

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**  
**CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**ANÁLISE DE VIBRAÇÕES DE COMPONENTES ESTRUTURAIS TIPO  
VIGAS ACOPLADAS PELO MÉTODO DA MOBILIDADE**

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**FÁBIO FIATES**

Florianópolis, 1996

ANÁLISE DE VIBRAÇÕES DE COMPONENTES ESTRUTURAIS TIPO  
VIGAS ACOPLADAS PELO MÉTODO DA MOBILIDADE

FÁBIO FIATES

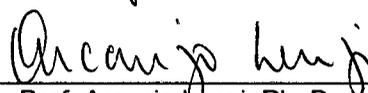
ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO  
VIBRAÇÕES E ACÚSTICA, E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. Abelardo de Queiroz, Ph. D.  
Coordenador

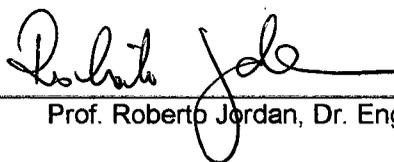


Prof. Arcanjo Lenzi, Ph. D.  
Orientador

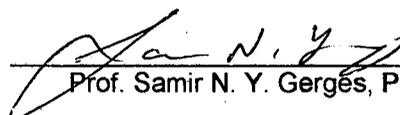
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Clóvis S. de Barcellos, Ph. D.



Prof. Roberto Jordan, Dr. Eng.



Prof. Samir N. Y. Gerges, Ph. D.

## AGRADECIMENTOS

- Ao Arcanjo, pela amizade, pelo aprendizado e pela orientação precisa
- À Giovanna, por tudo
- À minha família, pela educação correta
- Aos amigos Acir, Edmilson, Carlito, Eduardo, Trator, Luciano, Humberto, Newton, Júlio, Gustavo, Joel, Vitoy, Wiliam, Marcão, Márcio, Paiotti, Pesca ...pelas horas de conversa
- À PETROBRAS S/A, e em especial ao Eng. Ernani Luiz Sztajnbok, do CENPES, pela idéia do trabalho de dissertação e pelo apoio financeiro durante parte deste trabalho
- À Capes, pelo apoio financeiro
- À todas as pessoas que tenham contribuído para a realização deste trabalho

## SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS .....	v
LISTA DE FIGURAS E TABELAS .....	viii
RESUMO .....	xii
ABSTRACT .....	xiii
1 - INTRODUÇÃO .....	01
2 - CONCEITOS BÁSICOS .....	05
2.1 - Ondas Longitudinais .....	05
2.2 - Ondas Torsionais .....	08
2.3 - Ondas de Flexão .....	10
2.4 - Ondas de Flexão em Vigas Timoshenko .....	13
2.5 - Condições de Contorno numa União.....	16
2.5.1 - Vigas Unidas em L .....	17
2.5.2 - Vigas Unidas em T .....	18
2.6 - Mobilidades.....	19
2.6.1 - Força no Plano - Vigas Simples Força na Extremidade .....	23
2.6.2 - Força no Plano - Vigas em L .....	26
2.6.3 - Força Transversal - Vigas em L .....	27
2.6.4 - Força Transversal - Vigas em T .....	28
2.6.5 - Comparação com Resultados Obtidos por Outro Método .....	29
2.6.5.1 - Descrição da Análise Numérica .....	30
2.6.5.2 - Resultados de Mobilidades .....	31
2.6.5.2.1 - Duas Vigas em L, Excitadas por uma Força no Plano .....	31
2.6.5.2.2 - Duas Vigas em L, Excitadas por uma Força Transversal .....	34
2.6.5.2.3 - Três Vigas em T, Excitadas por uma Força Transversal .....	37
3 - FLUXO DE POTÊNCIA ENTRE VIGAS UNIDAS EM “L” .....	40
3.1 - Vigas Euler-Bernoulli Unidas em L, Excitadas por Forças no Plano .....	41
3.2 - Vigas Euler-Bernoulli Unidas em L, Excitadas por Forças Transversais .....	45
3.3 - Vigas Timoshenko Unidas em L, Excitadas por Forças Transversais .....	54
4 - APLICAÇÃO DO MÉTODO DA MOBILIDADE PARA ANÁLISE DE RESPOSTA DE VIGAS ACOPLADAS .....	61
4.1 - Vigas Dispostas em Forma de Quadrado - Excitação no Plano .....	62

4.2 - Vigas Dispostas em Forma de Quadrado - Excitação Transversal .....	66
4.3 - Grelha - Força Transversal .....	72
4.4 - Análise Paramétrica do Fluxo de Potência .....	81
5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	86
Referências Bibliográficas .....	89
Apêndice A - Mobilidades Vigas em L, força no plano .....	94
Apêndice B - Mobilidades Vigas em L, força transversal .....	99
Apêndice C - Mobilidades Vigas em T, força transversal .....	110

## LISTA DE SÍMBOLOS

Abaixo estão relacionados os símbolos utilizados ao longo deste trabalho.

A - área

b - dimensão da base da seção de viga retangular, dimensão da largura da aba viga I

$c_f$  - velocidade de propagação da onda de flexão

$c_L$  - velocidade de propagação da onda longitudinal

$c_t$  - velocidade de propagação da onda de torção

d - dimensão da altura da viga I

E - módulo de elasticidade

$F_x$  - força cortante na direção x

$F_y$  - força cortante na direção y

$F_z$  - força cortante na direção z

G - módulo de elasticidade ao cisalhamento

h - dimensão da altura da seção de viga retangular, dimensão da espessura da aba viga I

I - momento de inércia

$k_f$  - número de onda de flexão

$k_L$  - número de onda longitudinal

$k_t$  - número de onda de torção

L - comprimento da viga

$m'$  - massa por unidade de comprimento

$M_x$  - momento flexor na direção x

$M_z$  - momento flexor na direção z

$M_y$  - momento flexor na direção y

Q - rigidez à torção

r - coeficiente de Timoshenko

$t_a$  - espessura da alma da viga I

$T_x$  - momento torsor na direção x

$T_y$  - momento torsor na direção y

$u_x$  - deslocamento axial na direção x

$u_y$  - deslocamento axial na direção y

$U_x$  - força axial na direção x  
 $U_y$  - força axial na direção y  
 $v_y$  - deslocamento transversal na direção y  
 $v_z$  - deslocamento transversal na direção z  
 $w_x$  - deslocamento angular de flexão na direção x  
 $w_y$  - deslocamento angular de flexão na direção y  
 $w_z$  - deslocamento angular de flexão na direção z  
 $W_F$  - fluxo de potência transmitido pela força cortante  
 $W_f$  - fluxo de potência total transmitido pelos esforços flexores  
 $W_{in}$  - potência de entrada  
 $W_L$  - fluxo de potência transmitido pelo esforço axial  
 $W_M$  - fluxo de potência transmitido pelo momento flexor  
 $W_t$  - fluxo de potência transmitido pelo esforço torsional  
 $W_{12FL}$  - potência transferida através do acoplamento flexão - longitudinal  
 $W_{12LF}$  - potência transferida através do acoplamento longitudinal - flexão  
 $W_{12FF}$  - potência transferida através do acoplamento flexão - flexão  
 $W_{12FT}$  - potência transferida através do acoplamento flexão - torção  
 $W_{12TF}$  - potência transferida através do acoplamento torção - flexão  
 $Y$  - Resposta em Frequência, Mobilidade  
 $\lambda_a, \lambda_b$  - número de onda de vigas Timoshenko  
 $\Lambda$  - momento de inércia de massa por unidade de comprimento  
 $\nu$  - coeficiente de Poisson  
 $\rho$  - densidade  
 $\eta$  - fator de perda (amortecimento)  
 $\gamma$  - deformação cisalhante  
 $\phi$  - deslocamento angular  
 $\theta_x$  - deslocamento angular de torção na direção x  
 $\theta_y$  - deslocamento angular de torção na direção y

## CONVENÇÕES

O símbolo \* ao lado da variável indica complexo conjugado

O símbolo  $\bar{\phantom{x}}$  sobre a variável indica variável complexa

O símbolo  $\text{Re}(\phantom{x})$  indica a parte real do termo entre parênteses

O subscrito L indica variável relacionada à onda longitudinal

O subscrito t indica variável relacionada à onda torsional

O subscrito f indica variável relacionada à onda de flexão

O símbolo  $j$  indica a unidade imaginária,  $j = \sqrt{-1}$

O símbolo  $\dot{\phantom{x}}$  sobre a variável indica derivada temporal



- Figura 3.4:** Razão de potência entre duas vigas em L, de seção I, com as seguintes características:  $E = 2,1 \times 10^{11}$  Pa;  $\rho = 8000$  kg / m<sup>3</sup>;  $\eta = 0,01$ ;  $d1 = 0,5$  m;  $t_{a1} = 0,02$  m;  $b1 = 0,2$  m;  $h1 = 0,02$  m;  $d2 = 0,2$  m;  $t_{a2} = 0,015$  m;  $b2 = 0,12$  m;  $h2 = 0,015$  m;  $L1 = 4$  m;  $L2 = 5$  m. .... 45
- Figura 3.5:** Esforços e deslocamentos atuantes em duas vigas Euler em L, excitadas por força transversal ..... 46
- Figura 3.6:** Representação dos esforços e deslocamentos de duas vigas Euler unidas em L, usados no cálculo do fluxo de potência ..... 47
- Figura 3.7:** Razão de potência entre duas vigas em L, seção quadrada, com as seguintes características:  $E = 2,1 \times 10^{11}$  Pa;  $\rho = 8000$  kg / m<sup>3</sup>;  $\nu = 0,29$ ;  $\eta = 0,01$ ;  $b1 = h1 = 0,25$  m;  $L1 = 1,0$  m;  $b2 = h2 = 0,25$  m;  $L2 = 4,0$  m. .... 49
- Figura 3.8:** Razão de potência entre duas vigas em L, seção quadrada, com as seguintes características:  $E = 2,1 \times 10^{11}$  Pa;  $\rho = 8000$  kg / m<sup>3</sup>;  $\nu = 0,29$ ;  $\eta = 0,01$ ;  $b1 = h1 = 0,05$  m;  $L1 = 3,0$  m;  $b2 = h2 = 0,25$  m;  $L2 = 1,0$  m. .... 49
- Figura 3.9:** Razão de potência e desvio padrão para o acoplamento flexão-flexão da Figura 3.8 ..... 50
- Figura 3.10:** Razão de potência e desvio padrão para o acoplamento flexão-flexão da Figura 3.8 ..... 51
- Figura 3.11:** Razão de potência e desvio padrão para o acoplamento flexão-flexão da Figura 3.8 ..... 51
- Figura 3.12:** Razão de potência entre duas vigas em L, de seção I, com as seguintes características:  $E = 2,1 \times 10^{11}$  Pa;  $\rho = 8000$  kg / m<sup>3</sup>;  $\nu = 0,29$ ;  $\eta = 0,01$ ;  $d1 = 0,2$  m;  $t_{a1} = 0,015$  m;  $b1 = 0,12$  m;  $h1 = 0,015$  m;  $L1 = 4,0$  m;  $d2 = 0,5$  m;  $t_{a2} = 0,02$  m;  $b2 = 0,2$  m;  $h2 = 0,02$  m;  $L2 = 5,0$  m. .... 52
- Figura 3.13:** Comparação de razão de potências pelos métodos analítico e numérico, acoplamento flexão-torção, para as seguintes vigas:  $E = 2,1 \times 10^{11}$  Pa;  $\rho = 8000$  kg / m<sup>3</sup>;  $\nu = 0,29$ ;  $\eta = 0,01$ ;  $b1 = h1 = 0,25$  m;  $L1 = 1,0$  m;  $b2 = h2 = 0,25$  m;  $L2 = 4,0$  m. .... 53
- Figura 3.14:** Comparação de razão de potências pelos métodos analítico e numérico, acoplamento torção-flexão, para as seguintes vigas:  $E = 2,1 \times 10^{11}$  Pa;  $\rho = 8000$  kg / m<sup>3</sup>;  $\nu = 0,29$ ;  $\eta = 0,01$ ;  $b1 = h1 = 0,25$  m;  $L1 = 1,0$  m;  $b2 = h2 = 0,25$  m;  $L2 = 4,0$  m. .... 53

<b>Figura 3.15:</b> Comparação de razão de potências pelos métodos analítico e numérico, acoplamento flexão-flexão, para as seguintes vigas: $E = 2,1 \times 10^{11}$ Pa; $\rho = 8000$ kg / m <sup>3</sup> ; $\nu = 0,29$ ; $\eta = 0,01$ ; $b_1 = h_1 = 0,25$ m; $L_1 = 1,0$ m; $b_2 = h_2 = 0,25$ m; $L_2 = 4,0$ m. ....	54
<b>Figura 3.16:</b> Esforços e deslocamentos atuantes em duas vigas Timoshenko, em L, excitadas por força transversal .....	55
<b>Figura 3.17:</b> Representação dos esforços e dos deslocamentos de duas vigas Timoshenko unidas em L, usados no cálculo do fluxo de potência .....	55
<b>Figura 3.18:</b> Comparação entre as razões de potência, vigas de seção retangular, flexão-torção .....	57
<b>Figura 3.19:</b> Comparação entre as razões de potência, vigas de seção retangular, torção-flexão .....	58
<b>Figura 3.20:</b> Comparação entre as razões de potência, vigas de seção retangular, flexão-flexão .....	58
<b>Figura 3.21:</b> Comparação entre as razões de potência, vigas de seção I, flexão-torção .....	59
<b>Figura 3.22:</b> Comparação entre as razões de potência, vigas de seção I, torção-flexão .....	60
<b>Figura 3.23:</b> Comparação entre as razões de potência, vigas de seção I, flexão-flexão .....	60
<b>Figura 4.1:</b> Dois conjuntos de vigas, em L, formando um quadrado, excitação no plano .....	62
<b>Figura 4.2:</b> Comparação da resposta pelos métodos analítico e numérico, vigas formando um quadrado, força no plano .....	65
<b>Figura 4.3:</b> Dois conjuntos de vigas em L formando um quadrado, excitado por uma força transversal .....	66
<b>Figura 4.4:</b> Comparação do deslocamento transversal, métodos analítico e numérico, primeira configuração .....	70
<b>Figura 4.5:</b> Comparação do deslocamento transversal, métodos analítico e numérico, segunda configuração, teoria de Euler-Bernoulli .....	72
<b>Figura 4.6:</b> Comparação do deslocamento transversal, métodos analítico e numérico, segunda configuração, vigas Timoshenko .....	72
<b>Figura 4.7:</b> Estrutura complexa formada por dois conjuntos de vigas em L e um de vigas em T, força transversal ao plano .....	73
<b>Figura 4.8:</b> Comparação do deslocamento transversal, métodos analítico e numérico, grelha .	81
<b>Figura 4.9:</b> Fluxo de potência para diversos $\eta$ , acoplamento flexão-torção .....	82
<b>Figura 4.10:</b> Fluxo de potência para diversos $\eta$ , acoplamento torção-flexão .....	83

<b>Figura 4.11:</b> Fluxo de potência para diversos $\eta$ , acoplamento flexão-flexão .....	83
<b>Figura 4.12:</b> Fluxo de potência para diversas áreas, acoplamento flexão-torção .....	84
<b>Figura 4.13:</b> Fluxo de potência para diversas áreas, acoplamento torção-flexão .....	85
<b>Figura 4.14:</b> Fluxo de potência para diversas áreas, acoplamento flexão-flexão .....	85
<b>Tabela 2.1:</b> Relação esforço-deslocamento para duas vigas unidas em L .....	27
<b>Tabela 2.2:</b> Relação esforço-deslocamento para três vigas unidas em T .....	28
<b>Fluxograma 2.1:</b> Determinação Numérica da Mobilidade .....	31
<b>Fluxograma 4.1:</b> O Método da Mobilidade .....	61

## RESUMO

Neste trabalho, estudou-se a viabilidade da aplicação do Método do Fluxo de Potência usando funções de mobilidade em estruturas compostas por vigas, em forma de grelha. Tais estruturas são comumente encontradas em plataformas *offshore*, onde pesadas máquinas estão apoiadas sobre vigas. A vibração gerada é transmitida estruturalmente para outras regiões da plataforma, incluindo a dos alojamentos, causando problemas de saúde aos operários. O objetivo do trabalho é qualificar os principais tipos de ondas na transmissão de energia e obter a resposta dinâmica da estrutura. Para isso, analisou-se a influência dos diversos tipos de ondas (longitudinal, flexão e torção), na transmissão de energia. Calculou-se o fluxo de potência entre duas vigas unidas em L, considerando todos os tipos possíveis de acoplamento de ondas. Pode-se concluir destas análises que as ondas longitudinais são importantes quando consideradas nas vigas de grande comprimento e nas altas frequências, apenas. Quanto às ondas de torção, resultados mostraram que elas são responsáveis pela transmissão de uma parcela considerável de energia em relação às ondas de flexão, não podendo ser desprezadas quando um controle de vibrações ou de ruído for efetuado. Para vigas de grande seção transversal em relação ao comprimento, deve-se considerar o cisalhamento nas ondas de flexão, pois os efeitos do cisalhamento e da inércia rotatória se mostraram presentes nas análise de fluxo de potência. Para a determinação da resposta de estruturas tipo grelha, a estrutura é separada em subestruturas menores e para cada uma são montadas equações de movimento, envolvendo funções de mobilidade. São determinados os esforços nas uniões das subestruturas e a resposta é determinada a partir destes esforços. Neste estudo, as subestruturas utilizadas foram formadas por vigas dispostas em L ou em T. Como as mobilidades para vigas em L e em T podem ser determinadas analiticamente, toda a metodologia apresentada é analítica. As vantagens do método são a obtenção determinística da resposta, para todo o espectro de frequências, e a necessidade de se determinar os esforços apenas nas uniões. Os resultados obtidos analiticamente para algumas configurações de vigas, dispostas em um plano, apresentam boa concordância com os obtidos numericamente, através do uso de um software comercial de Elementos Finitos (ANSYS).

## ABSTRACT

In this work the applicability of the Mobility approach to beam-network structures is analyzed. Beams positioned in-plane and in orthogonal directions with respect to each other in grillage form are of particular interest. Such structures are commonly found in offshore platforms in which heavy machines and equipments are installed. Vibrations are structurally transmitted to other regions of the platform, including accommodations areas, causing health problems to workers. In the first part an analysis of wave types responsible for most of the energy transmission through the beams joints is made. The power flow between two beams connected in L was determined considering all possible types of wave coupling. It can be concluded, from this analysis that longitudinal waves are important in beams of great length, and at high frequencies. Results show that torsional waves are responsible for the transmission of a great part of the total energy, in relation to flexural waves, and cannot be disregarded in vibration or noise control analyses. Shear must also be considered in beams of great cross section in relation to length. Shear and rotatory inertia effects were noticed in power flow analysis of typical beams dimensions. In the determination of the response of a grillage, the structure is separated in simple components. Loads at the substructures joints are determined and response is obtained from these loads. Substructures used throughout this work are simple beams and L and T assemblies. As the mobility for these kind of substructures can be analytically determined, all analyses made are also analytical. The method advantages are the analytical determination of response, also for large frequency spectrums. Analytical results for some beam configurations show accurate agreement with numerical results, obtained from a commercial Finite Element software, ANSYS™.

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

A maioria das máquinas em funcionamento gera vibrações que podem se transmitir estruturalmente com facilidade. Ao se transmitir pela estrutura, a energia vibratória pode causar ruído excessivo não apenas na região onde a máquina está operando, bem como nas regiões adjacentes.

Estes problemas são observados em estruturas de plataformas de prospecção e de produção de petróleo. Nelas, máquinas pesadas como bombas de transferência, turbo-geradores e turbo-compressores, operam 24 horas por dia, gerando vibrações contínuas que se propagam pela estrutura, causando altos níveis de ruído nos alojamentos e nas áreas de recreação dos operários. Estas máquinas são, na maioria das vezes, fixadas rigidamente aos pisos (*decks*) da plataforma, apoiadas sobre vigas de reforço, que por sua vez estão unidas à estrutura principal. O conjunto destas vigas forma uma espécie de grelha, apresentando vigas mais robustas nas bordas e vigas menores no interior. Este tipo de piso grelhado é encontrado principalmente nas áreas de instalação das bombas de transferência de petróleo. As vigas destas grelhas são dimensionadas basicamente para suportar o peso destas máquinas, que costuma ser de até várias toneladas. Por este motivo é comum encontrar vigas de seção I com altura de 0,5 m, espessura de alma de 0,02 m e largura da base de 0,2 m, com comprimentos de até 5 m. A vibração gerada pelas máquinas propaga-se pelas vigas através de ondas de flexão e de torção principalmente (Davies & Wahab, 1980). Nas altas frequências as ondas longitudinais também estão presentes.

O estudo do comportamento dinâmico e acústico de grelhas, compostas basicamente por vigas acopladas, foi abordado por Kihlman (1970), Gibbs & Gilford (1976); Craik (1982); Sablik et al. (1985) e Miller & Flotov (1988). Estes trabalhos tratam de estruturas da construção civil, tipicamente de prédios, porém, os conceitos podem ser utilizados em estruturas mecânicas. Os métodos utilizados para a obtenção da resposta dos componentes são os métodos do Fluxo de Potência e Análise Estatística Energética - SEA (*Statistical Energy Analysis*). Os parâmetros utilizados em SEA, e os coeficientes de transmissão de

vigas com a propagação de ondas longitudinais e de flexão, foram apresentados por Cremer, Heckel & Ungar (1973).

Uma maneira de reduzir o nível de ruído nos alojamentos é minimizar o fluxo de potência vibratória da região das fontes geradoras de vibração para esta região. Para tal, um entendimento detalhado dos caminhos de propagação e dos tipos de onda que transmite a maior parcela de energia, é imprescindível.

O conceito de fluxo de potência começou a ser estudado na década de 60, com os trabalhos de Lyon & Scharton (1962) e Newland (1966 a; b), que analisaram o fluxo entre osciladores linearmente acoplados. No final dos anos 70 e início dos 80, os trabalhos de Davies (1971), Goyder & White (1980 a, b, c), Davies & Wahab (1981) e Pinnington & White (1981) destacaram-se pela análise do fluxo de potência entre componentes estruturais, como vigas, vigas acopladas a placas e isoladores. Mais recentemente, Sun, Lalor & Richards (1987); Cuschieri (1990 a) e Chen & Soong (1991) analisaram o fluxo de potência em estruturas periódicas.

A análise experimental torna-se inviável quando as dimensões dos componentes, forem excessivamente grandes e também difícil de ser conduzida em plataformas em operação devido ao elevado nível de vibrações já existentes. Torna-se, assim, difícil a realização de um experimento controlado. Nas análises numéricas, dois métodos são largamente utilizados: Método de Elementos Finitos (MEF) e SEA. O fator decisivo na escolha do método é a faixa de frequência de interesse. O MEF é aplicável somente às primeiras frequências de ressonância do sistema, e a sua limitação é geralmente computacional. SEA é aplicável às altas frequências, quando a densidade modal de cada componente é alta, ou seja, maior que seis modos, pelo menos, por faixa de frequência de análise (Lyon, 1975; Maidanik, 1977).

Cuschieri (1987) apresentou um método que pode ser utilizado em todo o espectro de frequências, o método do fluxo de potência, usando funções de mobilidade (MPF - *Mobility Power Flow*), e o utilizou na análise de duas vigas unidas em L. Posteriormente, estendeu a análise para duas placas unidas em L (Cuschieri, 1990 b, 1992).

A idéia básica deste método consiste em modelar a estrutura global por uma série de subestruturas acopladas. Cada subestrutura é analisada independentemente, sendo considerados os esforços que atuam nas junções destas subestruturas. Associados a estes esforços estão as funções de mobilidade estrutural. A potência injetada na subestrutura excitada e o fluxo para outras subestruturas são expressos em termos de mobilidades

estruturais pontuais e de transferência. A mobilidade é definida como a razão entre velocidade (translacional ou rotacional) e o carregamento (força ou momento, respectivamente), ambas no domínio da frequência. Para componentes simples como vigas e placas, a mobilidade pode ser obtida analiticamente. Para componentes complexos, podem ser usados métodos numéricos ou experimentais.

Diversos autores estudaram o comportamento dinâmico de uniões estruturais, principalmente uniões em L e T. Sobre a propagação de ondas longitudinais e de flexão, destacam-se os trabalhos de Atkins & Hunter (1974); Rosenhouse (1979); Rosenhouse, Ertel & Mechel (1981) e Leung & Pinnington (1990, 1992). Já a análise considerando ondas de flexão e de torção foi feita por Desmond (1981); Doyle & Kamle (1987); Gibbs & Taterstall (1987) e Guo (1995). Na análise de Gibbs & Taterstall fica evidenciado que ondas de torção podem transmitir uma parcela maior de energia que as ondas de flexão, para vigas em L.

O presente trabalho aborda a resposta de estruturas grelhadas excitadas por forças dinâmicas transversais. Para isso, será apresentada inicialmente, uma análise da importância de cada tipo de onda, utilizando os conceitos de fluxo de potência. Em seguida, será calculada a resposta de componentes de uma grelha usando funções de mobilidade. As vantagens do método são a obtenção da resposta determinística em frequências discretas, calculada para uma ampla faixa de frequências de interesse, no caso, até 1250 Hz, em função dos esforços dinâmicos que atuam nas uniões.

No Capítulo 2 são apresentados os conceitos básicos da metodologia, baseados na teoria da onda. São apresentadas as equações básicas para ondas longitudinais, flexão, torção e cisalhamento, as expressões para o cálculo do fluxo de potência, e os procedimentos analíticos de cálculo para os diversos tipos de mobilidade. São apresentadas comparações entre resultados obtidos analítica e numericamente.

O Capítulo 3 apresenta a análise realizada com o objetivo de determinar os tipos de onda mais importantes em relação ao fluxo de energia entre componentes. As análises consideram separadamente as parcelas proporcionadas pelos tipos considerados, atuando em vigas de dimensões tipicamente empregadas em plataformas.

O Capítulo 4 apresenta a metodologia para a determinação analítica da resposta de componentes de grelhas. São considerados dois casos distintos para análise: um onde apenas esforços de flexão são considerados e outro mais genérico, onde esforços fletores e torçores são considerados. Para cada caso, utilizando funções de mobilidade, são desenvolvidas as

equações necessárias para a resposta. Resultados numéricos comprovam a validade da metodologia.

O Capítulo 5 apresenta as conclusões finais do trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

# CAPÍTULO 2

## CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo serão apresentados os tipos de ondas que se propagam em vigas, bem como as suas soluções. Expressões para o fluxo de potência, considerando cada tipo de onda em separado, são desenvolvidas. É apresentada também uma revisão sobre o cálculo dos diversos tipos de mobilidade, mostrando exemplos de vigas simples e acopladas.

### 2.1 - ONDAS LONGITUDINAIS

As ondas longitudinais ocorrem em sólidos, líquidos e gases, e são aquelas em que a direção do deslocamento de partícula é a mesma que a da propagação da onda. Em vigas, ocorrem quando as dimensões da seção transversal são menores que o comprimento da viga. Apesar das ondas longitudinais não terem grande influência na irradiação sonora do componente, elas podem acoplar-se a outros tipos de ondas, principalmente às de flexão, e passam a ter importância na transmissão de energia vibratória.

O desenvolvimento da equação diferencial que governa a vibração longitudinal de uma viga, considera as seguintes hipóteses (Reynolds, 1981):

- a Lei de Hooke é válida
- não há forças cisalhantes atuando na seção da viga
- não há momentos fletores atuando na viga
- o material é homogêneo e isotrópico
- as ondas longitudinais aqui analisadas consideram seções transversais constantes

O amortecimento interno é o único mecanismo de dissipação de energia. Ele é considerado hysterético, constante em toda a faixa de frequência e é representado analiticamente através do módulo de elasticidade complexo,

$$\bar{E} = E(1 + j\eta) \quad (2.1.1)$$

onde a barra sobre a letra simboliza tratar-se de uma variável complexa.

A equação do movimento longitudinal,  $\bar{u}_x(x, t)$ , da seção de uma viga é dada por (Cremer, Heckel & Ungar, 1973):

$$\bar{E}A \frac{\partial^2 \bar{u}_x(x, t)}{\partial x^2} - m' \frac{\partial^2 \bar{u}_x(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1.2)$$

Fazendo a transformada de Fourier de (2.1.2), no domínio da frequência, tem-se:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_x(x, f)}{\partial x^2} + \bar{k}_L \bar{u}_x(x, f) = 0 \quad (2.1.3)$$

onde:

$$\bar{c}_L = \sqrt{\frac{\bar{E}}{\rho}} \quad (2.1.4)$$

$$\bar{k}_L = \frac{2\pi f}{\bar{c}_L} \quad (2.1.5)$$

Utilizando o método de separação de variáveis, a solução da equação (2.1.2) é dada por

$$\bar{u}_x(x, t) = \left[ A1 \cos(\bar{k}_L x) + A2 \sen(\bar{k}_L x) \right] \exp(j\omega t) \quad (2.1.6)$$

onde A1 e A2 são constantes a serem determinadas a partir de condições de contorno da viga.

Com o deslocamento longitudinal determinado, pode-se obter a força axial que atua na seção:

$$\bar{U}_x(x, f) = \bar{E}A \frac{\partial \bar{u}_x(x, f)}{\partial x} \quad (2.1.7)$$

Para vigas de seção transversal retangular, a área  $A$  é dada por:

$$A = bh \quad (2.1.8)$$

e para vigas de perfil I:

$$A = 2bh + dt_a \quad (2.1.9)$$

onde a Figura 2.1 mostra estes dois tipos de seção:

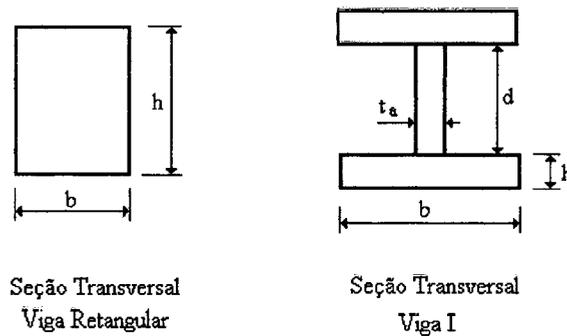


Figura 2.1: Esquema de seções transversais retangular e I.

O fluxo de potência, considerando apenas os esforços axiais, é diretamente proporcional à velocidade axial (derivada do deslocamento em relação ao tempo) e é dado por (Cremer, Heckel & Ungar, 1973):

$$W_L(x, f) = \frac{1}{2} \text{Re}(\bar{U}_x(x, f) \bar{u}_x(x, f)^*) \quad (2.1.10)$$

A potência de entrada,  $W_{in}$ , causada por uma força aplicada em  $x = x_0$ , é obtida usando a Equação. 2.1.10 sendo calculada para  $x = x_0$ .

## 2.2 - ONDAS TORCIONAIS

As ondas torcionais ocorrem quando uma viga é excitada por um torque, isto é, um momento cujo eixo coincide com o eixo axial da viga. Neste tipo de onda, a seção transversal rotaciona em torno do eixo da viga, e todos os pontos da seção desenvolvem rotações angulares.

No caso de ondas de torção, as quatro primeiras hipóteses simplificativas do item 2.1 são válidas, e o fator de perda é também considerado através do módulo de elasticidade complexo.

A equação do movimento rotacional de torção  $\bar{\theta}_x(x,t)$  de uma viga é dada por (Cremer, Heckl & Ungar, 1973):

$$\bar{Q} \frac{\partial^2 \bar{\theta}_x(x,t)}{\partial x^2} - \Lambda \frac{\partial^2 \bar{\theta}_x(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2.1)$$

A mesma equação, reescrita no domínio da frequência, fica:

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}_x(x,f)}{\partial x^2} + \bar{k}_t \bar{\theta}_x(x,f) = 0 \quad (2.2.2)$$

onde:

$$\bar{c}_t = \sqrt{\frac{\bar{Q}}{\Lambda}} \quad (2.2.3)$$

$$\bar{k}_t = \frac{2\pi f}{\bar{c}_t} \quad (2.2.4)$$

Para vigas de seção transversal quadrada, a rigidez à torção  $\bar{Q}$  e o momento de inércia de massa por unidade de comprimento  $\Lambda$  são dados por (Oden, 1967; Sablik, 1982; Timoshenko & Goodier, 1980):

$$\bar{Q} = \frac{\bar{G}hb^3}{3} \left[ 1 - \frac{192b}{\pi^5 h} \tanh\left(\frac{\pi h}{2b}\right) \right] \quad (2.2.5)$$

$$\Lambda = \frac{\rho}{12} (bh^3 + hb^3) \quad (2.2.6)$$

sendo

$$\bar{G} = \frac{\bar{E}}{2(1+\nu)} \quad (2.2.7)$$

e para vigas de perfil I estes parâmetros são (Oden, 1967; Sablik, 1982; Timoshenko & Goodier, 1980):

$$\bar{Q} = \frac{\bar{G}}{3} [2bh^3 + dt_a^3] \quad (2.2.8)$$

$$\Lambda = \frac{\rho}{12} (8bh^3 + 2hb^3 + 12bh^2d + 6bhd^2 + t_a d^3 + dt_a^3) \quad (2.2.9)$$

Utilizando o método de separação de variáveis, a solução da equação (2.2.1) pode ser escrita na forma

$$\bar{\theta}_x(x, t) = \left[ A1 \cos(\bar{k}_t x) + A2 \operatorname{sen}(\bar{k}_t x) \right] \exp(j\omega t) \quad (2.2.10)$$

onde A1 e A2 são constantes a serem determinadas a partir de condições de contorno da viga.

Com o deslocamento angular determinado, pode-se obter o momento torçor que atua em qualquer seção, x, da viga:

$$\bar{T}_x(x, f) = \bar{Q} \frac{\partial \bar{\theta}_x(x, f)}{\partial x} \quad (2.2.11)$$

O fluxo de potência, considerando apenas os esforços de torção, é diretamente proporcional à velocidade angular (derivada do deslocamento angular em relação ao tempo) e é dado por (Cremer, Heckel & Ungar, 1973):

$$W_t(x, f) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \bar{T}_x(x, f) \bar{\theta}_x(x, f)^* \right) \quad (2.2.12)$$

### 2.3 - ONDAS DE FLEXÃO

As ondas de flexão são as responsáveis pela maior parte do ruído irradiado, pois geram velocidades na direção transversal à direção de propagação da onda. No desenvolvimento da equação da onda de flexão, as seguintes hipóteses são consideradas (Reynolds, 1982):

- a seção transversal é uniforme
- as dimensões laterais são pequenas se comparadas com o comprimento da viga
- o produto  $EI$  é constante
- seções transversais planas mantêm-se planas
- não há forças axiais
- são desprezados os efeitos de inércia rotatória e de cisalhamento
- material é homogêneo e isotrópico
- as amplitudes de vibração são pequenas

As vigas que seguem estas hipóteses chamam-se vigas Euler-Bernoulli.

A Figura 2.2 apresenta um esquema de um elemento de viga com as convenções dos sinais para os esforços e os deslocamentos:

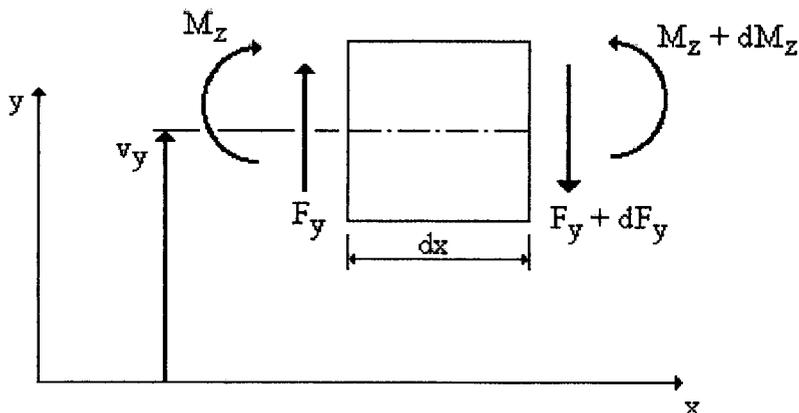


Figura 2.2: Diagrama de corpo livre de um elemento de viga Euler-Bernoulli.

A equação do movimento transversal  $v_y(x,t)$  de uma viga Euler-Bernoulli é dada por (Cremer, Heckel & Ungar, 1973; Reynolds, 1981):

$$\overline{EI} \frac{\partial^4 v_y(x,t)}{\partial x^4} + m' \frac{\partial^2 v_y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.3.1)$$

A mesma equação, reescrita no domínio da frequência, fica:

$$\frac{\partial^4 \overline{v}_y(x,f)}{\partial x^4} - \overline{k}_f \overline{v}_y(x,f) = 0 \quad (2.3.2)$$

onde:

$$\overline{c}_f = \sqrt{\frac{\omega^2 \overline{EI}}{\rho A}} \quad (2.3.3)$$

$$\overline{k}_f = \frac{2\pi f}{\overline{c}_f} \quad (2.3.4)$$

Para vigas de seção transversal retangular, o momento de inércia  $I$  é dado por:

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (2.3.5)$$

e para vigas de perfil I, tem-se:

$$I = \frac{b(d+2h)^3}{12} - \frac{(b-t_a)d^3}{12} \quad (2.3.6)$$

Utilizando o método de separação de variáveis, a solução da equação (2.3.1) é dada por

$$\overline{v}_y(x,t) = \left[ A1 \cosh(\overline{k}_f x) + A2 \sinh(\overline{k}_f x) + A3 \cos(\overline{k}_f x) + A4 \sin(\overline{k}_f x) \right] \exp(j\omega t) \quad (2.3.7)$$

onde A1, A2, A3 e A4 são constantes a serem determinadas a partir de condições de contorno da viga.

Com o deslocamento transversal determinado, pode-se obter o deslocamento angular  $w_z$ , o momento fletor  $M_z$  e a força cortante  $F_z$  que atuam na seção da viga, através expressões abaixo,

$$\bar{w}_z(x, f) = \frac{\partial \bar{v}_y(x, f)}{\partial x} \quad (2.3.8)$$

$$\bar{M}_z(x, f) = \bar{EI} \frac{\partial^2 \bar{v}_y(x, f)}{\partial x^2} \quad (2.3.9)$$

$$\bar{F}_y(x, f) = \bar{EI} \frac{\partial^3 \bar{v}_y(x, f)}{\partial x^3} \quad (2.3.10)$$

Considerando a flexão, dois esforços são responsáveis pelo fluxo de potência: o fletor e o cortante. Assim sendo, o fluxo de potência total é dado pela soma dos fluxos referentes ao esforços fletor e cortante. O fluxo de potência devido ao esforço fletor é diretamente proporcional à velocidade angular (derivada do deslocamento angular em relação ao tempo) e o referente ao esforço cortante é diretamente proporcional à velocidade transversal (derivada do deslocamento transversal em relação ao tempo). Eles são dados por (Baars, 1996):

$$W_M(x, f) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\bar{M}_z(x, f) \bar{w}_z(x, f)^*) \quad (2.3.11)$$

$$W_F(x, f) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\bar{F}_y(x, f) \bar{v}_y(x, f)^*) \quad (2.3.12)$$

$$W_f(x, f) = W_F(x, f) + W_M(x, f) \quad (2.3.13)$$

onde  $W_M$  é o fluxo de potência transmitido pelo momento fletor,  $W_F$  é o fluxo de potência transmitido pela força cortante e  $W_f$  é o fluxo de potência total transmitido pelas ondas de flexão.

## 2.4 - ONDAS DE FLEXÃO EM VIGAS TIMOSHENKO

Para vigas cujas as dimensões da seção transversal não são pequenas, quando comparadas com o comprimento da viga, deve-se considerar os efeitos da deformação cisalhante e da inércia rotatória (Clough & Penzien, 1975; Rao, 1986). Vigas modeladas com estas considerações são chamadas vigas Timoshenko. No esquema de um elemento de viga, mostrado na Figura 2.3, abaixo, pode-se observar que ao ser considerado o cisalhamento do elemento, a tangente à linha neutra deformada OT não é perpendicular à face QR. O ângulo  $\gamma$  compreendido entre a tangente à linha neutra deformada OT e a normal à face ON denota a deformação cisalhante do elemento.  $\phi$  representa a rotação da seção transversal que gera a inércia rotatória. Caso não houvesse a distorção resultante do cisalhamento a seção transversal permaneceria normal ao eixo da viga e  $\phi$  seria igual ao deslocamento angular da viga. Na Figura 2.3,  $v_y$  representa o deslocamento transversal;  $\phi$ , a rotação total da seção;  $M_z$ , o momento fletor e  $F_y$ , a força cortante.

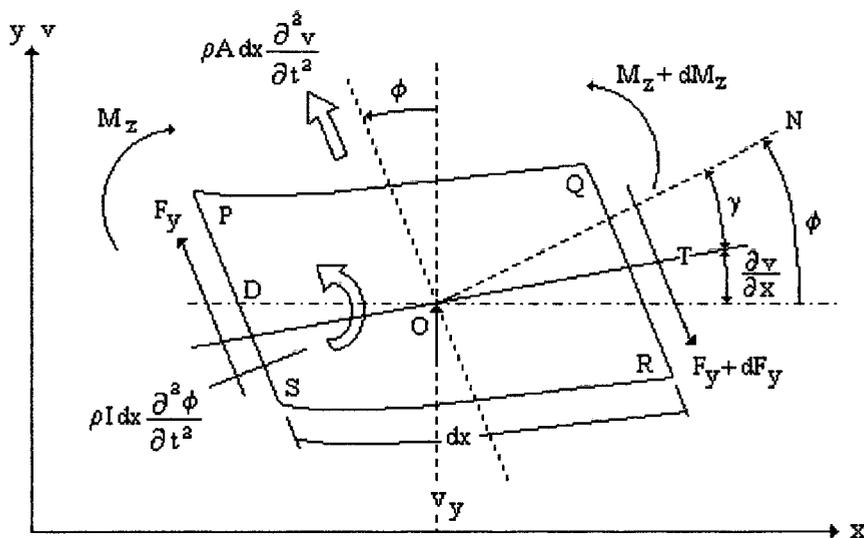


Figura 2.3: Diagrama de corpo livre de um elemento de viga Timoshenko.

Convencionando o sentido positivo da força cortante, na face QR, quando dirigida para baixo, pode-se escrever seguinte expressão para o ângulo  $\gamma$ ,

$$\gamma(x, t) = \bar{\phi}(x, t) - \frac{\partial \bar{v}_y(x, t)}{\partial x} \quad (2.4.1)$$

O momento fletor e a força cortante são calculados pelas expressões abaixo:

$$\bar{M}_z(x, t) = -\bar{E}I \frac{\partial \bar{\phi}(x, t)}{\partial x} \quad (2.4.2)$$

$$\bar{F}_y(x, t) = rAG \left( \bar{\phi}(x, t) - \frac{\partial \bar{v}_y(x, t)}{\partial x} \right) \quad (2.4.3)$$

Uma equação de equilíbrio de forças da direção vertical,  $y$ , e outra de equilíbrio de momentos em torno do ponto  $O$ , resultam em

$$-rAG \left( \frac{\partial \bar{\phi}(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 \bar{v}_y(x, t)}{\partial x^2} \right) = \rho A \frac{\partial^2 \bar{v}_y(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.4.4)$$

$$\bar{E}I \frac{\partial^2 \bar{\phi}(x, t)}{\partial x^2} - rAG \left( \bar{\phi}(x, t) - \frac{\partial \bar{v}_y(x, t)}{\partial x} \right) = \rho I \frac{\partial^2 \bar{\phi}(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.4.5)$$

As soluções combinadas das equações (2.4.4) e (2.4.5) é apresentada por (Flügge, 1962; Levinson & Cooke, 1982):

$$\bar{v}_y(x, t) = \bar{V}(x) \exp(j\omega t) \quad (2.4.6)$$

sendo 
$$\bar{V}(x) = A1 \sinh(\bar{\lambda}_a x) + A2 \cosh(\bar{\lambda}_a x) + A3 \sin(\bar{\lambda}_b x) + A4 \cos(\bar{\lambda}_b x) \quad (2.4.7)$$

e 
$$\bar{\phi}(x, t) = \bar{\Phi}(x) \exp(j\omega t) \quad (2.4.8)$$

sendo 
$$\bar{\Phi}(x) = \frac{\bar{\alpha}_a}{\bar{\lambda}_a} (A1 \cosh(\bar{\lambda}_a x) + A2 \sinh(\bar{\lambda}_a x)) - \frac{\bar{\alpha}_b}{\bar{\lambda}_b} (A3 \cos(\bar{\lambda}_b x) - A4 \sin(\bar{\lambda}_b x)) \quad (2.4.9)$$

onde,

$$\bar{\alpha}_{a,b} = \frac{\rho\omega^2}{rG} \pm \bar{\lambda}_{a,b}^2 \quad (2.4.10)$$

$$\bar{\lambda}_{a,b}^2 = \left( \frac{\bar{b}^4\omega^4}{4} + \bar{a}\omega^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mp \frac{\bar{b}^2\omega^2}{2} \quad (2.4.11)$$

$$\bar{a} = \frac{\rho}{E} \left( \frac{A}{I} - \frac{\rho\omega^2}{rG} \right) \quad (2.4.12)$$

$$\bar{b}^2 = \frac{\rho}{E} \left( 1 + \frac{\bar{E}}{rG} \right) \quad (2.4.13)$$

O parâmetro  $r$  é chamado de coeficiente de cisalhamento de Timoshenko, que depende da seção transversal e do material (Rao, 1986). As expressões de  $k$  para seções quadrada e  $I$  são, respectivamente (Cowper, 1966):

$$r = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu} \quad (\text{seção quadrada}) \quad (2.4.14)$$

$$k = \frac{10(1+\nu)(1+3m)^2}{12+72m+150m^2+90m^3+\nu(11+66m+135m^2+90m^3+30\nu^2(m+m^2)+5\nu^2(8m+9m^2))} \quad (2.4.15)$$

(para vigas de seção  $I$ )

onde:

$$m = \frac{2bh}{dta} \quad e \quad n = \frac{b}{d}$$

Resolvendo-se a equação (2.4.4) para  $\frac{\partial \bar{\phi}(x,t)}{\partial x}$  e substituindo em (2.4.5) obtém-se a equação da onda para vigas Timoshenko (Rao, 1986):

$$\bar{E}I \frac{\partial^4 \bar{v}_y(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \bar{v}_y(x,t)}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 \bar{v}_y(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\rho \bar{E}I}{rG} \frac{\partial^4 \bar{v}_y(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{rG} \frac{\partial^4 \bar{v}_y(x,t)}{\partial t^4} = 0 \quad (2.4.16)$$

Os dois primeiros termos representam a equação de movimento referentes às vigas Euler-Bernoulli; o terceiro termo contém a inércia rotatória; o quarto termo contém o cisalhamento e o último termo contém uma combinação dos dois.

As expressões para o fluxo de potência são análogas às Equações (2.3.10), (2.3.11) e (2.3.12), sendo que o momento  $M_z$  é dado pela Equação (2.4.2), a força cortante  $F_y$ , pela Equação (2.4.3), o deslocamento  $v_y$ , pela Equação (2.4.6) e a rotação,  $w_z$ , pela Equação (2.4.8).

## 2.5. - CONDIÇÕES DE CONTORNO NUMA UNIÃO

Quando uma onda se propaga numa viga e encontra uma descontinuidade, tal como uma mudança de direção do eixo da viga, como mostra a Figura 2.4, as condições de equilíbrio entre os esforços e a continuidade dos deslocamentos na união devem ser mantidos (Rosenhouse, 1979). Na Figura 2.4, o ângulo  $\phi$  representa a mudança de direção no eixo da viga.

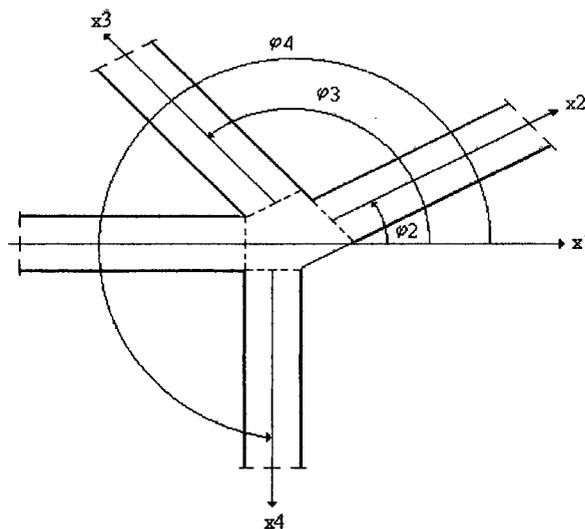


Figura 2.4: Representação esquemática de um ponto de união de quatro vigas.

Rosenhouse, (1979), Rosenhouse, Ertel & Mechel, (1981) apresentaram as equações referentes às condições de equilíbrio e de continuidade na união. Estes estudos limitam-se à análise de forças agindo no plano das vigas, com a propagação de ondas de flexão e longitudinais. De forma análoga serão apresentadas as condições físicas que devem ser obedecidas, nas uniões, quando forças transversais ao plano das vigas forem aplicadas, causando o acoplamento de ondas de torção com as de flexão (Sablík, 1982).

### 2.5.1 - VIGAS UNIDAS EM L

Nas equações que seguem, a seguinte convenção é usada:

força no plano	força perpendicular
$u_{xi}$ , $u_{yi}$ - desloc. axial (longitudinal)	$\theta_{xi}$ , $\theta_{yi}$ - desloc. angular (torção)
$v_{xi}$ , $v_{yi}$ - desloc. transversal (flexão)	$w_{xi}$ , $w_{yi}$ - desloc. angular (flexão)
$w_{zi}$ - desloc. angular (flexão)	$v_{zi}$ - desloc. transversal (flexão)
$U_{xi}$ , $U_{yi}$ - forças axiais (longitudinal)	$T_{xi}$ , $T_{yi}$ - momentos torçores (torção)
$F_{xi}$ , $F_{yi}$ - forças cortantes (flexão)	$M_{xi}$ , $M_{yi}$ - momentos fletores (flexão)
$M_{zi}$ - momento fletor (flexão)	$F_{zi}$ - força cortante (flexão)

#### a) Força aplicada no plano das vigas

$$u_{x1} = v_{x2} \quad (2.5.1.1)$$

$$v_{y1} = u_{y2} \quad (2.5.1.2)$$

$$w_{z1} = w_{z2} \quad (2.5.1.3)$$

$$U_{x1} = F_{x2} \quad (2.5.1.4)$$

$$F_{y1} = U_{y2} \quad (2.5.1.5)$$

$$M_{z1} = M_{z2} \quad (2.5.1.6)$$

**b) Força perpendicular ao plano das vigas:**

$$\theta_{x1} = w_{x2} \quad (2.5.1.7)$$

$$w_{y1} = \theta_{y2} \quad (2.5.1.8)$$

$$v_{z1} = v_{z2} \quad (2.5.1.9)$$

$$T_{x1} = M_{x2} \quad (2.5.1.10)$$

$$M_{y1} = T_{y2} \quad (2.5.1.11)$$

$$F_{z1} = -F_{z2} \quad (2.5.1.12)$$

## 2.5.2 - VIGAS UNIDAS EM T

**a) Força aplicada no plano das vigas**

$$u_{x1} = u_{x3} \quad (2.5.2.1)$$

$$u_{x3} = v_{x2} \quad (2.5.2.2)$$

$$v_{y1} = v_{y3} \quad (2.5.2.3)$$

$$v_{y3} = u_{y2} \quad (2.5.2.4)$$

$$w_{z1} = w_{z3} \quad (2.5.2.5)$$

$$w_{z2} = w_{z3} \quad (2.5.2.6)$$

$$U_{x1} = U_{x3} - F_{x2} \quad (2.5.2.7)$$

$$F_{y1} = F_{y3} - U_{y2} \quad (2.5.2.8)$$

$$M_{z1} = M_{z3} - M_{z2} \quad (2.5.2.9)$$

**b) Força perpendicular ao plano das vigas:**

$$\theta_{x3} = w_{x2} \quad (2.5.2.10)$$

$$\theta_{x1} = \theta_{x2} \quad (2.5.2.11)$$

$$w_{y1} = w_{y3} \quad (2.5.2.12)$$

$$w_{y3} = \theta_{y2} \quad (2.5.2.13)$$

$$v_{z1} = v_{z2} \quad (2.5.2.14)$$

$$v_{z1} = v_{z3} \quad (2.5.2.15)$$

$$T_{x1} = T_{x3} - M_{x2} \quad (2.5.2.16)$$

$$M_{y1} = M_{y3} - T_{y2} \quad (2.5.2.17)$$

$$F_{z1} = F_{z3} - F_{z2} \quad (2.5.2.18)$$

## 2.6 - MOBILIDADES

A mobilidade é uma resposta em frequência, dada pela razão entre a velocidade (angular ou transversal) e a excitação (momento ou força). A mobilidade, portanto, representa o comportamento da resposta na forma de velocidade de um certo ponto de uma estrutura a uma excitação. A mobilidade pontual representa a resposta de um ponto a uma excitação aplicada no mesmo ponto. Já a mobilidade de transferência representa a resposta de um ponto a uma excitação aplicada em outro ponto (Cremer; Heckel & Ungar, 1973; Cuschieri, 1990 a), conforme mostrada na Figura 2.5. Para o cálculo da mobilidade, faz-se a transformada de Fourier dos sinais de velocidade e de força, pois a mobilidade é uma resposta em frequência.

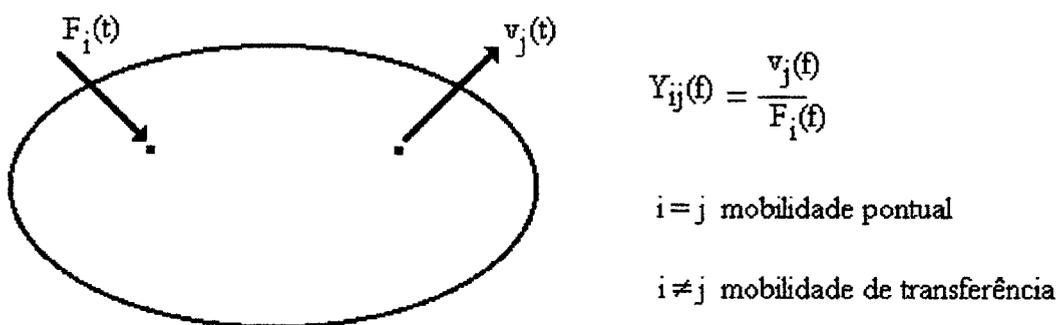


Figura 2.5: Mobilidades pontual e de transferência.

Na análise do fluxo de potência entre componentes estruturais, usando conceitos de mobilidade para obtenção da resposta de estruturas grelhadas, diversos tipos de subestruturas podem ser utilizados: viga simples, duas vigas unidas em L e três vigas unidas em T.

Nas uniões entre componentes (ou subestruturas) surgem vários tipos de esforços, que são as forças axial e cortante, e os momentos fletores e torçores. Ao mesmo tempo os deslocamentos destes pontos podem ser de translação e de rotação. Isto indica a ampla variedade de expressões de mobilidades, para cada componente estrutural, que deverão ser determinadas para a aplicação desta metodologia de análise. As mobilidades envolvem combinações de cada tipo de excitação com cada tipo de resposta, podendo ser pontuais ou de transferência (Cuschieri, 1987).

Neste item serão apresentados procedimentos de cálculo das mobilidades estruturais de duas vigas unidas em L e indicadas as expressões para o caso de três vigas unidas em T.

A Figura 2.6 mostra um tipo de subestrutura utilizado, duas vigas unidas em “L”. Referenciadas a um sistema de coordenadas global, a viga 1 tem origem na união ( $x = 0$ ) e estende-se até sua extremidade livre ( $x = L1$ ). A viga 2, tem origem na união ( $y = 0$ ) e estende-se até sua extremidade livre ( $y = L2$ ). Por esta convenção, as vigas estão unidas em  $x = y = 0$ .

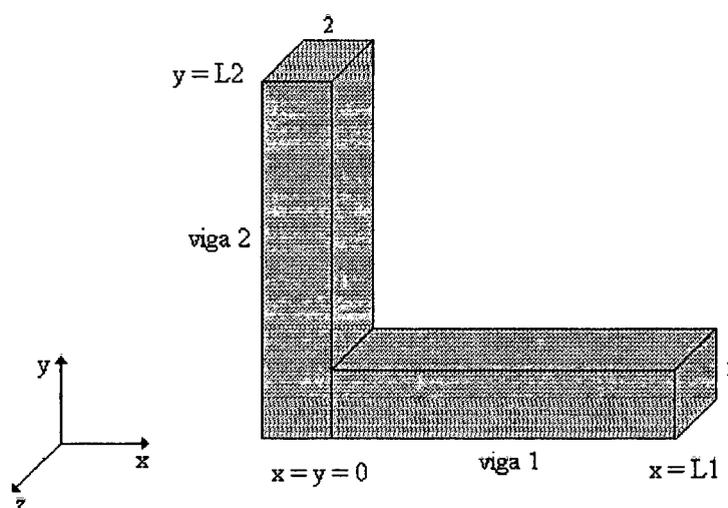


Figura 2.6: Duas vigas unidas em L.

A Figura 2.7 apresenta os deslocamentos e os esforços existentes em duas vigas unidas em L, quando numa delas atua uma força no plano das vigas. Para cada uma delas, ondas de flexão e longitudinais estão presentes. Os deslocamentos e esforços são:

- deslocamentos transversais,  $v_{y1}$  e  $v_{x2}$
- deslocamentos angulares,  $w_{z1}$  e  $w_{z2}$
- deslocamentos axiais,  $u_{x1}$  e  $u_{y2}$
- momentos fletores,  $M_{z1}$  e  $M_{z2}$
- forças cortantes,  $F_{y1}$  e  $F_{x2}$
- forças axiais  $U_{x1}$  e  $U_{y2}$

A Figura 2.8 apresenta os deslocamentos e esforços para duas vigas unidas em L quando uma força transversal excita uma das vigas. Neste caso, ondas de flexão e de torção estão presentes

- deslocamentos transversais,  $v_{z1}$  e  $v_{z2}$
- deslocamentos angulares,  $w_{y1}$ ,  $w_{x2}$ ,  $\theta_{x1}$  e  $\theta_{y2}$
- momentos fletores,  $M_{y1}$  e  $M_{x2}$
- momentos torçores,  $T_{x1}$  e  $T_{y2}$
- forças cortantes,  $F_{z1}$  e  $F_{z2}$

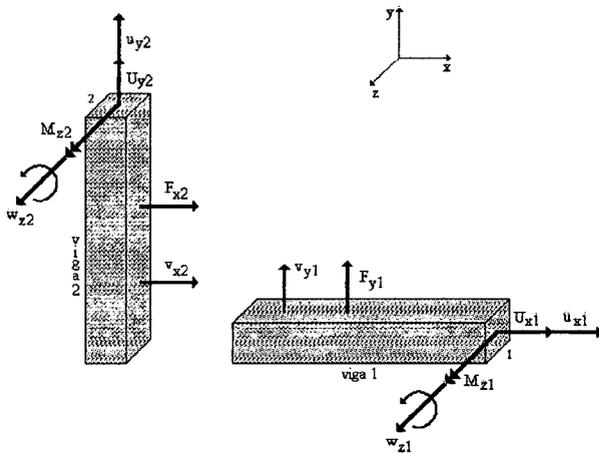


Figura 2.7: Deslocamentos e esforços para vigas em L, força no plano.

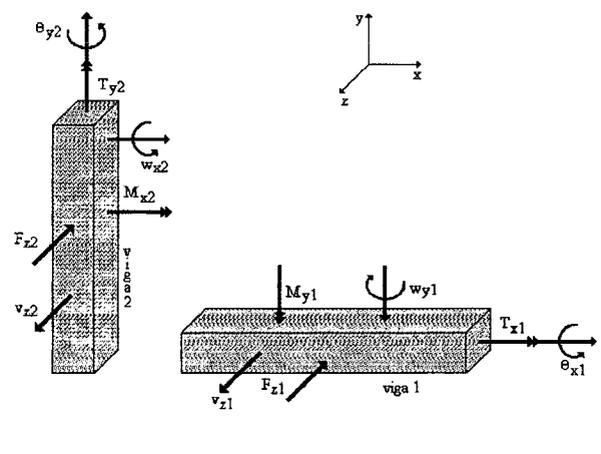


Figura 2.8: Deslocamentos e esforços para vigas em L, força transversal ao plano.

A Figura 2.9 apresenta outro tipo de subestrutura utilizado, três vigas unidas em “T”. A viga 1 tem origem na união ( $x_1 = 0$ ) e estende-se até sua extremidade livre ( $x_1 = L_1$ ). A viga 2 tem origem na união ( $y_2 = 0$ ) e estende-se até sua extremidade livre ( $y_2 = L_2$ ). A viga 3 tem origem na extremidade livre ( $x_3 = 0$ ) e estende-se até a união ( $x_3 = L_3$ ). Por esta convenção a união tem coordenadas  $x_1 = y_2 = 0$  e  $x_3 = L_3$ .

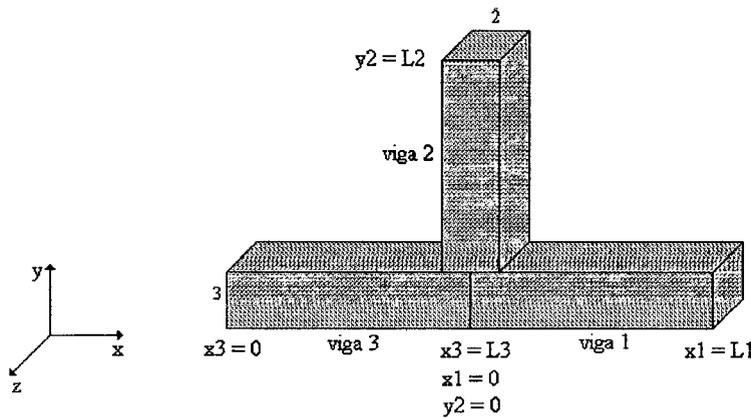


Figura 2.9: Três vigas unidas em T.

A Figura 2.10 mostra os deslocamentos e os esforços para três vigas unidas em T, quando numa delas atua uma força transversal. Em cada uma delas, ondas de flexão e de torção estão presentes, e os deslocamentos e esforços são análogos ao caso das vigas em L.

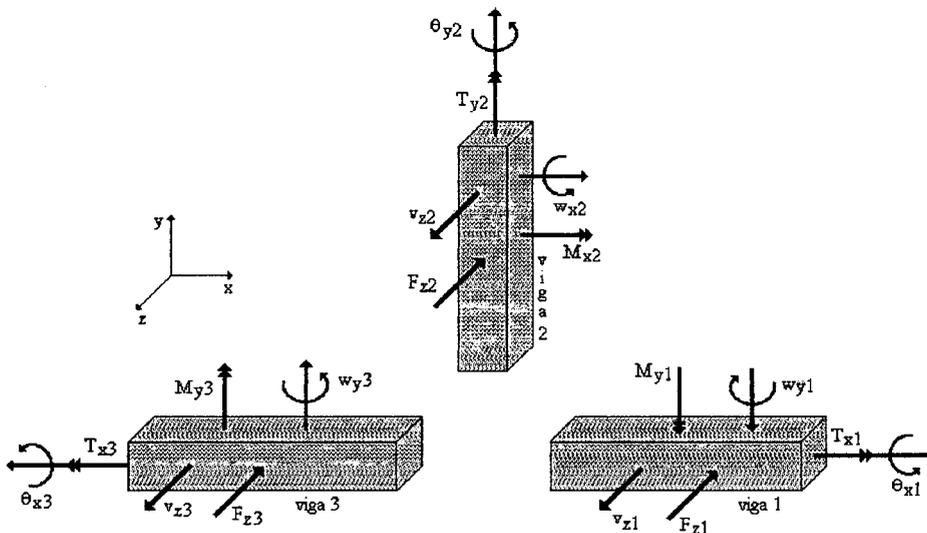


Figura 2.10: Deslocamentos e esforços para três vigas unidas em T, força transversal.

A seguir serão mostrados os tipos de mobilidade estrutural de vigas simples, vigas unidas em “L” e em “T”. Dois casos de excitação serão estudados, excitação no plano das vigas e excitação perpendicular ao plano das vigas. Para o caso de força no plano apenas as mobilidades para vigas em “L” serão apresentadas. As mobilidades para vigas em “L” e em “T” serão analisadas quando excitadas por forças transversais.

### 2.6.1 - FORÇA NO PLANO - VIGAS SIMPLES - FORÇA NA EXTREMIDADE

Quando uma força paralela ao plano das vigas em L excita a viga 1, ondas de flexão geradas e que se propagam por esta viga, transmitem-se para a viga 2 através da união. Considerando que as vigas sejam rotuladas na união, o deslocamento transversal das duas vigas é nulo e apenas os esforços fletores são transmitidos. Nesta análise, serão determinadas as mobilidades considerando-se as vigas em separado, como mostrado na Figura 2.11.

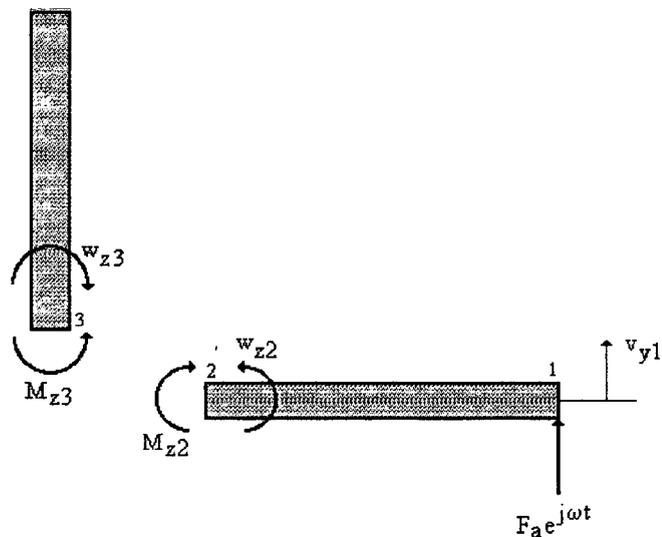


Figura 2.11: Esforços e deslocamentos referentes a duas vigas unidas em L, analisadas separadamente.

A Figura 2.12 mostra a viga 1, com a presença do pino na posição  $x = 0$  (união). A força externa aplicada,  $F_a$ , induz um deslocamento transversal  $v_{y1}$ . A presença do pino faz

com que apenas deslocamentos angulares,  $w_{z2}$ , ocorram na união. Pode-se, então, determinar as mobilidades pontual,  $Y_{11}$ , e de transferência,  $Y_{12}$ .

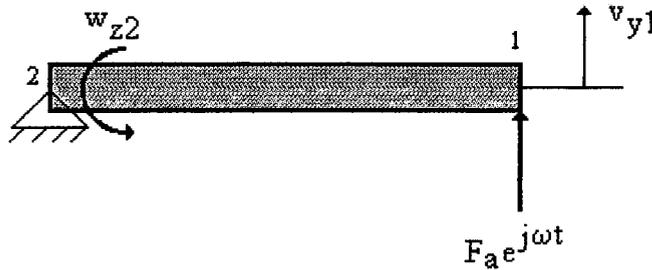


Figura 2.12: Mobilidades pontual e de transferência.

As mobilidades pontual,  $Y_{11}$ , e de transferência,  $Y_{12}$ , são dadas pelas seguintes expressões,

$$\bar{Y}_{11}(f) = \frac{j\omega}{F_a} \bar{v}_{y1}(L1) \quad 2.6.1.1$$

$$\bar{Y}_{11}(f) = \frac{j\omega}{\bar{E}I_{11}\bar{k}_{f1}^3} \left( \frac{\sinh(\bar{k}_{f1}L1) \operatorname{sen}(\bar{k}_{f1}L1)}{\sinh(\bar{k}_{f1}L1) \cos(\bar{k}_{f1}L1) - \cosh(\bar{k}_{f1}L1) \operatorname{sen}(\bar{k}_{f1}L1)} \right) \quad 2.6.1.2$$

$$\bar{Y}_{12}(f) = \frac{j\omega}{F_a} \frac{\partial \bar{v}_{y1}(0)}{\partial x} \quad 2.6.1.3$$

$$\bar{Y}_{12}(f) = \frac{j\omega}{\bar{E}I_{11}\bar{k}_{f1}^2} \left( \frac{\sinh(\bar{k}_{f1}L1) + \operatorname{sen}(\bar{k}_{f1}L1)}{\sinh(\bar{k}_{f1}L1) \cos(\bar{k}_{f1}L1) - \cosh(\bar{k}_{f1}L1) \operatorname{sen}(\bar{k}_{f1}L1)} \right) \quad 2.6.1.4$$

A Figura 2.13 mostra a viga 1, com o momento que ocorre na união ao considerá-la pinada. Determina-se, então, uma mobilidade de saída,  $Y_{22}$ .

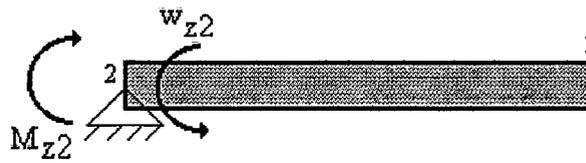


Figura 2.13: Mobilidade de saída.

A mobilidade de saída,  $Y_{22}$ , é dada por,

$$\bar{Y}_{22}(f) = \frac{j\omega}{M_{z2}} \frac{\partial \bar{v}_{y1}(0)}{\partial x} \quad 2.6.1.5$$

$$\bar{Y}_{22}(f) = \frac{j\omega}{EII\bar{k}_{fl}} \left( \frac{1 + \cosh(\bar{k}_{fl}L) \cos(\bar{k}_{fl}L)}{\sinh(\bar{k}_{fl}L) \cos(\bar{k}_{fl}L) - \cosh(\bar{k}_{fl}L) \sin(\bar{k}_{fl}L)} \right) \quad 2.6.1.6$$

A Figura 2.14 apresenta a viga 2. A transferência de energia se dá através do momento fletor. Determina-se, então, a mobilidade de entrada no componente 2,  $Y_{33}$ .

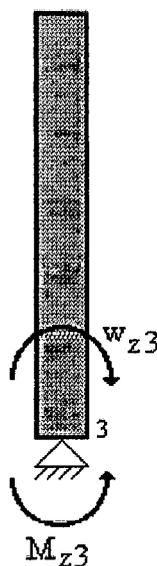


Figura 2.14: Mobilidade de entrada do segundo componente.

A mobilidade de entrada do segundo componente,  $Y_{33}$ , é dada por,

$$\bar{Y}_{33}(f) = \frac{j\omega}{M_{z3}} \frac{\partial \bar{v}_{y2}(0)}{\partial x} \quad 2.6.1.7$$

$$\bar{Y}_{33}(f) = \frac{j\omega}{E2I2\bar{k}_{f2}} \left( \frac{1 + \cosh(\bar{k}_{f2}L2) \cos(\bar{k}_{f2}L2)}{\sinh(\bar{k}_{f2}L2) \cos(\bar{k}_{f2}L2) - \cosh(\bar{k}_{f2}L2) \sin(\bar{k}_{f2}L2)} \right) \quad 2.6.1.8$$

## 2.6.2 - FORÇA NO PLANO - VIGAS EM L

Quando uma força paralela ao plano das vigas é aplicada à viga 1, ondas de flexão propagam-se por esta viga e transmitem-se para a viga 2, através da união. As ondas de flexão da viga 1 acoplam-se com as ondas longitudinais e de flexão na viga 2. Para efeitos de generalidade da excitação considera-se que a força externa  $F_a$  seja aplicada no ponto  $x_0$ , ( $0 \leq x_0 \leq L1$ ).

Ao se considerar apenas a transmissão de energia por momentos fletores, as vigas apresentam somente deslocamentos angulares nos pontos de união. Em consequência disto as seguintes mobilidades devem ser calculadas:

$$Y11_{w_m}^{FF}, Y21_{w_m}^{FF}, Y22_{w_m}^{FF}, Y12_{w_m}^{FF}, Y1x_0_{w_f}^{FF} \text{ e } Y2x_0_{w_f}^{FF}$$

onde:

o primeiro subscrito (w) refere-se ao tipo de velocidade (angular).

o segundo subscrito (m) refere-se ao tipo de excitação (momento).

o segundo subscrito (f) refere-se ao tipo de excitação (força).

O primeiro sobrescrito (F) refere-se ao tipo de onda da velocidade (flexão).

O segundo sobrescrito (F) refere-se ao tipo de onda da excitação (flexão).

O apêndice A apresenta o cálculo de todas as mobilidades discutidas neste item, com fórmulas, condições de contorno e figuras ilustrativas.

### 2.6.3 - FORÇA TRANSVERSAL - VIGAS EM L

Quando uma força perpendicular ao plano das vigas em L excita a viga 1, ondas de flexão propagam-se por esta viga e transmitem-se para a viga 2 através da união. As ondas de flexão da viga 1 acoplam-se com ondas de torção e de flexão na viga 2 e vice-versa. Para ter-se uma maior generalidade na excitação a força externa  $F_a$  pode atuar num ponto  $x_0$  qualquer, onde  $0 \leq x_0 \leq L_1$ .

Por este motivo, cada viga apresenta três deslocamentos e três esforços, e várias mobilidades são calculadas a partir da combinação entre deslocamentos e esforços. A seguir será apresentada uma tabela relacionando os esforços e respectivos deslocamentos, onde os índices 1 e 2 referem-se às vigas 1 e 2, respectivamente.

	$\theta_{x1}$	$w_{y1}$	$v_{z1}$	$\theta_{y2}$	$w_{x2}$	$v_{z2}$
$T_{x1}$	X				X	X
$M_{y1}$		X	X	X	X	X
$F_{z1}$		X	X	X	X	X
$T_{y2}$		X	X	X		
$M_{x2}$	X	X	X		X	X
$F_{z2}$	X	X	X		X	X
$F_a$		X	X	X	X	X

Tabela 2.1: Relação esforço-deslocamento para duas vigas unidas em L.

As mobilidade presentes nesta análise estão listadas abaixo:

$$\begin{aligned} &\bar{Y}_{11}^{FF}_{w_m}, \bar{Y}_{22}^{FF}_{w_m}, \bar{Y}_{12}^{FT}_{w_m}, \bar{Y}_{21}^{FT}_{w_m}, \bar{Y}_{11}^{TT}_{w_m}, \bar{Y}_{22}^{TT}_{w_m}, \bar{Y}_{12}^{TF}_{w_m}, \bar{Y}_{21}^{TF}_{w_m}, \bar{Y}_{12}^{FF}_{w_m}, \\ &\bar{Y}_{21}^{FF}_{w_m}, \bar{Y}_{11}^{FF}_{v_m}, \bar{Y}_{22}^{FF}_{v_m}, \bar{Y}_{12}^{FF}_{v_m}, \bar{Y}_{21}^{FF}_{v_m}, \bar{Y}_{12}^{FT}_{v_m}, \bar{Y}_{21}^{FT}_{v_m}, \bar{Y}_{11}^{FF}_{v_f}, \bar{Y}_{22}^{FF}_{v_f}, \\ &\bar{Y}_{12}^{FF}_{v_f}, \bar{Y}_{21}^{FF}_{v_f}, \bar{Y}_{12}^{TF}_{w_f}, \bar{Y}_{21}^{TF}_{w_f}, \bar{Y}_{11}^{FF}_{w_f}, \bar{Y}_{22}^{FF}_{w_f}, \bar{Y}_{12}^{FF}_{w_f}, \bar{Y}_{21}^{FF}_{w_f}, \bar{Y}_{1x_0}^{FF}_{w_f}, \\ &\bar{Y}_{2x_0}^{FF}_{w_f}, \bar{Y}_{1x_0}^{FF}_{v_f}, \bar{Y}_{2x_0}^{FF}_{v_f} \text{ e } \bar{Y}_{2x_0}^{TF}_{w_f} \end{aligned}$$

Como exemplo, a mobilidade  $Y_{12}^{FT}_{w_m}$  é assim entendida: mobilidade de transferência, obtida dividindo-se o deslocamento angular por ondas de flexão, no ponto 1, por um

momento torçor aplicado no ponto 2. Já a mobilidade  $Y_{22}^{FF}_{v-f}$  é: mobilidade pontual, obtida dividindo-se o deslocamento transversal de flexão do ponto 2 por uma força cortante (flexão) aplicada também no ponto 2.

Cada conjunto de mobilidades têm as suas próprias condições de contorno, decorrentes das diferentes excitações. O apêndice B apresenta o cálculo de todas as mobilidades discutidas neste item, com fórmulas, condições de contorno e figuras ilustrativas.

#### 2.6.4 - FORÇA TRANSVERSAL - VIGAS EM T

Quando três vigas unidas em T são excitadas, na viga 1, por uma força transversal, ondas de flexão propagam-se por esta viga e transmitem-se para as vigas 2 e 3 através da união. As ondas de flexão da viga 1 acoplam-se com ondas de torção e de flexão nas vigas 2 e 3 e vice-versa. Para ter-se uma maior generalidade na excitação a força externa  $F_a$  pode atuar num ponto  $x_0$  qualquer, onde  $0 \leq x_0 \leq L_1$ .

Cada viga apresenta três deslocamentos e três esforços. Várias mobilidades são calculadas a partir da combinação entre deslocamentos e esforços. Na seqüência, uma tabela relacionando esforço e deslocamento é apresentada, onde os índices 1, 2 e 3 referem-se às vigas 1, 2 e 3, respectivamente.

	$\theta_{x1}$	$w_{y1}$	$v_{z1}$	$\theta_{y2}$	$w_{x2}$	$v_{z2}$	$\theta_{x3}$	$w_{y3}$	$v_{z3}$
$T_{x1}$	X				X	X	X		
$M_{y1}$		X	X	X	X	X		X	X
$F_{z1}$		X	X	X	X	X		X	X
$T_{y2}$		X	X	X				X	X
$M_{x2}$	X	X	X		X	X	X	X	X
$F_{z2}$	X	X	X		X	X	X	X	X
$T_{x3}$	X				X	X	X		
$M_{y3}$		X	X	X	X	X		X	X
$F_{z3}$		X	X	X	X	X		X	X
$F_a$		X	X	X	X	X		X	X

Tabela 2.2: Relação esforço-deslocamento para três vigas unidas em T.

As mobilidade presentes nesta análise estão listadas abaixo:

$$\begin{aligned} & \bar{Y}_{11}^{FF}_{w_m}, \bar{Y}_{22}^{FF}_{w_m}, \bar{Y}_{33}^{FF}_{w_m}, \bar{Y}_{13}^{TT}_{w_m}, \bar{Y}_{31}^{TT}_{w_m}, \bar{Y}_{12}^{FT}_{w_m}, \bar{Y}_{21}^{FT}_{w_m}, \bar{Y}_{23}^{FT}_{w_m}, \bar{Y}_{32}^{FT}_{w_m}, \\ & \bar{Y}_{11}^{TT}_{w_m}, \bar{Y}_{22}^{TT}_{w_m}, \bar{Y}_{33}^{TT}_{w_m}, \bar{Y}_{12}^{TF}_{w_m}, \bar{Y}_{21}^{TF}_{w_m}, \bar{Y}_{23}^{TF}_{w_m}, \bar{Y}_{32}^{TF}_{w_m}, \bar{Y}_{12}^{FF}_{w_m}, \bar{Y}_{21}^{FF}_{w_m}, \\ & \bar{Y}_{13}^{FF}_{w_m}, \bar{Y}_{31}^{FF}_{w_m}, \bar{Y}_{23}^{FF}_{w_m}, \bar{Y}_{32}^{FF}_{w_m}, \bar{Y}_{11}^{FF}_{v_m}, \bar{Y}_{22}^{FF}_{v_m}, \bar{Y}_{33}^{FF}_{v_m}, \bar{Y}_{12}^{FF}_{v_m}, \bar{Y}_{32}^{FF}_{v_m}, \bar{Y}_{21}^{FF}_{v_m}, \\ & \bar{Y}_{31}^{FF}_{v_m}, \bar{Y}_{13}^{FF}_{v_m}, \bar{Y}_{23}^{FF}_{v_m}, \bar{Y}_{12}^{FT}_{v_m}, \bar{Y}_{32}^{FT}_{v_m}, \bar{Y}_{21}^{FT}_{v_m}, \bar{Y}_{23}^{FT}_{v_m}, \bar{Y}_{11}^{FF}_{v_f}, \bar{Y}_{22}^{FF}_{v_f}, \bar{Y}_{33}^{FF}_{v_f}, \\ & \bar{Y}_{12}^{FF}_{v_f}, \bar{Y}_{32}^{FF}_{v_f}, \bar{Y}_{21}^{FF}_{v_f}, \bar{Y}_{31}^{FF}_{v_f}, \bar{Y}_{13}^{FF}_{v_f}, \bar{Y}_{23}^{FF}_{v_f}, \bar{Y}_{1x0}^{FF}_{v_f}, \bar{Y}_{2x0}^{FF}_{v_f}, \bar{Y}_{3x0}^{FF}_{v_f}, \bar{Y}_{12}^{TF}_{w_f}, \\ & \bar{Y}_{32}^{TF}_{w_f}, \bar{Y}_{21}^{TF}_{w_f}, \bar{Y}_{23}^{TF}_{w_f}, \bar{Y}_{2x0}^{TF}_{w_f}, \bar{Y}_{11}^{FF}_{w_f}, \bar{Y}_{22}^{FF}_{w_f}, \bar{Y}_{33}^{FF}_{w_f}, \bar{Y}_{12}^{FF}_{w_f}, \bar{Y}_{32}^{FF}_{w_f}, \bar{Y}_{21}^{FF}_{w_f}, \\ & \bar{Y}_{31}^{FF}_{w_f}, \bar{Y}_{13}^{FF}_{w_f}, \bar{Y}_{23}^{FF}_{w_f}, \bar{Y}_{1x0}^{FF}_{w_f}, \bar{Y}_{2x0}^{FF}_{w_f}, \bar{Y}_{3x0}^{FF}_{w_f} \end{aligned}$$

Cada conjunto de mobilidades têm as suas próprias condições de contorno, decorrentes das diferentes excitações. O apêndice C apresenta o cálculo de todas as mobilidades discutidas neste item, com fórmulas, condições de contorno e figuras ilustrativas.

### 2.6.5 - COMPARAÇÃO COM RESULTADOS OBTIDOS POR OUTRO MÉTODO

A verificação da precisão dos resultados obtidos por este procedimento analítico poderá ser feita através da comparação com os resultados obtidos por outros métodos de análise, tais como experimentais e numéricos.

Os resultados na forma de resposta e de mobilidades foram comparados aos obtidos numericamente, por Elementos Finitos, com o uso do software ANSYS. Este procedimento foi escolhido tendo em vista as vantagens que proporciona, tais como: precisão, baixo custo, aplicabilidade até altas frequências (para poucas vigas acopladas), facilidade de testes para diversas condições de contorno, e relativa rapidez de cálculo.

Nenhuma análise experimental foi realizada neste trabalho devido, principalmente, à não disponibilidade de transdutores adequados para a medição de deslocamentos angulares nos pontos de união das barras. Um segundo motivo refere-se à alta susceptibilidade dos resultados do processamento dos sinais captados pela malha de acelerômetros, aos ruídos da

cadeia de medição. Isto foi observado por Baars (1996) e deverá ser objeto de um futuro estudo específico sobre este assunto.

A seguir serão mostrados resultados para alguns tipos de mobilidade vistos nos itens 2.6.1.1, 2.6.2.1 e 2.6.2.2, para vigas excitadas por força no plano e excitadas por força transversal ao plano das vigas.

### 2.6.5.1 - DESCRIÇÃO DA ANÁLISE NUMÉRICA

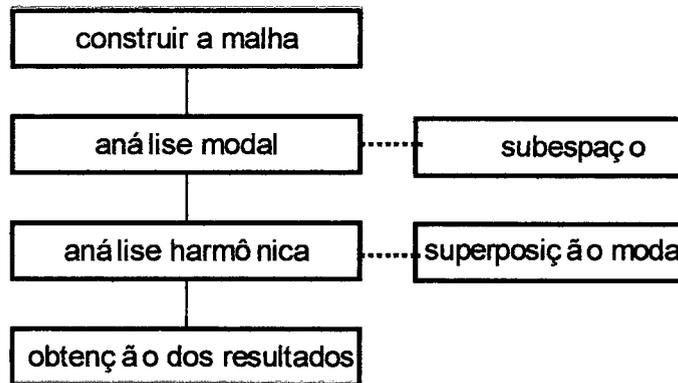
O software utilizado no modelo numérico foi o ANSYS, versão 5.0. O cálculo da mobilidade é feito pelo ANSYS através de uma análise harmônica. Três métodos de solução estão disponíveis: o método “*full*” que faz uso das matrizes completas, e que garante maior precisão, mas que implica em um maior dispêndio computacional; o método reduzido que usa matrizes de ordem reduzidas em relação ao número de graus de liberdade *masters*, previamente selecionados, e o método da superposição modal, baseado nos somatórios das contribuições dos autovetores da estrutura em análise.

Optou-se por utilizar o método da superposição modal para a análise harmônica por ser o método de melhor eficácia em termos precisão, tempo de execução e capacidade computacional exigida, quando comparado com o método *full*.

A utilização do método da superposição modal requer, inicialmente, uma análise modal da estrutura, para se calcular os autovetores e os autovalores, que posteriormente serão usados na análise harmônica. Para resolver o problema de análise modal, o ANSYS dispõe de quatro métodos, que são: o método reduzido (que emprega matrizes de ordens reduzidas em relação ao número de graus de liberdade *masters* selecionados), o método dos subespaços (que emprega as matrizes completas e simétricas), o método assimétrico (que considera matrizes assimétricas) e o método amortecido (que considera a matriz de amortecimento).

O método assimétrico é usado em problemas de interação fluido-estrutura e o método amortecido é usado em problemas onde o amortecimento não pode ser desprezado, tais como análises de rolamentos. Assim sendo, resta-se somente dois métodos passíveis de serem utilizados, o reduzido e o dos subespaços. Escolheu-se o método do subespaço devido à melhor precisão, apesar de implicar em uma maior carga computacional.

O procedimento para o cálculo numérico da mobilidade seguiu o fluxograma 2.1, mostrado abaixo:



Fluxograma 2.1: Determinação numérica da mobilidade.

A análise harmônica fornece como resultados deslocamentos nodais e ou carregamentos nos elementos. Multiplicando-se o deslocamento nodal por  $j\omega$  e dividindo-se pelo carregamento, obtém-se a mobilidade.

## 2.6.5.2 - RESULTADOS DE MOBILIDADES

### 2.6.5.2.1 - DUAS VIGAS EM L, EXCITADAS POR UMA FORÇA NO PLANO

Neste item mostra-se a comparação do cálculo das mobilidades  $Y_{w_m}^{FF}$  e  $Y_{w_f}^{FF}$  pelos métodos analítico e numérico. As características geométricas e de material das vigas para as quais as mobilidades foram calculadas são:

$$E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

$$\rho = 8000 \text{ kg / m}^3$$

$$\eta_1 = \eta_2 = 0,01$$

$$b1 = h1 = b2 = h2 = 0.01 \text{ m}$$

$$L1 = 1,0 \text{ m} \quad L2 = 1,5 \text{ m}$$

O fator de perda utilizado,  $\eta = 0,01$ , para todas as análises do trabalho, é consideravelmente maior que o do aço (0,0005 a 0,001), pois estes são os valores típicos de fator de perda para vigas soldadas, que têm pesadas máquinas conectadas rigidamente a elas. Valores semelhantes a estes foram usados por Baars, 1996 e por pesquisadores noruegueses.

A metodologia teórica é a apresentada no apêndice A. Na resolução dos sistemas provenientes das condições de contorno e subsequente cálculo das mobilidades foi utilizado o software Mathcad. O procedimento numérico utilizado foi o apresentado no item 2.6.5.1.

O elemento utilizado foi o BEAM 3, elemento elástico de viga 2-D. Trata-se de um elemento uniaxial que suporta esforços axiais e de flexão. Considera dois nós por elemento e três graus de liberdade por nó: deslocamento axial na direção x, deslocamento transversal na direção y e deslocamento angular (rotação) na direção z. Este elemento aceita como carregamentos nodais forças nas direções axial (eixo x) e transversal (eixo y) e momento fletor na direção transversal (eixo z). A análise foi estendida até 1150 Hz, que para este tipo de viga corresponde a um comprimento de onda de 0,284 m. A malha continha 500 elementos, ou 1 elemento a cada 0,005 m, o que leva a quase 57 elementos por comprimento de onda. Este número excede em muito a premissa mínima do método, que é de 6 elementos por comprimento de onda, para elementos de viga, necessária para se garantir que o número de elementos é representativo do comportamento real da estrutura.

Os dois casos foram testados na mesma plataforma, um micro PC Pentium de 90 MHz, 32 Mbytes de memória RAM e disco rígido de 1,0 Gbytes. Quanto ao tempo de execução ambos os métodos mostraram-se muito rápidos, com tempos de processamento inferiores a cinco minutos; Mathcad: 160 segundos e ANSYS: 210 segundos, para o cálculo das mobilidades.

As curvas de mobilidade, para ambos os métodos, foram obtidas utilizando-se um incremento de 1 Hz.

A Figura 2.15 apresenta a comparação da mobilidade  $Y12_{w_m}^{FF}$  pelos métodos teórico e numérico. A excitação (momento fletor) e a resposta (deslocamento angular) foram analisadas na extremidade livre da viga 1. Pode-se notar a excelente concordância entre os dois métodos, inclusive nas altas frequências, onde o método numérico tende a fornecer resultados mais divergentes em função do menor comprimento de onda.

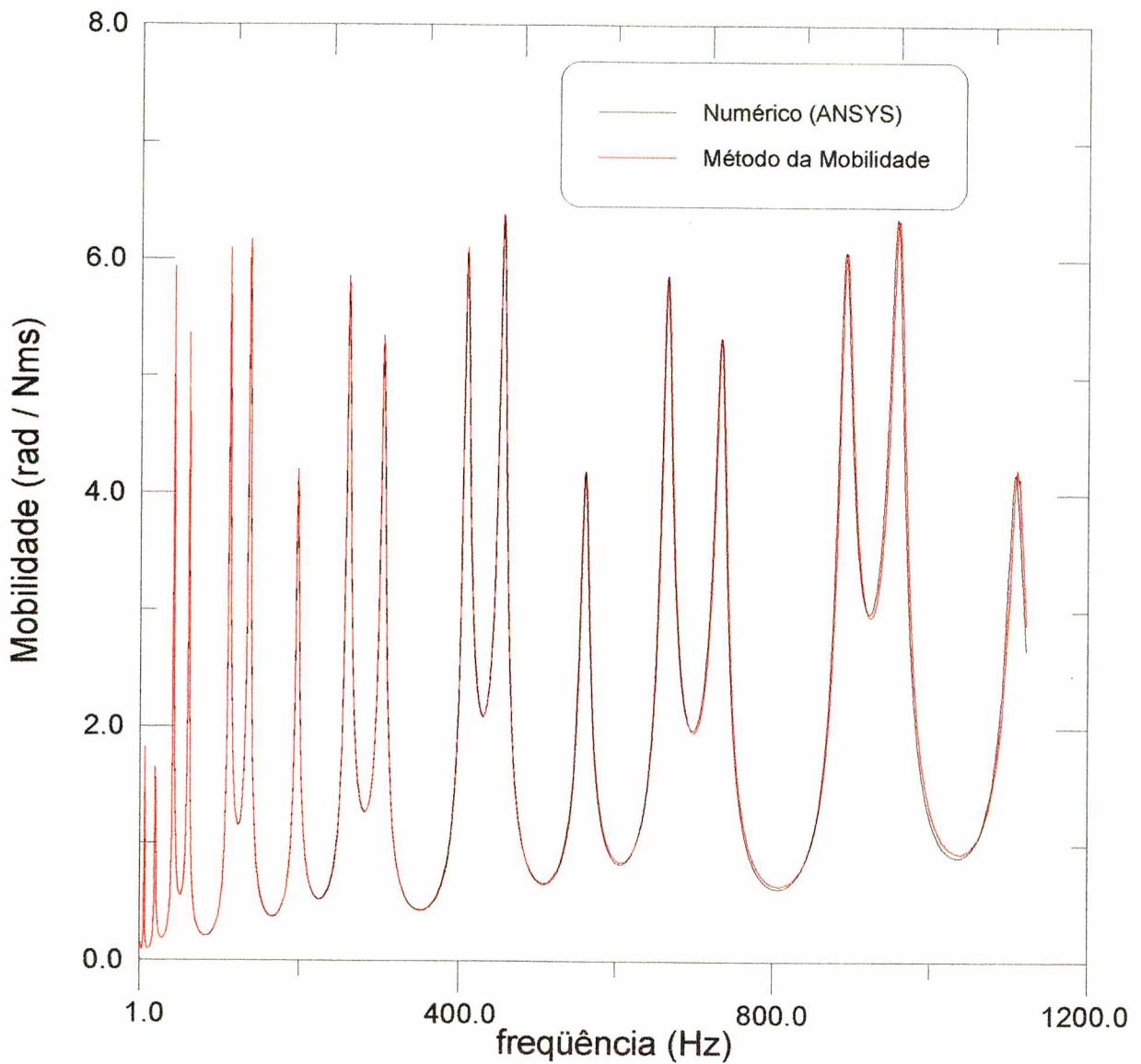


Figura 2.15: Comparação dos resultados da mobilidade  $Y_{12}^{FF_m}$ .

Já a Figura 2.16 apresenta os resultados para a mobilidade  $Y_{2x}^{FF_f}$ . Mais uma vez nota-se a excelente concordância entre os dois métodos.

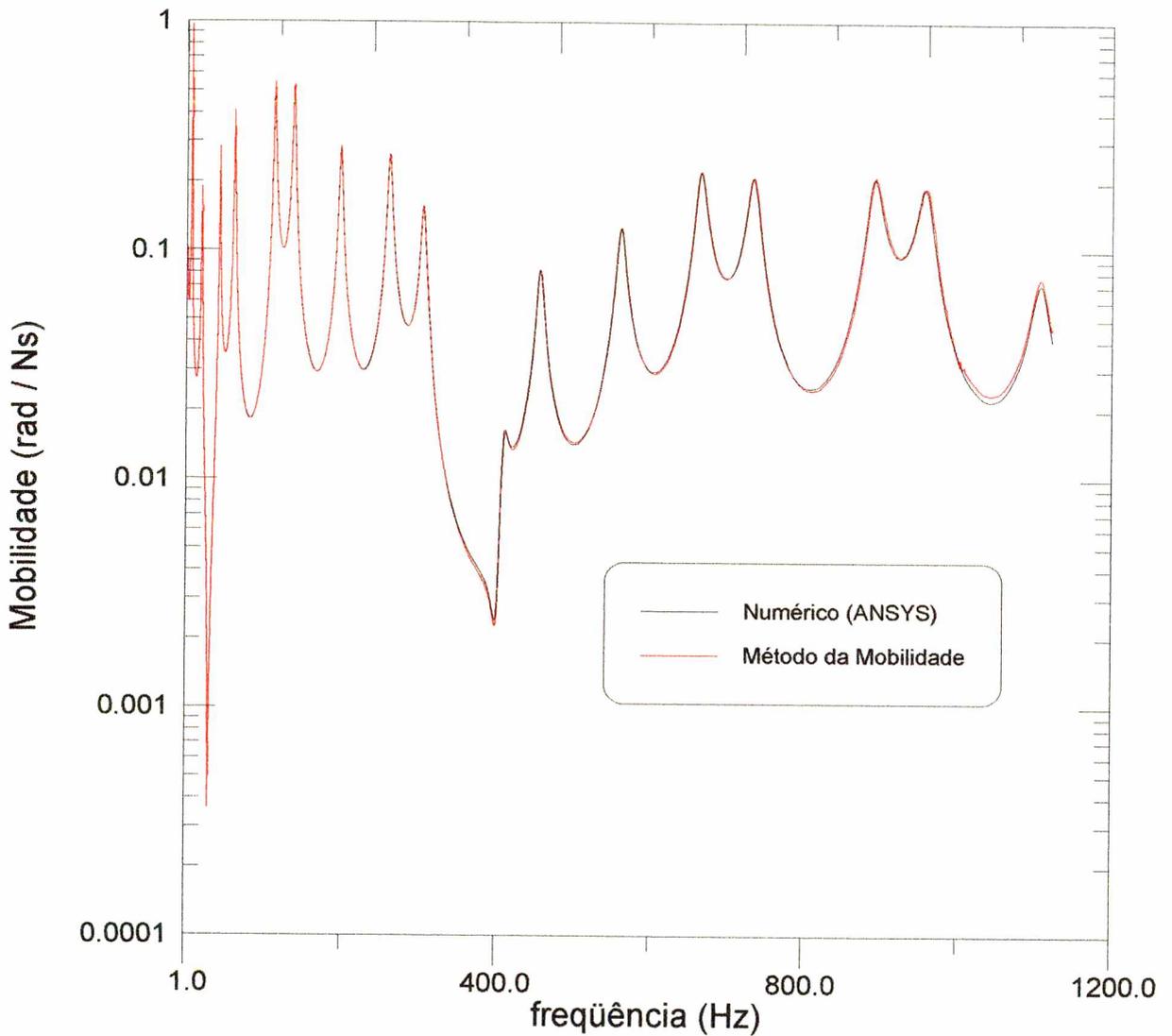


Figura 2.16: Comparação dos resultados da mobilidade  $Y_{2x0_{w-f}}^{FF}$ .

#### 2.6.5.2.2 - DUAS VIGAS EM L, EXCITADAS POR UMA FORÇA TRANSVERSAL

Para duas vigas unidas em L, excitadas por uma força transversal serão mostrados os resultados de mobilidades  $Y_{12_{w-m}}^{TF}$  e  $Y_{22_{v-f}}^{FF}$ . As características geométricas e de material das vigas para as quais as mobilidades foram calculadas são:

$$E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

$$\rho = 8000 \text{ kg / m}^3$$

$$b1 = h1 = b2 = h2 = 0,05 \text{ m}$$

$$v1 = v2 = 0,29$$

$$\eta1 = \eta2 = 0,01$$

$$L1 = 1,0 \text{ m} \quad L2 = 1,5 \text{ m}$$

A metodologia teórica é a apresentada no apêndice B. Na resolução dos sistemas provenientes das condições de contorno e subsequente cálculo das mobilidades foi utilizado o software Mathcad. O procedimento numérico utilizado foi o apresentado no item 2.6.5.1. O elemento utilizado foi o BEAM 4, elemento elástico de viga 3-D. Trata-se de um elemento uniaxial, que suporta esforços axiais, torcionais e de flexão. Tem dois nós por elemento e seis graus de liberdade por nó: deslocamento transversal nas direções x, y e z, e deslocamento angular (rotação) nas direções x, y e z. Este elemento aceita como carregamentos nodais forças e momentos nas três direções. A análise foi feita até 1450 Hz, que para este tipo de viga nos dá um comprimento de onda de 0,566 m. A malha continha 280 elementos (1 elemento a cada 0,0125 m), o que leva a 45 elementos por comprimento de onda. Este número excede em muito a premissa mínima do método, que é de 6 elementos por comprimento de onda, para elementos de viga, necessária para se garantir que o número de elementos é representativo do comportamento real da estrutura.

Quanto ao tempo de processamento, o método analítico mais uma vez mostrou-se mais rápido: 300 segundos contra 440 segundos do método numérico.

A Figura 2.17 apresenta a comparação da mobilidade  $Y12_{w_m}^{FF}$  pelos métodos teórico e numérico. Pode-se notar a excelente concordância entre os dois métodos, principalmente nas baixas e médias frequências. As pequenas diferenças de amplitude podem ser atribuídas ao amortecimento, pois o ANSYS considera um amortecimento do tipo razão constante de amortecimento, que é a razão do amortecimento real pelo crítico, e o modelo analítico considera como amortecimento o fator de perda do material. Nas altas frequências a concordância nos valores de frequência não é exata, e uma explicação para isto está no fato de que no cálculo dos autovalores da análise modal, foi calculado o número exato de modos existentes até a frequência de 1500 Hz, quando o correto seria calcular o dobro do número de modos e usar a metade destes modos na análise harmônica.

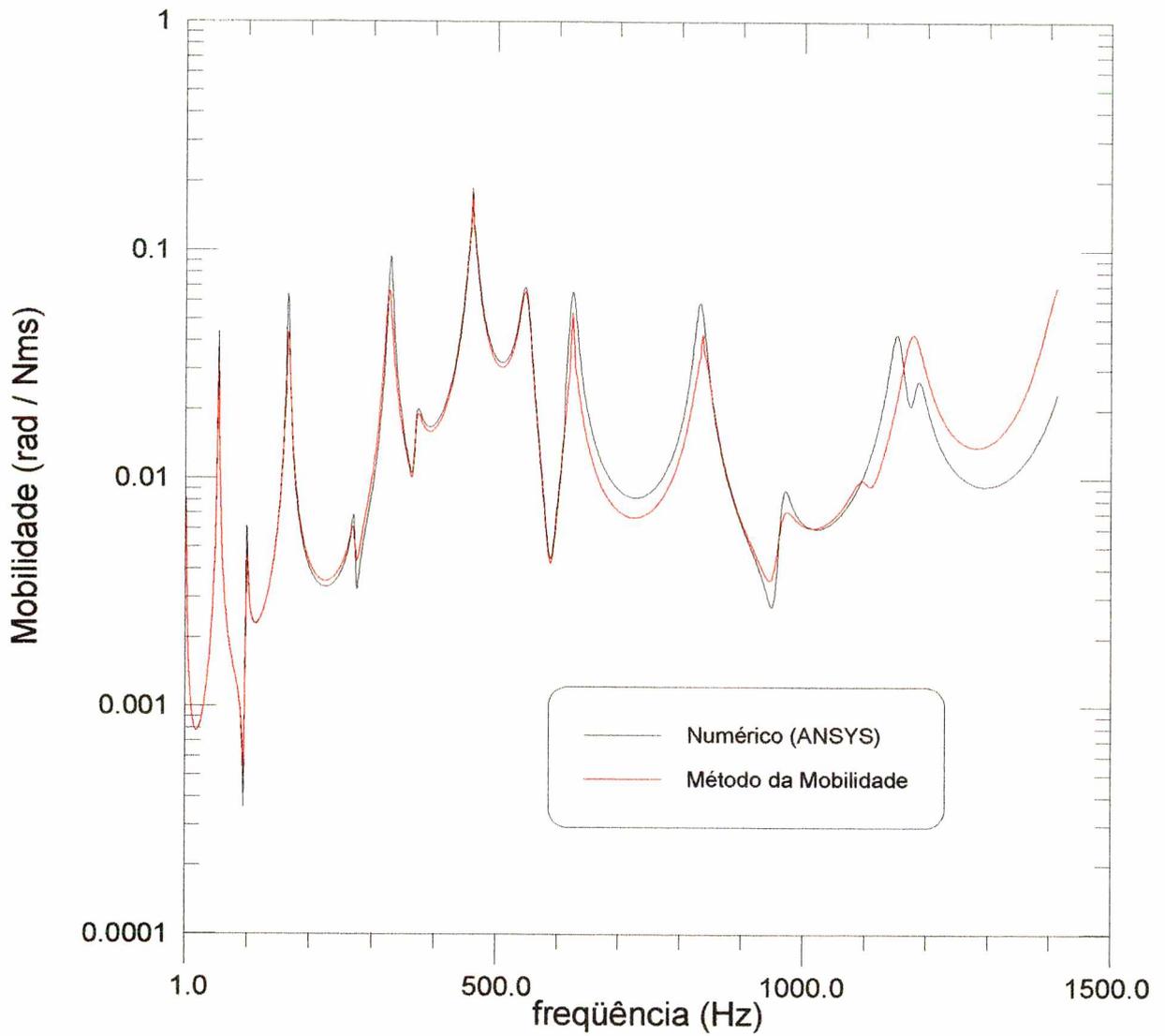


Figura 2.17: Comparação dos resultados da mobilidade  $Y12_{w_m}^{TF}$ .

Já a Figura 2.18 apresenta os resultados para a mobilidade  $Y22_{v_f}^{FF}$ . As observações feitas em relação à mobilidade  $Y12_{w_m}^{FF}$  são também aplicadas a estes resultados.

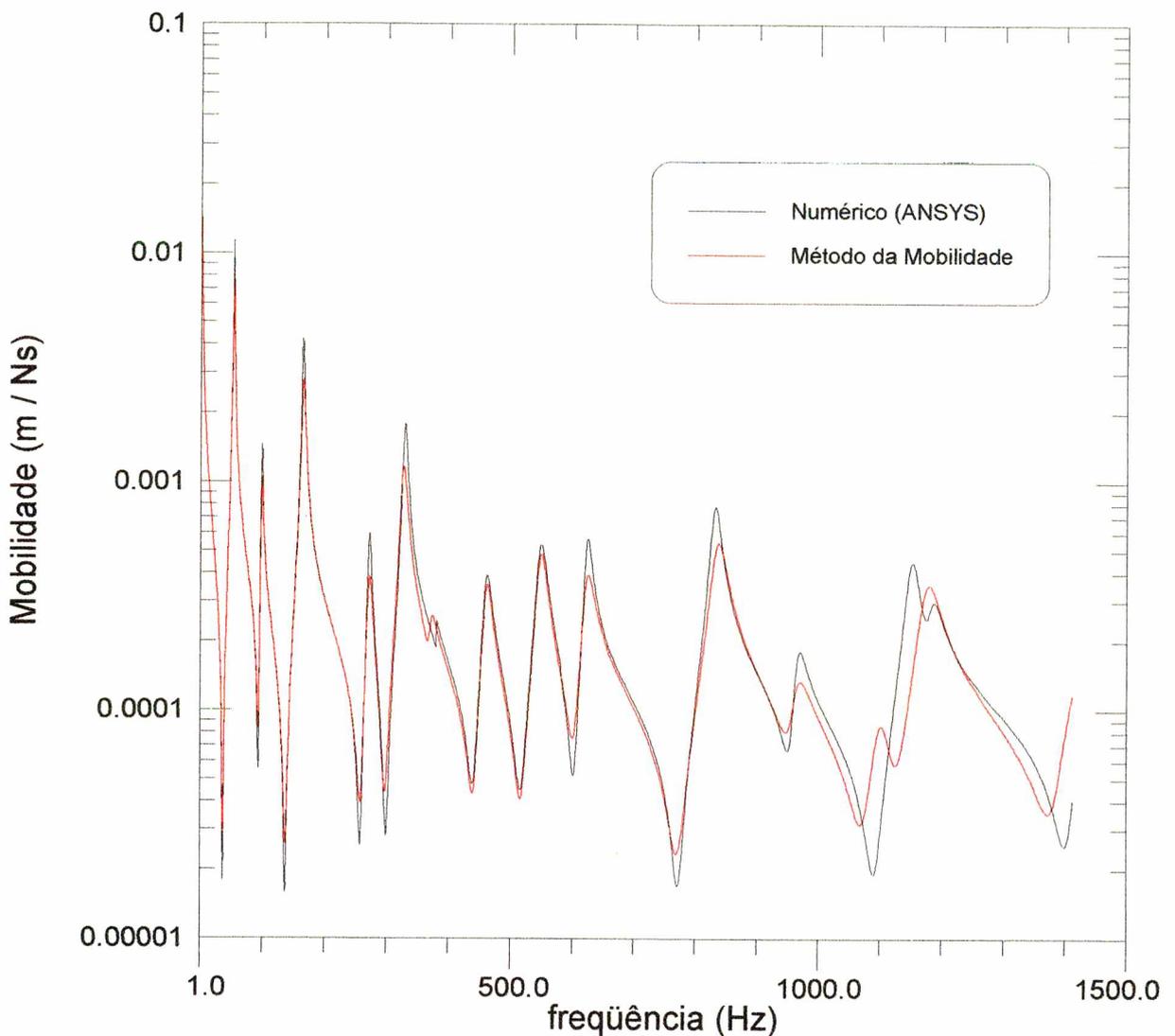


Figura 2.18: Comparação dos resultados da mobilidade  $Y22_{v_f}^{FF}$ .

### 2.6.5.2.3 - TRÊS VIGAS EM T, EXCITADAS POR UMA FORÇA TRANSVERSAL

Para três vigas unidas em T excitadas por uma força transversal serão mostrados os resultados de mobilidades  $Y13_{w_m}^{FF}$  e  $Y21_{v_f}^{FF}$ . As características geométricas e de material das vigas para as quais as mobilidades foram calculadas são:

$$E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

$$\rho = 8000 \text{ kg / m}^3$$

$$b1 = h1 = b2 = h2 = h3 = b3 = 0,05 \text{ m}$$

$$\nu1 = \nu2 = \nu3 = 0,29$$

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0,01$$

$$L_1 = L_3 = 1,0 \text{ m} \quad L_2 = 1,5 \text{ m}$$

A análise teórica utilizada é a apresentada no apêndice C e quanto ao modelo numérico, foi utilizado o mesmo procedimento apresentado no item 2.6.5.1, incluindo a faixa de frequência, número de elementos por comprimento de onda e métodos de solução. Quanto ao tempo de processamento, o método analítico mais uma vez mostrou-se mais rápido: 505 segundos para o método da mobilidade e 673 segundos para o numérico.

A Figura 2.19 apresenta a comparação da mobilidade  $Y_{13_{w_m}}^{FF}$  pelos métodos da Mobilidade e numérico. As observações feitas em relação à mobilidade  $Y_{12_{w_m}}^{FF}$ , no item 2.6.5.2.2, são também aplicadas a estes resultados.

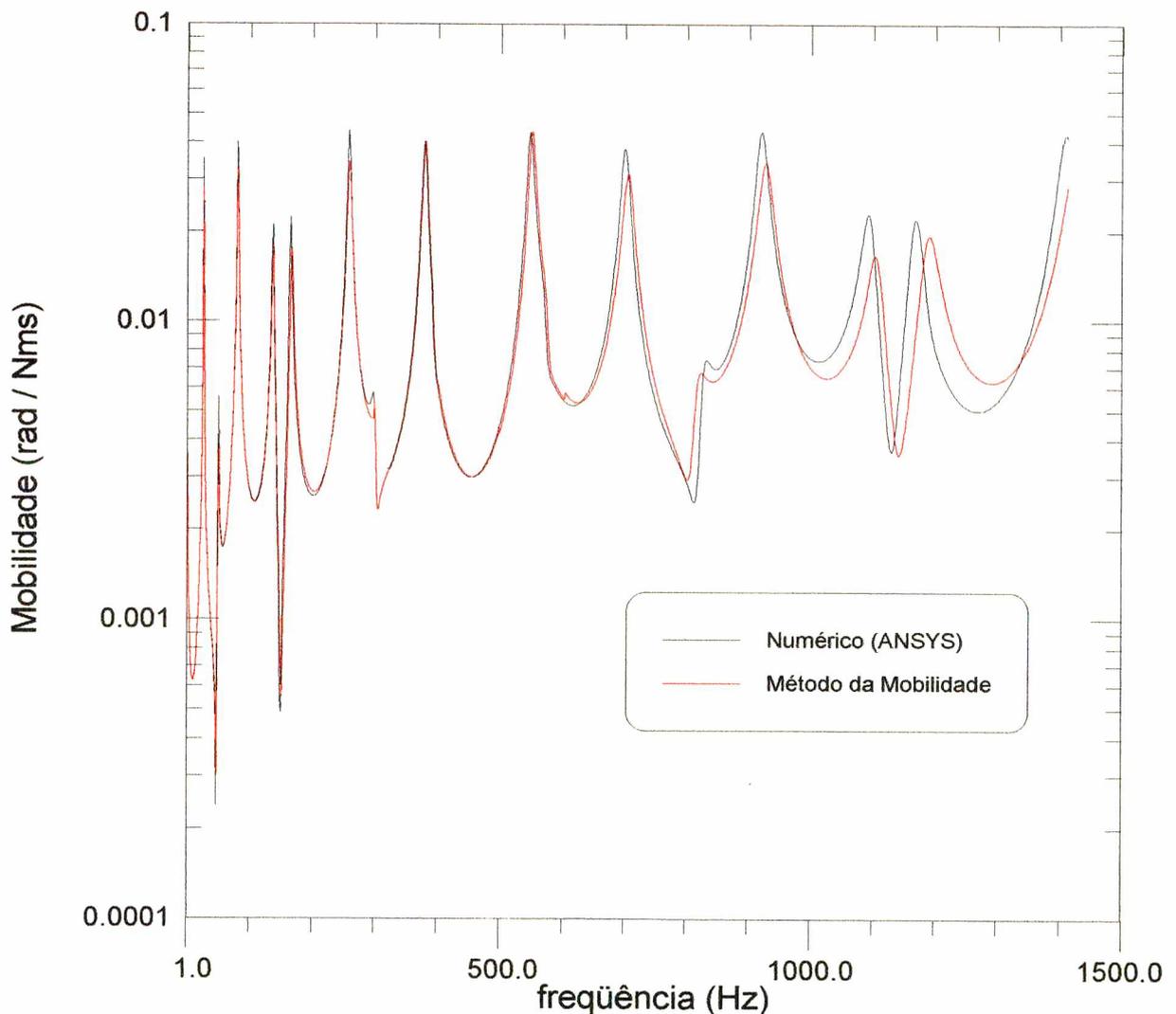


Figura 2.19: Comparação dos resultados da mobilidade  $Y_{13_{w_m}}^{FF}$ .

A Figura 2.20 apresenta os resultados para a mobilidade  $Y_{21_{v_f}}^{FF}$ . Observa-se novamente uma boa concordância entre os resultados obtidos pelos dois métodos.

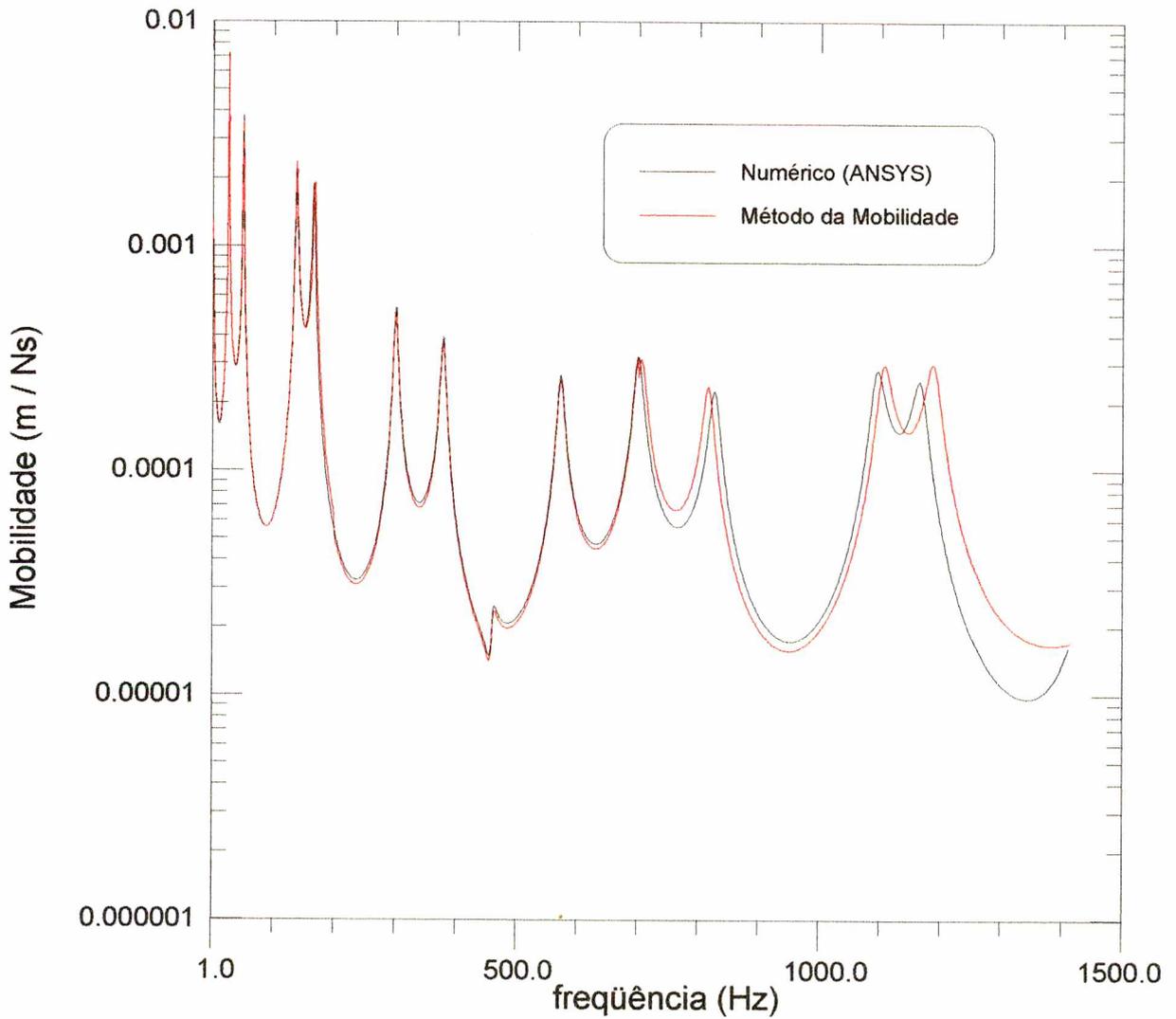


Figura 2.20: Comparação dos resultados da mobilidade  $Y_{21_{v_f}}^{FF}$ .

## CAPÍTULO 3

### FLUXO DE POTÊNCIA ENTRE VIGAS UNIDAS EM “L”

Neste capítulo serão mostrados os resultados da análise do fluxo de energia entre componentes estruturais tipo vigas unidas em L, os quais mostram a importância das ondas de torção, bem como as variações no fluxo ao serem considerados os termos de cisalhamento e de inércia rotatória nas equações da onda de flexão.

Primeiramente, serão apresentados os resultados de fluxo de potência para duas vigas unidas em L excitadas por uma força no plano, e, posteriormente, será considerada uma força perpendicular ao plano formado pelas vigas.

Optou-se por apresentar os resultados de razão de potências, ou seja, a potência transferida (para cada tipo de acoplamento) dividida pela potência de entrada. Obtém-se, assim, as potências transferidas normalizadas em relação à potência de entrada. Assim sendo, o acoplamento que transfere a maior parte da energia é aquele em que o valor da razão de potências se aproxima da unidade (ou zero dB, em escala logarítmica), pois desta forma a potência de entrada é quase que totalmente transferida por aquele tipo de acoplamento ( $W / W_{in} = 1$ ). As análises baseiam-se nos valores médios das potências, calculados em faixas de frequência de 1/1 oitava.

Para a determinação das potências foi desenvolvido um programa em linguagem C++, que, por sua vez, utilizava o algoritmo da decomposição LU para o cálculo de inversão de matrizes complexas (Press et al, 1992). Para verificar a confiabilidade dos resultados do programa, foram feitos vários testes, que compreenderam a aplicação de uma excitação nula para verificar se a resposta resultava também nula, e o uso de amortecimento nulo para obter a soma das potências transferidas igual à potência de entrada. Por último os resultados foram comparados aos obtidos numericamente através do uso do software comercial ANSYS. Os resultados apresentaram boa concordância.

### 3.1 - VIGAS EULER-BERNOULLI UNIDAS EM L, EXCITADAS POR FORÇAS NO PLANO

Este item considera duas vigas Euler-Bernoulli unidas em L, excitadas por uma força harmônica, de frequência  $\omega = 2\pi f$  e de amplitude unitária, aplicada na extremidade livre da viga 1, e cuja direção pertence ao plano formado pela disposição das vigas. A Figura 3.1 apresenta os sentidos dos esforços e deslocamentos adotados, para uma viga L. A Figura 3.2 mostra as vigas, os esforços e deslocamentos necessários para o cálculo do fluxo de potência.

Sendo desprezados os efeitos de cisalhamento, a transferência de energia poderá ocorrer através das ondas de flexão em ambas as vigas e através de ondas longitudinais em uma viga que se acoplam às de flexão em outra viga.

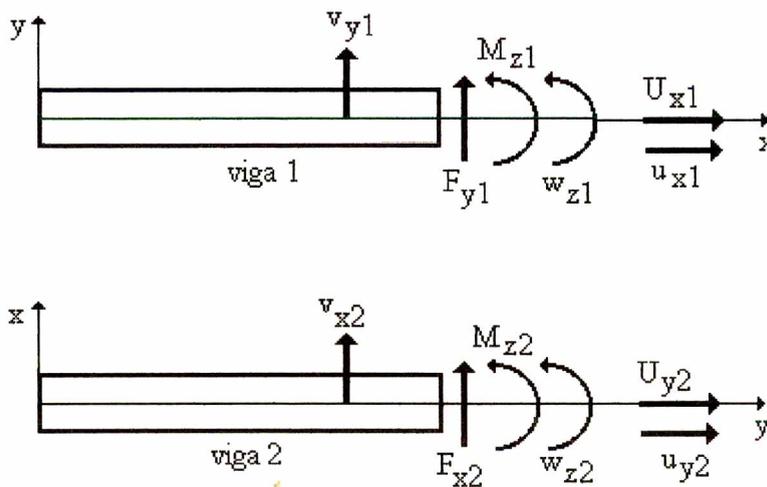


Figura 3.1: Esforços e deslocamentos em duas vigas em L, excitadas por força no plano.

A representação dos símbolos dos esforços e deslocamentos indicados na Figura 3.1 está descrita abaixo.

$v_{y1}$  - deslocamento transversal de flexão na viga 1

$v_{x2}$  - deslocamento transversal de flexão na viga 2

$u_{x1}$  - deslocamento longitudinal na viga 1

- $u_{y2}$  - deslocamento longitudinal na viga 2
- $w_{z1}$  - deslocamento angular de flexão na viga 1
- $w_{z2}$  - deslocamento angular de flexão na viga 2
- $M_{z1}$  - momento fletor na viga 1
- $M_{z2}$  - momento fletor na viga 2
- $F_{y1}$  - força cortante na viga 1
- $F_{x2}$  - força cortante na viga 2
- $U_{x1}$  - força axial viga 1
- $U_{y2}$  - força axial na viga 2

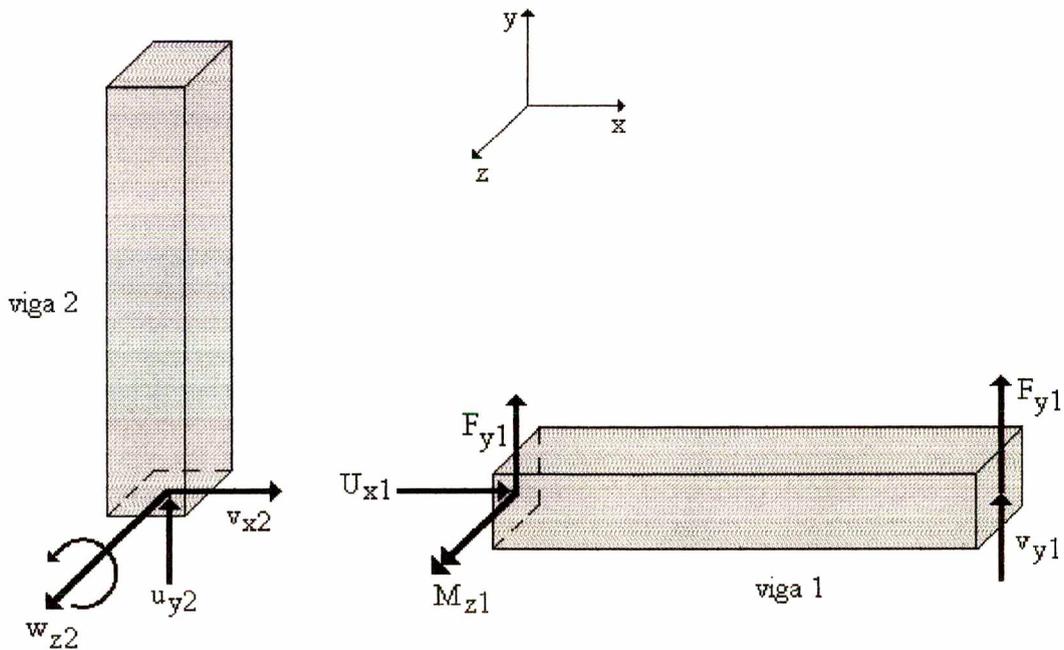


Figura 3.2: Representação dos esforços e deslocamentos de uma viga L, usados no cálculo do fluxo de potência.

Para calcular as potências de entrada e transmitidas, para cada tipo de acoplamento, necessita-se determinar as 6 constantes das soluções das equações das ondas de flexão (Eq. 2.3.7) e longitudinais (Eq. 2.1.6), para cada viga. Quando apenas as ondas de flexão forem consideradas nas duas vigas, ambas devem ser consideradas pinadas no ponto de união. Quando o ponto de união não tiver nenhum tipo de apoio, ondas longitudinais também serão

consideradas nas análises de fluxo de energia entre vigas assim unidas. As condições de contorno usadas são:

$$u_{x1}(0) = v_{x2}(0) \quad (3.1.1)$$

$$v_{y1}(0) = u_{y2}(0) \quad (3.1.2)$$

$$w_{z1}(0) = w_{z2}(0) \quad (3.1.3)$$

$$F_{y1}(0) = U_{y2}(0) \quad (3.1.4)$$

$$U_{x1}(0) = F_{x2}(0) \quad (3.1.5)$$

$$M_{z1}(0) = M_{z2}(0) \quad (3.1.6)$$

$$U_{x1}(L1) = 0 \quad (3.1.7)$$

$$M_{z1}(L1) = 0 \quad (3.1.8)$$

$$F_{y1}(L1) = -F_a e^{j\omega t} \quad (3.1.9)$$

$$U_{y2}(L2) = 0 \quad (3.1.10)$$

$$M_{z2}(L2) = 0 \quad (3.1.11)$$

$$F_{x2}(L2) = 0 \quad (3.1.12)$$

Uma vez determinadas as constantes, podem-se determinar as potências de entrada e as transferidas pelos diversos tipos de acoplamento, conforme as expressões indicadas abaixo

Potência Transferida através do acoplamento tipo “flexão viga 1 - longitudinal viga 2”

$$W_{12FL} = \frac{1}{2} \text{Re}(\bar{F}_{y1}(0) \bar{u}_{y2}(0)^*) \quad (3.1.13)$$

Potência Transferida através do acoplamento tipo “longitudinal viga 1 - flexão viga 2”

$$W_{12LF} = \frac{1}{2} \text{Re}(\bar{U}_{x1}(0) \bar{v}_{x2}(0)^*) \quad (3.1.14)$$

Potência Transferida através do acoplamento tipo “flexão viga 1- flexão viga 2”

$$W_{12FF} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\bar{M}_{z1}(0) \bar{w}_{z2}(0)^*) \quad (3.1.15)$$

Potência de Entrada

$$W_{in} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\bar{F}_{y1}(L1) \bar{v}_{y1}(L1)^*) \quad (3.1.16)$$

A Figura 3.3 apresenta os resultados de razão de potência para duas vigas de seção quadrada, tendo ambas o mesmo comprimento ( 1 metro). Observa-se claramente que o efeito das ondas longitudinais só se faz presente a partir das médias frequências (acima dos 500 Hz). Nesta região, a transferência de energia através do acoplamento flexão-longitudinal é mais eficiente que pelo acoplamento flexão-flexão.

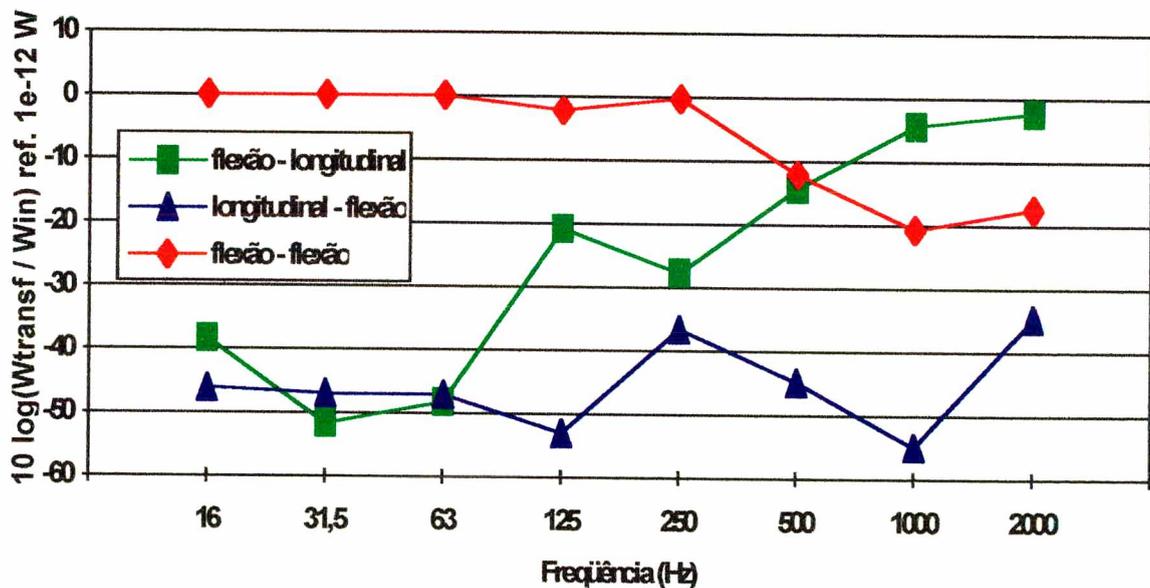


Figura 3.3: Razão de potência entre duas vigas em L, seção quadrada, com as seguintes características:

$E = 2,1 \times 10^{11} \text{ Pa}$ ;  $\rho = 8000 \text{ kg / m}^3$ ;  $\eta = 0,01$ ;  $b1 = h1 = 0,25 \text{ m}$ ;  $b2 = h2 = 0,05 \text{ m}$ ;  $L1 = L2 = 1 \text{ m}$ .

A Figura 3.4 mostra a razão de potência para duas vigas de seção I unidas em L, tendo comprimentos de 4,0 e 5,0 metros. A simbologia usada para representar a geometria da seção transversal destas vigas está indicada na Figura 2.1

Observa-se, mais uma vez, que as ondas longitudinais representam um importante mecanismo de transmissão de energia nas altas frequências. Como o comprimento das vigas é maior, em relação àquelas do caso anterior, esta influência já é notada a partir de 250 Hz.

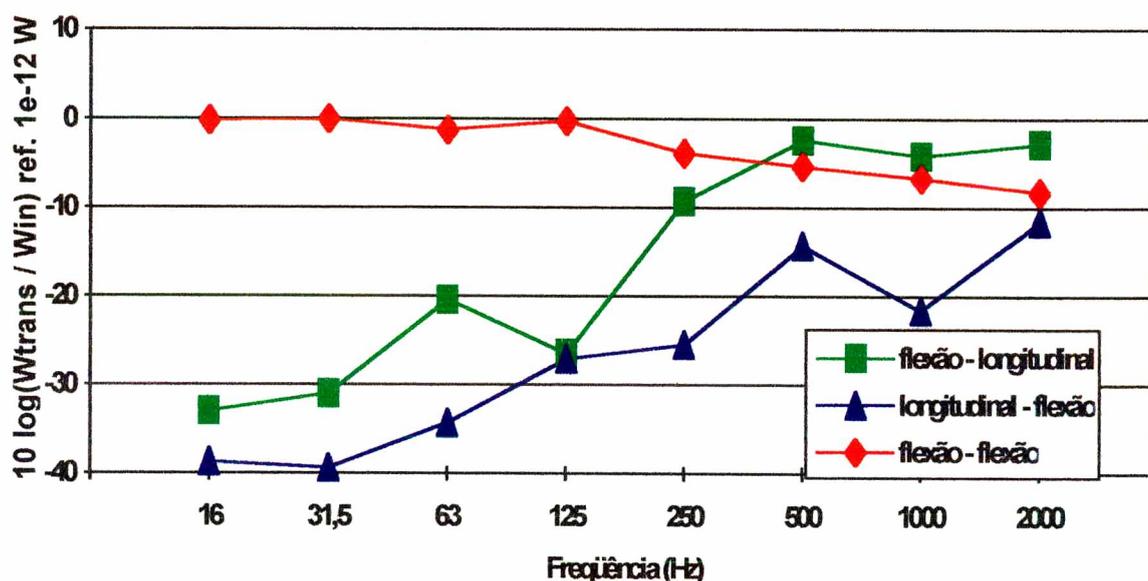


Figura 3.4: Razão de potência entre duas vigas em L de seção I, com as seguintes características:  
 $E = 2,1 \times 10^{11}$  Pa;  $\rho = 8000$  kg / m<sup>3</sup>;  $\eta = 0,01$ ;  $d1 = 0,5$  m  $t_{a1} = 0,02$  m  $b1 = 0,2$  m  $h1 = 0,02$  m;  
 $d2 = 0,2$  m  $t_{a2} = 0,015$  m  $b2 = 0,12$  m  $h2 = 0,015$  m;  $L1 = 4$  m;  $L2 = 5$  m.

### 3.2 - VIGAS EULER-BERNOULLI UNIDAS EM L, EXCITADAS POR FORÇAS TRANSVERSAIS

Este item considera duas vigas Euler-Bernoulli unidas em L, excitadas por uma força harmônica, de frequência  $\omega$  e de amplitude unitária, aplicada na extremidade livre da viga 1, e cuja direção é perpendicular ao plano formado pela disposição das vigas. A Figura 3.5 apresenta os sentidos dos esforços e dos deslocamentos adotados, para uma viga L. A Figura

3.6 mostra as vigas, a força externa aplicada, os esforços e os deslocamentos necessários para o cálculo do fluxo de potência.

Sendo desprezados os efeitos de cisalhamento, a transferência de energia poderá ocorrer através das ondas de flexão em ambas as vigas e através de ondas de torção em uma viga que se acoplam às de flexão em outra viga.

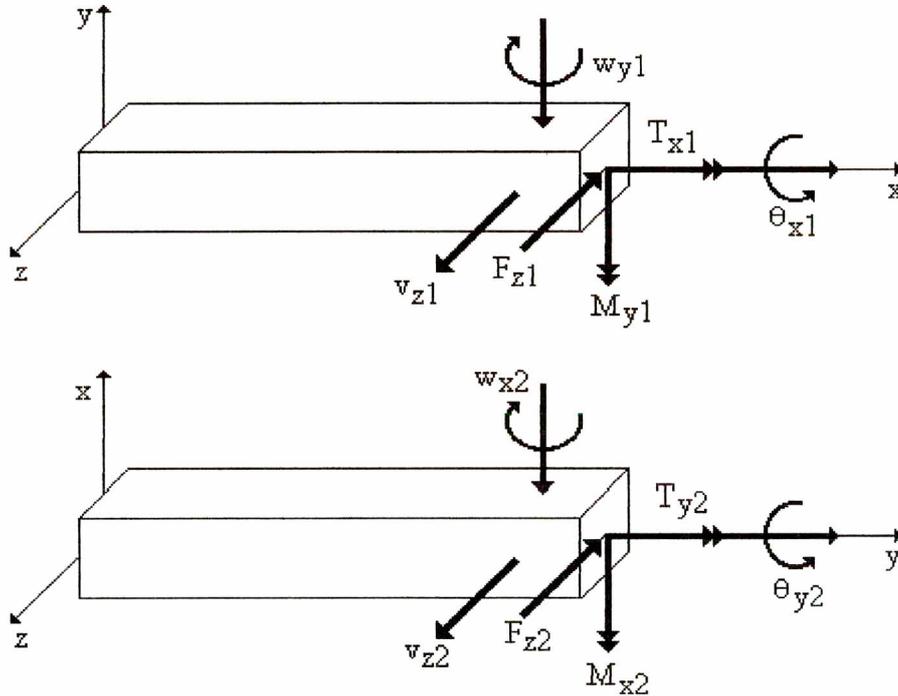


Figura 3.5: Esforços e deslocamentos atuantes em duas vigas Euler em L, excitadas por força transversal.

A representação dos símbolos dos esforços e deslocamentos indicados na Figura 3.5 está descrita abaixo.

- $v_{z1}$  - deslocamento transversal de flexão na viga 1
- $v_{z2}$  - deslocamento transversal de flexão na viga 2
- $w_{y1}$  - deslocamento angular de flexão na viga 1
- $w_{x2}$  - deslocamento angular de flexão na viga 2
- $\theta_{x1}$  - deslocamento angular de torção na viga 1
- $\theta_{y2}$  - deslocamento angular de torção na viga 2
- $M_{y1}$  - momento fletor na viga 1

$M_{x2}$  - momento fletor na viga 2

$T_{x1}$  - momento torçor na viga 1

$T_{y2}$  - momento torçor na viga 2

$F_{z1}$  - força cortante na viga 1

$F_{z2}$  - força cortante na viga 2

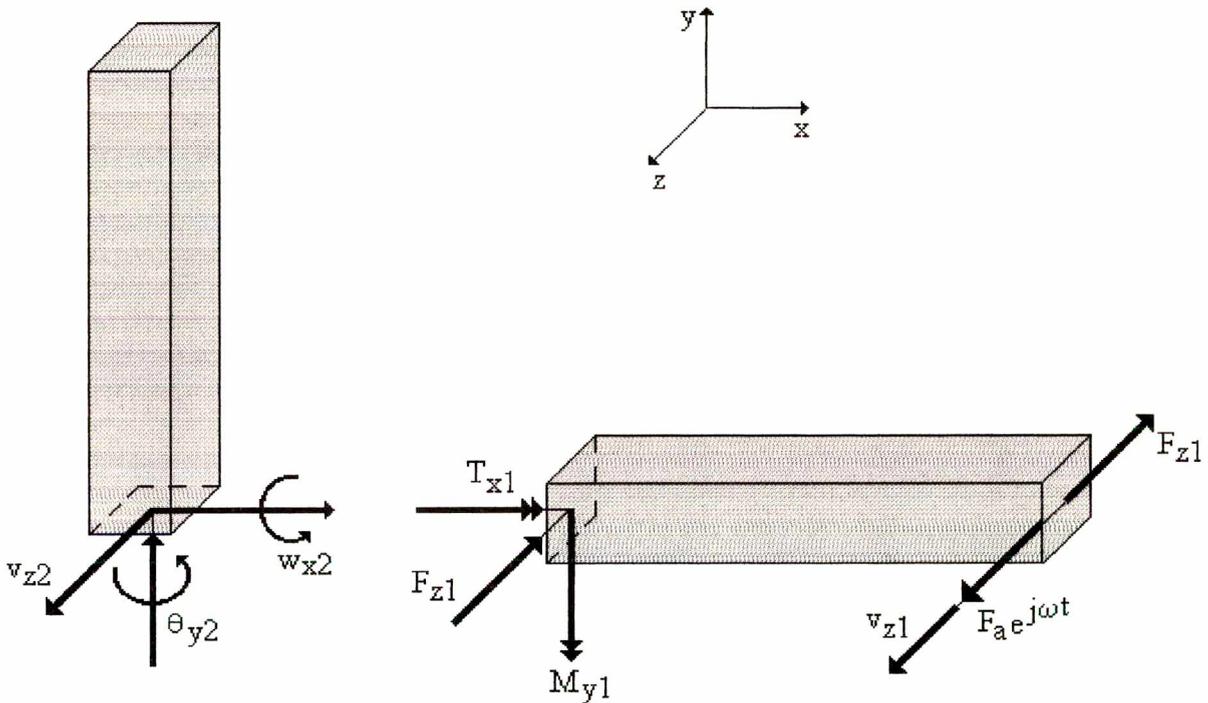


Figura 3.6: Representação dos esforços e deslocamentos de duas vigas Euler unidas em L, usados no cálculo do fluxo de potência.

Para calcular as potências de entrada e transmitidas, para cada tipo de acoplamento, necessita-se determinar as 6 constantes das soluções das equações das ondas de flexão (Eq. 2.3.7) e torção (Eq. 2.2.10), para cada viga. Para que o acoplamento flexão-flexão exista, na união, as vigas são consideradas apoiadas nas direções x e y e livre na direção z. As condições de contorno usadas são:

$$v_{z1}(0) = v_{z2}(0) \quad (3.2.1)$$

$$w_{y1}(0) = \theta_{y2}(0) \quad (3.2.2)$$

$$\theta_{x1}(0) = w_{x2}(0) \quad (3.2.3)$$

$$T_{x1}(0) = M_{x2}(0) \quad (3.2.4)$$

$$M_{y1}(0) = T_{y2}(0) \quad (3.2.5)$$

$$F_{z1}(0) = -F_{z2}(0) \quad (3.2.6)$$

$$T_{x1}(L1) = 0 \quad (3.2.7)$$

$$M_{y1}(L1) = 0 \quad (3.2.8)$$

$$F_{z1}(L1) = -F_a e^{j\omega t} \quad (3.2.9)$$

$$T_{y2}(L2) = 0 \quad (3.2.10)$$

$$M_{x2}(L2) = 0 \quad (3.2.11)$$

$$F_{z2}(L2) = 0 \quad (3.2.12)$$

Uma vez determinadas as constantes, pode-se determinar as potências de entrada e as transferidas pelos diversos tipos de acoplamento, conforme as expressões indicadas abaixo:

Potência Transferida através do acoplamento tipo “flexão viga 1 - torção viga 2”

$$W_{12FT} = \frac{1}{2} \text{Re}(\bar{M}_{y1}(0) \bar{\theta}_{y2}(0)^*) \quad (3.2.13)$$

Potência Transferida através do acoplamento tipo “torção viga 1 - flexão viga 2”

$$W_{12TF} = \frac{1}{2} \text{Re}(\bar{T}_{x1}(0) \bar{w}_{x2}(0)^*) \quad (3.2.14)$$

Potência Transferida através do acoplamento tipo “flexão viga 1- flexão viga 2”

$$W_{12FF} = \frac{1}{2} \text{Re}(\bar{M}_{y1}(0) \bar{w}_{x2}(0)^*) + \frac{1}{2} \text{Re}(\bar{F}_{z1}(0) \bar{v}_{z2}(0)^*) \quad (3.2.15)$$

Potência de Entrada

$$W_{in} = \frac{1}{2} \text{Re}(\bar{F}_{z1}(L1) \bar{v}_{z1}(L1)^*) \quad (3.2.16)$$

As figuras 3.7 e 3.8 apresentam resultados de razão de potência para duas vigas de seção quadrada, unidas em L, tendo relações diferentes de comprimentos.

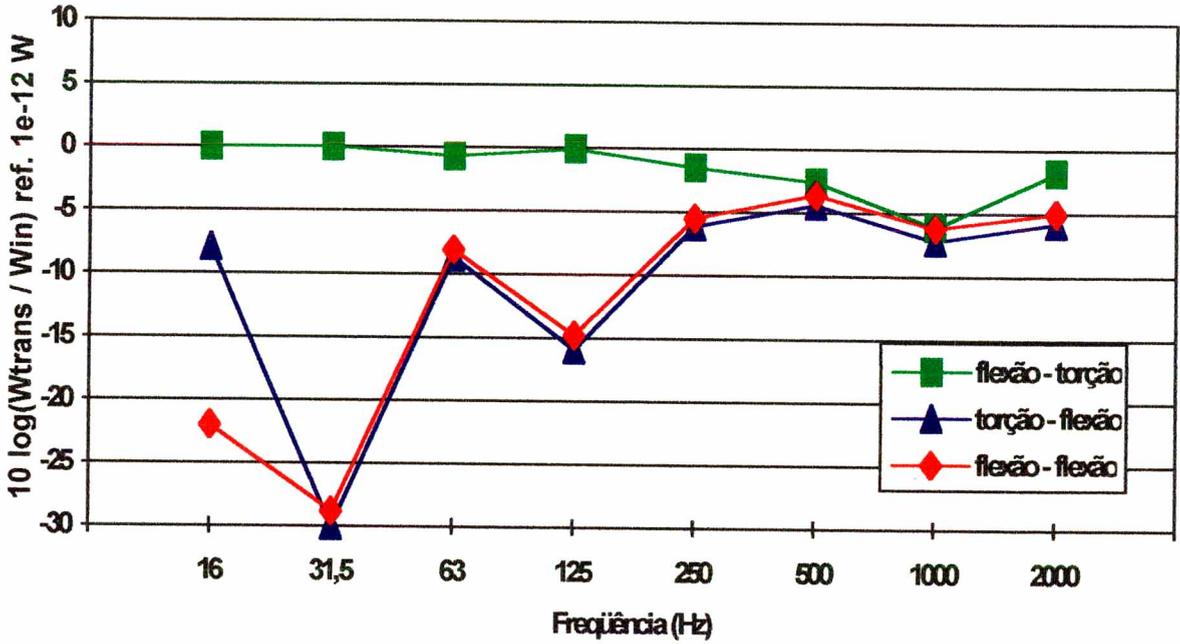


Figura 3.7: Razão de potência entre duas vigas em L, seção quadrada, com as seguintes características:

$E = 2,1 \times 10^{11}$  Pa;  $\rho = 8000$  kg / m<sup>3</sup>;  $\nu = 0,29$ ;  $\eta = 0,01$ ;  
 $b1 = h1 = 0,25$  m;  $L1 = 1,0$  m;  $b2 = h2 = 0,25$  m;  $L2 = 4,0$  m.

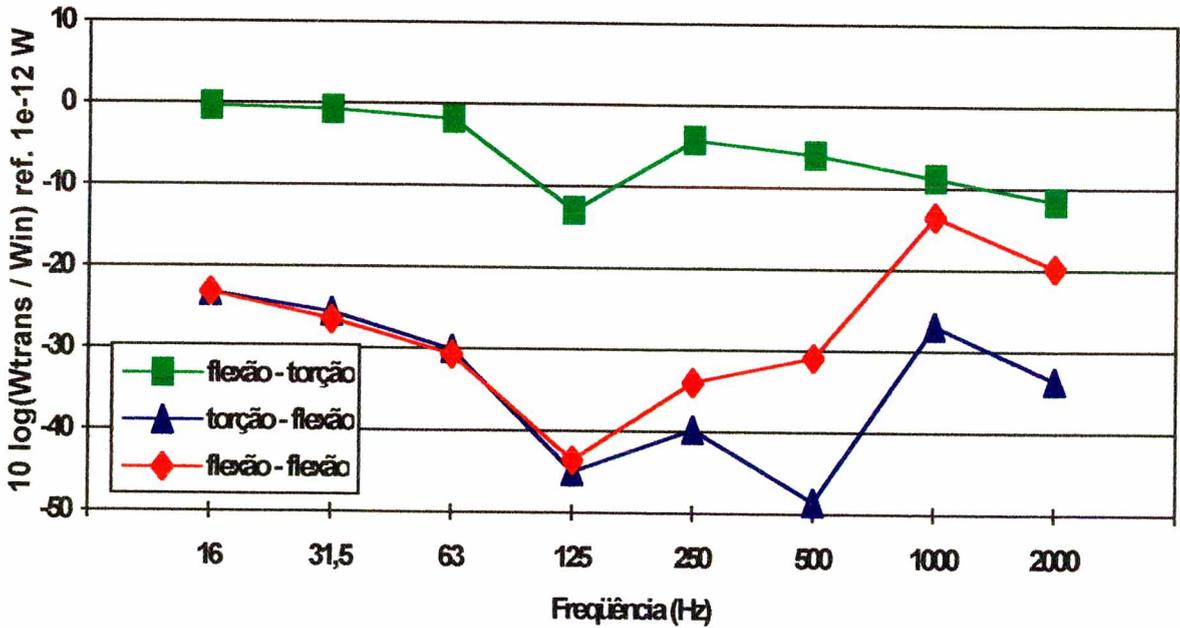


Figura 3.8: Razão de potência entre duas vigas em L, seção quadrada, com as seguintes características:

$E = 2,1 \times 10^{11}$  Pa;  $\rho = 8000$  kg / m<sup>3</sup>;  $\nu = 0,29$ ;  $\eta = 0,01$ ;  
 $b1 = h1 = 0,05$  m;  $L1 = 3,0$  m;  $b2 = h2 = 0,25$  m;  $L2 = 1,0$  m.

Observa-se que, para os dois casos analisados, o acoplamento do tipo flexão-torção é o que transfere a maior parcela da energia, ao longo de quase todo o espectro de frequências, o que vem confirmar a importância das ondas torcionais neste tipo de disposição de vigas. As análises atuais de controle de ruído em estruturas de plataformas consideram principalmente as vibrações que se propagam por ondas de flexão. Estes resultados mostram que também as ondas de torção devem ser consideradas.

As Figuras 3.9, 3.10 e 3.11 mostram a razão de potências da Figura 3.8, para cada acoplamento em separado, com os respectivos desvios padrão (sigma), para cada banda de frequência de 1/1 oitava. O valor do desvio padrão foi obtido considerando-se o desvio padrão médio dentro de cada banda de frequência de 1/1 oitava, obtendo-se o seu valor em dB.

As Figuras 3.9 a 3.11 nos dão uma idéia da variação esperada nos valores de razão de potências, para cada tipo de acoplamento. Apenas nas altas frequências o acoplamento flexão-flexão pode ser um pouco mais eficiente que o flexão-torção, na situação menos favorável ao acoplamento flexão-torção, que seria: flexão-torção - sigma e flexão-flexão + sigma. Mesmo assim pode-se considerar que o acoplamento flexão-torção é o mais eficiente na transmissão de energia.

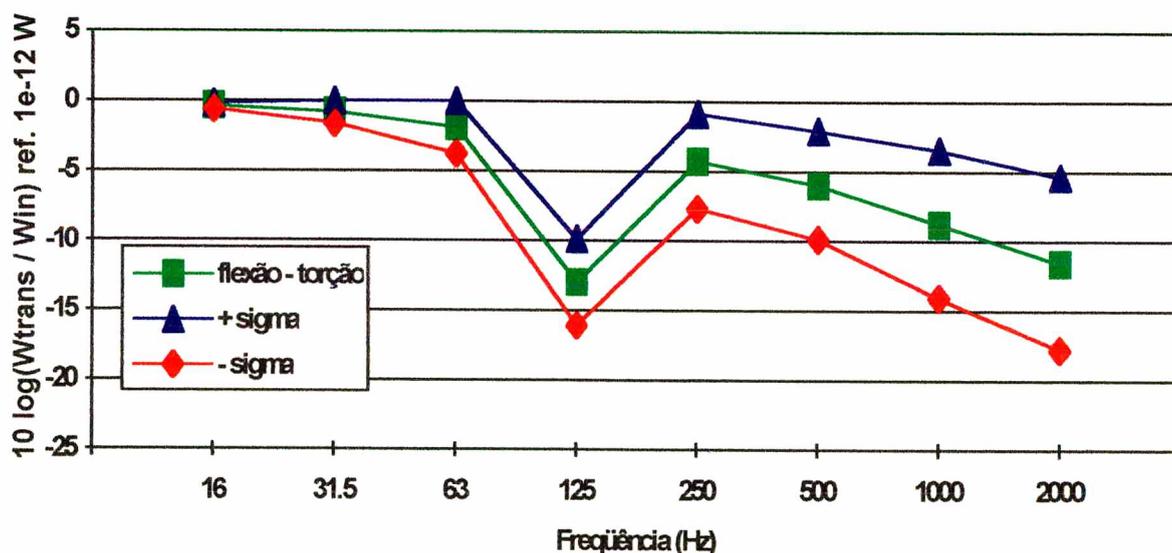


Figura 3.9: Razão de potência e desvio padrão para o acoplamento flexão-torção da Figura 3.8.

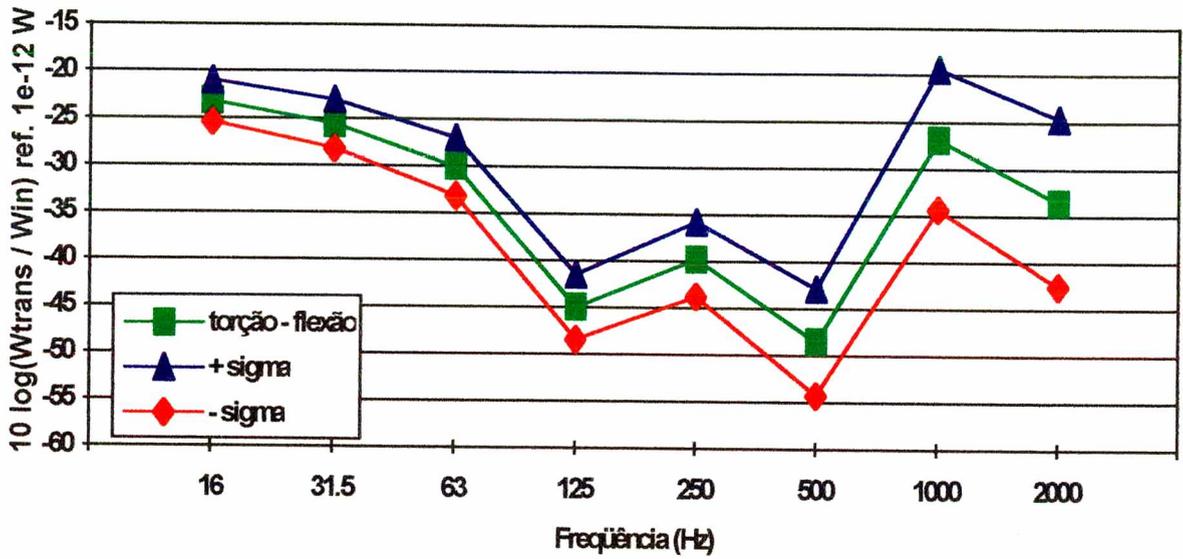


Figura 3.10: Razão de potência e desvio padrão para o acoplamento torção-flexão da Figura 3.8.

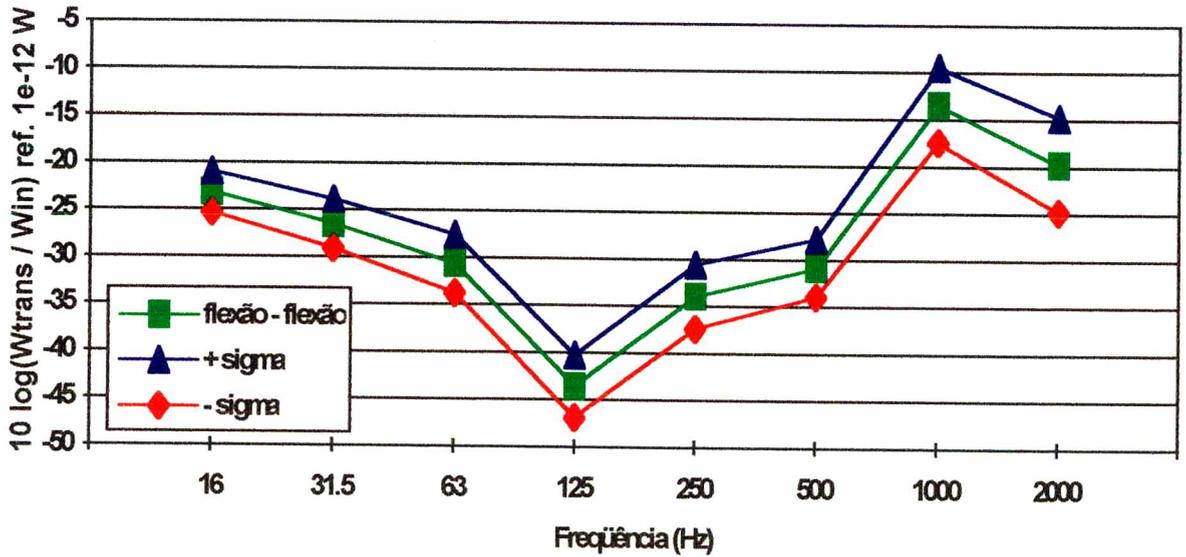


Figura 3.11: Razão de potência e desvio padrão para o acoplamento flexão-flexão da Figura 3.8.

A Figura 3.12 mostra os resultados de razão de potências para duas vigas de seção I unidas em L

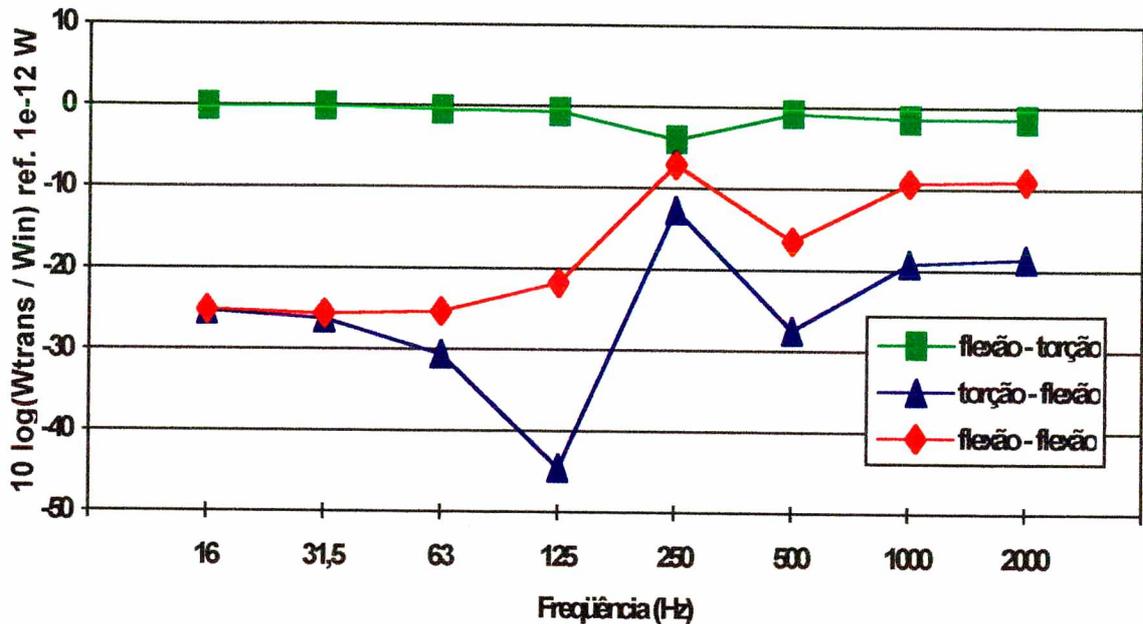


Figura 3.12: Razão de potência entre duas vigas em L, de seção I, com as seguintes características:

$$E = 2,1 \times 10^{11} \text{ Pa}; \rho = 8000 \text{ kg / m}^3; \nu = 0,29; \eta = 0,01;$$

$$d1 = 0,2 \text{ m}; t_{a1} = 0,015 \text{ m}; b1 = 0,12 \text{ m}; h1 = 0,015 \text{ m}; L1 = 4,0 \text{ m}$$

$$d2 = 0,5 \text{ m}; t_{a2} = 0,02 \text{ m}; b2 = 0,2 \text{ m}; h2 = 0,02 \text{ m}; L2 = 5,0 \text{ m}.$$

Também para vigas de seção I o acoplamento flexão-torção é preponderante, pois transfere uma parcela de energia significativamente maior que o acoplamento flexão-flexão, como pode ser visto através da Figura 3.12.

Como forma de verificação dos resultados obtidos por esta metodologia de análise, os resultados apresentados na Figura 3.7 serão comparados aos obtidos pelo método de Elementos Finitos.

Para o cálculo das potências é necessário o conhecimento dos deslocamentos e dos esforços na união. Os deslocamentos, utilizando o ANSYS, são determinados de forma análoga à determinação da mobilidade, apresentada no item 2.6.3.1. No cálculo dos momentos e das forças é necessária uma solução por elemento e o esforço em questão é calculado para o nó do elemento correspondente à união.

A Figura 3.13 mostra a comparação para o acoplamento flexão-torção, a Figura 3.14 refere-se ao acoplamento torção-flexão e a Figura 3.15, ao acoplamento flexão-flexão. Nota-se que o comparação da razão de potências obtida pelos dois métodos é bastante boa, para todos os tipos de acoplamento.

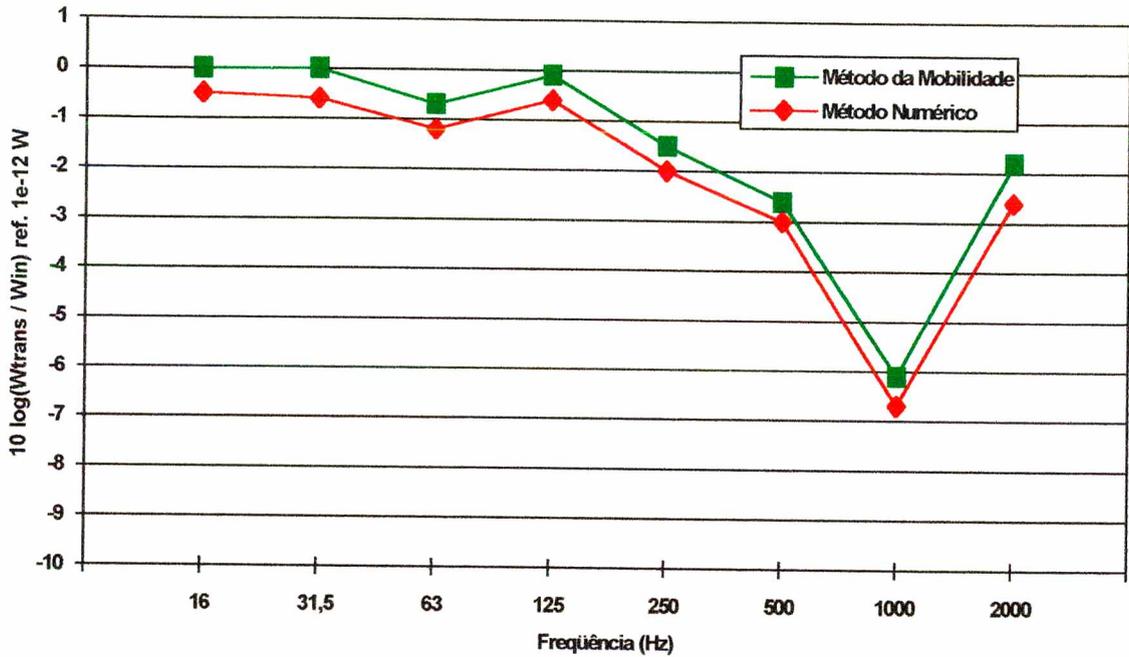


Figura 3.13: Comparação de razão de potências pelos métodos analítico e numérico, acoplamento flexão-torção, para as seguintes vigas:

$E = 2,1 \times 10^{11}$  Pa;  $\rho = 8000$  kg / m<sup>3</sup>;  $\nu = 0,29$ ;  $\eta = 0,01$ ;  
 $b1 = h1 = 0,25$  m;  $L1 = 1,0$  m;  $b2 = h2 = 0,25$  m;  $L2 = 4,0$  m.

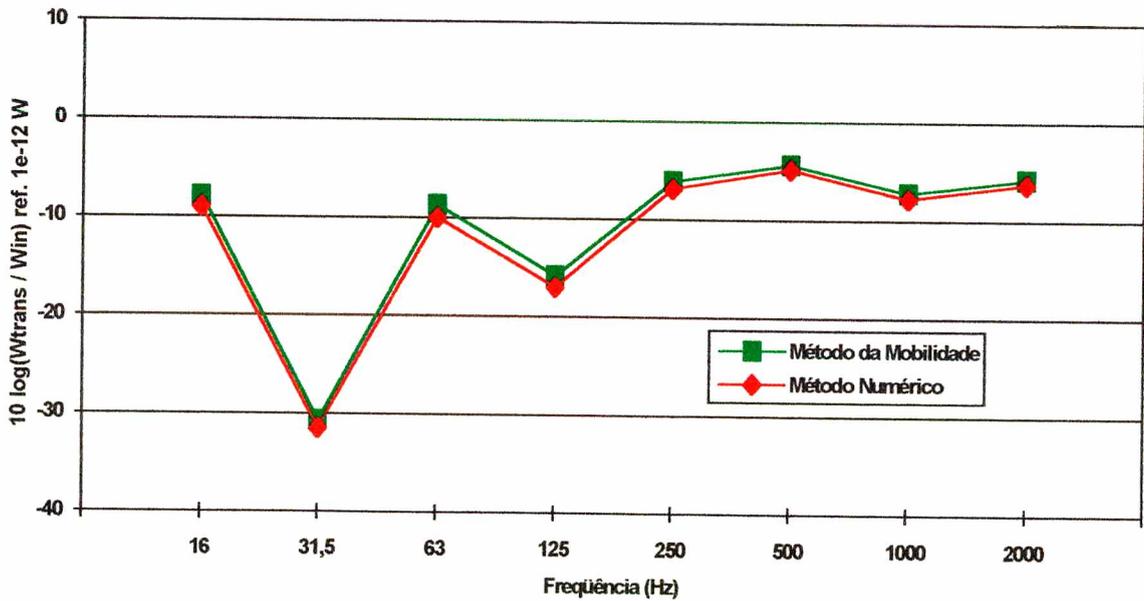


Figura 3.14: Comparação de razão de potências pelos métodos analítico e numérico, acoplamento torção-flexão, para as seguintes vigas:

$E = 2,1 \times 10^{11}$  Pa;  $\rho = 8000$  kg / m<sup>3</sup>;  $\nu = 0,29$ ;  $\eta = 0,01$ ;  
 $b1 = h1 = 0,25$  m;  $L1 = 1,0$  m;  $b2 = h2 = 0,25$  m;  $L2 = 4,0$  m.

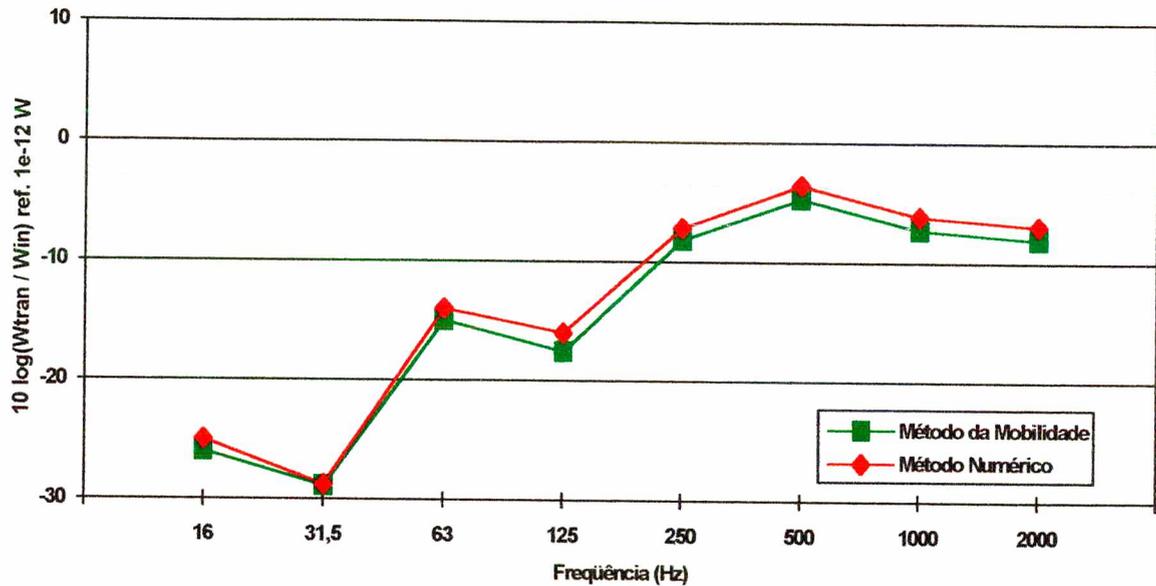


Figura 3.15: Comparação de razão de potências pelos métodos analítico e numérico, acoplamento flexão-flexão, para as seguintes vigas:

$E = 2,1 \times 10^{11}$  Pa;  $\rho = 8000$  kg / m<sup>3</sup>;  $\nu = 0,29$ ;  $\eta = 0,01$ ;  
 $b1 = h1 = 0,25$  m;  $L1 = 1,0$  m;  $b2 = h2 = 0,25$  m;  $L2 = 4,0$  m.

### 3.3 - VIGAS TIMOSHENKO UNIDAS EM L, EXCITADAS POR FORÇAS TRANSVERSAIS

A análise de vigas Timoshenko excitadas por forças transversais é análoga à das vigas Euler-Bernoulli, mudando apenas a forma da equação da onda de flexão, que agora considera os efeitos cisalhantes e de inércia rotatória. As condições de contorno permanecem as mesmas, enquanto que variam as expressões de cálculo do momento fletor e da força cortante. As equações para deslocamentos transversal e angular, momento fletor e força cortante são as apresentadas no item 2.4. Já as referentes à torção são as apresentadas no item 2.2

A Figura 3.16 apresenta os sentidos dos esforços e dos deslocamentos adotados para uma viga L. A Figura 3.17 mostra as vigas, a força externa aplicada, os esforços e os deslocamentos adotados para o cálculo do fluxo de potência.

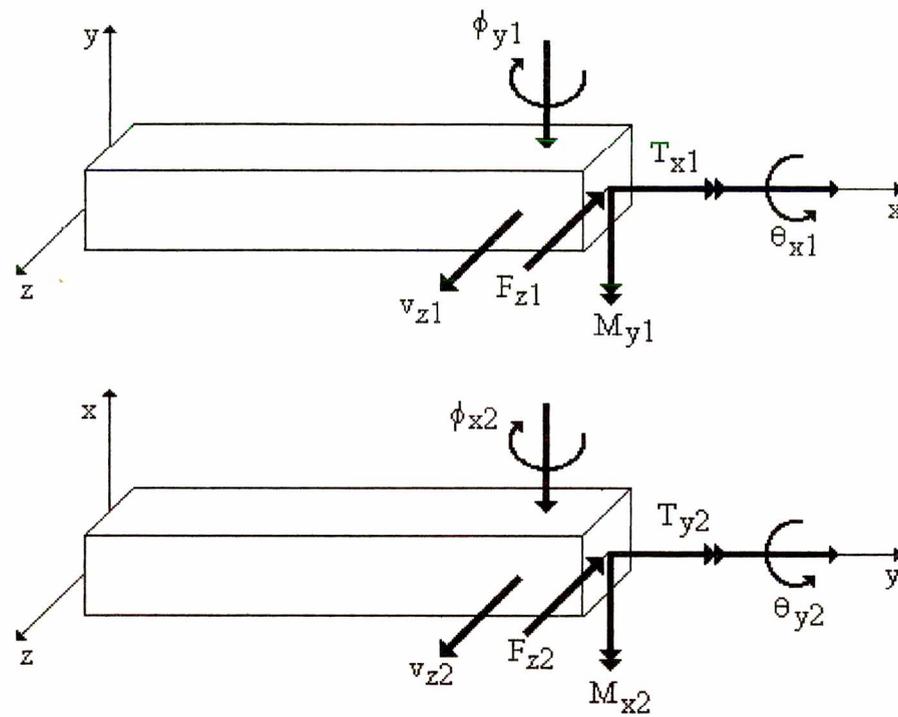


Figura 3.16: Esforços e deslocamentos atuantes em duas vigas Timoshenko em L, excitadas por força transversal.

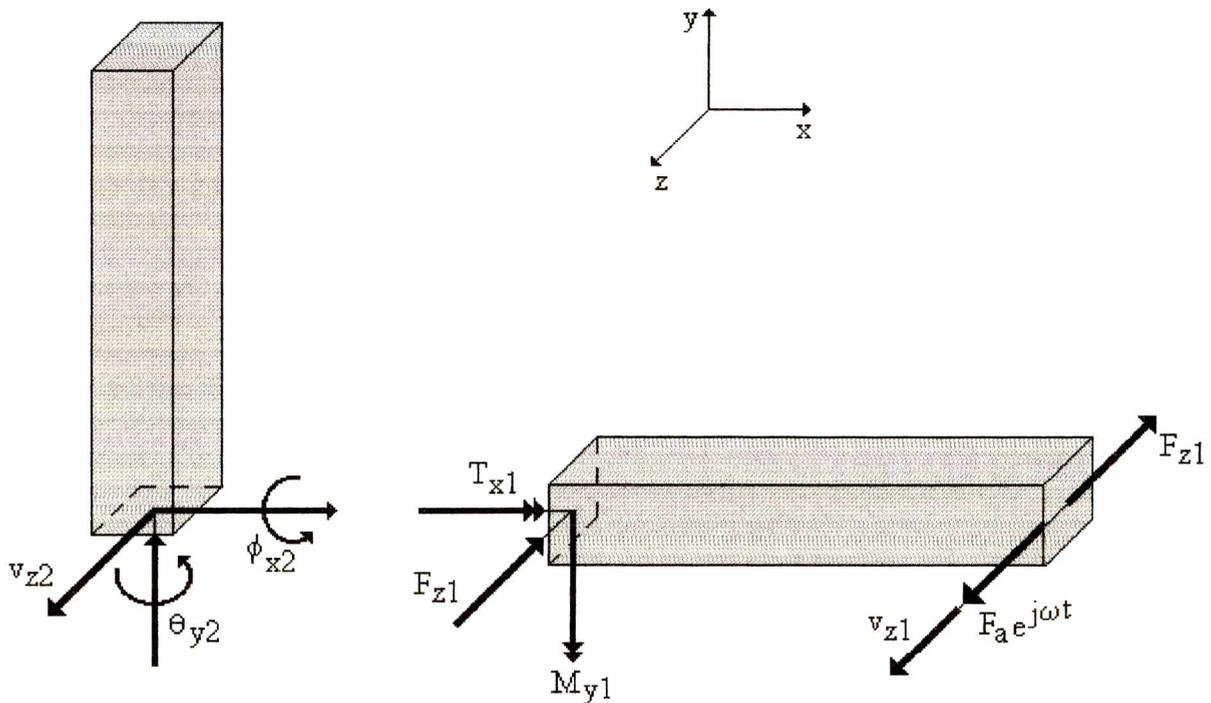


Figura 3.17: Representação dos esforços e deslocamentos de duas vigas Timoshenko unidas em L, usados no cálculo do fluxo de potência.

As doze condições de contorno necessárias para as constantes das equações de onda referentes as duas vigas são as mesmas já apresentadas no item 3.2 (Equações (3.2.1) até (3.2.12)). Na resolução do sistema, os parâmetros geométricos e de material das vigas são também os mesmos da análise de vigas Euler, mudando-se apenas a velocidade de propagação e o número de onda de flexão, que agora incluem o cisalhamento e a inércia rotatória. Os números de onda são representados pelas letras  $\lambda_a$  e  $\lambda_b$ .

Uma vez determinadas as constantes, podem-se determinar as potências de entrada e as transferidas pelos diversos tipos de acoplamento, conforme as expressões indicadas abaixo:

Potência Transferida através do acoplamento tipo “flexão viga 1 - torção viga 2”

$$W_{12FT} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \bar{M}_{y1}(0) \bar{\theta}_{y2}(0)^* \right) \quad (3.3.1)$$

Potência Transferida através do acoplamento tipo “torção viga 1 - flexão viga 2”

$$W_{12TF} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \bar{T}_{x1}(0) \bar{\phi}_{x2}(0)^* \right) \quad (3.3.2)$$

Potência Transferida através do acoplamento tipo “flexão viga 1 - flexão viga 1”

$$W_{12FF} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \bar{M}_{y1}(0) \bar{\phi}_{x2}(0) \right) + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \bar{F}_{z1}(0) \bar{v}_{z2}(0)^* \right) \quad (3.3.3)$$

Potência de Entrada

$$W_{in} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \bar{F}_{z1}(L1) \bar{v}_{z1}(L1)^* \right) \quad (3.3.4)$$

Para determinar a importância do efeito do cisalhamento sobre o fluxo de potência, calculou-se a razão de potências para dois tipos de vigas, uma de seção retangular e outra de seção I, sendo comparados os resultados com os obtidos para vigas Euler-Bernoulli. As vigas têm as características:

$$E = 2,1 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

$$\rho = 8000 \text{ kg / m}^3$$

$$\nu = 0,29$$

$$\eta = 0,01$$

$$b1 = h1 = 0,25 \text{ m; } L1 = 1,0 \text{ m}$$

$$b2 = h2 = 0,25 \text{ m; } L2 = 1,0 \text{ m}$$

A Figura 3.18 apresenta a comparação para o acoplamento flexão-torção; a Figura 3.19, para o acoplamento torção-flexão e a Figura 3.20, para o acoplamento flexão-flexão. Vê-se que o efeito do cisalhamento se faz presente a partir dos 500 Hz, sendo mais pronunciado nas altas frequências. Como o número de modos, para uma mesma viga e faixa de frequência, aumenta ao se considerar o cisalhamento, e sabendo-se que a energia é mais facilmente transmitida nas ressonâncias, é, portanto, esperado que as potências transferidas sejam maiores ao considerar-se o cisalhamento. Isto acontece para os três tipos de acoplamento, como pode ser visto através das figuras. Para todos tipos de acoplamento, a razão de potências calculada para vigas Timoshenko é maior que a calculada para vigas Euler-Bernoulli.

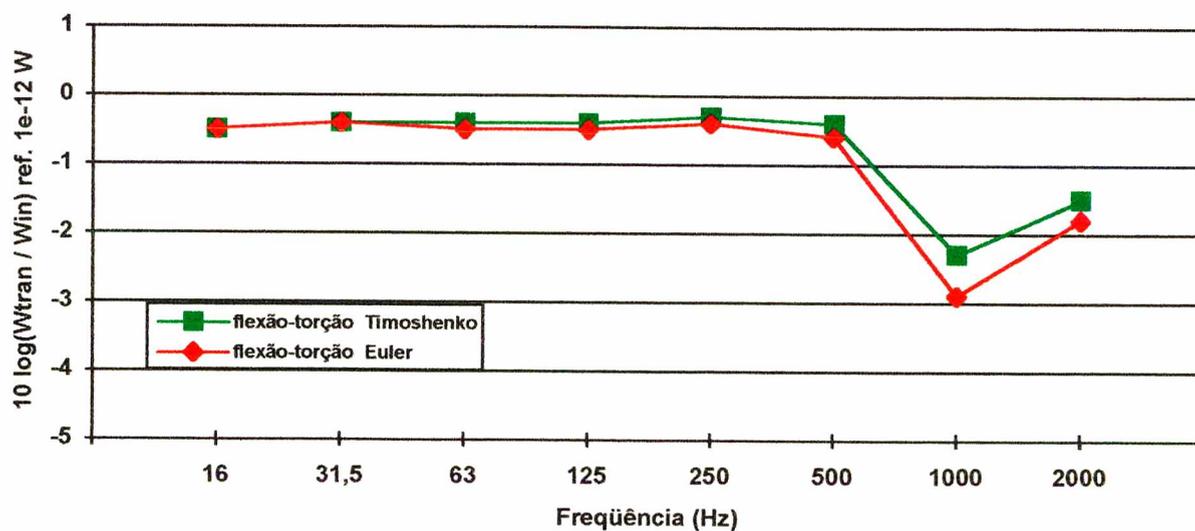


Figura 3.18: Comparação entre as razões de potência, vigas de seção retangular, flexão-torção.

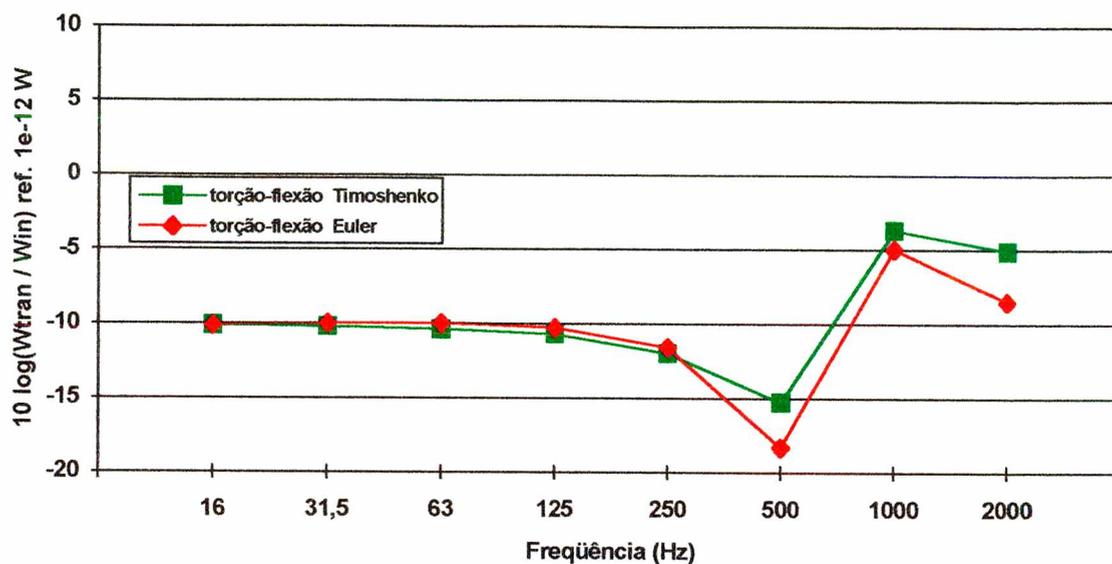


Figura 3.19: Comparação entre as razões de potência, vigas de seção retangular, torção-flexão.

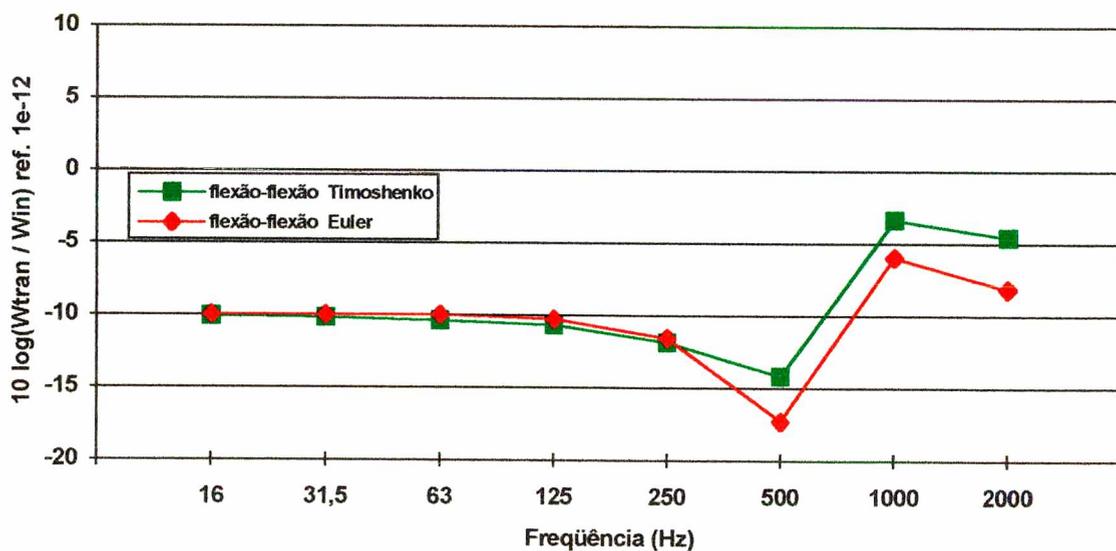


Figura 3.20: Comparação entre as razões de potência, vigas de seção retangular, flexão-flexão.

A mesma análise foi repetida para duas vigas de seção I, de características:

$$E = 2,1 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

$$\rho = 8000 \text{ kg / m}^3$$

$$\nu = 0,29$$

$$\eta = 0,01$$

$$d1 = 0,2 \text{ m}; t_{a1} = 0,015 \text{ m}; b1 = 0,12 \text{ m}; h1 = 0,015 \text{ m}; L1 = 4,0 \text{ m}$$

$$d2 = 0,5 \text{ m}; t_{a2} = 0,02 \text{ m}; b2 = 0,2 \text{ m}; h2 = 0,02 \text{ m}; L2 = 5,0 \text{ m}$$

As Figuras 3.21, 3.22 e 3.23 apresentam os resultados comparativos de razão de potências obtidos pelos dois tipos de equações de ondas de flexão, para os acoplamentos flexão-torção, torção-flexão e flexão-flexão, respectivamente.

Pela Figura 3.21 vê-se que a influência do cisalhamento não é muito significativa no acoplamento flexão-torção. Isto se deve, provavelmente, à grande influência do deslocamento no cálculo da potência. Foi observado que o deslocamento angular causado pela torção calculado pelas duas teorias consideradas, varia muito pouco. Por este motivo a potência transferida é pouco alterada.

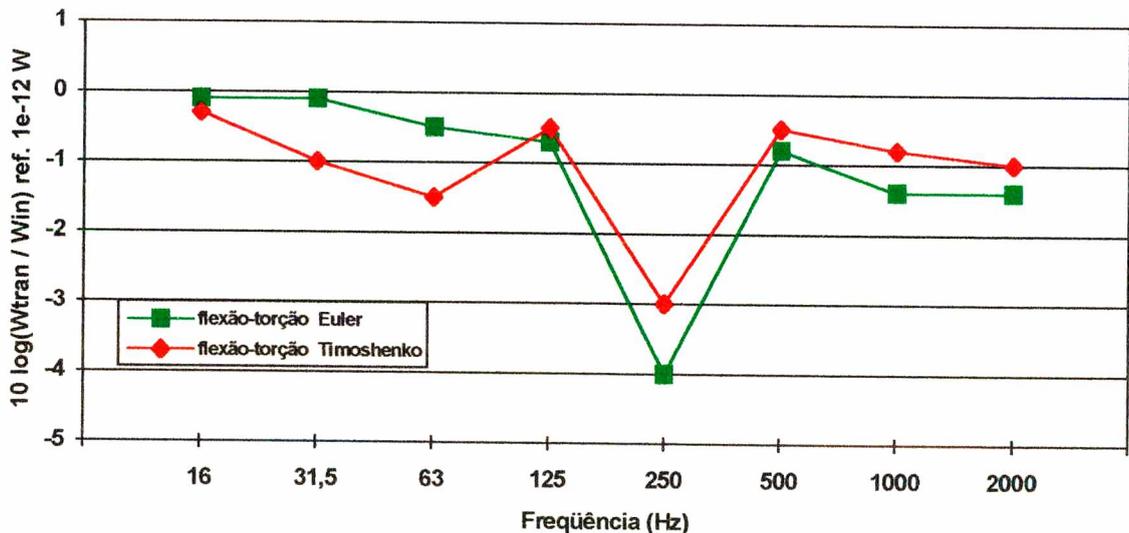


Figura 3.21: Comparação entre as razões de potência, vigas de seção I, flexão-torção.

Nas figuras 3.22 e 3.23, vê-se que o cisalhamento tem efeitos mais significativos no fluxo de potência, pois para estes dois acoplamentos a potência é calculada em função do deslocamento angular causado pela flexão, que varia mais significativamente com a introdução do cisalhamento. Nota-se também que para o acoplamento flexão-flexão, a razão de potência calculada pela teoria de Timoshenko tende a ser maior para todo o espectro.

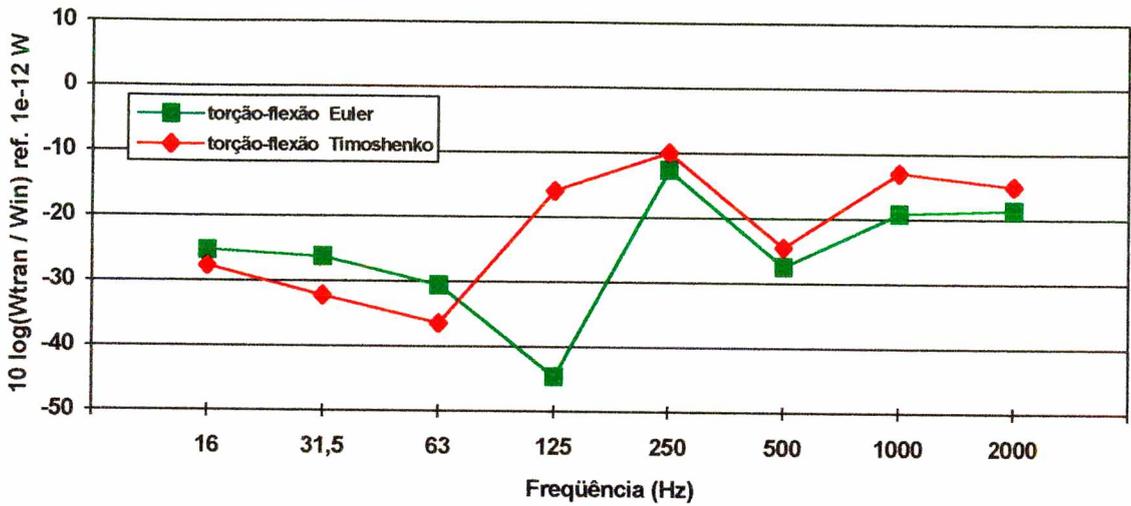


Figura 3.22: Comparação entre as razões de potência, vigas de seção I, torção-flexão.

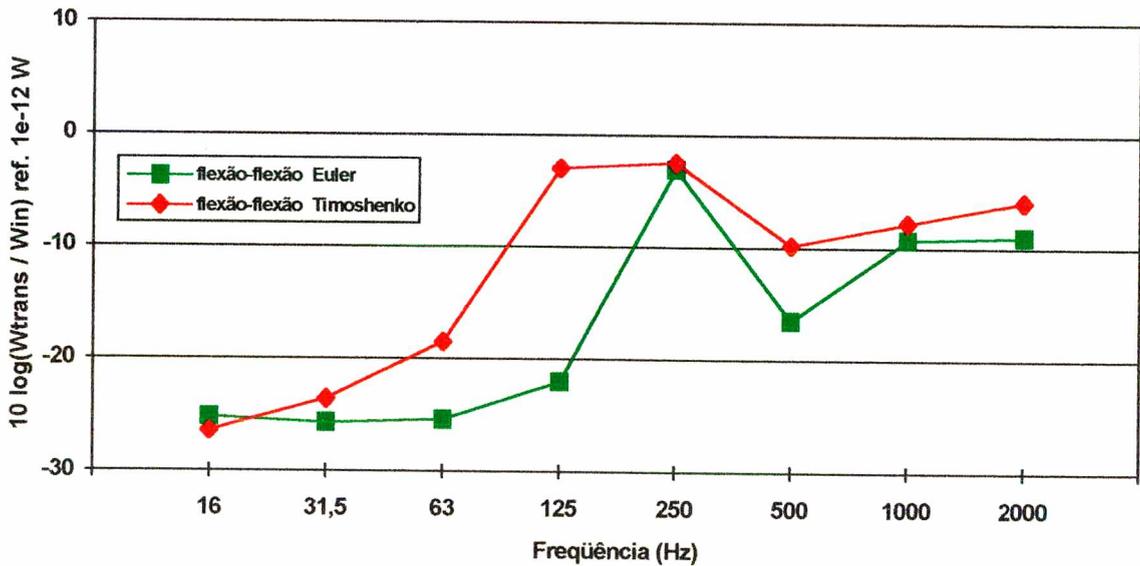


Figura 3.23: Comparação entre as razões de potência, vigas de seção I, flexão-flexão.

A diferença de valores da banda de 125 Hz, para os acoplamentos torção-flexão e flexão-flexão, pode ser explicada pelo aumento do número de ressonâncias por flexão, dentro desta faixa de frequências, devido à consideração do cisalhamento, já que as vigas são de perfil I e têm grande seção transversal.

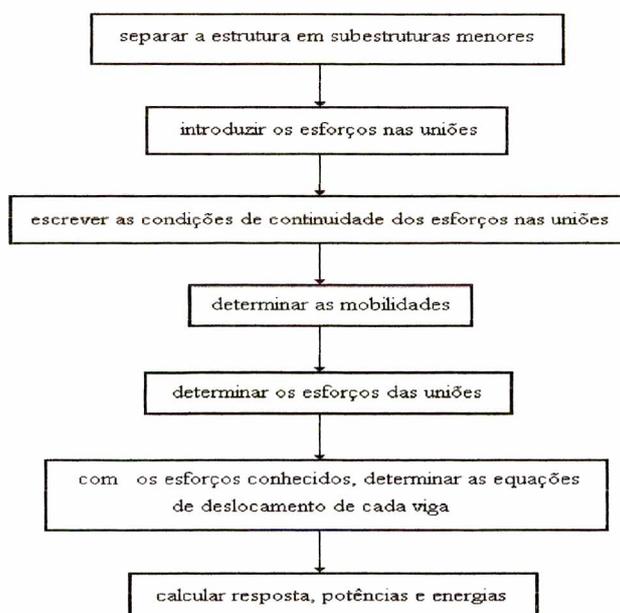
## CAPÍTULO 4

### APLICAÇÃO DO MÉTODO DA MOBILIDADE PARA ANÁLISE DA RESPOSTA DE VIGAS ACOPLADAS

Neste capítulo será aplicado o método da mobilidade a um conjunto de vigas dispostas em um plano. Primeiramente, será analisado um quadrado e, posteriormente, uma outra disposição tendendo à geometria de uma grelha. A primeira análise será realizada considerando a direção da excitação no plano das vigas, com transferência de energia através das uniões pelo esforço fletor, apenas. Em seguida, a análise será feita para uma excitação perpendicular ao plano das vigas, com transferência de energia pelos esforços fletores, cisalhantes e torçores.

Todos os resultados obtidos analiticamente serão comparados com resultados numéricos, obtidos através do software ANSYS. A variável de comparação será o valor RMS da velocidade, calculado numa determinada posição de uma das vigas. Por último, este método será utilizado para uma análise paramétrica do fluxo de potência

O Fluxograma 4.1 apresenta, de forma esquemática, os procedimentos necessários para se determinar a resposta de componentes estruturais, usando o Método da Mobilidade.



Fluxograma 4.1: O Método da Mobilidade.

#### 4.1 - VIGAS DISPOSTAS EM FORMA DE QUADRADO - EXCITAÇÃO NO PLANO

A Figura 4.1, abaixo, mostra um quadrado formado por quatro vigas, sendo separado em dois conjuntos de duas vigas unidas em L. A viga 1 é excitada por uma força harmônica de magnitude  $F_a$  (unitária), atuando no plano das vigas. Da separação da estrutura (quadrado) em duas subestruturas (vigas em L) resultam duas uniões, e nestas uniões, os únicos esforços considerados são os momentos fletores. Os esforços e os deslocamentos envolvidos no estudo estão indicados nesta mesma figura.

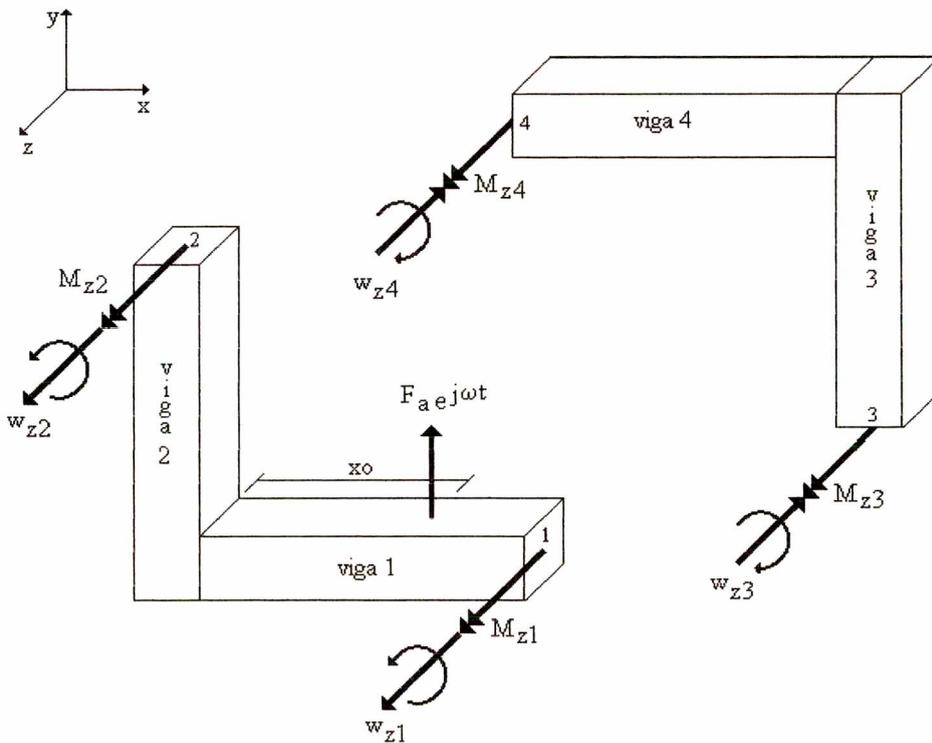


Figura 4.1: Dois conjuntos de vigas, em L, formando um quadrado, excitação no plano.

A aplicação do método da mobilidade consiste em separar a estrutura em subestruturas menores, mais simples, introduzir os esforços nas uniões e escrever as equações de igualdade dos deslocamentos, em função destes esforços e das mobilidades correspondentes, e das equações de transmissão dos esforços que atuam nas uniões.

Numa primeira análise será considerado o fluxo de energia através das uniões pela atuação dos momentos fletores, apenas. As deflexões correspondentes a estes pontos são as angulares. As expressões abaixo representam as deflexões angulares em função dos esforços e das respectivas mobilidades associadas às deflexões consideradas:

$$\bar{w}_{z1} = \bar{M}_{z1} \bar{Y}11_{w_m}^{FF} + F_a \bar{Y}1x0_{w_f}^{FF} + \bar{M}_{z2} \bar{Y}12_{w_m}^{FF} \quad (4.1.1)$$

$$\bar{w}_{z2} = \bar{M}_{z2} \bar{Y}22_{w_m}^{FF} + F_a \bar{Y}2x0_{w_f}^{FF} + \bar{M}_{z1} \bar{Y}21_{w_m}^{FF} \quad (4.1.2)$$

$$\bar{w}_{z3} = \bar{M}_{z3} \bar{Y}33_{w_m}^{FF} + \bar{M}_{z4} \bar{Y}34_{w_m}^{FF} \quad (4.1.3)$$

$$\bar{w}_{z4} = \bar{M}_{z4} \bar{Y}44_{w_m}^{FF} + \bar{M}_{z3} \bar{Y}43_{w_m}^{FF} \quad (4.1.4)$$

As mobilidades foram calculadas usando a metodologia apresentada no apêndice A. As mobilidades para as vigas 3 e 4 foram calculadas da mesma maneira que para as vigas 1 e 2, observando-se obviamente as características próprias de geometria e de material.

Para as uniões, podem-se escrever:

$$\bar{M}_{z1} = -\bar{M}_{z3} \quad (4.1.5)$$

$$\bar{M}_{z2} = -\bar{M}_{z4} \quad (4.1.6)$$

$$\bar{w}_{z1} = \bar{w}_{z3} \quad (4.1.7)$$

$$\bar{w}_{z2} = \bar{w}_{z4} \quad (4.1.8)$$

Usando-se o princípio da reciprocidade, para as mobilidades de transferência, ou seja,  $\bar{Y}21_{w_m}^{FF} = \bar{Y}12_{w_m}^{FF}$  e  $\bar{Y}43_{w_m}^{FF} = \bar{Y}34_{w_m}^{FF}$ , podem-se escrever as equações em função das duas incógnitas,  $\bar{M}_{z1}$  e  $\bar{M}_{z2}$ , em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \bar{Y}_{11}^{FF} + \bar{Y}_{33}^{FF} & \bar{Y}_{12}^{FF} + \bar{Y}_{34}^{FF} \\ \bar{Y}_{12}^{FF} + \bar{Y}_{34}^{FF} & \bar{Y}_{22}^{FF} + \bar{Y}_{44}^{FF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{M}_{z1} \\ \bar{M}_{z2} \end{Bmatrix} = -F_a \begin{Bmatrix} \bar{Y}_{1x0}^{FF} \\ \bar{Y}_{2x0}^{FF} \end{Bmatrix} \quad (4.1.7)$$

Pode-se observar através da Equação (4.1.7) que se torna necessário calcular apenas os dois esforços que atuam nas uniões. Isto é muito vantajoso para grandes estruturas complexas, as quais podem ser separadas em várias subestruturas menores, obtendo-se equações em função apenas dos esforços nas uniões.

Resolvendo-se o sistema de equações (4.1.7), determinam-se os momentos nas uniões e, em seguida, podem ser determinados os demais esforços internos em cada subestrutura. Com todos os esforços conhecidos, monta-se mais uma vez um sistema de equações para a determinação dos deslocamentos e, com estes, então, obtêm as potências transferidas, respostas e energias vibratórias. As condições de contorno são análogas às equações (3.1.1) até (3.1.12), mudando-se apenas as expressões de momento nas extremidades das vigas, que são calculados pela eq. (4.1.7).

Foi calculada a resposta de um quadrado (estrutura) composto por quatro vigas, dividido em dois conjuntos de duas vigas em L (subestruturas), pelo Método da Mobilidade e por Elementos Finitos. As vigas utilizadas possuem as seguintes características:

$$E = 2,1 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

$$\rho = 8000 \text{ kg / m}^3$$

$$\eta = 0,01$$

$$b1 = h1 = b2 = h2 = b3 = h3 = b4 = h4 = 0,01 \text{ m}$$

$$L1 = L4 = 1,0 \text{ m} \quad L2 = L3 = 1,5 \text{ m}$$

A Figura 4.2 apresenta os resultados do cálculo da resposta, em termos de deslocamento, pelos dois métodos. A comparação do cálculo da mobilidade para estas vigas já foi apresentada nas Figuras 2.9 e 2.10, do item 2.6.3.1. A força externa unitária foi aplicada na posição  $x_0 = 0,7 \text{ m}$ , contados a partir da origem da viga 1. A resposta foi obtida em termos do valor rms do deslocamento transversal, também para a posição  $x = 0,7 \text{ m}$ .

A determinação numérica da resposta utilizou o mesmo procedimento de cálculo da mobilidade, descrito no item 2.6.3.2, sendo, porém, usada outra malha e outras condições de contorno. O elemento finito usado nesta aplicação foi o BEAM 3. A malha continha 1000 elementos, o que proporciona 57 elementos por comprimento de onda. O quadrado foi considerado simplesmente apoiado nos quatro cantos, ou seja, rotulado.

Os tempos computacionais necessários para o cálculo da resposta foram de 960 segundos para o método numérico e 853 segundos para o analítico. Ambos os métodos podem ser considerados suficientemente rápidos.

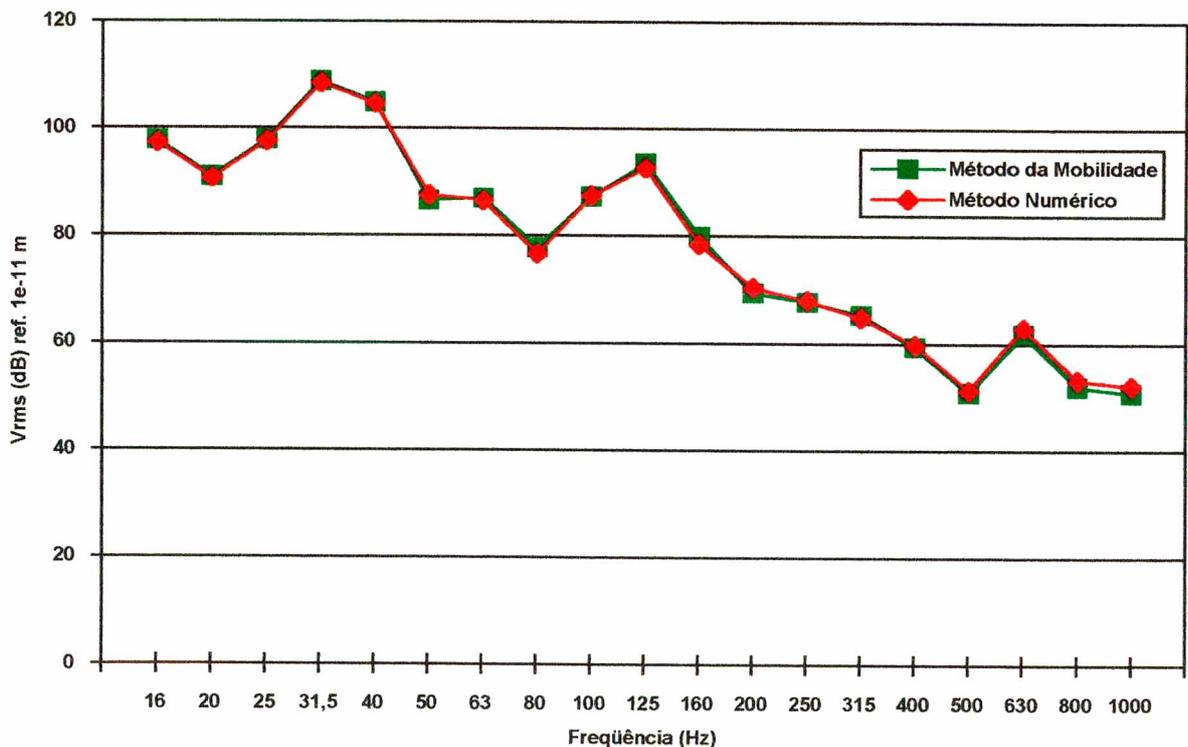


Figura 4.2: Comparação do deslocamento pelos métodos analítico e numérico, vigas formando um quadrado, força no plano.

Vê-se, pela Figura 4.2, que a concordância dos resultados é bastante satisfatória, com variações de apenas algumas frações de dB nas altas frequências.

## 4.2 - VIGAS DISPOSTAS EM FORMA DE QUADRADO - EXCITAÇÃO TRANSVERSAL

A Figura 4.3 mostra um quadrado formado por quatro vigas, o qual será analisado por dois conjuntos de duas vigas unidas em L. A viga 1 é excitada por uma força de magnitude  $F_a$  (unitária) atuando perpendicularmente ao plano das vigas. Da separação da estrutura (quadrado) em duas subestruturas (vigas em L) resultam duas uniões, sendo que nestas uniões os esforços existentes são os momentos fletores e torçores, e as forças cortantes. Os esforços e os deslocamentos envolvidos no estudo estão indicados na Figura 4.3.

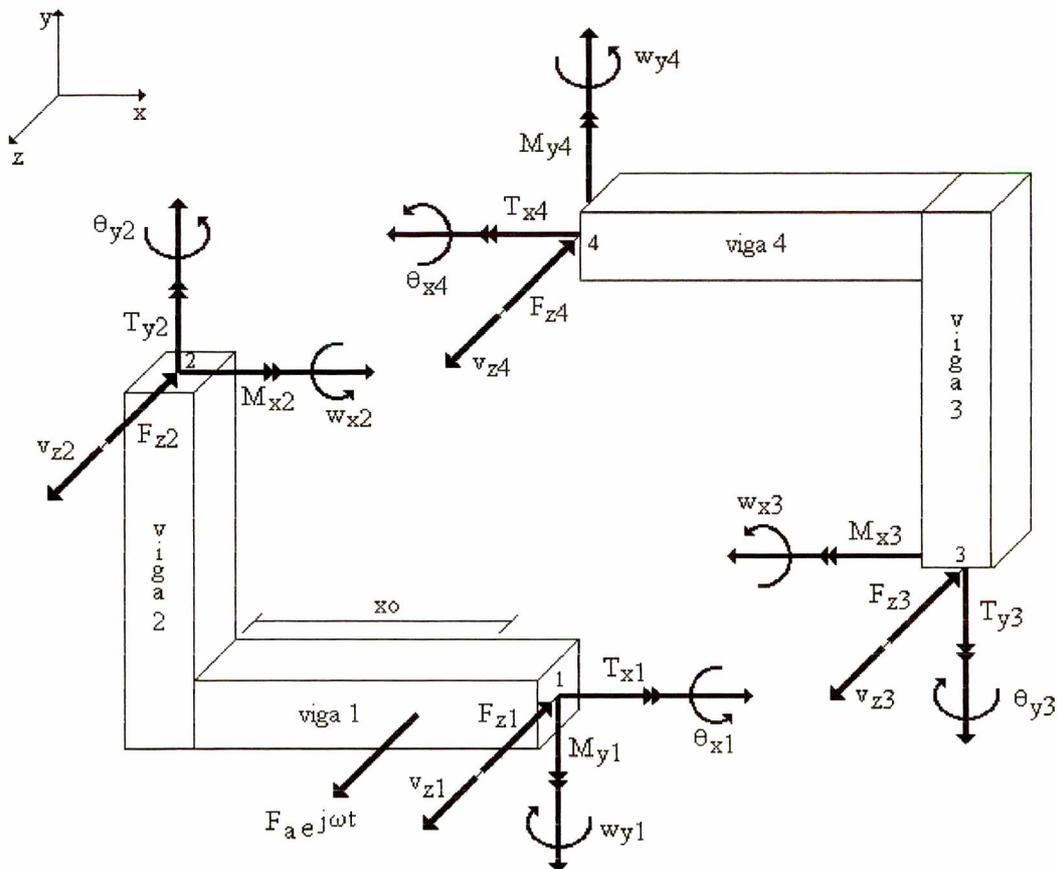


Figura 4.3: Dois conjuntos de vigas em L formando um quadrado, excitado por uma força transversal.

As velocidades angulares nas direções dos eixos axiais das vigas,  $x$  e  $y$ , estão relacionadas com as respectivas mobilidades e com os respectivos esforços através das seguintes expressões:

$$\bar{\theta}_{x1} = \bar{T}_{x1} \bar{Y}11_{w_m}^{TT} + \bar{M}_{x2} \bar{Y}12_{w_m}^{TF} + \bar{F}_{z2} \bar{Y}12_{w_f}^{TF} \quad (4.2.1)$$

$$\bar{w}_{y1} = \bar{M}_{y1} \bar{Y}11_{w_m}^{FF} + \bar{F}_{z1} \bar{Y}11_{w_f}^{FF} + \bar{M}_{k2} \bar{Y}12_{w_m}^{FF} + \bar{T}_{y2} \bar{Y}12_{w_m}^{FT} + \bar{F}_{z2} \bar{Y}12_{w_f}^{FF} + \bar{F}_a \bar{Y}1x_{w_f}^{FF} \quad (4.2.2)$$

$$\bar{v}_{z1} = \bar{M}_{y1} \bar{Y}11_{v_m}^{FF} + \bar{F}_{z1} \bar{Y}11_{v_f}^{FF} + \bar{M}_{k2} \bar{Y}12_{v_m}^{FF} + \bar{T}_{y2} \bar{Y}12_{v_m}^{FT} + \bar{F}_{z2} \bar{Y}12_{v_f}^{FF} + \bar{F}_a \bar{Y}1x_{v_f}^{FF} \quad (4.2.3)$$

$$\bar{\theta}_{y2} = \bar{T}_{y2} \bar{Y}22_{w_m}^{TT} + \bar{M}_{y1} \bar{Y}21_{w_m}^{TF} + \bar{F}_{z1} \bar{Y}21_{w_f}^{TF} + \bar{F}_a \bar{Y}2x_{w_f}^{TF} \quad (4.2.4)$$

$$\bar{w}_{x2} = \bar{M}_{k2} \bar{Y}22_{w_m}^{FF} + \bar{F}_{z2} \bar{Y}22_{w_f}^{FF} + \bar{M}_{y1} \bar{Y}21_{w_m}^{FF} + \bar{T}_{x1} \bar{Y}21_{w_m}^{FT} + \bar{F}_{z1} \bar{Y}21_{w_f}^{FF} + \bar{F}_a \bar{Y}21_{w_f}^{FF} \quad (4.2.5)$$

$$\bar{v}_{z2} = \bar{M}_{k2} \bar{Y}22_{v_m}^{FF} + \bar{F}_{z2} \bar{Y}22_{v_f}^{FF} + \bar{M}_{y1} \bar{Y}21_{v_m}^{FF} + \bar{T}_{x1} \bar{Y}21_{v_m}^{FT} + \bar{F}_{z1} \bar{Y}21_{v_f}^{FF} + \bar{F}_a \bar{Y}2x_{v_f}^{FF} \quad (4.2.6)$$

$$\bar{w}_{x3} = \bar{M}_{x3} \bar{Y}33_{w_m}^{FF} + \bar{F}_{z3} \bar{Y}33_{w_f}^{FF} + \bar{M}_{y4} \bar{Y}34_{w_m}^{FF} + \bar{T}_{x4} \bar{Y}34_{w_m}^{FT} + \bar{F}_{z4} \bar{Y}34_{w_f}^{FF} \quad (4.2.7)$$

$$\bar{\theta}_{y3} = \bar{T}_{x3} \bar{Y}33_{w_m}^{TT} + \bar{M}_{y4} \bar{Y}34_{w_m}^{TF} + \bar{F}_{z4} \bar{Y}34_{w_f}^{TF} \quad (4.2.8)$$

$$\bar{v}_{z3} = \bar{M}_{x3} \bar{Y}33_{v_m}^{FF} + \bar{F}_{z3} \bar{Y}33_{v_f}^{FF} + \bar{M}_{y4} \bar{Y}34_{v_m}^{FF} + \bar{T}_{x4} \bar{Y}34_{v_m}^{FT} + \bar{F}_{z4} \bar{Y}34_{v_f}^{FF} \quad (4.2.9)$$

$$\bar{w}_{y4} = \bar{M}_{y4} \bar{Y}44_{w_m}^{FF} + \bar{F}_{z4} \bar{Y}44_{w_f}^{FF} + \bar{M}_{x3} \bar{Y}43_{w_m}^{FF} + \bar{T}_{y3} \bar{Y}43_{w_m}^{FT} + \bar{F}_{z3} \bar{Y}43_{w_f}^{FF} \quad (4.2.10)$$

$$\bar{\theta}_{x4} = \bar{T}_{x4} \bar{Y}44_{w_m}^{TT} + \bar{M}_{x3} \bar{Y}43_{w_m}^{TF} + \bar{F}_{z3} \bar{Y}43_{w_f}^{TF} \quad (4.2.11)$$

$$\bar{v}_{z4} = \bar{M}_{y4} \bar{Y}44_{v_m}^{FF} + \bar{F}_{z4} \bar{Y}44_{v_f}^{FF} + \bar{M}_{x3} \bar{Y}43_{v_m}^{FF} + \bar{T}_{y3} \bar{Y}43_{v_m}^{FT} + \bar{F}_{z3} \bar{Y}43_{v_f}^{FF} \quad (4.2.12)$$

As mobilidades são calculadas usando a metodologia apresentada no apêndice B, e as mobilidades referentes às vigas 3 e 4 são calculadas de maneira análoga às das vigas 1 e 2.

Sabendo-se que nas uniões devem ser mantidas as continuidades de deslocamento e de esforço, tem-se

$$\left. \begin{array}{lll}
 \bar{\theta}_{x1} = -\bar{w}_{x3} & \bar{T}_{x1} = \bar{M}_{x3} & \bar{w}_{y1} = \bar{\theta}_{y3} \\
 \bar{M}_{y1} = -\bar{T}_{y3} & \bar{v}_{z1} = \bar{v}_{z3} & \bar{F}_{z1} = -\bar{F}_{z3} \\
 \bar{\theta}_{y2} = \bar{w}_{y4} & \bar{T}_{y2} = -\bar{M}_{y4} & \bar{w}_{x2} = -\bar{\theta}_{x4} \\
 \bar{M}_{x2} = \bar{T}_{x4} & \bar{v}_{z2} = \bar{v}_{z4} & \bar{F}_{z2} = -\bar{F}_{z4}
 \end{array} \right\} (4.2.13)$$

Usando novamente o princípio da reciprocidade para as mobilidades de transferência,

$$\bar{Y}_{21}^{TF}_{w_m} = \bar{Y}_{12}^{FT}_{w_m}, \quad \bar{Y}_{21}^{FT}_{w_m} = \bar{Y}_{12}^{TF}_{w_m}, \quad \bar{Y}_{21}^{FF}_{w_m} = \bar{Y}_{12}^{FF}_{w_m}, \quad \bar{Y}_{34}^{TF}_{w_m} = \bar{Y}_{43}^{FT}_{w_m},$$

$$\bar{Y}_{34}^{FT}_{w_m} = \bar{Y}_{43}^{TF}_{w_m} \text{ e } \bar{Y}_{34}^{FF}_{w_m} = \bar{Y}_{43}^{FF}_{w_m} \text{ e rearranjando em forma matricial, obtém-se:}$$

$$\left[ \begin{array}{cccccc}
 \bar{Y}_{12}^{TF}_{w_m} - \bar{Y}_{34}^{FT}_{w_m} & \bar{Y}_{22}^{FF}_{w_m} + \bar{Y}_{44}^{TT}_{w_m} & \bar{Y}_{21}^{TF}_{w_f} - \bar{Y}_{43}^{FF}_{w_f} & \bar{Y}_{22}^{FF}_{w_f} & \bar{Y}_{12}^{TF}_{w_m} & 0 \\
 \bar{Y}_{11}^{TT}_{w_m} + \bar{Y}_{33}^{FF}_{w_m} & \bar{Y}_{12}^{TF}_{w_m} + \bar{Y}_{34}^{FT}_{w_m} & -\bar{Y}_{33}^{FF}_{w_f} & \bar{Y}_{12}^{FT}_{w_f} - \bar{Y}_{34}^{FF}_{w_f} & 0 & -\bar{Y}_{34}^{FF}_{w_m} \\
 \bar{Y}_{12}^{TF}_{v_m} - \bar{Y}_{43}^{FF}_{v_m} & \bar{Y}_{22}^{FF}_{v_m} & \bar{Y}_{21}^{FF}_{v_f} - \bar{Y}_{43}^{FF}_{v_f} & \bar{Y}_{22}^{FF}_{v_f} - \bar{Y}_{44}^{FF}_{v_f} & \bar{Y}_{43}^{FT}_{v_m} + \bar{Y}_{21}^{FF}_{v_m} & \bar{Y}_{44}^{FF}_{v_m} \\
 -\bar{Y}_{33}^{FF}_{v_m} & -\bar{Y}_{34}^{FT}_{v_m} + \bar{Y}_{12}^{FF}_{v_m} & \bar{Y}_{11}^{FF}_{v_f} + \bar{Y}_{33}^{FF}_{v_f} & \bar{Y}_{12}^{FF}_{v_f} + \bar{Y}_{34}^{FF}_{v_f} & \bar{Y}_{11}^{FF}_{v_m} & \bar{Y}_{12}^{FT}_{v_m} + \bar{Y}_{34}^{FF}_{v_m} \\
 -\bar{Y}_{34}^{FF}_{w_m} & 0 & \bar{Y}_{21}^{TF}_{w_f} + \bar{Y}_{43}^{FF}_{w_f} & \bar{Y}_{44}^{FF}_{w_f} & \bar{Y}_{12}^{FT}_{w_m} + \bar{Y}_{34}^{FF}_{w_m} & \bar{Y}_{22}^{TT}_{w_m} + \bar{Y}_{44}^{FF}_{w_m} \\
 0 & \bar{Y}_{12}^{FF}_{w_m} & \bar{Y}_{11}^{FF}_{w_f} & \bar{Y}_{12}^{FF}_{w_f} + \bar{Y}_{34}^{FF}_{w_f} & \bar{Y}_{11}^{FF}_{w_m} + \bar{Y}_{33}^{TT}_{w_m} & \bar{Y}_{12}^{FT}_{w_m} + \bar{Y}_{34}^{FF}_{w_m}
 \end{array} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \bar{T}_{x1} \\
 \bar{M}_{x2} \\
 \bar{F}_{z1} \\
 \bar{F}_{z2} \\
 \bar{M}_{y1} \\
 \bar{T}_{y2}
 \end{array} \right\} = -F_a \left\{ \begin{array}{l}
 \bar{Y}_{2x0}^{FF}_{w_f} \\
 0 \\
 \bar{Y}_{1x0}^{FF}_{v_f} \\
 \bar{Y}_{2x0}^{FF}_{v_f} \\
 \bar{Y}_{2x0}^{TF}_{w_f} \\
 \bar{Y}_{2x0}^{TF}_{v_f}
 \end{array} \right\} \quad (4.2.14)$$

Resolvendo o sistema de equação (4.2.14) obtêm-se os esforços nas uniões. Mais uma vez precisa-se calcular apenas a metade dos esforços representados nas uniões, pois os demais são obtidos através das condições de contorno nas uniões. Com os esforços conhecidos, monta-se mais uma vez um sistema de equações para a determinação dos deslocamento e, com estes, então, obter as potências transferidas, respostas e energias vibratórias

Foi calculada a resposta de um quadrado (estrutura) composto por quatro vigas, dividido em dois conjuntos de duas vigas em L (subestruturas). Em uma primeira análise, as ondas de flexão foram representadas pela teoria de Euler, e posteriormente, foram consideradas vigas de grande seção o que requerem o uso da teoria de Timoshenko. Resultados numéricos também foram calculados e uma comparação entre os dois métodos é apresentada. As vigas usadas para a primeira análise possuem características (primeira configuração):

$$E = 2,1 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

$$\rho = 8000 \text{ kg / m}^3$$

$$\eta = 0,01$$

$$b1 = h1 = b2 = h2 = b3 = h3 = b4 = h4 = 0,05 \text{ m}$$

$$L1 = L4 = 1,5 \text{ m}; \quad L2 = L3 = 2,0 \text{ m}$$

A força externa unitária é aplicada na posição  $x_0 = 1,0 \text{ m}$ , contados a partir da origem da viga 1. A resposta foi obtida em termos da magnitude do deslocamento transversal, em dB, para a posição  $x = 0,7 \text{ m}$ .

Na determinação numérica da resposta utilizou-se o mesmo procedimento de cálculo da mobilidade para força transversal. O elemento usado foi o BEAM 4, e a malha representada por 560 elementos, que para este tipo de viga proporciona 40 elementos por comprimento de onda, na frequência de 1450 Hz. O quadrado foi considerado simplesmente apoiado (rotulado) nos quatro cantos (deslocamento nulo nas direções  $x$  e  $y$ ), e deslocamento livre na direção  $z$ .

O tempo computacional necessário para o cálculo da resposta foi de 1805 segundos para o método numérico e de 1745 segundos para o analítico. Testes preliminares usando o método *full* para a análise harmônica mostraram tempos de CPU de 8404 segundos, para mesma precisão de resultados, o que mostra a vantagem de usar o método da superposição modal para a análise harmônica. O método teórico é ligeiramente mais rápido que a análise

harmônica por superposição modal e, se comparado ao método *full*, os ganhos em relação ao tempo são marcantes.

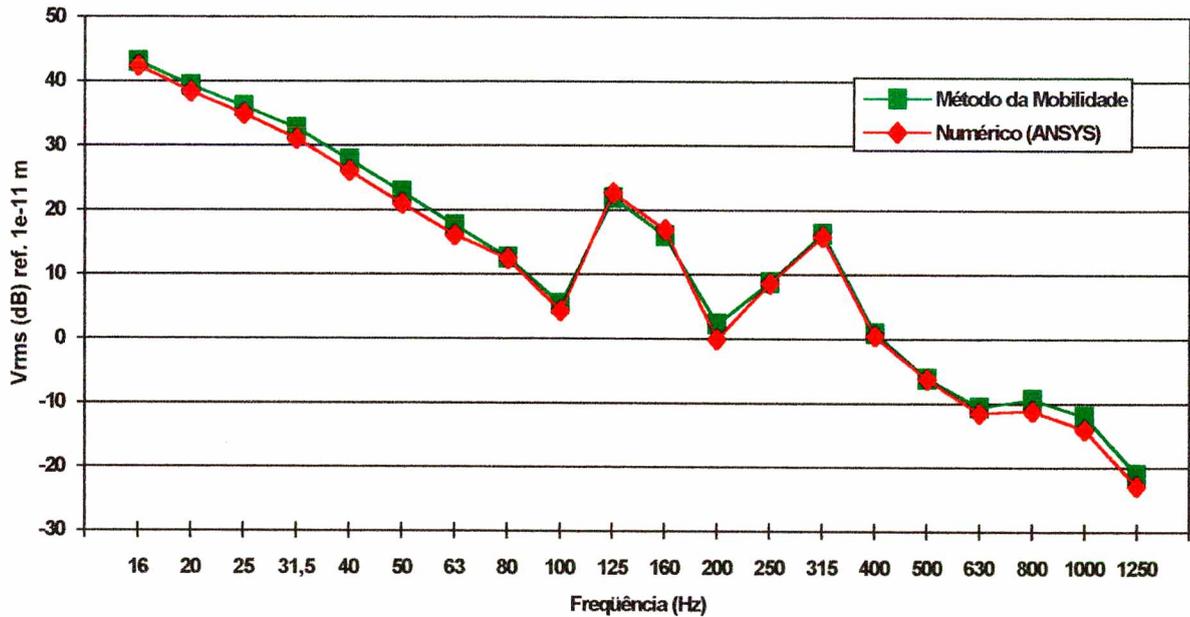


Figura 4.4: Comparação do deslocamento transversal, métodos analítico e numérico, primeira configuração.

Nota-se pela Figura 4.4 que os dois métodos fornecem resultados muito semelhantes para o deslocamento.

As vigas usadas para a segunda análise, na qual foram usadas ambas as teorias de viga, possuem as seguintes características (segunda configuração):

$$E = 2,1 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

$$\rho = 8000 \text{ kg / m}^3$$

$$\eta = 0,01$$

$$b1 = h1 = b2 = h2 = b3 = h3 = b4 = b4 = 0,2 \text{ m}$$

$$L1 = L4 = 1,5 \text{ m}; \quad L2 = L3 = 2,0 \text{ m}$$

A força externa unitária é aplicada na posição  $x_0 = 1,0 \text{ m}$ , contados a partir da origem da viga 1. A resposta foi obtida em termos da magnitude do deslocamento transversal, para a posição  $x = 0,7 \text{ m}$ .

Na determinação numérica da resposta utilizou-se o mesmo procedimento de cálculo da mobilidade para força transversal, usando outra malha e outras condições de contorno. O elemento usado foi o BEAM 4, a malha tinha 560 elementos, que para este tipo de viga corresponde a 40 elementos por comprimento de onda. O quadrado foi considerado simplesmente apoiado (rotulado) nos quatro cantos (deslocamento nulo nas direções  $x$  e  $y$ ), mas com deslocamento livre na direção  $z$ .

O resultado teórico pela teoria de Timoshenko foi obtido usando a metodologia de cálculo de mobilidade apresentada no apêndice B, utilizando as equações do item 2.4 para flexão, e a equação (4.2.14). Na análise numérica, o cisalhamento é considerado utilizando-se o comando RMORE para SHEARZ, com valor 0,8492, que nada mais é que o coeficiente de Timoshenko dado pela equação (2.4.14).

Quanto ao tempo de processamento, eles se equivalem aos da análise anterior, sendo 2008 segundos para o teórico e 2186 segundos para o numérico. Estas diferenças se devem ao maior número de variáveis envolvidas na formulação teórica e ao maior tempo para se fazer a análise modal, já que há o aumento do número de modos da estrutura.

Nota-se pelas figuras 4.5 e 4.6 que os resultados são bastante coerentes, para as duas teorias. Comparando as duas figuras, vê-se que os níveis de deslocamento do ponto  $x = 0,7$  m da viga 1, pela teoria de Timoshenko, são bem maiores que os valores pela teoria de Euler (da ordem de 20 dB). Isto vem comprovar a conclusão da análise do fluxo de potência (item 3.3), de que o cisalhamento aumenta o número de ressonâncias e, por consequência, o nível do deslocamento, já que a viga responde com maior intensidade nas ressonâncias.

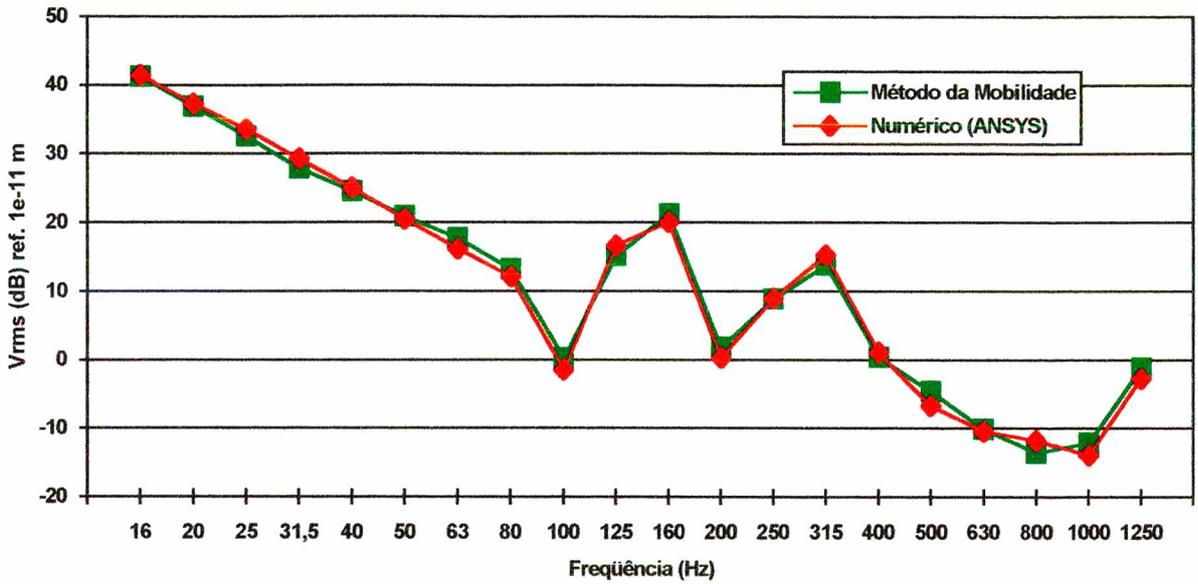


Figura 4.5: Comparação do deslocamento transversal, métodos analítico e numérico, segunda configuração, teoria de Euler-Bernoulli.

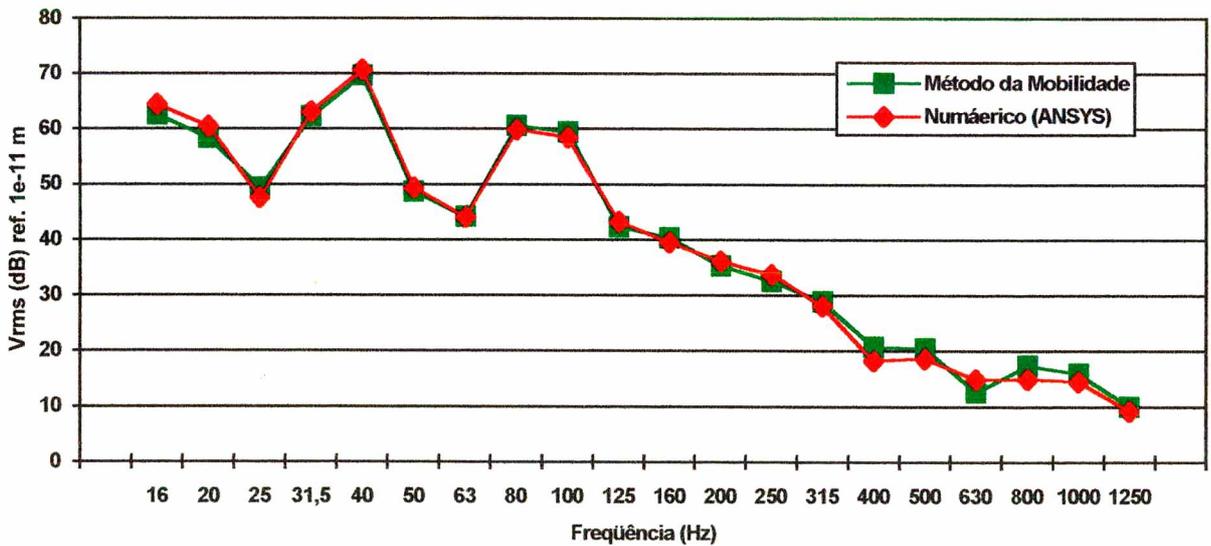


Figura 4.6: Comparação do deslocamento transversal, métodos analítico e numérico, segunda configuração, vigas de Timoshenko.

#### 4.3 - GRELHA - FORÇA TRANSVERSAL

Para avaliar a extensão da generalidade da aplicação do método, aplicou-se o mesmo a uma estrutura mais complexa, composta por sete vigas, e dividida em dois conjuntos de duas

vigas em L e um subsistema composto por três vigas dispostas em T. A Figura 4.7, abaixo, mostra a configuração, e os esforços envolvidos na análise.

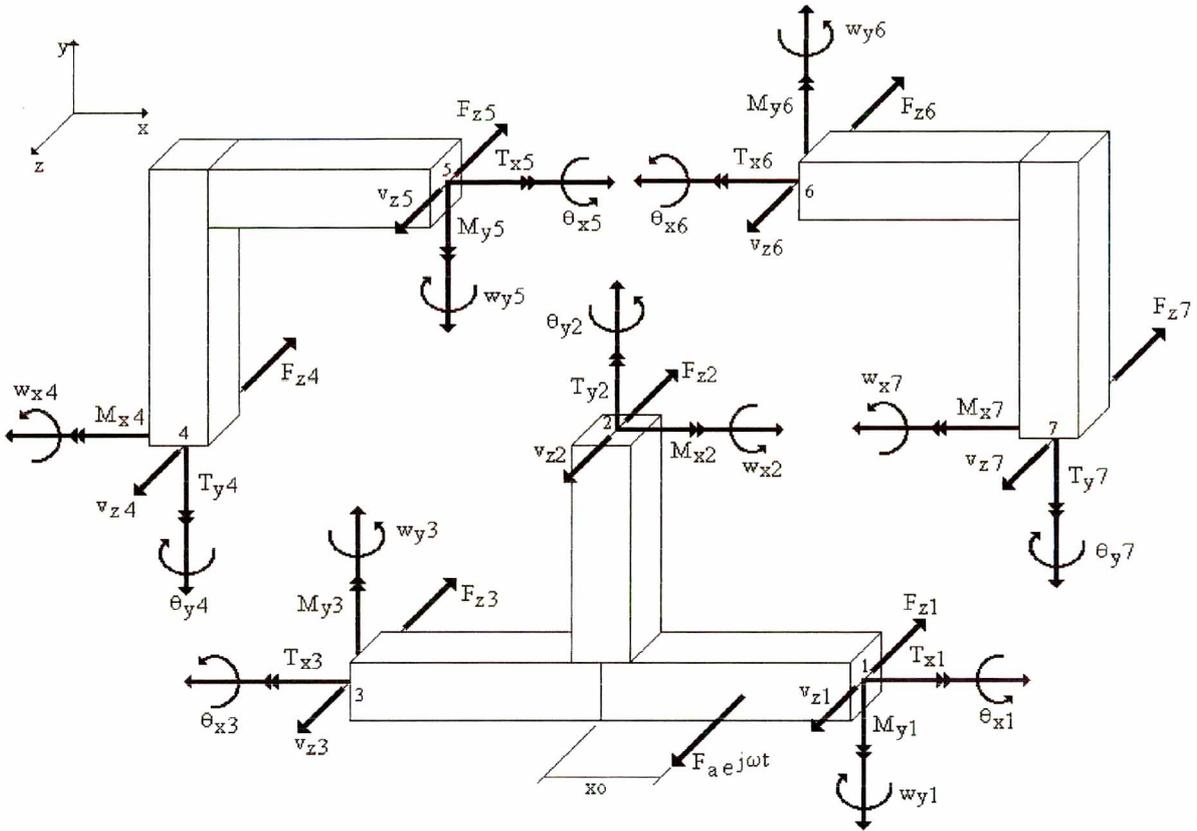


Figura 4.7: Estrutura complexa formada por dois conjuntos de vigas em L e um de vigas em T, força transversal ao plano.

As velocidades lineares e angulares nos pontos de união, nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , estão relacionadas às respectivas mobilidades e esforços através das seguintes expressões:

$$\bar{\theta}_{x1} = \bar{T}_{x1} \bar{Y}_{11}^{TT}_{w_m} + \bar{M}_{x2} \bar{Y}_{12}^{TF}_{w_m} + \bar{F}_{z2} \bar{Y}_{12}^{TF}_{w_f} + \bar{T}_{x3} \bar{Y}_{13}^{TT}_{w_m} \quad (4.3.1)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_{y1} = & \bar{M}_{y1} \bar{Y}_{11}^{FF}_{w_m} + \bar{F}_{z1} \bar{Y}_{11}^{FF}_{w_f} + \bar{M}_{x2} \bar{Y}_{12}^{FF}_{w_m} + \bar{T}_{y2} \bar{Y}_{12}^{FT}_{w_m} + \bar{F}_{z2} \bar{Y}_{12}^{FF}_{w_f} \\ & + \bar{M}_{y3} \bar{Y}_{13}^{FF}_{w_m} + \bar{F}_{z3} \bar{Y}_{13}^{FF}_{w_f} + F_a \bar{Y}_{1x0}^{FF}_{w_f} \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_{z1} = & \bar{M}_{y1} \bar{Y}_{11}^{FF}_{v_m} + \bar{F}_{z1} \bar{Y}_{11}^{FF}_{v_f} + \bar{M}_{x2} \bar{Y}_{12}^{FF}_{v_m} + \bar{T}_{y2} \bar{Y}_{12}^{FT}_{v_m} + \bar{F}_{z2} \bar{Y}_{12}^{FF}_{v_f} \\ & + \bar{M}_{y3} \bar{Y}_{13}^{FF}_{v_m} + \bar{F}_{z3} \bar{Y}_{13}^{FF}_{v_f} + F_a \bar{Y}_{1x0}^{FF}_{v_f} \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

$$\bar{\theta}_{y2} = \bar{T}_{y2} \bar{Y}22_{w_m}^{TT} + \bar{M}_{y1} \bar{Y}21_{w_m}^{IF} + \bar{F}_{z1} \bar{Y}21_{w_f}^{IF} + \bar{M}_{y3} \bar{Y}23_{w_m}^{IF} + \bar{F}_{z3} \bar{Y}23_{w_f}^{IF} + F_a \bar{Y}2x0_{w_f}^{IF} \quad (4.3.4)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_{x2} = & \bar{M}_{x2} \bar{Y}22_{w_m}^{FF} + \bar{F}_{z2} \bar{Y}22_{w_f}^{FF} + \bar{M}_{y1} \bar{Y}21_{w_m}^{FF} + \bar{T}_{x1} \bar{Y}21_{w_m}^{FT} + \bar{F}_{z1} \bar{Y}21_{w_f}^{FF} + \\ & + \bar{M}_{y3} \bar{Y}23_{w_m}^{FF} + \bar{T}_{x3} \bar{Y}23_{w_m}^{FT} + \bar{F}_{z3} \bar{Y}23_{w_f}^{FF} + F_a \bar{Y}21_{w_f}^{FF} \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_{z2} = & \bar{M}_{x2} \bar{Y}22_{v_m}^{FF} + \bar{F}_{z2} \bar{Y}22_{v_f}^{FF} + \bar{M}_{y1} \bar{Y}21_{v_m}^{FF} + \bar{T}_{x1} \bar{Y}21_{v_m}^{FT} + \bar{F}_{z1} \bar{Y}21_{v_f}^{FF} + \\ & + \bar{M}_{y3} \bar{Y}23_{v_m}^{FF} + \bar{T}_{x3} \bar{Y}23_{v_m}^{FT} + \bar{F}_{z3} \bar{Y}23_{v_f}^{FF} + F_a \bar{Y}2x0_{v_f}^{FF} \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

$$\bar{\theta}_{x3} = \bar{T}_{x3} \bar{Y}33_{w_m}^{TT} + \bar{T}_{x1} \bar{Y}31_{w_m}^{TT} + \bar{M}_{x2} \bar{Y}32_{w_m}^{TF} + \bar{F}_{z2} \bar{Y}32_{w_f}^{TF} \quad (4.3.7)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_{y3} = & \bar{M}_{y3} \bar{Y}33_{w_m}^{FF} + \bar{F}_{z3} \bar{Y}33_{w_f}^{FF} + \bar{M}_{y1} \bar{Y}31_{w_m}^{FF} + \bar{F}_{z1} \bar{Y}31_{w_f}^{FF} + \bar{M}_{x2} \bar{Y}32_{w_m}^{FF} + \\ & + \bar{T}_{y2} \bar{Y}32_{w_m}^{FT} + \bar{F}_{z2} \bar{Y}32_{w_f}^{FF} + F_a \bar{Y}3x0_{w_f}^{FF} \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_{z3} = & \bar{M}_{y3} \bar{Y}33_{v_m}^{FF} + \bar{F}_{z3} \bar{Y}33_{v_f}^{FF} + \bar{M}_{y1} \bar{Y}31_{v_m}^{FF} + \bar{F}_{z1} \bar{Y}31_{v_f}^{FF} + \bar{M}_{x2} \bar{Y}32_{v_m}^{FF} + \\ & + \bar{T}_{y2} \bar{Y}32_{v_m}^{FT} + \bar{F}_{z2} \bar{Y}32_{v_f}^{FF} + F_a \bar{Y}1x0_{v_f}^{FF} \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

$$\bar{w}_{x4} = \bar{M}_{x4} \bar{Y}44_{w_m}^{FF} + \bar{F}_{z4} \bar{Y}44_{w_f}^{FF} + \bar{M}_{y5} \bar{Y}45_{w_m}^{FF} + \bar{T}_{x5} \bar{Y}45_{w_m}^{FT} + \bar{F}_{z5} \bar{Y}45_{w_f}^{FF} \quad (4.3.10)$$

$$\bar{\theta}_{y4} = \bar{T}_{x4} \bar{Y}44_{w_m}^{TT} + \bar{M}_{y5} \bar{Y}45_{w_m}^{TF} + \bar{F}_{z5} \bar{Y}45_{w_f}^{TF} \quad (4.3.11)$$

$$\bar{v}_{z4} = \bar{M}_{x4} \bar{Y}44_{v_m}^{FF} + \bar{F}_{z4} \bar{Y}44_{v_f}^{FF} + \bar{M}_{y5} \bar{Y}45_{v_m}^{FF} + \bar{T}_{x5} \bar{Y}45_{v_m}^{FT} + \bar{F}_{z5} \bar{Y}45_{v_f}^{FF} \quad (4.3.12)$$

$$\bar{w} = \bar{M}_{y5} \bar{Y}55_{w_m}^{FF} + \bar{F}_{z5} \bar{Y}55_{w_f}^{FF} + \bar{M}_{x4} \bar{Y}54_{w_m}^{FF} + \bar{T}_{y4} \bar{Y}54_{w_m}^{FT} + \bar{F}_{z4} \bar{Y}54_{w_f}^{FF} \quad (4.3.13)$$

$$\bar{\theta}_{x5} = \bar{T}_{x5} \bar{Y}55_{w_m}^{TT} + \bar{M}55_{w_m}^{TT} \bar{Y}54_{w_m}^{TF} + \bar{F}_{z4} \bar{Y}54_{w_f}^{TF} \quad (4.3.14)$$

$$\bar{v}_{z5} = \bar{M}_{y5} \bar{Y}55_{v_m}^{FF} + \bar{F}_{z5} \bar{Y}55_{v_f}^{FF} + \bar{M}_{x4} \bar{Y}54_{v_m}^{FF} + \bar{T}_{y4} \bar{Y}54_{v_m}^{FT} + \bar{F}_{z4} \bar{Y}54_{v_f}^{FF} \quad (4.3.15)$$

$$\bar{\dot{w}}_{y6} = \bar{M}_{y6} \bar{Y}66_{w\_m}^{FF} + \bar{F}_{z6} \bar{Y}66_{w\_f}^{FF} + \bar{M}_{x7} \bar{Y}67_{w\_m}^{FF} + \bar{T}_{y7} \bar{Y}67_{w\_m}^{FT} + \bar{F}_{z7} \bar{Y}67_{w\_f}^{FF} \quad (4.3.16)$$

$$\bar{\dot{\theta}}_{x6} = \bar{T}_{x6} \bar{Y}66_{w\_m}^{TT} + \bar{M}_{x7} \bar{Y}67_{w\_m}^{TF} + \bar{F}_{z7} \bar{Y}67_{w\_f}^{TF} \quad (4.3.17)$$

$$\bar{\dot{v}}_{z6} = \bar{M}_{y6} \bar{Y}66_{v\_m}^{FF} + \bar{F}_{z6} \bar{Y}66_{v\_f}^{FF} + \bar{M}_{x7} \bar{Y}67_{v\_m}^{FF} + \bar{T}_{y7} \bar{Y}67_{v\_m}^{FT} + \bar{F}_{z7} \bar{Y}67_{v\_f}^{FF} \quad (4.3.18)$$

$$\bar{\dot{w}}_{x7} = \bar{M}_{x7} \bar{Y}77_{w\_m}^{FF} + \bar{F}_{z7} \bar{Y}77_{w\_f}^{FF} + \bar{M}_{y6} \bar{Y}76_{w\_m}^{FF} + \bar{T}_{x6} \bar{Y}76_{w\_m}^{FT} + \bar{F}_{z6} \bar{Y}76_{w\_f}^{FF} \quad (4.3.19)$$

$$\bar{\dot{\theta}}_{y7} = \bar{T}_{x7} \bar{Y}77_{w\_m}^{TT} + \bar{M}_{y6} \bar{Y}76_{w\_m}^{TF} + \bar{F}_{z6} \bar{Y}76_{w\_f}^{TF} \quad (4.3.20)$$

$$\bar{\dot{v}}_{z7} = \bar{M}_{x7} \bar{Y}77_{v\_m}^{FF} + \bar{F}_{z7} \bar{Y}77_{v\_f}^{FF} + \bar{M}_{y6} \bar{Y}76_{v\_m}^{FF} + \bar{T}_{x6} \bar{Y}76_{v\_m}^{FT} + \bar{F}_{z6} \bar{Y}76_{v\_f}^{FF} \quad (4.3.21)$$

As mobilidades são calculadas usando a metodologia apresentada nos apêndices B e C. Sabendo que nas uniões, a continuidade de deslocamento e esforço devem ser mantidos, tem-se:

$$\left. \begin{array}{lll} \bar{\dot{\theta}}_{x1} = -\bar{\dot{w}}_{x7} & \bar{T}_{x1} = \bar{M}_{x7} & \bar{\dot{w}}_{y1} = \bar{\dot{\theta}}_{y7} \\ \bar{M}_{y1} = \bar{T}_{y7} & \bar{\dot{v}}_{z1} = \bar{\dot{v}}_{z7} & \bar{F}_{z1} = -\bar{F}_{z7} \\ \bar{\dot{\theta}}_{y2} = -\bar{\dot{w}}_{y5} & \bar{T}_{y2} = \bar{M}_{y6} - \bar{M}_{y5} & \bar{\dot{w}}_{x2} = \bar{\dot{\theta}}_{x5} \\ \bar{M}_{x2} = \bar{T}_{x6} - \bar{T}_{x5} & \bar{\dot{v}}_{z2} = \bar{\dot{v}}_{z5} & \bar{\dot{\theta}}_{y2} = \bar{\dot{w}}_{y6} \\ \bar{F}_{z2} = -\bar{F}_{z5} - \bar{F}_{z6} & \bar{\dot{w}}_{x2} = \bar{\dot{\theta}}_{x6} & \bar{\dot{v}}_{z2} = \bar{\dot{v}}_{z6} \\ \bar{\dot{w}}_{y3} = -\bar{\dot{\theta}}_{y4} & \bar{M}_{y3} = \bar{T}_{y4} & \bar{\dot{\theta}}_{x3} = \bar{\dot{w}}_{x4} \\ \bar{T}_{x3} = -\bar{M}_{x4} & \bar{\dot{v}}_{z3} = \bar{\dot{v}}_{z4} & \bar{F}_{z3} = -\bar{F}_{z4} \end{array} \right\} \quad (4.3.22)$$

Usando o princípio da reciprocidade, aplicado às mobilidades de transferência, pode-se então escrever

$$\begin{aligned}
 \bar{Y}_{21}^{FF}_{w_m} &= \bar{Y}_{12}^{FF}_{w_m} & \bar{Y}_{32}^{FF}_{w_m} &= \bar{Y}_{23}^{FF}_{w_m} \\
 \bar{Y}_{21}^{FT}_{w_m} &= \bar{Y}_{12}^{TF}_{w_m} & \bar{Y}_{32}^{FT}_{w_m} &= \bar{Y}_{23}^{TF}_{w_m} \\
 \bar{Y}_{21}^{TF}_{w_m} &= \bar{Y}_{12}^{FT}_{w_m} & \bar{Y}_{32}^{TF}_{w_m} &= \bar{Y}_{23}^{FT}_{w_m} \\
 \bar{Y}_{54}^{FF}_{w_m} &= \bar{Y}_{45}^{FF}_{w_m} & \bar{Y}_{76}^{FF}_{w_m} &= \bar{Y}_{67}^{FF}_{w_m} \\
 \bar{Y}_{54}^{FT}_{w_m} &= \bar{Y}_{45}^{TF}_{w_m} & \bar{Y}_{76}^{FT}_{w_m} &= \bar{Y}_{67}^{TF}_{w_m} \\
 \bar{Y}_{54}^{TF}_{w_m} &= \bar{Y}_{45}^{FT}_{w_m} & \bar{Y}_{76}^{TF}_{w_m} &= \bar{Y}_{67}^{FT}_{w_m}
 \end{aligned}$$

e rearranjando, as equações em forma matricial, obtém-se:

$$[Y] \cdot \{M\} = \{F\} \quad (4.3.23)$$

onde:

$$[Y] = [Y' \mid Y''] \quad (4.3.24)$$

$$Y' = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{11}^{TT}_{w_m} - \bar{Y}_{77}^{FF}_{w_m} & \bar{Y}_{13}^{TT}_{w_m} & -\bar{Y}_{12}^{TF}_{w_m} & \bar{Y}_{76}^{FT}_{w_m} + \bar{Y}_{12}^{TF}_{w_m} & -\bar{Y}_{77}^{FF}_{w_f} & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{Y}_{12}^{FF}_{w_m} & \bar{Y}_{12}^{FF}_{w_m} & \bar{Y}_{11}^{FF}_{w_f} & \bar{Y}_{13}^{FF}_{w_f} \\ -\bar{Y}_{77}^{FF}_{v_m} & 0 & -\bar{Y}_{12}^{FF}_{v_m} & \bar{Y}_{12}^{FF}_{v_m} - \bar{Y}_{76}^{FT}_{v_m} & \bar{Y}_{11}^{FF}_{v_f} - \bar{Y}_{77}^{FF}_{v_f} & \bar{Y}_{13}^{FF}_{v_f} \\ 0 & \bar{Y}_{54}^{FF}_{w_m} & 0 & 0 & \bar{Y}_{21}^{FF}_{w_f} & \bar{Y}_{23}^{FF}_{w_m} + \bar{Y}_{54}^{FF}_{v_m} \\ \bar{Y}_{21}^{FT}_{w_m} & \bar{Y}_{23}^{FT}_{w_m} - \bar{Y}_{54}^{FF}_{w_m} & -\bar{Y}_{22}^{FF}_{w_m} - \bar{Y}_{55}^{TT}_{w_m} & \bar{Y}_{22}^{FF}_{w_m} & \bar{Y}_{21}^{FF}_{w_f} & \bar{Y}_{23}^{FF}_{w_f} + \bar{Y}_{54}^{FF}_{v_m} \\ \bar{Y}_{21}^{FT}_{v_m} & \bar{Y}_{23}^{FT}_{v_m} - \bar{Y}_{54}^{FF}_{v_m} & -\bar{Y}_{22}^{FF}_{v_m} & \bar{Y}_{22}^{FF}_{v_m} & \bar{Y}_{21}^{FF}_{v_f} & \bar{Y}_{23}^{FF}_{v_f} + \bar{Y}_{54}^{FF}_{v_f} \\ -\bar{Y}_{67}^{FF}_{w_m} & 0 & 0 & 0 & \bar{Y}_{21}^{TF}_{w_f} + \bar{Y}_{67}^{FF}_{w_f} & \bar{Y}_{23}^{TF}_{w_f} \\ \bar{Y}_{21}^{FT}_{w_m} - \bar{Y}_{67}^{TF}_{w_m} & \bar{Y}_{23}^{FT}_{w_m} & -\bar{Y}_{22}^{FF}_{w_m} & \bar{Y}_{22}^{FF}_{w_m} - \bar{Y}_{66}^{TT}_{w_m} & \bar{Y}_{21}^{FF}_{w_f} + \bar{Y}_{67}^{TF}_{w_f} & \bar{Y}_{23}^{FF}_{w_f} \\ \bar{Y}_{21}^{FT}_{v_m} - \bar{Y}_{67}^{FF}_{v_m} & \bar{Y}_{23}^{FT}_{v_m} & -\bar{Y}_{22}^{FF}_{v_m} & \bar{Y}_{22}^{FF}_{v_m} & \bar{Y}_{21}^{FF}_{v_f} + \bar{Y}_{67}^{FF}_{v_f} & \bar{Y}_{23}^{FF}_{v_f} \\ 0 & 0 & -\bar{Y}_{32}^{FF}_{w_m} & \bar{Y}_{32}^{FF}_{w_m} & \bar{Y}_{31}^{FF}_{w_f} & \bar{Y}_{33}^{FF}_{w_f} \\ \bar{Y}_{31}^{TT}_{w_m} & \bar{Y}_{33}^{TT}_{w_m} + \bar{Y}_{44}^{FF}_{w_m} & -\bar{Y}_{32}^{TF}_{w_m} + -\bar{Y}_{45}^{FT}_{w_m} & \bar{Y}_{32}^{TF}_{w_m} & -\bar{Y}_{44}^{FF}_{v_m} & -\bar{Y}_{44}^{FF}_{w_f} \\ 0 & -\bar{Y}_{44}^{FF}_{v_m} & \bar{Y}_{32}^{FF}_{v_m} - \bar{Y}_{45}^{FT}_{v_m} & \bar{Y}_{32}^{FF}_{v_m} & \bar{Y}_{31}^{FF}_{v_f} & \bar{Y}_{33}^{FF}_{v_f} + \bar{Y}_{44}^{FF}_{v_f} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}'' = \begin{bmatrix}
-\bar{Y}_{12_{w_f}}^{TF} & \bar{Y}_{12_{w_f}}^{TF} - \bar{Y}_{76_{w_f}}^{FF} & 0 & 0 & 0 & \bar{Y}_{76_{w_m}}^{FF} \\
-\bar{Y}_{12_{w_f}}^{FF} & -\bar{Y}_{12_{w_f}}^{FF} - \bar{Y}_{76_{w_f}}^{TF} & \bar{Y}_{11_{w_m}}^{FF} + \bar{Y}_{87_{w_m}}^{TT} & \bar{Y}_{13_{w_m}}^{FF} & -\bar{Y}_{12_{w_m}}^{FT} & \bar{Y}_{12_{w_m}}^{FT} - \bar{Y}_{76_{w_m}}^{TF} \\
-\bar{Y}_{12_{v_f}}^{FF} & -\bar{Y}_{12_{v_f}}^{FF} - \bar{Y}_{76_{v_f}}^{FF} & \bar{Y}_{11_{v_m}}^{FF} & \bar{Y}_{13_{v_m}}^{FF} & -\bar{Y}_{12_{v_m}}^{FT} & \bar{Y}_{12_{v_m}}^{FT} - \bar{Y}_{76_{v_m}}^{FF} \\
\bar{Y}_{55_{w_f}}^{FF} & 0 & \bar{Y}_{21_{v_m}}^{TF} & \bar{Y}_{23_{w_m}}^{TF} - \bar{Y}_{54_{w_m}}^{FT} & \bar{Y}_{55_{w_m}}^{FF} - \bar{Y}_{22_{w_m}}^{TT} & \bar{Y}_{22_{w_m}}^{TT} \\
-\bar{Y}_{22_{w_f}}^{FF} & -\bar{Y}_{22_{w_f}}^{FF} & \bar{Y}_{21_{w_m}}^{FF} & \bar{Y}_{23_{w_m}}^{FF} & 0 & 0 \\
-\bar{Y}_{22_{w_f}}^{FF} - \bar{Y}_{55_{v_f}}^{FF} & -\bar{Y}_{22_{v_f}}^{FF} & \bar{Y}_{21_{v_m}}^{FF} & \bar{Y}_{23_{v_m}}^{FF} + \bar{Y}_{54_{v_m}}^{FF} & -\bar{Y}_{55_{w_m}}^{FF} & 0 \\
0 & -\bar{Y}_{66_{w_f}}^{FF} & \bar{Y}_{21_{w_m}}^{TF} + \bar{Y}_{67_{w_m}}^{FT} & \bar{Y}_{23_{w_m}}^{TF} & -\bar{Y}_{22_{w_m}}^{TT} & \bar{Y}_{22_{w_m}}^{TT} - \bar{Y}_{66_{w_m}}^{FF} \\
-\bar{Y}_{22_{w_f}}^{FF} & -\bar{Y}_{22_{w_f}}^{FF} & \bar{Y}_{21_{w_m}}^{FF} & \bar{Y}_{23_{w_m}}^{FF} & 0 & 0 \\
-\bar{Y}_{22_{v_f}}^{FF} & \bar{Y}_{22_{v_f}}^{FF} + \bar{Y}_{66_{v_f}}^{FF} & \bar{Y}_{21_{v_m}}^{FF} + \bar{Y}_{67_{v_m}}^{FT} & \bar{Y}_{23_{v_m}}^{FF} & 0 & -\bar{Y}_{66_{v_m}}^{FF} \\
-\bar{Y}_{32_{w_f}}^{FF} + \bar{Y}_{45_{w_f}}^{TF} & -\bar{Y}_{32_{w_f}}^{FF} & \bar{Y}_{31_{w_m}}^{FF} & \bar{Y}_{33_{w_m}}^{FF} + \bar{Y}_{44_{w_m}}^{TT} & -\bar{Y}_{32_{w_m}}^{FT} - \bar{Y}_{45_{w_m}}^{TF} & \bar{Y}_{32_{w_m}}^{FT} \\
-\bar{Y}_{32_{w_f}}^{TF} + \bar{Y}_{45_{w_f}}^{FF} & -\bar{Y}_{32_{w_f}}^{FF} & 0 & 0 & \bar{Y}_{45_{w_m}}^{FF} & 0 \\
-\bar{Y}_{32_{v_f}}^{FF} + \bar{Y}_{45_{v_f}}^{FF} & -\bar{Y}_{32_{v_f}}^{FF} & \bar{Y}_{31_{v_m}}^{FF} & \bar{Y}_{33_{v_m}}^{FF} & -\bar{Y}_{32_{v_m}}^{FT} - \bar{Y}_{45_{v_m}}^{FF} & \bar{Y}_{32_{w_m}}^{FF}
\end{bmatrix}$$

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} \bar{T}_{x1} \\ \bar{T}_{x3} \\ \bar{T}_{x5} \\ \bar{T}_{x6} \\ \bar{F}_{z1} \\ \bar{F}_{z3} \\ \bar{F}_{z5} \\ \bar{F}_{z6} \\ \bar{M}_{y1} \\ \bar{M}_{y3} \\ \bar{M}_{y5} \\ \bar{M}_{y6} \end{Bmatrix}$$

$$\{F\} = -F_a \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{Y}1x0_{w_f}^{FF} \\ \bar{Y}1x0_{v_f}^{FF} \\ \bar{Y}2x0_{w_f}^{TF} \\ \bar{Y}2x0_{w_f}^{FF} \\ \bar{Y}2x0_{v_f}^{FF} \\ \bar{Y}2x0_{w_f}^{TF} \\ \bar{Y}2x0_{w_f}^{FF} \\ \bar{Y}2x0_{v_f}^{FF} \\ \bar{Y}3x0_{w_f}^{TF} \\ \bar{Y}3x0_{w_f}^{FF} \\ \bar{Y}3x0_{v_f}^{FF} \end{Bmatrix}$$

A força externa unitária é aplicada na posição  $x_0 = 1,0$  m, contados a partir da origem da viga 1. A resposta foi obtida em termos da magnitude do deslocamento transversal, em dB, para a posição  $x = 0,7$  m.

Na determinação numérica da resposta utilizou-se o mesmo procedimento de cálculo da mobilidade para força transversal. O elemento usado foi o BEAM 4, a malha continha 960 elementos, que para este tipo de viga proporciona 40 elementos por comprimento de onda, na frequência de 1250 Hz. A grelha foi considerada simplesmente apoiada (rotulada) em todos os pontos de união (deslocamento nulo nas direções x e y), e com deslocamento livre na direção z.

O tempo computacional necessário para o cálculo da resposta foi de 3754 segundos para o método numérico e 3745 segundos para o analítico

A Figura 4.8 apresenta os resultados do cálculo da resposta, pelos dois métodos. As vigas utilizadas têm as características:

$$E = 2,1 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

$$\rho = 8000 \text{ kg / m}^3$$

$$\eta = 0,01$$

$$\text{todas as vigas com } b = h = 0,05 \text{ m}$$

$$L1 = L3 = L5 = L6 = 1,5 \text{ m}$$

$$L2 = L4 = L7 = 2,0 \text{ m}$$

Nota-se, pela Figura 4.8, uma boa concordância entre os dois métodos, principalmente nas baixas frequências. Para as altas frequências a comparação acusa diferenças máximas da ordem de 2 dB. De uma forma geral pode-se afirmar que a concordância é bastante boa

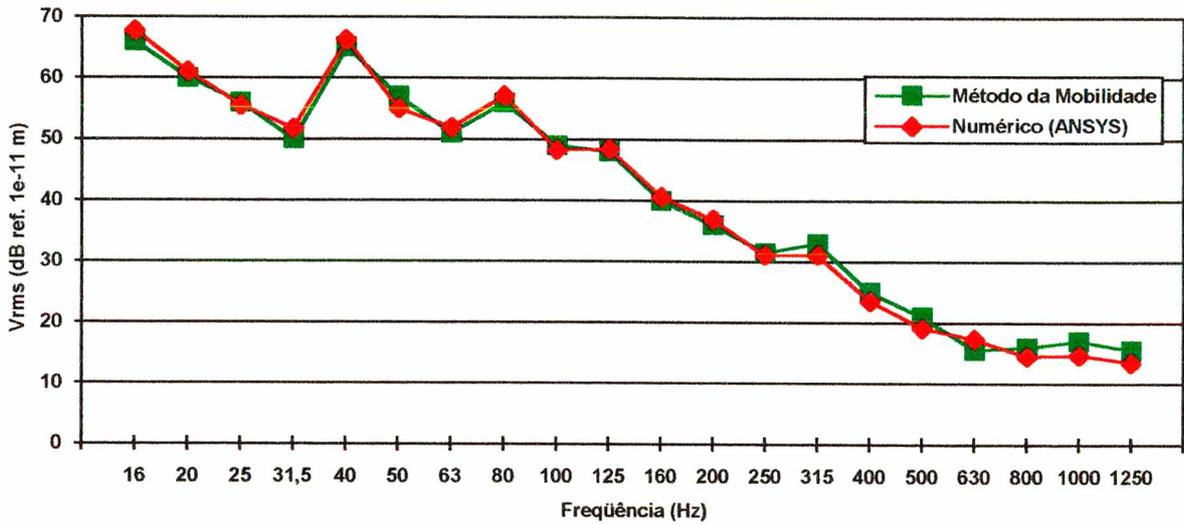


Figura 4.8: Comparação do deslocamento transversal, métodos analítico e numérico, grelha.

#### 4.4 ANÁLISE PARAMÉTRICA DO FLUXO DE POTÊNCIA

Uma análise de alguns parâmetros foi realizada, utilizando o método da mobilidade e tendo como objeto de estudo a estrutura em forma de quadrado apresentada no item anterior, ou seja, vigas com as características abaixo:

$$E = 2,1 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

$$\rho = 8000 \text{ kg / m}^3$$

$$\eta = 0,01$$

$$b1 = h1 = b2 = h2 = b3 = h3 = b4 = h4 = 0,05 \text{ m}$$

$$L1 = L4 = 1,5 \text{ m}; \quad L2 = L3 = 2,0 \text{ m}$$

Foi analisado o comportamento do fluxo de potência da viga 1 para a viga 3 através da união, quando são alteradas as características da seção transversal e o amortecimento. A excitação continua sendo através de uma força de magnitude unitária, aplicada na viga 1, ponto  $x_0 = 1,0 \text{ m}$ , contado a partir da origem da viga. Os fluxos são calculados pelas Equações 3.2.13 a 3.2.15, sendo os esforços e os deslocamentos obtidos através do método da mobilidade.

Numa primeira análise o amortecimento foi alterado. O amortecimento das vigas 1 e 2 foi aumentado de 0,01 para 0,05, mantendo-se os valores das demais vigas (3 e 4, em 0,01). Em seguida foi mantido o amortecimento das vigas 1 e 2 em 0,01 e foi aumentado o das vigas 3 e 4 para 0,05. Após isto, diminui-se o amortecimento das quatro vigas de 0,01 para 0,005.

As Figuras 4.9, 4.10 e 4.11 mostram o comportamento do fluxo de potência com as alterações de amortecimento, para os acoplamentos flexão-torção, torção-flexão e flexão-flexão, respectivamente.

Nota-se através das figuras que, para todos os acoplamentos, a potência transferida de 1 para 3 diminui com o aumento do amortecimento, principalmente nas médias e altas frequências. Isto era esperado, pois com o aumento do amortecimento diminui-se a amplitude dos deslocamentos nas ressonâncias, responsáveis pela transferência de energia. Com a diminuição do amortecimento acontece o contrário, ou seja, a potência transferida de 1 para 3 aumenta, já que a amplitude nas ressonâncias aumenta.

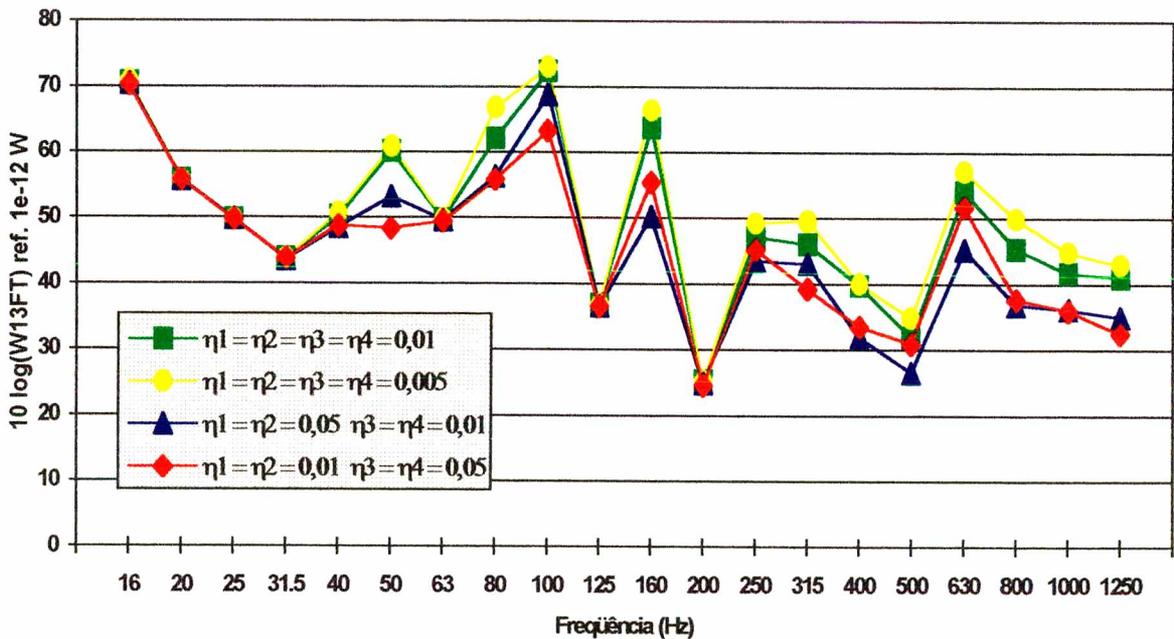


Figura 4.9: Fluxo de potência para diversos  $\eta$ , acoplamento flexão-torção.

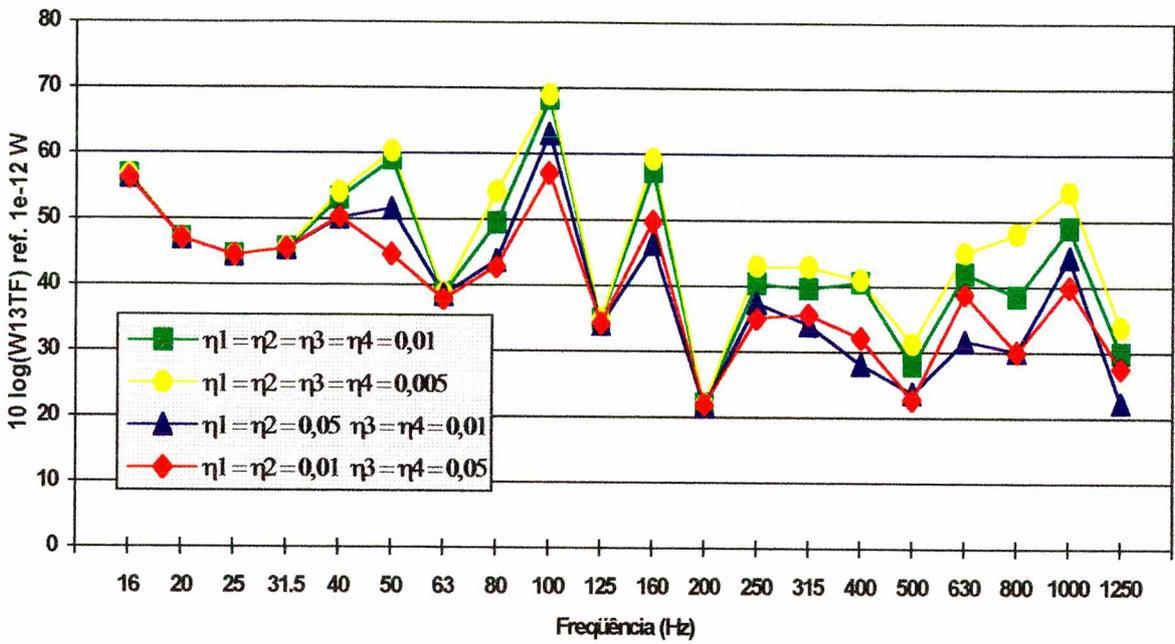


Figura 4.10: Fluxo de potência para diversos  $\eta$ , acoplamento torção-flexão.

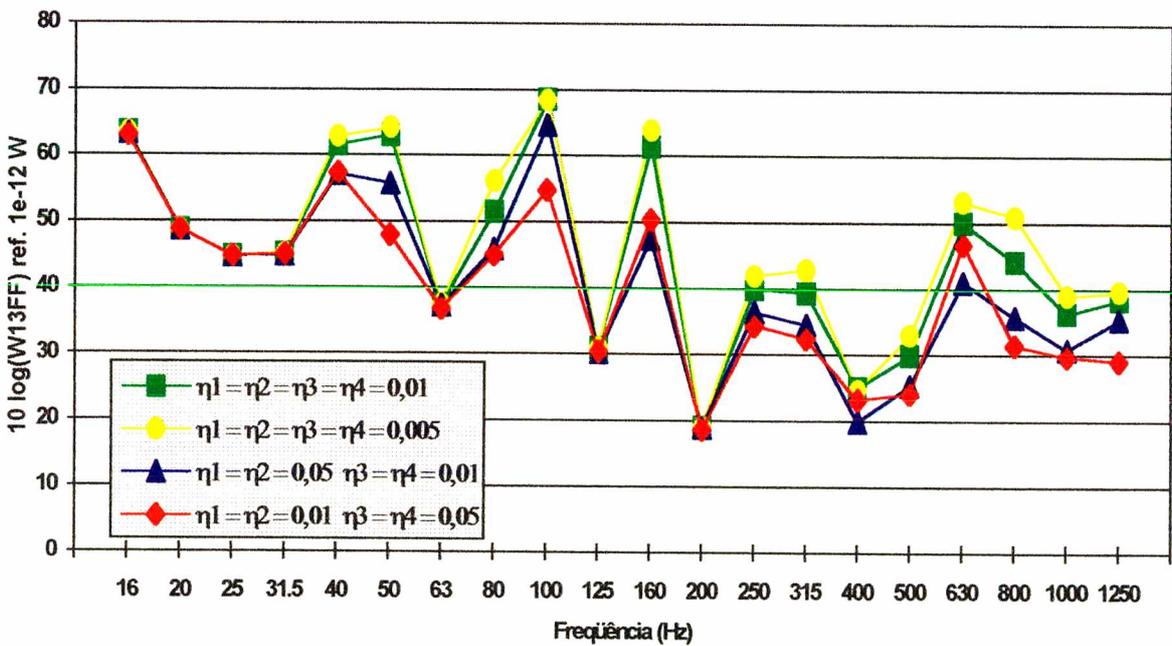


Figura 4.11: Fluxo de potência para diversos  $\eta$ , acoplamento flexão-flexão.

Numa segunda análise, foram variadas as dimensões da seção transversal das vigas 3 e 4. A área da seção destas vigas assumiu valores  $0,000625 \text{ m}^2$  e  $0,01 \text{ m}^2$ , mantendo-se a área das vigas 1 e 2 em  $0,0025 \text{ m}^2$ .

As Figuras 4.12, 4.13 e 4.14 mostram o comportamento do fluxo de potência com as alterações de área, para os acoplamentos flexão-torção, torção-flexão e flexão-flexão, respectivamente.

Para o acoplamento flexão-torção a diminuição da área da viga receptora faz com que a energia transferida de 1 para 3 também diminua, principalmente nas altas frequências. Já o aumento da área da viga receptora faz com que a energia transferida de 1 para 3 também aumente. Isto é mais facilmente observado nas altas frequências.

Para o acoplamento torção-flexão a diminuição da área da viga receptora faz com que a energia transferida aumente, principalmente nas baixas e altas frequências. Já o aumento da área da seção transversal causa uma diminuição da energia transferida.

Para o acoplamento flexão-flexão, a diminuição da área da viga receptora faz com que a energia transferida também diminua, principalmente nas médias e altas frequências. O aumento da área faz com que a energia transferida também aumente.

A conclusões sobre o efeito do aumento da seção transversal das vigas excitadoras e receptoras sobre o fluxo de potência não são tão facilmente observadas, pois em nenhum caso foi observada uma tendência nítida para todo o espectro. Isto se deva, talvez, devido à análise estar sendo feita numa faixa relativa de baixas frequências, onde as coincidências entre as ressonâncias de cada viga influenciam muito o espectro de fluxo de potência.

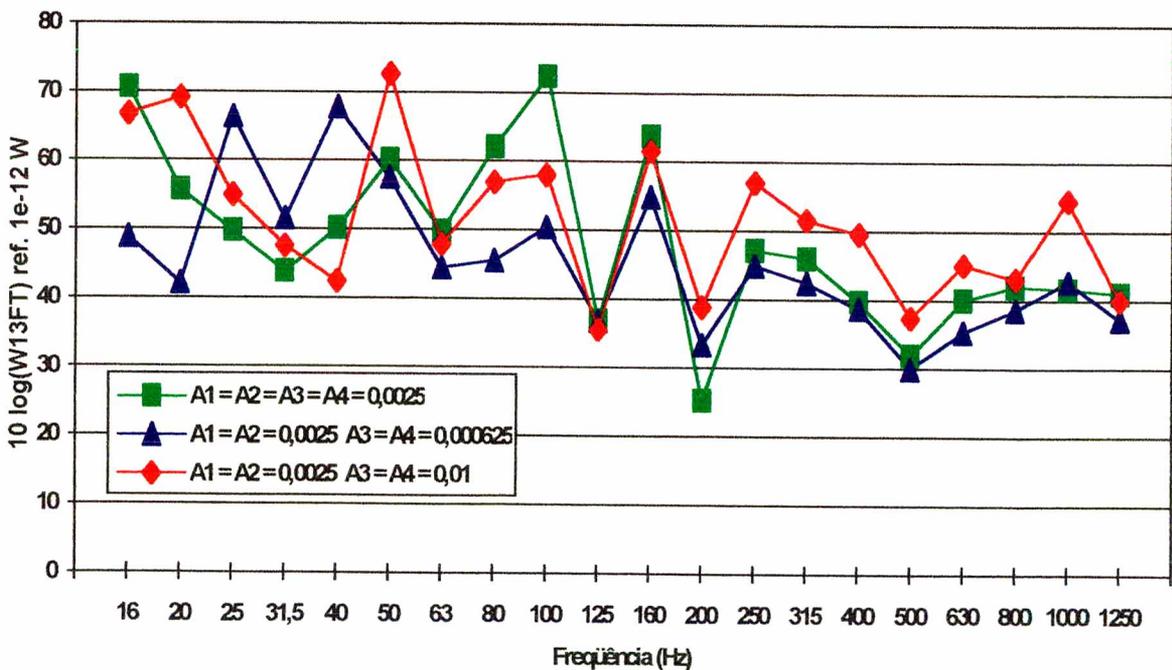


Figura 4.12: Fluxo de potência para diversas áreas, acoplamento flexão-torção.

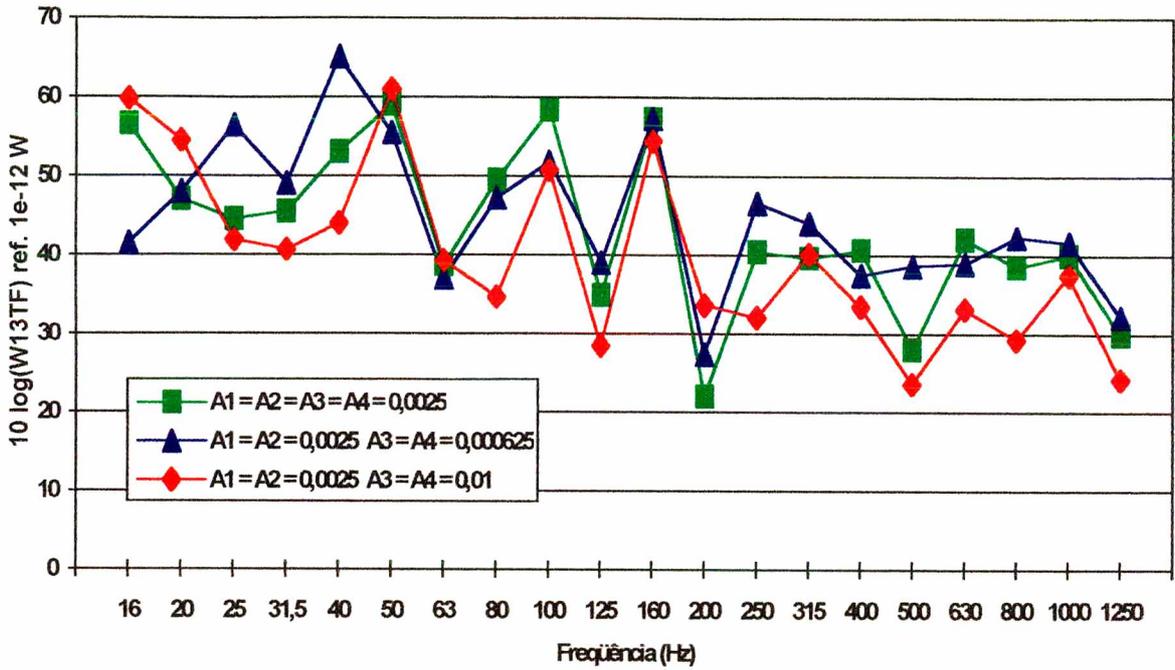


Figura 4.13: Fluxo de potência para diversas áreas, acoplamento torção-flexão.

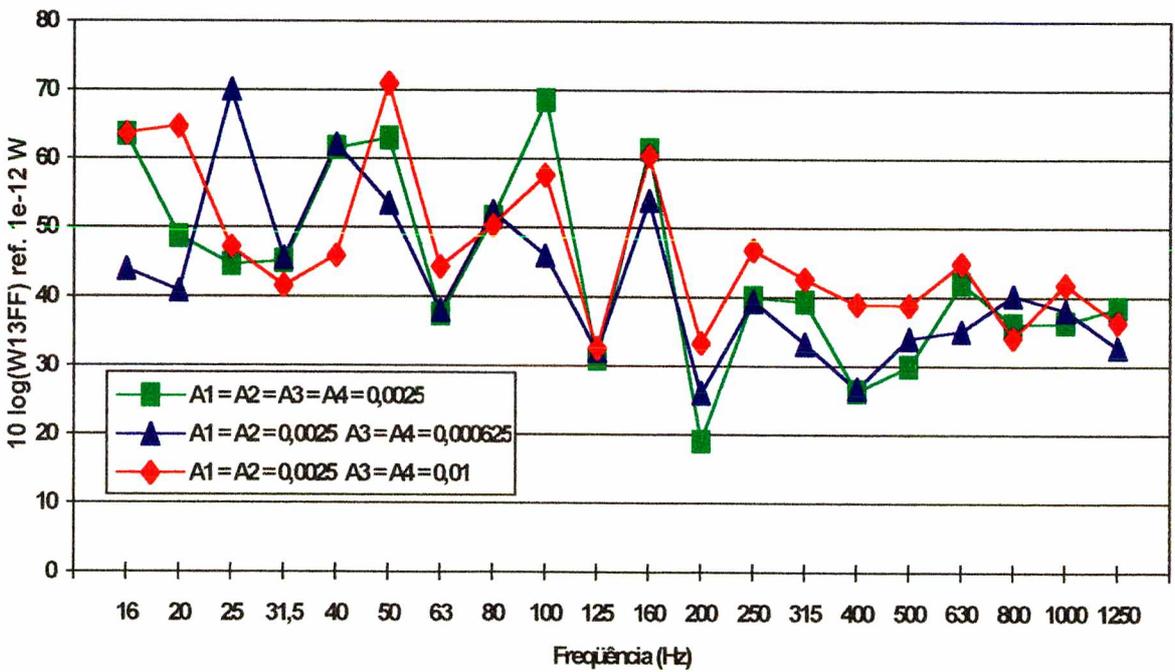


Figura 4.14: Fluxo de potência para diversas áreas, acoplamento flexão-flexão.

## **CAPÍTULO 5**

### **CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

Ao final deste trabalho foram extraídas conclusões e, a partir delas, são apresentadas sugestões de temas para trabalhos futuros nesta área, as quais serão resumidas a seguir:

As ondas torsionais devem ser consideradas nas análises que objetivem o controle de ruído, pois o acoplamento tipo flexão-torção pode ser mais eficiente que o flexão-flexão, na transmissão de energia vibratória através de uniões de vigas.

O uso das ondas longitudinais nas análises somente é justificado em vigas de grandes comprimentos, da ordem de cinco metros ou mais, e nas médias e altas frequências.

A consideração do cisalhamento na equação de onda de flexão faz com que o cálculo da potência transferida resulte em valores maiores, para qualquer dos três tipos de acoplamentos analisados. O cisalhamento aumenta a magnitude dos deslocamentos, já que o número de modos, dentro de uma mesma faixa de frequência, também aumenta. As potências transferidas têm maiores valores pois a transferência de energia se dá mais facilmente nas ressonâncias, e estas são de número maior ao se considerar o cisalhamento.

O método da mobilidade mostrou-se ser de fácil aplicação para estruturas compostas por vigas, pois o cálculo analítico das mobilidades é simples de ser realizado.

Em casos onde a complexidade geométrica inviabiliza modelagens analíticas dos componentes estruturais, as mobilidades podem ser obtidas por outros métodos, como elementos finitos, por exemplo, observando a faixa de frequências de interesse.

O método mostrou-se ser também rápido e preciso, que possibilita o seu uso como ferramenta confiável de cálculo. Ele permite criar um banco de dados de mobilidade, e quando alguma alteração estrutural nas vigas fizer-se necessária, apenas as mobilidades referentes a esta viga devem ser recalculadas.

A principal vantagem do método está no cálculo da resposta em frequências discretas, para uma ampla faixa de frequências de interesse, incluindo aqui as altas frequências, o que tem-se mostrado inviável por outros métodos.

O aumento do amortecimento, tanto da viga excitadora, quanto o da receptora da energia, diminui a transferência de energia, para todos os tipos de acoplamento. Já a diminuição do amortecimento de todas as vigas faz com que a energia transferida aumente.

Os efeitos do aumento da seção transversal das vigas excitadoras e das receptoras não são tão facilmente observados como no caso de variação do amortecimento. De uma forma geral, não foi observada uma tendência nítida da influência da variação da seção transversal, como demonstrada pelos outros parâmetros. Talvez devido à análise estar sendo feita numa faixa relativa de baixas frequências, onde as coincidências entre as frequências de ressonância de cada viga influenciam muito no espectro de potência transferida.

Como sugestões para trabalhos futuros, pode-se citar a extensão da aplicação do método para outros tipos de estruturas:

O estudo do comportamento do campo vibratório de placas reforçadas por vigas, para a subsequente análise de outros parâmetros, como, eficiência de radiação e impedâncias.

Utilizar outros métodos de análise de fluxo de potência e resposta dinâmica de estruturas, tais como intensidade estrutural.

Recomenda-se ainda usar esta metodologia para determinar os parâmetros básicos de Análise Estatística Energética, tais como fatores de acoplamento e densidades modais, para placas reforçadas por vigas.

O uso de uma interface gráfica, tal como o MicroStation™, poderá permitir a implementação automática do método para utilizá-lo como um software rápido, e preciso, de análise dinâmica e estrutural de estruturas tipo grelhas, existentes em plataformas *offshore*.

A realização de uma análise experimental, para se ter mais um método confiável de comparação de resultados.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- ATKINS, K. G.; HUNTER, S. C., “The propagation of longitudinal elastic waves around right-angled corners in rods of square cross section”, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, vol. XXVIII, p. 245-260, 1975.
- BAARS, E., “Fluxo de potência vibratória em componentes estruturais tipo barra e vigas”, Florianópolis, 1996. Dissertação (Mestrado em Vibrações e Acústica) - Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina.
- CHEN, G.; SOONG, T. T., “Power flow and energy balance between nonconservately coupled oscillators”, Transactions of the ASME - Journal of Vibration and Acoustics, vol. 113, p. 448-454, 1991.
- CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J., Dynamics of Structures, McGraw Hill International Editions, Singapore, 1975.
- COWPER, G. R., “The shear coefficient in Timoshenko’s beam theory”, Journal of applied Mechanics, p. 335-340, 1966.
- CRAIK, R. J. M., “The prediction of sound transmission through buildings using Statistical Energy Analysis”, Journal of Sound and Vibration, vol. 82(4), p. 505-516, 1982.
- CREMER, L.; HECKL, M.; UNGAR, E. E., Structure-Borne Sound, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- CUSCHIERI, J. M., “Power flow as a complement to Statistical Energy Analysis and Finite Element Analysis”, ASME Publication NCA, vol. 3, p. 55-61, 1987.
- CUSCHIERI, J. M., “Vibration transmission through periodic structures using a mobility power flow approach”, Journal of Sound and Vibration, vol. 143(1), p. 65-74, 1990 a.

- CUSCHIERI, J. M., "Structural power flow analysis using a mobility approach of an L shaped plate", Journal of the Acoustical Society of America, vol. 87(3), p. 1159-1165, 1990 b.
- CUSCHIERI, J. M., "Parametric analysis of the power flow on a L shaped plate using a mobility power flow approach", Journal of the Acoustical Society of America, vol. 91(5), p. 2686-2695, 1992.
- DAVIES, H. G., "Power flow between two coupled beams", Journal of the Acoustical Society of America, vol. 51(1), p. 393-401, 1971.
- DAVIES, H. G.; WAHAB, M. A., "Ensemble averages of power flow in randomly excited beams", Journal of Sound and Vibration, vol. 77(3), p. 311-321, 1981.
- DESMOND, T. P., "Theoretical and experimental investigations of stress waves at a junction of three bars", Transactions of the ASME - Journal of Applied Mechanics, vol. 48, p. 148-154, 1981.
- DOYLE, J. F.; KAMLE, S., "An experimental study of the reflection and transmission of flexural waves at an arbitrary T-joint", Transactions of the ASME - Journal of Applied Mechanics, vol. 54, p. 136-140, 1987.
- FLÜGGE, W., Handbook of Engineering Mechanics, McGraw Hill Book Company, New York, 1962. Ver capítulo 61 de D. Young.
- GIBBS, B. M.; GILFORD, C. L. S., "The use of power flow methods for the assessment of sound transmission in buildings structures", Journal of Sound and Vibration, vol. 49(2), p. 267-286, 1976.
- GIBBS, B. M.; TATTERSALL, J. D., "Vibrational energy transmission and mode conversion at a corner-junction of a square section rods", Transactions of the ASME - Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reability in Design, vol. 109, p. 348-355, 1987.

- GOYDER, H. G. D.; WHITE, R. G., "Vibrational power flow from machines into built-up structures, part III: power flow through isolation systems", Journal of Sound and Vibration, vol. 68(1), p. 97-117, 1980 a.
- GOYDER, H. G. D.; WHITE, R. G., "Vibrational power flow from machines into built-up structures, part II: wave propagation and power flow in beam stiffened plates", Journal of Sound and Vibration, vol. 68(1), p. 77-96, 1980 b.
- GOYDER, H. G. D.; WHITE, R. G., "Vibrational power flow from machines into built-up structures, part I: introduction and approximate analyses of beam and plate-like foundations", Journal of Sound and Vibration, vol. 68(1), p. 59-75, 1980 c.
- GUO, Y. P., "Flexural wave transmission through angled structural joints", Journal of the Acoustical Society of America, vol. 97(1), p. 289-297, 1995.
- KIHLMAN, T., "Sound transmission in buildings structures of concrete", Journal of Sound and Vibration, vol. 11(4), p. 435-445, 1970.
- LEUNG, R. C. N.; PINNINGTON, R. J., "Wave propagation through right-angled joints with compliance flexural incident wave" Journal of Sound and Vibration, vol. 142(1), p. 31-46, 1990.
- LEUNG, R. C. N.; PINNINGTON, R. J., "Wave propagation through right-angled joints with compliance longitudinal incident wave" Journal of Sound and Vibration, vol. 153(2), p. 223-237, 1992.
- LEVINSON, M.; COOKE, D. W., "On the two frequency spectra of Timoshenko beams", Journal of Sound and Vibration, vol. 84(3), p. 319-326, 1982.
- LYON, R. H.; SCHARTON, T. D., "Power flow between linearly coupled oscillators", Journal of the Acoustical Society of America, vol. 35, p. 640-651, 1962.

- LYON, H. R., Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems: Theory and Applications, The MIT Press, Cambridge MA, 1975.
- MAIDANIK, G., "Some elements in Statistical Energy Analysis", Journal of Sound and Vibration, vol. 52(2), p. 171-191, 1977.
- MILLER, D. W. ; Von FLOTOV, A. H., "A traveling wave approach to power flow in structural networks", Journal of Sound and Vibration, vol. 128(1), p. 125-162, 1986.
- NEWLAND, D. E., "Power flow between a class of coupled oscillators", Journal of the Acoustical Society of America, vol. 43(3), p. 553-559, 1966 a.
- NEWLAND, D. E., "Calculation of power flow between coupled oscillators", Journal of Sound and Vibration, vol. 3(3), p. 262-276, 1966 b.
- ODEN, J. T., Mechanics of Elastic Structures, McGraw Hill Book Company, New York, 1967.
- PINNINGTON, R. J.; WHITE, R. G., "Power flow through machine isolators to resonant and non-resonant beams" Journal of Sound and Vibration, vol. 75(2), p. 179-197, 1981.
- PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P., Numerical Recipes in C - The Art of Scientific Computing, 2. ed. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- RAO, S. S., Mechanical Vibrations, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1986.
- REYNOLDS, D. D., Engineering Principles of Acoustics - Noise and Vibration Control, Allyn and Bacon, INC, Boston, 1981.
- ROSENHOUSE, G., "Acoustic wave propagation in bent thin-walled wave guides", Journal of Sound and Vibration, vol. 67(4), p. 469-486, 1979.

ROSENHOUSE, G.; ERTEL, H.; MECHEL, F. P., "Theoretical and experimental investigations of structureborne sound transmission through a T joint in a finite system", Journal of the Acoustical Society of America, vol. 70(2), p. 492-499, 1981.

SABLIK, M. J.; BEISSNER, R. E.; SILVUS, H. S., MILLER, M. L., "Statistical Energy Analysis, structural resonances, and beams networks", Journal of the Acoustical Society of America, vol. 77(3), p. 1038-1045, 1985.

SABLIK, J. M., "Coupling loss factors at L joint revisited", Journal of the Acoustical Society of America, vol. 72(4), p. 1285-1291, 1982.

SUN, J. C.; LALOR, N.; RICHARDS, E. J., "Power flow and energy balance of non-conservatively coupled structures, I: theory", Journal of Sound and Vibration, vol. 112(2), p. 321-330, 1987.

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, S. N., Teoria da Elasticidade, Guanabara Dois, Rio de Janeiro RJ, 1980.

# APÊNDICE A

## MOBILIDADES VIGAS EM L, FORÇA NO PLANO

No cálculo das mobilidades, todas as equações de deslocamentos, momentos e forças, de flexão são as apresentadas no capítulo 2, item 2.2. Para todos os cálculos de mobilidade, as vigas têm sua origem ( $x = y = 0$ ) na união das mesmas.

### MOBILIDADES $\bar{Y}_{11}^{FF}_{w_m}$ e $\bar{Y}_{21}^{FF}_{w_m}$

Quando um momento fletor atua na extremidade livre da viga 1 (ponto 1), deslocamentos angulares nos pontos 1 e 2 são induzidos, como pode ser visto na figura A.1.

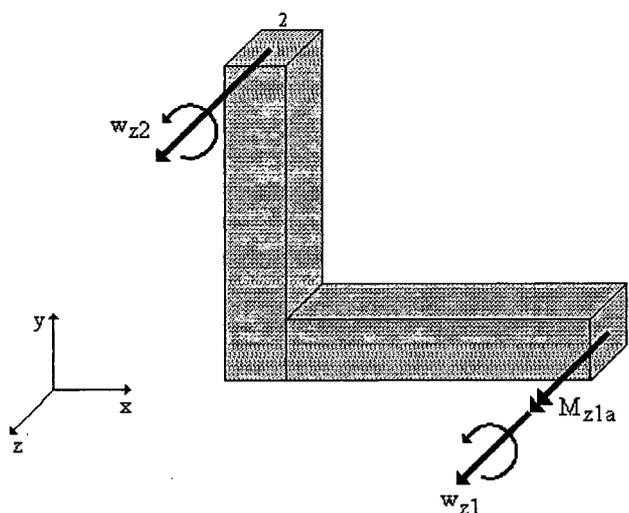


Figura A.1: Determinação de  $\bar{Y}_{11}^{FF}_{w_m}$  e  $\bar{Y}_{21}^{FF}_{w_m}$ .

Tendo este momento como excitação e os dois deslocamentos angulares como resposta, pode-se calcular uma mobilidade pontual  $\bar{Y}_{11}^{FF}_{w_m}$  e uma de transferência  $\bar{Y}_{21}^{FF}_{w_m}$ . Como a onda de flexão tem quatro constantes, precisa-se de oito condições de contorno para a determinação das mobilidades. Estas condições de contorno são (Cuschieri, 1987):

$$v_{y1}(0) = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$v_{y2}(0) = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$w_{z1}(0) = w_{z2}(0) \quad (\text{A.3})$$

$$M_{z1}(0) = M_{z2}(0) \quad (\text{A.4})$$

$$M_{z1}(L1) = -M_{z1a} \quad (\text{A.5})$$

$$F_{y1}(L1) = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$M_{z2}(L2) = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$F_{y2}(L2) = 0 \quad (\text{A.8})$$

Com as constantes determinadas, podem-se calcular as mobilidades

$$\bar{Y}_{11}^{\text{FF}}_{w\_m}(f) = \frac{2i\pi f}{M_{z1a}} w_{z1}(L1) \quad (\text{A.9})$$

$$\bar{Y}_{21}^{\text{FF}}_{w\_m}(f) = \frac{2i\pi f}{M_{z1a}} w_{z2}(L2) \quad (\text{A.10})$$

### MOBILIDADES $\bar{Y}_{22}^{\text{FF}}_{w\_m}$ e $\bar{Y}_{12}^{\text{FF}}_{w\_m}$

Quando um momento fletor atua na extremidade livre da viga 2 (ponto 2), deslocamentos angulares nos pontos 1 e são induzidos, como pode ser visto na figura A.2.

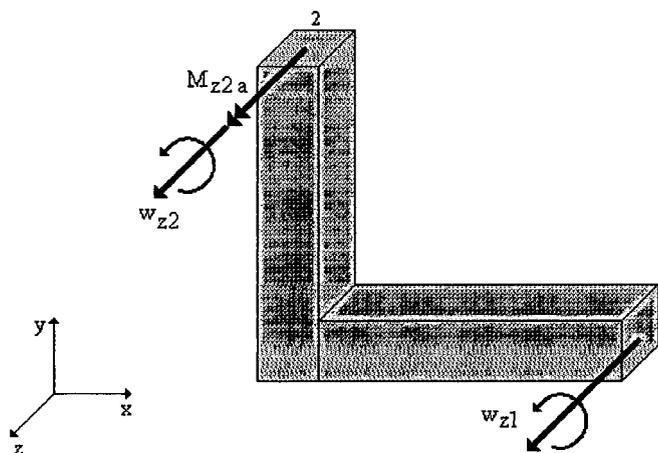


Figura A.2: Determinação de  $\bar{Y}_{22}^{\text{FF}}_{w\_m}$  e  $\bar{Y}_{12}^{\text{FF}}_{w\_m}$ .

Tendo este momento como excitação e os dois deslocamentos angulares como resposta, pode-se calcular uma mobilidade pontual  $\bar{Y}_{22}^{FF}_{w_m}$  e uma de transferência  $\bar{Y}_{12}^{FF}_{w_m}$ . Como no item anterior, a onda de flexão tem quatro constantes e precisa-se de oito condições de contorno para a determinação das mobilidades. Estas condições de contorno são:

$$v_{y1}(0) = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$v_{y2}(0) = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$w_{z1}(0) = w_{z2}(0) \quad (\text{A.13})$$

$$M_{z1}(0) = M_{z2}(0) \quad (\text{A.14})$$

$$M_{z1}(L1) = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$F_{y1}(L1) = 0 \quad (\text{A.16})$$

$$M_{z2}(L2) = -M_{z2a} \quad (\text{A.17})$$

$$F_{y2}(L2) = 0 \quad (\text{A.18})$$

Com as constantes determinadas, podem-se calcular as mobilidades:

$$\bar{Y}_{22}^{FF}_{w_m}(f) = \frac{2i\pi f}{M_{z2a}} \bar{w}_{z2}(L2) \quad (\text{A.19})$$

$$\bar{Y}_{12}^{FF}_{w_m}(f) = \frac{2i\pi f}{M_{z2a}} \bar{w}_{z1}(L1) \quad (\text{A.20})$$

### **MOBILIDADES $\bar{Y}_{1x_0}^{FF}_{w_f}$ e $\bar{Y}_{2x_0}^{FF}_{w_f}$**

As mobilidades referentes à força  $F_a$  são obtidas aplicando-se uma força unitária no ponto  $x_0$ , sendo  $0 < x_0 < L1$ , resolvendo-se o sistema. Para que a condição de continuidade seja mantida no ponto  $x_0$ , a equação de deslocamento transversal na viga 1 é separada em duas,  $v_{z1_1}(x)$  e  $v_{z1_2}(x)$ , onde  $v_{z1_1}(x)$  é válida no intervalo  $0 < x < x_0$  e  $v_{z1_2}(x)$  é válida no intervalo  $x_0 < x < L1$ .

$$0 \leq x \leq x_0 \quad v_{y1a}(x) = A1 \cosh(k_{f1}x) + B1 \sinh(k_{f1}x) + C1 \cos(k_{f1}x) + D1 \sin(k_{f1}x) \quad (\text{A.21})$$

$$x_0 \leq x \leq L1 \quad v_{y1b}(x) = E1 \cosh(k_{f1}x) + F1 \sinh(k_{f1}x) + G1 \cos(k_{f1}x) + H1 \sin(k_{f1}x) \quad (\text{A.22})$$

A força externa  $F_a$  induz deslocamentos angulares nos pontos 1 e 2, como pode ser visto na figura A.3.

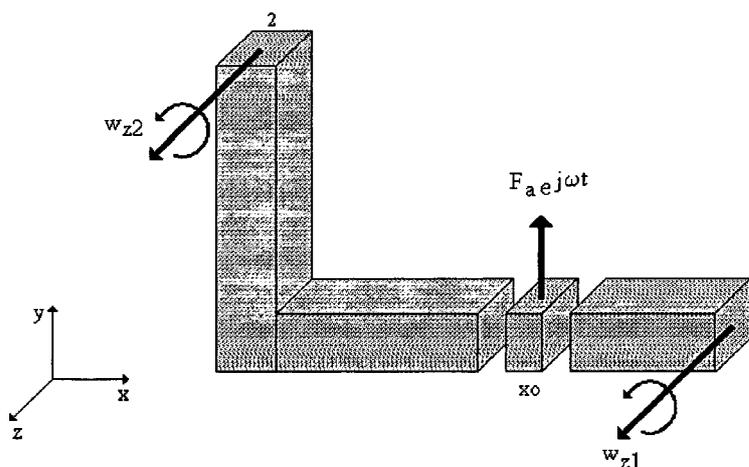


Figura A3: Determinação de  $Y1_{x_0}^{FF}$  e  $Y2_{x_0}^{FF}$ .

Tendo a força como excitação e os dois deslocamentos angulares como resposta, pode-se calcular as mobilidades de transferência  $\bar{Y}1_{x_0}^{FF}$  e  $\bar{Y}2_{x_0}^{FF}$ . Como a onda de flexão na viga 1 é dividida em duas, precisa-se de doze condições de contorno para a determinação das mobilidades. Estas condições de contorno são (Cuschieri, 1987):

$$v_{y1\_1}(0) = 0 \quad (\text{A.23})$$

$$v_{y2}(0) = 0 \quad (\text{A.24})$$

$$w_{z1\_1}(0) = w_{z2}(0) \quad (\text{A.25})$$

$$M_{z1\_1}(0) = M_{z2}(0) \quad (\text{A.26})$$

$$v_{y1\_1}(x_0) = v_{y1\_2}(x_0) \quad (\text{A.27})$$

$$w_{z1\_1}(x_0) = w_{z1\_2}(x_0) \quad (\text{A.28})$$

$$M_{z1\_1}(x_0) = M_{z1\_2}(x_0) \quad (\text{A.29})$$

$$F_{y1\_1}(\mathbf{x0}) = F_{y1\_2}(\mathbf{x0}) - F_a \quad (\text{A.30})$$

$$M_{z1\_2}(L1) = 0 \quad (\text{A.31})$$

$$F_{y1\_2}(L1) = 0 \quad (\text{A.32})$$

$$M_{z2}(L2) = 0 \quad (\text{A.33})$$

$$F_{y2}(L2) = 0 \quad (\text{A.34})$$

Com as constantes determinadas, podem-se calcular as mobilidades:

$$\bar{Y}_{1\mathbf{x0}}^{\text{FF}}(f) = \frac{2i\pi f}{F_a} \bar{w}_{z1\_2}(L1) \quad (\text{A.35})$$

$$\bar{Y}_{2\mathbf{x0}}^{\text{FF}}(f) = \frac{2i\pi f}{F_a} \bar{w}_{z2}(L2) \quad (\text{A.36})$$

## APÊNDICE B

### MOBILIDADES VIGAS EM L, FORÇA TRANSVERSAL

No cálculo das mobilidades, todas as equações de velocidades, momentos e forças, tanto de flexão e/ou de torção são as apresentadas no capítulo 2, itens 2.2 e 2.3. Para todos os cálculos de mobilidade, as vigas têm sua origem ( $x = y = 0$ ) na união das mesmas.

**MOBILIDADES**  $\bar{Y}_{11}^{FF}_{w_m}$ ,  $\bar{Y}_{11}^{FF}_{v_m}$ ,  $\bar{Y}_{21}^{FF}_{w_m}$ ,  $\bar{Y}_{21}^{TF}_{w_m}$ , e  $\bar{Y}_{21}^{FF}_{v_m}$

Quando um momento fletor unitário  $M_{y1a}$  atua na extremidade livre da viga 1 (ponto 1), as seguintes velocidades nas vigas 1 e 2 são induzidas: ponto 1 - angular (de flexão) e transversal (de flexão); ponto 2 - angular (de flexão), angular (de torção) e transversal (de flexão). Todas estas velocidades divididas pelo momento fletor dão origem às mobilidades,  $\bar{Y}_{11}^{FF}_{w_m}$ ,  $\bar{Y}_{11}^{FF}_{v_m}$ ,  $\bar{Y}_{21}^{FF}_{w_m}$ ,  $\bar{Y}_{21}^{TF}_{w_m}$ , e  $\bar{Y}_{21}^{FF}_{v_m}$ . A Figura B.1 ilustra o procedimento de cálculo destas mobilidades, ou seja, aplicar um momento no ponto 1, obter as velocidades angulares e transversais e dividi-las pelo momento fletor aplicado.

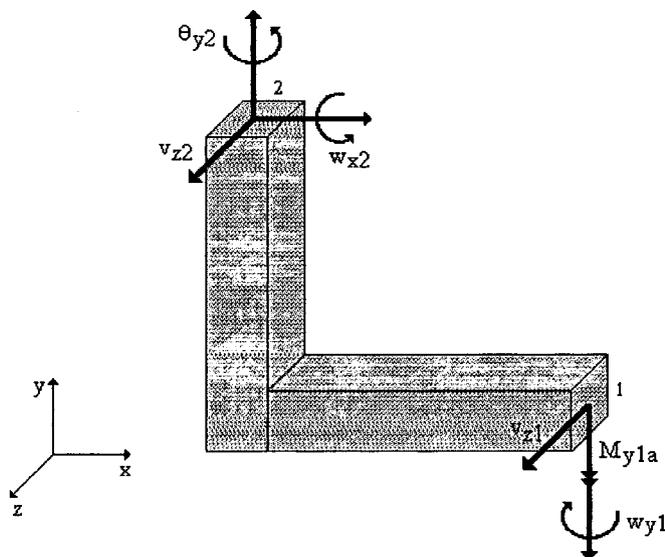


Figura B.1: Determinação de  $\bar{Y}_{11}^{FF}_{w_m}$ ,  $\bar{Y}_{11}^{FF}_{v_m}$ ,  $\bar{Y}_{21}^{FF}_{w_m}$ ,  $\bar{Y}_{21}^{TF}_{w_m}$ ; e  $\bar{Y}_{21}^{FF}_{v_m}$ .

Como a onda de flexão possui quatro constantes e a de torção, duas, precisa-se de doze condições de contorno para a determinação das mobilidades. Estas condições de contorno são:

$$v_{z1}(0) = v_{z2}(0) \quad (\text{B.1})$$

$$\theta_{x1}(0) = w_{x2}(0) \quad (\text{B.2})$$

$$w_{y1}(0) = \theta_{y2}(0) \quad (\text{B.3})$$

$$T_{x1}(0) = M_{x2}(0) \quad (\text{B.4})$$

$$M_{y1}(0) = T_{y2}(0) \quad (\text{B.5})$$

$$F_{z1}(0) = -F_{z2}(0) \quad (\text{B.6})$$

$$T_{x1}(L1) = 0 \quad (\text{B.7})$$

$$M_{y1}(L1) = -M_{y1a} \quad (\text{B.8})$$

$$F_{z1}(L1) = 0 \quad (\text{B.9})$$

$$T_{y2}(L2) = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$M_{x2}(L2) = 0 \quad (\text{B.11})$$

$$F_{z2}(L2) = 0 \quad (\text{B.12})$$

Com as constantes determinadas, podem-se calcular as mobilidades

$$\bar{Y}_{11}^{\text{FF}}_{w\_m}(f) = \frac{2i\pi f}{M_{y1a}} \bar{w}_{y1}(L1) \quad (\text{B.13})$$

$$\bar{Y}_{11}^{\text{FF}}_{v\_m}(f) = \frac{2i\pi f}{M_{y1a}} \bar{v}_{z1}(L1) \quad (\text{B.14})$$

$$\bar{Y}_{21}^{\text{FF}}_{w\_m}(f) = \frac{2i\pi f}{M_{y1a}} \bar{w}_{x2}(L2) \quad (\text{B.15})$$

$$\bar{Y}_{21}^{\text{TF}}_{w\_m}(f) = \frac{2i\pi f}{M_{y1a}} \bar{\theta}_{y2}(L2) \quad (\text{B.16})$$

$$\bar{Y}_{21}^{\text{FF}}_{v\_m}(f) = \frac{2i\pi f}{M_{y1a}} \bar{v}_{z2}(L2) \quad (\text{B.17})$$

### MOBILIDADES $\bar{Y}_{11}^{TT}$ , $\bar{Y}_{21}^{FT}$ e $\bar{Y}_{21}^{FT}$

Quando um momento torçor unitário  $T_{x1a}$  atua na extremidade livre da viga 1 (ponto 1), as seguintes velocidades nas vigas 1 e 2 são induzidas: ponto 1 - angular (de torção); ponto 2 - angular (de flexão) e transversal (de flexão). Todas estas velocidades divididas pelo momento torçor dão origem às mobilidades  $\bar{Y}_{11}^{TT}$ ,  $\bar{Y}_{21}^{FT}$  e  $\bar{Y}_{21}^{FT}$ . A Figura B.2 ilustra o procedimento de cálculo destas mobilidades, ou seja, aplicar um momento no ponto 1, obter as velocidades angulares e transversais e dividi-las pelo momento torçor aplicado.

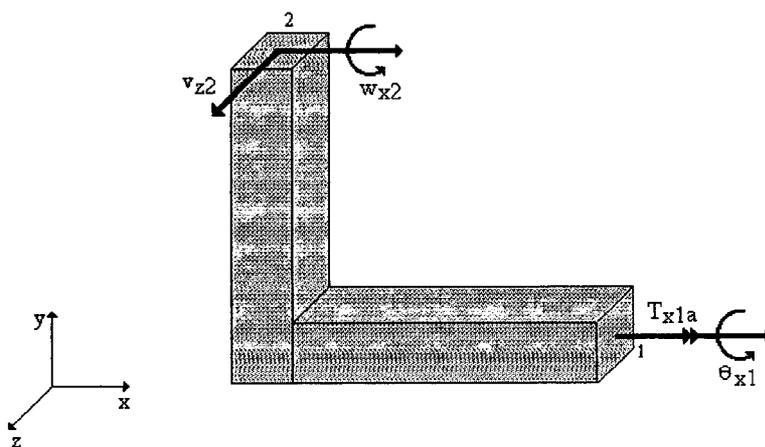


Figura B.2: Determinação de  $\bar{Y}_{11}^{TT}$ ,  $\bar{Y}_{21}^{FT}$  e  $\bar{Y}_{21}^{FT}$ .

Análogo ao primeiro caso, precisa-se de doze condições de contorno para determinação das mobilidades. Estas condições tem equações iguais à (B.1) até (B.12), com duas mudanças, pois a excitação mudou:

- a equação (B.7) agora é  $T_{x1}(L1) = -T_{x1a}$
- a equação (B.8) agora é  $M_{y1}(L1) = 0$ .

Com as constantes determinadas, podem-se calcular as mobilidades:

$$\bar{Y}_{11}^{TT}(f) = \frac{2i\pi f}{T_{x1a}} \theta_{x1}(L1) \quad (B.18)$$

$$\bar{Y}_{21_{w\_m}}^{FT}(f) = \frac{2i\pi f}{T_{x1a}} \bar{w}_{x2}(L2) \quad (B.19)$$

$$\bar{Y}_{21_{v\_m}}^{FT}(f) = \frac{2i\pi f}{T_{x1a}} \bar{v}_{z2}(L2) \quad (B.20)$$

### MOBILIDADES $\bar{Y}_{11_{w\_f}}^{FF}$ , $\bar{Y}_{11_{v\_f}}^{FF}$ , $\bar{Y}_{21_{w\_f}}^{FF}$ , $\bar{Y}_{21_{w\_f}}^{TF}$ e $\bar{Y}_{21_{v\_f}}^{FF}$

Quando uma força cortante unitária  $F_{z1a}$  atua na extremidade livre da viga 1 (ponto 1), as seguintes velocidades nas vigas 1 e 2 são induzidas: ponto 1 - angular e transversal (de flexão); ponto 2 - angular (de flexão e torção) e transversal (de flexão). Todas estas velocidades divididas pela força dão origem às mobilidades  $\bar{Y}_{11_{w\_f}}^{FF}$ ,  $\bar{Y}_{11_{v\_f}}^{FF}$ ,  $\bar{Y}_{21_{w\_f}}^{FF}$ ,  $\bar{Y}_{21_{w\_f}}^{TF}$  e  $\bar{Y}_{21_{v\_f}}^{FF}$ . A Figura B.3 ilustra o procedimento de cálculo destas mobilidades, ou seja, aplicar uma força no ponto 1, obter as velocidades angulares e transversais e dividi-las pelo força cortante aplicada.

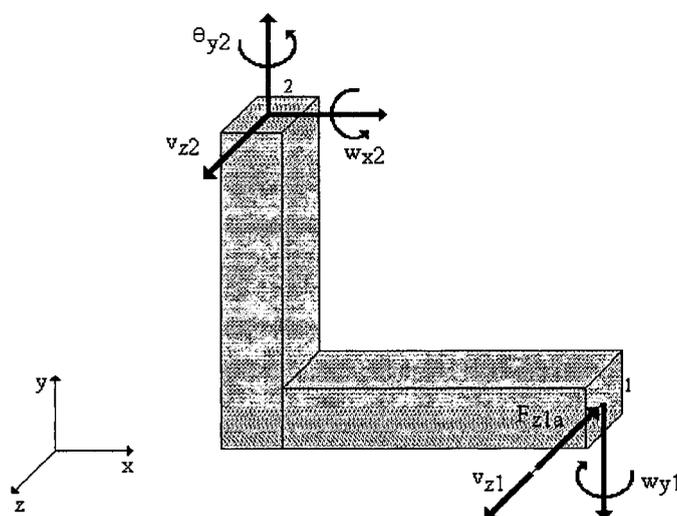


Figura B.3: Determinação de  $\bar{Y}_{11_{w\_f}}^{FF}$ ,  $\bar{Y}_{11_{v\_f}}^{FF}$ ,  $\bar{Y}_{21_{w\_f}}^{FF}$ ,  $\bar{Y}_{21_{w\_f}}^{TF}$  e  $\bar{Y}_{21_{v\_f}}^{FF}$ .

Análogo ao primeiro caso, precisa-se de doze condições de contorno para determinação das mobilidades. Estas condições tem equações iguais à (B.1) até (B.12), com duas mudanças, pois a excitação mudou:

- a equação (B.9) agora é  $F_{z1}(L1) = -F_{z1a}$
- a equação (B.8) agora é  $M_{y1}(L1) = 0$ .

Com as constantes determinadas, podem-se calcular as mobilidades:

$$\bar{Y}_{11}^{FF}_{w-f}(f) = \frac{2i\pi f}{F_{z1a}} \bar{w}_{y1}(L1) \quad (B.21)$$

$$\bar{Y}_{11}^{FF}_{v-f}(f) = \frac{2i\pi f}{F_{z1a}} \bar{v}_{z1}(L1) \quad (B.22)$$

$$\bar{Y}_{21}^{FF}_{w-f}(f) = \frac{2i\pi f}{F_{z1a}} \bar{w}_{x2}(L2) \quad (B.23)$$

$$\bar{Y}_{21}^{TF}_{w-f}(f) = \frac{2i\pi f}{F_{z1a}} \bar{\theta}_{y2}(L2) \quad (B.24)$$

$$\bar{Y}_{21}^{FF}_{v-f}(f) = \frac{2i\pi f}{F_{z1a}} \bar{v}_{z2}(L2) \quad (B.25)$$

**MOBILIDADES**  $\bar{Y}_{22}^{FF}_{w-m}$ ,  $\bar{Y}_{22}^{FF}_{v-m}$ ,  $\bar{Y}_{12}^{FF}_{w-m}$ ,  $\bar{Y}_{12}^{TF}_{w-m}$ , e  $\bar{Y}_{12}^{FF}_{v-m}$

Quando um momento fletor unitário  $M_{y2a}$  atua na extremidade livre da viga 2 (ponto 2), as seguintes velocidades nas vigas 1 e 2 são induzidas: ponto 2 - angular (de flexão) e transversal (de flexão); ponto 1 - angular (de flexão e torção) e transversal (de flexão). Todas estas velocidades divididas pelo momento fletor dão origem às mobilidades  $\bar{Y}_{22}^{FF}_{w-m}$ ,  $\bar{Y}_{22}^{FF}_{v-m}$ ,  $\bar{Y}_{12}^{FF}_{w-m}$ ,  $\bar{Y}_{12}^{TF}_{w-m}$ , e  $\bar{Y}_{12}^{FF}_{v-m}$ . A Figura B.4 ilustra o procedimento de cálculo destas mobilidades, ou seja, aplicar um momento no ponto 2, obter as velocidades angulares e transversais e dividi-las pelo momento fletor aplicado.

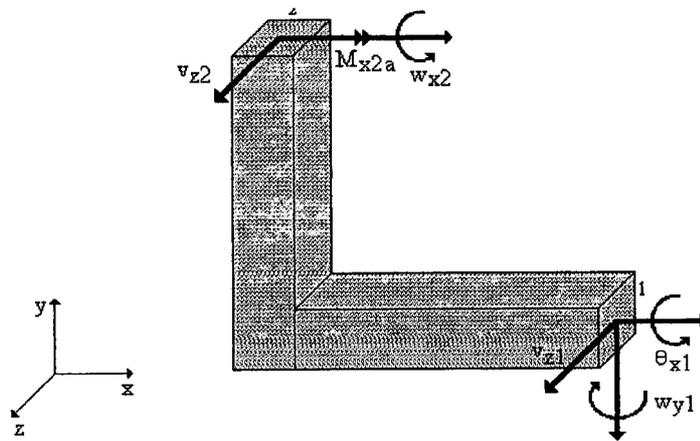


Figura B.4: Determinação de  $Y22_{w\_m}^{FF}$ ,  $Y22_{v\_m}^{FF}$ ,  $Y12_{w\_m}^{FF}$ ,  $Y12_{w\_m}^{TF}$  e  $Y12_{v\_m}^{FF}$ .

Análogo ao primeiro caso, precisa-se de doze condições de contorno para determinação das mobilidades. Estas condições tem equações iguais à (B.1) até (B.12), com duas mudanças, pois a excitação mudou:

- a equação (B.11) agora é  $M_{x2}(L2) = -M_{x2a}$
- a equação (B.8) agora é  $M_{y1}(L1) = 0$ .

Com as constantes determinadas, podem-se calcular as mobilidades:

$$\bar{Y}22_{w\_m}^{FF}(f) = \frac{2i\pi f}{M_{x2a}} \bar{w}_{x2}(L2) \quad (B.26)$$

$$\bar{Y}22_{v\_m}^{FF}(f) = \frac{2i\pi f}{M_{x2a}} \bar{v}_{z2}(L2) \quad (B.27)$$

$$\bar{Y}12_{w\_m}^{FF}(f) = \frac{2i\pi f}{M_{x2a}} \bar{w}_{y1}(L1) \quad (B.28)$$

$$\bar{Y}12_{w\_m}^{TF}(f) = \frac{2i\pi f}{M_{x2a}} \bar{\theta}_{x1}(L1) \quad (B.29)$$

$$\bar{Y}12_{v\_m}^{FF}(f) = \frac{2i\pi f}{M_{x2a}} \bar{v}_{z1}(L1) \quad (B.30)$$

### MOBILIDADES $\bar{Y}_{22}^{TT}$ , $\bar{Y}_{12}^{FT}$ e $\bar{Y}_{12}^{FT}$

Quando um momento torçor unitário  $T_{y2a}$  atua na extremidade livre da viga 2 (ponto 2), as seguintes velocidades nas vigas 1 e 2 são induzidas: ponto 2 - angular (de torção); ponto 1 - angular (de flexão) e transversal (de flexão). Todas estas velocidades divididas pelo momento torçor dão origem às mobilidades  $\bar{Y}_{22}^{TT}$ ,  $\bar{Y}_{12}^{FT}$  e  $\bar{Y}_{12}^{FT}$ . A Figura B.5 ilustra o procedimento de cálculo destas mobilidades, ou seja, aplicar um momento no ponto 2, obter as velocidades angulares e transversais e dividi-las pelo momento torçor aplicado.

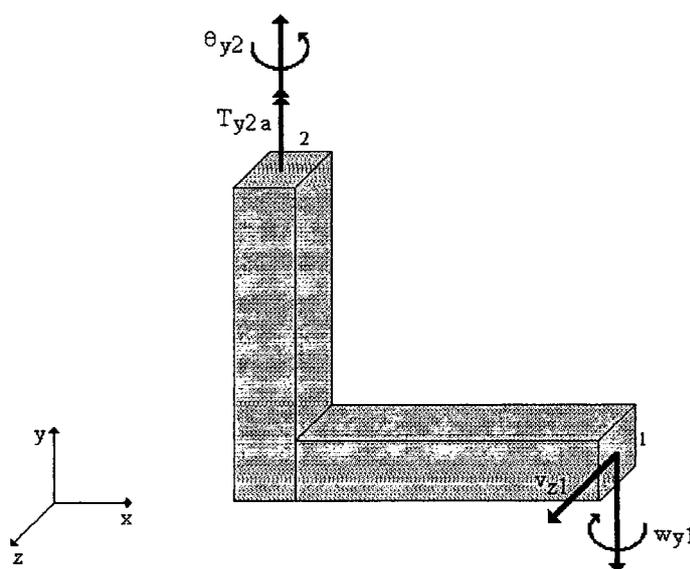


Figura B.5: Determinação de  $\bar{Y}_{22}^{TT}$ ,  $\bar{Y}_{12}^{FT}$  e  $\bar{Y}_{12}^{FT}$ .

Análogo ao primeiro caso, precisa-se de doze condições de contorno para determinação das mobilidades. Estas condições tem equações iguais à (B.1) até (B.12), com duas mudanças, pois a excitação mudou:

- a equação (B.10) agora é  $T_{y2}(L1) = -T_{y2a}$
- a equação (B.8) agora é  $M_{y1}(L1) = 0$ .

Com as constantes determinadas, podem-se calcular as mobilidades:

$$\bar{Y}_{22}^{TT}_{w\_m}(f) = \frac{2i\pi f}{T_{y2a}} \bar{\theta}_{y2}(L2) \quad (B.31)$$

$$\bar{Y}_{12}^{FT}_{w\_m}(f) = \frac{2i\pi f}{T_{y2a}} w_{y1}(L1) \quad (B.32)$$

$$\bar{Y}_{12}^{FT}_{v\_m}(f) = \frac{2i\pi f}{T_{y2a}} v_{z1}(L1) \quad (B.33)$$

### MOBILIDADES $\bar{Y}_{22}^{FF}_{w\_f}$ , $\bar{Y}_{22}^{FF}_{v\_f}$ , $\bar{Y}_{12}^{FF}_{w\_f}$ , $\bar{Y}_{12}^{TF}_{w\_f}$ e $\bar{Y}_{12}^{FF}_{v\_f}$

Quando uma força cortante unitária  $F_{z2a}$  atua na extremidade livre da viga 2 (ponto 2), as seguintes velocidades nas vigas 1 e 2 são induzidas: ponto 2 - angular e transversal (de flexão); ponto 1 - angular (de flexão e torção) e transversal (de flexão). Todas estas velocidades divididas pela força dão origem às mobilidades  $\bar{Y}_{22}^{FF}_{w\_f}$ ,  $\bar{Y}_{22}^{FF}_{v\_f}$ ,  $\bar{Y}_{12}^{FF}_{w\_f}$ ,  $\bar{Y}_{12}^{TF}_{w\_f}$  e  $\bar{Y}_{12}^{FF}_{v\_f}$ . A Figura B.6 ilustra o procedimento de cálculo destas mobilidades, ou seja, aplicar uma força no ponto 1, obter as velocidades angulares e transversais e dividi-las pelo força cortante aplicada.

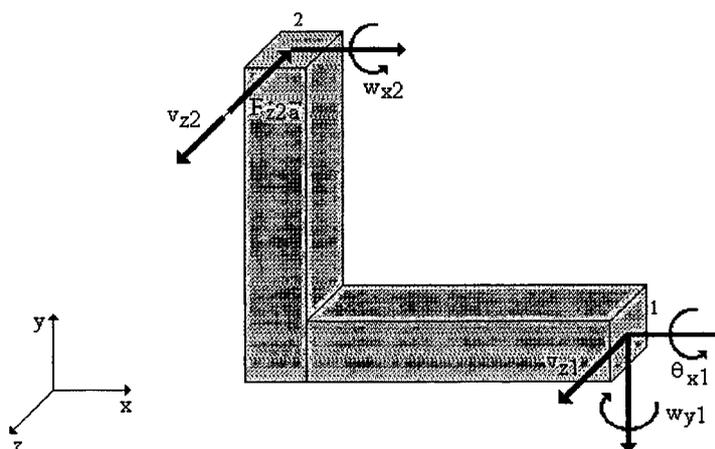


Figura B.6: Determinação de  $\bar{Y}_{22}^{FF}_{w\_f}$ ,  $\bar{Y}_{22}^{FF}_{v\_f}$ ,  $\bar{Y}_{12}^{FF}_{w\_f}$ ,  $\bar{Y}_{12}^{TF}_{w\_f}$  e  $\bar{Y}_{12}^{FF}_{v\_f}$ .

Análogo ao primeiro caso, precisa-se de doze condições de contorno para determinação das mobilidades. Estas condições tem equações iguais à (B.1) até (B.12), com duas mudanças, pois a excitação mudou:

- a equação (B.12) agora é  $F_{z2}(L2) = -F_{z2a}$
- a equação (B.8) agora é  $M_{y1}(L1) = 0$ .

Com as constantes determinadas, podem-se calcular as mobilidades:

$$\bar{Y}_{22_{w-f}}^{FF}(f) = \frac{2i\pi f}{F_{z2a}} \bar{w}_{x2}(L2) \quad (B.34)$$

$$\bar{Y}_{22_{v-f}}^{FF}(f) = \frac{2i\pi f}{F_{z2a}} \bar{v}_{z2}(L2) \quad (B.35)$$

$$\bar{Y}_{12_{w-f}}^{FF}(f) = \frac{2i\pi f}{F_{z2a}} \bar{w}_{y1}(L1) \quad (B.36)$$

$$\bar{Y}_{12_{w-f}}^{TF}(f) = \frac{2i\pi f}{F_{z2a}} \bar{\theta}_{x1}(L1) \quad (B.37)$$

$$\bar{Y}_{12_{v-f}}^{FF}(f) = \frac{2i\pi f}{F_{z12}} \bar{v}_{z1}(L1) \quad (B.38)$$

**MOBILIDADES**  $\bar{Y}_{1x0_{w-f}}^{FF}$ ,  $\bar{Y}_{1x0_{v-f}}^{FF}$ ,  $\bar{Y}_{2x0_{w-f}}^{FF}$ ,  $\bar{Y}_{2x0_{w-f}}^{TF}$  e  $\bar{Y}_{2x0_{v-f}}^{FF}$

As mobilidades referentes à força externa  $F_a$  são obtidas ao aplicar-se um força unitária num ponto  $x_0$  qualquer, com  $0 < x_0 < L1$ , resolver o sistema e determinar as equações da onda. Para que a condição de continuidade seja mantida no ponto  $x_0$ , a equação da onda de deslocamento transversal na viga 1 é separada duas,  $v_{z1\_1}(x)$  e  $v_{z1\_2}(x)$ , onde  $v_{z1\_1}(x)$  é válida de  $0 < x < x_0$  e  $v_{z1\_2}(x)$  é válida de  $x_0 < x < L1$ .

$$0 \leq x \leq x_0 \quad v_{y1\_1}(x) = A1 \cosh(k_{f1} x) + B1 \sinh(k_{f1} x) + C1 \cos(k_{f1} x) + D1 \sin(k_{f1} x) \quad (B.39)$$

$$x_0 \leq x \leq L_1 \quad v_{y1_2}(x) = E I \cosh(k_{f1} x) + F_1 \sinh(k_{f1} x) + G_1 \cos(k_{f1} x) + H_1 \sin(k_{f1} x) \quad (\text{B.40})$$

Quando uma força unitária  $F_a$  atua num ponto  $x_0$ , as seguintes velocidades nas vigas 1 e 2 são induzidas: ponto 1 - angular e transversal (de flexão); ponto 2 - angular (de flexão e torção) e transversal (de flexão). Todas estas velocidades divididas pela força dão origem às mobilidades  $\bar{Y}1x_0^{\text{FF}}_{w_f}$ ,  $\bar{Y}1x_0^{\text{FF}}_{v_f}$ ,  $\bar{Y}2x_0^{\text{FF}}_{w_f}$ ,  $\bar{Y}2x_0^{\text{TF}}_{w_f}$  e  $\bar{Y}2x_0^{\text{FF}}_{v_f}$ . A Figura B.7 ilustra o procedimento de cálculo destas mobilidades, ou seja, aplicar uma força no ponto  $x_0$ , obter as velocidades angulares e transversais e dividi-las pelo força aplicada.

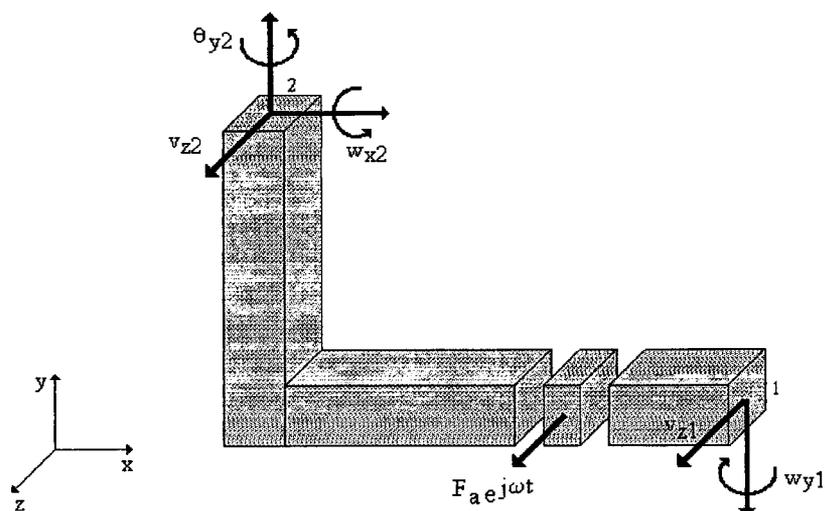


Figura B.7: Determinação de  $\bar{Y}1x_0^{\text{FF}}_{w_f}$ ,  $\bar{Y}1x_0^{\text{FF}}_{v_f}$ ,  $\bar{Y}2x_0^{\text{FF}}_{w_f}$ ,  $\bar{Y}2x_0^{\text{TF}}_{w_f}$  e  $\bar{Y}2x_0^{\text{FF}}_{v_f}$ .

Como a onda de flexão na viga 1 é dividida em duas, precisa-se de dezoito condições de contorno para a determinação das mobilidades. Estas condições de contorno são (Cuschieri, 1987),

$$v_{z1_1}(0) = v_{z2}(0) \quad (\text{B.41})$$

$$\theta_{x1}(0) = w_{x2}(0) \quad (\text{B.42})$$

$$w_{y1_1}(0) = \theta_{y2}(0) \quad (\text{B.43})$$

$$T_{x1}(0) = M_{x2}(0) \quad (\text{B.44})$$

$$M_{y1_1}(0) = T_{y2}(0) \quad (\text{B.45})$$

$$F_{z1\_1}(0) = -F_{z2}(0) \quad (\text{B.46})$$

$$v_{z1\_1}(\mathbf{x0}) = v_{z1\_2}(\mathbf{x0}) \quad (\text{B.47})$$

$$w_{y1\_1}(\mathbf{x0}) = w_{y1\_2}(\mathbf{x0}) \quad (\text{B.48})$$

$$M_{y1\_1}(\mathbf{x0}) = M_{y1\_2}(\mathbf{x0}) \quad (\text{B.49})$$

$$F_{z1\_1}(\mathbf{x0}) = -F_a + F_{z1\_2}(\mathbf{x0}) \quad (\text{B.50})$$

$$T_{x1}(L1) = 0 \quad (\text{B.51})$$

$$M_{y1\_2}(L1) = 0 \quad (\text{B.52})$$

$$F_{z1\_2}(L1) = 0 \quad (\text{B.53})$$

$$T_{y2}(L2) = 0 \quad (\text{B.54})$$

$$M_{x2}(L2) = 0 \quad (\text{B.55})$$

$$F_{z2}(L2) = 0 \quad (\text{B.56})$$

Com as constantes determinadas, podem-se calcular as mobilidades:

$$\bar{Y}1_{\mathbf{x0}}^{\text{FF}}_{w\_f}(f) = \frac{2i\pi f}{F_a} \bar{w}_{y1\_2}(L1) \quad (\text{B.57})$$

$$\bar{Y}1_{\mathbf{x0}}^{\text{FF}}_{v\_f}(f) = \frac{2i\pi f}{F_a} \bar{v}_{z1\_2}(L1) \quad (\text{B.58})$$

$$\bar{Y}2_{\mathbf{x0}}^{\text{FF}}_{w\_f}(f) = \frac{2i\pi f}{F_a} \bar{w}_{x2}(L2) \quad (\text{B.59})$$

$$\bar{Y}2_{\mathbf{x0}}^{\text{TF}}_{w\_f}(f) = \frac{2i\pi f}{F_a} \bar{\theta}_{y2}(L2) \quad (\text{B.60})$$

$$\bar{Y}2_{\mathbf{x0}}^{\text{FF}}_{v\_f}(f) = \frac{2i\pi f}{F_a} \bar{v}_{z2}(L2) \quad (\text{B.61})$$

## APÊNDICE C

### MOBILIDADES VIGAS EM T, FORÇA TRANSVERSAL

No cálculo das mobilidades, todas as equações de velocidades, momentos e forças, tanto de flexão e/ou de torção são as apresentadas no capítulo 2, itens 2.2 e 2.3. Para todos os cálculos de mobilidade, as vigas 1 e 2 têm sua origem ( $x_1 = y_2 = 0$ ) na união das mesmas. Já a viga 3 tem coordenadas  $x_3 = L_3$  na união.

**MOBILIDADES**  $\bar{Y}_{11}^{FF}_{w_m}$ ,  $\bar{Y}_{11}^{FF}_{v_m}$ ,  $\bar{Y}_{21}^{FF}_{w_m}$ ,  $\bar{Y}_{21}^{TF}_{w_m}$ ,  $\bar{Y}_{21}^{FF}_{v_m}$ ,  $\bar{Y}_{31}^{FF}_{w_m}$  e  $\bar{Y}_{31}^{FF}_{v_m}$

Quando um momento fletor unitário  $M_{y1a}$  atua na extremidade livre da viga 1 (ponto 1), as seguintes velocidades são induzidas nas vigas 1, 2 e 3: ponto 1 - angular (de flexão) e transversal (de flexão); ponto 2 - angular (de flexão e torção) e transversal (de flexão); ponto 3 - angular (de flexão) e transversal (de flexão). Todas estas velocidades divididas pelo momento fletor dão origem às mobilidades  $\bar{Y}_{11}^{FF}_{w_m}$ ,  $\bar{Y}_{11}^{FF}_{v_m}$ ,  $\bar{Y}_{21}^{FF}_{w_m}$ ,  $\bar{Y}_{21}^{TF}_{w_m}$ ,  $\bar{Y}_{21}^{FF}_{v_m}$ ,  $\bar{Y}_{31}^{FF}_{w_m}$  e  $\bar{Y}_{31}^{FF}_{v_m}$ . A Figura C.1 ilustra o procedimento de cálculo destas mobilidades, ou seja, aplicar um momento no ponto 1, obter as velocidades angulares e transversais e dividi-las pelo momento fletor aplicado.

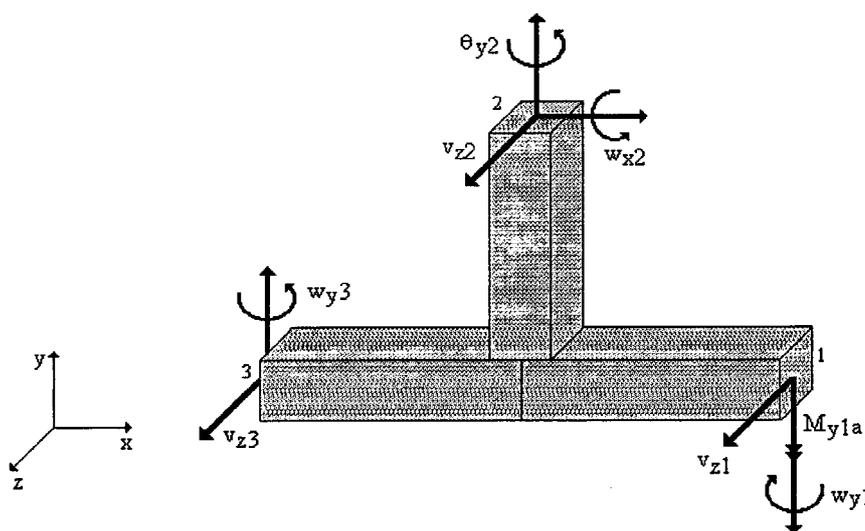


Figura C.1: Determinação de  $\bar{Y}_{11}^{FF}_{w_m}$ ,  $\bar{Y}_{11}^{FF}_{v_m}$ ,  $\bar{Y}_{21}^{FF}_{w_m}$ ,  $\bar{Y}_{21}^{TF}_{w_m}$ ,  $\bar{Y}_{21}^{FF}_{v_m}$ ,  $\bar{Y}_{31}^{FF}_{w_m}$  e  $\bar{Y}_{31}^{FF}_{v_m}$ .

Como a onda de flexão possui quatro constantes e a de torção, duas, precisa-se de dezoito condições de contorno para a determinação das mobilidades. Estas condições de contorno são (Cuschieri, 1987):

$$v_{z1}(0) = v_{z2}(0) \quad (C.1)$$

$$v_{z1}(0) = v_{z3}(L3) \quad (C.2)$$

$$w_{y3}(L3) = w_{y1}(0) \quad (C.3)$$

$$w_{y3}(L3) = \theta_{y2}(0) \quad (C.4)$$

$$\theta_{x3}(L3) = \theta_{x1}(0) \quad (C.5)$$

$$\theta_{x3}(L3) = w_{x2}(0) \quad (C.6)$$

$$T_{x1}(0) = T_{x3}(L3) - M_{x2}(0) \quad (C.7)$$

$$M_{y1}(0) = M_{y3}(L3) - T_{y2}(0) \quad (C.8)$$

$$F_{z1}(0) = F_{z3}(L3) - F_{z2}(0) \quad (C.9)$$

$$T_{x1}(L1) = 0 \quad (C.10)$$

$$M_{y1}(L1) = -M_{y1a} \quad (C.11)$$

$$F_{z1}(L1) = 0 \quad (C.12)$$

$$T_{y2}(L2) = 0 \quad (C.13)$$

$$M_{x2}(L2) = 0 \quad (C.14)$$

$$F_{z2}(L2) = 0 \quad (C.15)$$

$$T_{x3}(0) = 0 \quad (C.16)$$

$$M_{y3}(0) = 0 \quad (C.17)$$

$$F_{z3}(0) = 0 \quad (C.18)$$

Com as constantes determinadas, podem-se calcular as mobilidades:

$$\bar{Y}_{11}^{\text{FF}}_{w\_m}(f) = \frac{2j\pi f}{M_{y1a}} w_{y1}(L1) \quad (C.19)$$

$$\bar{Y}_{11}^{\text{FF}}_{v\_m}(f) = \frac{2j\pi f}{M_{y1a}} v_{z1}(L1) \quad (C.20)$$

$$\bar{Y}_{21}^{\text{FF}}_{w\_m}(f) = \frac{2j\pi f}{M_{y1a}} w_{x2}(L2) \quad (C.21)$$

$$\bar{Y}_{21}^{TF}(f) = \frac{2j\pi f}{M_{y1a}} \bar{\theta}_{y2}(L2) \quad (C.22)$$

$$\bar{Y}_{21}^{FF}(f) = \frac{2j\pi f}{M_{y1a}} v_{z2}(L2) \quad (C.23)$$

$$\bar{Y}_{31}^{FF}(f) = \frac{2j\pi f}{M_{y1a}} w_{y3}(0) \quad (C.24)$$

$$\bar{Y}_{31}^{TF}(f) = \frac{2j\pi f}{M_{y1a}} v_{z3}(0) \quad (C.25)$$

### MOBILIDADES $\bar{Y}_{11}^{TT}$ , $\bar{Y}_{21}^{FT}$ , $\bar{Y}_{21}^{FT}$ e $\bar{Y}_{31}^{TT}$

Quando um momento torçor unitário  $T_{x1a}$  atua na extremidade livre da viga 1 (ponto 1), as seguintes velocidades são induzidas nas vigas 1, 2 e 3: ponto 1 - angular (de torção); ponto 2 - angular (de flexão) e transversal (de flexão) e ponto 3 - angular (de torção). Todas estas velocidades divididas pelo momento torçor dão origem às mobilidades  $\bar{Y}_{11}^{TT}$ ,  $\bar{Y}_{21}^{FT}$ ,  $\bar{Y}_{21}^{FT}$  e  $\bar{Y}_{31}^{TT}$ . A Figura C.2 ilustra o procedimento de cálculo destas mobilidades, ou seja, aplicar um momento no ponto 1, obter as velocidades angulares e transversais e dividi-las pelo momento torçor aplicado.

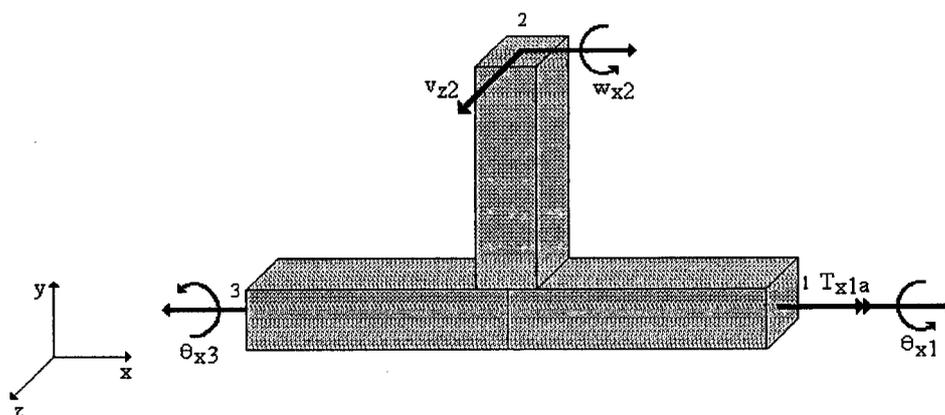


Figura C.2: Determinação de  $\bar{Y}_{11}^{TT}$ ,  $\bar{Y}_{21}^{FT}$ ,  $\bar{Y}_{21}^{FT}$  e  $\bar{Y}_{31}^{TT}$ .

Análogo ao primeiro caso, precisa-se de dezoito condições de contorno para determinação das mobilidades. Estas condições tem equações iguais à (C.1) até (C.18), com duas mudanças, pois a excitação mudou:

- a equação (C.10) agora é  $T_{x1}(L1) = -T_{x1a}$
- a equação (C.11) agora é  $M_{y1}(L1) = 0$ .

Com as constantes determinadas, podem-se calcular as mobilidades:

$$\bar{Y}_{11_{w\_m}}^{TT}(f) = \frac{2j\pi f}{T_{x1a}} \bar{\theta}_{x1}(L1) \quad (C.26)$$

$$\bar{Y}_{21_{w\_m}}^{FT}(f) = \frac{2j\pi f}{T_{x1a}} \bar{w}_{x2}(L2) \quad (C.27)$$

$$\bar{Y}_{21_{v\_m}}^{FT}(f) = \frac{2j\pi f}{T_{x1a}} \bar{v}_{z2}(L2) \quad (C.28)$$

$$\bar{Y}_{31_{w\_m}}^{TT}(f) = \frac{2j\pi f}{T_{x1a}} \bar{\theta}_{x3}(0) \quad (C.29)$$

**MOBILIDADES**  $\bar{Y}_{11_{w\_f}}^{FF}$ ,  $\bar{Y}_{11_{v\_f}}^{FF}$ ,  $\bar{Y}_{21_{w\_f}}^{FF}$ ,  $\bar{Y}_{21_{w\_f}}^{TF}$ ,  $\bar{Y}_{21_{v\_f}}^{FF}$ ,  $\bar{Y}_{31_{w\_f}}^{FF}$  e  $\bar{Y}_{31_{v\_f}}^{FF}$

Quando uma força cortante unitária  $F_{z1a}$  atua na extremidade livre da viga 1 (ponto 1), as seguintes velocidades são induzidas nas vigas 1, 2 e 3: ponto 1 - angular e transversal (de flexão); ponto 2 - angular (de flexão e torção) e transversal (de flexão) e ponto 3 - angular e transversal (de flexão). Todas estas velocidades divididas pela força dão origem às mobilidades  $\bar{Y}_{11_{w\_f}}^{FF}$ ,  $\bar{Y}_{11_{v\_f}}^{FF}$ ,  $\bar{Y}_{21_{w\_f}}^{FF}$ ,  $\bar{Y}_{21_{w\_f}}^{TF}$ ,  $\bar{Y}_{21_{v\_f}}^{FF}$ ,  $\bar{Y}_{31_{w\_f}}^{FF}$  e  $\bar{Y}_{31_{v\_f}}^{FF}$ . A Figura C.3 ilustra o procedimento de cálculo destas mobilidades, ou seja, aplicar uma força no ponto 1, obter as velocidades angulares e transversais e dividi-las pelo força cortante aplicada.

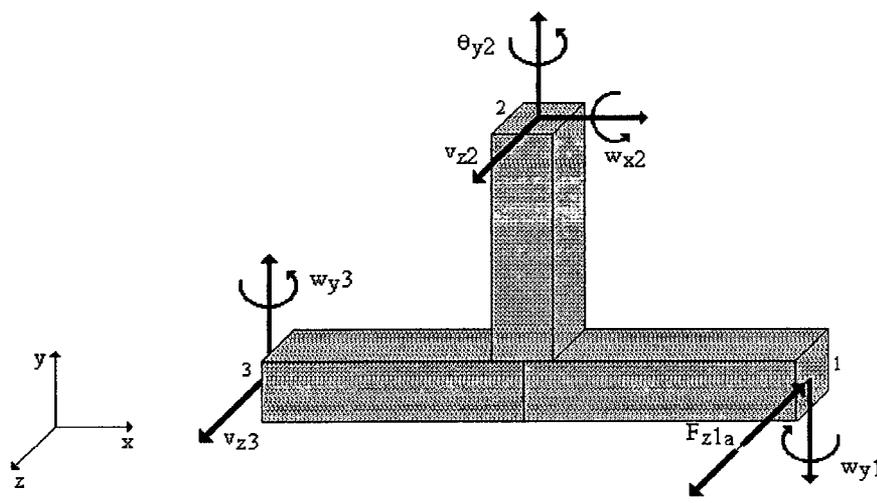


Figura C.3: Determinação de  $Y11_{w-f}^{FF}$ ,  $Y11_{v-f}^{FF}$ ,  $Y21_{w-f}^{FF}$ ,  $Y21_{w-f}^{TF}$ ,  $Y21_{v-f}^{FF}$ ,  $Y31_{w-f}^{FF}$  e  $Y31_{v-f}^{FF}$ .

Análogo ao primeiro caso, precisa-se de dezoito condições de contorno para determinação das mobilidades. Estas condições tem equações iguais à (C.1) até (C.18), com duas mudanças, pois a excitação mudou:

- a equação (C.12) agora é  $F_{z1}(L1) = -F_{z1a}$
- a equação (C.11) agora é  $M_{y1}(L1) = 0$ .

Com as constantes determinadas, podem-se calcular as mobilidades:

$$\bar{Y}11_{w-f}^{FF}(f) = \frac{2j\pi f}{F_{z1a}} \bar{w}_{y1}(L1) \quad (C.30)$$

$$\bar{Y}11_{v-f}^{FF}(f) = \frac{2j\pi f}{F_{z1a}} \bar{v}_{z1}(L1) \quad (C.31)$$

$$\bar{Y}21_{w-f}^{FF}(f) = \frac{2j\pi f}{F_{z1a}} \bar{w}_{x2}(L2) \quad (C.32)$$

$$\bar{Y}21_{w-f}^{TF}(f) = \frac{2j\pi f}{F_{z1a}} \bar{\theta}_{y2}(L2) \quad (C.33)$$

$$\bar{Y}_{21}^{FF}_{v_f}(f) = \frac{2j\pi f}{F_{z1a}} v_{z2}(L2) \quad (C.34)$$

$$\bar{Y}_{31}^{FF}_{w_f}(f) = \frac{2j\pi f}{F_{z1a}} w_{y3}(0) \quad (C.35)$$

$$\bar{Y}_{31}^{FF}_{v_f}(f) = \frac{2j\pi f}{F_{z1a}} v_{z3}(0) \quad (C.36)$$

**MOBILIDADES**  $\bar{Y}_{22}^{FF}_{w_m}$ ,  $\bar{Y}_{22}^{FF}_{v_m}$ ,  $\bar{Y}_{12}^{FF}_{w_m}$ ,  $\bar{Y}_{12}^{TF}_{w_m}$ ,  $\bar{Y}_{12}^{FF}_{v_m}$ ,  $\bar{Y}_{32}^{FF}_{w_m}$ ,  $\bar{Y}_{32}^{TF}_{w_m}$  e  $\bar{Y}_{32}^{FF}_{v_m}$

Quando um momento fletor unitário  $M_{y2a}$  atua na extremidade livre da viga 2 (ponto 2), as seguintes velocidades são induzidas nas vigas 1, 2 e 3: ponto 2 - angular (de flexão) e transversal (de flexão); ponto 1 - angular (de flexão e torção) e transversal (de flexão) e ponto 3 - angular (de flexão e torção) e transversal (de flexão). Todas estas velocidades divididas pelo momento fletor dão origem às mobilidades  $\bar{Y}_{22}^{FF}_{w_m}$ ,  $\bar{Y}_{22}^{FF}_{v_m}$ ,  $\bar{Y}_{12}^{FF}_{w_m}$ ,  $\bar{Y}_{12}^{TF}_{w_m}$ ,  $\bar{Y}_{12}^{FF}_{v_m}$ ,  $\bar{Y}_{32}^{FF}_{w_m}$ ,  $\bar{Y}_{32}^{TF}_{w_m}$  e  $\bar{Y}_{32}^{FF}_{v_m}$ . A Figura C.4 ilustra o procedimento de cálculo destas mobilidades, ou seja, aplicar um momento no ponto 2, obter as velocidades angulares e transversais e dividi-las pelo momento fletor aplicado.

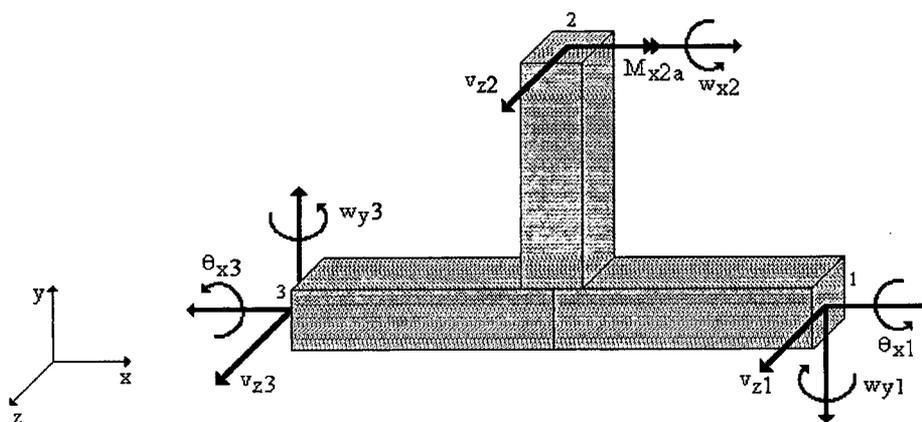


Figura C.4: Determinação de  $Y_{22}^{FF}_{w_m}$ ,  $Y_{22}^{FF}_{v_m}$ ,  $Y_{12}^{FF}_{w_m}$ ,  $Y_{12}^{TF}_{w_m}$ ,  $Y_{12}^{FF}_{v_m}$ ,  $Y_{32}^{FF}_{w_m}$ ,  $Y_{32}^{TF}_{w_m}$  e  $Y_{32}^{FF}_{v_m}$ .

Análogo ao primeiro caso, precisa-se de dezoito condições de contorno para determinação das mobilidades. Estas condições tem equações iguais à (C.1) até (C.18), com duas mudanças, pois a excitação mudou:

- a equação (C.14) agora é  $M_{x2}(L2) = -M_{x2a}$
- a equação (C.11) agora é  $M_{y1}(L1) = 0$ .

Com as constantes determinadas, podem-se calcular as mobilidades:

$$\bar{Y}_{22}^{FF}_{w\_m}(f) = \frac{2j\pi f}{M_{x2a}} \bar{w}_{x2}(L2) \quad (C.37)$$

$$\bar{Y}_{22}^{FF}_{v\_m}(f) = \frac{2j\pi f}{M_{x2a}} \bar{v}_{z2}(L2) \quad (C.38)$$

$$\bar{Y}_{12}^{FF}_{w\_m}(f) = \frac{2j\pi f}{M_{x2a}} \bar{w}_{y1}(L1) \quad (C.39)$$

$$\bar{Y}_{12}^{TF}_{w\_m}(f) = \frac{2j\pi f}{M_{x2a}} \bar{\theta}_{x1}(L1) \quad (C.40)$$

$$\bar{Y}_{12}^{FF}_{v\_m}(f) = \frac{2j\pi f}{M_{x2a}} \bar{v}_{z1}(L1) \quad (C.41)$$

$$\bar{Y}_{32}^{FF}_{w\_m}(f) = \frac{2j\pi f}{M_{x2a}} \bar{w}_{y3}(0) \quad (C.42)$$

$$\bar{Y}_{32}^{TF}_{w\_m}(f) = \frac{2j\pi f}{M_{x2a}} \bar{\theta}_{x3}(0) \quad (C.43)$$

$$\bar{Y}_{32}^{FF}_{v\_m}(f) = \frac{2j\pi f}{M_{x2a}} \bar{v}_{z3}(0) \quad (C.44)$$

**MOBILIDADES**  $\bar{Y}_{22}^{TT}_{w_m}$ ,  $\bar{Y}_{12}^{FT}_{w_m}$ ,  $\bar{Y}_{12}^{FT}_{v_m}$ ,  $\bar{Y}_{32}^{FT}_{w_m}$  e  $\bar{Y}_{32}^{FT}_{v_m}$

Quando um momento torçor unitário  $T_{y2a}$  atua na extremidade livre da viga 2 (ponto 2), as seguintes velocidades são induzidas nas vigas 1, 2 e 3: ponto 2 - angular (de torção); ponto 1 - angular (de flexão) e transversal (de flexão) e ponto 3 - angular (de flexão) e transversal (de flexão). Todas estas velocidades divididas pelo momento torçor dão origem às mobilidades  $\bar{Y}_{22}^{TT}_{w_m}$ ,  $\bar{Y}_{12}^{FT}_{w_m}$ ,  $\bar{Y}_{12}^{FT}_{v_m}$ ,  $\bar{Y}_{32}^{FT}_{w_m}$  e  $\bar{Y}_{32}^{FT}_{v_m}$ . A Figura C.5 ilustra o procedimento de cálculo destas mobilidades, ou seja, aplicar um momento no ponto 2, obter as velocidades angulares e transversais e dividi-las pelo momento torçor aplicado.

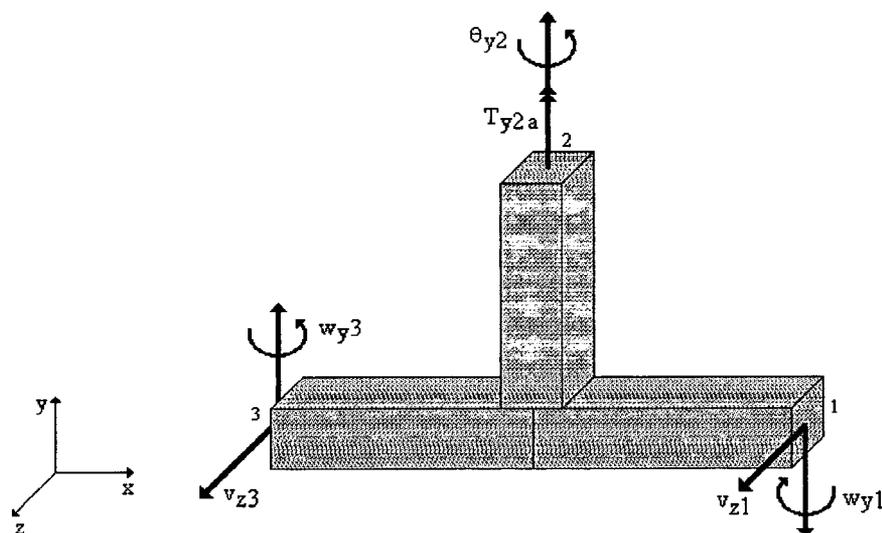


Figura C.5: Determinação de  $\bar{Y}_{22}^{TT}_{w_m}$ ,  $\bar{Y}_{12}^{FT}_{w_m}$ ,  $\bar{Y}_{12}^{FT}_{v_m}$ ,  $\bar{Y}_{32}^{FT}_{w_m}$  e  $\bar{Y}_{32}^{FT}_{v_m}$ .

Análogo ao primeiro caso, precisa-se de dezoito condições de contorno para determinação das mobilidades. Estas condições tem equações iguais à (C.1) até (C.18), com duas mudanças, pois a excitação mudou:

- a equação (C.13) agora é  $T_{y2}(L2) = -T_{y2a}$
- a equação (C.11) agora é  $M_{y1}(L1) = 0$ .

Com as constantes determinadas, podem-se calcular as mobilidades:

$$\bar{Y}_{22}^{TT}_{w\_m}(f) = \frac{2j\pi f}{T_{y2a}} \bar{\theta}_{y2}(L2) \quad (C.45)$$

$$\bar{Y}_{12}^{FT}_{w\_m}(f) = \frac{2j\pi f}{T_{y2a}} \bar{w}_{y1}(L1) \quad (C.46)$$

$$\bar{Y}_{12}^{FT}_{v\_m}(f) = \frac{2j\pi f}{T_{y2a}} \bar{v}_{z1}(L1) \quad (C.47)$$

$$\bar{Y}_{32}^{FT}_{w\_m}(f) = \frac{2j\pi f}{T_{y2a}} \bar{w}_{y3}(0) \quad (C.48)$$

$$\bar{Y}_{32}^{FT}_{v\_m}(f) = \frac{2j\pi f}{T_{y2a}} \bar{v}_{z3}(0) \quad (C.49)$$

**MOBILIDADES**  $\bar{Y}_{22}^{FF}_{w\_f}$ ,  $\bar{Y}_{22}^{FF}_{v\_f}$ ,  $\bar{Y}_{12}^{FF}_{w\_f}$ ,  $\bar{Y}_{12}^{TF}_{w\_f}$ ,  $\bar{Y}_{12}^{FF}_{v\_f}$ ,  $\bar{Y}_{32}^{FF}_{w\_f}$ ,  $\bar{Y}_{32}^{TF}_{w\_f}$  e  $\bar{Y}_{32}^{FF}_{v\_f}$ .

Quando uma força cortante unitária  $F_{z2a}$  atua na extremidade livre da viga 2 (ponto 2), as seguintes velocidades são induzidas nas vigas 1, 2 e 3: ponto 2 - angular e transversal (de flexão); ponto 1 - angular (de flexão e torção) e transversal (de flexão) e ponto 3 - angular (de flexão e torção) e transversal (de flexão). Todas estas velocidades divididas pela força dão origem às mobilidades  $\bar{Y}_{22}^{FF}_{w\_f}$ ,  $\bar{Y}_{22}^{FF}_{v\_f}$ ,  $\bar{Y}_{12}^{FF}_{w\_f}$ ,  $\bar{Y}_{12}^{TF}_{w\_f}$ ,  $\bar{Y}_{12}^{FF}_{v\_f}$ ,  $\bar{Y}_{32}^{FF}_{w\_f}$ ,  $\bar{Y}_{32}^{TF}_{w\_f}$  e  $\bar{Y}_{32}^{FF}_{v\_f}$ . A Figura C.6 ilustra o procedimento de cálculo destas mobilidades, ou seja, aplicar uma força no ponto 1, obter as velocidades angulares e transversais e dividi-las pela força cortante aplicada.

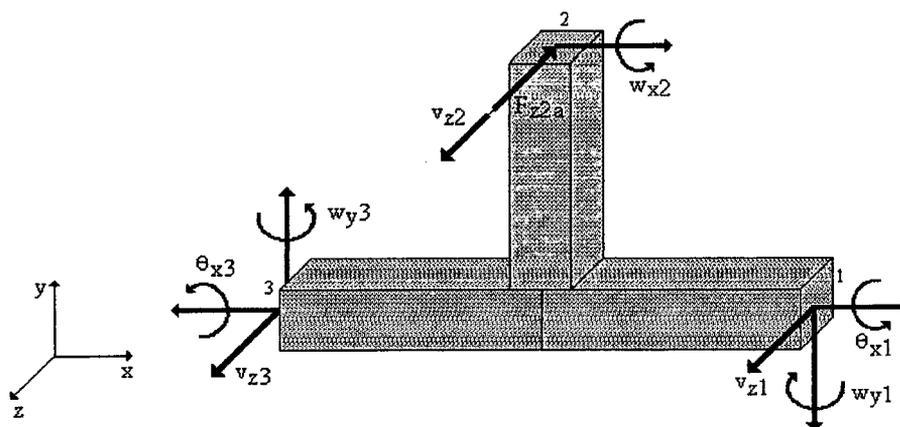


Figura C.6: Determinação de  $Y22_{w_f}^{FF}$ ,  $Y22_{v_f}^{FF}$ ,  $Y12_{w_f}^{FF}$ ,  $Y12_{w_f}^{TF}$ ,  $Y12_{v_f}^{FF}$ ,  $Y32_{w_f}^{FF}$ ,  $Y32_{w_f}^{TF}$  e  $Y32_{v_f}^{FF}$ .

Análogo ao primeiro caso, precisa-se de dezoito condições de contorno para determinação das mobilidades. Estas condições tem equações iguais à (C.1) até (C.18), com duas mudanças, pois a excitação mudou:

- a equação (C.15) agora é  $F_{z2}(L2) = -F_{z2a}$
- a equação (C.11) agora é  $M_{y1}(L1) = 0$ .

Com as constantes determinadas, podem-se calcular as mobilidades:

$$\bar{Y}22_{w_f}^{FF}(f) = \frac{2i\pi f}{F_{z2a}} \bar{w}_{x2}(L2) \quad (C.50)$$

$$\bar{Y}22_{v_f}^{FF}(f) = \frac{2i\pi f}{F_{z2a}} \bar{v}_{z2}(L2) \quad (C.51)$$

$$\bar{Y}12_{w_f}^{FF}(f) = \frac{2i\pi f}{F_{z2a}} \bar{w}_{y1}(L1) \quad (C.52)$$

$$\bar{Y}12_{w_f}^{TF}(f) = \frac{2i\pi f}{F_{z2a}} \bar{\theta}_{x1}(L1) \quad (C.53)$$

$$\bar{Y}12_{v_f}^{FF}(f) = \frac{2i\pi f}{F_{z2a}} \bar{v}_{z1}(L1) \quad (C.54)$$

$$\bar{Y}_{32}^{FF}_{w\_f}(f) = \frac{2i\pi f}{F_{z2a}} \bar{w}_{y3}(0) \quad (C.55)$$

$$\bar{Y}_{22}^{TF}_{w\_f}(f) = \frac{2i\pi f}{F_{z2a}} \bar{\theta}_{y2}(L2) \quad (C.56)$$

$$\bar{Y}_{32}^{FF}_{v\_f}(f) = \frac{2i\pi f}{F_{z2a}} \bar{v}_{z3}(0) \quad (C.57)$$

**MOBILIDADES**  $\bar{Y}_{33}^{FF}_{w\_m}$ ,  $\bar{Y}_{33}^{FF}_{v\_m}$ ,  $\bar{Y}_{23}^{FF}_{w\_m}$ ,  $\bar{Y}_{23}^{TF}_{w\_m}$ ,  $\bar{Y}_{23}^{FF}_{v\_m}$ ,  $\bar{Y}_{13}^{FF}_{w\_m}$  e  $\bar{Y}_{13}^{FF}_{v\_m}$

Quando um momento fletor unitário  $M_{y3a}$  atua na extremidade livre da viga 3 (ponto 3), as seguintes velocidades são induzidas nas vigas 1, 2 e 3: ponto 3 - angular (de flexão) e transversal (de flexão); ponto 2 - angular (de flexão e torção) e transversal (de flexão); ponto 1 - angular (de flexão) e transversal (de flexão). Todas estas velocidades divididas pelo momento fletor dão origem às mobilidades  $\bar{Y}_{33}^{FF}_{w\_m}$ ,  $\bar{Y}_{33}^{FF}_{v\_m}$ ,  $\bar{Y}_{23}^{FF}_{w\_m}$ ,  $\bar{Y}_{23}^{TF}_{w\_m}$ ,  $\bar{Y}_{23}^{FF}_{v\_m}$ ,  $\bar{Y}_{13}^{FF}_{w\_m}$  e  $\bar{Y}_{13}^{FF}_{v\_m}$ . A Figura C.7 ilustra o procedimento de cálculo destas mobilidades, ou seja, aplicar um momento no ponto 3, obter as velocidades angulares e transversais e dividi-las pelo momento fletor aplicado.

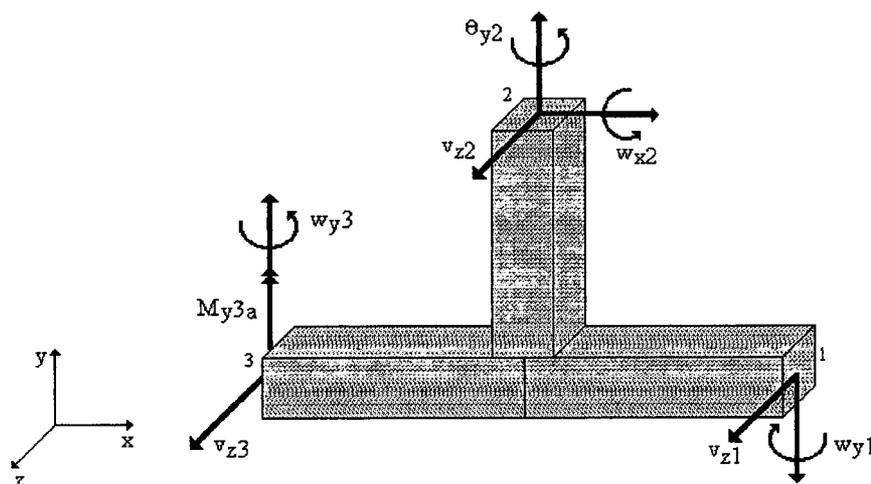


Figura C.7:  $Y_{33}^{FF}_{w\_m}$ ,  $Y_{33}^{FF}_{v\_m}$ ,  $Y_{23}^{FF}_{w\_m}$ ,  $Y_{23}^{TF}_{w\_m}$ ,  $Y_{23}^{FF}_{v\_m}$ ,  $Y_{13}^{FF}_{w\_m}$  e  $Y_{13}^{FF}_{v\_m}$ .

Análogo ao primeiro caso, precisa-se de dezoito condições de contorno para determinação das mobilidades. Estas condições tem equações iguais à (C.1) até (C.18), com duas mudanças, pois a excitação mudou:

- a equação (C.17) agora é  $T_{x3}(L3) = -T_{x3a}$
- a equação (C.11) agora é  $M_{y1}(L1) = 0$ .

Com as constantes determinadas, podem-se calcular as mobilidades:

$$\bar{Y}_{33}^{FF}_{w\_m}(f) = \frac{2j\pi f}{M_{y3a}} \bar{w}_{y3}(0) \quad (C.58)$$

$$\bar{Y}_{33}^{FF}_{v\_m}(f) = \frac{2j\pi f}{M_{y3a}} \bar{v}_{z3}(0) \quad (C.59)$$

$$\bar{Y}_{23}^{FF}_{w\_m}(f) = \frac{2j\pi f}{M_{y3a}} \bar{w}_{x2}(L2) \quad (C.60)$$

$$\bar{Y}_{23}^{TF}_{w\_m}(f) = \frac{2j\pi f}{M_{y3a}} \bar{\theta}_{y2}(L2) \quad (C.61)$$

$$\bar{Y}_{23}^{FF}_{v\_m}(f) = \frac{2j\pi f}{M_{y3a}} \bar{v}_{z2}(L2) \quad (C.62)$$

$$\bar{Y}_{13}^{FF}_{w\_m}(f) = \frac{2j\pi f}{M_{y3a}} \bar{w}_{y1}(L1) \quad (C.63)$$

$$\bar{Y}_{13}^{FF}_{v\_m}(f) = \frac{2j\pi f}{M_{y3a}} \bar{v}_{z1}(L1) \quad (C.64)$$

**MOBILIDADES**  $\bar{Y}_{33}^{TT}_{w\_m}$ ,  $\bar{Y}_{23}^{FT}_{w\_m}$ ,  $\bar{Y}_{23}^{FT}_{v\_m}$  e  $\bar{Y}_{13}^{TT}_{w\_m}$

Quando um momento torçor unitário  $T_{x3a}$  atua na extremidade livre da viga 3 (ponto 3), as seguintes velocidades são induzidas nas vigas 1, 2 e 3: ponto 3 - angular (de torção); ponto 2 - angular (de flexão) e transversal (de flexão) e ponto 1 - angular (de torção). Todas estas velocidades divididas pelo momento torçor dão origem às mobilidades  $\bar{Y}_{33}^{TT}$ ,  $\bar{Y}_{23}^{FT}$ ,  $\bar{Y}_{23}^{v_m}$  e  $\bar{Y}_{13}^{TT}$ . A Figura C.8 ilustra o procedimento de cálculo destas mobilidades, ou seja, aplicar um momento no ponto 3, obter as velocidades angulares e transversais e dividi-las pelo momento torçor aplicado.

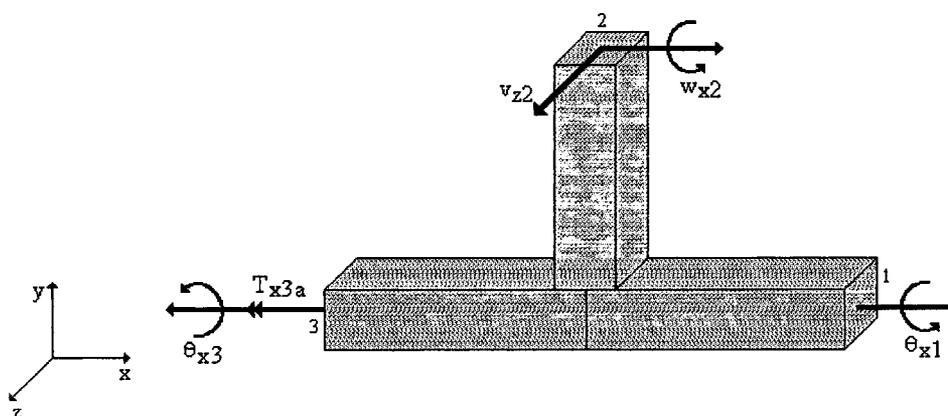


Figura C.8: Determinação de  $\bar{Y}_{33}^{TT}$ ,  $\bar{Y}_{23}^{FT}$ ,  $\bar{Y}_{23}^{v_m}$  e  $\bar{Y}_{13}^{TT}$ .

Análogo ao primeiro caso, precisa-se de dezoito condições de contorno para determinação das mobilidades. Estas condições tem equações iguais à (C.1) até (C.18), com duas mudanças, pois a excitação mudou:

- a equação (C.16) agora é  $T_{x3}(L3) = -T_{x3a}$
- a equação (C.11) agora é  $M_{y1}(L1) = 0$ .

Com as constantes determinadas, podem-se calcular as mobilidades:

$$\bar{Y}_{33}^{TT}(f) = \frac{2j\pi f}{T_{x3a}} \bar{\theta}_{x3}(0) \quad (C.65)$$

$$\bar{Y}_{23}^{FT}_{w_m}(f) = \frac{2j\pi f}{T_{x3a}} \bar{w}_{x2}(L2) \quad (C.66)$$

$$\bar{Y}_{23}^{FT}_{v_m}(f) = \frac{2j\pi f}{T_{x3a}} \bar{v}_{z2}(L2) \quad (C.67)$$

$$\bar{Y}_{13}^{TT}_{w_m}(f) = \frac{2j\pi f}{T_{x3a}} \bar{\theta}_{x1}(L1) \quad (C.68)$$

**MOBILIDADES**  $\bar{Y}_{33}^{FF}_{w_f}$ ,  $\bar{Y}_{33}^{FF}_{v_f}$ ,  $\bar{Y}_{23}^{FF}_{w_f}$ ,  $\bar{Y}_{23}^{TF}_{w_f}$ ,  $\bar{Y}_{23}^{FF}_{v_f}$ ,  $\bar{Y}_{13}^{FF}_{w_f}$  e  $\bar{Y}_{13}^{FF}_{v_f}$

Quando uma força cortante unitária  $F_{z3a}$  atua na extremidade livre da viga 3 (ponto 3), as seguintes velocidades são induzidas nas vigas 1, 2 e 3: ponto 3 - angular e transversal (de flexão); ponto 2 - angular (de flexão e torção) e transversal (de flexão) e ponto 1 - angular e transversal (de flexão). Todas estas velocidades divididas pela força dão origem às mobilidades  $\bar{Y}_{33}^{FF}_{w_f}$ ,  $\bar{Y}_{33}^{FF}_{v_f}$ ,  $\bar{Y}_{23}^{FF}_{w_f}$ ,  $\bar{Y}_{23}^{TF}_{w_f}$ ,  $\bar{Y}_{23}^{FF}_{v_f}$ ,  $\bar{Y}_{13}^{FF}_{w_f}$  e  $\bar{Y}_{13}^{FF}_{v_f}$ . A Figura C.9 ilustra o procedimento de cálculo destas mobilidades, ou seja, aplicar uma força no ponto 1, obter as velocidades angulares e transversais e dividi-las pela força cortante aplicada.

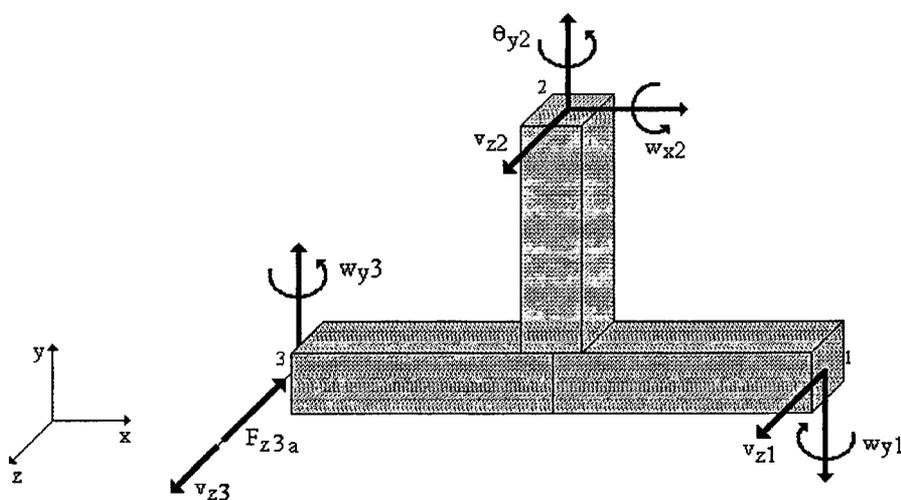


Figura C.9: Determinação de  $\bar{Y}_{33}^{FF}_{w_f}$ ,  $\bar{Y}_{33}^{FF}_{v_f}$ ,  $\bar{Y}_{23}^{FF}_{w_f}$ ,  $\bar{Y}_{23}^{TF}_{w_f}$ ,  $\bar{Y}_{23}^{FF}_{v_f}$ ,  $\bar{Y}_{13}^{FF}_{w_f}$  e  $\bar{Y}_{13}^{FF}_{v_f}$ .

Análogo ao primeiro caso, precisa-se de dezoito condições de contorno para determinação das mobilidades. Estas condições tem equações iguais à (C.1) até (C.18), com duas mudanças, pois a excitação mudou:

- a equação (C.18) agora é  $F_{z3}(L3) = -F_{z3a}$
- a equação (C.11) agora é  $M_{y1}(L1) = 0$ .

Com as constantes determinadas, podem-se calcular as mobilidades:

$$\bar{Y}_{33}^{\text{FF}}_{w\_f}(f) = \frac{2j\pi f}{F_{z3a}} \bar{w}_{y3}(0) \quad (\text{C.69})$$

$$\bar{Y}_{33}^{\text{FF}}_{v\_f}(f) = \frac{2j\pi f}{F_{z3a}} \bar{v}_{z3}(0) \quad (\text{C.70})$$

$$\bar{Y}_{23}^{\text{FF}}_{w\_f}(f) = \frac{2j\pi f}{F_{z3a}} \bar{w}_{x2}(L2) \quad (\text{C.71})$$

$$\bar{Y}_{23}^{\text{TF}}_{w\_f}(f) = \frac{2j\pi f}{F_{z3a}} \bar{\theta}_{y2}(L2) \quad (\text{C.72})$$

$$\bar{Y}_{23}^{\text{FF}}_{v\_f}(f) = \frac{2j\pi f}{F_{z3a}} \bar{v}_{z2}(L2) \quad (\text{C.73})$$

$$\bar{Y}_{13}^{\text{FF}}_{w\_f}(f) = \frac{2j\pi f}{F_{z3a}} \bar{w}_{y1}(L1) \quad (\text{C.74})$$

$$\bar{Y}_{13}^{\text{FF}}_{v\_f}(f) = \frac{2j\pi f}{F_{z3a}} \bar{v}_{z1}(L1) \quad (\text{C.75})$$

**MOBILIDADES**  $\bar{Y}_{1x0}^{\text{FF}}_{w\_f}$ ,  $\bar{Y}_{1x0}^{\text{FF}}_{v\_f}$ ,  $\bar{Y}_{2x0}^{\text{FF}}_{w\_f}$ ,  $\bar{Y}_{2x0}^{\text{TF}}_{w\_f}$ ,  $\bar{Y}_{2x0}^{\text{FF}}_{v\_f}$ ,  $\bar{Y}_{3x0}^{\text{FF}}_{w\_f}$  e  $\bar{Y}_{3x0}^{\text{FF}}_{v\_f}$

As mobilidades referentes à força externa  $F_a$  são obtidas ao aplicar-se um força unitária num ponto  $x_0$  qualquer, com  $0 < x_0 < L1$ , resolver o sistema e determinar as equações da onda. Para que a condição de continuidade seja mantida no ponto  $x_0$ , a equação da onda de deslocamento transversal na viga 1 é separada duas,  $v_{z1_1}(x)$  e  $v_{z1_2}(x)$ , onde  $v_{z1_1}(x)$  é válida de  $0 < x < x_0$  e  $v_{z1_2}(x)$  é válida de  $x_0 < x < L1$ .

$$0 \leq x \leq x_0 \quad v_{y1_1}(x) = A1 \cosh(k_{f1}x) + B1 \sinh(k_{f1}x) + C1 \cos(k_{f1}x) + D1 \sin(k_{f1}x) \quad (C.76)$$

$$x_0 \leq x \leq L1 \quad v_{y1_2}(x) = E1 \cosh(k_{f1}x) + F1 \sinh(k_{f1}x) + G1 \cos(k_{f1}x) + H1 \sin(k_{f1}x) \quad (C.77)$$

Quando uma força unitária  $F_a$  atua num ponto  $x_0$ , as seguintes velocidades são induzidas nas vigas 1, 2 e 3: ponto 1 - angular e transversal (de flexão); ponto 2 - angular (de flexão e torção) e transversal (de flexão) e ponto 3 - angular e transversal (de flexão). Todas estas velocidades divididas pela força dão origem às mobilidades  $\bar{Y}1x_0^{FF}_{w_f}$ ,  $\bar{Y}1x_0^{FF}_{v_f}$ ,  $\bar{Y}2x_0^{FF}_{w_f}$ ,  $\bar{Y}2x_0^{TF}_{w_f}$ ,  $\bar{Y}2x_0^{FF}_{v_f}$ ,  $\bar{Y}3x_0^{FF}_{w_f}$  e  $\bar{Y}3x_0^{FF}_{v_f}$ . A Figura B.10 ilustra o procedimento de cálculo destas mobilidades, ou seja, aplicar uma força no ponto  $x_0$ , obter as velocidades angulares e transversais e dividi-las pela força aplicada.

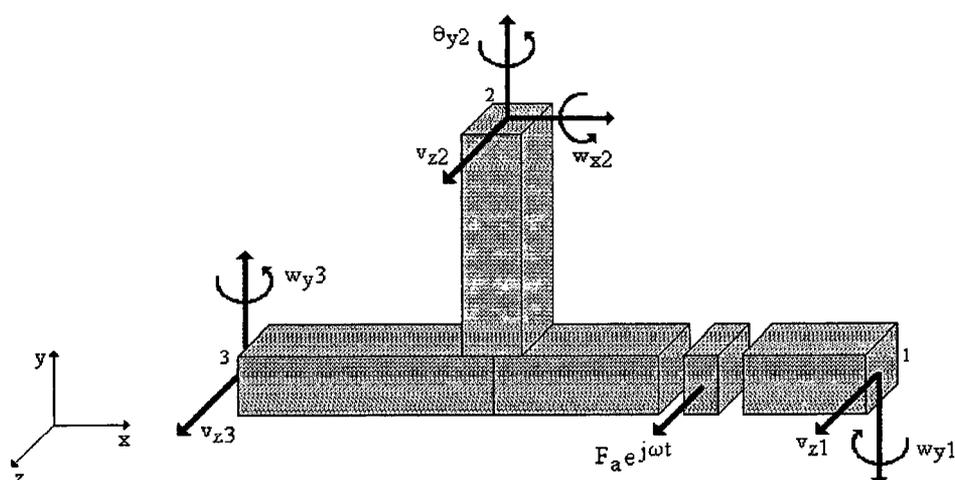


Figura C.10: Determinação de  $\bar{Y}1x_0^{FF}_{w_f}$ ,  $\bar{Y}1x_0^{FF}_{v_f}$ ,  $\bar{Y}2x_0^{FF}_{w_f}$ ,  $\bar{Y}2x_0^{TF}_{w_f}$ ,  $\bar{Y}2x_0^{FF}_{v_f}$ ,  $\bar{Y}3x_0^{FF}_{w_f}$  e  $\bar{Y}3x_0^{FF}_{v_f}$ .

Como a onda de flexão na viga 1 é dividida em duas, precisa-se de vinte e duas condições de contorno para a determinação das mobilidades. Estas condições de contorno são (Cuschieri, 1987),:

$$v_{z1\_1}(0) = v_{z2}(0) \quad (C.78)$$

$$v_{z1\_1}(0) = v_{z3}(L3) \quad (C.79)$$

$$w_{y3}(L3) = w_{y1\_1}(0) \quad (C.80)$$

$$w_{y3}(L3) = \theta_{y2}(0) \quad (C.81)$$

$$\theta_{x3}(L3) = \theta_{x1}(0) \quad (C.82)$$

$$\theta_{x3}(L3) = w_{x2}(0) \quad (C.83)$$

$$T_{x1}(0) = T_{x3}(L3) - M_{x2}(0) \quad (C.84)$$

$$M_{y1\_1}(0) = M_{y3}(L3) - T_{y2}(0) \quad (C.85)$$

$$F_{z1\_1}(0) = F_{z3}(L3) - F_{z2}(0) \quad (C.86)$$

$$v_{z1\_1}(x0) = v_{z1\_2}(x0) \quad (C.87)$$

$$w_{y1\_1}(x0) = w_{y1\_2}(x0) \quad (C.88)$$

$$M_{y1\_1}(x0) = M_{y1\_2}(x0) \quad (C.89)$$

$$F_{z1\_1}(x0) = -F_a + F_{z1\_2}(x0) \quad (C.90)$$

$$T_{x1}(L1) = 0 \quad (C.91)$$

$$M_{y1\_2}(L1) = 0 \quad (C.92)$$

$$F_{z1\_2}(L1) = 0 \quad (C.93)$$

$$T_{y2}(L2) = 0 \quad (C.94)$$

$$M_{x2}(L2) = 0 \quad (C.95)$$

$$F_{z2}(L2) = 0 \quad (C.96)$$

$$T_{x3}(0) = 0 \quad (C.97)$$

$$M_{y3}(0) = 0 \quad (C.98)$$

$$F_{z3}(0) = 0 \quad (C.99)$$

Com as constantes determinadas, podem-se calcular as mobilidades:

$$\bar{Y}1x0_{w\_f}^{FF}(f) = \frac{2j\pi f}{F_a} \bar{w}_{y1\_2}(L1) \quad (C.100)$$

$$\bar{Y}_{1x0_{v-f}}^{FF}(f) = \frac{2j\pi f}{F_a} \bar{v}_{z1_2}(L1) \quad (C.101)$$

$$\bar{Y}_{2x0_{w-f}}^{FF}(f) = \frac{2j\pi f}{F_a} \bar{w}_{x2}(L2) \quad (C.102)$$

$$\bar{Y}_{2x0_{w-f}}^{TF}(f) = \frac{2j\pi f}{F_a} \bar{\theta}_{y2}(L2) \quad (C.103)$$

$$\bar{Y}_{2x0_{v-f}}^{FF}(f) = \frac{2j\pi f}{F_a} \bar{v}_{z2}(L2) \quad (C.104)$$

$$\bar{Y}_{3x0_{w-f}}^{FF}(f) = \frac{2j\pi f}{F_a} \bar{w}_{y3}(0) \quad (C.105)$$

$$\bar{Y}_{3x0_{v-f}}^{FF}(f) = \frac{2j\pi f}{F_a} \bar{v}_{z3}(0) \quad (C.106)$$