira ordem. Para alcançá-lo, contudo, foi necessário detalharmos a lógica epistêmica (estática) em sua base, não apenas para dar um caráter razoavelmente autocontido a esta tese, mas também para especificar os parâmetros dessa lógica de base, haja vista a imensa variedade de escolhas metodológicas disponíveis para a elaboração de lógicas modais de primeira ordem, como mencionamos no segundo capítulo. Naturalmente, escolhas específicas na lógica de base tendem a determinar também características em sua extensão dinâmica.

Além disso, destacamos, logo na introdução, que, exceto por cerca de meia dúzia de artigos com sistemas no estilo *S5*, preferidos pelos autores devido à afinidade desses sistemas com modelos computacionalmente fundados, não conseguimos encontrar na literatura outras apresentações de primeira ordem para a lógica epistêmica. Por essa razão, partimos da descrição de um sistema normal minimal $\mathbf{QK}^m$, e indicamos em linhas gerais, suas extensões $\mathbf{QT}^m$, $\mathbf{QS4}^m$ e $\mathbf{QS5}^m$. Uma motivação similar nos conduziu à descrição dos correspondentes sistemas $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$, $\mathbf{QT}\mathscr{D}^m$, $\mathbf{QS4}\mathscr{D}^m$ e $\mathbf{QS5}\mathscr{D}^m$, contendo adicionalmente axiomas para operadores $\mathscr{D}$ de conhecimento distribuído. Esses resultados foram distribuídos ao longo do terceiro e quarto capítulos.

Como indicamos na Seção 2.2, é desejável dispormos de sistemas mais fracos, por assim dizer, do que *S5* para investigar atitudes epistêmicas. Em que pese o fato de que mesmo um sistema normal mínimo no estilo *K* ainda pressuponha agentes epistêmicos dotados de onisciência lógica, algo certamente indesejável de um ponto de vista epistemológico, explicamos que esse tipo de idealização formal tem sua utilidade, e, além disso, oferece um parâmetro a partir do qual podemos explorar sistemas ainda mais fracos, como os não-normais, nos quais não valem, em geral, nem a regra de necessitação, nem o fecho epistêmico em enunciados condicionais.

Ainda assim, é importante comentarmos um ponto essencial. Mesmo que rejeitemos a introspecção positiva prevista em sistemas no estilo *S4*, pode aparentar estranho considerar sistemas normais ainda mais fracos nos quais

$$
\begin{tikzcd}
& \mathbf{QS5}[\cdot]^m \arrow[rr] & & \mathbf{QS5}\mathscr{D}[\cdot]^m \\
\mathbf{QS5}^m \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathbf{QS5}\mathscr{D}^m \arrow[ur] & \\
& \mathbf{QS4}[\cdot]^m \arrow[uu] \arrow[rr] & & \mathbf{QS4}\mathscr{D}[\cdot]^m \arrow[uu] \\
\mathbf{QS4}^m \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathbf{QS4}\mathscr{D}^m \arrow[uu] \arrow[ur] & \\
& \mathbf{QT}[\cdot]^m \arrow[uu] \arrow[rr] & & \mathbf{QT}\mathscr{D}[\cdot]^m \arrow[uu] \\
\mathbf{QT}^m \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathbf{QT}\mathscr{D}^m \arrow[uu] \arrow[ur] & \\
& \mathbf{QK}[\cdot]^m \arrow[uu] \arrow[rr] & & \mathbf{QK}\mathscr{D}[\cdot]^m \arrow[uu] \\
\mathbf{QK}^m \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathbf{QK}\mathscr{D}^m \arrow[uu] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Figura 14 – Panorama dos sistemas epistêmicos abordados nesta tese.

não valha nem mesmo o princípio **T** de veridicalidade. Em outras palavras, não faz sentido falar que um agente sabe que algo é o caso, se não estiver garantido que esse algo seja de fato o caso. Por que então nos ocuparmos com sistemas como $\mathbf{QK}^m$ e $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$?

Duas justificativas podem ser oferecidas. Primeiro, de um ponto de vista metodológico, é útil que tenhamos sistemas mínimos como $\mathbf{QK}^m$ e $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$ para efeito de comparação e melhor perspectiva dos demais (portanto, um interesse motivado mais formalmente). Em segundo lugar, e aqui suspeitamos de um território fértil para explorações futuras, como sistemas mais fracos do que T têm sido de algum interesse para a formalização de atitudes doxásticas, talvez o estudo de $\mathbf{QK}^m$ e $\mathbf{QK}\mathscr{D}^m$ e suas respectivas extensões $\mathbf{QK}[\cdot]^m$ e $\mathbf{QK}\mathscr{D}[\cdot]^m$ possam servir de base para explorar a dinâmica das mudanças *doxásticas*. Esse empreendimento não seria de modo algum trivial, posto que os anúncios públicos, como bem sabemos, são incompatíveis com a *serialidade* (ver Seção 1.4 e o item *2* do Teorema 6.2.1), uma característica usualmente exibida por sistemas doxásticos.

Pois bem, obedecendo às motivações filosóficas detalhadas ao longo do segundo capítulo, pudemos constatar que todos os sistemas epistêmicos quantificados desenvolvidos nesta tese exibiram as seguintes características, satisfazendo, assim, as diretrizes ali definidas:

1. cenários multiagentes

2. modelos relacionais no estilo usual (sem vizinhanças)

3. domínios quantificacionais típicos (sem contrapartes individuais)

4. domínios de quantificação variáveis ao longo dos pontos do modelo

5. quantificadores atualistas como primitivos

6. axiomatizações completas na semântica adotada

Além disso, detalhamos, dentro dos mesmos parâmetros, extensões contendo operadores de conhecimento distribuído. Em particular, dos sistemas estudados, aqueles contendo operadores de anúncio público também se caracterizam por conter:

7. anúncios públicos contendo quaisquer fórmulas da linguagem

Ainda acerca dos sistemas para *LAPQ*, a partir das considerações na Seção 5.2, bem como da breve mas pontual análise crítica que fizemos dos artigos de Ma (2011) e Kishida (2013) na Seção 5.3, todas aquelas características acima, quando reunidas, distinguem drasticamente nossa contribuição daquelas dos autores mencionados, e acreditamos serem suficientes para mostrar a necessidade e vantagens deste nosso trabalho.

É evidente que há muito ainda por ser desenvolvido nessa direção. Variações de nossos sistemas poderiam ser construídas a partir de linguagens epistêmicas que contivessem termos individuais flexíveis (constantes cuja denotação variasse ao longo dos pontos de um modelo). Isso certamente simplificaria a apresentação sintática das fórmulas envolvendo identidades contingentes, evitando nossa paráfrase mediante equivalências de propriedades. Contudo, o tratamento para constantes não rígidas em sistemas mais fracos do que *S5* não é nada trivial do ponto de vista semântico, e foi deixado de fora do presente trabalho.

Além disso, algo bastante desejável seria generalizar nossos resultados, estudando sistemas para *LAPQ* que tenham como base sistemas mais fracos do que $\mathbf{QK}^m$ (ou seja, sistemas não-normais), e considerando semântica de vizinhanças. Em particular, precisaríamos verificar se axiomas como **Distr**$[\cdot]$ e **Barcan**$[\cdot]$ continuariam válidos, apesar de seus análogos (com modalidades estáticas) não valerem em geral para aquela semântica.

Como já mencionamos de passagem no quinto capítulo, tem havido interesse pelo núcleo substitucional de *LAP* (HOLLIDAY et al., 2012), bem como por *anúncios arbitrários* (BALBIANI et al., 2007; FRENCH; DITMARSCH, 2008). Estender todos esses resultados para primeira ordem são um desdobramento naturalmente esperado. Outra investigação útil, de especial interesse para a área da computação, estaria em determinar fragmentos decidíveis de *LAPQ*.

Em qualquer dos casos, esperamos que nosso trabalho sirva como uma referência segura, e tenha cumprido satisfatoriamente seus objetivos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACZEL, P. *Non-Well-Founded Sets*. [S.l.]: C S L I Publications/Center for the Study of Language & Information, 1988. (CSLI Lecture Notes). ISBN 9780937073223.

ARMSTRONG, D. M. Does knowledge entail belief? *Proceedings of the Aristotelian Society*, v. 70, p. 21–36, 1969.

BALBIANI, P.; BALTAG, A.; DITMARSCH, H. P. van; HERZIG, A.; HOSHI, T.; LIMA, T. D. What can we achieve by arbitrary announcements?: A dynamic take on fitch's knowability. In: SAMET, D. (Ed.). *TARK*. [S.l.: s.n.], 2007. p. 42–51.

BALTAG, A.; MOSS, L. Logics for epistemic programs. *Synthese*, v. 139(2), p. 165–224, 2004.

BALTAG, A.; MOSS, L. S.; SOLECKI, S. *The Logic of Public Announcements, Common Knowledge, and Private Suspicions*. Bloomington, Indiana, November 1999.

BARCAN, R. C. A functional calculus of first order based on strict implication. *Journal of Symbolic Logic*, v. 11, n. 1, p. 1–16, 1946.

BELARDINELLI, F.; LOMUSCIO, A. Quantified epistemic logics with flexible terms. In: BENTHEM, J. van; JU, S.; VELTMAN, F. (Ed.). *A Meeting of the Minds: Proceedings of the Workshop on Logic, Rationality and Interaction (LORI07)*. [S.l.]: College Publications, 2007. p. 113–128.

BELARDINELLI, F.; LOMUSCIO, A. A complete first-order logic of knowledge and time. In: BREWKA, G.; LANG, J. (Ed.). *Proceedings of the 11th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR08)*. [S.l.]: AAAI Press, 2008. p. 705–714.

BELARDINELLI, F.; LOMUSCIO, A. First-order linear-time epistemic logic with group knowledge: An axiomatisation of the monodic fragment. In: ONO, H.; KANAZAWA, M.; QUEIROZ, R. J. G. B. de (Ed.). *WoLLIC*. [S.l.]: Springer, 2009. (Lecture Notes in Computer Science, v. 5514), p. 140–154. ISBN 978-3-642-02260-9.

BELARDINELLI, F.; LOMUSCIO, A. Quantified epistemic logics for reasoning about knowledge in multi-agent systems. *Artificial Intelligence*, v. 173(9-10), p. 982–1013, 2009.

BELARDINELLI, F.; LOMUSCIO, A. Interactions between time and knowledge in a first-order logic for multi-agent systems. In: LIN, F.; SATTLER, U.; TRUSZCZYNSKI, M. (Ed.). *KR*. [S.l.]: AAAI Press, 2010.

BENCIVENGA, E. Free logics. In: GABBAY, D. M.; GUENTHNER, F. (Ed.). *Handbook of Philosophical Logic, 2nd Edition*. [S.l.]: Kluwer, 2002. v. 5, p. 147–196.

BENTHEM, J. van. Open problems in logical dynamics. In: GABBAY, D.; GONCHAROV, S.; ZAKHARYASCHEV, M. (Ed.). *Mathematical Problems from Applied Logic I: Logics for the XXIst Century*. [S.l.]: Springer, 2006, (International Mathematical Series). p. 137–192. ISBN 9780387286884.

BENTHEM, J. van. *Modal Logic for Open Minds (Center for the Study of Language and Information - Lecture Notes)*. [S.l.]: Center for the Study of Language and Inf, 2010. ISBN 157586598X.

BENTHEM van. *Logical Dynamics of Information and Interaction*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011. ISBN 9781139500463.

BLACKBURN, P.; RIJKE, M. de; VENEMA, Y. *Modal Logic (Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science)*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002. ISBN 0521527147.

BURGESS, J. P. Basic tense logic. In: GABBAY, D.; GUENTHNER, F. (Ed.). *Handbook of Philosophical Logic: Volume II: Extensions of Classical Logic*. Dordrecht: Reidel, 1984. p. 89–133.

CARNAP, R. *Meaning and Necessity*. [S.l.]: University of Chicago Press, 1947.

CARNIELLI, W.; PIZZI, C. *Modalities and Multimodalities (Logic, Epistemology, and the Unity of Science)*. [S.l.]: Springer, 2009. ISBN 9048137624.

CHELLAS, B. *Modal Logic: An Introduction*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1980. ISBN 9780521295154.

CRESSWELL, M. In defence of the barcan formula. *Logique Et Analyse*, v. 135, n. 136, p. 271–282, 1991.

DITMARSCH, H. P. van. Descriptions of game actions. *Journal of Logic, Language and Information*, v. 11, p. 2002, 2002.

DITMARSCH, H. van. The logic of knowledge games: showing a card. In: POSTMA, E.; GYSSENS, M. (Ed.). *Proceedings of BNAIC 99*. [S.l.]: Maastricht University, 1999. p. 35–42.

DITMARSCH, H. van. *Knowledge Games*. Tese (Doutorado) — University of Groningen, 2000.

DITMARSCH, H. van; HOEK, W. van der; KOOI, B. *Dynamic Epistemic Logic (Synthese Library)*. [S.l.]: Springer, 2007. ISBN 1402069081.

FAGIN, R.; HALPERN, J. Y.; MOSES, Y.; VARDI, M. Y. *Reasoning About Knowledge*. [S.l.]: The MIT Press, 1995. ISBN 0262061627.

FAGIN, R.; HALPERN, J. Y.; VARDI, M. Y. What can machines know?: On the properties of knowledge in distributed systems. *J. ACM*, ACM, New York, NY, USA, v. 39, n. 2, p. 328–376, abr. 1992. ISSN 0004-5411.

FITTING, M. Foil axiomatized. *Studia Logica*, v. 84, p. 1–22, 2006.

FITTING, M.; MENDELSOHN, R. L. *First-Order Modal Logic (Synthese Library)*. [S.l.]: Springer, 1999. ISBN 0792353358.

FRENCH, T.; DITMARSCH, H. P. van. Undecidability for arbitrary public announcement logic. In: ARECES, C.; GOLDBLATT, R. (Ed.). *Advances in Modal Logic*. [S.l.]: College Publications, 2008. p. 23–42. ISBN 978-1-904987-68-0.

GABBAY, D.; HODKINSON, I.; REYNOLDS, M. *Temporal Logic: Mathematical Foundations and Computational Aspects*. [S.l.]: Clarendon Press, 1994. (Oxford logic guides, v. 1). ISBN 9780198537694.

GARSON, J. W. Quantification in modal logic. In: GABBAY, D.; GUENTHNER, F. (Ed.). *Handbook of Philosophical Logic: Volume II: Extensions of Classical Logic*. Dordrecht: Reidel, 1984. p. 249–307.

GERBRANDY, J. *Bisimulations on Planet Kripke*. Tese (Doutorado) — University of Amsterdam, 1999.

GERBRANDY, J.; GROENEVELD, W. Reasoning about information change. *Journal of Logic, Language and Information*, Kluwer Academic Publishers, Hingham, MA, USA, v. 6, n. 2, p. 147–169, abr. 1997. ISSN 0925-8531.

HALPERN, J. Y. Should knowledge entail belief? *Journal of Philosophical Logic*, v. 25(5), p. 483 – 494, 1996.

HALPERN, J. Y.; MOSES, Y. Knowledge and common knowledge in a distributed environment. *J. ACM*, ACM, New York, NY, USA, v. 37, n. 3, p. 549–587, jul. 1990. ISSN 0004-5411.

HANSEN, J. U. A hybrid public announcement logic with distributed knowledge. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, v. 273, n. 0, p. 33 – 50, 2011. ISSN 1571-0661. International Workshop on Hybrid Logic and Applications 2010 (HyLo 2010).

HAREL, D.; KOZEN, D.; TIURYN, J. *Dynamic Logic (Foundations of Computing)*. [S.l.]: The MIT Press, 2000. ISBN 0262082896.

HENDRICKS, V.; ROY, O. *Epistemic Logic: 5 Questions*. [S.l.]: Automatic Press Publishing, 2010. (5 Questions). ISBN 9788792130242.

HINTIKKA, J. *Knowledge and Belief - An Introduction to the Logic of the Two Notions (Texts in Philosophy)*. [S.l.]: College Publications, 2005. ISBN 1904987087.

HOEK, W. van der. Systems for knowledge and belief. *Journal of Logic and Computation*, v. 3(2), p. 173 – 195, 1993.

HOLLIDAY, W. Epistemic logic and epistemology. In: HANSSON, S.; HENDRICKS, V. (Ed.). *Handbook of Formal Philosophy*. [S.l.]: Springer, 2014.

HOLLIDAY, W.; HOSHI, T.; ICARD THOMASF., I. Information dynamics and uniform substitution. *Synthese*, Springer Netherlands, v. 190, n. 1, p. 31–55, 2013. ISSN 0039-7857.

HOLLIDAY, W.; PERRY, J. Roles, rigidity, and quantification in epistemic logic. In: BALTAG, A.; SMETS, S. (Ed.). *Johan van Benthem on Logic and Information Dynamics*. [S.l.]: Springer International Publishing, 2014, (Outstanding Contributions to Logic, v. 5). p. 591–629. ISBN 978-3-319-06024-8.

HOLLIDAY, W. H.; HOSHI, T.; ICARD, T. F. A uniform logic of information dynamics. In: *Advances in Modal Logic 9*. [S.l.]: College Publications, 2012.

HOLLIDAY, W. H.; III, T. F. I. Moorean phenomena in epistemic logic. In: BEKLEMISHEV, L. D.; GORANKO, V.; SHEHTMAN, V. (Ed.). *Advances in Modal Logic*. [S.l.]: College Publications, 2010. p. 178–199. ISBN 978-1-84890-013-4.

HUGHES, G.; CRESSWELL, M. *A New Introduction to Modal Logic*. [S.l.]: Routledge, 1996. ISBN 0415126002.

KISHIDA, K. Public announcements under sheaves. In: MOTOMURA, Y.; BUTLER, A.; BEKKI, D. (Ed.). *New Frontiers in Artificial Intelligence*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2013, (Lecture Notes in Computer Science, v. 7856). p. 96–108. ISBN 978-3-642-39930-5.

KOOI, B. Dynamic term-modal logic. In: *In A Meeting of the Minds*. [S.l.]: College Publications, 2007. p. 173–186.

KRIPKE, S. *Naming and Necessity*. [S.l.]: Blackwell Publishing, 1981.

KRIPKE, S. A. Semantical considerations on modal logic. *Acta Philosophica Fennica*, v. 16, n. 1963, p. 83–94, 1963.

LENZEN, W. Recent work in epistemic logic. *Acta Philosophica Fennica*, v. 30, p. 1–219, 1978.

LENZEN, W. Knowledge, belief, and subjective probability: Outlines of a unified system of epistemic/doxastic logic. In: HENDRICKS, V.; JORGENSEN, K.; PEDERSEN, S. (Ed.). *Knowledge Contributors*. [S.l.]: Springer Netherlands, 2003.

LUTZ, C. Complexity and succinctness of public announcement logic. In: *Proceedings of the Fifth International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems*. New York, NY, USA: ACM, 2006. (AAMAS ’06), p. 137–143. ISBN 1-59593-303-4.

MA, M. Mathematics of public announcements. In: *Proceedings of the Third International Conference on Logic, Rationality, and Interaction*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. (LORI’11), p. 193–205. ISBN 978-3-642-24129-1.

MA, M.; PALMIGIANO, A.; SADRZADEH, M. Algebraic semantics and model completeness for intuitionistic public announcement logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, v. 165, n. 4, p. 963 – 995, 2014. ISSN 0168-0072.

MENDELSON, E. *Introduction to Mathematical Logic, Fifth Edition (Discrete Mathematics and Its Applications)*. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2009. ISBN 1584888768.

MEYER, J.-J. C.; HOEK, W. van der. *Epistemic Logic for AI and Computer Science (Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science)*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004. ISBN 0521602807.

MURRAY, D.; SYTSMA, J.; LIVENGOOD, J. God knows (but does god believe?). *Philosophical Studies*, v. 166, n. 1, p. 83–107, 2013.

MYERS-SCHULZ, B.; SCHWITZGEBEL, E. Knowing that p without believing that p. *Noûs*, v. 47, n. 2, p. 371–384, 2013.

PLAZA, J. A. Logic of public communications. *Synthese*, Springer Netherlands, v. 158, p. 165–179, 2007.

PRATT, V. R. Semantical consideration on floyd-hoare logic. In: *Proceedings of the 17th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*. Washington, DC, USA: IEEE Computer Society, 1976. (SFCS '76), p. 109–121.

PRIOR, A. *Time and Modality*. [S.l.]: Oxford University Press, 2003. (John Locke Lecture). ISBN 9780198241584.

THOMASON, R. H. Some completeness results for modal predicate calculi. In: LAMBERT, K. (Ed.). *Philosophical Problems in Logic: Some Recent Developments*. [S.l.]: D. Reidel, 1970. p. 56–76.

VELTMAN, F. Defaults in update semantics. *Journal of Philosophical Logic*, v. 25, n. 3, p. 221–261, 1996.

WANG, Y.; CAO, Q. On axiomatizations of public announcement logic. *Synthese*, Springer Netherlands, v. 190, n. 1, p. 103–134, 2013. ISSN 0039-7857.

WANG, Y. N.; AGOTNES, T. Public announcement logic with distributed knowledge. In: DITMARSCH, H.; LANG, J.; JU, S. (Ed.). *Logic, Rationality, and Interaction*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2011, (Lecture Notes in Computer Science, v. 6953). p. 328–341. ISBN 978-3-642-24129-1.

WILLIAMSON, T. *Knowledge and its limits*. [S.l.]: Oxford University Press, 2000. ISBN 9780198250432.

WOLTER, F. First order common knowledge logics. *Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic*, v. 65(2), p. 249–271, 2000.

WOLTER, F.; ZAKHARYASCHEV, M. Axiomatizing the monodic fragment of first-order temporal logic. *Annals of Pure Applied Logic*, v. 118, n. 1-2, p. 133–145, 2002.

WOOLDRIDGE, M. Computationally grounded theories of agency. In: *ICMAS*. [S.l.]: IEEE Computer Society, 2000. p. 13–22. ISBN 0-7695-0625-9.

WRIGHT, G. von. *An essay in modal logic*. [S.l.]: North-Holland Publishing Company, 1951. (Studies in logic and the foundations of mathemathics).

APÊNDICE A – Considerações sobre os Esquemas de Barcan

A discussão encontrada na Seção 2.3 desta tese conduz a uma curiosidade natural; a saber, se nossos quantificadores possibilistas relativos Π' e Σ' seriam suficientes para validar, em um *framework* semântico com domínios variáveis, os esquemas de Barcan, reformulados com esses quantificadores, para as modalidades estáticas usuais. Enunciando mais claramente, queremos saber se os seguintes princípios são válidos na semântica relacional descrita ao longo do Capítulo 3:

(1) $\Pi' x \Box\varphi \to \Box\Pi' x\varphi$ (ou, equivalentemente: $\Diamond\Sigma' x\varphi \to \Sigma' x\Diamond\varphi$)

(2) $\Box\Pi' x\varphi \to \Pi' x\Box\varphi$ (ou, equivalentemente: $\Sigma' x\Diamond\varphi \to \Diamond\Sigma' x\varphi$)

Caso essas validades possam ser garantidas, isso representaria um notável trunfo em defesa da quantificação possibilista relativa, por mostrar que esta reproduz o comportamento mais notório dos quantificadores possibilistas irrestritos (a validação dos esquemas de Barcan). Infelizmente, pelo menos da maneira como Π' e Σ' estão definidos, um tal resultado para quaisquer estruturas (ainda) não está disponível, nem sabemos se uma definição mais refinada resolveria o problema.

Entretanto, um resultado parcial talvez mereça ser mencionado, e lance alguma luz sobre futuras tentativas nessa direção. É possível mostrar que tanto (1) como (2) são válidos em estruturas reflexivas transitivas (com domínios variáveis), bastante naturais em contextos epistêmicos, conforme já indicamos. Empregando o aparato formal do Capítulo 3, segue a prova. (Por simplicidade, usaremos os operadores modais aléticos em vez dos epistêmicos.)

Demonstração. (1) Suponhamos que, para um modelo epistêmico reflexivo transitivo M, um ponto w e uma atribuição σ arbitrários em M, seja o caso que $(M^\sigma, w) \models \Pi' x\Box\varphi$. Por definição, temos que $(M^\sigma, w) \models \forall x\Box\varphi \wedge \Box\forall x\Box\Box\varphi$. Portanto, para todos os pontos w' tais que wRw', ocorre $(M^\sigma, w') \models \forall x\Box\Box\varphi$. Consequentemente, em cada w' considerado, para todos os objetos $o \in Q(w')$, $(M^{\sigma\binom{x}{o}}, w') \models \Box\Box\varphi$. Como o modelo é reflexivo, $(M^{\sigma\binom{x}{o}}, w') \models \Box\varphi$; daí, $(M^\sigma, w') \models \forall x\Box\varphi$; e, desse modo, $(M^\sigma, w) \models \Box\forall x\Box\varphi$. Como o modelo é transitivo, sabemos também que $(M^\sigma, w) \models \Box\Box\forall x\Box\varphi$. Além disso, do passo anterior $(M^{\sigma\binom{x}{o}}, w') \models \Box\varphi$, obtemos, por reflexividade do modelo, $(M^{\sigma\binom{x}{o}}, w') \models \varphi$, e, então, $(M^\sigma, w') \models \forall x\varphi$. Deste último passo, inferimos que $(M^\sigma, w) \models \Box\forall x\varphi$. Combinando os resultados obtidos, sabemos que $(M^\sigma, w) \models \Box\forall x\varphi \wedge \Box\Box\forall x\Box\varphi$. Por raciocínios usuais, obtemos $(M^\sigma, w) \models \Box(\forall x\varphi \wedge \Box\forall x\Box\varphi)$, e finalmente por definição: $(M^\sigma, w) \models \Box\Pi' x\varphi$.

(2) Suponhamos, agora, que $(M^\sigma, w) \models \Box\Pi' x\varphi$. Por definição, temos que $(M^\sigma, w) \models \Box(\forall x\varphi \wedge \Box\forall x\Box\varphi)$. Disso, inferimos, por reflexividade, que $(M^\sigma, w) \models \forall x\varphi \wedge \Box\forall x\Box\varphi$, e, obviamente, que $(M^\sigma, w) \models \Box\forall x\Box\varphi$. Nova-

mente por reflexividade, $(M^\sigma, w) \vDash \forall x \Box \varphi$. Do segundo passo acima, também sabemos que, para todos os pontos w' tais que wRw', $(M^\sigma, w') \vDash \forall x \varphi \wedge \Box \forall x \Box \varphi$. Ora, de $(M^\sigma, w') \vDash \Box \forall x \Box \varphi$, obtemos, por reflexividade, que $(M^\sigma, w') \vDash \forall x \Box \varphi$. Isso equivale a dizer que, para todos os objetos $o \in Q(w')$, $(M^{\sigma\binom{x}{o}}, w') \vDash \Box \varphi$. Como o modelo é transitivo, $(M^{\sigma\binom{x}{o}}, w') \vDash \Box\Box \varphi$, e, portanto, $(M^\sigma, w') \vDash \forall x \Box\Box \varphi$. Como w' era arbitrário, $(M^\sigma, w) \vDash \Box \forall x \Box\Box \varphi$. Finalmente, combinando os resultados, inferimos que $(M^\sigma, w) \vDash \forall x \Box \varphi \wedge \Box \forall x \Box\Box \varphi$; o que, por definição, corresponde a $(M^\sigma, w) \vDash \Pi' x \Box \varphi$, como queríamos demonstrar. $\Box$

Como estamos supondo estruturas reflexivas, naturalmente os primeiros conjuntivos das definições originais de Π' e Σ' são supérfluos. Contudo, preferimos preservá-los para não perder de vista a possibilidade de generalizar os resultados acima para quaisquer estruturas.

Um aspecto no mínimo curioso que ainda merece ser mencionado é o seguinte. Em axiomatizações para lógicas modais de primeira ordem que considerem modelos sem restrição sobre seus domínios (e que admitam, portanto, a possibilidade de domínios variáveis), normalmente não temos esquemas válidos exibindo alguma interação *relevante* entre quantificadores e modalidades, como nos esquemas de Barcan. Sem interações que façam diferença (à maneira de Barcan), ficamos com a impressão de que a combinação de lógica modal e lógica de primeira ordem não gera uma lógica realmente interessante, que ultrapasse a mera junção das duas linguagens e axiomatizações (apesar de seus méritos no ganho de expressividade).

O resultado mostrado neste apêndice, contudo, parece mostrar algo nada trivial envolvendo a interação entre modalidades e quantificadores, pelo menos em sistemas nos quais valham reflexividade e transitividade. Embora o resultado esteja formulado em termos de quantificadores possibilistas relativos Π' e Σ', recordemos que as fórmulas que os contêm são meras abreviações de esquemas menos óbvios de fórmulas com quantificadores atualistas, adotados ao longo desta tese como primitivos. Portanto, com um pouco de paciência, é possível entrever, pelo menos a partir de certa altura em nossa família de sistemas modais, aquela desejada interação entre modalidades e quantificadores, agregando relevância à combinação de lógicas modais e de primeira ordem.

Um comportamento ainda mais fascinante acontece quando, ao incrementarmos nossas linguagens com operadores dinâmicos de anúncio público, e apesar os esquemas de Barcan não valerem nos sistemas de base, descobrimos a validade do esquema **FB** no sistema minimal $\mathbf{QK}[\cdot]^m$, análogo aos esquemas de Barcan, e cuja importância foi discutida na ocasião.