

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DESENVOLVIMENTO E APLICAÇÃO DO  
MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL MODIFICADO (MLGFM)  
PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DA ELASTOSTÁTICA TRIDIMENSIONAL

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL  
DE SANTA CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE  
MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

AGENOR DIAS DE MEIRA JUNIOR

FLORIANÓPOLIS, DEZEMBRO DE 1994

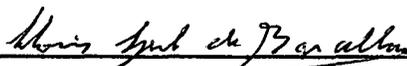
DESENVOLVIMENTO E APLICAÇÃO DO MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN  
LOCAL MODIFICADO (MLGFM) PARA SOLUÇÃO  
DE PROBLEMAS DA ELASTOSTÁTICA TRIDIMENSIONAL

AGENOR DIAS DE MEIRA JUNIOR

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO PROJETO  
E ANÁLISE DE COMPONENTES MECÂNICOS, APROVADA EM SUA FORMA FINAL  
PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA.



CLOVIS SPERB DE BARCELLOS, Ph.D.

Orientador

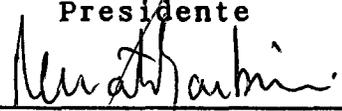


ANTONIO FÁBIO CARVALHO DA SILVA, Dr.Eng.Mec.  
Coordenador

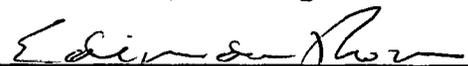
BANCA EXAMINADORA:



CARLOS ALBERTO DE CAMPOS SELKE, Ph.D.  
Presidente



RENATO BARBIERI, Dr.Eng.Mec.



EDISON DA ROSA, Dr.Eng.Mec.



TANCREDO WESTPHAL JUNIOR, M.Eng.Mec.

Para Inês e Rodrigo

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Clovis Sperb de Barcellos, pela orientação recebida durante a execução deste trabalho.

Ao Prof. Edison da Rosa pela orientação de matrícula.

Ao Eng. Tancredo Westphal Junior, pela co-orientação extra-oficial e pelas atividades de "procurador" exercida junto à secretaria do curso.

Ao Eng. Renato Barbieri pela sua contribuição na solução de problemas relativos ao MFGLM.

Ao Eng. Marco Antonio Luersen, pelo suporte computacional e pelas contribuições dadas durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas do "Green Team": Carlo Giuseppe Filippin, Marcelo Maldaner e Pablo Andrés Muñoz Rojas, pelas suas contribuições para o desenvolvimento deste trabalho.

A todos os amigos e colegas de trabalho, particularmente, Geraldo Belmonte, Armando de Sá Jr., Jucélio Tomás Pereira e Rogério Marczak.

À Universidade de Passo Fundo, por intermédio da pessoa do Prof. Luis Fernando Prestes, Diretor da Faculdade de Engenharia, pelo incentivo na realização deste trabalho.

Aos colegas professores Zacarias Chamberlain e Rubens Stuginsky Júnior, pelo suporte computacional na etapa deste trabalho realizada em Passo Fundo.

A todos os colegas, pela amizade.

## ÍNDICE

### CAPÍTULO 1 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

1.1- CARACTERÍSTICAS E PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS DO MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL MODIFICADO (MFGLM).....	1
1.2- HISTÓRICO E APLICAÇÕES .....	2

### CAPÍTULO 2 - FORMALISMO DO MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL MODIFICADO (MFGLM)

2.1- FORMULAÇÃO DO MFGLM .....	14
2.2- DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO E DO CONTORNO .....	19
2.3- APROXIMAÇÃO NUMÉRICA PELOS MÉTODOS DOS ELEMENTOS FINITOS E DOS ELEMENTOS DE CONTORNO .....	21

### CAPÍTULO 3 - FORMALISMO DO MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL MODIFICADO (MFGLM) APLICADO À ELASTOSTÁTICA TRIDIMENSIONAL

3.1- INTRODUÇÃO .....	30
3.2- EQUAÇÕES DA ELASTOSTÁTICA .....	30
3.2.1- Equações de Navier .....	30
3.3- DETALHAMENTO DO FORMALISMO DO MFGLM APLICADO À ELASTOSTÁTICA TRIDIMENSIONAL.....	34
3.3.1- Equações do Problema Clássico de Neumann .....	34
3.3.2- Elementos de Contorno e Elementos Finitos .....	36
3.3.3- Aproximação das Projeções da Função de Green $G_d(P)$ e $G_d(p)$ .....	38
3.3.4- Aproximação das Projeções da Função de Green $G_c(P)$ e $G_c(p)$ .....	42

3.4-	MALHA AUXILIAR DE ELEMENTOS FINITOS E MALHA AUXILIAR DE ELEMENTOS DE CONTORNO .....	46
3.5-	ELEMENTO HIERÁRQUICO (HEXAEDRO, DE ORDEM $p=1$ ATÉ $p=5$ )	51
	3.5.1- Espaço das Funções Hierárquicas .....	51
	3.5.2- Funções Hierárquicas .....	52
3.6-	ELEMENTO HIERÁRQUICO (QUADRILÁTERO, DE ORDEM $p=1$ ATÉ $p=5$ ) .....	55
	3.6.1- Funções Hierárquicas .....	55
3.7-	CONDIÇÕES DE CONTORNO .....	56
3.8-	CONDIÇÕES DE CONTORNO APLICADAS A NÓS HIERÁRQUICOS ...	57
3.9-	CARGAS NODAIS SOBRE SUPERFÍCIES CURVAS COM TRAÇÃO..... APLICADA .....	58

#### CAPÍTULO 4 - APLICAÇÕES

4.1-	INTRODUÇÃO .....	60
4.2-	PROBLEMA 1: BARRA PRISMÁTICA SOB TRAÇÃO UNIFORME.....	61
4.3-	PROBLEMA 2: BLOCO SUBMETIDO À CISALHAMENTO SIMPLES ....	66
4.4-	PROBLEMA 3: FLEXÃO DE UMA VIGA CURTA UNIFORMEMENTE CARREGADA .....	69
4.5-	PROBLEMA 4: CILINDRO DE PAREDE ESPESSA COM PRESSÃO INTERNA .....	77
4.6-	PROBLEMA 5: FLEXÃO DE UMA VIGA CURVA POR UMA FORÇA NA SUA EXTREMIDADE .....	83
4.7-	PROBLEMA 6: FLEXÃO PURA DE UMA VIGA PRISMÁTICA .....	90
4.8-	CONCLUSÃO .....	96

CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES .....	97
---	----

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	100
----------------------------------	-----

APÊNDICE A - DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO (3.34).....	108
---	-----

APÊNDICE B - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO HIERÁRQUICAS.....	111
B.1- NUMERAÇÃO DAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO HIERÁRQUICAS TRIDIMENSIONAIS .....	111
B.2- CONSTRUÇÃO DAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO HIERÁRQUICAS TRIDIMENSIONAIS .....	116
B.3- CARACTERÍSTICAS DAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO HIERÁRQUICAS .....	121
B.4- NUMERAÇÃO DAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO BIDIMENSIONAIS..	122
B.5- CONSTRUÇÃO DAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO BIDIMENSIONAIS HIERÁRQUICAS .....	124

## LISTA DE TABELAS

### CAPÍTULO 4

#### TABELA

1. Condições de contorno .....	64
2. Deslocamentos .....	65
3. Tensões de reação .....	66
4. Condições de contorno .....	67
5. Tensões $\sigma_{33}$ (no plano ABCD) .....	68
6. Distorção $\gamma_{23}$ .....	68
7. Tensão de cisalhamento $\tau_{23}$ .....	68
8. Condições de contorno .....	73
9. Deflexão máxima, d .....	74
10. Condições de contorno.....	81
11. Comparação dos resultados obtidos pelo MFGLM com a solução analítica e MEF .....	82
12. Condições de contorno para viga curva em balanço .....	88
13. Deslocamento radial no raio médio da extremidade livre..	88
14. Tensões normais no engaste .....	89
15. Condições de contorno para flexão pura .....	93
16. Tensões para viga sob flexão pura .....	94
17. Deslocamentos para nós dos vértices para viga sob flexão pura .....	95
18. Comparação dos erros .....	95

## LISTA DE FIGURAS

### CAPÍTULO 3

1. Condições de contorno .....	35
2. Elementos utilizados para discretização da malha auxiliar de elementos finitos .....	48
3. Elementos utilizados para discretização da malha auxiliar de elementos de contorno .....	49
4. Malha auxiliar de elementos finitos e malha auxiliar de elementos de contorno para uma barra de seção retangular	50
5. a) Elemento hexaédrico padrão $\Omega_{St}^{(h)}$ .....	52
b) Elemento quadrilátero padrão $\Omega_{St}^{(q)}$ .....	52
6. Elemento de referência $\Omega_{St}^{(q)}$ .....	56
7. Face $\zeta=1$ de um elemento sólido linear .....	58

### CAPÍTULO 4

8. Barra prismática sob tração uniforme.....	61
9. Discretização do domínio .....	63
10. Deformação prevista.. .....	63
11. Bloco submetido à cisalhamento simples $\tau=40$ .....	67
12. Viga curta sob flexão .....	70
13. Malhas utilizadas para solução do problema 3 .....	72
14. Diagrama de convergência (MFGLM).....	76
15. Diagrama de convergência (MFGLM).....	76
16. Comparação entre curvas de convergência (MFGLM).....	77
17. Cilindro vazado .....	77

18. Cilindro com pressão interna $p_i$ .....	79
19. Discretização do domínio .....	81
20. Viga curva em balanço .....	84
21. Discretização do domínio .....	86
22. Faces A e B da figura 20 .....	87
23. Viga prismática sob flexão pura .....	90
24. Malhas H02C10P3, S05C22P2 para flexão pura .....	91
25. Faces A e B da figura 23 .....	92

## LISTA DE SÍMBOLOS

$b$	Vetor Força de Corpo Generalizada
$\{b\}$	Valores Nodais da Força de Corpo Generalizada
$B(\cdot, \cdot)$	Forma Bilinear
$c$	Distância da Linha Neutra à Fibra com Tração ou Compressão Máxima
$d$	Deflexão Máxima
$d\Omega(p)$	Elemento Infinitesimal do Contorno com o Ponto $p \in \partial\Omega$
$d\Omega(P)$	Elemento Infinitesimal do Domínio Relativo às Coordenadas do ponto $P \in \Omega$
$E$	Módulo de Young
$\{f\}$	Valores Nodais das Reações Generalizadas sobre o Contorno
$G(\cdot, \cdot)$	Solução Fundamental e/ou Função de Green
$G_{ij}$	Deslocamento Generalizado na Direção $i$ de Qualquer Ponto $P \in \Omega$ , Provocado por uma Força Generalizada Unitária Aplicada no Ponto $Q \in \Omega$ na Direção $j$
$Gc(\cdot)$	Projeção da Função de Green na Base do Espaço dos Elementos de Contorno
$Gc^i$	$i$ -ésima Componente da Projeção da Função de Green no Espaço dos Elementos de Contorno
$Gd(\cdot)$	Projeção da Função de Green na Base do Espaço dos Elementos Finitos
$Gd^i$	$i$ -ésima Componente da Projeção da Função de Green no Espaço dos Elementos Finitos
$Ge$	Módulo de Elasticidade Transversal
$[G^{CP}]$	Valores Nodais de $Gc(\cdot)$ sobre o Contorno
$[G^{CP}]$	Valores Nodais de $Gc(\cdot)$ no Domínio

$[G^{DP}]$	Valores Nodais de $Gd(\cdot)$ sobre o Contorno
$[G^{DP}]$	Valores Nodais de $Gd(\cdot)$ no Domínio
$h$	Maior Diâmetro Externo Entre Todos os Elementos da Malha de Elementos Finitos
$I$	Tensor Identidade
$J(\cdot)$	Funcional que Depende de $(\cdot)$
$k_0$	Constante Real Não Nula
$[K]$	Matriz de Rigidez Convencional de Elementos Finitos
$[K_0]$	Matriz de Rigidez Adicional Devido à Presença do Operador $\mathcal{N}'$ sobre o Contorno
$m$	Número de Nós sobre o Contorno Onde Atua o Operador $\mathcal{N}'$
$[m]$	Matriz Massa do Contorno
$[M]$	Matriz Massa do Domínio
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MECG	Método dos Elementos de Contorno de Galerkin
MEF	Método dos Elementos Finitos
MFGL	Método da Função de Green Local
MFGLM	Método da Função de Green Local Modificado
$n$	Vetor Unitário Normal ao Contorno
$nelc$	Número de Elementos de Contorno
$ntn$	Número Total de Nós do Domínio
$ntnc$	Número Total de Nós do Contorno do Subdomínio
NGL	Números de Graus de Liberdade
$P_j$	Polinomiais de Legendre
$p, q$	Pontos do Contorno $\partial\Omega$
$P, Q$	Pontos do Domínio $\Omega$
$R^n$	Domínio dos Números Reais de Dimensão $n$
$t$	Vetor Tração

$\bar{t}$	Vetor Tração Prescrito
$u$	Vetor Deslocamento Generalizado
$\bar{u}$	Vetor Deslocamento Prescrito
$\{u\}$	Valores Nodais do Deslocamento
$\{u\}^D$	Valores Nodais do Deslocamento no Domínio
$\{u\}^C$	Valores Nodais do Deslocamento sobre o Contorno
$u_r$	Deslocamento Radial
$Y$	Quantidade Qualquer "Bem Comportada" no Domínio $\Omega$
$\{Y\}$	Valores Nodais da Quantidade $Y$
$\delta(\cdot, \cdot)$	Distribuição Delta de Dirac
$\epsilon$	Tensor Deformação infinitesimal
$\{\Phi\}$	Conjunto de Funções de Interpolação de Contorno
$\gamma$	Distorção Angular
$\{\Psi\}$	Conjunto de Funções de Interpolação de Domínio
$\lambda, \mu$	Constantes Clássicas de Lamé
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\rho$	Densidade Inicial
$\sigma$	Tensor Tensão de Cauchy
$\sigma_r$	Tensão Radial
$\sigma_\theta$	Tensão Tangencial
$\tau$	Tensão de Cisalhamento
$\Omega$	Domínio Aberto e Limitado
$\bar{\Omega}$	Fechamento de $\Omega$
$\tilde{\Omega}$	Modelo de Elementos Finitos de $\bar{\Omega}$
$\bar{\Omega}_e$	Subregião Limitada Fechada de $R^n$ (elemento finito)
$\partial\Omega$	Contorno de $\Omega$
$\bar{\partial\Omega}$	Fechamento de $\partial\Omega$
$\partial\Omega_1$	Parcela do Contorno Onde $u$ é Especificado

$\partial\Omega_2$	Parcela do Contorno Onde $t$ é Especificado
$\xi, \eta, \zeta$	Coordenadas do Elemento de Referência
$I$	Momento de Inércia
$l$	Comprimento da Viga
$p$	Grau do Polinômio Aproximador do Elemento Finito
$E$	Número de Subregiões Limitadas Fechadas $\bar{\Omega}_e$ de $R^n$
$\mathcal{L}$	Operador Diferencial
$\mathcal{L}^*$	Operador Adjunto Formal de $\mathcal{L}$
$\mathcal{N}$	Operador de Neumann para $\mathcal{L}$
$\mathcal{N}^*$	Operador de Neumann para $\mathcal{L}^*$
$\mathcal{N}'$	Operador Adicional
$\nabla$	Operador Nabla
$(\cdot)^t$	Transposto de $(\cdot)$
$A, B, \dots, F$	Matrizes
$(\cdot)_{,x_i}$	Derivada Parcial de $(\cdot)$ com Relação à Coordenada Cartesiana " $x_i$ "
$\cdot$	Produto interno
$\times$	Produto vetorial
$A, B, \dots, F$	Matrizes Características de Green

## RESUMO

Este trabalho apresenta a utilização do Método da Função de Green Local Modificado (MFGLM) para resolver problemas da elastostática tridimensional.

A revisão bibliográfica apresenta primeiramente as características e princípios fundamentais do MFGLM, seguido de um histórico do método.

O formalismo matemático do MFGLM é apresentado afim de mostrar como é utilizada a função de Green sem o conhecimento de sua forma explícita, através do uso das propriedades do operador adjunto. O MFGLM utiliza as projeções da função de Green sobre o subespaço gerado pelas funções de interpolação definidas sobre o contorno e no domínio e não utiliza derivadas da função de Green. As projeções das equações integrais são feitas de maneira similar ao Método dos Elementos de Contorno de Galerkin, obtendo-se as projeções da função de Green sem o conhecimento da mesma. Isto é feito através da discretização das variáveis desconhecidas de maneira similar ao Método dos Elementos Finitos (MEF) ou ao Método dos Elementos de Contorno (MEC).

Neste trabalho o formalismo do MFGLM, acima descrito, é aplicado à elastostática tridimensional. São apresentadas as equações básicas da elastostática e o procedimento para obtenção das equações do problema clássico de Neumann. O método para obtenção das projeções da função de Green para o caso tridimensional é detalhado e também são apresentados os elementos utilizados para a geração das malhas auxiliares de

elementos finitos e de elementos de contorno. São apresentadas também a aplicação de condições de contorno e o tratamento de cargas nodais sobre superfícies curvas com tração aplicada.

O MFGLM é utilizado para a solução dos seguintes exemplos de aplicação em elasticidade tridimensional : barra prismática sob tração uniforme, bloco submetido à cisalhamento simples, flexão de uma viga curta uniformemente carregada, cilindro de parede espessa com pressão interna, flexão de uma viga curva por uma força na sua extremidade e flexão pura de uma viga prismática.

Finalmente, são apresentadas as conclusões e sugestões para novas pesquisas sobre o comportamento do MFGLM quando aplicado para solução de problemas da elastostática.

## ABSTRACT

In this work the Modified Local Green's Function Method (MLGFM) is used to solve problems of three-dimensional elastostatics.

A bibliographical review presents the characteristics, principles and a brief historical background of the MLGFM.

The mathematical formalism of the MLGFM is presented, in order to show how the method treats the Green's function without the knowledge of its explicit form, through the adjoint operator properties. The MLGFM uses the Green's function projections over the subspace spanned by the interpolation functions defined on the boundary and in the domain, not using the derivatives of the Green's functions. The projections of the integral equations are done in a way similar to the Galerkin Boundary Element Method, in order to produce the Green's function projections without its prior knowledge. These projections are obtained through the discretization of the unknown variables in a manner similar to both, the Finite Element Method (FEM) and the Boundary Element Method (BEM).

The MLGFM formalism is applied to three-dimensional elastostatics in this work. The basic equations of the elastostatics are presented, as well as the procedure to obtain the equations of the Neumann's classical problem. The method to

obtain the Green's function projections for the three-dimensional case is presented in detail, as well as the elements used to generate the BEM and the FEM auxiliary mesh are obtained. The application of the boundary conditions and the treatment of the nodal loads on curved surface over tractions are also presented.

The MLGFM is used to solve the following applications examples of three-dimensional elastostatics : a prismatic bar under uniform tension, pure shearing, the flexure of an uniform loaded beam, a cylinder with internal pressure, the flexure of a bended beam and the pure flexure of a prismatic beam.

Finally, the conclusions of this work are presented and suggestions for new studies on the MLGFM behavior when solving elastostatics problems are also discussed.

## CAPÍTULO 1

### REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

---

#### 1.1- CARACTERÍSTICAS E PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS DO MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL MODIFICADO (MFGLM)

O Método da Função de Green Local Modificado (MFGLM ou MLGFM - Modified Local Green's Function Method) é uma nova técnica integral que está sendo utilizada para a solução de diversos problemas da mecânica do contínuo.

O MFGLM apresenta algumas das vantagens de outras três técnicas: o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e o Método da Função de Green (MFG).

O MFGLM foi originalmente concebido para uso de partições de domínio e contorno, com a possibilidade de utilização de malhas grosseiras. No entanto, BARCELLOS e BARBIERI [1] verificaram que bons resultados podem ser obtidos sem partição de domínio, mesmo em problemas singulares.

O MFGLM apresenta ainda como característica a diminuição da máxima ordem das singularidades a serem tratadas, pois não utiliza derivadas da função de Green, obtendo-se assim equações mais apropriadas para integração numérica. Isto, a princípio,

exigiria o conhecimento da função de Green. Resolve-se este problema fazendo-se projeções das equações integrais de maneira similar ao Método dos Elementos de Contorno de Galerkin (MECG), obtendo-se as projeções da função de Green sem o conhecimento explícito da mesma. Desde que as projeções das funções de Green têm componentes contínuas [2], elas podem ser aproximadas por funções contínuas. Assim, elas são expressas como o produto de um vetor das funções de interpolação de domínio ou de contorno por um tensor cujas componentes são as coordenadas das projeções da função de Green sobre os subespaços gerados pelas funções de interpolação. Determinado o tensor, as matrizes de Green podem ser obtidas. A determinação dos vetores de Green é realizada resolvendo dois problemas associados, usando o MEF e, posteriormente, as componentes dos vetores solução são adequadamente reorganizadas, formando a representação matricial do tensor.

## 1.2- HISTÓRICO E APLICAÇÕES

A seguir será apresentado um histórico do MFGLM, apresentando um resumo dos trabalhos e publicações existentes sobre o método.

BURNS [3] apresentou uma formulação integral para o problema multidimensional de difusão de nêutrons, utilizando o Método da Função de Green Local (MFGL). Os problemas testados

envolvem sempre geometrias simples, para os quais se dispõe da função de Green apropriada, determinada analiticamente.

HORAK [4] apresentou o MFGL para solução de problemas de condução de calor e de escoamentos incompressíveis, particularizando a aplicação do método a domínios que possuam contornos coincidentes com linhas de coordenadas.

LAWRENCE [5] apresentou o MFGL para difusão multidimensional de nêutrons.

Os trabalhos de BURNS [3], HORAK [4] e LAWRENCE [5] apresentaram os aspectos formais de métodos que usam funções de Green definidas localmente.

SILVA [6] apresentou a formulação abstrata do Método da Função de Green Local Modificado (MFGLM). Como aplicação do MFGLM analisa primeiramente hastes delgadas, e mostra como obter de maneira sistemática as condições de transmissão nas interfaces de elementos. O formalismo do MFGLM é desenvolvido para hastes delgadas e é apresentada uma aproximação numérica do problema. A haste considerada é bi-engastada e de rigidez constante, sujeita a um carregamento uniforme. Os testes computacionais são realizados sem partição da haste, e os resultados numéricos são muito precisos. Também é verificado o comportamento do método quando há variações na rigidez, na carga e no tipo de condições de contorno. Considera o problema de uma haste delgada de rigidez variável, com um extremo fixo e outro livre, sob ação de carga de compressão axial. A haste é particionada em dois elementos. Os resultados numéricos, comparados com os resultados analíticos, apresentam erros

relativos da ordem de no máximo 5%. As matrizes de Green obtidas pela formulação do MFGLM em hastes delgadas possuem as mesmas características das que resultam do MEF.

A aplicação do MFGLM em vigas também foi apresentada por SILVA [6]. No tratamento numérico os operadores integrais são expressos na forma matricial. As matrizes resultantes da discretização para o cálculo das projeções são simétricas e de banda, com a mesma largura das que resultam do MEF. É apresentada uma aplicação do MFGLM para uma viga em balanço, com rigidez variável, sujeita a uma carga concentrada. A viga é particionada em 3 elementos, e os resultados numéricos praticamente coincidem com os analíticos.

SILVA [6] apresentou ainda a aplicação do MFGLM em membranas elásticas não-homogêneas. No caso geral, não se dispõe de uma solução fundamental para estes problemas. As matrizes de Green são calculadas diretamente. Inicialmente é estabelecido o problema numa estrutura matemática condizente com as técnicas de contorno. A seguir são identificados os espaços funcionais onde o problema está inserido. A aproximação numérica é feita variacionalmente, e a discretização é baseada em elementos finitos. É mostrado o procedimento para a aproximação direta das matrizes de Green, e várias aplicações do método testam-no quanto à flexibilidade na abordagem destes tipos de problemas.

BARCELLOS e SILVA [2] apresentaram uma formulação modificada baseada no Método da Função de Green Local (HORAK [4]), desenvolvida para o problema de membrana elástica fina. Esta metodologia conduz a equações integrais de contorno com a

mesma estrutura das obtidas pelo MEC. Funções de interpolação são usadas juntamente com o Método de Galerkin para a discretização do sistema de equações integrais. As matrizes são diretamente calculadas sem o uso explícito das funções de Green, aplicando o MEF para dois outros problemas associados, os quais diferem um do outro somente no carregamento. Diversos exemplos numéricos são apresentados e os resultados mostram boa aproximação com as soluções analíticas e resultados obtidos pelo MEF e MEC, com erro menor utilizando malhas mais grosseiras. Concluem que o MFGLM pode ter uma eficiência computacional comparável com o MEF e MEC.

MACHADO [7] apresentou uma investigação da aplicabilidade do MFGLM para placas laminadas ortotrópicas. O formalismo matemático do MFGLM é apresentado, sendo primeiramente aplicado para placas laminadas compostas usando um modelo de camada única, com expansão polinomial de primeira ordem (FSDT). As equações diferenciais governantes são determinadas a partir do Princípio da Energia Potencial Mínima. Tanto no domínio quanto sobre o contorno são usados elementos lagrangeanos quadráticos. Uma análise pelo MFGLM para placa ortotrópica laminada é realizada de acordo com o modelo do campo de deslocamentos proposto por Mindlin. São apresentados exemplos numéricos e os resultados são comparados com soluções analíticas ou com os obtidos a partir do MEF. Nestes exemplos o MFGLM é considerado como um procedimento global, no sentido de que uma única célula de Green é usada. Assim, pode-se avaliar o que uma única célula é capaz de representar. Os resultados obtidos

mostram alta precisão, quando comparados com os resultados obtidos por outros métodos. Concluem que o MFGLM é uma boa alternativa para a análise de placas laminadas.

BARCELLOS e MACHADO [8] apresentaram mais resultados sobre a aplicação do MFGLM para solução de problemas de flexão de placas ortotrópicas laminadas, mediante teoria de primeira ordem (FSDT). Aplicam o MFGLM para um problema vetorial sem solução fundamental existente numa forma explícita. Os resultados obtidos são considerados excelentes quando comparados com outros métodos.

MACHADO et al [9] apresentaram o MFGLM aplicado a problemas da mecânica do contínuo, particularizando a aplicação do método à problemas de flexão de placas ortotrópicas laminadas.

MACHADO et al [10] apresentaram uma análise comparativa entre o MEF e o MFGLM para a solução de placas laminadas de materiais compostos. Apresentam algumas aplicações que mostram o desempenho dos dois métodos em termos de precisão de resultados, sensibilidade à distorção e taxas de convergência. Concluem que os resultados obtidos tem precisão comparável aos determinados pelo MEF, baixa sensibilidade à distorção e taxas de convergência mais acentuada.

BARBIERI e BARCELLOS [11] apresentaram o MFGLM aplicado para o modelo de placa de Mindlin. O formalismo matemático do MFGLM é apresentado e um exemplo numérico é incluído. Mesmo usando funções de interpolação tomadas a partir de elementos finitos de deslocamento, são obtidos resultados satisfatórios.

Conclui-se que o MFGLM pode se firmar como uma técnica numérica adequada para solução de uma grande classe de problemas de placas.

BARBIERI e BARCELLOS [12] continuam na análise de placas de Mindlin. São analisados os problemas de placa de Morley engastada e de placa circular com espessura variável.

BARBIERI et al [13] apresentaram mais resultados sobre o problema da placa de Mindlin dando ênfase a aspectos de convergência puntual e sensibilidade à distorção de malha.

BARBIERI e BARCELOS [14] apresentaram uma análise do problema potencial pelo MFGLM, utilizando uma abordagem unicelular para o problema de potencial homogêneo. Os resultados demonstram a existência de superconvergência nodal de fluxo e potencial.

BARCELLOS e BARBIERI [1] apresentaram a aplicação do MFGLM para calcular problemas potenciais singulares. O MFGLM é usado para a solução das equações de Poisson com singularidades associadas à geometria do domínio e condições de contorno descontínuas. Dois exemplos são resolvidos para diferentes malhas, concluindo que as soluções obtidas pelo MFGLM apresentam o mesmo comportamento que o MEC. Singularidades podem ser tratadas mesmo com elementos de menor ordem.

BARBIERI e BARCELLOS [15] apresentaram uma aplicação do MFGLM para o tratamento de problemas num meio onde as propriedades do campo potencial não são homogêneas e onde não há, conseqüentemente, soluções fundamentais conhecidas. O formalismo matemático do método é detalhadamente discutido.

Alguns resultados numéricos são apresentados, sendo os mesmos considerados excelentes.

BARBIERI [16] apresentou o formalismo matemático, o desenvolvimento e a aplicação do método para problemas de potencial, problemas de elasticidade bidimensional e análise de placas com teorias de primeira ordem. Trata com detalhes a formulação abstrata do MFGLM, mostrando que esta nova técnica numérica pode ser entendida como sendo o MECG não convencional. Discute as condições de existência e unicidade da solução e todo o formalismo para implementação numérica, acompanhados de interpretação física. Apresenta ainda com detalhes a formulação do MFGLM para problemas de potencial e desenvolve diversos tipos de elementos, com o objetivo de testar a qualidade de cada um deles, e verificar experimentalmente a taxa de convergência. São observadas características de superconvergência puntual, tanto para potencial como para fluxo. Apresenta ainda aplicações como problemas não-homogêneos com características do meio variáveis e problemas singulares. Nos problemas da elasticidade bidimensional/axissimétrica são desenvolvidos elementos lineares, quadráticos e cúbicos, resolvendo problemas de estado plano de tensões/deformações e axissimétricos. Apresentou ainda a aplicação do MFGLM para problemas de flexão de placas semi-espessas/espessas. BARBIERI et al [17] apresentaram mais resultados sobre a aplicação do MFGLM na solução de problemas da elastostática bidimensional.

BARBIERI et al [18] apresentaram uma aplicação do MFGLM para o problema de casca de dupla curvatura, obtendo resultados

concordantes com os obtidos pelo MEF.

BARBIERI et al [19] apresentaram o formalismo matemático do MFGLM aplicado à cascas semi-espessas, juntamente com algumas soluções numéricas. Aplicam o MFGLM na solução de dois problemas; scordelis-lo roof e casca cilíndrica curta engastada. Os resultados mostram excelente convergência, principalmente em tensões.

BARBIERI et al [20] apresentaram para o MFGLM uma formulação para subregiões. Propõem uma alternativa para redução do tempo de processamento (que atualmente é moroso devido à necessidade de aproximar as projeções da função de Green com o MEF) com o uso de subregiões. Apresentam resultados numéricos para os problemas de potencial. Concluem que os resultados pontuais de fluxo obtidos com o MFGLM são superiores aos obtidos pelo MEF e que as taxas de convergência para fluxo são bastante diferentes para o FEM e o MFGLM.

FILIPPIN [21] empregou o MFGLM para a análise modal da equação de Helmholtz, resolvendo um problema de autovalor/autovetor para determinação das frequências e modos de vibração. O método é implementado para equações hiperbólicas, mostrando a obtenção das matrizes de inércia para as equações integrais e a montagem do problema algébrico de autovalor. O MFGLM é aplicado à equação de Helmholtz, resolvendo-se problemas de vibração livre de membranas elásticas e de propagação de ondas em cavidades acusticamente rígidas. É realizada a análise empírica de convergência, tanto  $h$  quanto  $p$ . Implementa elementos lagrangeanos quadrangulares de primeira a décima ordem

(4,9,16,25,36,49,64,81,100,121 nós). O problema de autovalor/autovetor é resolvido pelo método da iteração subespacial. É analisado o comportamento do método quanto à distorção de malha. Os resultados obtidos são comparados com os encontrados através de soluções analíticas, MEF ou MEC. Os valores das frequências naturais são bem próximos aos analíticos, mesmo para modos superiores, o que não acontece com o MEF. No entanto os resultados obtidos não o foram com a mesma discretização entre o MFGLM e o MEF.

FILIPPIN at al [22] apresentaram uma análise experimental de convergência  $h$  e  $p$  do MFGLM para problemas estáticos e dinâmicos de potencial. Concluem que a taxa de convergência  $h$  do MFGLM é semelhante à do FEM e que a convergência  $p$  é mais favorável no MFGLM.

FILIPPIN at al [23] apresentaram o MFGLM como uma ferramenta computacional. Como aplicação utilizam o MFGLM na solução do problema de vibração livre de membrana. Concluem que com a utilização de técnicas adaptativas se conseguirá aproveitar ao máximo as potencialidades do método.

FILIPPIN at al [24] apresentaram o MFGLM aplicado a solução de problemas da mecânica do contínuo regidos pela equação de Helmholtz, apresentando casos de membrana retangular, membrana em L, membrana elíptica e cavidade retangular. Os resultados apresentam excelente precisão.

FILIPPIN at al [25] apresentaram mais resultados da aplicação do MFGLM em problemas de vibração livre de membrana e cavidades acústicas. Apresentam casos com condições de contorno

mistas. Mesmo para as altas frequências os resultados tem excelente convergência.

MALDANER [26] apresentou o MFGLM utilizado para a obtenção do fator de intensidade de tensões. Utiliza o elemento Quarter-Point, os elementos especiais de fratura da família de Akin e de Stern e os elementos convencionais lagrangeanos aplicados no MFGLM. Compara o desempenho dos elementos convencionais com os elementos especiais de fratura e conclui que a família de Akin fornece os melhores resultados.

MALDANER e BARCELLOS [27] apresentaram a análise de problemas da mecânica da fratura bidimensional com o uso do MFGLM. Utilizam refino de malha em progressão geométrica junto ao vértice da trinca. Obtém os valores do fator de concentração de tensões para casos de trinca central e lateral. Os resultados obtidos apresentam erros muito pequenos.

MALDANER et al [28] apresentaram mais resultados sobre a utilização do elemento Quarter-Point no MFGLM. O domínio é modelado pelo elemento serendipity quadrático e o fator intensidade de tensões é determinado fazendo uso dos resultados de deslocamentos. Os resultados obtidos são considerados excelentes.

MALDANER e BARCELLOS [29] apresentaram mais resultados sobre a obtenção do fator de intensidade de tensões através da utilização do MFGLM utilizando elementos de trinca. Apresentam uma comparação do desempenho dos elementos especiais de fratura da família de Akin e de Stern, quando utilizados no MFGLM. São utilizados na análise o elemento de Akin de 9 nós, o elemento

quadrático de Stern e os resultados são comparados com o elemento lagrangeano quadrático. Concluem que a família de Akin fornece os melhores resultados.

MUÑOZ [30] apresentou o MFGLM aplicado na solução de problemas de flexão e vibração livre de placas de Reissner-Mindlin. Apresenta uma formulação geral alternativa do método, demonstrando que o erro da solução aproximada é minimizado somente no domínio, dentro de cada célula de Green. Analisa a existencia do fenomeno de travamento ou "locking" quando da aproximação das projeções da função de Green com elementos finitos baseados em deslocamentos.

MUÑOZ et al [31] apresentaram mais resultados do MFGLM aplicado ao problema de vibração livre de placa de Mindlin. Analisam o problema de placa simplesmente apoiada modelada com simetria. Os resultados concordam com os obtidos pelo MEF e pela teoria de Mindlin.

MUÑOZ e BARCELLOS [32] apresentaram uma análise comparativa do desempenho do MFGLM frente ao MEF para a solução de problemas de flexão e vibração livre de placas de Mindlin. As comparações são feitas para deslocamentos, esforços e frequencias naturais de vibração. São empregados elementos de domínio de 8,9,16,25 e 36 nós, sempre aplicando no MEF o mesmo elemento finito e a mesma discretização utilizados no MFGLM. Concluem que os resultados para esforços são bastante superiores no MFGLM em relação ao MEF. Para deslocamentos e frequencias naturais os resultados obtidos pelo MFGLM e MEF são semelhantes, inclusive em relação ao fenomeno do travamento ou "locking".

MUÑOZ e BARCELLOS [33] apresentaram mais resultados da aplicação do MFGLM na solução do problema de vibração livre de placas de Mindlin. São apresentados a formulação do MFGLM para problemas de vibração livre de placas de Mindlin e resultados numéricos para placas com várias condições de contorno. Concluem que a aplicação do MFGLM na solução destes tipos de problemas é viável.

## CAPÍTULO 2

### FORMALISMO DO MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL MODIFICADO (MFGLM)

---

#### 2.1- FORMULAÇÃO DO MFGLM

A formulação do MFGLM é apresentada neste capítulo, tendo como base o trabalho realizado por BARBIERI [16].

Seja o sistema de equações diferenciais

$$\mathcal{L} u(P) = b(P) \quad P \in \Omega \quad (2.1)$$

onde  $\Omega$  é um domínio limitado e aberto com contorno fechado  $\partial\Omega$ ,  $\mathcal{L}$  é um operador diferencial,  $u$  um vetor deslocamento generalizado e  $b$  um vetor força generalizada.

O problema adjunto associado é dado por

$$\mathcal{L}^* G(P,Q) = \delta(P,Q) I \quad P, Q \in \Omega \quad (2.2)$$

onde  $\mathcal{L}^*$  é o operador diferencial adjunto de  $\mathcal{L}$ ,  $\delta(P,Q)$  é uma excitação do tipo função generalizada delta de Dirac,  $I$  é o tensor identidade e  $G(P,Q)$  o tensor solução fundamental.  $G_{ij}$

representa o deslocamento generalizado na direção  $i$  de qualquer ponto  $P \in \Omega$ , provocado por uma força generalizada concentrada unitária aplicada no ponto  $Q \in \Omega$  na direção  $j$ .

No presente trabalho, os deslocamentos generalizados são deslocamentos "puros" e o meio é isotrópico, e assim sendo  $G_{ij} = G_{ji}$ . Para problemas de flexão de vigas, por exemplo, os deslocamentos generalizados são dados por uma rotação e dois deslocamentos puros, enquanto as forças generalizadas concentradas unitárias são formadas por um momento fletor, uma força transversal e uma força longitudinal.

Multiplicando a equação (2.1) por  $G(P,Q)$  e a equação (2.2) por  $u^t(P)$ , tem-se

$$G(P,Q) \mathcal{L} u(P) = G(P,Q) b(P) \quad (2.3)$$

$$u^t(P) \mathcal{L}^* G(P,Q) = u^t(P) \delta(P,Q) I = \delta(P,Q) u^t(P) \quad (2.4)$$

Subtraindo a equação (2.3) do transposto da equação (2.4) obtém-se

$$u(P) \delta(P,Q) = G(P,Q) b(P) + [\mathcal{L}^* G(P,Q)]^t u(P) + \\ - G(P,Q) \mathcal{L} u(P) \quad (2.5)$$

Integrando sobre o domínio  $\Omega$ , resulta

$$u(Q) = \int_{\Omega} G(P,Q) b(P) d\Omega(P) + \int_{\Omega} [\mathcal{L}^* G(P,Q)]^t u(P) d\Omega(P) + \\ - \int_{\Omega} G(P,Q) [\mathcal{L} u(P)] d\Omega(P) \quad (2.6)$$

onde  $d\Omega(P)$  é um elemento infinitesimal do domínio relativo às coordenadas do ponto  $P \in \Omega$ .

Com a integração por partes das duas últimas parcelas da equação (2.6), as integrais de domínio resultantes desta operação são automaticamente canceladas e a expressão final para  $u(Q)$  é

$$u(Q) = \int_{\Omega} G(P,Q) b(P) d\Omega(P) - \int_{\partial\Omega} [\mathcal{N}^* G(p,Q)]^t u(p) d\partial\Omega(p) + \int_{\partial\Omega} G(p,Q) [\mathcal{N} u(p)] d\partial\Omega(p) \quad (2.7)$$

onde  $d\partial\Omega(p)$  é um elemento infinitesimal do contorno relativo às coordenadas do ponto  $p \in \partial\Omega$  e  $\mathcal{N}, \mathcal{N}^*$  são operadores de Neumann associados aos operadores diferenciais  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{L}^*$ , respectivamente.

A equação (2.7) representa a formulação do Método Direto dos Elementos de Contorno, onde  $G(P,Q)$  é uma solução fundamental.

Adicionando e subtraindo do lado direito da equação (2.7) a quantidade

$$\int_{\partial\Omega} G(p,Q) [\mathcal{N}' u(p)] d\partial\Omega(p) = \int_{\partial\Omega} [\mathcal{N}' G(p,Q)]^t u(p) d\partial\Omega(p) \quad (2.8)$$

onde o operador  $\mathcal{N}'$  pode ser escolhido como um operador adequado não nulo da forma

$$\mathcal{N}' = K_0 I \quad (2.9)$$

sendo  $K_0$  uma constante real não nula. O operador  $\mathcal{N}'$  deve ser aplicado sobre a parcela do contorno onde são especificadas condições homogêneas de Dirichlet. Na equação (2.8) " $\mathcal{N}'u(p)$ " representa forças/reações fictícias se o operador  $\mathcal{N}'$  atua em regiões de deslocamento não nulo no contorno. Assim, se  $\mathcal{N}'$  é aplicado sobre todo o contorno, isto é, onde existem condições de contorno de Neumann e/ou Dirichlet não homogêneas, um tratamento adicional destas forças/reações fictícias é necessário. Experimentos numéricos indicam que valores de  $K_0$  variando de  $10,0 \text{ E-}6$  até  $10,0 \text{ E}10$  não alteram significativamente os resultados finais (variação próxima de 0%). O valor de  $K_0$  deve ser escolhido de tal modo que não comprometa o condicionamento numérico do sistema final de equações.

A equação (2.7) torna-se

$$u(Q) = \int_{\Omega} G(P,Q) b(P) d\Omega(P) - \int_{\partial\Omega} [(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') G(p,Q)]^t u(p) d\partial\Omega(p) + \int_{\partial\Omega} G(p,Q) [(\mathcal{N} + \mathcal{N}') u(p)] d\partial\Omega(p) \quad (2.10)$$

que é a expressão básica para o desenvolvimento do MFGLM.

Especificando-se como condição de contorno para a equação (2.2) o termo entre colchetes da segunda parcela do lado direito da equação (2.10), tem-se

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') G(p,Q) = 0 \quad (2.11)$$

Assim, a solução fundamental  $G(P,Q)$  do problema adjunto

torna-se uma função de Green. Este é o motivo do nome "Método da Função de Green".

A equação (2.10) torna-se então

$$u(Q) = \int_{\Omega} G(P, Q) b(P) d\Omega(P) + \int_{\partial\Omega} G(p, Q) [(N+N')u(p)] d\partial\Omega(p) \quad (2.12)$$

O último termo da equação (2.12) contém a expressão " $(N+N')u(p)$ " onde existem derivadas de  $u(p)$  no sentido do traço (derivadas normais de  $u(p)$ ), indesejáveis para análise numérica. Para eliminar este inconveniente define-se uma nova variável  $F(p)$  tal que

$$F(p) = (N+N') u(p) \quad (2.13)$$

O inconveniente é eliminado aproximando  $F(p)$  numericamente. Substituindo a equação (2.13) na equação (2.12) obtém-se

$$u(Q) = \int_{\Omega} G(P, Q) b(P) d\Omega(P) + \int_{\partial\Omega} G(p, Q) F(p) d\partial\Omega(p) \quad (2.14)$$

Nesta equação não estão presentes derivadas da função de Green nem de  $F(p)$ . Com isto a ordem das singularidades é reduzida e a equação é mais apropriada para integração numérica. Esta expressão fornece valores de  $u(Q)$  para  $Q \in \Omega$ . Tomando o traço de  $u(Q)$

$$u(q) = \lim_{Q \rightarrow q} u(Q) \quad q \in \partial\Omega, Q \in \Omega \quad (2.15)$$

e aplicando esta propriedade à equação (2.14), resulta

$$u(q) = \int_{\Omega} G(P, q) b(P) d\Omega(P) + \int_{\partial\Omega} G(p, q) F(p) d\partial\Omega(p) \quad (2.16)$$

As equações (2.14) e (2.16) definem o problema completamente, porém exigem o conhecimento da função de Green para o problema associado, ou seja, uma solução fundamental com condições de contorno devidamente especificadas.

No entanto, é possível calcular projeções desta equação integral de maneira similar à efetuada pelo Método de Galerkin dos Elementos de Contorno. Pode-se obter projeções da função de Green mesmo sem o seu conhecimento explícito.

## 2.2- DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO E DO CONTORNO

A discretização do domínio é feita da mesma forma que no MEF. Um modelo de elementos finitos de um domínio fechado  $\bar{\Omega}$  é uma região  $\tilde{\Omega} \subset R^n$  a qual é a união de um número finito  $E$  de subregiões limitadas fechadas  $\bar{\Omega}_e$  de  $R^n$ , cada  $\bar{\Omega}_e$  sendo o fechamento de uma região aberta  $\Omega_e$ :

$$\bar{\Omega}_e = \Omega_e \cup \partial\Omega_e \quad e = 1, 2, \dots, E \quad (2.17)$$

onde  $\partial\Omega_e$  é o contorno de  $\Omega_e$ . As subregiões  $\bar{\Omega}_e$  são chamadas elementos finitos de  $\tilde{\Omega}$  e selecionamos  $\tilde{\Omega}$  aproximadamente como o fechamento de  $\Omega$ . Assim,

$$\tilde{\Omega} = \bigcup_{e=1}^E \bar{\Omega}_e \quad (2.18)$$

$$\Omega_e \cap \Omega_f = \emptyset \quad \text{se } e \neq f \quad (2.19)$$

A discretização do contorno é feita da mesma forma que no MEC. O contorno do domínio  $\Omega$ , denominado aqui  $\partial\Omega$ , pode ser dividido em "ncl" elementos de contorno. A diferença em relação à malha de elementos finitos é que esta discretização pode ou não ter nós duplos ou até triplos, em pontos de descontinuidades das condições de contorno ou geometria (pontos com normal em duas ou três direções, respectivamente).

Uma quantidade  $y$  qualquer "bem-comportada" no domínio  $\Omega$  pode ser interpolada com as funções de interpolação usuais utilizadas no MEF.

$$y = [\psi]\{y\} \quad (2.20)$$

onde  $\{y\}$  é o vetor cuja componente "i" representa o valor da quantidade  $y$  avaliada no nó "i" e  $[\psi]$  é o vetor das funções de interpolação de domínio, da forma

$$[\psi] = [\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_{ntn}] \quad (2.21)$$

onde "ntn" é a quantidade total de nós do domínio.

A quantidade  $y$  pode ser interpolada no contorno com

$$y = [\phi] \{y\} \quad (2.22)$$

onde  $\{y\}$  é o vetor cuja componente "i" representa o valor da quantidade  $y$  avaliada no nó "i" do contorno e  $[\phi]$  é o vetor das funções de interpolação do contorno, da forma

$$[\phi] = [\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_{ntnc}] \quad (2.23)$$

onde "ntnc" é o número total de nós do contorno. As funções de interpolação de contorno  $\phi_j$  são tomadas como o traço das funções de interpolação de domínio.

### 2.3- APROXIMAÇÃO NUMÉRICA PELOS MÉTODOS DOS ELEMENTOS FINITOS E DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

As quantidades  $u(Q)$ ,  $b(P)$  e  $F(p)$  são agora discretizadas como definido na seção anterior

$$u(Q) = [\psi(Q)] \{u\}^D \quad (2.24)$$

$$b(P) = [\psi(P)] \{b\} \quad (2.25)$$

$$F(p) = [\phi(p)] \{f\} \quad (2.26)$$

$$u(q) = [\phi(q)] \{u\}^C \quad (2.27)$$

onde  $\{u\}^D$  e  $\{u\}^C$  representam valores nodais do deslocamento generalizado  $u$  no domínio e sobre o contorno;  $\{b\}$  e  $\{f\}$  representam valores nodais das forças de corpo generalizadas e das reações generalizadas no contorno, respectivamente.

A equação (2.14) pode então ser reescrita como

$$\begin{aligned} [\psi(Q)] \{u\}^D = & \int_{\Omega} G(P,Q) [\psi(P)] d\Omega(P) \{b\} + \\ & + \int_{\partial\Omega} G(p,Q) [\phi(p)] d\partial\Omega(p) \{f\} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Aplicando o método de Galerkin, isto é, impondo a condição de ortogonalidade do resíduo com cada uma das funções de interpolação de domínio (tomando a projeção de  $u(Q)$  ortogonal a  $[\psi(Q)]$ ) resulta:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\psi(Q)]^t [\psi(Q)] d\Omega(Q) \{u\}^D = & \int_{\Omega} [\psi(Q)]^t \int_{\Omega} G(P,Q) [\psi(P)] d\Omega(P) d\Omega(Q) \{b\} + \\ & + \int_{\Omega} [\psi(Q)]^t \int_{\partial\Omega} G(p,Q) [\phi(p)] d\partial\Omega(p) d\Omega(Q) \{f\} \end{aligned} \quad (2.29)$$

A equação (2.29) pode ser adequadamente representada por

$$A \{u\}^D = B \{f\} + C \{b\} \quad (2.30)$$

onde

$$A = \int_{\Omega} [\psi(Q)]^t [\psi(Q)] d\Omega(Q) \quad (2.31)$$

$$B = \int_{\partial\Omega} Gd(p)^t [\phi(p)] d\partial\Omega(p) \quad (2.32)$$

$$C = \int_{\Omega} Gd(P)^t [\psi(P)] d\Omega(P) \quad (2.33)$$

$$Gd(p)^t = \int_{\Omega} [\psi(Q)]^t G(p, Q) d\Omega(Q) \quad (2.34)$$

$$Gd(P)^t = \int_{\Omega} [\psi(Q)]^t G(P, Q) d\Omega(Q) \quad (2.35)$$

Repetindo o mesmo procedimento com a equação (2.16), porém utilizando agora as funções de contorno  $[\phi(q)]$  como funções peso, obtém-se

$$D \{u\}^c = E \{f\} + F \{b\} \quad (2.36)$$

onde

$$D = \int_{\partial\Omega} [\phi(q)]^t [\phi(q)] d\partial\Omega(q) \quad (2.37)$$

$$E = \int_{\partial\Omega} Gc(p)^t [\phi(p)] d\partial\Omega(p) \quad (2.38)$$

$$F = \int_{\Omega} Gc(P)^t [\psi(P)] d\Omega(P) \quad (2.39)$$

$$G_c(p)^t = \int_{\partial\Omega} [\phi(q)]^t G(p,q) d\partial\Omega(q) \quad (2.40)$$

$$G_c(P)^t = \int_{\partial\Omega} [\phi(q)]^t G(P,q) d\partial\Omega(q) \quad (2.41)$$

A equação (2.36) pode ser reescrita em termos dos valores prescritos no contorno  $\{u_p\}$  e  $\{f_p\}$ , e dos valores desconhecidos  $\{u_d\}$  e  $\{f_d\}$

$$[D_p \mid D_d] \begin{Bmatrix} u_p \\ u_d \end{Bmatrix} = [E_d \mid E_p] \begin{Bmatrix} f_d \\ f_p \end{Bmatrix} + F\{b\} \quad (2.42)$$

ou ainda na forma

$$[-E_d \mid D_d] \begin{Bmatrix} f_d \\ u_d \end{Bmatrix} = [-D_p \mid E_p] \begin{Bmatrix} u_p \\ f_p \end{Bmatrix} + F\{b\} \quad (2.43)$$

As equações (2.35) e (2.41) são projeções da função de Green (com o ponto "P" pertencente ao domínio) no subespaço gerado pelas funções de interpolação no domínio e contorno, respectivamente. As equações (2.34) e (2.40) também são projeções da função de Green, com o ponto "p" pertence ao contorno.

Agora é preciso obter as projeções da função de Green para que as matrizes B, C, E e F possam ser determinadas. Estas projeções serão aproximadas pelo MEF de acordo com o exposto a seguir. As equações (2.34), (2.35), (2.40) e (2.41) têm componentes contínuas e portanto podem ser aproximadas por funções contínuas, isto é

$$G_d(P) = [\psi(P)] [G^{DP}] \quad (2.44)$$

$$G_c(P) = [\psi(P)] [G^{CP}] \quad (2.45)$$

$$G_d(p) = [\phi(p)] [G^{DP}] \quad (2.46)$$

$$G_c(p) = [\phi(p)] [G^{CP}] \quad (2.47)$$

onde  $[\psi(P)]$  é o vetor das funções de interpolação de domínio,  $[\phi(p)]$  é o vetor das funções de interpolação do contorno,  $[G^{DP}]$ ,  $[G^{CP}]$ ,  $[G^{DP}]$ ,  $[G^{CP}]$  são tensores cujas componentes representam valores nodais das projeções da função de Green nos subespaços gerados pelas funções de interpolação. Após a determinação de  $[G^{DP}]$ ,  $[G^{CP}]$ ,  $[G^{DP}]$ ,  $[G^{CP}]$  as matrizes  $B$ ,  $C$ ,  $E$  e  $F$  podem ser obtidas por

$$B = F^t = A [G^{CP}] \quad (2.48)$$

$$C = A [G^{DP}] \quad (2.49)$$

$$E = [G^{CP}]^t D \quad (2.50)$$

As matrizes  $A$  e  $D$  são facilmente obtidas com integração numérica.

Substituindo (2.48) e (2.49) em (2.30), obtém-se

$$\{u\}^D = [G^{CP}]\{f\} + [G^{DP}]\{b\} \quad (2.51)$$

sem a necessidade de inversão da matriz  $A$ .

Para determinar as quantidades  $G_d(P)$ ,  $G_d(p)$ ,  $G_c(P)$  e  $G_c(p)$  utiliza-se o método proposto por SILVA [6] e BARCELLOS e SILVA [2], resolvendo com o MEF os dois problemas associados:

Problema 1:

$$\mathcal{L}^* G(P, Q) = \delta(P, Q) I \quad (2.52)$$

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}')G(p, Q) = 0 \quad P, Q \in \Omega, p \in \partial\Omega \quad (2.53)$$

Problema 2:

$$\mathcal{L}^* G(P, q) = 0 \quad (2.54)$$

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}')G(p, q) = \delta(p, q) I \quad p, q \in \partial\Omega, P \in \Omega \quad (2.55)$$

Pós-multiplicando a equação (2.52) por  $[\psi(Q)]$  e integrando no domínio  $\Omega$ , mantendo o ponto  $P$  fixo obtém-se

$$\mathcal{L}^* \int_{\Omega} G(P, Q) [\psi(Q)] d\Omega(Q) = \int_{\Omega} \delta(P, Q) [\psi(Q)] d\Omega(Q) = [\psi(P)] \quad (2.56)$$

Identifica-se no lado esquerdo da equação acima o termo  $G_d(P)$ . Logo, esta equação pode ser reescrita

$$\mathcal{L}^* G_d(P) = [\psi(P)] \quad (2.57)$$

Comparando esta equação com a equação (2.52) verifica-se que o termo de excitação da equação (2.57) é constituído pelas funções convencionais de elementos finitos e tem portanto continuidade

no mínimo  $\mathcal{E}^0(\Omega)$ , enquanto que o termo de excitação da equação (2.52) é do tipo  $\delta$  (singular). Assim,  $Gd(P)$  é um tensor mais regular que o tensor  $G(P,Q)$ .

Repetindo o mesmo procedimento para a equação (2.53) obtém-se

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') \int_{\Omega} G(p,Q) [\psi(Q)] d\Omega(Q) = 0 \quad (2.58)$$

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') Gd(p) = 0 \quad (2.59)$$

Utilizando a mesma técnica no problema 2, ou seja, multiplicando as equações (2.54) e (2.55) por  $[\phi(q)]$  e integrando no contorno  $\partial\Omega$ , mantendo o ponto  $p$  fixo, obtém-se

$$\mathcal{L}^* \int_{\partial\Omega} G(P,q) [\phi(q)] d\partial\Omega(q) = 0 \quad (2.60)$$

$$\mathcal{L}^* Gc(P) = 0 \quad (2.61)$$

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') \int_{\partial\Omega} G(p,q) [\phi(q)] d\partial\Omega(q) = [\phi(p)] \quad (2.62)$$

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') Gc(p) = [\phi(p)] \quad (2.63)$$

Assim, foram obtidos dois novos problemas

Problema 1\*

$$\mathcal{L}^* Gd(P) = [\psi(P)] \quad (2.64)$$

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') Gd(p) = 0 \quad p \in \partial\Omega, P \in \Omega \quad (2.65)$$

Problema 2\*

$$\mathcal{L}^* Gc(P) = 0 \quad (2.66)$$

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') Gc(p) = [\phi(p)] \quad p \in \partial\Omega, P \in \Omega \quad (2.67)$$

Para operadores auto-adjuntos ( $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$ ) é possível determinar o funcional  $J(Gd)$  para o Problema 1\*, cuja minimização resulta nas projeções desejadas utilizando o MEF. Este funcional é escrito na forma:

$$J(Gd) = 0,5 B(Gd, Gd) - B_1(Gd, [\psi]) + 0,5 B_2(Gd, Gd) \quad (2.68)$$

onde  $B(Gd, Gd)$  é a forma bilinear em estudo,

$$B_1(Gd, [\psi]) = \int_{\Omega} Gd(P) \cdot [\psi(P)] d\Omega(P) \quad (2.69)$$

$$B_2(Gd, Gd) = \int_{\partial\Omega} [\mathcal{N}' Gd(p)] \cdot Gd(p) d\partial\Omega(p) \quad (2.70)$$

O funcional  $J(Gc)$  pode ser escrito para o Problema 2\*

$$J(Gc) = 0,5 B(Gc, Gc) - B_3(Gc, [\phi]) + 0,5 B_2(Gc, Gc) \quad (2.71)$$

onde

$$B_3(Gc, [\phi]) = \int_{\partial\Omega} Gc(p) \cdot [\phi(p)] d\partial\Omega(p) \quad (2.72)$$

$$B_2(Gc, Gc) = \int_{\partial\Omega} [\mathcal{N}' Gc(p)] \cdot Gc(p) d\partial\Omega(p) \quad (2.73)$$

No capítulo seguinte é feito um estudo mais detalhado

destes funcionais.

Devido ao fato da aproximação das projeções da função de Green ser executada com o uso do MEF, é possível o cálculo da mesma conhecendo-se apenas o operador adjunto e suas condições de contorno. Todos os integrandos que aparecem no cálculo das matrizes  $A$ ,  $B$ , ...,  $F$  são bem comportados. Isto se deve ao fato da expansão do termo  $F(p) = (N + N')u(p)$  (2.26) e também da aproximação das projeções da função de Green através do MEF.

## CAPÍTULO 3

### FORMALISMO DO MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL MODIFICADO (MFGLM) APLICADO À ELASTOSTÁTICA TRIDIMENSIONAL

---

#### 3.1- INTRODUÇÃO

O formalismo matemático do MFGLM aplicado à elastostática tridimensional é apresentado neste capítulo, tendo como base novamente o trabalho realizado por BARBIERI [16]. Também são apresentados os elementos utilizados para a geração das malhas auxiliares de Elementos Finitos e de Elementos de Contorno e alguns aspectos computacionais relacionados à implementação dos mesmos.

#### 3.2- EQUAÇÕES DA ELASTOSTÁTICA

##### 3.2.1- Equações de Navier

As equações de campo para a elasticidade isotérmica, isotrópica, linear, são dadas por MALVERN [34, p.498]:

- Três equações do movimento

$$\beta^t \sigma + \rho b = 0 \quad (3.1)$$

onde

$$\beta(\cdot) = \begin{bmatrix} \cdot, x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot, x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot, x_3 \\ \cdot, x_2 & \cdot, x_1 & 0 \\ 0 & \cdot, x_3 & \cdot, x_2 \\ \cdot, x_3 & 0 & \cdot, x_1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

com  $(\cdot), x_i$  indicando derivada parcial com relação à coordenada cartesiana " $x_i$ ".

$\sigma$  é o tensor tensão

$$\sigma = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \tau_{12} \quad \tau_{23} \quad \tau_{31}]^t \quad (3.3)$$

$b$  é o vetor força de corpo

$$b = [b_1 \quad b_2 \quad b_3] \quad (3.4)$$

e  $\rho$  é a densidade inicial.

- seis equações da lei de Hooke generalizada

$$\sigma = \Lambda \varepsilon \quad (3.5)$$

onde

$$\Lambda = \begin{bmatrix} (\lambda+2\mu) & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & (\lambda+2\mu) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & (\lambda+2\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

com  $\lambda$  e  $\mu$  sendo as constantes clássicas de Lamé

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad e \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.7)$$

E é o módulo de Young e  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

$\epsilon$  é o tensor deformação

$$\epsilon = [ \epsilon_{11} \quad \epsilon_{22} \quad \epsilon_{33} \quad \gamma_{12} \quad \gamma_{23} \quad \gamma_{31} ] \quad (3.8)$$

- seis equações geométricas

$$\epsilon = \beta u \quad (3.9)$$

onde

$$u = [ u_1 \quad u_2 \quad u_3 ]^t \quad (3.10)$$

Substituindo as equações (3.9) em (3.5) para obter as tensões em termos dos gradientes dos deslocamentos, e então substituindo o resultado nas equações (3.1) para obter três equações diferenciais parciais de segunda ordem para as três componentes de deslocamento, em notação vetorial, obtém-se as

equações de Navier

$$(\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} = 0 \quad (3.11)$$

As condições de contorno de tração são dadas por

$$\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{n} + \mu (\mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \text{Função Prescrita} \quad (3.12)$$

Segundo MALVERN [34, p.499], as condições de contorno para as equações de campo podem ser:

1. Condições de contorno de deslocamento, com as três componentes  $\mathbf{u}$  prescritas sobre o contorno.

2. Condições de contorno de tração, com as três componentes de tração  $\mathbf{t} = \sigma \mathbf{n}$  prescritas para o ponto do contorno onde o vetor unitário normal ao contorno é  $\mathbf{n}$ .

3. Condições de contorno mistas incluindo casos onde:

(a) condições de contorno de deslocamento são prescritas sobre uma parte da superfície do contorno, enquanto condições de contorno de tração são prescritas sobre a parte remanescente.

(b) para cada ponto do contorno escolhe-se eixos cartesianos retangulares locais  $\bar{\mathbf{x}}$  (usualmente com um eixo ao longo da normal) e então prescreve-se

(1)  $\bar{u}_1$  ou  $\bar{t}_1$ , mas não ambos

(2)  $\bar{u}_2$  ou  $\bar{t}_2$ , mas não ambos

(3)  $\bar{u}_3$  ou  $\bar{t}_3$ , mas não ambos

notando-se que  $\bar{\mathbf{t}} = \bar{\sigma} \bar{\mathbf{n}}$ .

### 3.3- DETALHAMENTO DO FORMALISMO DO MFGLM APLICADO À ELASTOSTÁTICA TRIDIMENSIONAL

#### 3.3.1- Equações do Problema Clássico de Neumann

O problema clássico de Neumann

$$\mathcal{L} u = -\rho b \quad e \quad \mathcal{N} u = t \quad em \quad \partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \quad (3.13)$$

com  $u = \bar{u}$  em  $\partial\Omega_1$ ,  $t = \bar{t}$  em  $\partial\Omega_2$ , sendo  $\partial\Omega_1$  a parcela do contorno onde  $\bar{u}$  é especificado,  $\partial\Omega_2$  a parcela do contorno onde  $\bar{t}$  é especificado,  $\Omega$  é um domínio limitado e aberto com contorno  $\partial\Omega$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ .  $\mathcal{N}$  é o operador de Neumann associado ao operador diferencial  $\mathcal{L}$ . Como  $\mathcal{L}$  é um operador auto-adjunto,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$  e  $\mathcal{N} = \mathcal{N}^*$ .

Do sistema de equações (3.11) chega-se às componentes  $\mathcal{L}_{ij}$  do operador  $\mathcal{L}$ , onde

$$\mathcal{L}_{11} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right)$$

$$\mathcal{L}_{21} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$\mathcal{L}_{31} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{12} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \\
 \mathcal{L}_{22} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \\
 \mathcal{L}_{32} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \\
 \mathcal{L}_{13} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \\
 \mathcal{L}_{23} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \\
 \mathcal{L}_{33} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

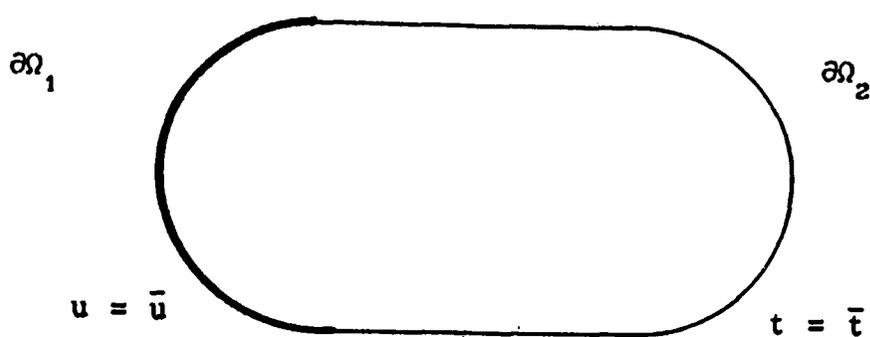


Figura 1. Condições de contorno

Do sistema de equações (3.12) chega-se às componentes  $\mathcal{N}_{ij}$  do operador  $\mathcal{N}$ , onde

$$\begin{aligned}
N_{11} &= n_1 (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x_1} + \mu n_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mu n_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \\
N_{21} &= \lambda n_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mu n_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \\
N_{31} &= \lambda n_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mu n_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \\
N_{12} &= \mu n_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda n_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \\
N_{22} &= \mu n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + n_2 (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x_2} + n_3 \mu \frac{\partial}{\partial x_3} \\
N_{32} &= \lambda n_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mu n_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \\
N_{13} &= \mu n_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda n_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \\
N_{23} &= \mu n_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + \lambda n_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \\
N_{33} &= \mu n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mu n_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + n_3 (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x_3}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

### 3.3.2- Elementos de Contorno e Elementos Finitos

Nesta seção a discretização do domínio (malha de elementos finitos) é efetuada com o uso do elemento trilinear de oito nós. A discretização do contorno (malha de elementos de contorno) é realizada com o elemento bilinear de 4 nós. A aproximação do vetor deslocamento em cada elemento do domínio é feita como segue:

$$u = [\psi]_e \{u\}_e \tag{3.16}$$

onde  $[\psi]_e$  são matrizes das funções de interpolação locais de domínio

$$[\psi]_e = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & : & \psi_2 & 0 & 0 & : & & : & \psi_7 & 0 & 0 & : & \psi_8 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & : & 0 & \psi_2 & 0 & : & \dots & : & 0 & \psi_7 & 0 & : & 0 & \psi_8 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_1 & : & 0 & 0 & \psi_2 & : & & : & 0 & 0 & \psi_7 & : & 0 & 0 & \psi_8 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

e  $\{u\}_e$  representa os valores nodais dos deslocamentos, dado por

$$\{u\}_e = \{u_{11} \ u_{21} \ u_{31} \ : \ : \ : \ u_{12} \ u_{22} \ u_{32} \ : \ : \ : \ : \dots \ : \ : \ : \ u_{18} \ u_{28} \ u_{38}\}^t \quad (3.18)$$

De maneira análoga, a aproximação para o vetor deslocamento  $u$  sobre o contorno é feita segundo as funções de interpolação locais, ou seja:

$$u = [\phi]_e \{u\}_e \quad (3.19)$$

Usando funções de interpolação globais teremos

$$u = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & : & & : & \psi_{ntn} & 0 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & : & \dots & : & 0 & \psi_{ntn} & 0 \\ 0 & 0 & \psi_1 & : & & : & 0 & 0 & \psi_{ntn} \end{bmatrix} \{u\}^D \quad (3.20)$$

onde

$$(\{u\}^D)^t = \{u_1^t \ u_2^t \ \dots \ u_{ntn}^t\} \quad (3.21)$$

De maneira análoga, para o contorno teremos

$$u = [\phi]\{u\}^c \quad (3.22)$$

### 3.3.3- Aproximação das Projeções da Função de Green Gd(P) e Gd(p)

No capítulo 2 apresentou-se o desenvolvimento geral para determinação das quantidades Gd(P), Gd(p). Nesta seção particulariza-se o procedimento para obtenção de Gd(P) e Gd(p) para as equações da elastostática tridimensional.

A equação (2.35) pode ser reescrita como

$$Gd(P) = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 0 0 & \vdots & \psi_2 0 0 & \vdots & \vdots & \psi_{ntn} 0 & 0 \\ 0 & \psi_1 0 & \vdots & 0 & \psi_2 0 & \vdots & \vdots & 0 & \psi_{ntn} 0 \\ 0 & 0 & \psi_1 & \vdots & 0 & 0 & \psi_2 & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \psi_{ntn} \end{bmatrix} d\Omega(Q) \quad (3.23)$$

onde  $G_{ij}$  depende dos pontos "P,Q" e  $\psi_i$  depende do ponto "Q". Usando uma notação mais compacta,

$$Gd(P) = [Gd^1(P) \vdots Gd^2(P) \vdots Gd^3(P) \vdots \dots \vdots Gd^{ntn}(P)] \quad (3.24)$$

onde

$$Gd^i(P) = \int_{\Omega} \psi_i \begin{bmatrix} G_{11} & \vdots & G_{12} & \vdots & G_{13} \\ G_{21} & \vdots & G_{22} & \vdots & G_{23} \\ G_{31} & \vdots & G_{32} & \vdots & G_{33} \end{bmatrix} d\Omega(Q) \quad (3.25)$$

e  $Gd^i(P)$  representa a i-ésima componente da projeção do tensor

de Green no espaço dos elementos finitos.

A equação (2.57) pode então ser reescrita como

$$\mathcal{L}^* \int_{\Omega} \psi_i \begin{bmatrix} G_{11} & \vdots & G_{12} & \vdots & G_{13} \\ G_{21} & \vdots & G_{22} & \vdots & G_{23} \\ G_{31} & \vdots & G_{32} & \vdots & G_{33} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} d\Omega(Q) = \begin{bmatrix} \psi_i & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & \psi_i & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & \psi_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \quad \forall P \in \Omega \quad (3.26)$$

ou

$$\mathcal{L}^* Gd^i(P) = \psi_i(P) I \quad \forall P \in \Omega \quad (3.27)$$

As condições de contorno para a equação (3.26) são obtidas a partir da equação (2.59)

$$(\mathcal{N}^* + \alpha \mathcal{N}') Gd^i(p) = 0 \quad (3.28)$$

com  $\alpha=1$  para  $p \in \partial\Omega_1$  e  $\alpha=0$  para  $p \in \partial\Omega_2$ .

A partir das equações (3.2) e (2.68) pode-se construir o funcional  $J(Gd)$ ,

$$J(Gd_j^i) = 0,5 \int_{\Omega} [\Lambda \beta(Gd_j^i)]^t \beta(Gd_j^i) d\Omega - \int_{\Omega} [Gd_j^i]^t P_j d\Omega + \\ + 0,5 \int_{\partial\Omega} [\mathcal{N}'(Gd_j^i)]^t Gd_j^i d\partial\Omega \quad (3.29)$$

sendo  $\Lambda$  a matriz das constantes elásticas do material que correlaciona tensões com deformações, equação (3.6).

A minimização deste funcional com posterior solução via elementos finitos resulta na projeção da função de Green desejada. Nesta expressão  $Gd_j^i$  é a  $j$ -ésima coluna de  $Gd^i(P)$  e  $P_j$

vale:

$$P_1 = \begin{bmatrix} \psi_i(P) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_i(P) \\ 0 \end{bmatrix} \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_i(P) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Com a finalidade de facilitar a visualização, a  $j$ -ésima coluna da  $i$ -ésima componente da projeção da função de Green,  $Gd_j^i$ , é escrita como

$$Gd_j^i = \{ u \ v \ w \}^t \quad (3.31)$$

cuja expansão via elementos finitos no domínio é:

$$Gd_j^i = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & \vdots & \psi_2 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \psi_{ntn} & 0 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & \vdots & 0 & \psi_2 & 0 & \vdots & \vdots & 0 & \psi_{ntn} & 0 \\ 0 & 0 & \psi_1 & \vdots & 0 & 0 & \psi_2 & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \psi_{ntn} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_{ntn} \\ v_{ntn} \\ w_{ntn} \end{Bmatrix}^t \quad (3.32)$$

Substituindo (3.32) no funcional  $J(Gd_j^i)$  e minimizando via elementos finitos para todas as componentes da projeção da função de Green na base do espaço dos elementos finitos, obtém-se (a dedução pode ser vista no apêndice A)

$$[K + K_0] [G^{DP}] = [M] \quad (3.33)$$

onde  $[K]$  é a matriz de rigidez convencional de elementos finitos para análise de problemas elastostáticos;

$[K_0]$  é a matriz de rigidez adicional devido à presença do operador  $\mathcal{N}'$  no contorno

$$[K_0] = \int_{\partial\Omega} \begin{bmatrix} \phi_1 0 0 & \vdots & \phi_2 0 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \phi_m 0 0 \\ 0 \phi_1 0 & \vdots & 0 \phi_2 0 & \vdots & \cdots & \vdots & 0 \phi_m 0 \\ 0 0 \phi_1 & \vdots & 0 0 \phi_2 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 0 \phi_m \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 0 0 & \vdots & \phi_2 0 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \phi_m 0 0 \\ 0 \phi_1 0 & \vdots & 0 \phi_2 0 & \vdots & \cdots & \vdots & 0 \phi_m 0 \\ 0 0 \phi_1 & \vdots & 0 0 \phi_2 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 0 \phi_m \end{bmatrix} d\partial\Omega \quad (3.34)$$

onde "m" = número de nós do contorno onde atua o operador  $\mathcal{N}'$

$K_i$  = constantes arbitrárias não nulas.

Uma outra escolha conveniente para a matriz  $[K_0]$  é da forma

$$[K_0] = \text{diag} [K_1 \quad \vdots \quad K_2 \quad \vdots \quad K_3 \quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots \quad K_{3m-1} \quad \vdots \quad K_{3m}] \quad (3.35)$$

$[M]$  é idêntica à matriz massa com densidade unitária e é dada por

$$[M] = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \psi_1 0 0 & \vdots & \psi_2 0 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \psi_{ntn} 0 0 \\ 0 \psi_1 0 & \vdots & 0 \psi_2 0 & \vdots & \cdots & \vdots & 0 \psi_{ntn} 0 \\ 0 0 \psi_1 & \vdots & 0 0 \psi_2 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 0 \psi_{ntn} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \psi_1 0 0 & \vdots \\ 0 \psi_1 0 & \vdots \\ 0 0 \psi_1 & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \psi_2^0 & 0 & \vdots & \vdots & \psi_{ntn} & 0 & 0 \\ 0 & \psi_2^0 & \vdots & \dots & \vdots & 0 & \psi_{ntn} & 0 \\ 0 & 0 & \psi_2 & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \psi_{ntn} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} d\Omega \quad (3.36)$$

e  $[G^{DP}]$  contém os valores nodais das projeções da função de Green com:

$[G^{DP}]_{j,3*i-2}$  = valores nodais ( $j=1,3*ntn$ ) da componente da projeção  $Gd^i$  devido ao carregamento  $\psi_i$  ( $i=1,ntn$ ) na direção 1.

$[G^{DP}]_{j,3*i-1}$  = valores nodais ( $j=1,3*ntn$ ) da componente da projeção  $Gd^i$  devido ao carregamento  $\psi_i$  ( $i=1,ntn$ ) na direção 2.

$[G^{DP}]_{j,3*i}$  = valores nodais ( $j=1,3*ntn$ ) da componente da projeção  $Gd^i$  devido ao carregamento  $\psi_i$  ( $i=1,ntn$ ) na direção 3.

### 3.3.4- Aproximação das Projeções da Função de Green $Gc(P)$ e $Gc(p)$

No capítulo 2 apresentou-se o desenvolvimento geral para determinação das quantidades  $Gc(P)$  e  $Gc(p)$ . Nesta seção particulariza-se o procedimento para a obtenção de  $Gc(P)$  e  $Gc(p)$  para as equações da elastostática tridimensional.

Do capítulo 2, a equação (2.41) pode ser reescrita como

$$G_c(P) = \int_{\partial\Omega} \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \vdots & \phi_2 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \phi_{ntnc} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \vdots & 0 & \phi_2 & 0 & \vdots & \dots & 0 & \phi_{ntnc} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & \vdots & 0 & 0 & \phi_2 & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \phi_{ntnc} \end{bmatrix} d\partial\Omega(q) \quad (3.37)$$

onde  $G_{ij}$  depende dos pontos "P,q" e  $\phi_i$  depende do ponto "q".

Compactamente escreve-se

$$G_c(P) = [G_c^1(P) \vdots G_c^2(P) \vdots G_c^3(P) \vdots \dots \vdots G_c^{ntnc}(P)] \quad (3.38)$$

com

$$G_c^i(P) = \int_{\partial\Omega} \phi_i \begin{bmatrix} G_{11} & \vdots & G_{12} & \vdots & G_{13} \\ G_{21} & \vdots & G_{22} & \vdots & G_{23} \\ G_{31} & \vdots & G_{32} & \vdots & G_{33} \end{bmatrix} d\partial\Omega(q) \quad (3.39)$$

com  $G_c^i(P)$  representando a i-ésima componente da projeção da função de Green no espaço dos elementos de contorno.

Assim, a equação (2.61) pode ser escrita como

$$\mathcal{L}^* G_c^i(P) = 0 \quad \forall P \in \Omega \quad (3.40)$$

Como condições de contorno para a equação (3.40) tem-se, a partir da equação (2.63)

$$(\mathcal{N}^* + \alpha \mathcal{N}') Gc^i(p) = \begin{bmatrix} \phi_i(p) & 0 & 0 \\ 0 & \phi_i(p) & 0 \\ 0 & 0 & \phi_i(p) \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

com  $\alpha = 1$  para  $p \in \partial\Omega_1$  e zero para  $p \in \partial\Omega_2$ .

De maneira análoga a efetuada na seção anterior para as projeções  $Gd(P)/Gd(p)$ , é possível escrever o funcional

$$J(Gc_j^i) = 0,5 \int_{\Omega} [\Lambda \beta(Gc_j^i)]^t \beta(Gc_j^i) d\Omega - \int_{\partial\Omega} [Gc_j^i]^t p_j d\partial\Omega + \\ + 0,5 \int_{\partial\Omega} [\mathcal{N}'(Gc_j^i)]^t Gc_j^i d\partial\Omega \quad (3.42)$$

A minimização deste funcional, com posterior solução via elementos finitos, resulta na projeção da função de Green desejada.

Na expressão acima  $Gc_j^i$  é a  $j$ -ésima coluna de  $Gc^i(P)$  e  $p_j$  ( $j=1,2,3$ ) vale:

$$p_1 = \begin{bmatrix} \phi_i(p) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_i(p) \\ 0 \end{bmatrix} \quad p_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_i(p) \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

A  $j$ -ésima coluna da  $i$ -ésima componente da projeção da função de Green,  $Gc_j^i$ , pode ser escrita na forma:

$$Gc_j^i = \{ u \ v \ w \}^t \quad (3.44)$$

Expandindo esta equação via elementos finitos ficamos

com

$$Gc_j^i = \begin{bmatrix} \psi_1 0 0 & \vdots & \psi_2 0 0 & \vdots & \vdots & \psi_{ntn} 0 0 \\ 0 \psi_1 0 & \vdots & 0 \psi_2 0 & \vdots & \dots & 0 \psi_{ntn} 0 \\ 0 0 \psi_1 & \vdots & 0 0 \psi_2 & \vdots & \vdots & 0 0 \psi_{ntn} \end{bmatrix} \{u_1 \vdots v_1 \vdots w_1 \vdots \dots \vdots u_{ntn} \vdots v_{ntn} \vdots w_{ntn}\}^t \quad (3.45)$$

Substituindo (3.45) na equação do funcional  $J(Gc_j^i)$  e minimizando via elementos finitos para todas as componentes da projeção da função de Green na base do espaço das funções de elementos finitos, obtém-se o sistema de equações

$$[K + K_0] [G^{CP}] = [m] \quad (3.46)$$

onde  $[K]$  e  $[K_0]$  são as matrizes já calculadas anteriormente e  $[m]$  é a matriz

$$[m] = \int_{\partial\Omega} \begin{bmatrix} \phi_1 0 0 & \vdots & \phi_2 0 0 & \vdots & \vdots & \phi_{ntnc} 0 0 \\ 0 \phi_1 0 & \vdots & 0 \phi_2 0 & \vdots & \dots & 0 \phi_{ntnc} 0 \\ 0 0 \phi_1 & \vdots & 0 0 \phi_2 & \vdots & \vdots & 0 0 \phi_{ntnc} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \phi_1 0 0 & \vdots & \phi_2 0 0 & \vdots & \vdots & \phi_{ntnc} 0 0 \\ 0 \phi_1 0 & \vdots & 0 \phi_2 0 & \vdots & \dots & 0 \phi_{ntnc} 0 \\ 0 0 \phi_1 & \vdots & 0 0 \phi_2 & \vdots & \vdots & 0 0 \phi_{ntnc} \end{bmatrix} d\Omega \quad (3.47)$$

e  $[G^{CP}]$  contém os valores nodais das projeções da função de

Green.

$[G^{CP}]_{j,3*i-2}$  = valores nodais ( $j=1,3*ntn$ ) da componente da projeção  $Gc^i$  devido ao carregamento  $\phi_i$  ( $i=1,ntnc$ ) na direção 1.

$[G^{CP}]_{j,3*i-1}$  = valores nodais ( $j=1,3*ntn$ ) da componente da projeção  $Gc^i$  devido ao carregamento  $\phi_i$  ( $i=1,ntnc$ ) na direção 2.

$[G^{CP}]_{j,3*i}$  = valores nodais ( $j=1,3*ntn$ ) da componente da projeção  $Gc^i$  devido ao carregamento  $\phi_i$  ( $i=1,ntnc$ ) na direção 3.

As equações (3.33) e (3.46) podem ser resolvidas simultaneamente se reescritas como

$$[K+K_0][G^{DP};G^{CP}] = [M; m] \quad (3.48)$$

De posse dos valores nodais  $[G^{DP}]$  e  $[G^{CP}]$ , seleciona-se os valores correspondentes aos nós do contorno para formar  $[G^{DP}]$  e  $[G^{CP}]$ .

### 3.4- MALHA AUXILIAR DE ELEMENTOS FINITOS E MALHA AUXILIAR DE ELEMENTOS DE CONTORNO

O MFGLM utiliza-se de duas malhas, que são:

- uma malha auxiliar de elementos finitos; o MEF é o processo utilizado para discretização do domínio (meio

contínuo).

- uma malha auxiliar de elementos de contorno; a superfície externa do domínio é dividida em uma série de elementos tal qual no MEC.

Neste trabalho, a função de Green é projetada no espaço das funções de interpolação de elementos finitos ou das funções de interpolação hierárquicas (o espaço gerado por estas funções é o mesmo), dependendo dos elementos utilizados para discretização do domínio e do contorno. Para aproximação destas projeções, na análise tridimensional, foram utilizados os seguintes elementos:

- Elemento trilinear (hexaedro, oito nós, continuidade  $C^0$ )
- Elemento trilinear com função bolha (hexaedro, 8 nós, continuidade  $C^0$ )
- Elemento quadrático lagrangeano (hexaedro, 27 nós, continuidade  $C^0$ )
- Elemento quadrático incompleto (hexaedro, 20 nós, continuidade  $C^0$ )
- Elemento hierárquico (hexaedro, de ordem  $p=1$  até  $p=5$ ).

Estes elementos são mostrados na figura 2.

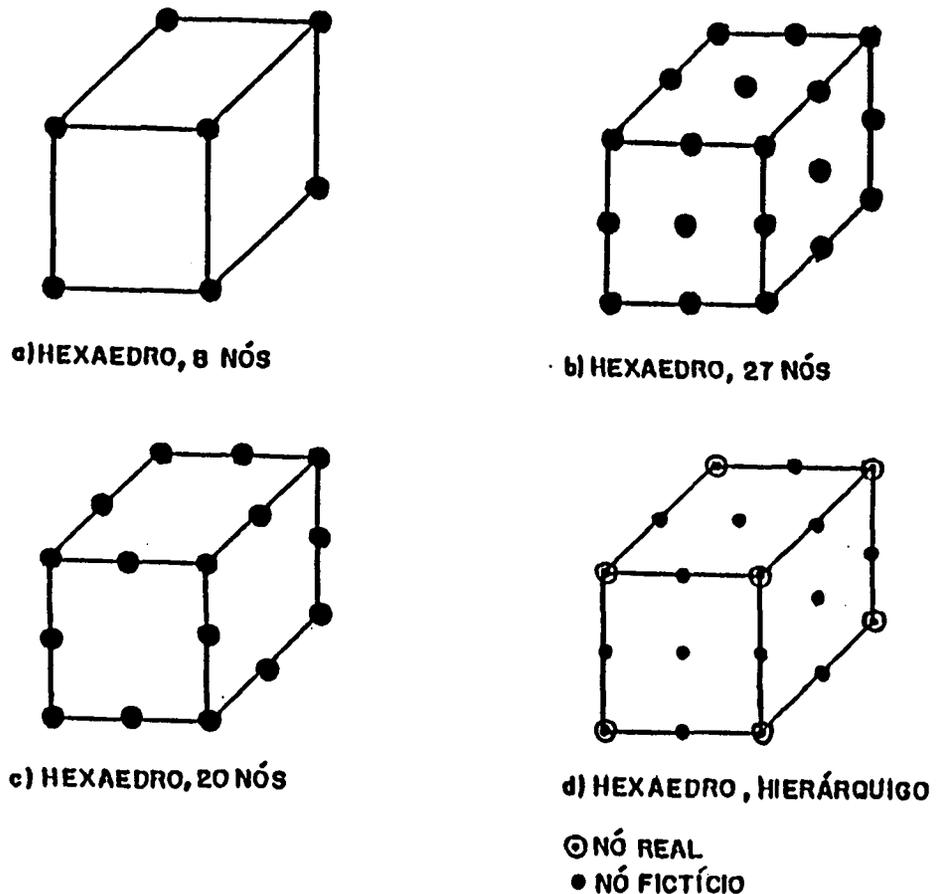


Figura 2. Elementos utilizados para discretização da malha auxiliar de elementos finitos

A malha auxiliar de elementos de contorno acompanha a malha auxiliar de elementos finitos, isto é, para elementos finitos quadráticos usam-se elementos de contorno quadráticos. Assim, para discretização da malha auxiliar de elementos de contorno são utilizados os seguintes elementos (análise bidimensional)

- Elemento bilinear (quadrilátero, 4 nós, continuidade  $C^0$ )
- Elemento quadrático lagrangeano (quadrilátero, 9 nós, continuidade  $C^0$ )
- Elemento quadrático incompleto (quadrilátero, 8 nós, continuidade  $C^0$ )
- Elemento hierárquico (quadrilátero, de ordem  $p=1$  até  $p=5$ )

Estes elementos são mostrados na figura 3.

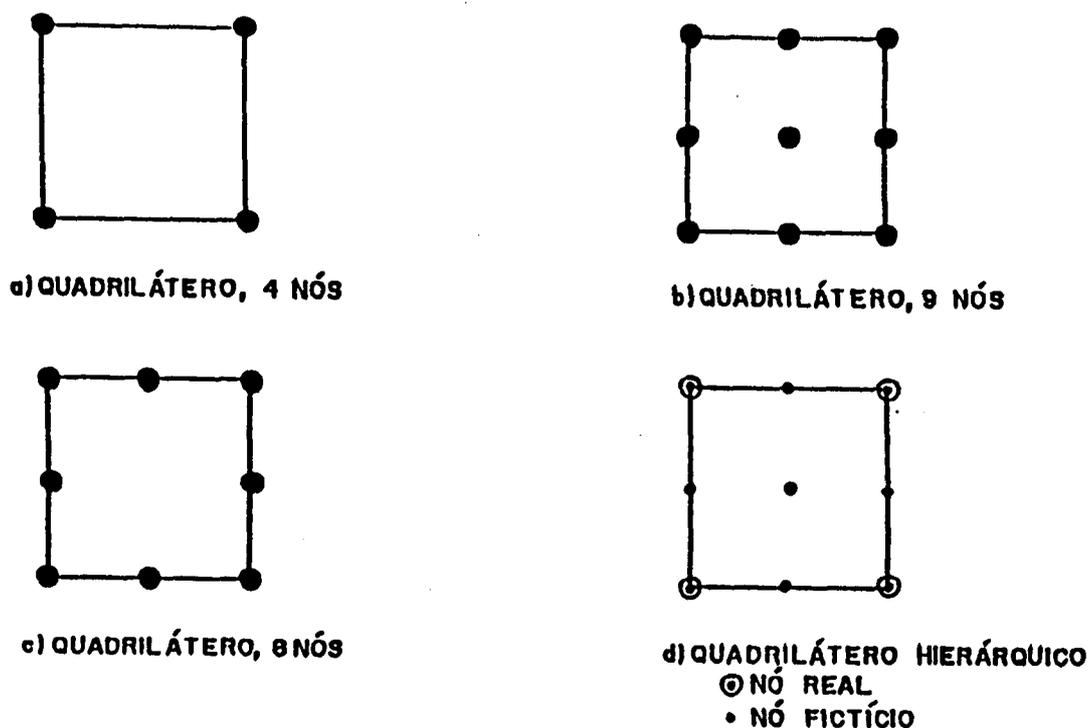
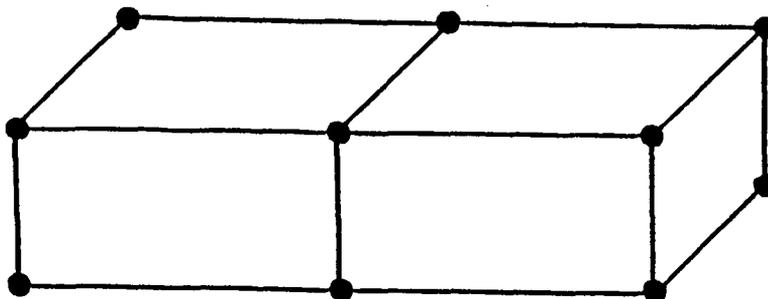


Figura 3. Elementos utilizados para discretização da malha auxiliar de elementos de contorno

A malha auxiliar de elementos de contorno é o traço da malha auxiliar de elementos finitos. Para exemplificar, toma-se

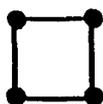
como exemplo de domínio uma barra de seção transversal retangular, discretizada de acordo com a figura 4.



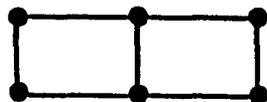
a) Malha auxiliar de elementos finitos. Utilizam-se dois elementos hexaédricos de oito nós para discretização do domínio.



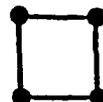
VISTA PRINCIPAL



VISTA LATERAL PRINCIPAL



VISTA PRINCIPAL ANTERIOR



VISTA LATERAL ANTERIOR



VISTA SUPERIOR PRINCIPAL



VISTA SUPERIOR ANTERIOR

b) Malha auxiliar de elementos de contorno. Utilizam-se 10 elementos quadriláteros de 4 nós para discretização do contorno.

Figura 4. Malha auxiliar de elementos finitos e malha auxiliar de elementos de contorno para uma barra de seção retangular

As funções de interpolação dos elementos hexaédricos de 8, 20 e 27 nós e dos elementos quadriláteros de 4, 8 e 9 nós são apresentadas em DHATT e TOUZOT [35, p.102-119].

### 3.5- ELEMENTO HIERÁRQUICO (HEXAEDRO, DE ORDEM $p=1$ ATÉ $p=5$ )

#### 3.5.1- Espaço das Funções Hierárquicas

Apresenta-se aqui o espaço para o caso bidimensional. O espaço para o caso tridimensional é análogo.

Segundo SZABÓ e BABUŠKA [36, p.97], o espaço  $\mathcal{P}^p(\Omega_{St}^{(q)})$  é o espaço das polinomiais sobre  $\Omega_{St}^{(q)}$  do tipo  $\xi^i \eta^j$ ,  $i, j=0, 1, \dots, p$ ;  $i+j=0, 1, \dots, p$ , adicionado das seguintes monomiais:

(a) no caso de  $p=1$ , da monomial  $\xi\eta$

(b) no caso de  $p \geq 2$ , das monomiais  $\xi^p \eta$  e  $\xi \eta^p$

O elemento hexaédrico padrão, denotado por  $\Omega_{St}^{(h)}$ , e o elemento quadrilátero padrão, denotado por  $\Omega_{St}^{(q)}$ , são mostrados na Figura 5.

O espaço para o caso tridimensional é denotado por  $\mathcal{P}^p(\Omega_{St}^{(h)})$  e é análogo ao espaço  $\mathcal{P}^p(\Omega_{St}^{(q)})$ , descrito anteriormente.

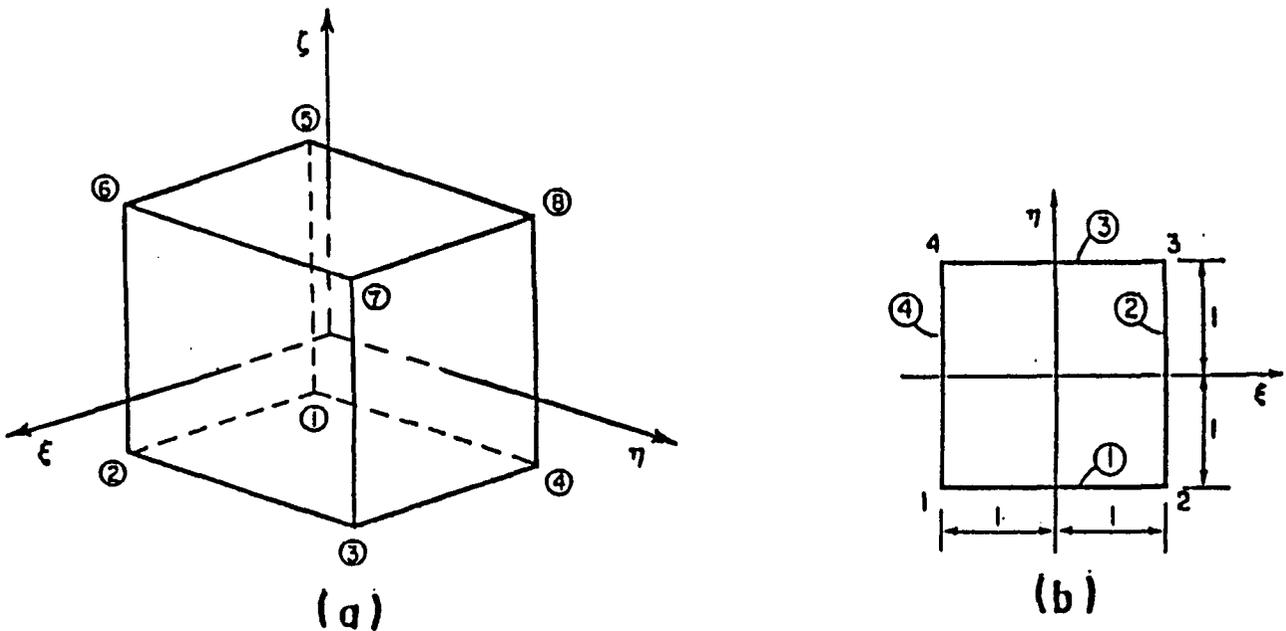


Figura 5. a) Elemento hexaédrico padrão  $\Omega_{St}^{(h)}$   
 b) Elemento quadrilátero padrão  $\Omega_{St}^{(q)}$

### 3.5.2- Funções Hierárquicas

Ainda segundo SZABÓ e BABUŠKA [36, p.239-241] temos

#### (1) Funções de interpolação nodais

Existem oito funções hierárquicas nodais. São as mesmas funções usadas no elemento hexaédrico de oito nós.

#### (2) Modos de aresta

Existem  $12(p-1)$  modos de aresta. Os modos de aresta associados com as arestas que conectam os nós 1 e 2 são

$$N_{i-1}^{(1,2)} = \frac{1}{4} \Phi_i(\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \quad i=2,3,\dots,p \quad (3.49)$$

onde  $\Phi_i(\xi)$  é dado por

$$\Phi_j(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} P_{j-1}(t) dt \quad j=2,3,\dots \quad (3.50)$$

onde  $P_{j-1}$  são polinomiais de Legendre.

Os demais modos de aresta são

$$\begin{aligned} N_{i-1}^{(2,3)} &= \frac{1}{4} \Phi_i(\eta)(1+\xi)(1-\zeta) \\ N_{i-1}^{(3,4)} &= \frac{1}{4} \Phi_i(\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \\ N_{i-1}^{(4,1)} &= \frac{1}{4} \Phi_i(\eta)(1-\xi)(1-\zeta) \\ N_{i-1}^{(5,6)} &= \frac{1}{4} \Phi_i(\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\ N_{i-1}^{(6,7)} &= \frac{1}{4} \Phi_i(\eta)(1+\xi)(1+\zeta) \\ N_{i-1}^{(7,8)} &= \frac{1}{4} \Phi_i(\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \\ N_{i-1}^{(8,5)} &= \frac{1}{4} \Phi_i(\eta)(1-\xi)(1+\zeta) \\ N_{i-1}^{(1,5)} &= \frac{1}{4} \Phi_i(\zeta)(1-\xi)(1-\eta) \\ N_{i-1}^{(2,6)} &= \frac{1}{4} \Phi_i(\zeta)(1+\xi)(1-\eta) \\ N_{i-1}^{(3,7)} &= \frac{1}{4} \Phi_i(\zeta)(1+\xi)(1+\eta) \\ N_{i-1}^{(4,8)} &= \frac{1}{4} \Phi_i(\zeta)(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad i=2,3,\dots,p \quad (3.51)$$

A convenção de numeração adotada é definida pelo arranjo tridimensional INDES apresentado no Apêndice B.

## (3) Modos de face

Existem  $3(p-2)(p-3)$  modos de face ( $p \geq 4$ ).

As funções de interpolação associadas com as faces definidas pelos vértices são

$$\begin{aligned}
 N_m^{(1,2,5,6)} &= \frac{1}{2} (1-\eta)(1-\xi^2)(1-\zeta^2)P_i(\xi)P_j(\zeta) \\
 N_m^{(2,3,6,7)} &= \frac{1}{2} (1+\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta^2)P_i(\eta)P_j(\zeta) \\
 N_m^{(3,4,7,8)} &= \frac{1}{2} (1+\eta)(1-\xi^2)(1-\zeta^2)P_i(\xi)P_j(\zeta) \\
 N_m^{(1,4,5,8)} &= \frac{1}{2} (1-\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta^2)P_i(\eta)P_j(\zeta) \\
 N_m^{(1,2,3,4)} &= \frac{1}{2} (1-\zeta)(1-\xi^2)(1-\eta^2)P_i(\xi)P_j(\eta) \\
 N_m^{(5,6,7,8)} &= \frac{1}{2} (1+\zeta)(1-\xi^2)(1-\eta^2)P_i(\xi)P_j(\eta)
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

onde  $i, j=2, 3, \dots, p-2$  ;  $i+j=4, 5, \dots, p$  ;  $P_i, P_j$  são polinomiais de Legendre e o índice  $m=m(i, j)$  depende da convenção de numeração adotada, que é definida pelo arranjo tridimensional INDEF, apresentado no Apêndice B.

## (4) Modos internos (bolha)

Existem  $(p-3)(p-4)(p-5)/6$  modos internos ( $p \geq 6$ ). As funções bolha são dadas por

$$N_m^{(0)} = (1-\xi^2)(1-\eta^2)(1-\zeta^2)P_i(\xi)P_j(\eta)P_k(\zeta) \tag{3.53}$$

onde  $m = m(i, j, k)$  ;  $i, j, k=2, 3, \dots, p-4$  ;  $i+j+k=6, 7, \dots, p$  ;  $P_i, P_j, P_k$  são polinomiais de Legendre e o índice "m" depende da convenção de numeração adotada, que é definida pelo arranjo tridimensional INDEB, apresentado no Apêndice B.

### 3.6- ELEMENTO HIERÁRQUICO (QUADRILÁTERO, DE ORDEM $p=1$ ATÉ $p=5$ )

#### 3.6.1- Funções Hierárquicas

Segundo SZABÓ e BABUŠKA [36, p.98-99] tem-se para um elemento quadrilateral padrão

##### (1) Funções de interpolação nodais

São as mesmas funções do elemento bilinear de 4 nós e são apresentadas por DHATT e TOUZOT [35, p.102].

##### (2) Modos de aresta

Existem  $4(p-1)$  funções de interpolação associadas com as arestas ( $p \geq 2$ ). São dadas por

$$N_i^{(L_1)} = \frac{1}{2}(1-\eta)\phi_i(\xi)$$

$$N_i^{(L_2)} = \frac{1}{2}(1+\xi)\phi_i(\eta)$$

$$N_i^{(L_3)} = \frac{1}{2}(1+\eta)\phi_i(\xi)$$

$$N_i^{(L_4)} = \frac{1}{2}(1-\xi)\phi_i(\eta)$$

(3.54)

para  $i=2, \dots, p$ , sendo as arestas  $L_i$  mostradas na Figura 6.

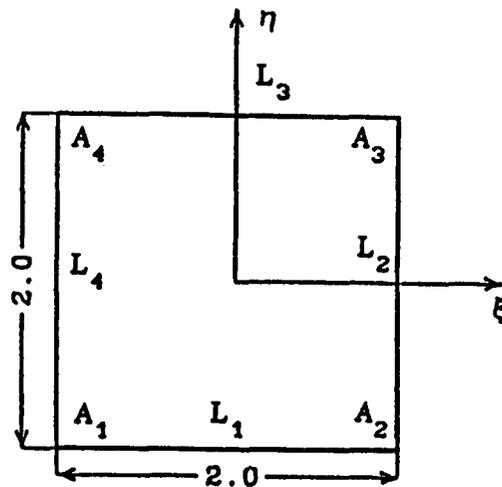


Figura 6. Elemento de referência  $\Omega_{St}^{(q)}$

### (3) Modos internos (bolha)

Existem  $(p-2)(p-3)/2$  modos internos  $p \geq 4$ , definidos por

$$N_m(\xi, \eta) = (1-\xi^2)(1-\eta^2)P_i(\xi)P_j(\eta) \quad (3.55)$$

com  $0 \leq i+j \leq p-4$  e  $i, j = 0, 1, \dots, p-4$

onde  $P_i, P_j$  são polinomiais de Legendre e o índice  $m=m(i, j)$  depende da convenção de numeração adotada, que é definida pelo arranjo bidimensional IINDEB (DUARTE [39]), apresentado no Apêndice B.

### 3.7- CONDIÇÕES DE CONTORNO

Neste trabalho são empregadas condições de contorno mistas. Condições de contorno de deslocamento são prescritas

sobre uma parte da superfície, enquanto condições de contorno de tração são prescritas sobre a parte remanescente.

Utilizam-se condições de contorno do tipo Dirichlet homogêneas, onde se prescreve deslocamento zero para o nó na direção desejada, e condições de contorno do tipo de Neumann, onde prescreve-se condições de contorno de tração, nulas ou não, na direção desejada.

O vetor carregamento, neste trabalho, é representado através da prescrição de condições de contorno do tipo de Neumann. Vínculos ou restrições são representados através de condições de contorno do tipo de Dirichlet homogêneas.

Os apoios elásticos são automaticamente considerados na formulação do MFGLM através da utilização do operador  $N'$ .

### 3.8- CONDIÇÕES DE CONTORNO APLICADAS A NÓS HIERÁRQUICOS

Os coeficientes das funções de interpolação hierárquicas não representam deslocamentos nodais, o que dificulta a imposição de condições de contorno.

Neste trabalho adotou-se o seguinte critério para imposição de condições de contorno em nós hierárquicos:

- I- Impõe-se condições de contorno do tipo Dirichlet homogêneas quando a aresta ou a face tiver restrição de deslocamento, anulando-se assim o valor do coeficiente da função de interpolação hierárquica na direção restringida;
- II- Nas demais situações, impõe-se condições de contorno do tipo de Neumann com valor prescrito nulo.

### 3.9- CARGAS NODAIS SOBRE SUPERFÍCIES CURVAS COM TRAÇÃO APLICADA

Deseja-se representar o vetor carregamento sobre uma superfície curva através da prescrição de condições de contorno de tração normais a esta superfície. É necessário, portanto, a criação de uma subrotina que decomponha este vetor tração normal nas três direções das coordenadas globais  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ .

Para ilustrar o método de obtenção dos cossenos diretores, segundo COOK, MALKUS e PLESHA [37, 129-132], considere um vetor tração  $\sigma$  normal à face  $\zeta=1$  da figura 7 abaixo. Para facilidade de representação, apresenta-se uma face plana. O procedimento de cálculo é também válido para uma face curva.

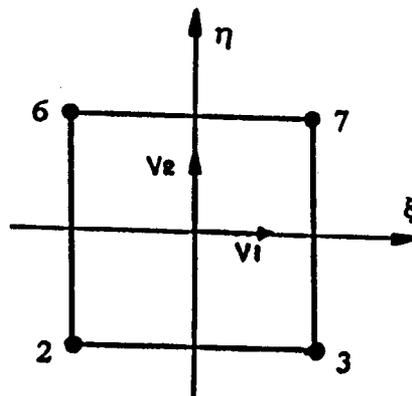


Figura 7. Face  $\zeta=1$  de um elemento sólido linear

Esta face é definida pelos nós 2,3,6,7. Sejam  $V_1$  e  $V_2$  os vetores tangentes à face

$$V_1 = (J_{21}i + J_{22}j + J_{23}k) d\eta \quad (3.56)$$

$$V_2 = (J_{31}i + J_{32}j + J_{33}k) d\xi \quad (3.57)$$

onde  $i, j, k$  são os vetores unitários nas direções globais  $x_1, x_2$  e  $x_3$  e

$$J_{21}=x_{1,\eta} \quad J_{22}=x_{2,\eta} \quad J_{23}=x_{3,\eta} \quad (3.58)$$

$$J_{31}=x_{1,\zeta} \quad J_{32}=x_{2,\zeta} \quad J_{33}=x_{3,\zeta} \quad (3.59)$$

O vetor normal unitário à face tem como componentes os cossenos diretores  $l, m$  e  $n$

$$li + mj + nk = \frac{V_1 \times V_2}{|V_1 \times V_2|} = \frac{V_1 \times V_2}{ds} \quad (3.60)$$

$$\text{Assim } l = (J_{22}J_{33} - J_{23}J_{32}) d_\eta d_\zeta / ds \quad (3.61)$$

$$m = (J_{23}J_{31} - J_{21}J_{33}) d_\eta d_\zeta / ds \quad (3.62)$$

$$n = (J_{21}J_{32} - J_{22}J_{31}) d_\eta d_\zeta / ds \quad (3.63)$$

O procedimento descrito acima é realizado para todos os nós de um elemento de contorno e para todos os elementos do contorno.

Para concluir, multiplica-se o vetor tração normal prescrito pelos cossenos diretores, obtendo-se suas componentes nas três direções das coordenadas globais  $x_1, x_2$  e  $x_3$ .

## CAPÍTULO 4

### APLICAÇÕES

---

#### 4.1- INTRODUÇÃO

Neste capítulo aplica-se o MFGLM para solução dos seguintes problemas da elastostática tridimensional: barra prismática sob tração uniforme, bloco submetido à cisalhamento simples, flexão de uma viga curta uniformemente carregada, cilindro de parede espessa com pressão interna, flexão de uma viga curva por uma força na sua extremidade e flexão pura de uma viga prismática. Comparam-se os resultados obtidos através do MFGLM com a solução analítica (quando disponível) e com a solução obtida pelo Método dos Elementos Finitos. Dispõe-se dos resultados pelo MEF somente para os elementos convencionais: Hexaédrico de 8, 20 e 27 nós. Nas malhas geradas utilizando-se elemento Hexaédrico Hierárquico a solução obtida pelo MFGLM é comparada somente com a solução analítica. Os elementos utilizados para geração das malhas do MEF são os mesmos

utilizados na geração das malhas do MFGLM. No presente trabalho os resultados de comparação de elementos finitos são obtidos do programa de MEF embutido no do MFGLM, necessário para o cálculo das projeções da função de Green. As tensões obtidas pelo MEF são avaliadas nos nós, sem a utilização de técnicas de extrapolação, já que no MFGLM as tensões são obtidas diretamente nos nós.

#### 4.2- PROBLEMA 1: BARRA PRISMÁTICA SOB TRAÇÃO UNIFORME

Considere uma barra prismática sujeita a tração na direção axial (Fig. 8). O material da barra é isotrópico com coeficiente de Poisson  $\nu=0,3$  e módulo de elasticidade longitudinal  $E=1,0$ .

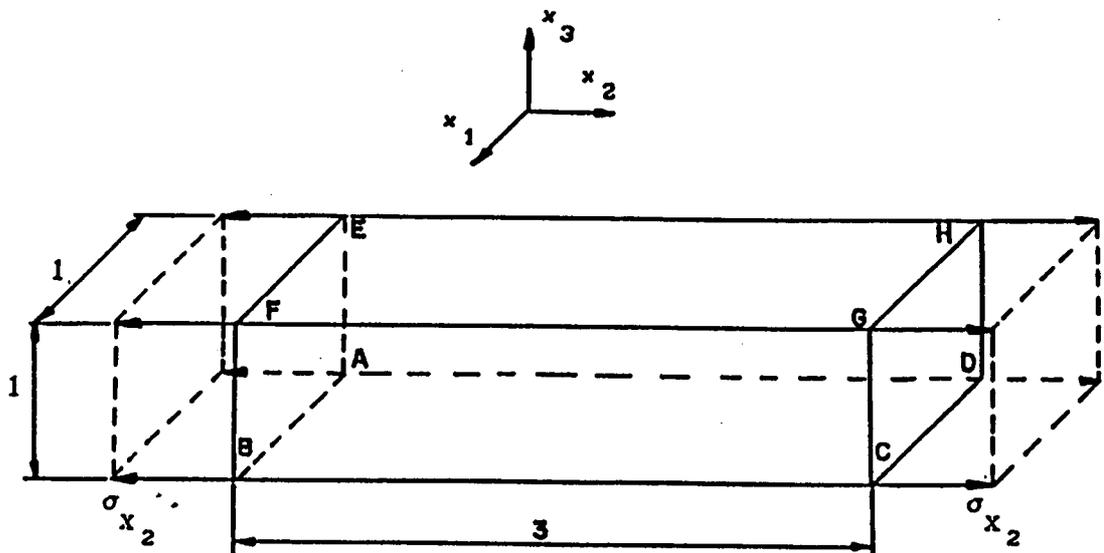


Figura 8. Barra prismática sob tração uniforme

A barra prismática é submetida à ação da tensão normal uniformemente distribuída  $\sigma_{x_2} = 40$  sobre duas faces opostas, como num ensaio de tração. O alongamento do elemento, até o limite de proporcionalidade, é dado por

$$\epsilon_{x_2} = \frac{\sigma_{x_2}}{E} \quad (4.1)$$

Este alongamento na direção  $x_2$  é acompanhado por componentes laterais de deformação (contrações)

$$\epsilon_{x_1} = -\nu \frac{\sigma_{x_2}}{E} \quad \epsilon_{x_3} = -\nu \frac{\sigma_{x_2}}{E} \quad (4.2)$$

É utilizado um elemento hexaédrico de oito nós para geração da malha auxiliar de elementos finitos. Para geração da malha auxiliar de elementos de contorno são utilizados 6 elementos planos de quatro nós, como mostrado na Figura 9.

Através da utilização de condições de contorno do tipo de Dirichlet homogêneas e de Neumann, prevê-se o modo de deformação da Figura 10.

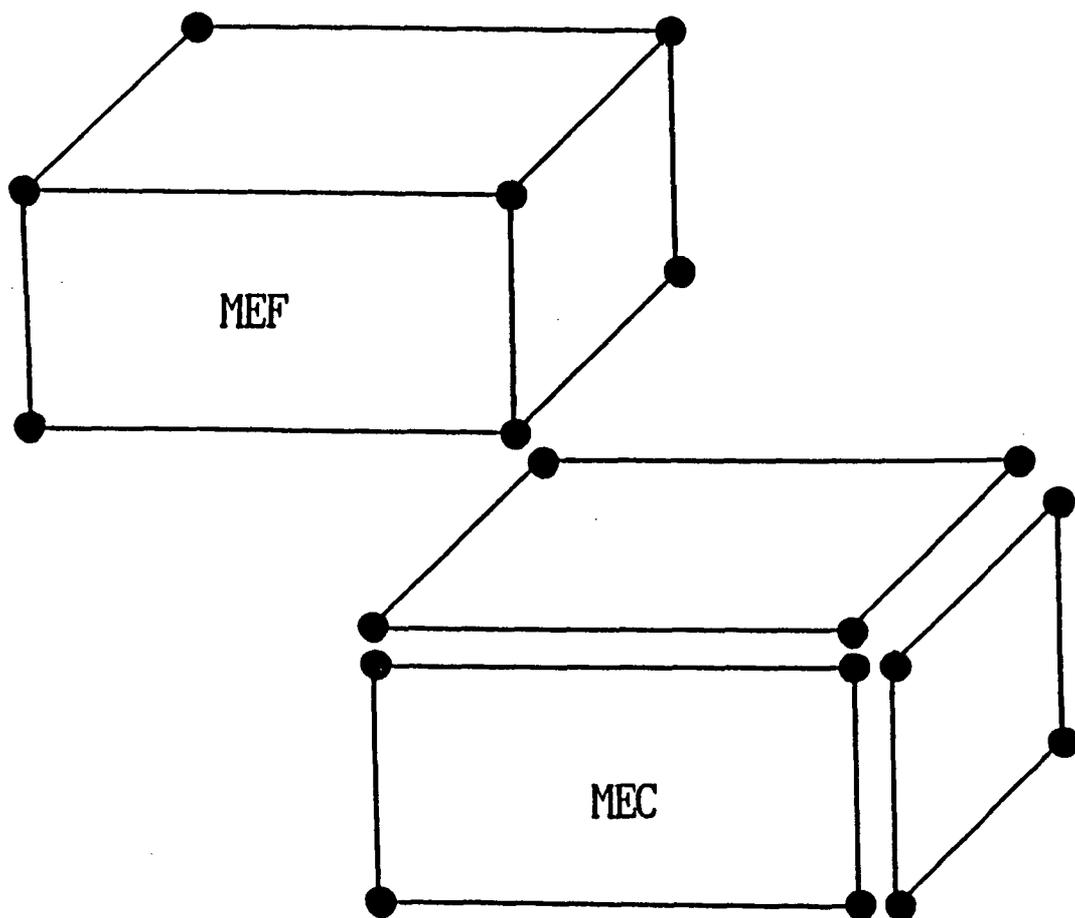


Figura 9. Discretização do domínio

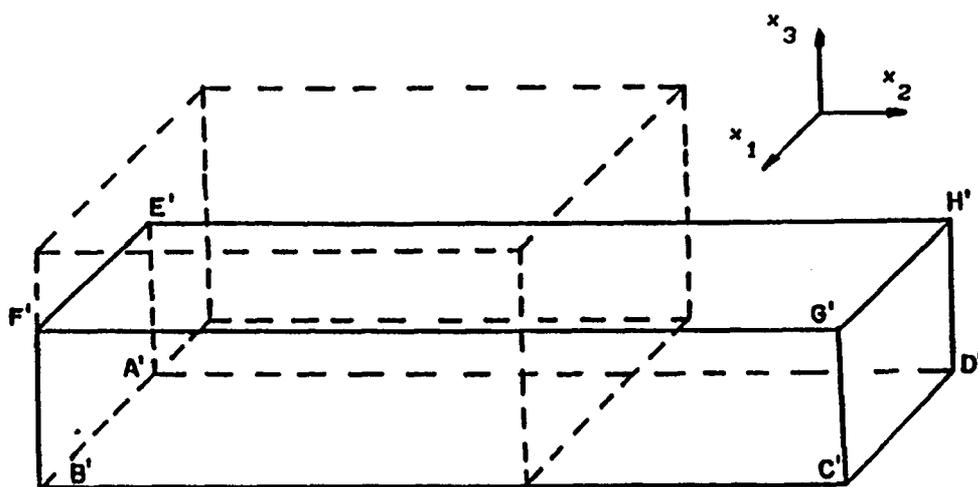


Figura 10. Deformação prevista

A condição de contorno do tipo Dirichlet homogênea define deslocamento nulo. A condição de contorno do tipo de Neumann indica vetor tração prescrito. Os números "0" ou "1" indicam o tipo de condição de contorno empregada para as direções globais  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  de cada nó do contorno. O número "0" significa a existência de condição de contorno de Dirichlet homogênea e o número "1" a de Neumann.

A tabela 1 mostra as condições de contorno adotadas para solução do problema.

Tabela 1. Condições de contorno

Posição	C.c. na direção			Valor prescrito na direção		
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
A	1	0	0	0,0	0,0	0,0
B	0	0	0	0,0	0,0	0,0
C	1	1	1	0,0	40,0	0,0
D	1	1	1	0,0	40,0	0,0
E	1	0	1	0,0	0,0	0,0
F	0	0	1	0,0	0,0	0,0
G	1	1	1	0,0	40,0	0,0
H	1	1	1	0,0	40,0	0,0

As tabelas 2 e 3 mostram os resultados obtidos com o MFGLM e MEF.

Tabela 2. Deslocamentos

Pos.		$u_{x_1}$	$u_{x_2}$	$u_{x_3}$
A	†	0,1200000000D+02	-0,9952975943D-16	0,4037653594D-14
	*	0,1200000000D+02	0,0000000000D+00	0,0000000000D+00
B	†	0,1795371035D-14	-0,1437652081D-15	-0,1053258365D-14
	*	0,0000000000D+00	0,0000000000D+00	0,0000000000D+00
C	†	0,5218441239D-14	0,1200000000D+03	-0,8518880046D-13
	*	0,2599173888D-12	0,1200000000D+03	0,2454623617D-12
D	†	0,1200000000D+02	0,1200000000D+03	-0,1337159550D-12
	*	0,1200000000D+02	0,1200000000D+03	-0,7021375232D-14
E	†	0,1200000000D+02	-0,2511283282D-15	-0,1200000000D+02
	*	0,1200000000D+02	0,0000000000D+00	-0,1200000000D+02
F	†	-0,1586552003D-14	0,6773553073D-16	-0,1200000000D+02
	*	0,0000000000D+00	0,0000000000D+00	-0,1200000000D+02
G	†	-0,2844001212D-14	0,1200000000D+03	-0,1200000000D+02
	*	0,4667919838D-14	0,1200000000D+03	-0,1200000000D+02
H	†	0,1200000000D+02	0,1200000000D+03	-0,1200000000D+02
	*	0,1200000000D+02	0,1200000000D+03	-0,1200000000D+02

(†) MFGLM

(\*) MEF

Tabela 3. Tensões de reação

Posição		$\sigma_{x_2}$
A	†	0,4000000000D+02
	*	0,4000000000D+02
B	†	0,4000000000D+02
	*	0,4000000000D+02
E	†	0,4000000000D+02
	*	0,4000000000D+02
F	†	0,4000000000D+02
	*	0,4000000000D+02

(†) MFGLM

(\*) MEF

Os resultados obtidos coincidem com a solução analítica até o décimo dígito significativo, tanto para o MFGLM quanto para o MEF.

#### 4.3- PROBLEMA 2: BLOCO SUBMETIDO À CISALHAMENTO SIMPLES

Seja um bloco de seção retangular de largura unitária engastado numa extremidade (face ABCD), como mostra a figura 11. Aproxima-se uma situação de cisalhamento simples, utilizando coeficiente de Poisson  $\nu$  igual zero e submetendo o bloco a uma tensão cisalhante  $\tau$  sobre a face EFGH. O material do bloco é isotrópico e o módulo de elasticidade transversal é  $G_e=0,5$ .

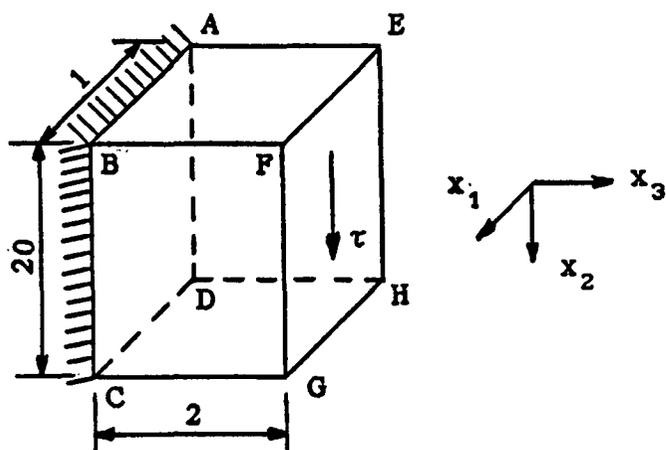


Figura 11. Bloco submetido à cisalhamento simples  $\tau=40$

Utilizou-se um elemento hexaédrico de oito nós para geração da malha auxiliar de elementos finitos e 6 elementos planos de quatro nós para a geração da malha auxiliar de elementos de contorno, da mesma forma que no problema 1, como mostrado na Figura 9.

A Tabela 4 mostra as condições de contorno empregadas.

Tabela 4. Condições de contorno

Posição	C.c. na direção			Valor prescrito na direção		
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
A	0	0	0	0,0	0,0	0,0
B	0	0	0	0,0	0,0	0,0
C	0	0	0	0,0	0,0	0,0
D	0	0	0	0,0	0,0	0,0
E	1	1	0	0,0	40,0	0,0
F	1	1	0	0,0	40,0	0,0
G	1	1	0	0,0	40,0	0,0
H	1	1	0	0,0	40,0	0,0

As tabelas 5, 6 e 7 mostram os resultados obtidos pelo MFGLM e MEF.

Tabela 5. Tensões  $\sigma_{33}$  (no plano ABCD)

$x_2$	MFGLM	MEF
-10,0	-0,1200000000D+02	-0,1200000000D+02
0,0	-	-
+10,0	0,1200000000D+02	0,1200000000D+02

Tabela 6. Distorção  $\gamma_{23}$

Posição	MFGLM	MEF
E	0,8000000000D+02	0,8000000000D+02
F	0,8000000000D+02	0,8000000000D+02
G	0,8000000000D+02	0,8000000000D+02
H	0,8000000000D+02	0,8000000000D+02

Tabela 7. Tensão cisalhante  $\tau_{23}$

Posição	MFGLM	MEF
A	0,4000000000D+02	0,4000000000D+02
B	0,4000000000D+02	0,4000000000D+02
C	0,4000000000D+02	0,4000000000D+02
D	0,4000000000D+02	0,4000000000D+02

As tabelas 5, 6 e 7 mostram resultados coincidentes entre o MFGLM e o MEF até o décimo dígito significativo.

#### 4.4- PROBLEMA 3: FLEXÃO DE UMA VIGA CURTA UNIFORMEMENTE CARREGADA

Seja uma viga curta de seção retangular de largura unitária, apoiada nas extremidades, e submetida à flexão sob uma carga uniformemente distribuída de intensidade  $q=100$ , como mostra a Figura 12. O material da viga é isotrópico com coeficiente de Poisson  $\nu=0,3$  e módulo de elasticidade longitudinal  $E=2,1d06$ . Deseja-se aproximar esta viga curta utilizando elementos sólidos hexaédricos para a malha auxiliar de elementos finitos e elementos planos quadriláteros para a malha auxiliar de elementos de contorno.

Para efeitos de comparação, é utilizada a solução de viga de Timoshenko [38, p.47], sendo esta uma aproximação para a elasticidade tridimensional. Assim, a solução de referência é dada por:

$$d = \frac{5}{24} \frac{q\ell^4}{EI} \left[ 1 + \frac{12}{5} \frac{C^2}{\ell^2} \left( \frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) \right] \quad (4.3)$$

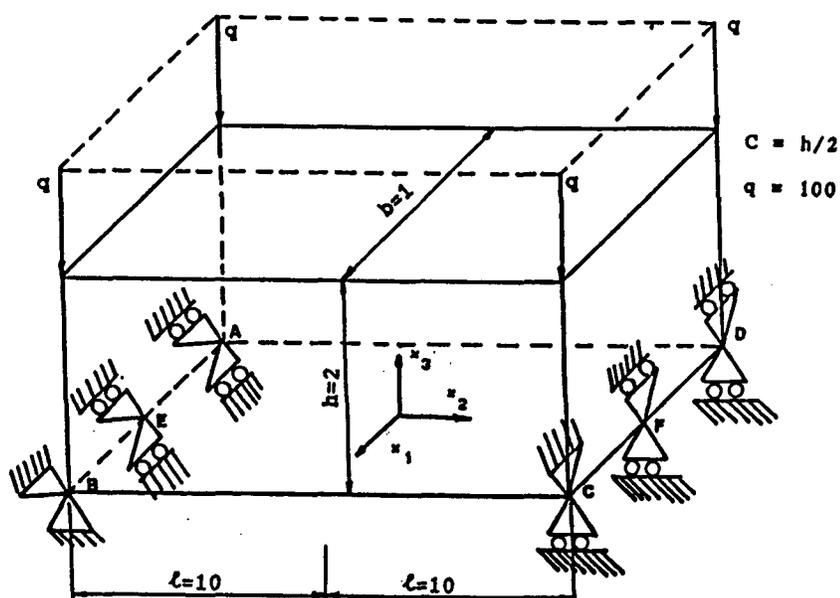


Figura 12. Viga curta sob flexão

O problema foi solucionado numericamente utilizando-se as malhas mostradas na figura 13. As malhas são identificadas usando-se nove símbolos. O primeiro indica se o elemento é Lagrangeano (L), Hierárquico (H) ou Serendipity (S). O segundo e o terceiro símbolos indicam o número de elementos utilizados na geração da malha auxiliar de elementos finitos. O quinto e o sexto símbolos indicam o número de elementos utilizados para geração da malha auxiliar de elementos de contorno. Como quarto símbolo utiliza-se a letra C significando "contorno", com objetivo de facilitar a leitura. O oitavo símbolo indica a ordem da polinomial do elemento utilizando-se a letra P como sétimo símbolo. O nono símbolo, cuja utilização é opcional, indica se o elemento é subintegrado (S) ou se possui função bolha (B). Desta forma tem-se:

L10C42P1- 10 elementos hexaédricos lagrangeanos de oito nós para geração da malha auxiliar de elementos finitos e 42 elementos bilineares de quatro nós para a geração da malha auxiliar de elementos de contorno.

L10C42P1S- Malha L10C42P1 com subintegração na direção  $\eta$ .

L10C42P1B- Malha L10C42P1 com função bolha.

L02C10P2 - 2 elementos hexaédricos lagrangeanos de 27 nós para a malha auxiliar de elementos finitos e 10 elementos biquadráticos de 9 nós para a geração da malha auxiliar de elementos de contorno.

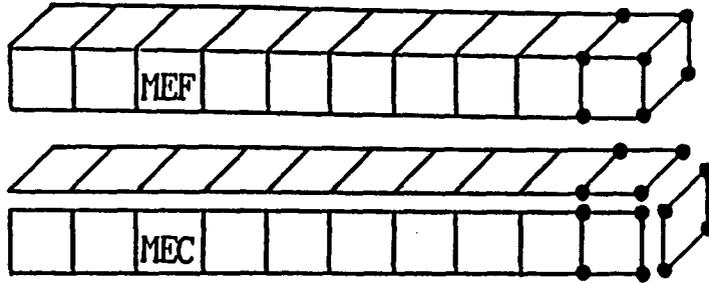
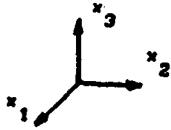
L10C42P2 - 10 elementos hexaédricos de 27 nós para a malha auxiliar de elementos finitos e 42 elementos biquadráticos de 9 nós para a malha auxiliar de elementos de contorno.

H02C10P2 - 2 elementos hexaédricos hierárquicos ( $p=2$ ) para a malha auxiliar de elementos finitos e 10 elementos planos hierárquicos ( $p=2$ ) para a malha auxiliar de elementos de contorno.

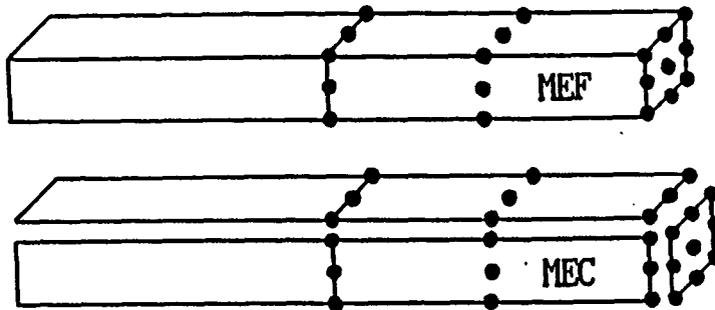
H02C10P3 - Malha H02C10P2, porém com  $p=3$ .

H02C10P4 - Malha H02C10P2, porém com  $p=4$ .

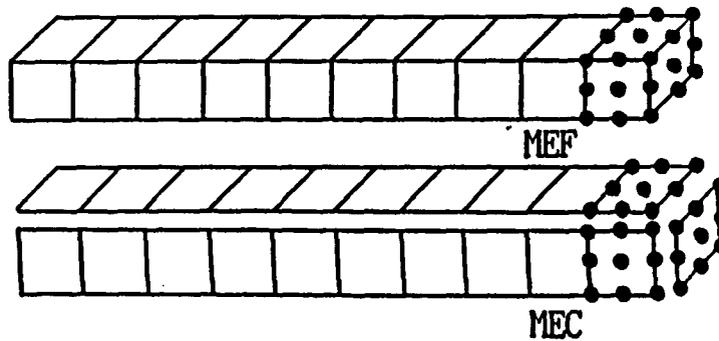
H02C10P5 - Malha H02C10P2, porém com  $p=5$ .



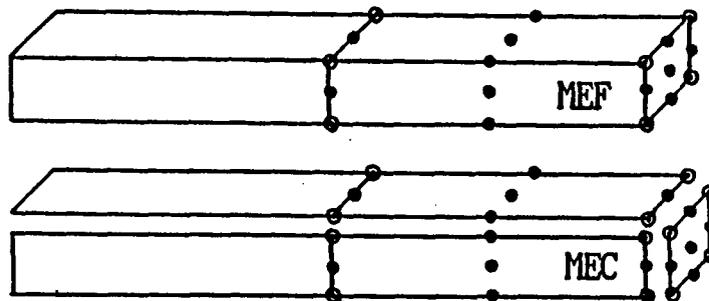
a) Malhas L10C42P1, L10C42P1S e L10C42P1B



b) Malha L02C10P2



c) Malha L10C42P2



d) Malhas H02C10P2, H02C10P3, H02C10P4 e H02C10P5

Figura 13. Malhas utilizadas para solução do problema 3

A Tabela 8 apresenta as condições de contorno empregadas para as posições indicadas na Figura 14.

Tabela 8. Condições de contorno

Posição	C.c. na direção			Valor prescrito na direção		
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
A	1	0	0	0,0	0,0	0,0
B	0	0	0	0,0	0,0	0,0
C	0	1	0	0,0	0,0	0,0
D	1	1	0	0,0	0,0	0,0
E	1	0	0	0,0	0,0	0,0
F	1	1	0	0,0	0,0	0,0

Os pontos E ou F da figura 12 podem indicar a posição de um nó real de um elemento hexaédrico de 27 nós ou a existência de nós fictícios de um elemento hierárquico de ordem  $p$ , conforme a malha utilizada. Em se tratando de elemento hierárquico, todos os nós fictícios correspondentes às posições E ou F terão as mesmas condições de contorno indicadas.

Os demais pontos das malhas auxiliares do MEC terão condições de contorno do tipo de Neumann com valor prescrito zero ou  $-q$  conforme esclarece a Figura 12.

A Tabela 9 fornece os resultados obtidos para a deflexão máxima pelo MFGLM e MEF em comparação com a solução de

referência.

Tabela 9. Deflexão máxima, d

Malha	MFGLM	MEF	ERRO %	
			MFGLM	MEF
L10C42P1	-0,1007366510	-0,1009608420	+33,8140	+33,6667
L10C42P1S	-0,1346068170	-0,1366535765	+11,5606	+10,2159
L10C42P1B	-0,1495672926	-0,1498414629	+1,7313	+1,5512
L02C10P2	-0,1323574050	-0,1325337690	+13,0385	+12,9227
L10C42P2	-0,1522521880	-0,1524235090	-0,0327	-0,1453
H02C10P2	-0,1319665420	-	+13,2953	-
H02C10P3	-0,1519384980	-	+0,1734	-
H02C10P4	-0,1519643680	-	+0,1564	-
H02C10P5	-0,1520547290	-	+0,0970	-

\*Sol.de referência  $d=-0,152202381$

A tabela 9 mostra que o elemento linear hexaédrico de oito nós (Malha L10C42P1) apresenta-se bastante rígido tanto para o MFGLM quanto para o MEF. O resultado é melhorado utilizando-se subintegração (Malha L10C42P1S). Acrescentando-se uma função bolha (malha L10C42P1B) o erro diminui significativamente.

O gráfico da figura 14 apresenta a curva de convergência do MFGLM número de graus de liberdade (malha auxiliar de elementos finitos) x deflexão para as malhas L10C42P1, L10C42P1B, L02C10P2 e L10C42P2 que utilizam elementos com

funções de interpolação convencionais. Como nestas malhas os resultados obtidos pelo MFGLM são aproximadamente os mesmos que os obtidos pelo MEF, neste gráfico não são representados os pontos correspondentes aos resultados obtidos pelo MEF. Observa-se que à medida em que se aumenta o número de graus de liberdade, os resultados convergem rapidamente para a solução de referência.

A figura 15 mostra o diagrama de convergência ordem  $p$  do elemento  $x$  deflexão para as malhas H02C10P2, H02C10P3, H02C10P4 e H02C10P5 que utilizam elementos com funções de interpolação hierárquicas. À medida em que se aumenta a ordem  $p$  dos elementos hierárquicos os resultados convergem rapidamente para a solução de referência.

A figura 16, através do gráfico NGL  $x$  deflexão, apresenta uma comparação entre os resultados obtidos pelo MFGLM através do uso das malhas L10C42P1, L10C42P1B, L02C10P2 e L10C42P2 nas quais a projeção das funções de Green é realizada sobre o espaço das funções de interpolação convencionais de elementos finitos e os resultados obtidos com as malhas H02C10P2, H02C10P3, H02C10P4 e H02C10P5, onde a projeção das funções de Green é realizada sobre o espaço das funções de interpolação hierárquicas. Fica claro através da análise dos gráficos que a razão de convergência é maior para os elementos hierárquicos do que para os elementos convencionais. Isto se deve ao fato de se trabalhar com ordens mais elevadas com os elementos hierárquicos, e com isto, devido à diminuição do número de elementos utilizados, ter-se uma diminuição do número de graus de liberdade. No diagrama da figura 16, para as malhas

que utilizam elementos hierárquicos, são considerados os graus de liberdade fictícios.

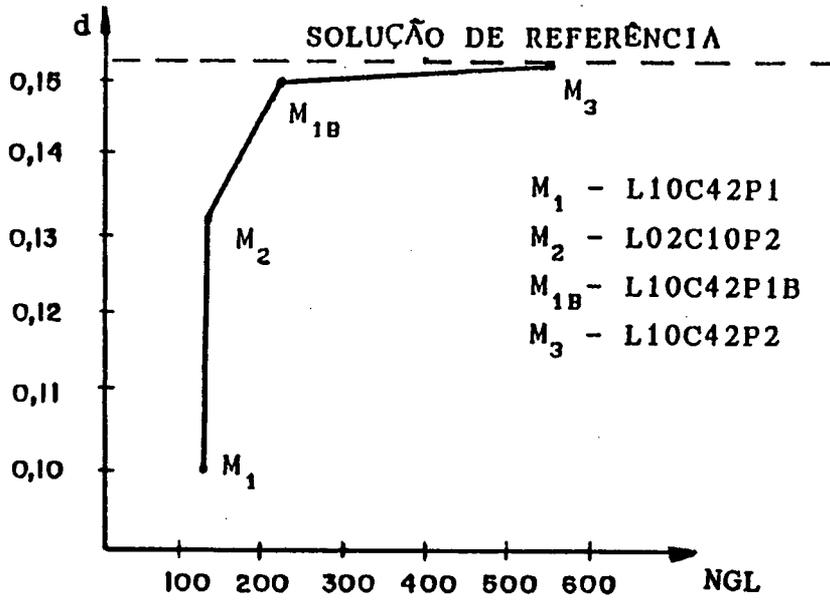


Figura 14. Diagrama de convergência (MFGLM)

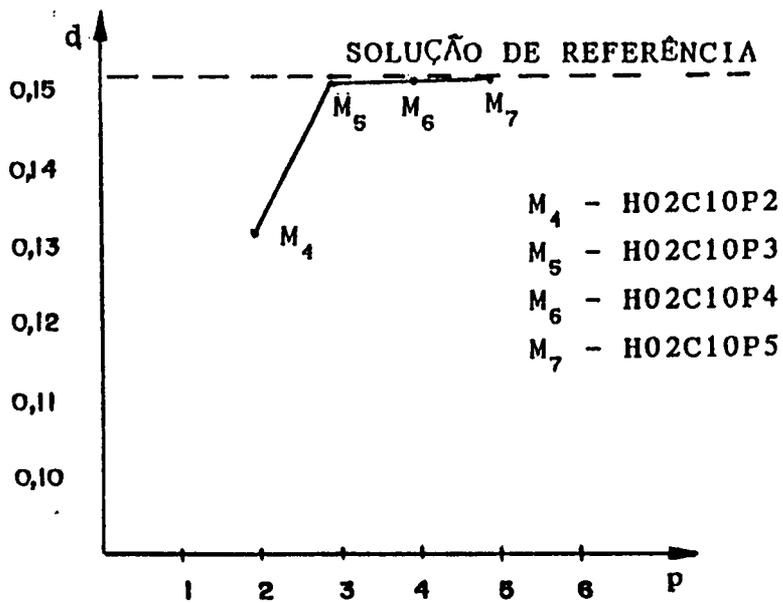


Figura 15. Diagrama de convergência (MFGLM)

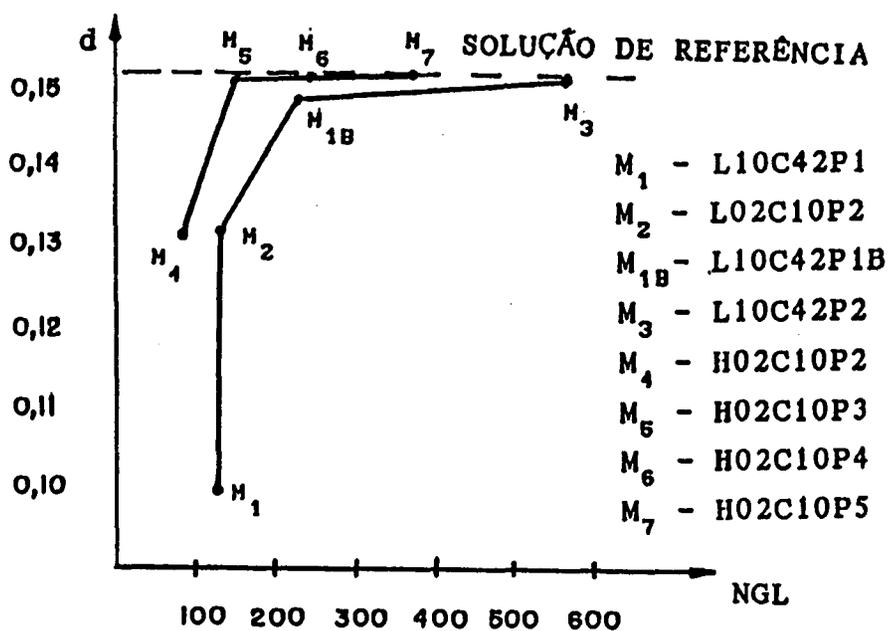


Figura 16. Comparação entre curvas de convergência (MFGLM)

#### 4.5- PROBLEMA 4: CILINDRO DE PAREDE ESPESSE COM PRESSÃO INTERNA

Deseja-se representar a distribuição de tensões num cilindro vazado de parede espessa, submetido a pressão uniforme na superfície interna e sem rotação, como é mostrado na Figura 17.

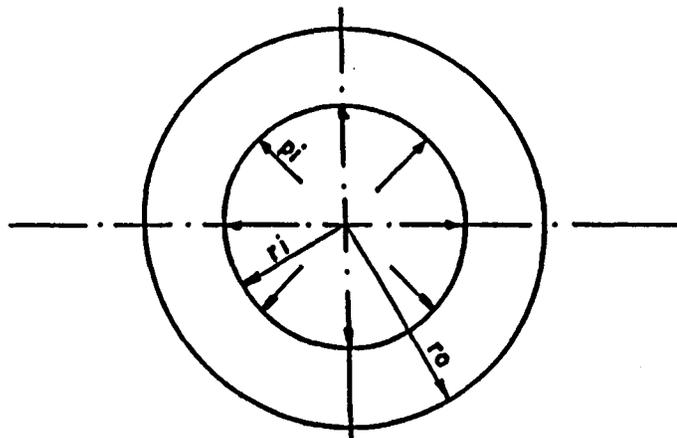


Figura 17. Cilindro vazado

Sejam  $r_i$  e  $r_o$  os raios interno e externo do cilindro, e  $p_i$  a pressão uniforme interna. Então as condições de contorno são

$$(\sigma_r)_{r=r_i} = -p_i \quad (\sigma_r)_{r=r_o} = 0 \quad (4.4)$$

As soluções analíticas [38, p.68] para tensões tangenciais, tensões radiais e deslocamento são

$$\sigma_\theta = \frac{p_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \left( 1 + \frac{r_o^2}{r^2} \right) \quad (4.5)$$

$$\sigma_r = \frac{p_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \left( 1 - \frac{r_o^2}{r^2} \right) \quad (4.6)$$

$$u_r = \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r} \quad (4.7)$$

onde

$$C_1 = \frac{2(1-\nu)p_i r_i^2}{E(r_o^2 - r_i^2)} \quad (4.8)$$

$$C_2 = \frac{p_i(1+\nu)}{E \left( \frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r_o^2} \right)} \quad (4.9)$$

As dimensões do cilindro são mostradas na Figura 18. O cilindro está sujeito a uma pressão interna de  $20 \text{ N/mm}^2$ . Uma seção de  $90^\circ$  foi analisada, levando em conta a simetria. O material do cilindro é isotrópico com coeficiente de Poisson  $\nu=0,3$  e módulo de elasticidade longitudinal  $E=2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ .

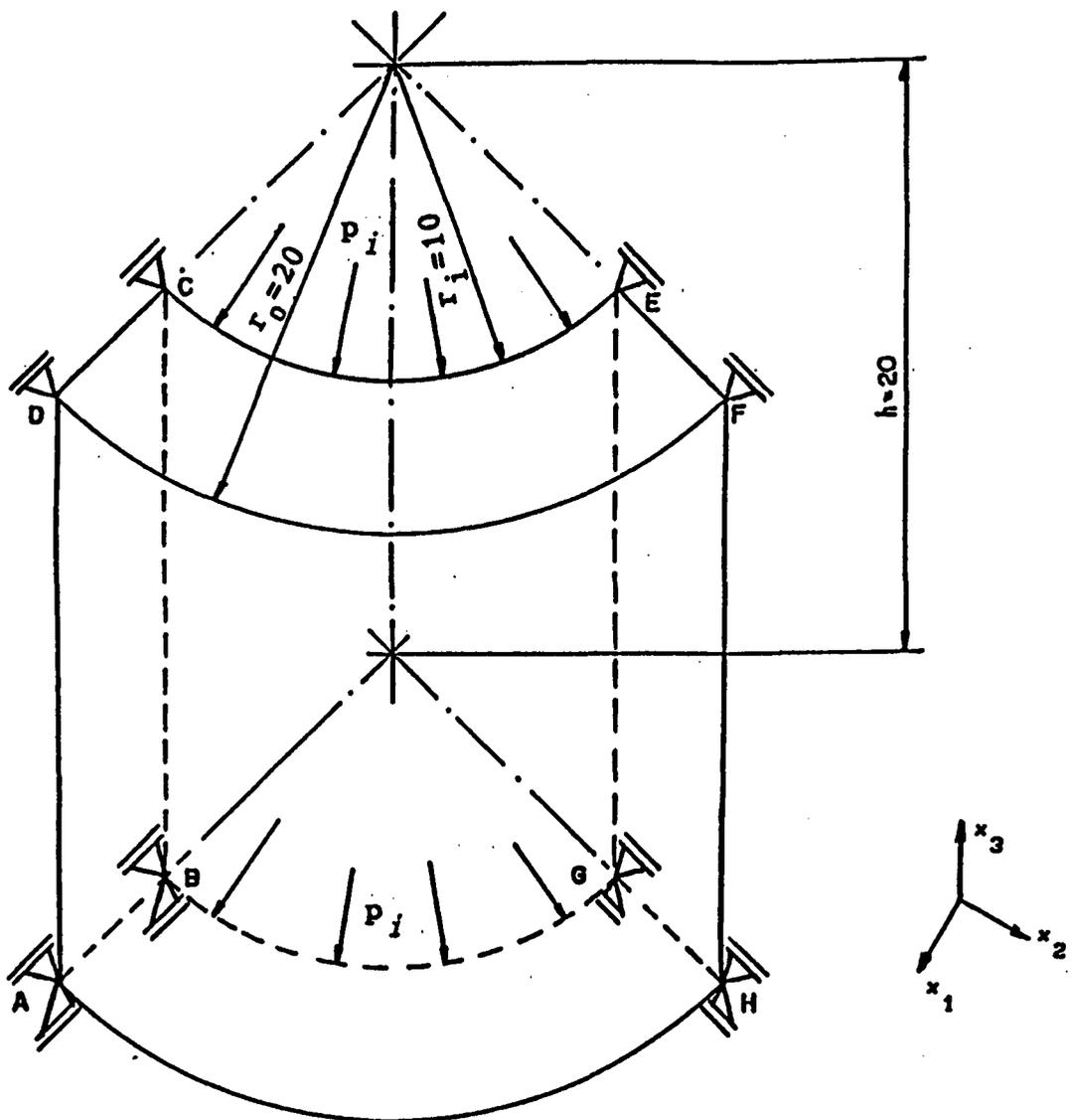


Figura 18. Cilindro com pressão interna  $p_i$

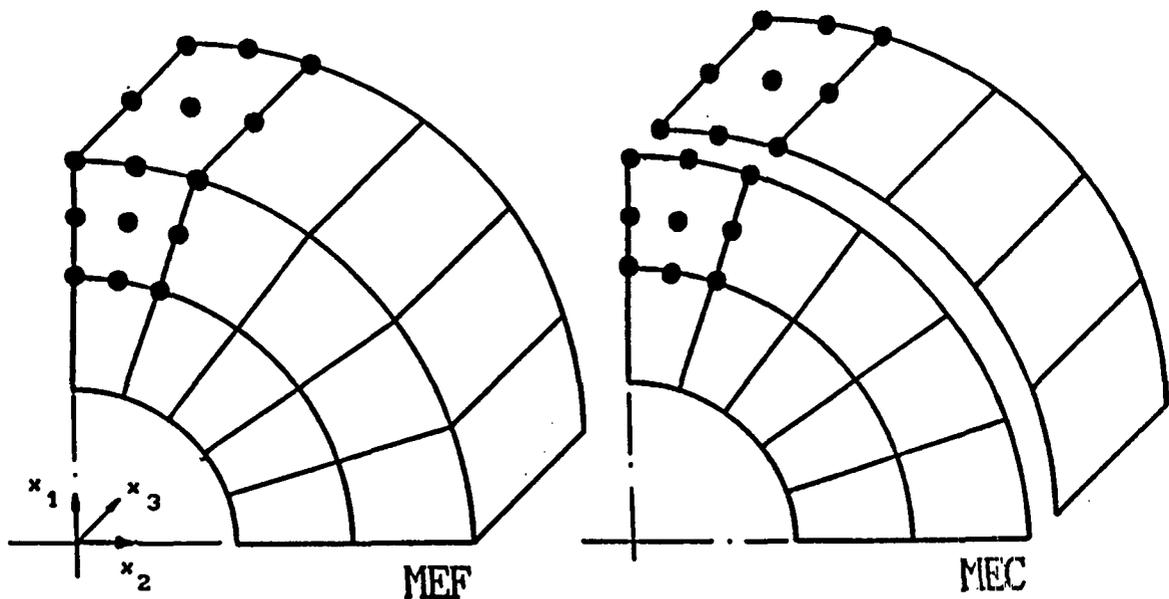
Este estudo tem como objetivo comparar os resultados obtidos usando o MFGLM, a solução analítica e o MEF.

As malhas utilizadas são:

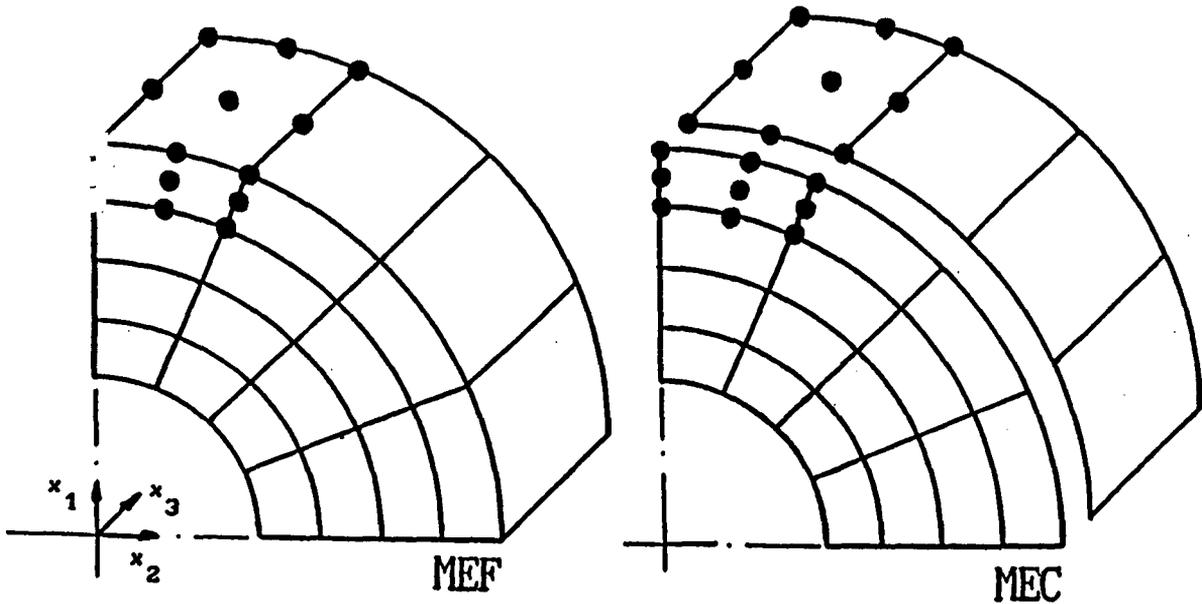
L10C34P2 - A malha auxiliar de elementos finitos foi gerada usando 10 elementos hexaédricos de 27 nós e a malha auxiliar de elementos de contorno usando 34 elementos planos quadráticos de 9 nós.

L16C48P2 - A malha auxiliar de elementos finitos foi gerada usando 16 elementos hexaédricos de 27 nós e a malha auxiliar de elementos de contorno usando 48 elementos planos quadráticos de 9 nós.

A Figura 19 apresenta a discretização do domínio utilizando as malhas L10C34P2 e L16C48P2.



a) Malha L10C34P2



b) Malha L16C48P2

Figura 19. Discretização do domínio

As condições de contorno empregadas estão representadas esquematicamente na Figura 18. Para melhor compreensão apresenta-se as condições de contorno para cada face da seção de 90° do cilindro apenas nos vértices. Para todos os nós de uma mesma face as condições são as mesmas, independentemente da malha empregada.

Tabela 10. Condições de contorno

Face	Posição	C.c. na direção			Valor prescrito na direção		
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
ABCD	A,B,C,D	1	0	1	0,0	0,0	0,0
EFGH	E,F,G,H	0	1	1	0,0	0,0	0,0
ABGH	A,B,G,H	1	1	0	0,0	0,0	0,0
CDEF	C,D,E,F	1	1	1	0,0	0,0	0,0
ADFH	A,D,F,H	1	1	1	0,0	0,0	0,0
BCEG	B,C,E,G	1	1	1	0,0	0,0	20,0D+00

A Tabela 11 apresenta os resultados obtidos.

Tabela 11. Comparação dos resultados obtidos pelo MFGLM com a solução analítica e MEF

	Raio	Solução analítica		L10C34P2	L16C48P2	Erro %		
						L10C34P2	L16C48P2	
$u_r$ $\times 10^2$	10,0	0,18730	†	0,1873504455	0,1876163296	-0,0269	-0,1689	
			*	0,1873011690	0,1875049151	-0,0006	-0,1094	
	12,5	0,15984	†	0,1599697506	0,1601774048	-0,0812	-0,2111	
			*	0,1599721823	0,1601725793	-0,0827	-0,2081	
	15,0	0,14339	†	0,1434886021	0,1437223365	-0,0688	-0,2318	
			*	0,1434883452	0,1437266981	-0,0686	-0,2348	
	17,5	0,13322	†	0,1333336874	0,1335496031	-0,0853	-0,2474	
			*	0,1333356396	0,1335547816	-0,0868	-0,2513	
	20,0	0,12698	†	0,1270891213	0,1273033553	-0,0859	-0,2546	
			*	0,1270910711	0,1273083975	-0,0875	-0,2586	
	$\sigma_\theta$	10,0	33,3	†	34,14930529	33,70879763	-2,55	-1,23
				*	34,71520460	33,90878364	-4,25	-1,83
12,5		23,7	†	23,25228517	23,99281146	+1,89	-1,24	
			*	23,20174024	23,99129628	+2,10	-1,23	
15,0		18,5	†	19,18653781	18,66278555	-3,71	-0,88	
			*	19,08861523	18,64989514	-3,18	-0,81	
17,5		15,4	†	15,16766478	15,46368305	+1,51	-0,41	
			*	15,24074146	15,46063355	+1,03	-0,39	
20,0		13,3	†	13,75316189	13,39896291	-3,41	-0,74	
			*	13,57170228	13,41174845	-2,04	-0,84	

(†) MFGLM

(\*) MEF

Como pode-se observar na Tabela 11, a malha L10C34P2

apresenta melhores resultados para o deslocamento radial do que a malha L16C48P2. No entanto, para tensão circunferencial os melhores resultados são obtidos pela malha L16C48P2. Isto pode ser compreendido analisando-se a Figura 19. A malha L10C34P2 tem apenas duas divisões na direção radial, mas 5 na direção circunferencial. A malha L16C48P2 tem apenas 4 divisões na direção circunferencial mas tem 4 divisões na direção radial. A tensão circunferencial melhora com um refino da malha na direção radial, o que justifica os melhores resultados para tensão circunferencial da malha L16C48P2. O pior desempenho da malha L16C48P2 em relação a L10C34P2 para deslocamento radial deve-se à diminuição do número de elementos na direção circunferencial. Os resultados obtidos pelo MFGLM para deslocamento radial e tensão circunferencial são aproximadamente os mesmos que os obtidos pelo MEF.

#### 4.6- PROBLEMA 5: FLEXÃO DE UMA VIGA CURVA POR UMA FORÇA NA SUA EXTREMIDADE.

Uma viga curva (90 graus) de seção transversal retangular delgada é engastada na face A e submetida a flexão por uma força P aplicada na face B na direção radial, como mostra a figura 20. O material da barra é isotrópico com coeficiente de Poisson  $\nu=0,20$  e módulo de elasticidade longitudinal  $E=1,0$ .

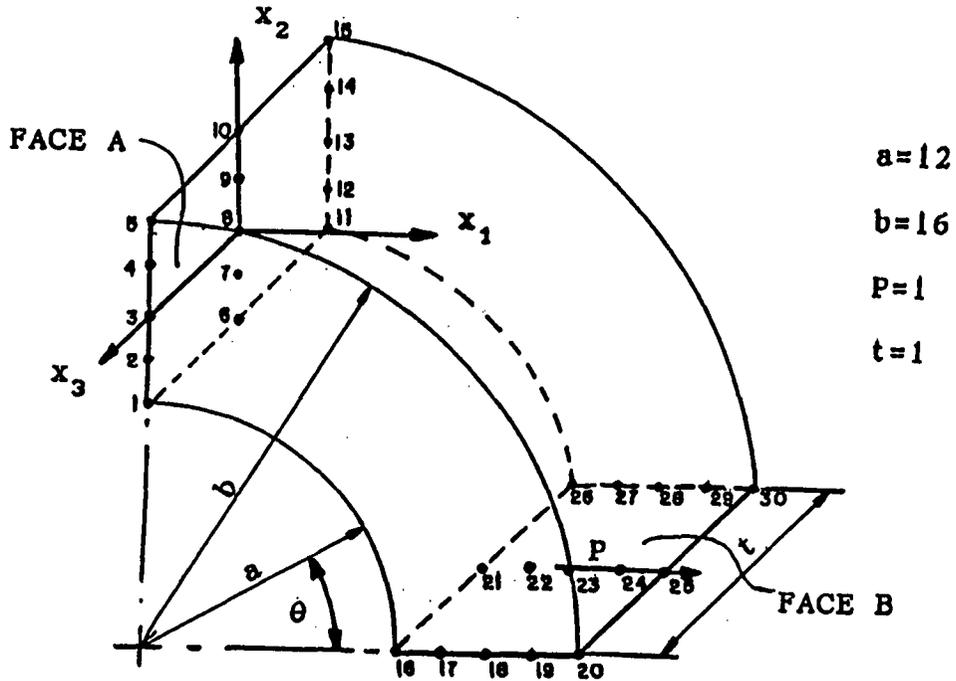


Figura 20. Viga curva em balanço

A fim de satisfazer a condição da extremidade carregada, a soma das forças cisalhantes distribuídas sobre a face B deve se igualar a P. O perfil de cisalhamento  $\tau_{x_1x_2}(x_1, \theta)$  é prescrito como condição de carregamento na extremidade carregada da viga. A partir de TIMOSHENKO e GOODIER [38, p.40] chega-se a

$$\tau_{x_1x_2}(x_1, x_2) = 3P \left[ 1 - \left( \frac{x_1}{c} \right)^2 \right] / 4c \tag{4.10}$$

onde c é a distância da linha neutra à fibra com tração ou compressão máxima.

A solução de referência a partir de TIMOSHENKO & GOODIER [38, p.83-85] (caso bidimensional), é:

para  $\theta = 0$

$$\sigma_\theta = 0 \tag{4.11}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{P}{N} \left[ r + \frac{a^2b^2}{r^3} - \frac{1}{r} (a^2+b^2) \right] \tag{4.12}$$

para  $\theta = \pi/2$

$$\tau_{r\theta} = 0 \quad (4.13)$$

$$\sigma_{\theta} = -\frac{P}{N} \left[ 3r - \frac{a^2 b^2}{r^3} - (a^2 + b^2) \frac{1}{r} \right] \quad (4.14)$$

onde

$$N = a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \ln \frac{b}{a} \quad (4.15)$$

O deslocamento radial no raio médio e extremidade livre é dado por

$$u_r = P\pi (a^2 + b^2) / EN \quad (4.16)$$

Para a solução do problema foram utilizadas duas malhas

L10C34P2 - Para geração da malha auxiliar de elementos finitos são utilizados 10 elementos hexaédricos de 27 nós e para geração da malha auxiliar de elementos de contorno são utilizados 34 elementos planos de 9 nós.

L18C58P2 - Para geração da malha auxiliar de elementos finitos são utilizados 18 elementos hexaédricos de 27 nós e para a geração da malha auxiliar de elementos de contorno são utilizados 58 elementos planos de 9 nós.

A figura 21 apresenta a discretização do domínio utilizando estas malhas.

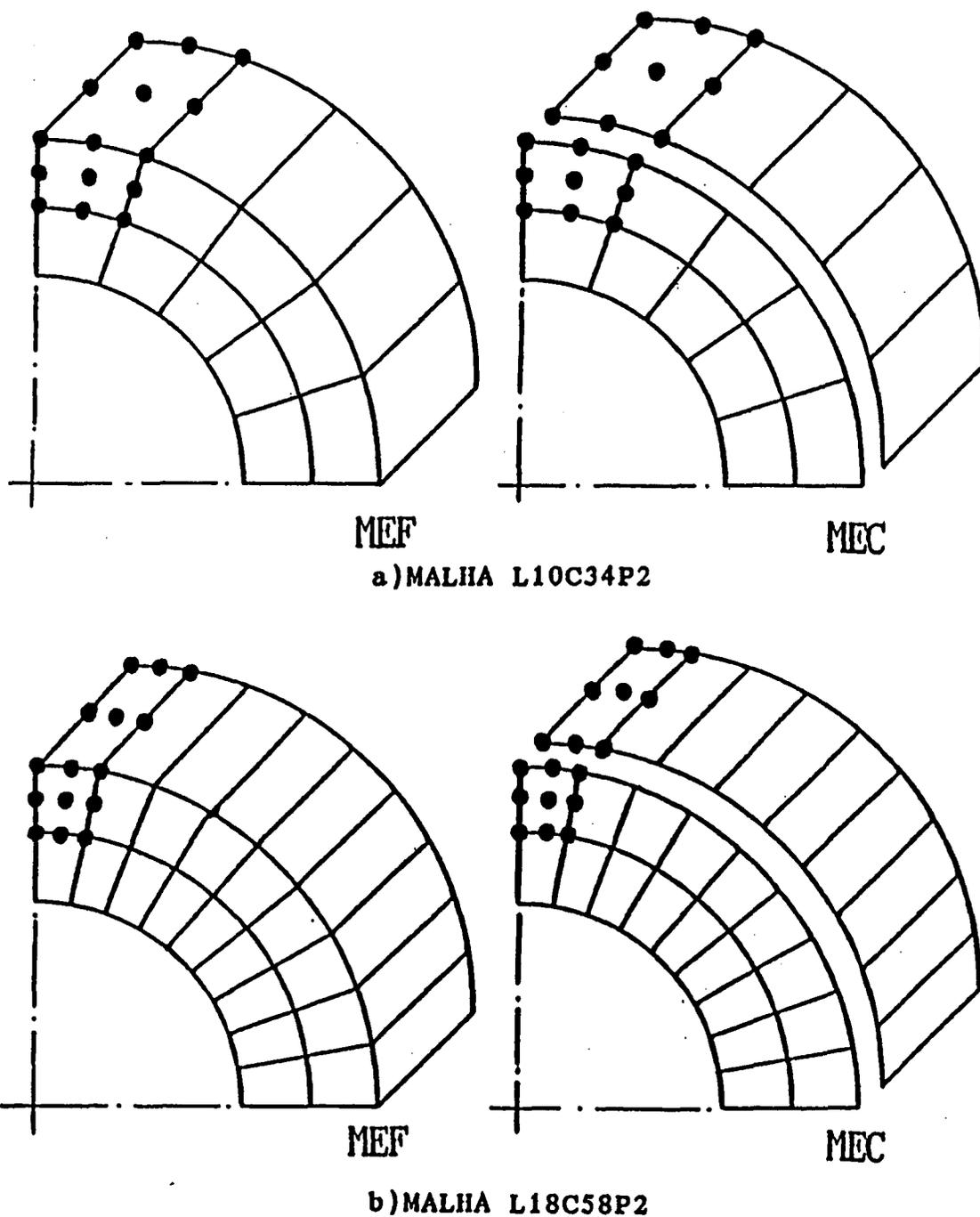


Figura 21. Discretização do domínio

As faces A e B da Figura 20 são apresentadas na Figura 22, com o objetivo de melhor apresentar as condições de contorno empregadas.

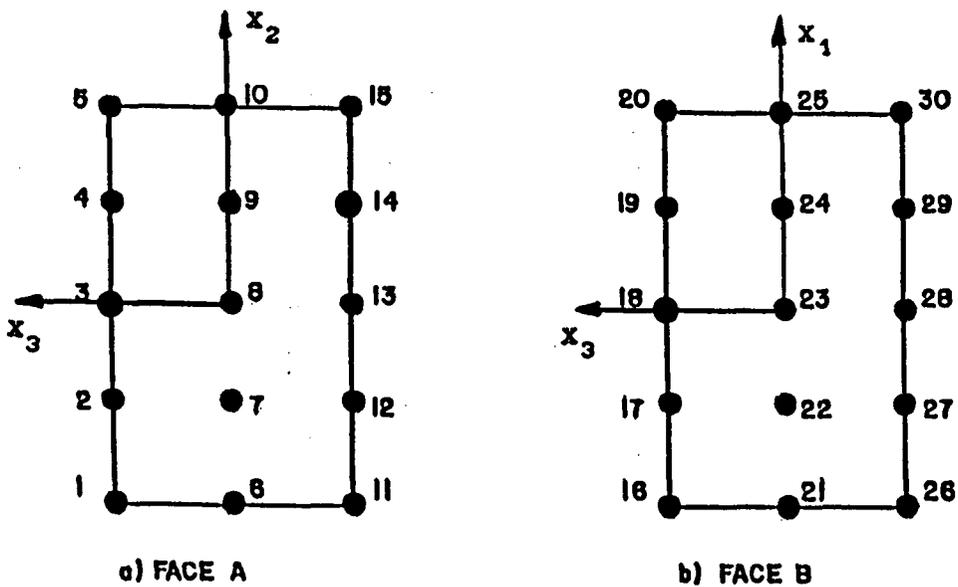


Figura 22. Faces A e B da figura 20

As condições de contorno de tração empregadas na solução do problema são apresentadas na Tabela 12. Todos os demais nós das malhas (não apresentados) tem condições de contorno de Neumann ou de Dirichlet com valor prescrito nulo. As condições de contorno apresentadas na Tabela 12 são utilizadas tanto para a malha L10C34P2 como para a malha L18C58P2.

Tabela 12. Condições de contorno para viga curva em balanço

Posição	C.c. na direção			Valor prescrito na direção		
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
17	1	1	1	0,28125	0,0	0,0
18	1	1	1	0,375	0,0	0,0
19	1	1	1	0,28125	0,0	0,0
22	1	1	1	0,28125	0,0	0,0
23	1	1	1	0,375	0,0	0,0
24	1	1	1	0,28125	0,0	0,0
27	1	1	1	0,28125	0,0	0,0
28	1	1	1	0,375	0,0	0,0
29	1	1	1	0,28125	0,0	0,0

Os resultados para tensões e deslocamentos são mostrados nas Tabelas 13 e 14.

Tabela 13. Deslocamento radial no raio médio da extremidade livre

Sol.de ref.		L10C34P2	L18C58P2	Erro %	
				L10C34P2	L18C58P2
408,95119	†	405,2077803	408,4308306	+0,92	+0,13
	*	405,1977569	408,4133905	+0,92	+0,13

(†) MFGLM

(\*) MEF

Tabela 14. Tensões normais no engaste

r	Sol. ref.		L10C34P2	L18C58P2	Erro %	
					L10C34P2	L18C58P2
16,0	-4,556062211	†	-4,598392118	-4,553620623	-0,93	+0,05
		*	-5,121969647	-4,744663293	-12,42	-4,14
15,0	-2,411675597	†	-2,546444714	-2,458496089	-5,59	-1,94
		*	-3,009646974	-2,613536720	-24,79	-8,37
14,0	0,001897569	†	-0,052622540	0,000146447	+2873,16	+92,28
		*	-0,581433560	-0,175298829	+30740,97	+9338,07
13,0	2,781956056	†	2,576873247	2,723931585	+7,37	+2,09
		*	2,171175847	2,576254280	+21,96	+7,39
12,0	6,074749615	†	6,182682221	6,090137012	-1,78	-0,25
		*	5,521374768	5,926740793	+9,11	+2,44

(†) MFGLM

(\*) MEF

Pode-se observar nas Tabelas 13 e 14 que os resultados, tanto para o deslocamento radial no raio médio da extremidade livre quanto para as tensões normais no engaste, convergem para a solução de referência. Os resultados para a malha L18C58P2 mostram a eficiência do refino h.

Tanto para a malha L10C34P2 quanto para a malha L18C58P2, utilizando apenas um elemento na direção transversal, as tensões normais no engaste e os deslocamentos no raio médio da extremidade livre estão bem representados. Os resultados obtidos pelo MFGLM e MEF para o deslocamento radial são aproximadamente os mesmos. Já os resultados obtidos pelo MFGLM

para tensões normais no engaste são significativamente mais precisos que os obtidos pelo MEF, como pode ser observado na Tabela 14. Isto ocorre porque no MFGLM as tensões são obtidas diretamente através do sistema de equações (2.43), enquanto que no MEF se faz necessário o cálculo das tensões a partir do pós-processamento dos valores nodais dos deslocamentos e das derivadas das funções de interpolação, resolvendo as equações (3.5), (3.9) e (3.20).

#### 4.7- PROBLEMA 6: FLEXÃO PURA DE UMA VIGA PRISMÁTICA.

Considere uma viga prismática fletida pela ação de dois conjugados  $M$ , iguais e de sentidos opostos, que atuam em um de seus planos principais, conforme a Figura 23. O material da viga é isotrópico com coeficiente de Poisson  $\nu=0,3$  e módulo de elasticidade longitudinal  $E=2,10d06$ .

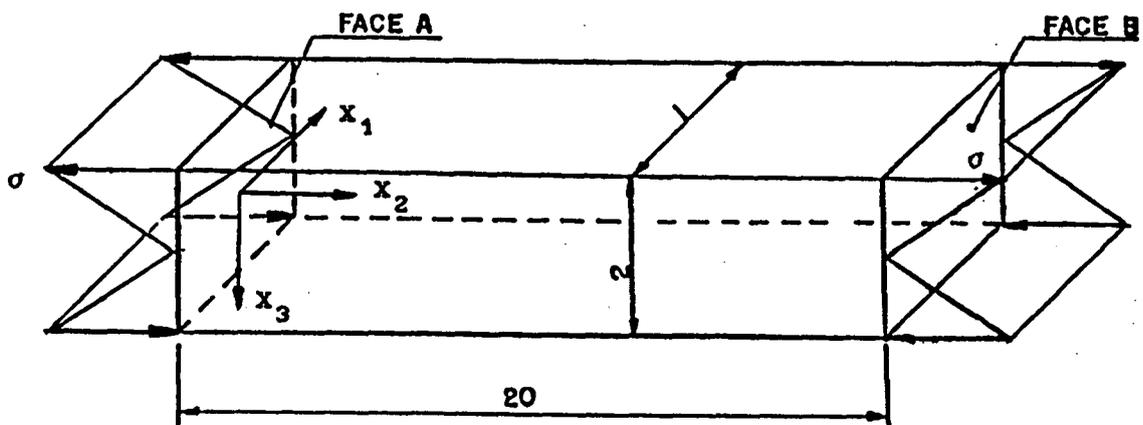


Figura 23. Viga prismática sob flexão pura

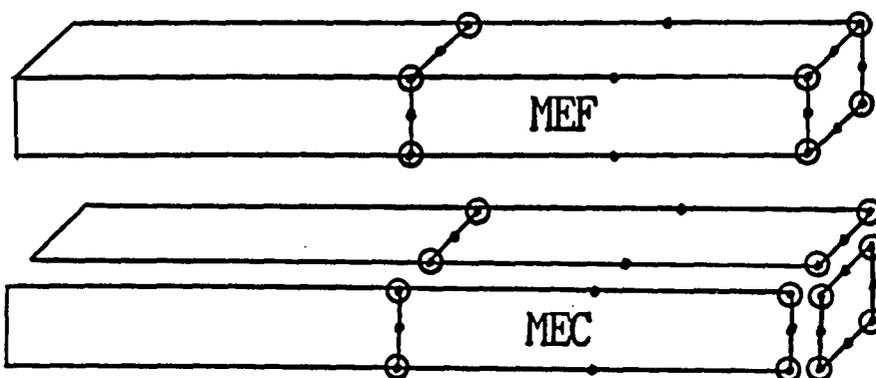
Para simular tal situação, a face A é engastada e na face B é aplicada uma tensão de flexão.

Para solução do problema foram utilizadas duas malhas:

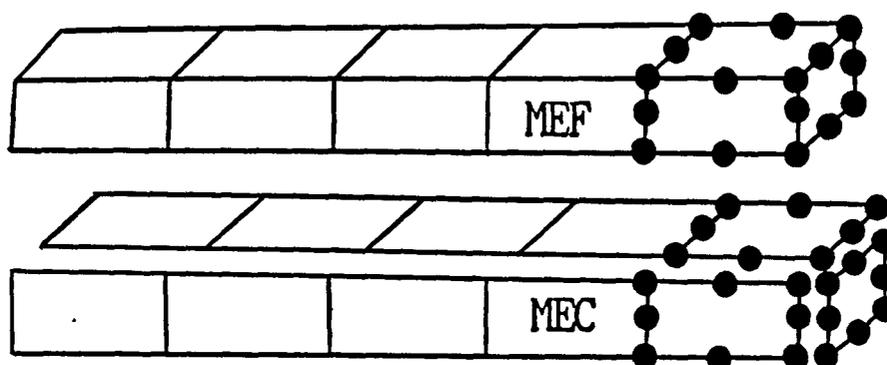
H02C10P3- Para geração da malha auxiliar de elementos finitos são utilizados 2 elementos hexaédricos hierárquicos  $p=3$  e para geração da malha auxiliar de elementos de contorno são utilizados 10 elementos planos hierárquicos  $p=3$ .

S05C22P2- Para geração da malha auxiliar de elementos finitos são utilizados 5 elementos hexaédricos de 20 nós e para geração da malha auxiliar de elementos de contorno 22 elementos planos de 8 nós.

⊙ NÓ REAL • NÓ FICTÍCIO (6 GRAUS DE LIBERDADE HIERÁRQUICOS)



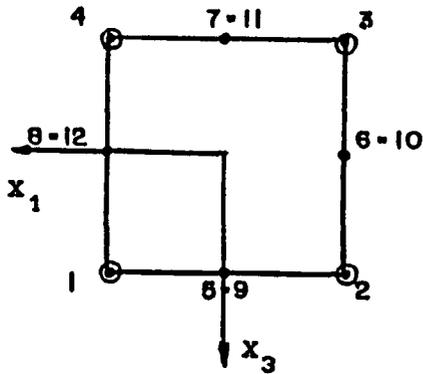
a) Malha H02C10P3



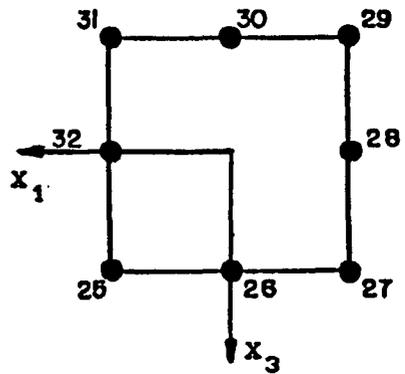
b) malha S05C22P2

Figura 24. Malhas H02C10P3, S05C22P2 para flexão pura

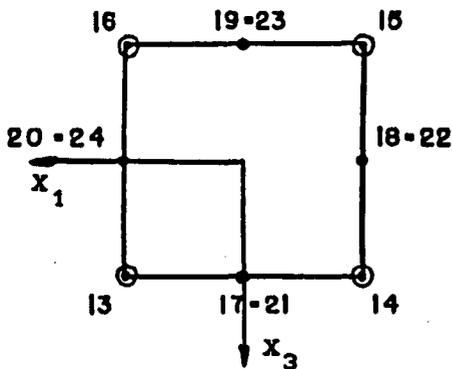
A figura 25 abaixo apresenta as faces A e B da figura 23 para as malhas auxiliares de elementos de contorno de H02C10P3 e S05C22P2, com o intuito de melhor esclarecer a aplicação das condições de contorno. Os demais nós das malhas H02C10P3 e S05C22P2 apresentam condições de contorno do tipo de Neumann com valor prescrito nulo.



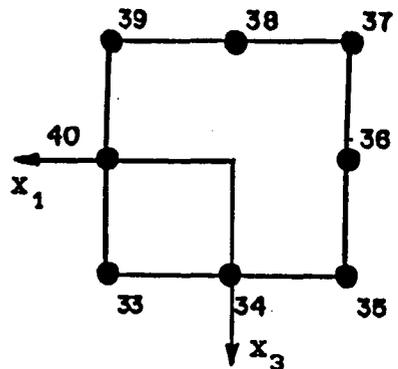
a) Face A, Malha H02C10P3



b) Face A, Malha S05C22P2



c) Face B, Malha H02C10P3



c) Face B, Malha S05C22P2

Figura 25. Faces A e B da figura 23

A tabela 15 apresenta as condições de contorno empregadas

Tabela 15. Condições de contorno para flexão pura

Nó	C.c. na direção			Valor prescrito na direção		
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
13	1	1	1	0,0	-30.000,0	0,0
14	1	1	1	0,0	-30.000,0	0,0
15	1	1	1	0,0	30.000,0	0,0
16	1	1	1	0,0	30.000,0	0,0
33	1	1	1	0,0	-30.000,0	0,0
34	1	1	1	0,0	-30.000,0	0,0
35	1	1	1	0,0	-30.000,0	0,0
37	1	1	1	0,0	30.000,0	0,0
38	1	1	1	0,0	30.000,0	0,0
39	1	1	1	0,0	30.000,0	0,0

A solução analítica para os deslocamentos é dada por TIMOSHENKO e GOODIER [38, p.278]

$$u_{x_3} = \frac{-1}{2R} [x_2^2 + \nu (x_3^2 - x_1^2)] \quad (4.17)$$

$$u_{x_2} = \frac{x_2 x_3}{R} \quad (4.18)$$

$$u_{x_1} = \frac{-\nu x_1 x_3}{R} \quad (4.19)$$

onde

$$R = \frac{EI}{M} \quad (4.20)$$

Os resultados obtidos para tensões  $\sigma_{x_2}$  são apresentados na tabela 16 e os resultados para deslocamentos para os nós dos vértices na tabela 17.

Tabela 16. Tensões para viga sob flexão pura

Malha H02C10P3			Malha S05C22P2		
Nó		Tensão $\sigma_{x_2}$	Nó		Tensão $\sigma_{x_2}$
1	†	-30.000,00000	25	†	-29.999,99997
	*	-30.000,00000		*	-29.987,53498
2	†	-29.999,99990	26	†	-30.000,00001
	*	-30.000,00000		*	-30.011,22807
3	†	29.999,99995	27	†	-29.999,99999
	*	30.000,00000		*	-29.987,53497
4	†	29.999,99993	28	†	0,00000590720
	*	30.000,00000		*	0,0000021D+00
			29	†	29.999,99996
				*	29.987,53498
			30	†	30.000,00001
				*	30.011,22807
			31	†	29.999,99999
				*	29.987,53497
			32	†	-0,0000042714
				*	-0,0000021225

(†) MFGLM

(\*) MEF

Tabela 17. Deslocamentos para nós dos vértices para viga sob flexão pura

Malhas		$u_{x_1}$	$u_{x_2}$	$u_{x_3}$
S.analit.		-0,2142857143D-02	0,2857142857D+00	-2,8587500000D+00
H02C10P3	†	-0,4285714320D-02	0,2857142857D+00	-2,8571428570D+00
S05C22P2	†	-0,2142857163D-02	0,2857142857D+00	-2,8566071430D+00
	*	-0,7661796036D-03	0,2805152953D+00	-2,8570142680D+00

(†) MFGLM

(\*) MEF

A Tabela 18 apresenta os erros para os deslocamentos.

Tabela 18. Comparação dos erros

Malha		Erro %		
		$u_{x_1}$	$u_{x_2}$	$u_{x_3}$
H02C10P3	†	-100,00	0,0	+5,62D-02
S05C22P2	†	-9,333D-07	0,0	+7,50D-02
	*	+64,24	+1,82	+6,07D-02

(†) MFGLM

(\*) MEF

Pela análise da Tabela 16 observa-se que os valores de tensões  $\sigma_{x_2}$  praticamente coincidem com os valores da solução analítica tanto para o MFGLM quanto para o MEF.

Pela análise da tabela 18 observa-se que os resultados obtidos pelo MFGLM são bastante precisos tanto para a malha H02C10P3 como para a malha S05C22P2, com a exceção do erro para  $u_{x_1}$  na malha H02C10P3. Este erro elevado ocorre devido à

prescrição para o nó 1 de condições de contorno do tipo Dirichlet homogêneas, o que produz uma distorção que provoca um deslocamento diferente para os quatro nós da seção. Os resultados obtidos pelo MFGLM e MEF para tensões e deslocamentos são aproximadamente os mesmos, com exceção de  $u_{x_1}$  para a malha S05C22P2, onde os resultados obtidos pelo MFGLM são mais precisos. Este resultado é medido no plano de aplicação da carga. O resultado obtido pelo MFGLM não é afetado pelas cargas enquanto que os obtidos pelo MEF o são. No MEF chega-se ao valor correto de  $u_{x_1}$  somente em planos afastados do plano de aplicação de carga.

#### 4.8- CONCLUSÃO

Conclui-se que o MFGLM é um método numérico adequado para aproximações de problemas da elasticidade tridimensional. A comparação dos resultados obtidos pelo MFGLM e MEF mostra valores aproximadamente iguais para deslocamentos. Nos casos analisados neste trabalho os resultados para tensões mostram-se favoráveis ao MFGLM à medida que a malha se torna mais distorcida.

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES

---

O Método da Função de Green Local Modificado (MFGLM) é adequado para aproximações de problemas da elastostática tridimensional e apresenta como características:

- 1) Quando trata de problemas com tensões predominantemente numa direção (por exemplo tração simples ) os resultados coincidem em aproximadamente 100 % com a solução analítica, como ocorre também com o Método dos Elementos Finitos.
- 2) O elemento linear hexaédrico de oito nós apresentado neste trabalho (sem a utilização de funções suavizadoras) apresenta-se bastante rígido. Consegue-se melhorar ligeiramente os resultados usando subintegração. Utilizando função bolha os resultados melhoram significativamente.
- 3) A convergência nodal de esforços e deslocamentos é muito rápida apenas com o aumento de um grau na ordem dos elementos, ou seja, utilizando elementos quadráticos no lugar de lineares.
- 4) Deve-se utilizar sempre nós duplos ou triplos em pontos onde existir duas ou três normais, respectivamente.

- 5) O operador  $\mathcal{N}'$ , se utilizado como definido neste trabalho, não influencia os resultados.
- 6) A utilização de funções hierárquicas no MFGLM é perfeitamente viável e apresenta resultados muito bons. Obtém-se resultados mais precisos com elementos hierárquicos, com um número bem menor de graus de liberdade (porém utilizando elementos de ordem um grau maior) do que os necessários para elementos convencionais.
- 7) O refino  $p$ -hierárquico de todo o domínio e contorno executado no MFGLM apresenta ótimos resultados, com uma convergência rápida, mesmo utilizando malhas extremamente grosseiras.
- 9) Domínios curvos são bem representados pelo MFGLM, obtendo-se resultados para deslocamentos/esforços com margens de erro muito pequenas.
- 10) Um refino  $h$  no MFGLM apresenta excelente eficiência.
- 11) Os resultados obtidos pelo MFGLM para deslocamentos são aproximadamente iguais aos obtidos pelo MEF. Nos casos analisados neste trabalho os resultados para tensões mostram-se favoráveis ao MFGLM em comparação ao MEF na medida em que aumenta a distorção das malhas.

Até o momento, um dos grandes inconvenientes do MFGLM é com relação ao tempo de processamento gasto, que é alto. Isto ocorre devido à necessidade da aproximação das projeções da função de Green, característica fundamental do método. No entanto, o excessivo tempo de processamento pode ser reduzido com a otimização dos programas existentes e implementação de outras técnicas, como o Método HRZ, subestruturação, etc..

Sugere-se como trabalhos futuros

- 1) O estudo matemático detalhado do MFGLM
- 2) Implementação de funções hierárquicas com a geometria descrita através de funções blending ou B-Spline, e com isto resolver problemas em domínios com formas geométricas quaisquer.
- 3) Desenvolvimento de geradores de malha para o MFGLM.
- 4) Método HRZ para elasticidade tridimensional.
- 5) Subestruturação, possibilitando-se assim a obtenção de forças no interior do domínio.
- 6) Modelagem de placas espessas com elementos sólidos.

Conclui-se, pela análise do presente trabalho e demais publicações sobre o MFGLM, que o método é bastante promissor, merecendo novos investimentos para seu desenvolvimento e compreensão dos aspectos matemáticos envolvidos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BARCELLOS, C.S. ; BARBIERI, R. Solution of singular potential problems by the Modified Local Green's Function Method (MLGFM). In: Brebbia, C. A. (Ed.), 13th Boundary Element Method Conference, 1992.
2. BARCELLOS, C.S. ; SILVA, L.H.M. Elastic membrane solution by a Modified Local Green's Function Method. In: Brebbia, C.A. and Venturini, W.S. (Ed.), Proc. Int. Conf. on Boundary Element Technology, Southampton: Comp. Mech, 1987.
3. BURNS, T.J. The partial current balance method: a Local Green's Function technique for the numerical solution of multidimensional neutron diffusion problems. Illinois, 1975. Tese (Ph.D.) - Universidade de Illinois.
4. HORAK, W.C. Local Green's Function Techniques for the solution of heat conduction and incompressible fluid flow problems. Illinois, 1980. Tese (Ph.D.) - Universidade de Illinois.
5. LAWRENCE, R.D. A Local Green's Function Method for multidimensional neutron diffusion calculations. Illinois, 1979. Tese (Ph.D.) - Universidade de Illinois.
6. SILVA, L.H.M. Novas formulações integrais para problemas da mecânica. Santa Catarina, 1988. Tese (Dr.) - Universidade

Federal de Santa Catarina.

7. MACHADO, R.D. Desenvolvimento do Método Modificado da Função de Green Local para a solução de placas ortotrópicas laminadas. Santa Catarina, 1992. Tese (Dr.) - Universidade Federal de Santa Catarina.
8. MACHADO, R.D.; BARCELLOS, C.S. A first Modified Local Green's Function Method approach to orthotropic laminated plates. In: Brebbia, C. A. (Ed.), Proc. CADCOMP92 - Computer Aided Design for Composite Materials Conference, Newark: Comp. Mech., 1992.
9. MACHADO, R.D.; BARBIERI, R.; BARCELLOS, C.S.; FILIPPIN, C.G. O Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) aplicado a problemas da mecânica do contínuo; Parte II - Placas ortotrópicas laminadas. In: XIII CILAMCE, anais do 13<sup>o</sup> Congresso Ibero-Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, 1992.
10. MACHADO, R.D.; BARBIERI, R.; FILIPPIN, C.G.; BARCELLOS, C.S. Análise Comparativa entre o MEF e o MMFGL para solução de placas laminadas de materiais compostos. In: RBCM - J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences, vol. XVI - n<sup>o</sup> 1 pp. 27-34, 1994.
11. BARBIERI, R. ; BARCELLOS, C.S. A Modified Local Green's Function Technique for the Mindlin's plate model. In:

Brebbia, C.A. (Ed.), 13th Boundary Element Method Conference, 1991.

12. BARBIERI, R. ; BARCELLOS, C.S. Mindlin's plate solutions by the MLGFM. In: BEM XV, proceedings of the 15th Int. Conf. on Boundary Elem. Method, vol. 2, pp. 149-164, 1993.
13. BARBIERI, R. ; BARCELLOS, C.S. ; MACHADO, R.D. ; FILIPPIN, C. G. o Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) aplicado à placa de Mindlin. In: XV COBEM, anais do 15° Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 1993.
14. BARBIERI, R. ; BARCELLOS, C.S. Solução do problema potencial pelo Método da Função de Green Local Modificado. In: COBEM XI, anais do 11° Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 1991.
15. BARBIERI, R. ; BARCELLOS, C.S. Non-homogeneous field potential problems solution by the Modified Local Green's Function Method (MLGFM). Eng. Anal. with Boundary Elements, v. 11 ,pp. 9 a 15, 1993.
16. BARBIERI, R. Desenvolvimento e aplicação do Método da Função de Green Local Modificado (MFGLM) para problemas do meio contínuo. Santa Catarina, 1992. Tese (Dr.) - Universidade Federal de Santa Catarina.

17. BARBIERI, R. ; MACHADO, R.D. ; FILIPPIN, C.G. ; BARCELLOS, C.S. O Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) aplicado a problemas da mecânica do contínuo: Parte I - Elastostática. In: XIII CILAMCE, anais do 13° Congresso Ibero-Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, 1992.
18. BARBIERI, R. ; NOEL, A.T. ; BARCELLOS, C.S. A Green's Function Method approach to shell analysis. In: BEM XV, proceedings of the 15th Int. Conf. on Boundary Element Method, 1993.
19. BARBIERI, R. ; BARCELLOS, C.S. ; NOEL, A.T. MLGFM: uma nova formulação integral para cascas. In: XV CILAMCE, anais do 15° Congresso Ibero-Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, pp. 777-786, 1994.
20. BARBIERI, R. ; MACHADO, R.D. ; FILIPPIN, C.G. ; BARCELLOS, C.S. MLGFM - Uma formulação para subregiões. In: XV CILAMCE, anais do 15° Congresso Ibero-Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, pp. 671-680, 1994.
21. FILIPPIN, C.G. Desenvolvimento e aplicações do Método da Função de Green Local Modificado à equação de Helmholtz. Santa Catarina, 1992. Dissertação (M.) - Universidade Federal de Santa Catarina.

22. FILIPPIN, C.G. ; BARBIERI, R. ; BARCELLOS, C.S. Numerical results for h- and p-convergences for the Modified Local Green's Function Method. In: BEM XIV, proceedings of the 14th Int. Conf. on Boundary Element Technology, 1992.
23. FILIPPIN, C.G. ; BARBIERI, R. ; MACHADO, R.D. ; BARCELLOS, C.S. O Método da Função de Green Local Modificado como ferramenta computacional na solução do problema de vibração livre. In: Revista Brasileira de Acústica - SOBRAC - Acústica e Vibrações, vol. 11, 1992.
24. FILIPPIN, C.G. ; BARBIERI, R. ; MACHADO, R.D. ; BARCELLOS, C.S. O Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) aplicado a problemas da mecânica do contínuo: Parte III - Problemas regidos pela equação de Helmholtz. In: XIII CILAMCE, anais do 13<sup>o</sup> Congresso Ibero-Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, 1992.
25. FILIPPIN, C.G. ; MACHADO, R.D. ; BARBIERI, R. ; MUÑOZ R., P.A. ; BARCELLOS, C.S. Aplicação do Método da Função de Green Local Modificado em problemas de vibração livre de membranas e cavidades acústicas. In: XV COBEM, anais do 15<sup>o</sup> Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 1993.
26. MALDANER, M. O fator intensidade de tensões obtido pelo Método da Função de Green Local Modificado. Santa Catarina, 1993. Dissertação (M.) - Universidade Federal de Santa Catarina.

27. MALDANER, M. ; BARCELLOS, C.S. Análise de problemas da mecânica da fratura bidimensional com o uso do Método da Função de Green Local Modificado. In: XIII CILAMCE, anais do 13° Congresso Ibero-Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, 1992.
28. MALDANER, M. ; BARBIERI, R. ; BARCELLOS, C.S. Quarter-Point e o Método da Função de Green Local Modificado. In: IEV 93, anais da Conferência Internacional sobre Avaliação de Integridade e Extensão de Vida de Equipamentos Industriais, 1993.
29. MALDANER, M. ; BARCELLOS, C.S. O fator intensidade de tensão obtido pelo Método da Função de Green Local Modificado utilizando elementos de trinca. In: XIV CILAMCE, anais do 14° Congresso Ibero-Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, 1993.
30. MUÑOZ R., P.A. Desenvolvimentos na aplicação do Método da Função de Green Local Modificado a problemas de placa de Mindlin. Santa Catarina, 1994. Dissertação (M.) - Universidade Federal de Santa Catarina.
31. MUÑOZ R., P.A. ; FILIPPIN, C.G. ; BARCELLOS, C.S. O Método da Função de Green Local Modificado aplicado ao problema de vibração livre de placa de Mindlin. In: XV COBEM, anais do 15° Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 1993.

32. MUÑOZ R., P.A. ; BARCELLOS, C.S. Solução do problema de vibração livre de placas de Mindlin com o Método da Função de Green Local Modificado. In: VI Congresso Nacional de Ingenieria Mecanica. Ed. Pontificie Univ. Católica do Chile, pp.233-238, 1994.
33. MUÑOZ R., P.A. ; BARCELLOS, C.S. Análise comparativa do desempenho do Método da Função de Green Local Modificado frente ao Método dos Elementos Finitos para a solução de problemas de flexão e vibração livre de placas de Mindlin. In: XV CILAMCE, anais do 15° Congresso Ibero-Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, Ed. Escola de Eng. da UFMG, pp. 767-776, 1994.
34. MALVERN, L.E.. (1969). Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium, Prentice-Hall, Englewood Clifes, N,J.
35. DHATT, G. & TOUZOT, G. (1985). The Finite Element Method Displayed. John Wiley & Sons.
36. SZABÓ, B. & BABUŠKA, I. (1991). Finite Element Analysis. John Wiley & Sons.
37. COOK, R.D., MALKUS, D.S., PLESHA, M.E.. (1988). Concepts and Aplications of Finite Element Analysis. 3rd Ed., John Wiley & Sons, New York.

38. TIMOSHENKO, S.P. & GOODIER, J.N. (1980). Teoria da Elasticidade. Editora Guanabara Dois S.A. Rio de Janeiro - RJ. Brasil.
  
39. DUARTE, C.A.M. Estudo da versão p do Método dos Elementos Finitos para problemas da Elasticidade e de Potencial. Santa Catarina, 1991. Dissertação (M.) - Universidade Federal de Santa Catarina.

APÊNDICE A

DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO (3.34)

A partir das equações (3.2), (3.30), (3.31), (3.32), (3.33) e fazendo

$$Gd_j^i = [\psi]\{z\} \quad (1)$$

onde

$$\{z\} = \{ u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \dots \quad u_{ntn} \quad v_{ntn} \quad w_{ntn} \}^t \quad (2)$$

Obtemos

$$\beta (Gd_j^i) = \begin{bmatrix} \psi_{1,x_1} & 0 & 0 & \psi_{2,x_1} & 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \psi_{1,x_2} & 0 & 0 & \psi_{2,x_2} & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \psi_{1,x_3} & 0 & 0 & \psi_{2,x_3} & \dots & \vdots \\ \psi_{1,x_2} & \psi_{1,x_1} & 0 & \psi_{2,x_2} & \psi_{2,x_1} & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \psi_{1,x_3} & \psi_{1,x_2} & 0 & \psi_{2,x_3} & \psi_{2,x_2} & \vdots & \vdots \\ \psi_{1,x_3} & 0 & \psi_{1,x_1} & \psi_{2,x_3} & 0 & \psi_{2,x_1} & \vdots & \vdots \\ \psi_{ntn,x_1} & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \psi_{ntn,x_2} & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \psi_{ntn,x_3} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi_{ntn,x_2} & \psi_{ntn,x_1} & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \psi_{ntn,x_3} & \psi_{ntn,x_2} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi_{ntn,x_3} & 0 & \psi_{ntn,x_1} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \{z\} \quad (3)$$

Logo

$$\beta (Gd_j^i) = [B]\{z\} \quad (4)$$

Entrando com a equação (4) na equação (3.30) obtém-se

$$\begin{aligned} J(Gd_j^i) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{z\}^t [B]^t \Lambda [B] \{z\} d\Omega - \int_{\Omega} \{z\}^t [\psi]^t \{P_j\} d\Omega + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \{z\}^t [\psi]^t [N']^t [\psi] \{z\} d\partial\Omega \end{aligned} \quad (5)$$

Minimizando  $J(Gd_j^i)$ , ou seja, fazendo

$$\frac{\partial J (Gd_j^i)}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

ficamos com

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [B]^t \Lambda [B] \{z\} d\Omega - \int_{\Omega} [\psi]^t \{P_j\} d\Omega + \\ + \int_{\partial\Omega} [\psi]^t [N']^t [\psi] \{z\} d\partial\Omega = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [B]^t \Lambda [B] \{z\} d\Omega + \int_{\partial\Omega} [\psi]^t [N']^t [\psi] \{z\} d\partial\Omega = \\ = \int_{\Omega} [\psi]^t \{P_j\} d\Omega \end{aligned} \quad (8)$$

$$[ \int_{\Omega} [B]^t \Lambda [B] d\Omega + \int_{\partial\Omega} [\psi]^t [N']^t [\psi] d\partial\Omega ] \{z\} = \int_{\Omega} [\psi]^t \{P_j\} d\Omega$$

onde

$$\int_{\Omega} [B]^t \Lambda [B] d\Omega = [K] \quad (10)$$

$$\int_{\partial\Omega} [\psi]^t [N']^t [\psi] d\partial\Omega = \int_{\partial\Omega} [\phi]^t [N'] [\phi] d\partial\Omega = [K_0] \quad (11)$$

pois, no contorno,  $[\phi]$  são as projeções das funções  $[\psi]$  do domínio

$$\int_{\Omega} [\psi]^t \{P_j\} d\Omega = \int_{\Omega} [\psi]^t [\psi] d\Omega = [M] \quad (12)$$

devido à expansão do vetor  $\{P_j\}$ .

Assim

$$[K + K_0] [G^{DP}] = [M] \quad (13)$$

onde  $[G^{DP}]$  contém os valores nodais das projeções da função de Green.

## APÊNDICE B

### IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO HIERÁRQUICAS

Neste apêndice apresenta-se a convenção de numeração e o método de construção das funções de interpolação hierárquicas.

#### B.1- NUMERAÇÃO DAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO HIERÁRQUICAS TRIDIMENSIONAIS

A ordem  $p$  da polinomial de um elemento, neste trabalho, varia de 1 até 5. Por isso, deve ser estabelecida uma convenção para a numeração das funções de interpolação e conseqüentemente dos graus de liberdade e nós fictícios do elemento.

Adota-se a seguinte convenção:

- (1) As funções 1 a 8 são as funções tri-lineares.
- (2) As demais funções relativas a este grau, se existirem, estão associadas aos modos de aresta, modos de face e modos internos.

Através dos arranjos tridimensionais INDES, INDEF e

INDEB, se define a sequência de numeração.

INDES( $i, j, k$ ) = número da função de interpolação (associada a um vértice ou a uma aresta), correspondente ao produto da  $i$ -ésima função de interpolação (unidimensional) na direção  $\xi$  pela  $j$ -ésima função de interpolação (unidimensional) na direção  $\eta$  e pela  $k$ -ésima função de interpolação (unidimensional) na direção  $\zeta$ .

INDEF( $i, j, k$ ) = análogo a INDES, só que é usado para construir funções de face.

INDEB( $i, j, k$ ) = análogo a INDES, só que é usado para construir funções bolha.

Através dos seguintes códigos computacionais estes arranjos são construídos.

Código para construção de INDES.

$$\text{INDES } (1, 1, 1) = 1$$

$$\text{INDES } (2, 1, 1) = 2$$

$$\text{INDES } (2, 2, 1) = 3$$

$$\text{INDES } (1, 2, 1) = 4$$

$$\text{INDES } (1, 1, 2) = 5$$

$$\text{INDES } (2, 1, 2) = 6$$

```
INDES (2,2,2) = 7
INDES (1,2,2) = 8
NBANT = 0
PARA LC=3,10
    SE (LC ≥ 4) NBANT=4*(LC-3)
    SE (LC = 6) NBANT= 18
    SE (LC = 7) NBANT= 34
    SE (LC = 8) NBANT= 57
    SE (LC = 9) NBANT= 88
    SE (LC = 10) NBANT= 128
    NFANT = 8*(LC-2) + NBANT
    INDES (LC,1,1) = NFANT + 1
    INDES (2,LC,1) = NFANT + 2
    INDES (LC,2,1) = NFANT + 3
    INDES (1,LC,1) = NFANT + 4
    INDES (1,1,LC) = NFANT + 5
    INDES (2,1,LC) = NFANT + 6
    INDES (2,2,LC) = NFANT + 7
    INDES (1,2,LC) = NFANT + 8
    INDES (LC,1,2) = NFANT + 9
    INDES (2,LC,2) = NFANT + 10
    INDES (LC,2,2) = NFANT + 11
    INDES (1,LC,2) = NFANT + 12
FIM DO PARA
```

Código para construção de INDEF

```
LBANT = 0
NUMB = 1
II = 0
PARA IGV = 4,9
    II = II + 1
    I = II + 1
    PARA J=1,II
        I = I - 1
        SE (IGV = 5) LBANT = 1
        SE (IGV = 6) LBANT = 2
        SE (IGV = 7) LBANT = 4
        SE (IGV = 8) LBANT = 8
        SE (IGV = 9) LBANT = 15
        LFANT = 11 * IGV + LBANT
        INDEF (8, I, J) = LFANT + NUMB
        NUMB = NUMB + 1
        INDEF (I, 8, J) = LFANT + NUMB
        NUMB = NUMB + 1
        INDEF (7, I, J) = LFANT + NUMB
        NUMB = NUMB + 1
        INDEF (I, 7, J) = LFANT + NUMB
        NUMB = NUMB + 1
        INDEF (I, J, 7) = LFANT + NUMB
        NUMB = NUMB + 1
        INDEF (I, J, 8) = LFANT + NUMB
        NUMB = NUMB + I
```

FIM DO PARA

FIM DO PARA

Código para construção de INDEB

INDEXA = 1

JJ = 0

I = 0

PARA IIGV = 6,9

JJ = JJ + 1

JJJ = JJ + 1

PARA K = 1, JJ

JJJ = JJJ - 1

I = JJJ + 1

PARA J = 1, JJJ

I=I-1

SE (IIGV = 6) NBBABT = 2

SE (IIGV = 7) NBBABT = 21

SE (IIGV = 8) NBBABT = 46

SE (IIGV = 9) NBBABT = 77

NBFANT = 17 \* IIGV + NBBABT

INDEB(I, J, K) = NBFANT + INDEXA

INDEXA = INDEXA + 1

FIM DO PARA

FIM DO PARA

FIM DO PARA

## B.2- CONSTRUÇÃO DAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO HIERÁRQUICAS TRIDIMENSIONAIS

Através dos arranjos INDES, INDEF e INDEB realiza-se o cálculo das funções de interpolação e de suas derivadas em um ponto de integração  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Mostra-se o cálculo dos valores das funções de interpolação. O cálculo das derivadas é feito simultaneamente e de maneira análoga.

As variáveis que representam as funções de interpolação unidimensionais são apresentadas abaixo

- BLK(I) = I-ésima função de interpolação unidimensional na direção  $\xi$  associada a vértices ou arestas
- BLN(J) = idêntico a BLK, só que na direção  $\eta$
- BLT(K) = idêntico a BLK, só que na direção  $\zeta$
- BFK(L) = L-ésima função de interpolação unidimensional na direção  $\xi$ , associada a modos de face
- BFN(M) = idêntico a BFK, só que na direção  $\eta$
- BFT(N) = idêntico a BFK, só que na direção  $\zeta$
- BBK(ID) = ID-ésima função de interpolação unidimensional na direção  $\xi$ , associada a modos bolha
- BBN(ID) = idêntico a BBK, só que na direção  $\eta$
- BBT(ID) = idêntico a BBK, só que na direção  $\zeta$

Através de subrotina FORMA, calcula-se os valores das funções unidimensionais no ponto de integração unidimensional

EK. Define-se ainda IGRAU como o grau  $p$  das funções de interpolação. Armazena-se em PHI(I) o valor da I-ésima função de interpolação tridimensional.

Os valores das funções associadas aos vértices são obtidos da subrotina abaixo

```

PARA I = 1, 2
    PARA J = 1, 2
        PARA K = 1, 2
            IND = INDES (I, J, K)
            PHI(IND) = BLK(I)*BLN(J)*BLT(K)
        FIM DO PARA
    FIM DO PARA
FIM DO PARA

```

Os valores das funções associadas aos lados são obtidas da subrotina abaixo

```

PARA N = 3, (IGRAU + 1)
    IND1 = INDES (N, 1, 1)
    IND2 = INDES (2, N, 1)
    IND3 = INDES (N, 2, 1)
    IND4 = INDES (1, N, 1)
    IND5 = INDES (1, 1, N)
    IND6 = INDES (2, 1, N)
    IND7 = INDES (2, 2, N)
    IND8 = INDES (1, 2, N)

```

IND9 = INDES (N, 1, 2)

IND10 = INDES (2, N, 2)

IND11 = INDES (N, 2, 2)

IND12 = INDES (1, N, 2)

C valores das funções quadráticas, cúbicas, etc.

PHI(IND1) = BLK(N)\*BLN(1)\*BLT(1)

PHI(IND2) = BLK(2)\*BLN(N)\*BLT(1)

PHI(IND3) = BLK(N)\*BLN(2)\*BLT(1)

PHI(IND4) = BLK(1)\*BLN(N)\*BLT(1)

PHI(IND5) = BLK(1)\*BLN(1)\*BLT(N)

PHI(IND6) = BLK(2)\*BLN(1)\*BLT(N)

PHI(IND7) = BLK(2)\*BLN(2)\*BLT(N)

PHI(IND8) = BLK(1)\*BLN(2)\*BLT(N)

PHI(IND9) = BLK(N)\*BLN(1)\*BLT(2)

PHI(IND10) = BLK(2)\*BLN(N)\*BLT(2)

PHI(IND11) = BLK(N)\*BLN(2)\*BLT(2)

PHI(IND12) = BLK(1)\*BLN(N)\*BLT(2)

FIM DO PARA

Os valores das funções para modos de face são obtidas da subrotina abaixo

PARA L=1 , (IGRAU-3)

PARA K=1 , (IGRAU-3)

SE ((L+K) ≤ (IGRAU-2))

IND1 = INDEF(8,L,K)

IND2 = INDEF(L,8,K)

IND3 = INDEF(7,L,K)

IND4 = INDEF(L,7,K)

IND5 = INDEF(L,K,7)

IND6 = INDEF(L,K,8)

C valores das funções

PHI(IND1) = BLK(2) \* BFN(L) \* BFT(K)

PHI(IND2) = BFK(L) \* BLN(2) \* BFT(K)

PHI(IND3) = BLK(1) \* BFN(L) \* BFT(K)

PHI(IND4) = BFK(L) \* BLN(1) \* BFT(K)

PHI(IND5) = BFK(L) \* BFN(K) \* BLT(1)

PHI(IND6) = BFK(L) \* BFN(K) \* BLT(2)

FIM DO SE

FIM DO PARA

FIM DO PARA

Os valores das funções bolha são obtidas da subrotina  
abaixo

PARA IN = 1 , (IGRAU-5)

PARA JN = 1, (IGRAU-5)

PARA KN = 1, (IGRAU-5)

SE ((IN+JN+KN) ≤ (IGRAU-3))

IND = INDEB (IN, JN, KN)

PHI(IND) = BBK(IN)\*BBN(JN)\*BBT(KN)

FIM DO SE

FIM DO PARA

FIM DO PARA

FIM DO PARA

Observações:

1) Nos programas convencionais de elementos finitos que se utilizam de funções hierárquicas, utilizando-se o esquema de numeração das funções de interpolação definido na Seção B.1, as colunas, relativas aos graus de liberdade de um determinado nó hierárquico, não ocuparão posições contíguas na matriz de um elemento. Os graus de liberdade estarão agrupados segundo a ordem das funções de interpolação às quais estão associados. Os primeiros graus de liberdade são os associados às funções lineares (graus de liberdade reais), depois virão os associados às funções quadráticas, cúbicas, etc. (graus de liberdade hierárquicos). Neste trabalho resolve-se este problema associando-se às funções hierárquicas e correspondentes graus de liberdade a nós fictícios. Estes nós fictícios são enumerados tal qual os nós reais. Assim não se faz necessário alterar o programa original de BARBIERI [16]. Desta forma, um elemento hierárquico de ordem  $p=2$  é tratado como um elemento de 20 nós (8 reais e 12 fictícios), um elemento hierárquico de ordem  $p=3$  é tratado como um elemento hexaédrico de 32 nós (8 reais e 24 fictícios) e assim por diante.

2) Dependendo da posição relativa dos sistemas naturais de dois elementos vizinhos, haverá uma incompatibilidade de sinais das funções ímpares ao longo do lado comum. Neste

trabalho esta situação, devido a não se trabalhar com refino h e com malhas distorcidas, raramente ocorrerá. Evita-se o problema utilizando-se configurações de sistemas naturais compatíveis.

### B.3- CARACTERÍSTICAS DAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO HIERÁRQUICAS

Cada conjunto de funções, relativo a uma ordem de aproximação, está contido nos conjuntos subsequentes. Este aninhamento das funções de interpolação é similar ao dos termos de uma série de potências.

Consequências do uso de funções de interpolação hierárquicas:

- (1) Aninhamento dos conjuntos de funções de interpolação, resultando em um aninhamento da matriz de rigidez e do vetor carregamento.
- (2) O uso de funções hierárquicas resulta em sistemas de equações bem condicionados. Isto se deve à ortogonalidade das funções, resultando em matrizes predominantemente diagonais.
- (3) O uso de funções de interpolação, hierárquicas ou não, de mesma ordem, gera o mesmo espaço. Consequentemente, obtém-se a mesma aproximação para os dois casos.
- (4) Os coeficientes das funções de interpolação não representam deslocamentos nodais e geralmente não possuem um

significado físico claro, o que dificulta a imposição de condições de contorno.

#### B.4- NUMERAÇÃO DAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO BIDIMENSIONAIS

Adota-se a seguinte convenção, baseada no trabalho de DUARTE [39]

- (1) As funções de 1 a 4 são as funções bilineares associadas aos vértices do elemento.
- (2) As demais funções relativas a um determinado grau  $p$ , se existirem, estão associados aos modos de aresta e modos internos.

As funções bidimensionais são construídas a partir do produto de funções unidimensionais. Através dos arranjos bidimensionais IINDES e IINDEB se define a sequência de numeração. A construção das funções de interpolação bidimensionais se faz com o auxílio destes arranjos.

$IINDES(i, j)$  = número da função de interpolação (associada a um vértice ou a uma aresta) correspondente ao produto da  $i$ -ésima função de interpolação unidimensional na direção  $\xi$ , pela  $j$ -ésima função de interpolação unidimensional na direção  $\eta$ .

IINDEB( $i, j$ ) = análogo de IINDES, só que é usado para construir funções bolha.

Estes arranjos são construídos através dos seguintes códigos computacionais:

Código para construção de IINDES

c       vértices

IINDES (1,1) = 1

IINDES (2,1) = 2

IINDES (2,2) = 3

IINDES (1,2) = 4

NBANT = 0

PARA LC = 3,9

SE (LC  $\geq$  6) NBANT = (LC-4)\*(LC-5)/2

NFANT= 4\*(LC-2)+NBANT

c        lados 1,2,3,4

IINDES (LC,1) = NFANT + 1

IINDES (2,LC) = NFANT + 2

IINDES (LC,2) = NFANT + 3

IINDES (1,LC) = NFANT + 4

FIM DO PARA

Código para construção de IINDEB

NUMB = 1

II=0

PARA IGV = 4,8

```

      II = II + 1
      I = II + I
      PARA J = 1, II
          I = I - 1
          IINDEB (I,J) = 4*IGV + NUMB
          NUMB = NUMB + 1
      FIM DO PARA
FIM DO PARA

```

#### B.5- CONSTRUÇÃO DAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO BIDIMENSIONAIS HIERÁRQUICAS

Através dos arranjos IINDES e IINDEB realiza-se o cálculo das funções de interpolação e de suas derivadas em um ponto de integração  $(\xi, \eta)$ . Mostra-se o cálculo dos valores das funções de interpolação. O cálculo das derivadas é feito simultaneamente e de maneira análoga.

As variáveis que representam as funções de interpolação unidimensionais são representadas abaixo.

BLK(I) = I-ésima função de interpolação unidimensional na direção  $\xi$ , associada a vértice ou arestas

BLN(J) = idêntico a BLK, só que na direção  $\eta$

BBK(K) = K-ésima função de interpolação unidimensional na direção  $\xi$ , associada a modos internos.

BBN(L) = idêntico a BBK, só que na direção  $\eta$

Através da subrotina SHAPE, calcula-se os valores das funções unidimensionais no ponto de integração unidimensional EK. Armazena-se em PHI(I) o valor da I-ésima função de interpolação bidimensional.

Os valores das funções associadas aos nós são obtidos pela subrotina abaixo:

```

PARA I = 1, 2
    PARA J = 1, 2
        IND = IINDES (I,J)
        PHI(IND)= BLK(i) * BLN(J)
    FIM DO PARA
FIM DO PARA

```

Os valores das funções associadas às arestas são obtidas do arranjo computacional abaixo

```

PARA N=3, (IGRAU+1)
    IND1 = IINDES (N,1)
    IND2 = IINDES (2,N)
    IND3 = IINDES (N,2)
    IND4 = IINDES (1,N)
    PHI(IND1) = BLK(N) * BLN(1)
    PHI(IND2) = BLK(2) * BLN(N)

```

```
PHI(IND3) = BLK(N) * BLN(2)
```

```
PHI(IND4) = BLK(1) * BLN(N)
```

```
FIM DO PARA
```

Os valores das funções associadas a modos internos (bolhas) são obtidos como segue

```
PARA L = 1, (IGRAU - 3)
```

```
  PARA K = 1 , (IGRAU -3)
```

```
    SE ((L+K) ≤ (IGRAU - 2))
```

```
      IND = IINDEB(L,K)
```

```
      PHI(IND) = BBK(L) * BBN(K)
```

```
    FIM DO SE
```

```
  FIM DO PARA
```

```
FIM DO PARA
```

Valem aqui as mesmas observações feitas nos itens B.2 e B.3, que tratam da construção das funções de interpolação hierárquicas tridimensionais e das características das mesmas.