

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DESENVOLVIMENTO DO  
MÉTODO MODIFICADO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL  
PARA A SOLUÇÃO DE PLACAS LAMINADAS DE  
MATERIAIS COMPOSTOS

TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL  
DE SANTA CATARINA PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE  
DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA

ROBERTO DALLEDONE MACHADO

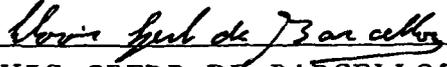
FLORIANÓPOLIS, DEZEMBRO DE 1992

DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO MODIFICADO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL  
PARA A SOLUÇÃO DE PLACAS LAMINADAS DE MATERIAIS COMPOSTOS.

ROBERTO DALLEDONE MACHADO

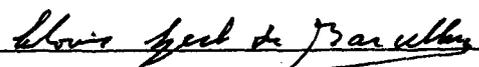
ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
DOUTOR EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO SÓLI-  
DOS, APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO  
EM ENGENHARIA MECÂNICA.

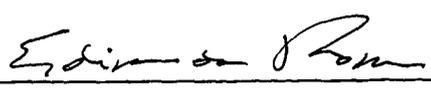
  
CLOVIS SPÉRB DE BARCELLOS, Ph.D.  
Orientador

  
BEREND SNOEIJER, Dr. Ing.  
Coordenador

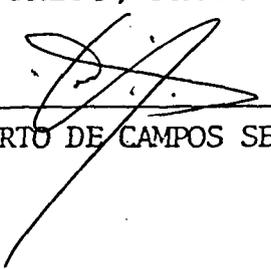
BANCA EXAMINADORA:

  
CLOVIS SPÉRB DE BARCELLOS, Ph.D.

  
NEBE JOÃO MANSUR, Ph.D.

  
EDISON DA ROSA, D. Eng.

  
GUILHERMO CREUS, Ph.D.

  
CARLOS ALBERTO DE CAMPOS SELKE, Ph.D.

*d*

*Vânia*

*"Nenhum verdadeiro bem pode ser trocado por dinheiro. E, no país das almas, no país dos verdadeiros bens, nada do que aqui está a venda merece ser comprado."*

*Sócrates, Filósofo Grego.*

## A G R A D E C I M E N T O S

Ao Prof. Clovis Sperb de Barcellos, pela orientação e pelos ensinamentos transmitidos.

Aos colegas do Departamento de Construção Civil da Universidade Federal do Paraná, pela oportunidade dispensada.

Aos membros do CESEC - Centro de Estudos de Engenharia Civil da Universidade Federal do Paraná, pelo apoio e incentivo.

Aos Professores Sergio Scheer e Mildred Ballin Hecke, pela inestimável ajuda.

A todos os colegas do GRANTE, Grupo de Análise de Tensões, do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina, pelo convívio enriquecedor. Em especial, à Renato Barbieri, Carlos Armando Magalhães Duarte, Paulo Roberto Linzmeier, André Tamagnini Noel, Carlo Giuseppe Filippin e Tancredo Westphal Junior.

À Maristela Bandil e à Blima R. Lorber, pelo apoio recebido.

À CAPES/PICD pelo auxílio financeiro.

## ÍNDICE

Resumo

Abstract

Lista de Símbolos

### CAPÍTULO

#### 1. - INTRODUÇÃO.

1.1. Métodos Aproximados Para Problemas de Valor de Contorno	1
1.1.1. O Método dos Elementos Finitos	1
1.1.2. O Método dos Elementos de Contorno	2
1.1.3. Tendência Atual dos Métodos Aproximados	3
1.1.4. O Método Modificado da Função de Green Local	3
1.2. Materiais Compostos	5
1.2.1. Aspectos Gerais	5
1.2.2. Placas Laminadas de Materiais Compostos	8
1.2.3. Métodos de Solução Para Placas Laminadas	10
1.3. Objetivo do Trabalho	11
1.4. Escopo do Trabalho	12
1.5. Referências Bibliográficas do Capítulo 1	13

#### 2. - TÉCNICAS DE PROJEÇÃO DO MÉTODO MODIFICADO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL (MMFGL)

2.1. Introdução	15
2.2. Análise Abstrata do MMFGL	20
2.2.1. Conceitos Preliminares	20
2.2.2. MMFGL - Formulação Abstrata	27
2.3. Análise Variacional do MMFGL	30
2.4. O Formalismo do MMFGL	33
2.4.1. Equações Integrais	33
2.4.2. Aproximação das Equações Integrais	37
2.4.3. Determinação das Projeções do Tensor de Green	42

2.4.4. Implementação das Matrizes e Resolução do Sistema de Equações	47
2.5. Referências Bibliográficas do Capítulo 2	49
3. - PLACAS LAMINADAS DE MATERIAIS COMPOSTOS	
3.1. Introdução	52
3.2. Teorias de Placas Laminadas	53
3.2.1. Teorias Tri-Dimensionais	54
3.2.2. Teorias de Camada Simples Equivalente	55
3.2.3. Teorias do Tipo Camada, Multi-Lâmina, ou Lâmina Discreta	60
3.3. Métodos de Solução Para Placas Laminadas	63
3.3.1. Soluções Analíticas	64
3.3.2. Soluções Aproximadas	66
3.3.2.1. O Método dos Elementos Finitos	66
3.3.2.2. O Método dos Elementos de Contorno	70
3.3.2.3. O Método Modificado da Função de Green Local	71
3.4. Teorias de Camadas Simples Por Modelos de Deslocamentos	72
3.4.1. Conceitos e Convenções Adotadas	74
3.4.2. Hipóteses Básicas	76
3.4.2.1. Teoria Clássica de Placas (CLPT)	77
3.4.2.2. Teoria de Primeira Ordem (FSDT)	78
3.4.2.3. Teorias de Ordem Superior (HSDT)	78
3.4.3. Expansões Polinomiais dos Deslocamentos	79
3.5. Propriedades de Uma Lâmina	82
3.5.1. Relações Constitutivas Num Sistema de Referências Local	82
3.5.2. Relações Constitutivas das Lâminas Num Sistema de Referências Global	87
3.6. Cálculo das Tensões Transversais No Laminado	89
3.7. Referências Bibliográficas do Capítulo 3	93
4. - SOLUÇÃO DE PLACAS COMPOSTAS LAMINADAS PELO MÉTODO MODIFICADO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL ATRAVÉS DE UMA TEORIA DE PRIMEIRA ORDEM	

4.1. Introdução	104
4.2. Equações Governantes na Teoria de Primeira Ordem	105
4.2.1. Relações Deslocamentos-Deformações	105
4.2.2. Relações Força-Deslocamento	108
4.3. Determinação da Solução de Placa Laminada Pelo MMFGL	111
4.3.1. Operador Diferencial Para o Problema de Placa Laminada	112
4.3.2. Determinação das Projeções dos Tensores de Green	117
4.3.2.1. Características das Matrizes de Green	117
4.3.2.2. Determinação de $G_j^{DQ}$ e $G_j^{CQ}$	120
4.3.3. Cálculo de Deslocamentos, Esforços e Tensões	124
4.4. Aplicações	126
4.4.1. Placa Isotrópica Simplesmente Apoiada	131
4.4.2. Placa Ortotrópica Simplesmente Apoiada	140
4.4.3. Placa Laminada $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$ Simplesmente Apoiada	144
4.4.4. Placa Laminada $0^\circ/90^\circ/0^\circ$	150
4.4.5. Placa Laminada Retangular $0^\circ/90^\circ/0^\circ$	158
4.4.6. Placa Laminada Simétrica - $[0^\circ/90^\circ/\dots]$ - 9 lâminas	163
4.4.7. Placa Laminada $9x[0^\circ/90^\circ/\dots]$ - Engastada	169
4.4.8. Placa Laminada Simétrica $[+\theta/-\theta/\dots]$ - 9 lâminas	171
4.4.9. Placa Retangular Anisotrópica Engastada	174
4.4.10. Placa Laminada $[0^\circ/90^\circ/\dots]$ Não Simétrica	177
4.4.11. Placa "Angle-Ply" $[+\theta/-\theta]$ , Quadrada e Apoiada	179
4.4.12. Placa Circular Ortotrópica Engastada	181
4.5. Referências Bibliográficas do Capítulo 4	184

## 5. - SOLUÇÃO DE PLACAS COMPOSTAS LAMINADAS PELO MÉTODO MODIFICADO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL ATRAVÉS DE UMA TEORIA DE ORDEM SUPERIOR

5.1. Introdução	186
5.2. Os Trabalhos de Whitney e Pagano	189
5.3. O Processo Preditor-Corretor de Noor e Burton	198
5.4. A Teoria de Ordem Superior de Lo, Christiensen	

e Wu (LCW)	204
5.5. A Teoria de Ordem Superior de Reddy	209
5.6. A Teoria de Ordem Superior de Kant e Pandya	212
5.7. Solução de Placa Laminada Pelo MMFGL Através da Teoria de Ordem Superior de Kant e Pandya	222
5.7.1. Comentários Iniciais	222
5.7.2. Determinação das Projeções dos Tensores de Green	224
5.8. Aplicações	228
5.8.1. Placa Laminada $[0^\circ/90^\circ]$ , Quadrada, Apoiada, Submetida a um Carregamento Senoidal	229
5.8.2. Placa Laminada $[0^\circ/90^\circ]$ , Quadrada, Apoiada, Submetida a um Carregamento Uniforme	237
5.8.3. Placa Laminada $[+45^\circ/-45^\circ/\dots]$ - 8 lâminas, Simplesmente Apoiada, Submetida a Um Carregamento Senoidal	241
5.8.4. Placa Laminada $[0^\circ/90^\circ/\dots]$ - 10 lâminas, Quadrada, Simplesmente Apoiada, Submetida a Um Carregamento Senoidal	246
5.8.5. Placa Laminada $[0^\circ/90^\circ/\dots]$ , $NL = 2$ ou $10$ , Quadrada, Submetida a Um Carregamento Senoidal e Com Condições de Contorno Variáveis	247
5.9. Referências Bibliográficas do Capítulo 5	248

## 6. - CONCLUSÕES

6.1. Comentários Iniciais	255
6.2. Aplicabilidade e Desempenho do MMFGL ao Caso de Placas Ortotrópicas Laminadas	256
6.2.1. Aplicabilidade	256
6.2.2. Desempenho	256
6.3. Potencialidade do MMFGL em Problemas Ortotrópicos Laminados	258
6.4. Referências Bibliográficas do Capítulo 6	261

## R E S U M O

Este trabalho investiga a viabilidade de um novo método integral denominado "Método Modificado da Função de Green Local (MMFGL)" para a solução de problemas de placas ortotrópicas laminadas de materiais compostos. A principal característica desse método é a determinação automática de uma solução fundamental para o problema. Até o momento, não se conhece uma solução fundamental que seja apropriada para placas laminadas, o que confere a este trabalho uma boa oportunidade de afirmação para o novo método.

Inicialmente, é feita uma revisão abstrata e do formalismo do Método. Em seguida, são apresentadas diversas técnicas de solução de placas compostas laminadas.

O estudo preliminar do MMFGL ao caso de placas laminadas é feito por uma Teoria de Camada Simples, baseada num modelo que representa linearmente o campo de deslocamentos ao longo da espessura. Diversas aplicações são realizadas para validar o método de solução.

A segunda fase consiste na utilização de uma Teoria Refinada que expande o campo de deslocamentos por meio de polinômios de ordem superior. A teoria empregada, sugerida por Kant e Pandya, é válida para laminados não-simétricos. Outras aplicações são novamente realizadas, mostrando o desempenho do MMFGL para este tipo de modelo.

## A B S T R A C T

This work investigates the Modified Local Green's Function Method (MLGFM) for the solution of composite orthotropic laminated plate problems. The main characteristic of this method is the automatic determination of a fundamental solution for the problem. Up to now, there is not an appropriate fundamental solution for laminated plate problems and this is a good opportunity to further establish this new method.

Initially, the MLGFM's mathematical concepts and its formalism are reviewed. Afterwards, some technical solutions of orthotropic laminated plates are presented.

The MLGFM's preliminary study for the laminated plate case is made by a Simple Layer Theory, based on a displacement model with linear distribution over the thickness. Many applications are presented to validate the method.

In the second part, a Refined Theory, which expands the displacement field by a higher polynomial order, is used. The selected theory was suggested by Kant and Pandya and it is proper for non-symmetric laminated plates. Other applications are made to show the MLGFM's performance for this model.

## L I S T A   D E   S Í M B O L O S

$\Omega$	Domínio aberto e limitado
$\partial\Omega$	Contorno de $\Omega$
$\ \cdot\ _H$	Norma de certa variável num espaço topológico H
$\langle \cdot, \cdot \rangle_H$	Produto dual entre duas variáveis sob espaços topológicos $H' \times H$ , onde $H'$ é o dual de H
$(\cdot, \cdot)_H$	Produto interno entre duas variáveis sob um mesmo espaço H
[·]	Variável na forma de matriz
$B(\cdot, \cdot)$	Forma bilinear para o domínio
$b(\cdot, \cdot)$	Forma bilinear para o contorno
$\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}^*$	Operador Diferencial e seu Adjunto
$\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}^*$	Operador Traço ou de Dirichlet e Adjunto deste
$\mathcal{N}$ , $\mathcal{N}^*$	Operador de Neumann e seu Adjunto
$\mathcal{N}'$	Operador Adicional do MMFGL
$\delta(\cdot, \cdot)$	Distribuição Delta de Dirac
$G(\cdot, \cdot)$	Solução Fundamental e/ou Tensor de Green
$u_D$ , $u_C$	Vetores dos deslocamentos generalizados no domínio e no contorno
$b$ , $f$	Vetores das forças de corpo e das ações nodais
$A, B, \dots, F$	Matrizes
$G_D$ , $G_C$	Projeções da Função de Green na base do espaço gerado por elementos finitos e de contorno, respectivamente
[ $\Psi$ ]	Conjunto das funções de interpolação de domínio
[ $\Phi$ ]	Conjunto das funções de interpolação de contorno
$G^{D(\cdot)}$	Valores nodais de $G_D$
$G^{C(\cdot)}$	Valores nodais de $G_C$
$\mathcal{F}$	Funcional para determinação das Projeções da Função de Green
$\mathbb{K}$ , $\mathbb{K}'$	Matrizes de Rigidez Convencional e Adicional do MMFGL
$k$	Coefficientes da matriz $\mathbb{K}'$
$k$	Coefficiente de correção do cisalhamento transversal
$\sigma$	Tensor Tensão de Cauchy
$\epsilon$	Tensor Deformação

$\mathcal{E}$	Matriz de Rigidez das Propriedades Elásticas
$u, v, w$	Deslocamentos nas direções X, Y e Z
$\theta$	Rotação
$C'$	Matriz de rigidez da lâmina no sistema local
$E$	Módulo de Elasticidade Longitudinal
$G$	Módulo de Elasticidade Transversal
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$Q$	Matriz de Rigidez Reduzida para o Estado Plano de Tensões
$R$	Matriz de rotações
$d$	Vetor dos deslocamentos nodais
$K$	Vetor das deformações de flexão
$\mathcal{L}_M, \mathcal{L}_F, \mathcal{L}_C$	Operadores diferenciais relativos aos efeitos de membrana, flexão e cisalhamento
$N, M$	Vetores das resultantes de tensões (forças normais e momentos fletores)
$A, B, D, Q$	Submatrizes da matriz de rigidez do laminado
$U$	Energia de Deformação

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 MÉTODOS APROXIMADOS PARA PROBLEMAS DE VALOR DE CONTORNO.

Hoje em dia, grande ênfase é dada aos métodos aproximados de solução dos problemas da Física e da Engenharia pois a determinação da resposta exata é, muitas vezes, impraticável, seja pela geometria irregular, pelas condições de contorno, pela excitação atuante, ou pelas características do material empregado.

Diversos métodos aproximados merecem destaque como, por exemplo, o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método dos Elementos de Contorno (MEC), o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Volumes Finitos (MVF). Sem desconsiderar a importância que os métodos das Diferenças Finitas e dos Volumes Finitos têm para a solução de problemas temporais ou da Mecânica dos Fluidos, este trabalho se restringirá a comentar, brevemente, apenas sobre os dois primeiros, MEF e MEC, nos itens que se seguem.

#### 1.1.1. O Método dos Elementos Finitos.

Idealizado durante a década de 50, o Método dos Elementos Finitos (MEF) pode ser entendido como uma técnica geral de construção de soluções aproximadas para problemas de valor de contorno. O método envolve a divisão do domínio de solução numa quantidade finita de subdomínios simples, os "elementos finitos", conectados entre si por meio de pontos nodais, e emprega conceitos variacionais para aproximar

a solução sobre todos os elementos, para condições de contorno arbitrárias. A solução global é obtida pela soma das contribuições locais de cada elemento. O método apresenta bom comportamento e facilidade de discretização, e suas bases matemáticas já foram bastante exploradas [Oden e Reddy (1976), Oden e Carey (1983)]. Para problemas elípticos lineares o método conduz a um sistema de equações lineares, em geral, simétrico, na forma de banda, e que pode ser bem aproveitado por diversas técnicas numéricas. A combinação de todos estes fatores acarretou sua aplicação em quase todas as áreas da Física-Matemática, e hoje, indiscutivelmente, é o método mais difundido e utilizado.

### 1.1.2. O Método dos Elementos de Contorno.

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é uma técnica integral que vem se destacando em inúmeras aplicações. Embora os métodos integrais fossem conhecidos desde o final do século passado, somente após a adoção das técnicas de discretização do Método dos Elementos Finitos, no final da década de 60, é que o MEC ganhou impulso. Por este método, apenas o contorno é discretizado através de porções denominadas "elementos de contorno", conectados entre si por meio de pontos nodais. A solução no domínio é decorrente de um processo de integração no contorno, sendo esta uma das vantagens do MEC em relação ao MEF, uma vez que a dimensão do problema se reduz em uma unidade, diminuindo o volume de dados e o tamanho das matrizes. Assim, o MEC torna-se bastante recomendável em problemas onde a discretização de domínio seja complexa, como, por exemplo, em análises tri-dimensionais. Em contra-partida, suas matrizes não são, em geral, esparsas, o que não favorece o uso de técnicas usualmente empregadas no MEF, como o armazenamento em "banda" ou "sky-line" [Brebbia, Telles e Wrobel (1984)].

O Método dos Elementos de Contorno é, ainda, eficiente na solução de problemas singulares, como no caso de fraturas, no tratamento de domínios infinitos, e, ao contrário do MEF, permite a utilização de elementos descontínuos, o que, em muitos problemas, é interessante.

Sua grande desvantagem é depender do conhecimento explícito de uma solução fundamental apropriada para o problema, o que o restringe apenas aos casos onde tal solução seja disponível, ou naqueles onde a mesma possa ser determinada por técnicas de dupla reciprocidade [Patridge, Brebbia & Wrobel (1991)]. Por esse motivo é que alguns problemas da Mecânica ainda não foram resolvidos adequadamente pelo MEC, tais como, cascas com curvatura qualquer e alguns problemas que envolvam meios não homogêneos, como é o caso de placas laminadas de materiais compostos. Além disso, algumas integrais existentes no processo são singulares, exigindo técnicas numéricas especiais.

### 1.1.3. Tendência Atual dos Métodos Aproximados.

Hoje em dia se nota um grande esforço científico na procura de um método que seja preciso e abrangente, de fácil discretização, e que garanta uma aproximação razoável do modelo matemático ao problema real que se está analisando, com um pequeno volume de dados e baixo custo computacional. Neste sentido caminha o Método dos Elementos Finitos, quer pela implementação de elementos mais precisos e eficientes, quer pelo desenvolvimento das técnicas adaptativas [Szabó e Babuška (1991)]. No Método dos Elementos de Contorno, uma das características desejadas é o cálculo numérico da solução fundamental e/ou da Função de Green, por meio de técnicas de resíduos ponderados [Beskos (1987)], de modo a tornar o método mais abrangente.

### 1.1.4 O Método Modificado da Função de Green Local.

O Método Modificado da Função de Green Local (MMFGL) é um novo método integral que reúne três técnicas distintas: o Método dos Elementos Finitos, o Método dos Elementos de Contorno, e o Método da Função de Green. Idealizado no final da década de 80 por Barcellos e Silva [1987], o MMFGL utiliza o MEF como processo residual para aproximar, localmente, as "projeções" da Função de Green na base do espaço

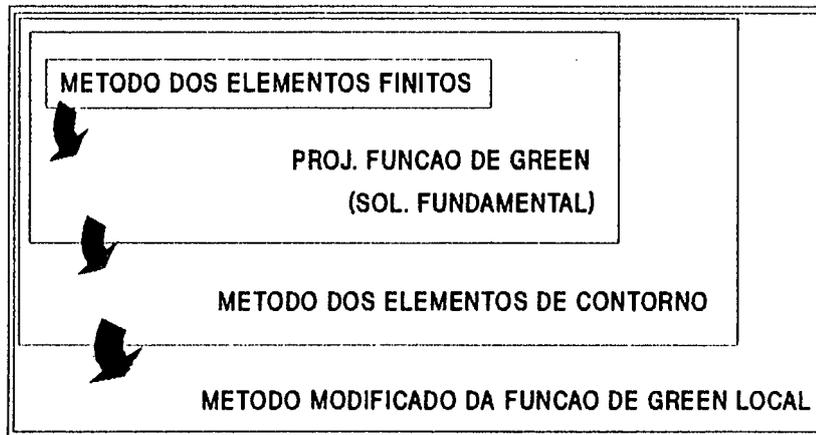


Figura 1.1. - Representação esquemática do MMFGL

gerado pelos elementos finitos, e, em seguida, empregar os valores nodais dessas projeções, equivalentes a uma "solução fundamental", num sistema integral de contorno, resolvido pelo Método Direto de Elementos de Contorno. O sistema de equações resultante, no domínio e no contorno, envolve integrais suficientemente regulares, que podem ser resolvidas através de técnicas convencionais de integração numérica. A Figura 1.1 ilustra, esquematicamente, a estrutura do MMFGL.

Diversas aplicações já foram realizadas através do MMFGL e serão descritas no Capítulo 2. Em todas elas, foram constatadas algumas características que, implicitamente, atendem àquelas comentadas no final do item anterior. O MMFGL é um método de grande precisão, mesmo

com malhas grosseiras, o que permite pequeno volume de dados fornecidos ao programa. Por empregar técnicas consagradas de Elementos Finitos e de Elementos de Contorno, a discretização do problema é bastante simples. Analogamente a um método híbrido, tanto as variáveis *primais*, como deslocamentos e temperaturas, quanto as *duais*, como tensões e fluxos, são igualmente precisas. Observa-se, ainda, uma super-convergência nodal dos resultados, o que torna o método muito recomendável a processos adaptativos.

Dentre todas as propriedades do MMFGL, a mais significativa é a determinação automática da solução fundamental do problema, mesmo nos casos onde não seja conhecida explicitamente. Representa, desse modo, uma excelente alternativa para que o Método dos Elementos de Contorno possa ser estendido a novos campos de aplicação.

## 1.2. MATERIAIS COMPOSTOS.

### 1.2.1. Aspectos Gerais.

Atualmente, há um grande esforço na pesquisa de materiais avançados que apresentem características mais favoráveis às aplicações para as quais se destinam. Os mais recentes avanços na área industrial revelam o quão estratégicas são as pesquisas sobre os novos materiais visando um comportamento estrutural mais eficiente. Materiais compostos, considerados por alguns pesquisadores como os "materiais do futuro" [Lakshminarayana & Murthy (1984)] são exemplos que confirmam esta observação.

Compreende-se por *MATERIAL COMPOSTO* aquele decorrente da associação, em escala macroscópica, de dois ou mais materiais distintos, que trabalham solidariamente entre si, resultando em qualidade

superior à daqueles que o constituem [Jones (1975), Tsai & Hahn (1980), Agarwal & Broutman (1980)].

Três aspectos fundamentais precisam ser salientados na definição acima. Primeiro, que a combinação dos materiais, sendo em escala macroscópica, torna o meio heterogêneo. Portanto, uma liga metálica não pode ser considerada um composto, uma vez que os metais que a constituem são misturados a nível microscópico, resultando num material homogêneo macroscopicamente.

Segundo, trabalho solidário entre os materiais significa que, numa análise macro-mecânica, não se considera a interação entre os diversos componentes. Assim, esforços de coação interna, tais como os provenientes de deformações térmicas distintas, podem ser desprezados. Se, em termos práticos, essa simplificação é adotada com frequência, em outras situações, como nos casos de danos, o comportamento microscópico passa a ser fundamental. Solidariedade significa, também, a proteção de um material pelo outro contra agentes externos, tais como corrosão, manipulação indevida, etc.

Finalmente, a qualidade superior do material resultante pode ser observada em algumas das seguintes propriedades:

- a) aumento da resistência a esforços externos, à corrosão, à fadiga, e/ou aos efeitos da temperatura;
- b) redução do peso próprio e da densidade;
- c) aumento da vida útil;
- d) elevação da rigidez;
- e) melhoria do desempenho térmico e acústico;
- f) redução dos custos; e
- g) facilidade de composição.

Algumas dessas propriedades podem ser ilustradas no seguinte exemplo [Reddy & Sandidge (1987)]. Um vaso de pressão cilíndrico, quando submetido a uma pressão interna, apresenta tensões normais nos

sentidos circunferencial e longitudinal, cuja relação é igual a 2.0, isto é, as tensões circunferenciais têm o dobro do valor das longitudinais. Se for empregado material homogêneo isotrópico, sua capacidade resistente numa das direções só será aproveitada pela metade. Ao contrário, um composto adotado de maneira apropriada poderia, neste caso, ter sua resistência igualmente aproveitada em ambas as direções, reduzindo o peso da estrutura.

Estas características têm permitido o uso de materiais compostos como solução nos mais distintos ramos da indústria, com aplicações cada vez mais freqüentes. Enquanto que somente agora começa a ser amplamente difundida a técnica dos materiais compostos, a idéia de explorar a associação de diversos materiais é antiga.

Egípcios combinavam lâminas de diferentes madeiras para reduzir o inchamento de tonéis e embarcações. Espadas da Idade Média foram construídas em camadas de diferentes metais. No início do século, o concreto armado, um dos mais consagrados exemplos de materiais compostos, começou a ser utilizado na construção civil. Apesar disso, somente com o desenvolvimento da indústria aero-espacial, a partir da década de 50, é que a técnica dos materiais compostos se expandiu para outras áreas.

Peças de compostos, com mesma resistência e rigidez, podem pesar até 70% a menos do que similares de aço de alta resistência. Comparados com o alumínio, material comumente empregado na aviação, podem ter o triplo de resistência. Assim, o impacto causado pela redução no peso dos aviões favoreceu a expansão da nova tecnologia. Levando-se em conta, como conseqüência dessa redução, a possibilidade de um aumento no volume dos combustíveis, dando maior autonomia à aeronave, bem como permitindo uma elevação na potência dos jatos, percebeu-se que o custo final do processo tornar-se-ia bastante reduzido.

Hoje, diversos componentes das estruturas e de estabilizadores de aviões, satélites, cascos de embarcações e submarinos são feitos inte-

gralmente por meio de materiais compostos. Na indústria automobilística encontram-se inúmeras outras aplicações, como nas carrocerias de fibra ou em vidros laminados. Pneus são atualmente executados combinando-se borracha com cintas de aço. Próteses cirúrgicas são fabricadas com materiais compostos. Componentes eletrônicos, armações de óculos e raquetes de tênis são alguns outros exemplos de uso desta nova tecnologia, cujo campo de aplicações se amplia a cada dia.

Para sustentar cientificamente a expansão e o uso dos materiais compostos, duas linhas de pesquisa são exigidas. A primeira, nas áreas da Ciência dos Materiais e dos Processos de Fabricação, a fim de investigar o comportamento, as propriedades (particularmente suas relações constitutivas) e as formas de execução dos novos materiais formados. A outra, no campo da Mecânica do Contínuo e da Análise Estrutural, para desenvolver e aprimorar modelos e métodos que melhor representem esta nova realidade.

#### 1.2.2. Placas Laminadas de Materiais Compostos.

Uma das mais freqüentes aplicações de materiais compostos ocorre no caso de placas laminadas. Uma placa laminada, ou simplesmente laminado, nada mais é do que a sobreposição de diversas lâminas ou camadas individuais, associadas entre si nas interfaces através de uma película adesiva. O número e a orientação das lâminas pode ser qualquer. O material constituinte de cada lâmina é, em geral, um composto de fibras de alta resistência, isto é, uma malha uni ou bi-direcional de fibras como grafite, boron, ou outros, mergulhadas numa resina ou matriz. Enquanto as fibras são os elementos que conferem resistência à peça, compete à matriz mantê-las aderidas entre si, transferir cargas a elas, e protegê-las contra os ataques do meio ambiente e de manipulação indevida [Agarwal & Broutman (1980)]. De um modo geral, o comportamento mecânico de cada lâmina é anisotrópico, com propriedades distintas em cada direção. O caso mais freqüente é o das lâminas orto-

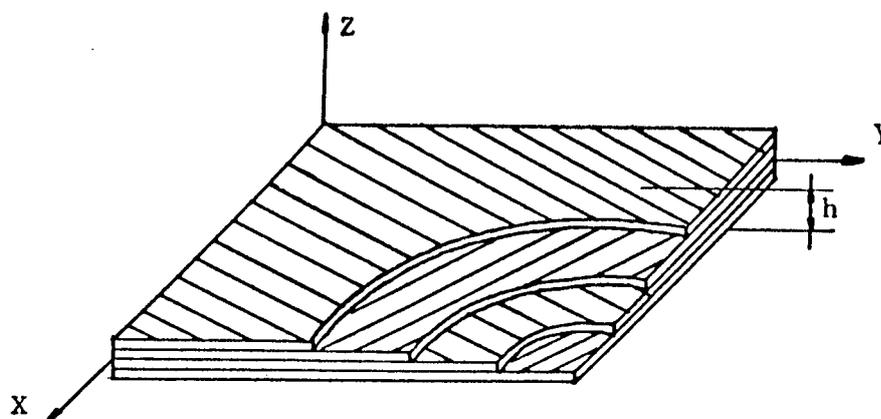


Figura 1.2 - Placa Laminada de Materiais Compostos.

trópicas, com malha unidirecional. A Figura 1.2 ilustra o caso de uma placa laminada com as fibras de cada lâmina orientadas segundo uma direção genérica.

As propriedades resultantes do laminado dependem da quantidade de lâminas, da orientação e concentração das fibras em cada uma delas, bem como do tipo de composto adotado (por exemplo, boron-epoxi, grafite-epoxi, e outros). As camadas podem ou não ser formadas pelo mesmo material embora, nos casos mais usuais, apenas um seja empregado, com as fibras orientadas diferentemente em cada lâmina.

Admite-se, em análises macro-mecânicas, que a aderência entre as

diversas lâminas seja perfeita. Como a espessura da película adesiva é muito pequena, pode-se desprezar completamente a sua influência. Esta simplificação, no entanto, não pode ser generalizada, uma vez que, em diversas situações, como no caso de danos, os efeitos de possíveis descolamentos inter-laminares são importantes.

Apesar de se tratar de um meio heterogêneo com características variando de ponto a ponto, as propriedades resultantes de cada lâmina são determinadas como se o material fosse homogêneo, porém anisotrópico. Já o laminado pode apresentar um comportamento mecânico que reflete um acoplamento entre as propriedades de flexão e membrana (quando as lâminas não forem simetricamente distribuídas), fato este não encontrado nas placas homogêneas.

A natureza de uma placa laminada é bastante caracterizada pelo seu desempenho direcional. O módulo de elasticidade longitudinal, na direção das fibras, é muito superior aos módulos de elasticidade transversal e cisalhantes. Em consequência, as deformações transversais por cisalhamento são muito mais pronunciadas em estruturas de materiais compostos do que naquelas executadas com materiais isotrópicos.

### 1.2.3. Métodos de Solução para Placas Laminadas.

As características particulares de uma placa laminada de materiais compostos estimularam e permitiram o surgimento de inúmeras teorias para representar o seu comportamento. Será visto no Capítulo 3 que nenhuma dessas teorias é suficiente e completa para resolver todos os problemas em laminados. Ao contrário, todas apresentam limitações que devem ser bem avaliadas.

Se o número de teorias é grande, por outro lado, o mesmo não acontece com os métodos de solução. Existem os métodos "analíticos"

que, por meio de expansões em séries, oferecem soluções particulares a problemas específicos. Tais soluções são importantes para a conferência e aferição de novas técnicas numéricas, e serão descritas no Capítulo 3. Dentre os métodos aproximados, a esmagadora opção recai sobre Método dos Elementos Finitos. Reddy [1989] e Noor & Burton [1989], em publicações paralelas, registraram uma grande quantidade de trabalhos que utilizaram o MEF na análise de placas laminadas. Até hoje, essa lista tem aumentado. A solução pelo Método dos Elementos de Contorno esbarra na dificuldade de determinação explícita de uma solução fundamental apropriada para problemas de meios não homogêneos, como é o caso das placas laminadas. Assim, poucas foram as investigações científicas utilizando o MEC, em geral restringindo-se a problemas simples de placas ortotrópicas [Shi & Benzine (1988, 1989)].

### 1.3. OBJETIVO DO TRABALHO.

Pelo exposto, justifica-se, plenamente, a utilização do Método Modificado da Função de Green Local (MMFGL) em problemas de placas laminadas de materiais compostos. Examina-se a capacidade do MMFGL em resolver casos importantes cuja solução fundamental não seja conhecida *a priori* e que, como consequência, torna difícil a aplicação do Método dos Elementos de Contorno. Oferece-se, também, uma alternativa ao Método dos Elementos Finitos para a solução de placas laminadas, comparando-se o desempenho entre os dois métodos.

Deve-se salientar que o Método Modificado da Função de Green Local (MMFGL) nunca havia sido empregado para a solução de placas laminadas de materiais compostos, sendo esta a primeira investigação sobre o assunto. Resultados preliminares foram apresentados por Machado & Barcellos [1992].

O escopo deste trabalho não inclui o caso dos materiais conheci-

dos por "bi-módulos", isto é, aqueles que apresentam distintas propriedades à tração e à compressão. A grande dificuldade de análise desses compostos reside no fato de que a matriz de rigidez assume diferentes valores conforme o sinal das tensões, que não são conhecidas *a priori*. Tais situações, fortemente encontradas em compostos de borracha reforçada com fibras ou em têxteis, requerem técnica de solução iterativa.

#### 1.4. ESCOPO DO TRABALHO.

Este trabalho pode ser dividido em três grandes partes distintas, distribuídas nos quatro seguintes capítulos:

##### PARTE I - Descrição do MMFGL.

Uma descrição do MMFGL - "Método Modificado da Função de Green Local " é feita no Capítulo 2, onde, inicialmente, apresenta-se um histórico do método, com as mais recentes publicações sobre o assunto. O formalismo abstrato, onde são discutidas as condições de existência e unicidade da solução, e os detalhes de implementação numérica são assuntos também tratados neste capítulo.

##### PARTE II - Modelos de Placas Laminadas.

Uma revisão das teorias de placas laminadas e dos modelos numéricos utilizados para resolvê-las é apresentado no Capítulo 3 - "Placas Laminadas de Materiais Compostos". São mostrados os principais grupos de teorias aplicadas a placas laminadas, destacando-se aqueles que consideram o laminado como uma única lâmina equivalente, e os que o tratam discretizando cada lâmina ou conjunto de lâminas

separadamente. As técnicas numéricas são revistas e a eficiência de cada uma delas é, também, discutida.

### PARTE III - Solução de Placas Laminadas Pelo MMFGL.

O Método Modificado da Função de Green Local é aplicado ao caso de placas laminadas utilizando-se modelos de deslocamentos. No Capítulo 4 - "Solução de Placas Ortotrópicas Laminadas Pelo Método Modificado da Função de Green Local Através de Uma Teoria de Primeira Ordem", o método analisa laminados, supondo uma distribuição linear do campo de deslocamentos ao longo da espessura da placa. No Capítulo 5 - "Solução de Placas Ortotrópicas Laminadas Pelo Método Modificado da Função de Green Local Através de Uma Teoria de Ordem Superior", o método é novamente aplicado, desta vez considerando uma Teoria Refinada, na qual o campo de deslocamentos é representado por polinômios de grau elevado.

Finalmente, no Capítulo 6 - "Conclusões", discute-se sobre o desempenho do MMFGL na análise de placas laminadas, e apresentam-se sugestões para futuras implementações do método.

#### 1.5. Referências Bibliográficas do Capítulo 1.

- Agarwal, B. D.; Broutman, L. J. - Analysis And Performance Of Fiber Composites. John Wiley & Sons, USA, (1980)
- Barcellos C. S.; Silva, L. H. M. - Elastic Membrane Solution by a Modified Local Green's Function Method. (Ed. Brebbia, C. A. and Venturini, W. S) Proc. Int. Conf. on Boundary Element Technology, 1987, Comp. Mech. Publ., Southampton, (1987)
- Beskos, D.E. - Boundary Element Methods in Mechanics. Vol. 3 in Computational Methods in Mechanics (Ed. Beskos, D.E.), North-holland, (1987).

- Brebbia, C.A.; Telles, J.C.F.; Wrobel, L.C. - Boundary Element Techniques. Springer-Verlag. (1984).
- Jones, R. M. - Mechanics Of Composite Material. Mc. Graw-Hill Book Co. (1975)
- Lakshminarayana, H. V.; Shidhara-Murthy, S. - A Shear-Flexible Triangular Finite Element Model For Laminated Composite Plates. Int. J. Num. Meth. Engng., 20, 591-623, (1984)
- Machado, R.D.; Barcellos, C.S. - A First Modified Local Green's Function Method Approach To Ortotropic Laminated Plates. Proc. of CADCOMP92 - Computer Aided Design for Composite Materials Conference. Ed. C.A. Brebbia. Newark. USA, (1992).
- Noor, A. K.; Burton, W. S. - Assessment Of Shear Deformation Theories For Multilayered Composite Plates. Appl. Mech. Rev., 42, n.1, 1-12, (1989)
- Oden, J.T.; Carey, G.F. - Finite Elements: Mathematical Aspects. Vol IV, Prentice-Hall, Inc. New Jersey, (1983).
- Oden, J.T.; Reddy, J.N. - An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements. John-Wiley & Sons. (1976).
- Patridge, P.W.; Brebbia, C.A.; Wrobel, L.C. - The Dual Reciprocity Boundary Element Method. Wessex Institute of Technology, Southampton, UK, (1991)
- Reddy, J. N. - On Refined Computational Models Of Composite Laminates. Int. J. Num. Meth. Engng., 27, 361-382, (1989)
- Reddy, J. N.; Sandidge, D. - Mixed Finite Element Models For Laminated Composite Plates. J. Engng. Ind., 109, 39-45, (1987)
- Shi, G.; Benzine, G. - A General Boundary Integral Formulation For The Anisotropic Plate Bending Problems. J. Composite Mat., 22, 694-716, (1988).
- Shi, G.; Benzine, G. - The Direct Boundary Integral Equation Method For The Free Vibration Analysis Of Orthotropic Plates. Eur. J. Mech., 8, n.4, 277-291, (1989)
- Szabó, B.; Babuška, I. - Finite Element Analysis. John Wiley & Sons, Inc. (1991).
- Tsai, S. W.; Hahn, H. T. - Introduction To Composite Materials. Technomic Publishing Company, Inc., USA, (1980)

## CAPÍTULO 2

### TÉCNICAS DE PROJEÇÃO DO MÉTODO MODIFICADO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL (MMFGL)

#### 2.1. INTRODUÇÃO.

O Método da Função de Green (MFG) é uma das técnicas matemáticas para solução de sistemas de equações diferenciais. Sua aplicação, em termos práticos, fica condicionada à determinação da Função de Green, o que, para o problema global, nem sempre se consegue com facilidade. Esta restrição aliada à complexidade de aplicação do MFG em domínios quaisquer faz com que o mesmo seja considerado "muito sofisticado para ser largamente empregado por engenheiros e cientistas" [Greenberg (1971)].

Para contornar este problema, Burns [1975], através de um procedimento de reciprocidade, desenvolveu um método integral usando uma função de Green a nível local e convenientemente escolhida, para resolver problema de difusão de nêutrons. A técnica adotada é semelhante às formulações indiretas de Elementos de Contorno, e a discretização é feita através do Método dos Resíduos Ponderados. Obteve bons resultados quando comparados com os Métodos das Diferenças Finitas e Elementos Finitos, mas as aplicações ficaram restritas a domínios de geometria muito simples.

Seguindo um tratamento análogo ao de Burns, Horak & Dorning [1977, 1981] e Horak [1980] estabeleceram o "Método da Função de Green Local" (MFGL) para problemas de condução de calor. O MFGL emprega uma técnica de integração transversa e relações de reciprocidade para determinar, a nível local, a Função de Green, transformando, dessa forma, o operador diferencial parcial do problema num operador diferencial ordinário. A formulação depende de um parâmetro arbitrário e pré-estabelecido que afeta diretamente a eficiência computacional do método. Além dessa forte dependência paramétrica, o MFGL é restrito a domínios que possuem contornos paralelos aos eixos de coordenadas. Entretanto, os resultados obtidos pelo método mostraram que possuía grande eficiência computacional, com precisão dos resultados superior a  $10^3$  e  $10^4$  em relação aos fornecidos por Diferenças Finitas ou Elementos Finitos, mesmo em casos bi-dimensionais.

Problemas de difusão de nêutrons foram analisados também por Lawrence [1979] através do Método da Função de Green Local. Uma vez mais, apenas os domínios discretizados por malhas retangulares foram resolvidos.

O excelente desempenho do Método da Função de Green Local, revelado pelos resultados de Burns, Horak e Lawrence, deve-se ao fato de sua formulação ser compacta e envolver singularidades fracas. Associado a esse ótimo comportamento, permanecia o inconveniente da partição de domínio ser restrita a geometrias simples, bem como a uma forte dependência paramétrica. Mas, a maior restrição do método era ainda a determinação da função de Green para cada aplicação.

Barcellos & Silva [1987] conseguiram resolver estes problemas introduzindo modificações na formulação original e criando o "Método Modificado da Função de Green Local" (MMFGL). Pelo MMFGL, as matrizes do sistema de equações integrais são determinadas diretamente sem o conhecimento explícito da Função de Green. Na realidade, o MMFGL utiliza elementos finitos no domínio para gerarem, na base do espaço por eles formados, "projeções" discretas da Função de Green, corresponden-

tes à soluções fundamentais, que serão posteriormente empregadas no sistema de equações integrais associado à discretização no contorno pelo MEC. A nova formulação também depende de um parâmetro, como na proposta de Horak, porém seu valor não influencia o resultado final do problema.

Outra grande vantagem do MMFGL em relação ao MFGL é o fato de usar técnicas de discretização consagradas no MEC e no MEF, que o tornam suficientemente geral para resolver problemas em domínios de geometria e condições de contorno quaisquer, sem alteração da sua estrutura. É também mantida a formulação compacta do método original e as singularidades ainda são fracas, fazendo com que o MMFGL apresente eficiência computacional significativa.

A aplicação inicial do MMFGL [Barcellos & Silva (1987)] foi ao caso de membranas elásticas, que é um problema de potencial regido pela equação de Poisson. O formalismo matemático do método foi apresentado, pela primeira vez, por Silva [1988] que, além dos problemas de membranas elásticas, o aplicou a problemas simples da Mecânica Estrutural, como hastes e vigas, comparando os resultados com aqueles fornecidos pelo MEF, pelo MEC, e por soluções analíticas. Para os problemas de membrana, foram utilizados elementos isoparamétricos de 8 pontos nodais para discretizar o domínio e aproximar as matrizes de Green. As equações integrais foram aproximadas mediante elementos de contorno de 3 nós. Para a determinação das projeções da Função de Green nos problemas de hastes e vigas, foi utilizado o Método da Colocação, uma vez que, em modelos uni-dimensionais, os contornos ficam reduzidos a pontos.

A proposta original de Barcellos & Silva [1987] previa a determinação das projeções da Função de Green a nível local, isto é, a nível das "células de Green", que eram partições de domínio com condições de contorno convenientemente estabelecidas. Poderia haver, por exemplo, tantas células de Green quantos fossem os elementos finitos utilizados na análise. Nesse caso, a célula de Green se confundiria com o próprio

elemento finito mais o seu contorno. Entretanto, poder-se-ia imaginar uma célula de Green constituída por vários elementos finitos. A situação mais simplificada corresponderia ao domínio discretizado por meio de uma única célula. Todas as aplicações do MMFGL apresentadas a seguir foram feitas considerando-se este último caso, isto é, uma única célula discretizando todo o domínio. Entendendo-se bem esta diferenciação, não seria errôneo continuar denominando o método empregado como sendo o MMFGL, uma vez que as projeções da Função de Green continuam sendo determinadas localmente, a nível das células de Green, porém apenas uma é utilizada para discretizar todo o domínio.

Adotando este procedimento simplificado, o problema potencial foi novamente investigado por Barbieri & Barcellos [1991a], que empregaram o MMFGL com uma única célula de Green para determinar a solução de casos bi e tri-dimensionais.

A etapa seguinte consistiu na solução de placas isotrópicas, [Barbieri & Barcellos (1991b)] utilizando, como representação do campo de deslocamentos, o Modelo de Mindlin. Foram empregados elementos de contorno de 3 e 4 nós e elementos lagrangeanos quadráticos e cúbicos, de 9 e 16 nós, respectivamente, para discretizar o domínio e aproximar as Matrizes de Green. Para os elementos cúbicos, adotou-se a técnica de integração "cheia", com 4x4 pontos de integração; para os outros, um esquema "seletivo", sendo 3x3 e 2x2 o número de pontos de integração para as parcelas de flexão e de cisalhamento, respectivamente. Além de ótima precisão, tanto para esforços quanto para deslocamentos, o MMFGL não mostrou sinais de travamento ("locking") quando a relação entre o comprimento e a espessura da placa,  $a/h$ , atingiu valores da ordem de  $10^6$ .

Para comprovar o desempenho do método onde não se dispõe de solução fundamental apropriada, o mesmo foi aplicado a problemas de potenciais em campos não homogêneos [Barbieri & Barcellos (a ser publicado)] e os resultados foram comparados com os obtidos pelo MEF. Explorando um problema de meios descontínuos por partes, onde existe

solução pelo MEC, verificou-se a concordância dos resultados.

Seguindo o mesmo intuito de investigar o MMFGL em problemas ainda não convenientemente resolvidos pelo MEC, a aplicação seguinte voltou-se para o caso de placas ortotrópicas laminadas [Machado & Barcellos (1992)]. O laminado foi representado por um modelo de camada simples equivalente e os deslocamentos aproximados por expansões polinomiais lineares. Para discretizar o domínio e o contorno foram utilizados, respectivamente, elementos lagrangeanos quadráticos de 9 nós e elementos de contorno de 3 pontos nodais. Um esquema de integração seletivo foi adotado. Os resultados de deslocamentos, de tensões normais e cisalhantes foram comparados com os obtidos por outros pesquisadores, e comprovaram a boa precisão do método, mesmo com malhas grosseiras.

O MMFGL foi também empregado para resolver problemas potenciais singulares [Barcellos & Barbieri (1991)], onde se constatou, assim como no MDEC (Método Direto de Elementos de Contorno), um comportamento oscilatório do fluxo nas imediações da singularidade. A taxa de convergência " $h$ " acompanhou aquela observada pelo MEF.

Fillipin, Barbieri & Barcellos [1992] examinaram o desempenho do MMFGL em análises estáticas e dinâmicas (análise modal) relativas a problemas de potenciais, verificando, experimentalmente, as taxas de convergência " $p$ " e " $h$ ". Foram empregados elementos de até quarta ordem ( $p=4$ ) para análises estáticas e até oitava ordem ( $p=8$ ) para análises dinâmicas. Foram constatadas taxas de convergência mais acentuadas do que aquelas obtidas pelo MEF.

Recentemente, o MMFGL foi aplicado a problemas da elastostática [Barbieri et. alli. (1992)], ao caso de placas laminadas analisadas por teoria de ordem superior [Machado et. alli. (1992)], e à problemas dinâmicos regidos pela Equação do Helmholtz, como vibrações livres em membranas e propagação de ondas em cavidades acústicas [Filippin et. alli. [a ser publicado]. Maldaner & Barcellos [1992] estudaram os problemas de fratura empregando o MMFGL. Uma revisão atualizada do

método, com algumas de suas últimas aplicações, foi apresentado por Barcellos et. alli. [1992a,b]. Finalmente, Barbieri et. alli. [a ser publicado] mostraram que o MMFGL é aplicável em problemas de cascas de dupla curvatura.

Todas as aplicações já realizadas reforçam o bom desempenho numérico do novo método integral. A tese de Barbieri [DSc, (1992)] e a dissertação de Filippin [MSc, (1992)] fornecem maiores informações sobre o assunto.

O presente capítulo aborda matemática e numericamente o Método Modificado da Função de Green Local, procurando, sempre que possível, mostrar o significado físico associado. Começa por definir os diversos conjuntos envolvidos no problema, identificando os espaços topológicos a que estão regidos. Apresenta, em seguida, uma análise abstrata do método, seu enfoque variacional, e encerra com o seu formalismo numérico.

## 2.2. ANÁLISE ABSTRATA DO MMFGL.

### 2.2.1. Conceitos Preliminares.

Um dos aspectos mais importantes para a definição da base matemática do MMFGL é o relacionado à forma bilinear adotada e a identificação do operador diferencial e de seu adjunto formal. Embora não seja essencial para o enfoque matemático, associa-se a forma bilinear à expressão do trabalho virtual do sistema ou dos princípios de energia da Mecânica dos Sólidos. Pode-se, desse modo, estabelecer um embasamento semelhante ao adotado, hoje em dia, em outras formulações como, por exemplo, no Método dos Elementos Finitos [Babuška (1989)].

Considere-se, ao longo deste Capítulo, a seguinte convenção:

- $\Omega$  - domínio aberto, limitado, no espaço n-dimensional ( $\mathbb{R}^n$ );
- $\partial\Omega$  - contorno de  $\Omega$ , suficientemente regular, o que significa que, em quase todos os pontos, exceto possivelmente naqueles conjuntos de medida nula, existe um vetor normal;
- $\|\cdot\|_H$  - norma de certa variável num espaço topológico H;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$  - produto dual entre duas variáveis sob espaços topológicos  $H' \times H$ , onde  $H'$  é o dual de H;
- $(\cdot, \cdot)_H$  - produto interno entre duas variáveis num mesmo espaço H.
- $[ \cdot ]$  - variável na forma de matriz

Outro conceito importante relaciona-se à forma matemática de uma formulação fraca para um problema linear, que pode ser colocada do seguinte modo:

"Dados:

- a) Dois espaços de Hilbert (ou de Banach) H e K, equipados com normas apropriadas  $\|\cdot\|_H$  e  $\|\cdot\|_K$ ;
- b) Uma forma bilinear,  $B(u,v)$ ,  $u \in H$  e  $v \in K$ , definida sobre  $H \times K$ ;
- c) Um funcional  $\mathcal{L}$  sobre K.

Encontrar  $u \in H$  tal que:

$$B(u,v) = \mathcal{L}(v) \quad \forall v \in K \quad (2.1)$$

onde  $B : H \times K \rightarrow \mathbb{R}$ ."

Com relação a forma bilinear de (2.1) admite-se que :

a) B é contínuo, isto é, existe uma constante M positiva tal que:

$$| B(u,v) | \leq M \| u \|_H \| v \|_K, \quad M > 0 \quad (2.2)$$

b) B é fracamente coercivo, no seguinte sentido:

$$\inf_{u \in H} \sup_{v \in K} | B(u,v) | \geq \alpha > 0 \quad (2.3)$$

$$\| u \|_H = 1 \quad \| v \|_K \leq 1 \quad (2.4)$$

$$\sup_{u \in H} | B(u,v) | > 0 \quad \forall v \in K \text{ e } v \neq 0 \quad (2.5)$$

c) Se  $H = K$  resulta em coercividade forte, isto é,

$$B(u,u) \geq \alpha \| u \|^2 \quad (2.6)$$

Naturalmente, uma coercividade forte é um caso particular de uma coercividade fraca.

Admite-se, também, que o funcional  $\mathcal{L}$  seja contínuo, isto é,

$$| \mathcal{L}(v) | \leq c \| v \|_K \quad \forall v \in K \text{ e } c = \text{cte.} \quad (2.7)$$

Para permitir um tratamento apropriado no contorno, uma função  $u(x)$  definida em  $\Omega$  deve pertencer a um espaço de Hilbert  $H^m$  que tenha a "propriedade do traço" [Oden e Reddy (1976)] assim reconhecida:

Sejam :

- H e U dois espaços de Hilbert tais que U tenha topologia mais fraca do que H;
- H' e U' são os espaços duais de H e de U respectivamente;
- As derivadas normais de  $u(x)$  no contorno  $\partial\Omega(x)$  definidas por um operador  $\mathcal{D}_j$  tal que:

$$\mathcal{D}_j u(x) = \frac{\partial^j u(x)}{\partial n^j} \quad x \in \Omega, \quad 0 \leq j \leq m - 1 \quad (2.8)$$

onde  $n$  é a normal do contorno  $\partial\Omega$  no ponto  $x$ .

Então  $H$  é um espaço que apresenta a propriedade do traço se:

$$a) \quad H \subset U \quad (2.9)$$

b)  $H$  for denso em  $U$  e

$$H \subset U = U' \subset H' \quad (2.10)$$

onde  $U$  é um espaço pivotal

c) O núcleo de  $\mathcal{D}$ ,  $H_0$ , é denso em  $U$ , isto é,

$$\text{Ker } \mathcal{D} = H_0 \subset H \quad (2.11)$$

e

$$H_0 \subset U = U' \subset H' \quad (2.12)$$

sendo as inclusões densas e contínuas.

O operador  $\mathcal{D}$  representa um mapeamento linear e contínuo de valores do domínio  $\Omega$  estendidos ao contorno  $\partial\Omega$ , ou seja,

$$\mathcal{D} : H \rightarrow \partial H \quad (2.13a)$$

ou, mais precisamente,

$$\mathcal{D}_j : H^m(\Omega) \rightarrow H^{m-j-1/2}(\partial\Omega) \quad (2.13b)$$

onde o expoente  $m$  pode assumir valores inteiros ou fracionários e  $\mathcal{D}_j$  é denominado "Operador Traço".

Se dois espaços de Hilbert,  $H$  e  $K$ , possuírem a propriedade do traço definida por (2.9)-(2.12), e associados a eles existirem os operadores traço  $\mathcal{D}_H$  e  $\mathcal{D}_K$  respectivamente, tais que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_H &: H \rightarrow \partial H \\ \mathcal{D}_K &: K \rightarrow \partial K \end{aligned} \tag{2.14}$$

então, as funções do problema,  $B(u,v) : H \times K \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $u \in H$  e  $v \in K$ , possuem imagens em  $\partial H$  e  $\partial K$  sob os operadores  $\mathcal{D}_H$  e  $\mathcal{D}_K$ , respectivamente.

Se forem válidas as propriedades (2.9)-(2.12), pode-se definir uma forma bilinear contínua no contorno,  $b$ , no sentido do traço, dada por:

$$b(\mathcal{D}_H u, \mathcal{D}_K v) : H \times K \rightarrow \mathbb{R} \tag{2.15}$$

Para o caso de  $u \in H$  e fixo,  $v \in K_0$ , a forma bilinear (2.1),  $B(u,v) : H \times K \rightarrow \mathbb{R}$ , pode ser expressa em termos de um operador linear contínuo  $\mathcal{L}u$ , tal que:

$$\mathcal{L} : H \rightarrow K'_0 \tag{2.16}$$

o que resulta

$$B(u,v) = \langle \mathcal{L}u, v \rangle_K, \quad \forall v \in K_0 \tag{2.17}$$

onde  $\mathcal{L}$  é o operador associado a  $B$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$  é o produto dual em  $K' \times K$ . Deste modo, o operador  $\mathcal{L}$  pertence ao espaço  $L[H, K'_0]$ , que é o espaço dos operadores lineares de  $H$  em  $K'_0$ .

O problema adjunto a (2.17) é determinado fixando-se  $v \in K$  e variando  $u \in H_0$ . Assim, se  $\mathcal{L}^*$  é o operador adjunto formal associado a  $B$ , sendo linear e contínuo, então

$$B(u,v) = \langle \mathcal{L}^*v, u \rangle_H, \quad \forall u \in H_0 \tag{2.18}$$

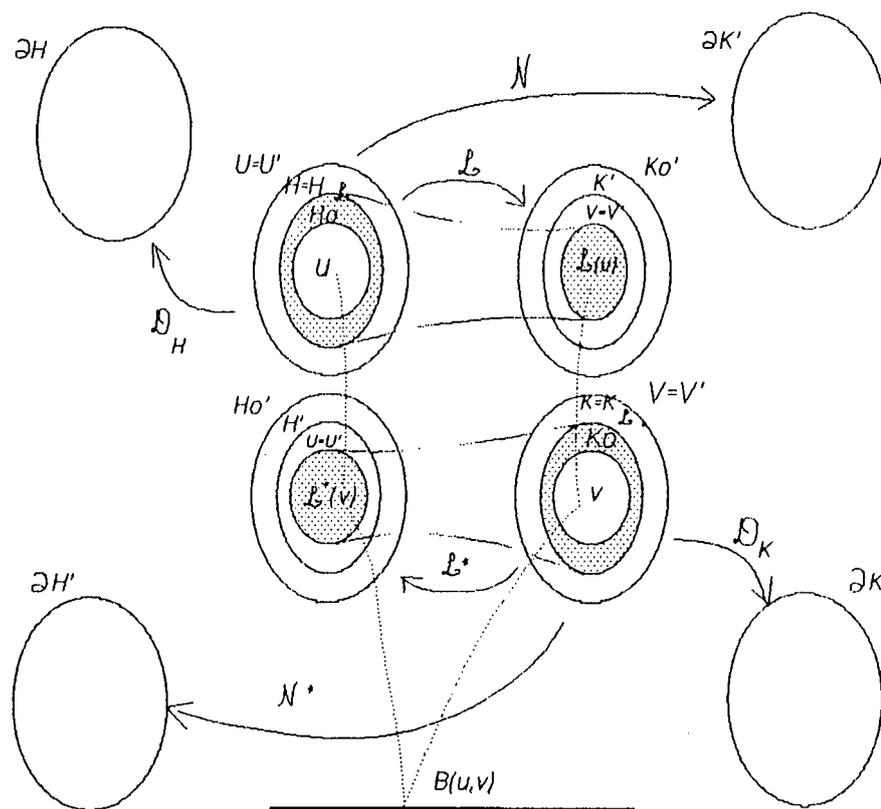


Figura 2.1. Espaços, Operadores Diferenciais e Forma Bilinear.

Analogamente,  $\mathcal{L}^* \in L [K, H'_0]$ .

A Figura 2.1 ilustra a relação entre os espaços  $H$  e  $K$ , os núcleos  $H_0$  e  $K_0$ , e os espaços pivotais associados a eles,  $U=U'$  e  $V=V'$ , bem como os mapeamentos realizados pelos operadores  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{L}^*$ , dos quais depende a forma bilinear  $B(u,v)$ .

As expressões (2.17) e (2.18), definidas apenas para os casos em que  $u \in H_0$  e  $v \in K_0$ , não consideram valores no contorno, que são incluídos somente quando  $u \in H$  e  $v \in K$ . Para contornar esta dificuldade, são necessários os seguintes subespaços:

$$H_{\mathcal{L}} = \{ u \in H ; \mathcal{L}u \in V \} \quad (2.19)$$

$$K_{\mathcal{L}^*} = \{ v \in K ; \mathcal{L}^*v \in U \} \quad (2.20)$$

onde

$$H \subset U = U' \subset H'$$

$$K \subset V = V' \subset K'$$

e  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{L}^*$  são as restrições dos operadores expressos em (2.17) e (2.18) aos espaços  $H_{\mathcal{L}}$  e  $K_{\mathcal{L}^*}$ .

Uma vez definidos os subespaços em (2.19) e (2.20), os seguintes operadores unívocos podem ser identificados:

$$\mathcal{N} \in L [H_{\mathcal{L}}, \partial K'] \quad e \quad \mathcal{N}^* \in L [K_{\mathcal{L}^*}, \partial H'] \quad (2.21)$$

e

$$\mathcal{D} \in L [H, \partial H] \quad e \quad \mathcal{D}^* \in L [K, \partial K] \quad (2.22)$$

Os dois primeiros,  $\mathcal{N}$  e  $\mathcal{N}^*$ , são os operadores de Neumann generalizados, enquanto que os restantes,  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{D}^*$ , são os operadores de Dirichlet generalizados (operadores traço), associados, respectivamente, a  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{L}^*$ .

Usando os operadores definidos em (2.21) e (2.22), a forma bilinear (2.1) pode ser estendida ao contorno através de [Oden & Reddy (1976)]:

$$B(u, v) + b(\mathcal{D}u, \mathcal{D}^*v) = (v, \mathcal{L}u)_V + \langle \mathcal{N}u, \mathcal{D}^*v \rangle_{\partial K}$$

$$u \in H_{\mathcal{L}} \quad e \quad v \in K \quad (2.23)$$

$$B(u, v) + b(\mathcal{D}u, \mathcal{D}^*v) = (\mathcal{L}^*v, u)_U + \langle \mathcal{N}^*v, \mathcal{D}u \rangle_{\partial H}$$

$$u \in H \quad e \quad v \in K_{\mathcal{L}^*} \quad (2.24)$$

As expressões (2.23) e (2.24) são conhecidas como "Fórmulas Abstratas de Green" para a forma bilinear  $B(\cdot, \cdot)$ .

Uma vez que  $u \in H_{\mathcal{L}}$  e  $v \in K_{\mathcal{L}^*}$ , então as expressões (2.23) e (2.24) podem ser combinadas de modo a resultar na seguinte relação:

$$(\mathcal{L}^*v, u)_U = (v, \mathcal{L}u)_V + \langle \mathcal{N}u, \mathcal{D}^*v \rangle_{\partial K} - \langle \mathcal{N}^*v, \mathcal{D}u \rangle_{\partial H}$$

$$u \in H_{\mathcal{L}} \quad e \quad v \in K_{\mathcal{L}^*} \quad (2.25)$$

A equação (2.25) é conhecida como "Forma Generalizada de Green" para o operador  $\mathcal{L}$ , e expressa uma relação de reciprocidade entre os estados  $\{ u, \mathcal{D}u, \mathcal{N}u \} \in H_A \times \partial H \times \partial K'$  e  $\{ v, \mathcal{D}^*v, \mathcal{N}^*v \} \in K_A \times \partial K \times \partial H'$  associados aos operadores  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{L}^*$  respectivamente. Os produtos duais em  $\partial K$  e  $\partial H$  constituem o termo "concomitante bilinear" do operador  $\mathcal{L}$ .

### 2.2.2. MMFGL: Formulação Abstrata.

As variáveis  $u$  e  $v$  empregadas na forma bilinear  $B(u, v)$  em (2.1) freqüentemente estão relacionadas a dois estados distintos, um real - o das incógnitas a serem determinadas, e outro auxiliar ou virtual, convenientemente escolhido. No Método dos Elementos de Contorno, por exemplo, o estado auxiliar é muitas vezes resultante da solução fundamental adotada, embora outras alternativas possam ser consideradas [Brebbia et. alli. (1984), Beskos (1987)] visando melhorar as características de regularidade do sistema. No Método da Função de Green Local proposto por Horak [1980], o estado auxiliar é definido pela escolha de uma função de Green apropriada. Já no MMFGL, essa

função é determinada automaticamente, sem que seja necessário o seu conhecimento explícito.

Um problema de valor de contorno qualquer, governado, no domínio, por um operador  $\mathcal{L}$ , e no contorno, pelos operadores  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{N}$ , é resolvido pelo MMFGL em duas fases distintas e interdependentes. A primeira etapa é dedicada à solução no domínio, enquanto que a segunda o é no contorno. Essa divisão tem caráter apenas didático pois, como será discutido no item 2.4.4., a inversão desta ordem pode ser vantajosa em termos computacionais.

Em ambos os casos emprega-se uma distribuição de Dirac,  $\delta(P,Q)$ , como excitação. Como consequência, deve-se especificar um ponto  $Q$  onde se deseja a solução do problema ("ponto campo"), e um ponto  $P$ , onde se aplica a excitação ("ponto fonte"), sendo que  $Q$  e  $P \in \Omega$ . O estado auxiliar fica definido como  $v = v(P,Q)$ . Quando os pontos considerados estiverem sobre o contorno  $\partial\Omega$ , serão identificados por letras minúsculas  $\underline{p}$  e  $\underline{q}$ . As duas etapas do MMFGL estão ilustradas na Figura 2.2.

O MMFGL se baseia em duas etapas distintas de solução:

1a. ETAPA: Determinação da solução no domínio. Um estado auxiliar da equação (2.25) é obtido a partir da aplicação da função Delta de Dirac no domínio  $\Omega$ .

$$\mathcal{L}^*v(P,Q) = \delta(P,Q) \quad \text{onde } P,Q \in \Omega \quad (2.26)$$

$$\mathcal{N}^*v(p,Q) = 0 \quad \text{onde } p \in \partial\Omega \quad (2.27)$$

Substituindo-se (2.26) e (2.27) em (2.25) obtém-se a solução no interior do domínio  $\Omega$ :

$$u(Q) = (v(P,Q), \mathcal{L}u)_V + \langle \mathcal{N}u, \mathcal{D}^*v(p,Q) \rangle_{\partial K} \quad (2.28)$$

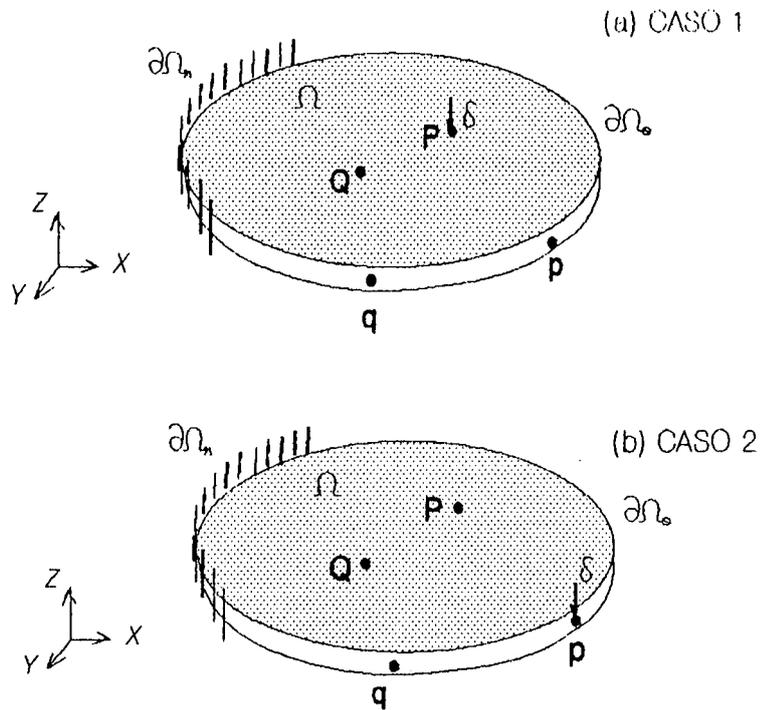


Figura 2.2 - Aplicação da excitação Delta de Dirac no domínio (a) e no contorno (b)

2a. ETAPA: Determinação da solução no contorno. Outro estado auxiliar de (2.25) é obtido pela aplicação da distribuição de Dirac no contorno  $\partial\Omega$ .

$$\mathcal{L}^* v(P, q) = 0 \quad P \in \Omega \text{ e } q \in \partial\Omega \quad (2.29)$$

$$\mathcal{N}^* v(p, q) = \delta(p, q) \quad p \text{ e } q \in \partial\Omega \quad (2.30)$$

Substituindo-se, novamente, (2.29) e (2.30) em (2.25) e reconhecendo  $\mathcal{D}$  como sendo o operador traço de (2.8) resulta a seguinte expressão:

$$\mathcal{D}u(q) = (v(p, Q), \mathcal{L}u)_V + \langle \mathcal{N}u, \mathcal{D}^*v(p, q) \rangle_{\partial K} \quad (2.31)$$

O problema fica completamente definido pelo sistema de equações formado por (2.28) e (2.31).

### 2.3. ANÁLISE VARIACIONAL DO MMFGL.

As soluções no domínio e no contorno, determinadas respectivamente pelas expressões (2.28) e (2.31), não são convenientes para a implementação numérica, uma vez que o cálculo do operador de Neumann generalizado,  $\mathcal{N}$ , presente em ambos os casos, envolve derivadas de  $u$  no sentido do traço. Para contornar essa dificuldade, introduz-se uma nova variável,  $\ell$ , definida por:

$$\ell = \mathcal{N} u \quad \in \quad \partial K' \quad (2.32)$$

Substituindo (2.32) em (2.28) e (2.31) e reconhecendo a variável  $v(P, Q)$  não mais como uma solução fundamental, mas como sendo a Função de Green,  $G(P, Q)$ , resulta:

$$u(Q) = (G(P, Q), \mathcal{L}u)_V + \langle \ell, \mathcal{D}^*G(p, Q) \rangle_{\partial K} \quad (2.33)$$

$$\mathcal{D}u(q) = (G(P, q), \mathcal{L}u)_V + \langle \ell, \mathcal{D}^*G(p, q) \rangle_{\partial K} \quad (2.34)$$

onde, nos dois casos,  $u \in H_{\mathcal{L}}$ ;  $G \in K_{\mathcal{L}}^*$ ;  $P, Q \in \Omega$ ;  $p, q \in \partial\Omega$ .

Através do traço de  $u$  no contorno,  $\mathcal{D}u(q)$ , e da quantidade  $\ell$ , as condições de contorno podem ser introduzidas no sistema. Enquanto  $\mathcal{D}u$

absorve diretamente as condições de Dirichlet,  $\ell$  encarrega-se das condições de Neumann ou de Cauchy.

Para uma análise variacional do MMFGL, é preciso distinguir dois tipos clássicos de problemas de valor de contorno para o operador  $\mathcal{L}$  :

a) Problema de Dirichlet:

Dados  $\ell \in V$  e  $\alpha \in \partial H$ , encontrar  $u \in H_{\mathcal{L}}$  tal que

$$\begin{aligned}\mathcal{L} u &= \ell \\ \mathcal{D} u &= \alpha\end{aligned}\tag{2.35}$$

b) Problema de Neumann:

Dados  $\ell \in V$  e  $\alpha \in \partial K'$ , encontrar  $u \in H_{\mathcal{L}}$  tal que

$$\begin{aligned}\mathcal{L} u &= \ell \\ \mathcal{N} u &= \alpha\end{aligned}\tag{2.36}$$

Os dois casos podem ser expressos em termos variacionais, respectivamente, como:

c) Problema Variacional de Dirichlet:

Dados  $\ell \in V$  e  $\alpha \in \partial H$ , encontrar  $u \in H_0$  tal que

$$\begin{aligned}B(u, v) &= \mathcal{L}(v) & v \in K_0 \\ \mathcal{L}(v) &= (\ell, v)_V - B(\mathcal{D}^{-1}\alpha, v) & v \in K_0\end{aligned}\tag{2.37}$$

d) Problema Variacional de Neumann:

Dados  $\ell \in V$  e  $\varsigma \in \partial K'$ , encontrar  $u \in H$  tal que

$$\begin{aligned} B(u, v) &= \mathcal{L}(v) \quad v \in K \\ \mathcal{L}(v) &= (\ell, v)_V + \langle \varsigma, N^*v \rangle_{\partial K} \quad v \in K \end{aligned} \quad (2.38)$$

Segundo Oden & Reddy [1976], se  $\mathcal{D}^{-1}$  é a inversa do mapeamento do operador traço  $\mathcal{D}$ , então os problemas a-c e b-d são equivalentes. Ou seja, se  $u$  é solução de (2.35), então  $(u - \mathcal{D}^{-1}\nu)$  também o é de (2.37). Analogamente, se  $u$  é a solução de (2.36), o será também em (2.38). A recíproca é verdadeira em ambos os casos.

A unicidade da solução é garantida pelo Teorema de Lax-Milgram [Oden & Reddy (1976)], desde que as condições (2.2)-(2.5) definidas no início do Capítulo sejam respeitadas.

Observa-se ainda que, distributivamente, o problema  $\mathcal{L}u = \ell$  é válido em quase todo lugar e, como  $\ell \in V$ , então  $u \in H_{\mathcal{L}}$ .

Antes de estabelecer o problema de equações integrais pelo MMFGL, é necessário ainda definir novos espaços, de tal forma que os diversos tipos de condições de contorno sejam representados. Logo, sejam

$$\begin{aligned} H_{\mathcal{L}} &= \{ u \in H ; \mathcal{L}u \in V \} \\ \partial H_{\nu} &= \{ u \in \partial H ; u = \nu \text{ em } \partial\Omega_{\nu} \} \\ \partial K'_{\varsigma} &= \{ \ell \in \partial K' ; \ell = \varsigma \text{ em } \partial\Omega_{\varsigma} \} \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde  $\partial\Omega_{\nu}$  - união dos trechos no contorno onde  $\mathcal{D}u$  é especificado;  
e  $\partial\Omega_{\varsigma}$  - união dos trechos no contorno  $\partial\Omega$  onde  $\ell$  é especificado.

Desse modo, o operador  $\mathcal{D}u$  absorve, diretamente, as condições de contorno do tipo de Dirichlet, enquanto que a quantidade  $\ell$  engloba as condições de contorno do tipo de Neumann e/ou Robin-Cauchy. O contorno é então completamente definido pelas incógnitas  $\mathcal{D}u$  ou  $\ell$ , ou partições dessas quantidades.

O problema variacional para o MMFGL pode ser agora escrito como:

"Dado  $\ell \in V$ , encontrar as respostas no domínio,  $u \in H$ , e no contorno,  $\mathcal{D}u \in \partial H_{\mathcal{N}}$  e  $\ell \in \partial K'_{\mathcal{D}}$ , tais que sejam válidas as expressões (2.37) e (2.38)".

## 2.4. O FORMALISMO DO MMFGL.

### 2.4.1. Equações Integrais.

O Método Modificado da Função de Green Local é um método integral capaz de resolver problemas que possam ser expressos por meio de um sistema de equações diferenciais do tipo:

$$\mathcal{L} u = \ell \quad (2.40)$$

$$\mathcal{D} u = \nu \quad \text{em } \partial\Omega_{\mathcal{N}} \quad (2.41)$$

$$\mathcal{N} u = \varsigma \quad \text{em } \partial\Omega_{\mathcal{D}} \quad (2.42)$$

onde  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{D}$ , e  $\mathcal{N}$  são, respectivamente, os operadores diferenciais do problema, de Dirichlet e de Neumann;  $\Omega$ ,  $\partial\Omega_{\mathcal{N}}$ ,  $\partial\Omega_{\mathcal{D}}$  são o domínio de análise, e as partições de contorno onde são especificadas as condições de Dirichlet e de Neumann;  $\ell$ ,  $\nu$ ,  $\varsigma$  são a excitação no domínio  $\Omega$  e as funções que definem as condições de contorno em  $\partial\Omega_{\mathcal{N}}$  e  $\partial\Omega_{\mathcal{D}}$ .

Admite-se que o problema (2.40)-(2.42) seja "bem posto", isto é,

para condições de contorno prescritas adequadamente e considerando que o vetor de excitação,  $\mathcal{L}$ , seja suficientemente "bem comportado", então a solução é única.

Para que se possa determinar uma solução fundamental do problema (2.40), é necessário resolver o seu problema adjunto, considerando como estado auxiliar, o tensor de Green,  $G(P,Q)$ , e como fonte de excitação, uma distribuição Delta de Dirac,  $\delta(P,Q)$ , aplicada no domínio. Lembrando que  $\mathcal{L}^*$  é o operador adjunto formal de  $\mathcal{L}$ , e definindo  $I$  como sendo o tensor identidade, então o problema adjunto é expresso por:

$$\mathcal{L}^* G(P,Q) = \delta(P,Q) I \quad P, Q \in \Omega \quad (2.43)$$

O tensor de Green,  $G(P,Q)$  pode ser interpretado como um deslocamento generalizado na direção  $\underline{i}$  de um ponto qualquer  $\underline{Q}$  devido a uma força generalizada unitária aplicada na direção  $\underline{j}$  sobre um ponto  $\underline{P}$ , onde  $P$  e  $Q \in \Omega$ .

Multiplicando (2.40) por  $G^t(P,Q)$  resulta:

$$G^t(P,Q) \mathcal{L} u(P) = G^t(P,Q) \mathcal{L}(P) \quad (2.44)$$

Analogamente, multiplicando (2.43) por  $u^t(P)$  obtém-se:

$$u^t(P) \mathcal{L}^* G(P,Q) = u^t(P) \delta(P,Q) \quad (2.45)$$

Subtraindo de (2.44) o transposto de (2.45):

$$\begin{aligned} G^t(P,Q) \mathcal{L} u(P) - [\mathcal{L}^* G(P,Q)]^t u(P) &= \\ &= G^t(P,Q) \mathcal{L}(P) - u(P) \delta(P,Q) \end{aligned} \quad (2.46)$$

A expressão anterior pode ser re-arranjada como:

$$u(P) \delta(P,Q) = G^t(P,Q) \ell(P) + [\mathcal{L}^*G(P,Q)]^t u(P) - G^t(P,Q) \mathcal{L} u(P) \quad (2.47)$$

Integrando-se no domínio  $\Omega_p$  com o sistema de coordenadas localizadas no ponto  $\underline{p}$  obtém-se:

$$u(Q) = \int_{\Omega} \{ G^t(P,Q) \ell(P) + [\mathcal{L}^*G(P,Q)]^t u(P) - G^t(P,Q) \mathcal{L} u(P) \} d\Omega_p \quad (2.48)$$

Aplicando o teorema de Gauss às duas últimas parcelas do integrando de (2.48) resulta:

$$u(Q) = \int_{\Omega} G^t(P,Q) \ell(P) d\Omega_p - \int_{\partial\Omega} [\mathcal{N}^*G(p,Q)]^t u(p) d\partial\Omega_p + \int_{\partial\Omega} G^t(p,Q) [\mathcal{N} u(p)] d\partial\Omega_p \quad (2.49)$$

onde  $\partial\Omega$  representa um arco correspondente ao ponto  $p$  de contorno;  $\mathcal{N}$  e  $\mathcal{N}^*$  são os operadores de Neumann associados a  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{L}^*$  respectivamente.

Para evitar a manipulação dos operadores de Neumann em (2.49), que implicam em derivadas de  $u$  no contorno, o MMFGL utiliza um operador auxiliar  $\mathcal{N}'$  que pode ser adotado como:

$$\mathcal{N}' = \text{diag} [ \underline{k}_1, \underline{k}_2, \dots, \underline{k}_n ] \quad (2.50)$$

onde  $\underline{n}$  é o número de graus de liberdade em cada ponto nodal e  $\underline{k}_i$  é uma constante real não nula.

Somando e subtraindo em (2.49) a parcela

$$G^t(p,Q) [N'u(p)] = [N'G(p,Q)]^t u(p) \quad (2.51)$$

resulta

$$\begin{aligned} u(Q) = & \int_{\Omega} G^t(P,Q) \ell(P) d\Omega_p - \int_{\partial\Omega} [(N^*+N')G(p,Q)]^t u(p) d\partial\Omega_p \\ & + \int_{\partial\Omega} G^t(p,Q) [N + N'] u(p) d\partial\Omega_p \end{aligned} \quad (2.52)$$

A introdução do operador auxiliar  $N'$  implica que seja satisfeita a seguinte condição de contorno:

$$[(N^* + N') G(p,Q)]^t = 0 \quad (2.53)$$

Deve-se salientar que, uma vez imposta a condição expressa por (2.53), a solução fundamental representada por  $G(P,Q)$  passa agora a corresponder, realmente, a uma Função de Green.

Outro aspecto relevante é que a expressão (2.52) não é aconselhável sob o ponto de vista numérico, pois ainda envolve derivadas de  $u(p)$  no sentido do traço, que são de difícil tratamento. Para contornar este problema, define-se uma nova variável, tal como:

$$\ell(p) = (N + N') u(p) \quad (2.54)$$

Substituindo (2.53) e (2.54) em (2.52), resulta a expressão dos deslocamentos generalizados no domínio:

$$u(Q) = \int_{\Omega} G^t(P,Q) \ell(P) d\Omega_p + \int_{\partial\Omega} G^t(p,Q) \ell(p) d\partial\Omega_p \quad (2.55)$$

A expressão (2.55) representa a solução de (2.40) no domínio  $\Omega$ . Por não possuir nenhuma derivada de  $G(\cdot, \cdot)$  ou de  $\ell(\cdot)$ , as integrais de

(2.55) comportam-se muito melhor do que aquelas existentes em (2.49). Observa-se, também, que o sistema (2.49) é idêntico àquele decorrente do Método Direto dos Elementos de Contorno (MDEC), embora, para este último, seja usual desenvolver as integrações em relação aos pontos "campos" (Q) e não em relação aos pontos "fontes" (P), como as apresentadas neste trabalho.

Para a determinação da solução no contorno  $\partial\Omega$ , um processo análogo ao desenvolvido em (2.40)-(2.55) poderia ser feito. Mas, como as variáveis envolvidas, por hipótese, pertencem a espaços de Hilbert que apresentam a propriedade do traço, (2.9)-(2.12), é muito mais simples aplicar o operador traço diretamente à (2.55) e obter:

$$u(q) = \int_{\Omega} G^t(P,q) \ell(P) d\Omega_P + \int_{\partial\Omega} G^t(p,q) f(p) d\partial\Omega_p \quad (2.56)$$

O problema fica totalmente definido pelas equações (2.55) e (2.56), sem que se tenha feito nenhum tipo de aproximação, o que reduziria a qualidade dos resultados.

#### 2.4.2. Aproximação das Equações Integrais.

A partir de agora, os sistemas de equações (2.55) e (2.56) serão aproximados utilizando técnicas consagradas dos métodos dos Elementos Finitos e dos Elementos de Contorno para discretizar o domínio e o contorno, respectivamente. A modelagem matemática é feita como se segue.

##### a) Discretização do Domínio :

De forma análoga ao Método dos Elementos Finitos, o domínio real do problema,  $\Omega_R$ , é idealizado por  $\Omega_h$ , tão próximo do original quanto

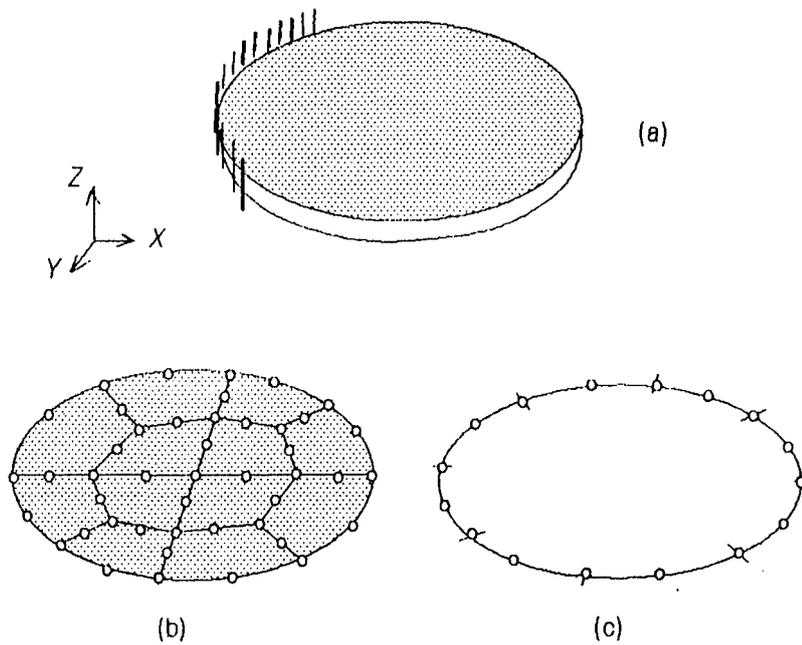


Figura 2.3. Aproximação do domínio real,  $\Omega_R$  (a), por meio de Elementos Finitos,  $\Omega^k$  (b), e Elementos de Contorno,  $\partial\Omega^k$  (c)

possível. Este, por sua vez, é dividido em NEF sub-dominios, que são os elementos finitos,  $\bar{\Omega}^k$ , ou seja,

$$\Omega_R \cong \Omega_h = \bigcup_{k=1}^{NEF} \bar{\Omega}^k \quad (2.57)$$

Cada elemento finito corresponde ao fecho de uma região aberta,  $\Omega^k$ , com o seu contorno,  $\partial\Omega^k$ , isto é,

$$\bar{\Omega}^k = \Omega^k \cup \partial\Omega^k \quad k = 1, \dots, NEF \quad (2.58)$$

tal que

$$\Omega^k \cap \Omega^j = \emptyset \quad \text{para } k \neq j \quad (2.59)$$

b) Discretização do Contorno :

O contorno  $\partial\Omega$  é aproximado por  $\partial\Omega_h$ , sendo este subdividido em NEC partes, que são os elementos de contorno,  $\partial\bar{\Omega}^k$ . Analogamente ao caso anterior tem-se:

$$\partial\Omega_h = \bigcup_{k=1}^{NEC} \partial\bar{\Omega}^k \quad (2.60)$$

onde

$$\partial\bar{\Omega}^k = \partial\Omega^k \cup \Gamma^k \quad k = 1, \dots, NEC \quad (2.61)$$

$$\partial\Omega^k \cap \partial\Omega^j \neq \emptyset \quad \text{para } k \neq j \quad (2.60)$$

e  $\Gamma^k$  é o contorno de  $\partial\Omega^k$

Quaisquer aproximações no domínio e no contorno podem ser feitas, respectivamente, através de funções de interpolação  $[\psi_i]$  e  $[\phi_j]$ . Estas funções, definidas a nível local de cada elemento, geram subespaços de dimensões finitas  $V^h$  de  $V$ ,  $H^h$  de  $H$  e  $\partial H^h$  de  $\partial H$ , onde serão geradas as projeções da Função de Green.

## c) Aproximação das Variáveis :

As variáveis envolvidas nas expressões (2.55) e (2.56) podem então ser aproximadas usando as mesmas funções de interpolação  $[\psi_i]$  e  $[\phi_j]$ , ou seja

$$\begin{aligned} u(Q) &= [\psi(Q)] u_D & u(q) &= [\phi(q)] u_C \\ \ell(P) &= [\psi(P)] b & \ell(p) &= [\phi(p)] f \end{aligned} \quad (2.63)$$

onde as variáveis em negrito  $u_D$ ,  $u_C$ ,  $b$ , e  $f$ , representam os vetores "generalizados" dos deslocamentos nodais no domínio e no contorno, das forças de corpo e das ações nodais, respectivamente;  $[\psi(\cdot)]$  e  $[\phi(\cdot)]$  são as matrizes das funções de interpolação em uma célula de Green. Note que  $[\phi(p)]$  é o traço de  $[\psi(P)]$  assim como  $u(q)$  é o traço de  $u(Q)$ . Sendo assim, os valores de  $u_D$  correspondentes aos nós que estão sobre o contorno da malha de elementos finitos, coincidem com os valores associados de  $u_C$  da malha de elementos de contorno.

Substituindo as aproximações (2.63) em (2.55) e aplicando o Método Residual de Galerkin, isto é, tomando a projeção de  $u(Q)$  ortogonal a  $[\psi(Q)]$ , resulta no seguinte sistema de equações de domínio:

$$A u_D = B f + C b \quad (2.64)$$

onde

$$A = \int_{\Omega} [\psi(Q)]^t [\psi(Q)] d\Omega_Q \quad (2.65)$$

$$B = \int_{\Omega} [\psi(Q)]^t G_C(Q) d\Omega_Q \quad (2.66)$$

$$C = \int_{\Omega} [\psi(Q)]^t G_D(Q) d\Omega_Q \quad (2.67)$$

$$G_c(Q) = \int_{\partial\Omega} G^t(p, Q) [\phi(p)] d\partial\Omega_p \quad (2.68)$$

$$G_d(Q) = \int_{\Omega} G^t(P, Q) [\psi(P)] d\Omega_p \quad (2.69)$$

onde  $G_c(Q)$  e  $G_d(Q)$  são as projeções, num ponto  $Q$  de domínio, do tensor de Green,  $G(\cdot, Q)$ , no espaço gerado pelas funções de interpolação  $[\phi_j]$  e  $[\psi_i]$ , respectivamente.

Analogamente, determina-se o sistema de equações de contorno levando (2.63) em (2.56) e aplicando o Método Residual de Galerkin, de tal modo que se tome a projeção de  $u(q)$  ortogonal a  $[\phi(q)]$ :

$$D u_c = E f + F b \quad (2.70)$$

onde

$$D = \int_{\partial\Omega} [\phi(q)]^t [\phi(q)] d\partial\Omega_q \quad (2.71)$$

$$E = \int_{\partial\Omega} [\phi(q)]^t G_c(q) d\partial\Omega_q \quad (2.72)$$

$$F = \int_{\partial\Omega} [\phi(q)]^t G_d(q) d\partial\Omega_q \quad (2.73)$$

onde  $G_c(q)$  e  $G_d(q)$  são as projeções, num ponto  $q$  de contorno, do tensor de Green,  $G(\cdot, q)$ , no espaço gerado pelas funções de interpolação  $[\phi_j]$  e  $[\psi_i]$ , respectivamente. Tais projeções são expressas por:

$$G_c(q) = \int_{\partial\Omega} G^t(p, q) [\phi(p)] d\partial\Omega_p \quad (2.74)$$

$$G_d(q) = \int_{\Omega} G^t(P, q) [\psi(P)] d\Omega_p \quad (2.75)$$

Os sistemas (2.64) e (2.70) resolvem integralmente o problema. Observe-se que as matrizes  $A$  e  $D$  são facilmente determinadas por envolverem apenas funções de interpolação. As outras,  $B$ ,  $C$ ,  $E$  e  $F$ , dependem do conhecimento das projeções da função de Green, cuja determinação será tratada no próximo item.

O sistema de equações no contorno (2.70) é inteiramente análogo ao decorrente no Método Direto de Elementos de Contorno. Como, conforme as condições de contorno, são prescritos valores de deslocamentos,  $\bar{u}_c$ , ou de "esforços generalizados",  $\bar{f}$ , o sistema (2.70) pode ser modificado de modo a separar os termos conhecidos dos desconhecidos. Isso pode ser feito facilmente através de:

$$[ -E \quad \vdots \quad D ] \begin{Bmatrix} \bar{f} \\ u_c \end{Bmatrix} = [ -\bar{D} \quad \vdots \quad \bar{E} ] \begin{Bmatrix} \bar{u}_c \\ \bar{f} \end{Bmatrix} + F b \quad (2.76)$$

#### 2.4.3. Determinação das Projeções do Tensor de Green.

Uma das etapas mais importantes no MMFGL é a determinação das projeções do tensor de Green nos espaços gerados pelas funções de interpolação  $[\psi_i]$  e  $[\phi_j]$ , com as quais podem ser implementadas as matrizes  $B$ ,  $C$ ,  $E$  e  $F$ . Silva [1988] e Barcellos & Silva [1987] propuseram uma forma de obtenção dessas projeções que envolve duas etapas distintas de solução.

1a. ETAPA : Determinação das projeções  $G_d(Q)$  e  $G_c(Q)$  correspondentes aos tensores de Green  $G(P,Q)$  e  $G(p,Q)$ .

Nesta fase, com a função Delta de Dirac no domínio, resolve-se o sistema (2.26)-(2.27), considerando que o estado auxiliar,  $v = v(\cdot, Q)$  seja definido pelo Tensor de Green  $G(\cdot, Q)$ ,  $Q \in \Omega$ , e introduzindo o

operador adicional  $N'$  nas condições de contorno, como em (2.53):

$$\mathcal{L}^* G^t(P, Q) = \delta(P, Q) I \quad P, Q \in \Omega \quad (2.77)$$

$$(N^* + N') G^t(p, Q) = 0 \quad p \in \partial\Omega ; Q \in \Omega \quad (2.78)$$

Multiplicando (2.77) por  $[\psi(P)]$  e integrando em relação a  $\Omega_p$  resulta

$$\mathcal{L}^* \int_{\Omega} G^t(P, Q) [\psi(P)] d\Omega_p = \int_{\Omega} \delta(P, Q) [\psi(P)] d\Omega_p \quad (2.79)$$

O termo  $G_d(Q)$ , (2.69), é reconhecido na primeira integral de (2.79), o que torna a expressão equivalente a:

$$\mathcal{L}^* G_d(Q) = [\psi(Q)] \quad (2.80)$$

De modo análogo, multiplicando (2.78) por  $[\phi(p)]$  e integrando em relação a  $\partial\Omega_p$ , a projeção  $G_c(Q)$ , (2.68), é determinada:

$$(N^* + N') \int_{\partial\Omega} G^t(p, Q) [\phi(p)] d\partial\Omega_p = 0 \quad (2.81)$$

o que equivale a:

$$(N^* + N') G_c(Q) = 0 \quad (2.82)$$

2a. ETAPA : Determinação das projeções  $G_c(q)$  e  $G_d(q)$  correspondentes aos tensores de Green  $G(p, q)$  e  $G(P, q)$ .

Agora, com a função Delta de Dirac no contorno, resolve-se o sistema (2.26)-(2.27), considerando que o estado auxiliar,  $v = v(\cdot, q)$  seja definido pelo Tensor de Green  $G(\cdot, q)$ ,  $q \in \partial\Omega$ , e incluindo o

operador adicional  $\mathcal{N}'$  nas condições de contorno:

$$\mathcal{L}^* G^t(p, q) = 0 \quad p \in \Omega \quad \text{e} \quad q \in \partial\Omega \quad (2.83)$$

e

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') G^t(p, q) = \delta(p, q) I \quad p, q \in \partial\Omega \quad (2.84)$$

Multiplicando (2.83) por  $[\psi(p)]$  e integrando em relação a  $\Omega_p$  tem-se:

$$\mathcal{L}^* \int_{\Omega} G^t(p, q) [\psi(p)] d\Omega_p = 0 \quad q \in \partial\Omega, p \in \Omega \quad (2.85)$$

Ou seja, lembrando (2.75):

$$\mathcal{L}^* G_d(q) = 0 \quad (2.86)$$

Repetindo o mesmo procedimento em relação à (2.84), porém multiplicando por  $[\phi(p)]$  e integrando ao longo de  $\partial\Omega_p$ :

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') \int_{\partial\Omega} G^t(p, q) [\phi(p)] d\partial\Omega_p = \int_{\partial\Omega} \delta(p, q) [\phi(p)] d\partial\Omega_p \quad (2.87)$$

Usando (2.74) obtém-se  $G_c(q)$  :

$$(\mathcal{N}^* + \mathcal{N}') G_c(q) = [\phi(q)] \quad (2.88)$$

Adotando funções de interpolação lagrangeanas convencionais de elementos finitos, os termos da direita das equações (2.80) e (2.88) têm continuidade do tipo  $\mathcal{E}^0(\Omega)$ . Como a excitação adotada nas duas etapas é do tipo  $\delta$  (delta de Dirac), sendo portanto muito mais singular, conclui-se que as projeções da função de Green determinadas em (2.80), (2.82), (2.86), e (2.88) têm um comportamento muito mais suave

e regular do que o próprio tensor  $G(P,Q)$ , simplificando o tratamento numérico. Este é um dos mais importantes motivos do excelente desempenho do MMFGL.

Como as projeções de Green são funções suaves e contínuas [Mikhlin (1970)], também podem ser expandidas pelas mesmas funções de interpolação lagrangeanas usadas anteriormente. Chega-se, assim, a:

$$\begin{aligned} G_d(Q) &= [\psi(Q)] G^{DQ} & G_d(q) &= [\phi(q)] G^{Dq} \\ G_c(Q) &= [\psi(Q)] G^{CQ} & G_c(q) &= [\phi(q)] G^{Cq} \end{aligned} \quad (2.89)$$

onde  $G^{DQ}$ ,  $G^{Dq}$ ,  $G^{CQ}$  e  $G^{Cq}$  são os tensores obtidos com os valores nodais de  $G_d(Q)$ ,  $G_d(q)$ ,  $G_c(Q)$  e  $G_c(q)$ , respectivamente.

Barcellos e Silva [1987] sugeriram a aproximação dos tensores de Green de um modo análogo ao Método dos Elementos Finitos, através da minimização de um funcional  $\mathcal{F}(G_d, G_c)$  que depende do tipo de problema que se está analisando. Barbieri [1992] mostrou que este funcional pode ser expresso genericamente na forma:

$$\mathcal{F}(G_d, G_c) = B(\mathcal{E}, \mathcal{E}) - \alpha B_1(G_d, [\Psi]) - \beta B_2(G_c, [\Phi]) + B_3(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \quad (2.90)$$

onde

$\alpha$  e  $\beta$  são constantes tais que  $\alpha = 1$  e  $\beta = 0$  se, com a minimização de (2.90), se deseja calcular  $G_d$ ; e  $\alpha = 0$  e  $\beta = 1$ , caso a projeção desejada seja  $G_c$ ;

$\mathcal{E}$  corresponde a  $G_d$  ou a  $G_c$ , conforme o caso desejado;

$B(\mathcal{E}, \mathcal{E})$  é a forma bilinear em estudo, desenvolvida para  $G_d$  ou para  $G_c$ , conforme corresponda  $\mathcal{E}$ ;

$B_1$ ,  $B_2$  e  $B_3$  são formas bi-lineares tais como:

$$B_1(G_{d'}, [\Psi]) = \int_{\Omega} G_{d'}(Q) \cdot [\Psi(Q)] \, d\Omega_Q \quad (2.91)$$

$$B_2(G_c, [\Phi]) = \int_{\partial\Omega} G_c(q) \cdot [\Phi(q)] \, d\partial\Omega_q \quad (2.92)$$

$$B_3(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} [N' \mathcal{E}(p)] \cdot \mathcal{E}(p) \, d\partial\Omega_q \quad (2.93)$$

Do processo de minimização do funcional  $\mathcal{F}$ , resulta um sistema de equações semelhante a:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G^{DP}(Q) \\ \vdots \\ G^{CP}(Q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

onde

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{MEF} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}' \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

$\mathbf{K}_{MEF}$  - matriz de rigidez convencional de elementos finitos

$\mathbf{K}'$  - matriz que envolve os coeficiente de contorno do operador  $N'$ , e que pode ser considerada como em (2.50), isto é, uma matriz diagonal do tipo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & k_i \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

$\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{D}$  - matrizes decorrentes do processo de minimização do funcional  $\mathcal{F}(G_{d'}, G_c)$ , e que correspondem, respectivamente, às matrizes de (2.65) e (2.71).

Os coeficientes  $k_i$ 's,  $i = 1, \dots, n$ , onde  $n$  é o número total de graus de liberdade, são constantes não nulas, e com valores que não comprometam o condicionamento final do sistema de equações. Devem ser especificados apenas onde existam condições de contorno homogêneas de Dirichlet. Esta última restrição pode ser melhor entendida observando-se que o operador adicional do MMFGL,  $N'$ , está incluído apenas na forma bilinear  $B_3(\mathcal{E}, \mathcal{E})$  da expressão (2.90), que afeta diretamente a matriz de rigidez de (2.94). É com o operador  $N'$  que se calculam os valores do vetor de resultantes nodais  $f = (N + N') u_c$ . Enquanto que a primeira parcela,  $N u_c$ , corresponde às reações e esforços reais, a segunda,  $N' u_c$ , corresponde a valores "fictícios". Introduzindo o operador  $N'$  apenas na parcela de contorno correspondente às condições de Dirichlet homogêneas, as reações e fluxos fictícios não são assim incluídos no sistema. De outra forma, um pós-processamento tornar-se-ia necessário para retirar dos resultados finais as quantidades fictícias. Valores de  $k_i$ 's testados num intervalo de  $[10^{-11} K_{\max}]$  a  $[10^8 K_{\max}]$ , onde a  $K_{\max}$  é o maior valor da matriz de rigidez convencional de elementos finitos, não revelaram quaisquer perturbações no MMFGL.

#### 2.4.4. Implementação das Matrizes e Resolução do Sistema de Equações.

Reconsiderando o sistema de equações definido pelas expressões (2.64) e (2.70), observa-se que:

- a) As matrizes  $A$  e  $D$ , em (2.65) e (2.71), de modo análogo à matriz de massa, são facilmente determinadas pois envolvem apenas produtos entre matrizes de funções de interpolação.
- b) Uma vez conhecidos os valores nodais de  $G^{Dq}$  e  $G^{Cq}$ , pela propriedade do traço ficam determinados, automaticamente,  $G^{Dq}$  e  $G^{Cq}$ .

c) Com as projeções  $G^{DQ}$  e  $G^{CQ}$  das funções de Green, as matrizes  $B$  e  $C$  em (2.66) e (2.67) podem ser re-escritas como:

$$B = \int_{\Omega} [\psi(Q)]^t [\psi(Q)] d\Omega_q G^{CQ} \quad (2.97)$$

$$C = \int_{\Omega} [\psi(Q)]^t [\psi(Q)] d\Omega_q G^{DQ} \quad (2.98)$$

Reconhecendo a matriz  $A$  de (2.65) em (2.97) e (2.98) resulta:

$$B = A G^{CQ} \quad (2.99)$$

e

$$C = A G^{DQ} \quad (2.100)$$

d) Analogamente, a matriz  $E$  de (2.72) pode ser re-escrita como:

$$E = \int_{\partial\Omega} [\phi(q)]^t [\phi(q)] d\partial\Omega_q G^{Cq} \quad (2.101)$$

Usando (2.71) em (2.101) resulta

$$E = D G^{Cq} \quad (2.102)$$

e) Considerando que as funções  $[\phi_j]$  correspondem aos traços das funções de interpolação no domínio  $[\psi_i]$ , observa-se em (2.66) e (2.73) que

$$F = B^t \quad (2.103)$$

f) Resolvendo-se, inicialmente, os valores no contorno determinados por (2.70), e com estes substituindo-se em (2.64), a solução do problema torna-se bastante vantajosa. Isto porque, devido a (2.99) e (2.100), os resultados no domínio são obtidos sem necessidade de inversão da matriz  $A$ , ou seja, o sistema (2.64), no domínio, simplifica-se para

$$u_D = G^{CQ} f + G^{DQ} b \quad (2.104)$$

g) Caso adotado o procedimento descrito no item f, a matriz C no sistema (2.64) perde a finalidade e não precisa ser desenvolvida bastando, para tanto, o conhecimento de  $G^{CQ}$  e  $G^{DQ}$ . A matriz B continua sendo necessária pelo motivo descrito no item e.

## 2.5. Referências Bibliográficas do Capítulo 2.

- Babuška, I. - Trends in Finite Elements. IEEE Trans. Magnetics, 25, n.4, 2799-2803, (1989)
- Barbieri, R. - Desenvolvimento e Aplicação do Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) Para Problemas do Meio Contínuo". Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina, (Tese de Doutorado), (1992).
- Barbieri, R.; Barcellos, C. S. - Solução do Problema Potencial pelo Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM). Proc. XI COBEM - Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, São Paulo, (1991a).
- Barbieri, R.; Barcellos, C. S. - A Modified Local Green's Functions Technique for the Mindlin's Plate Model ", 13th BEM Conf., ( Ed. Brebbia, C. A.), (1991b)
- Barbieri, R.; Barcellos, C. S. - Non-Homogeneous Field Potential Problems Solution by the Modified Local Green's Function Method (MLGFM). Eng. Analysis With Boundary Elements (a ser publicado)
- Barbieri, R.; Barcellos, C. S.; Noel, A. T. - "A First Modified Local Green's Function Method Approach to Shell Analysis" (a ser publicado).
- Barbieri, R.; Machado, R.D.; Filippin, C.G.; Barcellos, C.S. - O Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) Aplicado a Problemas da Mecânica do Contínuo: Parte I - Elastoestática. XIII CILAMCE - Cong. Ibero Latino-Americano Sobre Métodos Computacionais Para Engenharia. Porto Alegre, (1992)
- Barcellos, C. S.; Barbieri, R. - Solution of Singular Potential Problems by the Modified Local Green's Function Method (MLGFM). 13th BEM Conf., (Ed. Brebbia, C. A. ), (1991)

- Barcellos, C. S.; Barbieri, R. ; Machado, R. D.; Filippin, C. G. - Método Modificado da Função de Green Local (MLGFM) - Uma Nova Alternativa Para a Solução de Problemas da Mecânica - Parte I: Descrição do Método. 7o. SIBRAT . Simpósio Brasileiro Sobre Tubulações e Vasos de Pressão. Florianópolis, (1992a).
- Barcellos, C. S.; Barbieri, R. ; Machado, R. D.; Filippin, C. G. - Método Modificado da Função de Green Local (MLGFM) - Uma Nova Alternativa Para a Solução de Problemas da Mecânica - Parte II: Aplicações. 7o. SIBRAT . Simpósio Brasileiro Sobre Tubulações e Vasos de Pressão. Florianópolis, (1992b).
- Barcellos C. S.; Silva, L. H. M. - Elastic Membrane Solution by a Modified Local Green's Function Method.(Ed. Brebbia, C. A. and Venturini, W. S) Proc. Int. Conf. on Boundary Element Technology, 1987, Comp. Mech. Publ., Southampton, (1987)
- Burns, T. J. - The Partial Current Balance Method: A Local Green's Function Technique For The Numerical Solution Of Multidimensional Neutron Diffusion Problems. Urbana, University of Illinois, (PhD Thesis) (1975)
- Beskos, D.E. - Boundary Element Methods in Mechanics". Vol. 3 in Computational Methods in Mechanics (Ed. Beskos, D.E.), North-holland, (1987).
- Brebbia, C.A.; Telles, J.C.F.; Wrobel, L.C. - Boundary Element Techniques. Springer-Verlag. 1984.
- Filippin, C.G. - Desenvolvimento e Aplicação do Método da Função de Green Local Modificado à Equação de Helmholtz. Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina, Dissertação de Mestrado, (1992)
- Filippin, C.G; Barbieri, R.; Barcellos, C.S. - Numerical Results for H- and P-Convergences for the Modified Local Green's Fuction Method. Proc. 14th Int. Conf. Boundary Element Technology, USA, (1992).
- Filippin, C.G.; Barbieri, R.; Machado, R.D.; Barcellos, C.S. - O Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) Aplicado a Problemas da Mecânica do Contínuo: Parte III - Problemas Regidos Pela Equação de Helmholtz. XIII CILAMCE - Cong. Ibero Latino-Americano Sobre Métodos Computacionais Para Engenharia. Porto Alegre, (1992)
- Filippin, C.G.; Barbieri, R.; Machado, R.D.; Barcellos, C.S. - O Método da Função de Green Local Modificado Como Ferramenta Computacional na Solução do Problema de Vibração. Livre. Rev. Sociedade Brasileira de Acústica - SOBRAC - Acústica e Vibracoes. Vol 11. (1992).

- Greenberg, M. D. - Application Of Green's Functions In Science And Engineering. Prentice-Hall, Inc., New Jersey, (1971)
- Horak, W. C. - Local Green's Function Techniques For The Solution Of Heat Conduction And Incompressible Fluid Flow Problems. Urbana, University of Illinois, PhD Thesis, (1980).
- Horak, W. C.; Dorning, J. J. - A Local Green's Function Method For The Numerical Solution Of Heat Conduction And Fluid Flow Problems. Nuclear Science Engng. 64, 192-207, (1977)
- Horak, W. C.; Dorning, J. J. - A Course-Mesh Method For Heat Flow Analysis Based Upon The Use Of Locally-Defined Green's Functions. Numerical Methods in Thermal Problems, Vol II. Pineridge Press, Swansea, UK, (1981).
- Lawrence, R. D. - A Nodal Green's Function Method For Multidimensional Neutron Diffusion Calculations. Urbana, University of Illinois, (PhD. Thesis), (1979).
- Machado, R.D.; Barcellos, C.S. - A First Modified Local Green's Function Method Approach To Ortotropic Laminated Plates. Proc. of CADCOMP92 - Computer Aided Design for Composite Materials Conference. Ed. C.A. Brebbia. Newark. USA, (1992).
- Machado, R.D.; Barbieri, R.; Barcellos, C.S; Filippin, C.G. - O Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) Aplicado a Problemas da Mecânica do Contínuo: Parte II - Placas Ortotrópicas Laminadas. XIII CILAMCE - Cong. Ibero Latino-Americano Sobre Métodos Computacionais Para Engenharia. Porto Alegre, (1992)
- Maldaner, M.; Barcellos, C.S. - Análise de Problemas da Mecânica da Fratura Bi-Dimensional Com o Uso do Método da Função de Green Local Modificado. XIII CILAMCE - Cong. Ibero-Latino Americano Sobre Métodos Computacionais Para Engenharia., Porto Alegre, (1992).
- Miklin, S.G. - Mathematical Physics, An Advanced Course. North-Holland Publishing Company, Amsterdam and London, (1976)
- Oden, J.T.; Carey, G.F. - Finite Elements: Mathematical Aspects. Vol IV, Prentice-Hall, Inc. New Jersey, (1983).
- Oden, J.T.; Reddy, J.N. - An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements. John-Wiley & Sons. (1976).
- Silva, L.H.M. - Novas Formulações Integrais Para Problemas da Mecânica. Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina, Tese de Doutorado, (1988).
- Szabó, B.; Babuška, I. - Finite Element Analysis. John Wiley & Sons, Inc. (1991).

## CAPÍTULO 3

### PLACAS LAMINADAS DE MATERIAIS COMPOSTOS

#### 3.1. INTRODUÇÃO.

Uma das áreas de estudo dos materiais compostos na Mecânica Estrutural se concentra, hoje, no desenvolvimento de modelos numéricos que representem, adequadamente, os elementos estruturais feitos por esses materiais, tais como placas e cascas laminadas, peças com enrijecedores, com aberturas, etc. Além de representarem o comportamento desses elementos às mais diversas solicitações - flexão, cisalhamento, flambagem, efeitos térmicos, delaminações, etc., os modelos devem ser, dentro do possível, simples e precisos.

Não é difícil perceber que os materiais compostos têm um comportamento estrutural muito mais complexo que os homogêneos. A experiência adquirida no trato com materiais homogêneos para resolver os problemas que envolvam materiais compostos anisotrópicos revela-se, muitas vezes, insuficiente e enganosa. É por esse motivo que existem tantas teorias e modelos distintos para análise de tais materiais, e nenhum deles é completo o bastante para resolver todas as situações práticas.

Em face ao largo campo de aplicações, o presente trabalho se concentra no estudo de placas laminadas de materiais compostos. Serão mostrados, no decorrer deste Capítulo, as diversas teorias existentes para a solução de placas laminadas, bem como os modelos numéricos utilizados. Na etapa seguinte, serão mostradas as propriedades gerais de um laminado, a partir das contribuições individuais de cada lâmina.

Finalmente, serão discutidas as técnicas de determinação das tensões normais e cisalhantes ao longo da seção transversal.

### 3.2. TEORIAS DE PLACAS LAMINADAS.

O comportamento direcional de uma placa laminada, decorrente dos diferentes graus de anisotropia entre as diversas lâminas, é uma propriedade essencial para que se avaliem corretamente os efeitos das tensões cisalhantes interlaminares. Uma série de estudos realizados por Pagano [1969, 1970a, 1970b], Whitney e Pagano [1970], Pagano & Wang [1971], e Pagano & Hatfield [1972], mostrou a importância de se considerar os efeitos das deformações transversais por cisalhamento para a correta determinação dos deslocamentos laterais e da distribuição das tensões ao longo da espessura da placa. Estas conclusões são base fundamental para o tratamento de laminados.

Existem inúmeras teorias de placas laminadas. Na literatura, muitas são referenciadas por nomes ou siglas, que podem, a princípio, causar algum tipo de confusão. Para facilitar o entendimento, algumas dessas siglas estão aqui reunidas. Ao longo do trabalho, muitas vezes elas serão mencionadas:

- CPT - "Classical Plate Theory" - Teoria Clássica de Placas, baseada no modelo de Kirchhoff.
- CST - "Constante Shear-Angle Deformation Theory" - Teoria do Ângulo de Cisalhamento Constante, baseada nos modelos de Reissner/Mindlin.
- CLPT - "Classical Laminated Plate Theory" - Teoria Clássica de Placa Laminada. Corresponde à CPT para o caso de laminados.
- FSDT - "First Order Shear Deformation Theory" - Teoria de Primeira Ordem. Corresponde à CST para o caso de laminados. O campo de deslocamentos varia linearmente ao longo da

espessura.

- HSDT - "High Order Shear Deformation Theory" - Teoria de Ordem Superior ou Teoria Refinada. Engloba a FSDT, pois o campo de deslocamentos é expandido por polinômios de ordem superior.
- LCST - "Layer-wise Constant Shear Angle Theory" - Teoria do Ângulo de Cisalhamento Constante para lâmina discreta. Corresponde à CST, porém aplicada a cada lâmina individualmente.
- GLPT - "Generalized Layer-wise Plate Theory" - Teoria generalizada de placa por lâmina discreta. É uma particularidade da LCST.

Hoje, as teorias de placas laminadas, conforme o tratamento a elas empregado, podem ser classificadas em [Reddy (1989a)] :

- a) Teorias tri-dimensionais (3-D), baseadas na Mecânica do Contínuo e na Elasticidade;
- b) Teorias de Camada Simples Equivalente;
- c) Teorias do Tipo Camada ou Lâmina Discreta.

### 3.2.1. Teorias Tri-Dimensionais.

Rigorosamente, uma placa, laminada ou não, é uma estrutura tri-dimensional, cujo tratamento mais correto é através das equações da Elasticidade 3-D e da Mecânica do Contínuo. Embora os resultados daí decorrentes possam ser tomados como "exatos", a complexidade de uma análise como esta restringe seu uso a uns poucos casos práticos.

Os trabalhos citados de Pagano et. alli., e Whitney e Pagano, baseiam-se na Elasticidade 3-D para determinar soluções "analíticas" para alguns tipos de placas ortotrópicas laminadas, e seus resultados servem até hoje como referência e aferição de novos métodos.

Uma formulação 3-D foi utilizada por Sun [1971] e Sun & Cheng [1972], no desenvolvimento de uma teoria contínua que leva em conta a micro-estrutura das placas multi-laminadas. Nestes trabalhos, expressões de placa bi-dimensional são deduzidas a partir de equações tri-dimensionais da Mecânica do Contínuo, empregando expansões em série como as apresentadas por Mindlin [1951]. Entretanto, a solução é bastante complexa e os custos da análise excessivos, especialmente quando é grande o número de lâminas ou em análises não-lineares, como observa Kuppusamy & Reddy [1984].

Assim, este tratamento é aconselhável apenas em regiões localizadas. Nos problemas onde ocorrem grandes gradientes de tensões, ou naqueles que envolvem danos em placas laminadas, como discutido no trabalho de Hwang & Sun [1989], uma formulação tri-dimensional pode ser interessante.

### 3.2.2. Teorias de Camada Simples Equivalente.

Nas Teorias de Camada Simples Equivalente, o laminado é tratado como se fosse uma única placa homogênea, cujas propriedades são determinadas por integração, ao longo da espessura, a partir das contribuições individuais de cada lâmina. Admite-se que cada lâmina seja elástica e esteja submetida a um estado plano de tensões. A placa resultante assim obtida é, em geral, anisotrópica. Os custos da análise são bastante reduzidos, sendo, por isso, a opção da grande maioria dos pesquisadores quando apenas os resultados globais são importantes (como deslocamentos, rotações, tensões normais e modos de vibração).

As teorias de Camada Simples consideram a placa como uma estrutura bi-dimensional, adotando formulações semelhantes às das teorias convencionais de placas homogêneas. O modelo é, dessa forma, mais simples do que os que se baseiam em teorias tri-dimensionais. Em con-

trapartida, deve-se atentar para alguns inconvenientes que podem surgir, tais como, a representação incorreta dos esforços nos cantos das placas.

Quando enquadradas na classe de Camadas Simples, as teorias podem se basear em modelos de deslocamentos ou mistos. Os primeiros expandem o campo de deslocamentos através de uma combinação linear entre funções da coordenada ao longo da espessura e funções pré-estabelecidas na superfície de referência (em geral, a superfície média). Nos modelos mistos, combinam-se linearmente funções de deslocamentos e de tensões [Reddy (1986)].

Pode-se dizer que a "Teoria Clássica de Placa Laminada" (CLPT - Classical Laminated Plate Theory) é o modelo mais rudimentar de uma Teoria de Camada Simples baseada em modelo de deslocamentos. A CLPT, pela introdução dos efeitos de flexão-membrana, é uma extensão da Teoria Clássica de Placas (CPT - Classical Plate Theory) ao caso de laminados [Whitney (1987)]. Utilizam-se funções lineares  $\mathcal{E}^1$  para expandir o campo de deslocamentos. São consideradas as hipóteses de Kirchhoff-Love, e desprezadas as deformações transversais,  $\epsilon_{zz}$ ,  $\epsilon_{xz}$ , e  $\epsilon_{yz}$ , o que resulta em tensões cisalhantes  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  nulas. Desse modo, a normal à superfície média não sofre distorção, assim permanecendo após a deformação.

Atribuem-se a Yang, Norris e Stavsky [1966] os méritos de serem os pioneiros na modelagem de placas laminadas pela CLPT. Whitney e Leissa [1969], usando modelo semelhante, apresentaram as equações governantes em termos de deslocamentos, e soluções particulares para alguns casos de flexão, vibrações e flambagem. Mais tarde, porém, de acordo com as conclusões de Pagano [1969,1970a,b], e de Whitney e Pagano [1970], o uso dessa teoria ao caso de laminados foi desaconselhado, por desprezar os efeitos cisalhantes. Mesmo para materiais isotrópicos, a CPT é restrita ao caso de placas finas, quando a relação entre o vão e a espessura é grande.

A Teoria de Primeira Ordem (FSDT - First Order Shear Deformation Theory) descreve o campo de deslocamentos por meio de polinômios lineares ao longo da espessura e inclui as contribuições dos efeitos cisalhantes na análise. É uma extensão ao caso dos laminados, dos modelos propostos por Reissner [1945] e Mindlin [1951] para placas homogêneas. Estes, incluindo no modelo de Kirchhoff (CPT) os efeitos do cisalhamento transversal, deram início às "Teorias de Deformações por Cisalhamento" (CST - Classical Shear Deformation Theory). Nas propostas originais, Reissner e Mindlin trabalharam, respectivamente, com expansões de campos de tensões e de deslocamentos. Ambos consideravam coeficientes de correção do cisalhamento constantes, e os valores de  $5/6$ , para o caso de Reissner, e  $\pi^2/12$ , para o de Mindlin, ficaram consagrados. Tais coeficientes foram "embutidos" nessas teorias para que, uma vez que não era possível descrever exatamente a distribuição das tensões cisalhantes ao longo da seção transversal, pelo menos na média, elas seriam bem avaliadas.

Deve-se observar que, em compostos, os valores dos coeficientes de correção do cisalhamento dependem da distribuição das deformações cisalhantes transversais ao longo da espessura. Estas, por sua vez, são funções da geometria e da configuração do laminado [Noor & Burton (1989a,b;1990)]. Assim, a precisão da Teoria de Primeira Ordem diminui quando a relação  $h/L$  (espessura/comprimento da placa) e  $\alpha$  (ângulo de orientação das fibras) crescem. O campo de validade da FSDT é também muito dependente dos coeficientes de correção adotados.

Whitney e Pagano [1970] mostraram também que, se o campo de deslocamentos não for adequado, não basta incluir deformações por cisalhamento na Teoria Clássica de Placas, como fizeram Reissner e Mindlin, para obter tensões laminares precisas. Whitney [1972] reforçou estas conclusões ao percorrer caminho inverso ao normalmente empregado. Determinou os deslocamentos no plano a partir da integração das deformações cisalhantes transversais obtidas por Whitney & Pagano [1970]. O campo de deslocamentos assim obtido foi de ordem superior, e não mais linear como no modelo original. Esse procedimento, no

entanto, não conduz, necessariamente, a tensões cisalhantes iguais às decorrentes das equações de equilíbrio de placas.

A partir dos trabalhos de Whitney & Pagano, surgiram as "Teorias de Ordem Superior" ou "Teorias Refinadas de Placas" (HSDT - High Order Shear Deformation Theory), nas quais o campo de deslocamentos é expandido, ao longo da espessura, por meio de polinômios quadráticos, cúbicos, etc.

Whitney & Sun [1973] e Nelson & Lorch [1974] adotaram uma expansão polinomial quadrática. Lo, Christensen & Wu [1977a,b] utilizaram uma variação cúbica dos deslocamentos.

Biot [1972] propôs nova aproximação para placas ortotrópicas multi-laminadas, incluindo os efeitos de canto. A teoria é desenvolvida no contexto de deformações planas. Equações de recorrência são obtidas para laminados genéricos e aplicadas a placas com duas ou três lâminas.

Mau [1973] e Srinivas [1973] apresentaram outra variação de teorias refinadas, considerando os deslocamentos como determinados através de funções seccionalmente contínuas ao longo de cada lâmina. Ambos os trabalhos consideraram um número arbitrário de camadas. A formulação de Srinivas não utilizava fatores de correção do cisalhamento. Porém, nos dois casos, o número das equações de campo e das condições de contorno dependia do número de lâminas.

Reddy [1984a] e Phan & Reddy [1985] propuseram uma teoria de ordem superior unificada, empregando um polinômio de terceiro grau, e impondo a condição de que as deformações transversais cisalhantes se anulassem nas superfícies superior e inferior da placa. Apesar deste modelo não satisfazer a condição de continuidade das tensões cisalhantes inter-laminares, a proposta, contudo, foi estendida ao caso de análise não-linear [Reddy (1984b)]. Bhimaradhi & Stevens [1984] utilizaram um polinômio cúbico equivalente ao de Reddy para expandir o

campo de deslocamentos para análise de vibrações livres em placas retangulares.

O modelo de Reddy apresentava o inconveniente de incluir algumas derivadas na sua expansão polinomial, o que, numericamente, era pouco interessante. Kant e Pandya [1988] propuseram uma alteração, permitindo o tratamento de laminados não-simétricos de uma forma mais eficiente.

Na maioria das Teorias de Camadas Simples Equivalentes admite-se que são contínuos os deslocamentos e suas derivadas (as deformações) ao longo da espessura do laminado. No entanto, como as propriedades variam de uma camada para outra, as tensões resultantes, quando calculadas por meio das equações constitutivas, são descontínuas nas interfaces. Para contornar este inconveniente, é usual calcular as tensões interlaminares por meio de equações de equilíbrio da Elasticidade 3-D, a partir das tensões normais determinadas pelas relações constitutivas. Tal procedimento foi sugerido, inicialmente, por Pryor & Barker [1971], e por Chou & Carleone [1973]. Englbom & Ochoa [1985] também fizeram uso dessa técnica e, em trabalho subsequente [1986], adotaram um procedimento de orto-normalização por mínimos quadrados para cálculo mais eficiente das tensões.

A dificuldade em determinar precisamente as tensões interlaminares faz com que as Teorias de Camadas Simples sejam adequadas para representar o comportamento global de placas laminadas, expresso através dos deslocamentos, frequências naturais ou cargas de flambagem. Porém, quando forem muito importantes os efeitos locais, como tensões em regiões de descontinuidades geométricas, de força ou de material, outro procedimento deve ser adotado.

Uma alternativa foi recentemente sugerida por Noor & Burton [1989b] e Noor, Burton & Peters [1990], que apresentaram um procedimento do tipo preditor-corretor, de duas fases, para o cálculo de tensões inter-laminares e frequências de vibrações. Na primeira fase,

preditora, utiliza-se qualquer teoria de camada simples descrita anteriormente. É vantajoso, inclusive, o uso da Teoria de Primeira Ordem, FSDT, pois o número de variáveis é menor em relação às demais. Os deslocamentos, rotações e tensões determinados nessa fase, são utilizados para, na segunda etapa, modificar os coeficientes de correção do cisalhamento originalmente adotados, e obter valores mais próximos à condição real de cada laminado. Com estes novos coeficientes, as tensões são aperfeiçoadas.

### 3.2.3. Teorias do Tipo Camada, Multi-Lâmina, ou Lâmina Discreta.

O terceiro grupo de teorias de placas laminadas é o denominado "Teoria do Tipo Camada, Multi-Lâmina, ou Lâmina Discreta" (Layer-wise 3-D/2-D Theory, Discrete Layer-wise Theory ou Multi-layer Theory). Considera-se, nestes modelos, que o laminado seja constituído de lâminas individuais empilhadas e discretas, não sendo mais tratado como uma única camada, como nos modelos de camada simples equivalente. Enquanto que na Teoria Clássica (CLPT) os efeitos das deformações cisalhantes são ignorados e, na Teoria de Primeira Ordem (FSDT), o ângulo de rotação da normal é considerado constante ao longo da espessura da placa, nas teorias do tipo multi-lâmina admite-se que o referido ângulo seja constante dentro de cada lâmina. O número de incógnitas do problema é, portanto, proporcional à quantidade de lâminas.

Um dos trabalhos pioneiros utilizando estas técnicas é o de Mau, Tong & Pian [1972] que, através de um método híbrido de tensões, desenvolveram um elemento quadrangular de placa multi-laminada. Este elemento possui  $2 \times (NL+1) + 1$  graus de liberdade por nó, sendo NL o número de lâminas. Spilker, Chou & Oringer [1977] procederam de modo análogo para a implementação de um elemento triangular com expansão linear dos deslocamentos.

Em [1984], Reissner propôs um novo princípio variacional misto

que assume, ao longo da espessura de cada lâmina, uma variação linear dos deslocamentos, bem como uma distribuição quadrática de tensões. Tal conceito serviu para Toledano e Murakami [1987a] desenvolverem outra teoria denominada, de modo sugestivo, como "Teoria Zig-zag de Primeira Ordem". Os deslocamentos no plano, determinados pela Teoria de Reissner/Mindlin (CST), são superpostos a uma função do tipo "zig-zag" de continuidade  $\mathcal{C}^0$ . Mais tarde, Toledano & Murakami [1987b] incluíram polinômios de Legendre na variação dos deslocamentos ao longo da espessura da placa. Comparados com o modelo de Lo, Christensen & Wu [1978b], os resultados obtidos pela Teoria Zig-zag são melhores. Porém algumas discrepâncias em laminados ortotrópicos não simétricos foram registradas.

Em [1986], Chaudhuri propôs uma formulação que admite um campo quadrático de deslocamentos, e a utilizou no desenvolvimento de um elemento triangular, com  $2 \times NL + 3$  graus de liberdade por nó. Detalhes de implementação foram discutidos por Chaudhuri & Seide [1987a,b] e Seide & Chaudhuri [1987].

Recentemente, Reddy [1989b] apresentou novo modelo, semelhante à Teoria Zig-Zag de Toledano e Murakami, e que foi denominado de "Teoria Generalizada de Lâmina Discreta" (GLPT - Generalized Laminate Plate Theory). Nesta proposta, o campo de deslocamentos é expandido por meio de uma combinação linear entre a coordenada ao longo da espessura e funções indeterminadas da posição em cada lâmina, que podem ser vistas como funções globais de Lagrange. O laminado pode, desse modo, ser discretizado por elementos 2-D em sua superfície de referência. Reddy, Barbeiro & Teply [1989] e Barbero, Reddy & Teply [1988,1990] apresentam maiores detalhes de implementação.

Nas teorias do tipo Camada, os deslocamentos são contínuos ao longo da espessura, mas suas derivadas não o são. Isto resulta em deformações transversais descontínuas em cada interface, e tensões contínuas, mesmo quando calculadas pelas equações constitutivas. No plano, as deformações  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$  e  $\epsilon_{xy}$  apresentam continuidade, mas o

mesmo não ocorre com as tensões normais  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{xy}$  nas interfaces, por causa das diferenças de propriedades entre as lâminas.

Assim como nas teorias tri-dimensionais, os modelos do tipo Lâmina são capazes de representar precisamente o campo de tensões inter-laminares, mas a um custo também elevado, uma vez que o número de equações diferenciais é proporcional ao número de camadas. Utilizando-se técnicas de "sub-laminação" [Reddy (1989a) e Chaudhuri & Seide (1987a,b)], quando várias "sub-lâminas" são agrupadas numa só, o custo da análise pode ser reduzido. As propriedades de um sub-laminado são obtidas por integração ao longo da espessura, de modo análogo ao empregado nos modelos de camada simples.

Pagano [1978] apresentou uma teoria local cujo modelo matemático consiste em  $23 \times N$  equações diferenciais parciais na superfície média da placa, mais  $7 \times N$  condições de contorno, onde  $N$  é o número de lâminas. Quando é grande o número de camadas, em problemas geometricamente não-lineares ou em análises transientes, o seu uso é desaconselhável.

Como os custos por análises globais tri-dimensionais ou por modelos do tipo Lâmina são excessivos, Pagano & Soni [1983] apresentaram, ainda, um procedimento, denominado "Local-Global", em que essas teorias são empregadas apenas em regiões específicas de interesse, enquanto que, nas demais, uma teoria de camada simples é adotada.

Para melhor compreensão do exposto, apresenta-se a Figura 3.1, que representa as diversas alternativas teóricas para a análise de placas compostas laminadas.

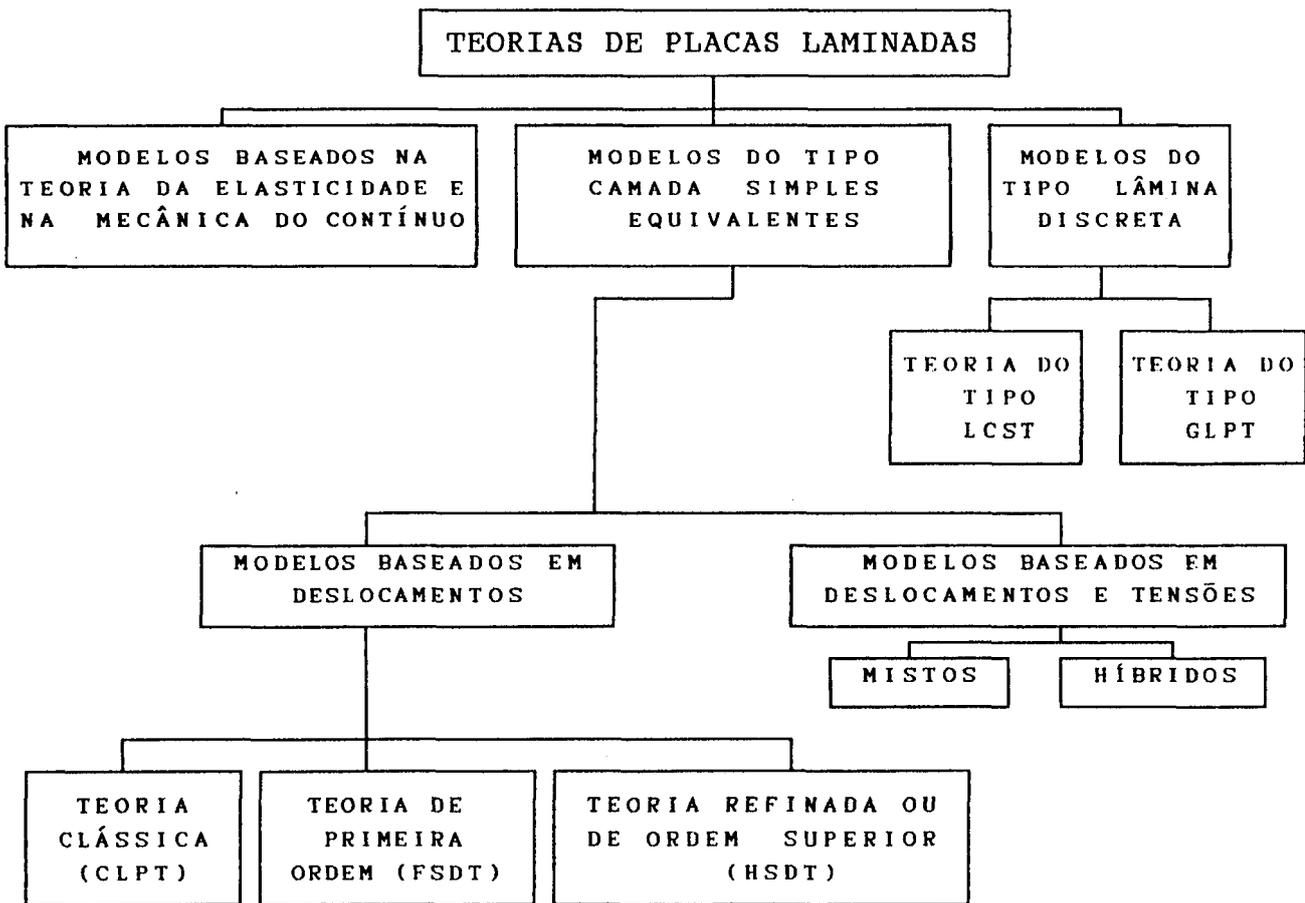


Figura 3.1. Teorias de Placas Laminadas

### 3.3. MÉTODOS DE SOLUÇÃO PARA PLACAS LAMINADAS.

As soluções para placas laminadas podem ser classificadas em dois grupos distintos:

- a) Soluções Analíticas; e
- b) Soluções Aproximadas.

No primeiro grupo, estão reunidas as soluções obtidas a partir da Teoria da Elasticidade, ou das Teorias de Placas Laminadas, median-

te técnicas que se baseiem em expansões em séries, ou por combinações entre elas. São, em geral, soluções particulares, que servem como referência para aferição de novos métodos.

No grupo de soluções aproximadas, reúnem-se todas aquelas obtidas por meio de métodos numéricos, tais como o Método dos Elementos Finitos, dos Elementos de Contorno, e, mais recentemente, do Método Modificado da Função de Green Local.

Para que se tenha uma visão atualizada de como as placas laminadas são resolvidas, será feito, a seguir, um breve apanhado das soluções encontradas na literatura, de acordo com a classificação acima indicada, e empregando as teorias mencionadas no item anterior.

### 3.3.1. Soluções Analíticas.

O número de equações governantes em uma placa laminada é, em geral, excessivamente alto para que se determinem soluções analíticas com facilidade. É por este motivo que poucas são as soluções analíticas encontradas para laminados.

Alguns trabalhos merecem destaque. Os mais importantes, por terem representado uma nova abordagem para placas laminadas, foram, certamente, os de Pagano [1969; 1970a,b; 1978a,b], Pagano, Patterson & Wang [1971], Pagano & Hatfield [1972] e Whitney & Pagano [1971] que apresentaram soluções do problema - muito particular, de placas retangulares, simplesmente apoiadas, com várias distribuições de lâminas ao longo da espessura, e considerando carregamento uniforme ou senoidal.

Reddy [1984a] apresenta também soluções em séries para placas laminadas simétricas, e em [1984b], para o caso de cascas laminadas medianamente espessas, com dupla curvatura e simplesmente apoiadas, para diversas condições de carregamentos.

Uma técnica interessante é a que emprega um conceito de "estado-espaço" para obter solução analítica do tipo Lévy, como a desenvolvida por Reddy, Khdeir & Librescu [1987a]. Este tipo de solução, desde que se considere dois bordos opostos simplesmente apoiados, transforma o problema bi-dimensional num uni-dimensional simplificado e equivalente. Assim, foram tratados os casos de placas retangulares simétricas, com dois bordos opostos apoiados e os outros dois quaisquer, ou seja, apoiados, engastados ou livres, supondo a distribuição dos deslocamentos como na Teoria de Primeira Ordem.

Em seguida, Khdeir, Reddy & Librescu [1987b] aplicaram este processo para o caso de placas retangulares simétricas analisadas pela Teoria de Ordem Superior. Khdeir & Reddy [1988] estenderam esta técnica à análise dinâmica de placas anti-simétricas. Pouco depois, Khdeir [1988, 1989] fez o mesmo para problemas de vibrações livres e flambagem de placas. Inúmeros resultados estão incluídos nestes trabalhos para servirem de "bench-mark".

Recentemente, Noor & Burton [1990a] apresentaram soluções tridimensionais para placas laminadas anisotrópicas e anti-simétricas, expandindo as variáveis (deslocamentos, rotações e tensões) em termos de séries duplas de Fourier. Embora não tenham tabulado resultados para que servissem de comparação, Noor & Burton apresentaram uma série de gráficos, a partir dos quais podem ser colhidas importantes conclusões. Uma delas diz respeito à Energia de Deformação dos termos cisalhantes transversais que, confirmando Whitney & Pagano [1971], sofre grande incremento com os aumentos do ângulo de orientação das fibras, da relação espessura/comprimento, do número de lâminas, e do grau de ortotropia de cada lâmina. Essa energia cresce bastante ao se passar de duas para quatro lâminas, tendo um aumento bem menor quando esse número ultrapassa dez camadas.

### 3.3.2. Soluções Aproximadas.

Dada a grande limitação das soluções por séries, que se restringem a uns poucos casos particulares, a alternativa mais viável, em termos práticos, é utilizar um método numérico aproximado, que permita a discretização de domínios quaisquer, para condições arbitrárias de contorno e de carregamento, sem necessidade de alterar sua formulação.

#### 3.3.2.1. O Método dos Elementos Finitos.

Dentre os existentes, o Método dos Elementos Finitos é, indiscutivelmente, o mais utilizado e o que maior atenção tem merecido por parte dos pesquisadores. Consagrado em outros campos da Mecânica do Contínuo, o MEF tem sido empregado em placas laminadas compostas em todas as teorias anteriormente mencionadas.

Para melhor avaliar as diversas aplicações do Método dos Elementos Finitos em laminados, é oportuna uma outra diferenciação. Usualmente, elementos finitos de flexão de placas são desenvolvidos através de um dos seguintes modelos [Reddy (1986)] :

- a) Modelos de Deslocamentos;
- b) Modelos de Equilíbrio; e
- c) Modelos Mistos.

Nos primeiros, utiliza-se uma formulação variacional que se baseia no Princípio dos Deslocamentos Virtuais ou da Energia Potencial Total Estacionária. Admite-se que as relações cinemáticas de deformações-deslocamentos e de condições de contorno geométricas são satisfeitas exatamente pelo campo de deslocamentos adotado. Porém, as equações de equilíbrio e as condições de contorno de esforços são determinadas a partir das expressões de Euler. Desse modo, os deslocamentos são avaliados precisamente em cada ponto, mas as tensões têm precisão apenas "na média".

Nos modelos de equilíbrio, empregam-se formulações baseadas no Princípio das Forças Virtuais ou da Energia Complementar. Inversamente ao caso anterior, as tensões são localmente bem determinadas mas a precisão dos deslocamentos é apenas "na média".

Os modelos mistos baseiam-se em princípios variacionais mistos, tais como Hu, Washizu e Reissner. Podem ser encontradas na literatura diversas definições para estes modelos. Reddy [1986] os classifica conforme o tratamento dado entre as variáveis de deslocamentos ("primais") e as de força ("duais"). Quando dois conjuntos de variáveis, primal e dual, são interpolados independentemente no interior e no contorno do elemento, considera-se que o modelo seja "Híbrido". Caso contrário, se as variáveis forem interpoladas no interior do elemento e seus valores no contorno aproximados por interpolações específicas de contorno, então o modelo será considerado simplesmente "Misto". Reddy [1986] e Spilker [1980, 1982, 1984, 1986] apresentam, de modo didático, respectivamente, as formulações mistas e híbridas aplicadas a placas laminadas. A equivalência entre os modelos mistos e os de deslocamentos usando integração reduzida é discutida por Shimodaira [1985].

Existem inúmeros trabalhos sobre placas laminadas empregando-se o Método dos Elementos Finitos. Seria impraticável querer catalogá-los numa única revisão como a que agora se apresenta. Reddy [1989a] e Noor & Burton [1989a] registraram, em publicações paralelas, grande quantidade de referências, mas mesmo assim não esgotaram completamente o assunto. Pretende-se, portanto, indicar apenas alguns dos artigos mais destacados em cada área, o que resulta numa relação apreciável.

Relacionando os trabalhos baseados em modelos de deslocamentos, considera-se, inicialmente, aqueles que utilizam a Teoria de Primeira Ordem (FSDT). É o caso do artigo de Pryor & Barker [1971], que desenvolveram um elemento quadrangular de 20 graus de liberdade por nó. Lakshminarayana & Murthy [1984], utilizando expansões lineares dos

deslocamentos, desenvolveram elementos finitos triangulares de três nós, denominados por TRIPLT, com ótimos resultados, mas com comportamento rígido para o caso de placa muito fina, unidirecional e altamente anisotrópica.

Teorias de ordem superior foram empregadas por Owen e colegas [1987], bem como por Kwon e Akin [1987], que implementaram um elemento quadrangular isoparamétrico de quatro nós, utilizando um campo linear para deslocamentos no plano da placa e quadrático para os deslocamentos transversais. Nessa proposta, admitia-se que as deformações transversais fossem também distribuídas parabolicamente. Dessa forma, não se utilizaram fatores de correção de cisalhamento.

Pandya e Kant [1988] desenvolveram um elemento retangular lagrangeano quadrático de 9 nós, para análise de placas ortotrópicas. Utilizaram, para tanto, uma expansão polinomial de terceira ordem para os deslocamentos no plano da placa e de segunda ordem para os transversais. De maneira análoga, Kant e Pandya [1988] propuseram uma teoria de ordem superior para placas laminadas não-simétricas, utilizando os mesmos elementos lagrangeanos de 9 nós, numa formulação do tipo  $\mathcal{E}^0$ . As tensões inter-laminares foram calculadas por integração das equações de equilíbrio tri-dimensionais da elasticidade. Mallikarjuna & Kant [1988, 1989] basearam-se na formulação citada para determinar vibrações livres em placas laminadas. A mesma técnica foi posteriormente empregada na análise dinâmica transiente [Kant, Varaiya e Arora (1990)].

Uma série de artigos envolvendo o desenvolvimento de elementos triangulares sugere ser esta alternativa ainda muito atual. Lardeur e Batoz [1989] apresentaram a formulação de elemento de três nós, com três graus de liberdade cada, denominado DST (Discrete Shear Triangle). O elemento proposto era livre do "locking" de cisalhamento e, quando se desconsideravam os efeitos transversais cisalhantes, recaia no tradicional elemento DKT (Discrete Kirchhoff Triangle). Dasgupta & Sengupta [1990] também adotaram elemento triangular de

ordem superior.

Surana & Sorem [1990] empregaram técnicas adaptativas p-hierárquicas para otimizar as soluções ao longo da espessura do laminado, através de elementos finitos quadrangulares de cascas. Recentemente, Babuška, Szabó e Actis [1992] utilizaram modelos hierárquicos para análise de laminados, mostrando uma convergência da solução em relação à obtida pela Elasticidade.

Rabelo [1992] utilizou elementos finitos sólidos para a análise de placas ortotrópicas laminadas espessas. Tais elementos foram implementados considerando aproximações quadráticas ou cúbicas das variáveis envolvidas no plano da placa, e lineares, quadráticas ou cúbicas daquelas relacionadas com a espessura. Embora tenha obtido bons resultados, os custos computacionais foram excessivos.

Modelos mistos, cujo tratamento formal pode ser encontrado no artigo de Brezzi, Bathe & Fortin [1989], foram adotados nos trabalhos de Lee & Pian [1978], e Lee & Wong [1982], que desenvolveram elementos de oito nós. Bachrach & Hansens [1988] usaram esta técnica para análise de impacto em cilindros compostos. Reddy & Sandidge [1987] desenvolveram elementos quadrangulares utilizando esta formulação, que também é apresentada em Reddy [1986] e Putcha & Reddy [1986]. Golpasamy e colegas [1989] empregaram elementos mistos para o caso de flexão de placas anisotrópicas engastadas. Noel & Barcellos [1991] adotaram formulação mista, baseada no Princípio de Hellinger-Reissner modificado, para análise de cascas multi-laminadas de dupla curvatura.

Após o trabalho pioneiro de Mau, Tong & Pian [1972], elementos híbridos têm sido utilizados com frequência em laminados. Spilker empregou esta formulação no desenvolvimento de elemento quadrangular isoparamétrico de oito nós [1980, 1982, 1984]. Spilker & Engelmann [1986] e Spilker & Jakobs [1986] aplicaram esta técnica em placas finas e moderadamente espessas. Liou & Sun [1987] implementaram um elemento híbrido isoparamétrico tri-dimensional. Jing & Liao [1989]

adotaram uma formulação parcialmente híbrida para análise de placas espessas.

Exemplos de análises tri-dimensionais podem ser encontrados nos trabalhos de Lee [1982] e Hwang & Sun [1989] que estudaram o colapso de laminados por meio de processos iterativos. Liou & Sun [1987] desenvolveram elemento tri-dimensional híbrido.

Teorias do tipo Lâmina foram adotadas nos trabalhos de Chaudhuri & Seide [1987] e Seide & Chaudhuri [1987], que desenvolveram elemento triangular de seis nós por interface para estudo de placas e cascas espessas multi-laminadas.

Di Sciuva [1986] usou um modelo do tipo "zig-zag" associado a um campo de deslocamentos da Teoria de Primeira Ordem para desenvolver elementos triangulares de três ou seis nós, e elementos quadrangulares de quatro ou oito nós. Essa solução é estendida, posteriormente, ao caso de cascas [Di Sciuva (1987)]. Processo semelhante já havia sido utilizado por Epstein & Huttelmaier [1983].

Reddy, Barbero & Teply [1989] implementaram elemento de placa, cujo tratamento é baseado na teoria de lâmina discreta do tipo GLPT. O mesmo foi feito também para a análise de cascas [Barbero, Reddy & Teply (1988, 1990)]. Liao & Reddy [1989, 1990] usaram esta teoria para análise de cascas laminadas com enrijecedores.

### 3.3.2.2. O Método dos Elementos de Contorno.

O Método dos Elementos de Contorno, conforme já mencionado no Capítulo 1, desde que se tenha uma solução fundamental apropriada, é uma ótima alternativa de análise, uma vez que, ao trabalhar com um sistema de equações integrais resultante de uma discretização apenas no contorno, reduz em uma unidade a dimensão do problema. Com isso, trabalha-se com menor volume de dados, diminui-se o tamanho das matri-

zes, e reduzem-se os gastos computacionais com o armazenamento e manipulação dessas matrizes. A primeira dificuldade reside na determinação de uma "solução fundamental" para o problema que se está analisando. Outra dificuldade consiste no fato de que estas soluções envolvem integrais singulares tratamento computacional mais complicado.

Em problemas que envolvem meios não homogêneos, como é o caso de placas laminadas, ainda não se dispõe de soluções fundamentais apropriadas. Esta é, provavelmente, a razão pela qual encontram-se tão poucos artigos de placas compostas laminadas analisadas pelo Método dos Elementos de Contorno.

Soluções de placas homogêneas pelo MEC baseadas no modelo de Mindlin, podem ser encontradas, entre outros, nos trabalhos de Silva [1988]; Westphal Jr. & Barcellos [1990]; Barcellos & Westphal Jr. [1992]; e Karam [1986]. Van der Weeën [1982a,b] apresentou soluções decorrentes do modelo de Reissner. Akher & Hartley [1989] mostraram uma revisão do estudo de flexão de placas pelos métodos integrais. Katsikadelis & Armenakas [1989] sugeriram uma nova formulação de contorno para o problema de placa.

Shi & Benzine [1988, 1989] utilizaram o Método dos Elementos de Contorno para análise estática em placas anisotrópicas, e de vibrações livres em placas ortotrópicas. Entretanto, não estenderam seus estudos ao caso de placas laminadas.

### 3.3.2.3. O Método Modificado da Função de Green Local.

Como o MMFGL é um novo método integral capaz de gerar automaticamente uma solução fundamental para o problema, mesmo onde ainda não se conheça uma explicitamente, a sua aplicação ao caso de placas ortotrópicas laminadas se revela como uma real opção ao Método dos Elementos Finitos, uma vez que é este o método mais utilizado na área. Esse fato é reforçado pelas propriedades que o método apresenta, tais

como, facilidade de discretização, alta precisão de resultados mesmo com malha grosseira, e elevada taxa de convergência.

A primeira investigação do MMFGL ao caso de placas ortotrópicas laminadas foi feita por Machado e Barcellos [1992], que se basearam num modelo de camada simples de deslocamentos, usando a Teoria de Primeira Ordem (FSDT). No domínio, foram empregados elementos lagrangeanos quadráticos de 9 pontos nodais, enquanto que no contorno foram adotados elementos de 3 nós. Os resultados, tanto de deslocamentos quanto de tensões, confirmaram as propriedades esperadas do MMFGL.

Posteriormente, Machado et alli. [1992] implementaram uma teoria de ordem superior para a análise de laminados não-simétricos que incorporava automaticamente as condições de tensões nulas nos bordos livres da placa. Mais uma vez, o MMFGL mostrou-se eficiente e apropriado para resolver o problema de placas laminadas.

O presente trabalho procura mostrar, de um modo mais completo, o desenvolvimento e a aplicação do Método Modificado da Função de Green Local ao caso de placas ortotrópicas laminadas.

#### 3.4. TEORIAS DE CAMADAS SIMPLES POR MODELOS DE DESLOCAMENTOS.

As Teorias de Camada Simples implementadas em modelos de deslocamentos constituem a alternativa mais econômica para a análise de placas laminadas. Possuem a restrição de não representarem perfeitamente as tensões interlaminares, que são fundamentais nas estruturas laminadas. Porém, para contornar tal inconveniente, exigem um cálculo adicional baseado nas equações de equilíbrio da elasticidade 3-D. Dada a natureza de sua formulação, são muito apropriadas quando o interesse reside apenas na identificação do comportamento global do laminado, como deslocamentos, tensões normais, frequências naturais ou cargas de flambagem. Mas, quando os efeitos locais são de importância, não são

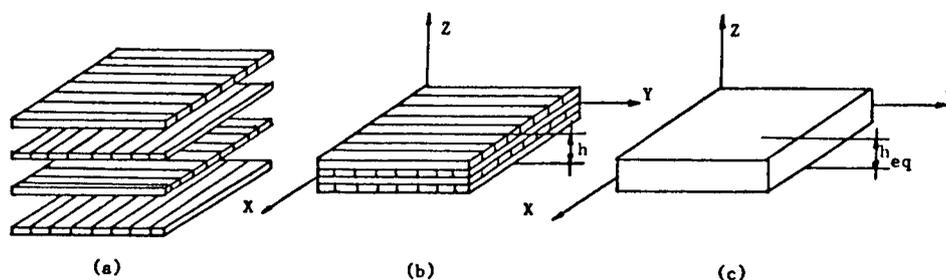


Figura 3.2. Modelo de Camada Simples para placa laminada:  
 (a) Lâminas individuais que formam o laminado; (b) Placa laminada de espessura  $h$ ; (c) Placa homogênea anisotrópica com propriedades globais equivalentes e espessura  $h_{eq} = h$ .

tão aconselháveis como os métodos baseados em Teorias Tri-Dimensionais ou em modelos de lâmina discreta.

Uma placa laminada é tratada pelas teorias baseadas em modelos de deslocamentos como se fosse homogênea, feita com uma camada única de mesma espessura que o laminado total. A placa assim idealizada tem propriedades mecânicas globais (rigidez à flexão, ao cisalhamento e aos efeitos de membrana, por exemplo) equivalentes ao modelo original, mas o comportamento é anisotrópico. Daí decorre a denominação de "Teoria de Camada Simples" utilizada por alguns pesquisadores [Reddy (1989)]. A Figura 3.2 ilustra a equivalência entre uma placa laminada (b) constituída de  $n$  lâminas individuais (a) e o modelo de camada simples (c).

### 3.4.1. Conceitos e Convenções Adotadas.

Ao longo deste capítulo serão observados os seguintes aspectos:

- a) A placa é uma estrutura sólida tri-dimensional, cujo volume ocupado pode ser representado por  $V = \mathbb{R}^2 \times (-\frac{h}{2}, \frac{h}{2})$ , onde  $h$  é a espessura. O plano médio de referência ocupa um domínio aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , situado arbitrariamente no plano X-Y do sistema de coordenadas cartesianas XYZ. O contorno dessa superfície média,  $\partial\Omega$ , é uma curva plana, fechada, localmente lipshitziana [Oden & Reddy (1976)], de tal forma que  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  (Figura 3.3).

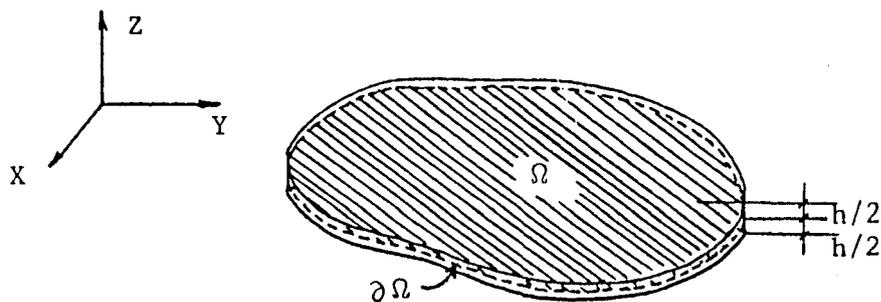


Figura 3.3. Definição do domínio  $\Omega$  e do contorno  $\partial\Omega$ .

- b) Admite-se que o comportamento global da placa possa ser determinado a partir do seu plano médio  $\Omega$ , simplificando, assim, uma análise que rigorosamente seria 3-D, para o caso 2-D.
- c) Deslocamentos nas direções dos eixos de referência XYZ serão indicados por  $u$ ,  $v$  e  $w$ . Genericamente, estão englobados no vetor  $u$ , cujas componentes  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , correspondem respectivamente a  $u$ ,  $v$  e  $w$ .
- d) As rotações da normal em relação aos eixos X, Y serão representadas por  $\theta_x$  e  $\theta_y$ .
- e) A convenção de sinais adotada para os esforços solicitantes (momentos, cortantes e esforços normais) está indicada na Figura 3.4.

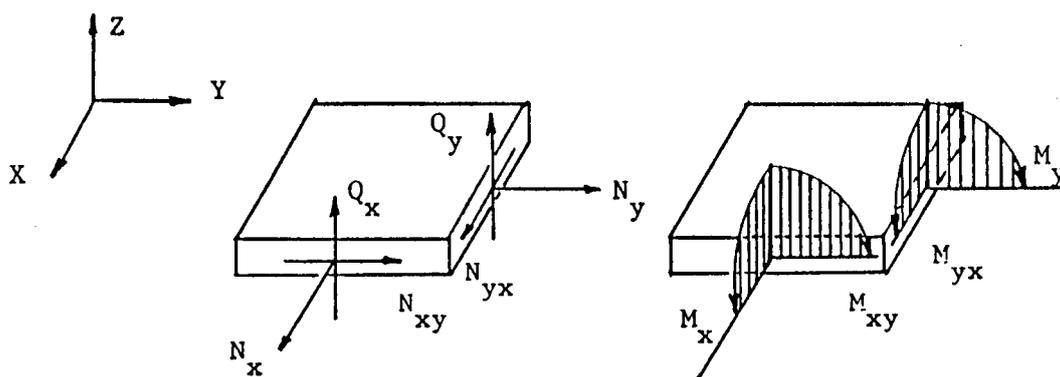


Figura 3.4. Convenções adotadas para os esforços na placa

f) Quanto às tensões e deformações, observar-se-á a equivalência entre as seguintes notações, o que permitirá adotar, indistintamente, a mais conveniente em cada momento, desde que não haja possibilidade de confusão. Se houver, será feita a devida ressalva.

Considerando que  $\sigma$  e  $\epsilon$  são os vetores com as seis componentes independentes dos tensores de tensões  $[\sigma]$  e de deformações  $[\epsilon]$ , respectivamente, então a convenção é:

$$\begin{aligned}\sigma^t &= \{ \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy} \} = \\ &= \{ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6 \} = \\ &= \{ \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12} \} \quad (3.1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon^t &= \{ \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \epsilon_{yz}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{xy} \} = \\ &= \{ \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_6 \} = \\ &= \{ \epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_{23}, \epsilon_{13}, \epsilon_{12} \} \quad (3.2)\end{aligned}$$

onde para  $i \neq j$ ,  $\epsilon_{ij} = 1/2 \gamma_{ij}$ , sendo  $\gamma_{ij}$  a distorção angular entre dois segmentos retilíneos ortogonais nas direções  $i$  e  $j$ .

#### 3.4.2. Hipóteses Básicas.

Os modelos de deslocamentos empregados numa análise linear onde sejam considerados pequenos os deslocamentos e as deformações, estão baseados nos seguintes princípios:

- a) Um laminado é constituído por um número arbitrário de lâminas de orientações quaisquer. A adesão entre as lâminas é perfeita, não havendo escorregamento relativo entre as mesmas.
- b) Os eixos principais de simetria do material de cada lâmina não precisam coincidir com os eixos de referência adotados, podendo entre eles formar um ângulo genérico  $\alpha$ .
- c) As películas adesivas são extremamente finas, de modo a não permitir o surgimento de deformações cisalhantes ao longo da sua espessura. Desse modo, seu efeito pode ser desconsiderado.
- d) Admite-se a hipótese de pequenos deslocamentos. Quando comparados com a espessura da placa,  $h$ , os deslocamentos na superfície de referência  $u$ ,  $v$  e  $w$  são muito pequenos, bem como as rotações.
- e) Os deslocamentos ao longo do contorno, quando existirem, são contínuos e não produzem deslizamento relativo entre as lâminas.
- f) Cada lâmina obedece à Lei de Hooke.
- g) Não existem tensões cisalhantes  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{yz}$  nas superfícies livres da placa, quando  $z = \pm h/2$ .

Adicionalmente, são ainda consideradas as seguintes hipóteses, conforme a teoria:

#### 3.4.2.1. Teoria Clássica de Placas Laminadas (CLPT)

- h) Considera-se somente o caso de placa fina, isto é, quando for alto o valor da relação  $l_{\min}/h$ , onde  $l_{\min}$  é a menor dimensão no plano XY e  $h$  é a espessura da placa. Alguns autores

consideram que a placa é fina quando  $l_{\min}/h \geq 20$ .

- i) É válida a Hipótese de Kirchhoff: as normais à superfície média permanecem retas e normais após a deformação. Isto corresponde a se desprezarem as deformações  $\epsilon_{xz}$ ,  $\epsilon_{yz}$ , e  $\epsilon_{zz}$ . Significa, também, admitir que os deslocamentos dependem fundamentalmente dos efeitos de flexão, desprezando-se os de cisalhamento.
- j) As tensões normais  $\sigma_z$  são pequenas quando comparadas com as outras componentes de tensões, sendo assim desprezadas.

#### 3.4.2.2. - Teoria de Primeira Ordem (FSDT)

- k) Admite-se tanto o caso de placa fina quanto espessa.
- l) As deformações  $\epsilon_{xz}$  e  $\epsilon_{yz}$  não são mais desconsideradas.
- m) O efeito do cisalhamento deve ser corrigido por meio de coeficientes apropriados para levar em conta a distribuição não uniforme das tensões cisalhantes ao longo da seção transversal. No modelo de Mindlin [1951], assume-se o valor de  $\pi^2/12$ . Reissner [1947] propõe 5/6. Noor & Burton [1990] apresentam um procedimento automático para determinação de tais coeficientes.

#### 3.4.2.3. - Teorias de Ordem Superior (HSDT)

- n) São válidas as hipóteses k a m da teoria anterior.
- o) Eventualmente, os coeficientes de correção do cisalhamento podem estar incorporados à própria formulação, dispensando a sua adoção.

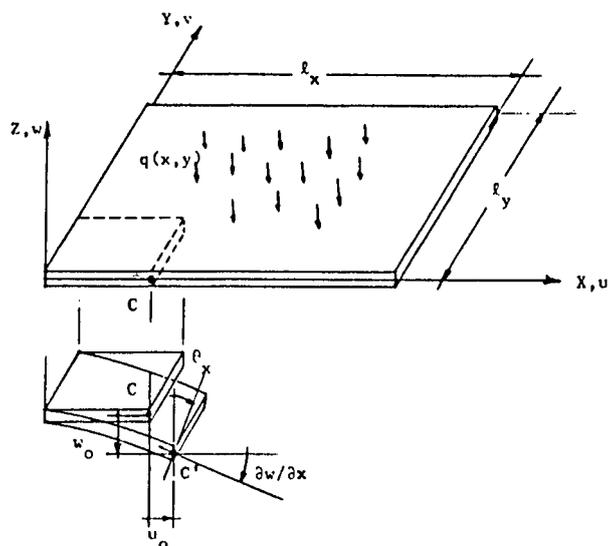


Figura 3.5. Deformação de uma placa: variáveis envolvidas.

### 3.4.3. Expansões Polinomiais dos Deslocamentos.

O campo de deslocamentos necessário para representar as deformações numa placa como na Figura 3.5, é expandido através de combinações lineares entre a coordenada  $z$  ao longo da espessura e funções desconhecidas (em geral, deslocamentos e rotações) no plano de referência. Os polinômios assim formados podem ser lineares, quadráticos, cúbicos, etc, conforme a teoria empregada.

O campo de deslocamentos pode, em sua forma geral, ser expresso como:

$$u_i(x, y, z) = u_i^{\circ}(x, y) + \sum_{j=1}^p z^j \vartheta_i^{(j)}(x, y) \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.3)$$

onde

- $u_i(x, y, z)$  - deslocamento na direção  $\underline{i}$  do ponto de coordenadas  $(x, y, z)$ .
- $u_i^{\circ}(x, y)$  - deslocamento na direção  $\underline{i}$  do ponto de coordenadas  $(x, y, z_0)$ , onde  $z_0$  corresponde à superfície de referência.
- $z$  - coordenada ao longo da espessura do laminado.
- $p$  - grau do polinômio adotado
- $\vartheta_i^{(j)}(x, y)$  - funções indeterminadas associadas aos graus  $j = 1, 2, \dots, p$ , calculadas no ponto de coordenadas  $(x, y, z_0)$  sobre o plano de referência e utilizadas no polinômio que determina o deslocamento na direção  $\underline{i}$ .

A Tabela 3.1 apresenta as funções  $\vartheta_i$  para algumas das teorias de placas laminadas. Por meio dessa tabela, observa-se que as teorias CLPT e FSDT tem expansões de deslocamentos equivalentes, desde que  $\theta_x = \partial w / \partial x$  e  $\theta_y = \partial w / \partial y$ . A teoria refinada proposta por Reddy [1984a] engloba as duas anteriores conforme a escolha dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$ , e  $\gamma$ . Se  $\alpha = -1$  e  $\beta = \gamma = 0$ , resulta na Teoria Clássica. Por outro lado, se  $\alpha = \gamma = 0$  e  $\beta = 1$ , obtém-se a Teoria de Primeira Ordem. Para a Teoria Refinada, Reddy propõe que  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \gamma = 1$ .

Constata-se, ainda, que o número de incógnitas em cada teoria é igual aos três deslocamentos no plano de referência  $u^{\circ}$ ,  $v^{\circ}$  e  $w^{\circ}$ , mais as funções  $\vartheta_i^{(j)}$  expressas em (3.3). Assim, como se vê na Tabela 3.1, os modelos CLPT e FSDT possuem cinco incógnitas. Pela teoria proposta por Lo, Christensen & Wu [1977], o número de funções desconhecidas sobe para onze. O modelo de Reddy [1984a], mesmo sendo de ordem cúbica, é constituído por apenas cinco incógnitas, o que implicaria num esforço computacional equivalente à FSDT, não fosse a existência

de derivadas de  $w$  na expansão, o que exige a utilização dos ineficientes elementos  $\mathcal{E}^1$ .

TABELA 3.1 - Valores das funções  $\vartheta_i$  em (3.3)

TEORIA	$u_i$	$\vartheta_i^{(1)}(x,y)$	$\vartheta_i^{(2)}(x,y)$	$\vartheta_i^{(3)}(x,y)$
1. CLPT	$u$	$\partial w / \partial x$	-	-
	$v$	$\partial w / \partial y$	-	-
	$w$	-	-	-
2. FSDT	$u$	$\theta_x$	-	-
	$v$	$\theta_y$	-	-
	$w$	-	-	-
3. HSDT (LCW)	$u$	$\theta_x$	$\xi_x$	$\rho_x$
	$v$	$\theta_y$	$\xi_y$	$\rho_y$
	$w$	$\theta_z$	$\xi_z$	
4. HSDT (Reddy)	$u$	$-\alpha \frac{\partial w}{\partial x} + \beta \theta_x$	-	$\frac{-4\gamma}{3h^3} (\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x})$
	$v$	$-\alpha \frac{\partial w}{\partial y} + \beta \theta_y$	-	$\frac{-4\gamma}{3h^3} (\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y})$
	$w$	-	-	-

Observações: 1)  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  são as rotações da normal em relação aos eixos X, Y e Z; 2)  $\xi_x, \xi_y, \xi_z, \rho_x, \rho_y, \rho_z$  são funções indeterminadas; 3)  $\alpha, \beta, \gamma$  são parâmetros pré-definidos; 4) LCW - Teoria de Lo, Christensen & Wu [1977]

### 3.5. PROPRIEDADES DE UMA LÂMINA.

#### 3.5.1. Relações Constitutivas Num Sistema de Referências Local.

Uma das hipóteses básicas expressas em 3.4.2., item f, é a que especifica o comportamento individual de cada lâmina, que deve obedecer a Lei de Hooke. A Lei de Hooke Generalizada estabelece uma relação entre tensões e deformações que, em notação indicial, vale

$$\sigma_{ij} = \mathcal{E}_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (3.4)$$

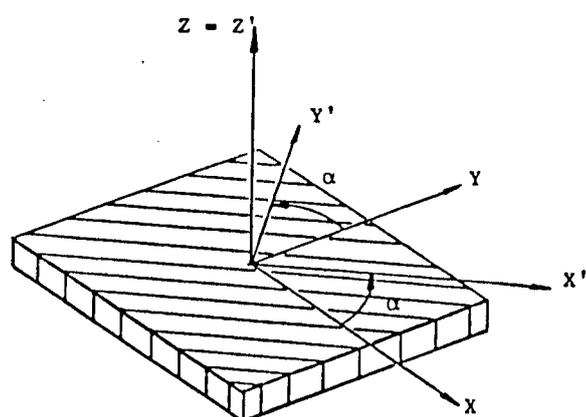
onde  $\sigma_{ij}$  - são os componentes do tensor de tensões de Cauchy  $[\sigma]$ ;  
 $\epsilon_{kl}$  - são os componentes do tensor de deformações infinitesimais  $[\epsilon]$ ;  
 $\mathcal{E}_{ijkl}$  - são os parâmetros do material, que definem a matriz de rigidez das propriedades elásticas.

Considerando apenas os seis termos independentes dos tensores  $[\sigma]$  e  $[\epsilon]$  e a convenção indicada em (3.1) e (3.2), a equação (3.4) pode ser re-escrita em termos matriciais como:

$$\sigma' = C' \epsilon' \quad (3.5)$$

onde  $\sigma'$ ,  $\epsilon'$  e  $C'$  são os vetores de tensões, de deformações e a matriz de rigidez do material, com relação a um sistema de referências local genérico X'Y'Z' (Figura 3.6). Em geral, o sistema X'Y'Z' coincide com as direções de orientação das fibras de cada lâmina, enquanto que XYZ corresponde a um sistema de coordenadas global. Os dois sistemas podem formar entre si um ângulo  $\alpha$  qualquer.

As relações constitutivas de uma lâmina são determinadas em relação ao sistema local X'Y'Z'. Como cada lâmina pode ter um sistema diferente dos demais, as propriedades do laminado, como um todo, devem ser fornecidas em relação ao sistema global, exigindo, para tanto, uma transformação de cada sistema local para o global, como será visto



X Y Z - Sistema Global  
de Coordenadas  
X'Y'Z' - Sistema Local  
de Coordenadas

Figura 3.6. Sistemas de Referências Local e Global

adiante.

É interessante observar que a matriz  $\mathcal{C}$  em (3.4) possui, no caso mais geral, 81 termos independentes mas, considerando-se a simetria entre  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  e  $\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk}$ , é válida a permutação de índices

$$\mathcal{C}_{ijkl} = \mathcal{C}_{jikl} \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_{ijkl} = \mathcal{C}_{ijlk} \quad (3.6)$$

e o número de parâmetros da matriz  $C'$  em (3.5) fica reduzido a 36. Como, para materiais anisotrópicos, a matrix  $C'$  é simétrica, apenas 21 constantes são necessárias para defini-la completamente. Se houver um plano de simetria elástica, bastam 13 parâmetros para a definição de  $C'$ .

Em laminados, é muito comum a utilização de materiais ortotrópicos que apresentam três planos de simetria elástica mutuamente ortogonais. Nestes casos, somente 9 constantes elásticas são necessárias para definir completamente a matriz de rigidez  $C'$ . Se, além disso, as propriedades em um dos planos são as mesmas em todas as direções, o material é denominado "transversalmente isotrópico" e, neste caso, bastam 5 constantes elásticas para que a matriz  $C'$  fique estabelecida. Os materiais isotrópicos são um caso particular deste, pois suas propriedades são invariantes em qualquer sistema de referências e em qualquer direção, sendo suficientes apenas duas constantes elásticas para que se conheça a matriz  $C'$ .

Os parâmetros elásticos para a determinação da matriz  $C'$  são:

$E_1, E_2, E_3$  - módulos de Young (elasticidade) nas direções 1, 2 e 3 (X,Y,Z) respectivamente.

$G_{12}, G_{23}, G_{13}$  - módulos de cisalhamento nos planos 1-2 (X-Y), 2-3 (Y-Z) e 1-3 (X-Z) respectivamente.

$\nu_{ij}$  - coeficientes de Poisson decorrentes das relações entre as deformações transversais e longitudinais nas direções  $j$  e  $i$ , respectivamente, quando são aplicadas tensões na direção  $i$ .

Os coeficientes de Poisson são estabelecidos por:

$$\nu_{ij} = - \frac{\epsilon_j}{\epsilon_i} \quad \text{com } \sigma_i \neq 0 \text{ e } \sigma_j = 0, \quad i \neq j \quad (3.7)$$

Para materiais ortotrópicos, a seguinte relação também é válida:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.8)$$

Algumas simplificações ocorrem para o caso de um material transversalmente isotrópico:

$$E_3 = E_2 \quad ; \quad G_{12} = G_{13} \quad ; \quad \nu_{13} = \nu_{12} \quad (3.9)$$

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})} \quad (3.10)$$

Já para o caso de um material isotrópico, as simplificações são:

$$E_1 = E_2 = E \quad ; \quad \nu_{ij} = \nu_{ji} = \nu \quad ; \quad G_{ij} = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.11)$$

Os componentes da matriz das constantes elásticas calculados por meio de constantes de engenharia valem:

$$c'_{11} = (1 - \nu_{23}\nu_{32}) \frac{E_1}{\Delta}$$

$$c'_{12} = (\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}) \frac{E_1}{\Delta}$$

$$c'_{13} = (\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}) \frac{E_1}{\Delta}$$

$$c'_{22} = (1 - \nu_{13}\nu_{31}) \frac{E_2}{\Delta}$$

$$c'_{23} = (\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}) \frac{E_2}{\Delta}$$

$$c'_{33} = (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \frac{E_3}{\Delta}$$

$$c'_{44} = G_{23} \quad ; \quad c'_{55} = G_{31} \quad ; \quad c'_{66} = G_{12} \quad (3.12)$$

onde os termos não indicados em (3.12) são nulos e

$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} \quad (3.13)$$

É usual admitir que, ao se desprezar a tensão  $\sigma_3$ , cada lâmina de uma placa laminada esteja submetida a um estado plano de tensões. Isso é admissível quando o material é ortotrópico e a espessura da placa é constante. Separando as tensões e deformações planares (ou longitudinais) atuantes no plano X-Y, das cisalhantes transversais, as seguintes relações podem ser expressas:

a) Tensões Planares (ou longitudinais, no plano X-Y):

$$\{\sigma_L\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = [Q_L] \{\varepsilon_L\} \quad (3.14)$$

b) Tensões cisalhantes transversais:

$$\{\sigma_T\} = \begin{Bmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix} = [Q_T] \{\varepsilon_T\} \quad (3.15)$$

onde  $Q_{ij}$  são os componentes da denominada "Matriz de Rigidez Reduzida",  $Q_i$  e valem

$$Q_{ij} = c'_{ij} - \frac{c'_{i3} c'_{j3}}{c'_{33}} \quad (3.16)$$

Ou, em termos das constantes de engenharia

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{44} = G_{23} ; Q_{55} = G_{13} ; Q_{66} = G_{12} \quad (3.17)$$

### 3.5.2. Relações Constitutivas das Lâminas num Sistema de Referências Global.

Quando os sistemas local e global formarem entre si um ângulo  $\alpha$  qualquer, é necessário que as propriedades locais de uma lâmina sejam transformadas para o sistema global. Se  $\mathbb{R}$  é a matriz de rotações,  $\sigma'-\varepsilon'$  referirem-se ao sistema local  $X'Y'Z'$ , e  $\sigma-\varepsilon$  ao sistema global  $XYZ$  (Figura 3.6), então

$$\sigma = \mathbb{R}^{-1} \sigma' \quad (3.18)$$

$$\varepsilon = \mathbb{R}^{-1} \varepsilon' \quad (3.19)$$

Lembrando que, no sistema local, a relação constitutiva é dada por:

$$\sigma' = C' \varepsilon' \quad (3.20)$$

e substituindo (3.20) junto com (3.19) em (3.18) resulta

$$\sigma = \mathbb{R}^{-1} C' \mathbb{R} \varepsilon \quad (3.21)$$

Como (3.21) expressa uma relação entre tensões e deformações no sistema global de coordenadas, comparando com a Lei de Hooke em (3.5) conclui-se que:

$$C = R^{-1} C' R \quad (3.22)$$

onde  $C$  é a matriz de rigidez global da lâmina, isto é, relativa ao sistema XYZ.

Se  $m = \cos(\alpha)$  e  $n = \sin(\alpha)$ , então

$$R = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & 2mn \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -2mn \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +n & m & 0 \\ -mn & mn & 0 & 0 & 0 & (m^2 - n^2) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

A transformação representada em (3.22), para o caso de um material ortotrópico, pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} c_{11} &= c'_{11} m^4 + 2 m^2 n^2 (c'_{12} + 2c'_{66}) + c'_{22} n^4 \\ c_{12} &= m^2 n^2 (c'_{11} + c'_{22} - 4 c'_{66}) + c'_{12} (m^4 + n^4) \\ c_{13} &= c'_{13} m^2 + c'_{23} n^2 \\ c_{16} &= m n [ c'_{11} m^2 - c'_{22} n^2 - (c'_{12} + 2c'_{66}) (m^2 - n^2) ] \\ c_{22} &= c'_{11} n^4 + 2 m^2 n^2 (c'_{12} + 2 c'_{66}) + c'_{22} m^4 \\ c_{23} &= c'_{13} n^2 + c'_{23} m^2 \\ c_{26} &= m n [ c'_{11} n^2 - c'_{22} m^2 + (c'_{12} + 2 c'_{66}) (m^2 - n^2) ] \\ c_{33} &= c'_{33} \\ c_{36} &= (c'_{23} - c'_{13}) m n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{44} &= c'_{44} m^2 + c'_{55} n^2 \\
c_{45} &= (c'_{44} - c'_{55}) m n \\
c_{55} &= c'_{44} m^2 + c'_{55} n^2 \\
c_{66} &= (c'_{11} + c'_{22} - 2 c'_{12}) m^2 n^2 + c'_{66} (m^2 - n^2)^2 \\
c_{14} &= c_{15} = c_{24} = c_{25} = c_{34} = c_{35} = c_{46} = c_{56} = 0
\end{aligned} \tag{3.24}$$

### 3.6. CÁLCULO DAS TENSÕES TRANSVERSAIS NO LAMINADO.

Um modelo de camada simples, através das relações constitutivas, pode determinar precisamente as tensões planares  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , e  $\sigma_{xy}$ , mas é incapaz de fazer o mesmo com relação às tensões cisalhantes,  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{yz}$ . Isto se deve ao fato de que cada lâmina possui uma relação constitutiva própria, diferente de suas vizinhas. Assim, se tais relações forem utilizadas para o cálculo das tensões cisalhantes, resultará numa distribuição descontínua de tensões ao longo da seção, o que não corresponde à realidade.

O processo que normalmente se utiliza para contornar este inconveniente é o descrito por Pryor & Barker [1971] e Engblom & Ochoa [1985, 1986], e consiste em se determinar as tensões interlaminares através das equações de equilíbrio da Elasticidade 3-D.

De acordo com a Teoria da Elasticidade, as tensões devem obedecer à seguinte equação de equilíbrio, expressa em notação indicial:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{3.25}$$

As tensões longitudinais,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , e  $\sigma_{xy}$ , determinadas a partir das equações constitutivas, são utilizadas em (3.25), o que, desprezando-se as forças de corpo,  $f_i = 0$ , permite o cálculo das tensões transversais. Assim, usando as duas primeiras equações de (3.25) resultam

$$\begin{aligned}\sigma_{xz,z} &= - (\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y}) \\ \sigma_{yz,z} &= - (\sigma_{yx,x} + \sigma_{yy,y})\end{aligned}\quad (3.26)$$

Levando as expressões (3.26) na terceira equação de equilíbrio em (3.25), pode-se calcular as tensões  $\sigma_{zz}$ , ou seja,

$$\sigma_{zz,z} = - (\sigma_{zx,x} + \sigma_{zy,y}) \quad (3.27)$$

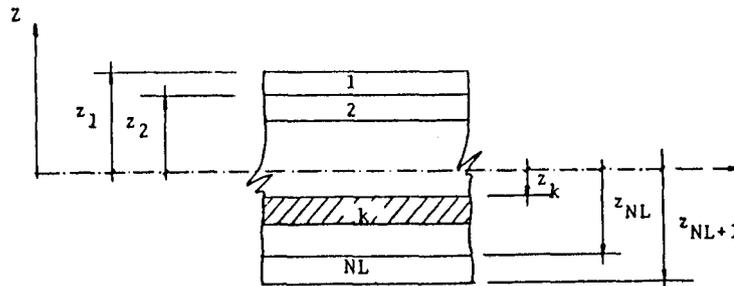


Figura 3.7. Especificação das lâminas e suas coordenadas num laminado

Seja um laminado com NL lâminas e NL+1 interfaces, conforme indicado na Figura 3.7. As tensões  $\sigma_{xz}^{(k)}$  e  $\sigma_{yz}^{(k)}$  correspondem à k-ésima interface, sendo que, para  $k = 1$ , referencia-se o bordo superior, e para  $k = NL+1$ , o bordo inferior da placa. As tensões  $\sigma_{xx}^{(k)}$ ,  $\sigma_{yy}^{(k)}$ , e  $\sigma_{xy}^{(k)}$ , bem como as suas derivadas, são calculadas na superfície média da lâmina  $\underline{k}$ .

Usando a convenção representada na figura anterior, pode-se aproximar as derivadas em (3.26) por meio de expressões finitas, como:

$$\sigma_{xz,z} \cong \Delta\sigma_{xz} / \Delta z \quad (3.28)$$

$$\sigma_{yz,z} \cong \Delta\sigma_{yz} / \Delta z$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{xz} &= \sigma_{xz}^{(k)} - \sigma_{xz}^{(k-1)} \\ \Delta\sigma_{yz} &= \sigma_{yz}^{(k)} - \sigma_{yz}^{(k-1)} \\ \Delta z &= z_k - z_{k-1} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Em (3.29),  $z_k$  é a coordenada Z do topo da lâmina  $\underline{k}$  e  $\sigma^{(k)}$  é a tensão no topo da lâmina  $\underline{k}$ .

O cálculo das tensões ao longo da normal pode ser feito de duas formas. A primeira, calculando-se as tensões lâmina a lâmina, aproveitando as condições de continuidade nas interfaces, isto é,

$$\sigma_{xz}^{(k)} \Big|_{\text{sup}} = \sigma_{xz}^{(k-1)} \Big|_{\text{inf}} \quad ; \quad \sigma_{yz}^{(k)} \Big|_{\text{sup}} = \sigma_{yz}^{(k-1)} \Big|_{\text{inf}} \quad (3.30)$$



$$A x = b \quad (3.34)$$

onde A é uma matriz bi-diagonal retangular de dimensões NLx(NL-1); x é o vetor de incógnitas, de dimensão (NL-1)x1; b é o vetor dos termos conhecidos, de dimensão (NL-1)x1; NL é o número de lâminas. Os resultados correspondem às tensões cisalhantes em (NL-1) interfaces.

Para resolver um sistema como o (3.33)≡(3.34), adota-se um procedimento de ortonormalização por mínimos quadrados, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{NL} \sum_{j=1}^{NL-1} (A_{ij} x_j - b_i)^2 = 0 \quad (3.35)$$

o que resulta num sistema de equações do tipo:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz}^1 \\ \sigma_{xz}^2 \\ \sigma_{xz}^3 \\ \vdots \\ \sigma_{xz}^{NL-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_{xz}^1 & - & I_{xz}^2 \\ I_{xz}^2 & - & I_{xz}^3 \\ I_{xz}^3 & - & I_{xz}^4 \\ \vdots & & \vdots \\ I_{xz}^{NL-1} & - & I_{xz}^{NL} \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

A solução de (3.36) fornece as tensões interlaminares através das equações de equilíbrio. Idêntico procedimento deve ser feito para a determinação das tensões  $\sigma_{yz}$ .

### 3.8. Referências Bibliográficas do Capítulo 3.

- Agarwal, B. D.; Broutman, L. J. - Analysis And Performance Of Fiber Composites. John Wiley & Sons, USA, (1980)

- Akher, A. A.; Hartley, G. A. - Evaluation of Boundary Integrals For Plate Bending. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 28, pp. 75-93, (1989)
- Bachrach, W. E.; Hansen, R. S. - Mixed Finite Element Method For Composite Cylinder Subjected to Impact. *AIAA Journal*, 27, n. 5, pp. 632-638, (1988)
- Babuška, I.; Szabó, B.A.; Actis, R.L. - Hierarchic Models For Laminated Composites. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 33, pp. 503-535, (1992)
- Barbero, E. J.; Reddy, J. N., Teppy, J. - General Two-Dimensional Theory of Laminated Cylindrical Shells. *AIAA Journal*, 28, n.3, 544-553, (1988)
- Barbero, E.J. ; Reddy, J.N.; Teppy, J. - An Accurate Determination of Stresses in Thick Laminates Using Generalized Plate Theory. *Int. J. Num Meth. Engng*, 29, 1-14, (1990)
- Barcellos, C.S.; Westphal Jr., T. - Reissner/Mindlin's Plate Models And The Boundary Element Method. *Boundary Element Technology Conference*, Ed. Brebbia, C. A., (1992)
- Beskos, D.E. - "Boundary Element Methods in Mechanics". Vol. 3 in *Computational Methods in Mechanics* (Ed. Beskos, D.E.), North-holland, (1987).
- Bhimaraddi, A.; Stevens, L. K. - A Higher Order Theory for Free Vibration of Orthotropic, Homogeneous, and Laminated Rectangular Plates. *J.Applied Mech.*, 51, 195-198, (1984)
- Biot, M. A. - A New Approach to the Mechanics of Orthotropic Multilayered Plates. *Int. J. Solids Struct.*, 8, 475-490, (1972)
- Brebbia, C.A.; Telles, J.C.F.; Wrobel, L.C. - *Boundary Element Techniques*. Springer-Verlag. (1984).
- Brezzi, F.; Bathe, K. J.; Fortin, M. - Mixed Interpolated Elements for Reissner-Mindlin Plates. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 28, 1787-1801, (1989)
- Chang, T. Y.; Saleeb, A. F.; Graf, W. - On the Mixed Formulation of 9-Node Lagrange Shell Element. *Comp. Meth. App. Mech. Engng.*, 73, 259-281, (1989)
- Chanterjee, S.; Kulkarni, S. V. - Shear Correction Factors For Laminated Plates. *AIAA Journal*, 17, 498-499, (1979).
- Chaudhuri, R. A. - An Equilibrium Method For Prediction Of Transverse Shear Stresses In a Thick Laminated Plate. *Comp. & Struct.* , 23, n.2, 139-146, (1986)

- Chaudhuri, R. A.; Seide, P. - Triangular Finite Element For Analysis of Thick Laminated Plates. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 24, 1203-1224, (1987a)
- Chaudhuri, R. A.; Seide, P. - An Approximate Method For Prediction of Transverse Shear Stresses In a Laminated Shell. *Int. J. Solids Struct.*, 23, n.8, 1145-1161, (1987b)
- Chomkwah, V.; Avula, X.J.R. - A High-Order Theory for Laminated Composite Plates Using Lagrange Multiplier Technique. *Comput. & Structures.*, Vol 37, No. 5, pp. 845-861, (1990)
- Chou, P. C.; Carleone, J. - Transverse Shear In Laminated Plate Theories. *AIAA Journal*, 11, n.9, 1333-1336, (1973)
- Dasgupta, S.; Sengupta, D. - A Higher-Order Triangular Plate Bending Element Revisited. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 30, 419-430, (1990)
- Di Sciuva, M. - Evaluation Of some Multilayered Shear Deformable Plate Elements. *Comp. & Struct.*, 24, n.6, 845-854, (1986)
- Di Sciuva, M. - An Improved Shear-Deformation Theory For Moderately Thick Multilayered Anisotropic Shells And Plates. *J. Appl. Mech.*, 54, 589-596, (1987)
- Engblom, J. J.; Ochoa, O. O. - Through The Thickness Stress Predictions For Laminated Plates Of Advanced Composite Materials. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 21, 1759-1776, (1985)
- Engblom, J. J.; Ochoa, O. O. - Finite Element Formulation Including Interlaminar Stress Calculations. *Comp. & Struct.*, 23, n.2, 241-249, (1986)
- Epstein, M.; Huttelmaier, H. P. - A Finite Element Formulation For Multilayered and Thick Plates. *Comp. & Struct.*, 16, n.5, 645-650, (1983)
- Gopalsamy, S.; Balasundaram, S.; Bhattacharyya, P. K. - On A Mixed Finite Element Method For Clamped Anisotropic Plate Bending Problems. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 28, 1351-1370, (1989)
- Hwang, W. C.; Sun, C. T. - Failure Analysis of Laminated Composites By Using Iterative Three-Dimensional Finite Element Method. *Comp. & Struct.*, 33, N. 1, pp 41-47, (1989)
- Jing, H. S.; Liao, M. L. - Partial Hybrid Stress Element For The Analysis Of Thick Laminated Composite Plates. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 28, 2813-2827, (1989)
- Jones, R. M. - *Mechanics Of Composite Material*. Mc. Graw-Hill Book Co. (1975)

- Kant, T.; Menon, M.P. - Estimation of Interlaminar Stresses in Fibre Reinforced Composite Cylindrical Shells. *Comp. & Struct.*, 38, No. 2, pp. 131-147, (1991)
- Kant, T; Pandya, B. N. - A Simple Finite Element Formulation Of Higher Order Theory For Unsymmetrically Laminated Composite Plates. *Compos. Struct.*, 9, 215-246, (1988).
- Kant, T; Varaiya, J.H.; Arora, C.P. - Finite Element Transient Analysis of Composite and Sandwich Plates Based on a Refined Theory and Implicit Time Integration Schemes. *Comp. & Struct.*, 36, No. 3, pp. 401-420 (1990)
- Karam, V.J. - Aplicação do Método dos Elementos de Contorno À Teoria de Reissner Para Flexão de Placas. Dissertação de Mestrado. COPPE. Universidade Federal do Rio de Janeiro, (1986)
- Katsikadelis, J. T.; Armenàkas, A. E. - A New Boundary Equation Solution To The Plate Problem. *Trans. of ASME*, 56, pp. 364-374, (1989)
- Khdeir, A. A. - Free Vibration And Buckling Of Symmetric Cross-Ply Laminated Plates By An Exact Method. *J. Sound & Vib.*, 126(3), 447-461, (1988)
- Khdeir, A. A. - Free Vibration And Buckling Of Unsymmetric Cross-Ply Laminated Plates Using A Refined Theory. *J. Sound & Vib.*, 128(3), 377-395, (1989)
- Khdeir, A. A.; Librescu, L.; Frederick, D. - A Shear Deformable Theory Of Laminated Composite Shallow Shell Type Panels And Their Response Analysis - II: Static Response. *Acta Mech.*, 77, 1-12, (1989)
- Khdeir, A. A.; Reddy, J. N. - Dynamic Response Of Antisymmetric Angle-Ply Laminated Plates Subjected To Arbitrary Loading. *J. Sound & Vib.*, 126(3), 437-445, (1988)
- Khdeir, A. A.; Reddy, J. N.; Librescu, L. - Analytical Solution Of A Refined Shear Deformation Theory For Rectangular Composite Plates. *Int. J. Solids Struct.*, 23, n. 10, 1447-1463, (1987)
- Kuppusamy, T.; Reddy, J.N. - A Three-Dimensional Non-Linear Analysis Of Cross-Ply Rectangular Composite Plates. *Comp. & Struct.*, 18, 263-272, (1984)
- Kwon, Y. W.; Akin, J. E. - Analysis Of Layered Composite Plates Using A Higher Order Deformation Theory. *Comp. & Struct.*, 27, n.5, 619-623, (1987)
- Lakshminarayana, H. V.; Shidhara-Murthy, S. - A Shear-Flexible Triangular Finite Element Model For Laminated Composite Plates.

Int. J. Num. Meth. Engng., 20, 591-623, (1984)

- Lardeur, P.; Batoz, J. L. - Composite Plate Analysis Using A New Discrete Shear Triangular Finite Element. Int. J. Num. Meth. Engng., 27, 343-359, (1989)
- Lee, S. W.; Pian, T. H. H. - Improvement Of Plate And Shell Finite Elements By Mixed Formulations. AIAA Journal, 16, N° 1, 29-34, (1978)
- Lee, S. W.; Wong, S. C. - Mixed Formulations Finite Elements For Mindlin Theory Plate Bending. Int. J. Num. Meth. Engng, 18, 1297-1311, (1982)
- Liao, C. L.; Reddy, J. N. - Continuum Based Stiffened Composite Shell Element For Geometrically Non-Linear Analysis. AIAA Journal, 27, n.1, 95-101, (1989)
- Liao, C. L.; Reddy, J. N. - Analysis Of Anisotropic Stiffened Composite Laminates Using A Continuum Based Shell Element. Comp. & Struct., 34, n.6, 805-815, (1990)
- Liou, W. J.; Sun, C. T. - A Three-Dimensional Hybrid Stress Isoparametric Element For The Analysis Of Laminated Composite Plates. Comp. & Struct., 25, n.2, 241-249, (1987)
- Lo, K. H.; Christensen, R. M.; Wu, E. M. - A High-Order Theory Of Plate Deformation - Part 1: Homogeneous Plates. J. Appl. Mech., 663-668, (1977a)
- Lo, K. H.; Christensen, R. M.; Wu, E. M. - A High-Order Theory Of Plate Deformation - Part 2: Laminated Plates. J. Appl. Mech., 669-676, (1977b)
- Lo, K. H.; Cristensen, R. M.; Wu, E. M. - Stress Solution Determination For High Order Plate Theory. Int. J. Solids Struct., 44, 655-662, (1978)
- Lucking, W. M.; Hoa, S. V.; Sankar, T. S. - A Boundary Collocation Method For Stress Analysis Of Laminated Edges. Comp. & Struct., 34, n 4, 655-661, (1990)
- Machado, R.D.; Barcellos, C.S. - A First Modified Local Green's Function Method Approach To Ortotropic Laminated Plates. Proc. of CADCOMP92 - Computer Aided Design for Composite Materials Conference. Ed. C.A. Brebbia. Newark. USA, (1992).
- Machado, R.D.; Barbieri, R.; Barcellos, C.S; Filippin, C.G. - O Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) Aplicado a Problemas da Mecânica do Contínuo: Parte II - Placas Ortotrópicas Laminadas. XIII CILAMCE - Cong. Ibero Latino- Americano Sobre Métodos Computacionais Para Engenharia. Porto Alegre, (1992)

- Mallikarjuna, K. T. - Dynamics Of Laminated Composite Plates With Higher Order Theory And Finite Element Discretization. J. Sound & Vib., 126(3), 463-475, (1988)
- Mallikarjuna, K. T. - Free Vibration Of Symmetrically Laminated Plates Using A Higher Order Theory With Finite Element Technique. Int. J. Num. Meth. Engng., 28, 1875-1889, (1989)
- Mau, S. T. - A Refined Laminated Plate Theory. J. App. Mech, 40, 606-607, (1973)
- Mau, S. T.; Tong, P.; Pian, T. H. H. - Finite Element Solutions For Laminated Thick Plates. J. Compos. Materials, 6, 304-311, (1972)
- Mindlin, R. D. - Influence Of Rotatory Inertia And Shear On Flexural Motions Of Isotropic, Elastic Plates. J. Appl. Mech., 31-38, (1951)
- Murakami, H. - Laminated Composite Plate Theory With Improved In Plane Responses. J. Appl. Mech., 53, 661-666, (1986)
- Naghdi, P. M. - On The Theory Of Thin Elastic Shells. Quarterly of Appl. Mathem., 14, 369-380, (1957)
- Nelson, R. B.; Lorch, D. R. - A Refined Theory Of Laminated Orthotropic Plates. J. Apl. Mech., 41, 171-183, (1984)
- Noel, A. T. - Desenvolvimento de Um Elemento Misto de Casca de Dupla Curvatura Para Análise de Materiais Multilaminados. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, (1991)
- Noel, A. T.; Barcellos, C. S. - Desenvolvimento De Um Elemento Misto De Casca De Dupla Curvatura Para Análise de Materiais Multilaminados. XI COBEM - Cong. Bras. Engen. Mecânica, pp. 117-120, SP/BRASIL. (1991)
- Noor, A. K.; Burton, W. S. - Assessment Of Shear Deformation Theories For Multilayered Composite Plates. Appl. Mech. Rev., 42, n.1, 1-12, (1989a)
- Noor, A. K.; Burton, W. S. - Stress And Free Vibration Analysis Of Multilayered Composite Plates. Composite Struct., 11, 183-204, (1989b)
- Noor, A. K.; Burton, W. S. - Three Dimensional Solutions For Antisymmetrically Laminated Anisotropic Plates. Transactions of the ASME, 57, 182-188, (1990)
- Noor, A. K.; Burton, W. S.; Peters, J. M. - Predictor-Corrector Procedures For Stress And Free Vibration Analysis Of Multilayered

Composite Plates And Shells. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 82, 341-363, (1990)

- Noor, A. K.; Mathers, M. D. - Anisotropy And Shear Deformation In Laminated Composite Plates. *AIAA Journal*, 14(2), 282-285, (1976)
- Noor, A. K.; Mathers, M. D. - Finite Element Analysis Of Anisotropic Plates. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 11(2), 289-307, (1977)
- Oden, J.T.; Reddy, J.N. - An Introduction To The Mathematical Theory of Finite Elements. John-Wiley & Sons, (1976)
- Owen, D. R. J.; Li, Z. H. - A Refined Analysis Of Laminated Plates By Finite Element Displacement Methods - I. Fundamentals And Static Analysis. *Comp. & Struct.*, 26, n.6, 907-914, (1987)
- Pagano, N. J. - Exact Solutions For Composite Laminates In Cylindrical Bending. *J. Composite Mat.*, 3, 398-411, (1969)
- Pagano, N. J. - Exact Solutions For Rectangular Bidirectional Composites And Sandwich Plates. *J. Composite Mat.*, 4, 20-34, (1970a)
- Pagano, N. J. - Influence Of Shear Coupling In Cylindrical Bending Of Anisotropic Laminates. *J. Composite Mat.*, 4, 330-343, (1970b)
- Pagano, N. J. - Stress Fields In Composite Laminates. *Int. J. Solids Struct.*, 14, 385-400, (1978a)
- Pagano, N. J. - Free Edge Stress Fields In Composite Laminates. *Int. J. Solids Struct.*, 14, 401-406, (1978b)
- Pagano, N.J.; Hatfield, S.J. - Elastic Behavior Of Multilayered Bidirectional Composites. *AIAA Journal*, 10, N° 7, 931-933, (1972)
- Pagano, N. J; Patterson, W.; Wang, A. S. D. - Further Study Of Composite Laminates Under Cylindrical Bending. *J. Composite. Mat.*, 5, 521-528, (1971)
- Pagano, N. J.; Soni, S. R. - Global-Local Laminate Variational Model. *Int. J. Solids Struct.*, 19, n.3, 207-228, (1983)
- Pandya, B. N.; Kant, Tarun - A Refined Higher-Order Generally Orthotropic C° Plate Bending Element. *Comp. & Struct*, 28, N° 2, 119-133, (1988)
- Phan, N. D.; Reddy, J. N. - Analysis Of Laminated Composite Plates Using A Higher Order Shear Deformation Theory. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 21, 2201-2219, (1985)
- Pryor Jr, C. W.; Barker, R. M. - A Finite Element Analysis Including Transverse Shear Effects For Applications To Laminated Plates.

AIAA Journal, 9(5), 912-917, (1971)

- Putcha, N. S.; Reddy, J. N. - A Refined Mixed Shear Flexible Finite Element For The Non-Linear Analysis Of Laminated Plates. *Comp. & Struct.*, 22, n.4, 529-538, (1986)
- Rabelo, J.J.E. - Análise de Placas Espessas Por Modelos de Elementos Finitos Sólidos Ortotrópicos. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina. (1992)
- Reddy, J. N.- Bending Of Laminated Anisotropic Shells By A Shear Deformable Finite Element. *Fibre Sci. Tech.*, 17, 9-24, (1982)
- Reddy, J. N. - A Simple Higher-Order Theory For Laminated Composite Plates. *J. Appl. Mech.*, 51, 745-752, (1984a)
- Reddy, J. N. - A Refined Nonlinear Theory Of Plates With Transverse Shear Deformation. *Int. J. Solids Struct.*, 20, 9/10, 881-896, (1984b)
- Reddy, J. N. - Energy And Variational Methods In Applied Mechanics. Wiley, New York, (1984c)
- Reddy, J. N. - Exact Solutions Of Moderately Thick Laminated Shells. *J. Engng. Mech.*, 110, No. 5, (1984d)
- Reddy, J. N. - On Mixed Finite-Element Formulations Of A Higher-Order Theory Of Composite Laminates. *Finite Element Methods For Plate And Shell Structures. Vol 2 - Formulations And Algorithms. Cap 2, pp 31-57, Pineridge Press, UK, (1986)*
- Reddy, J.N. - On Refined Computational Models Of Composite Laminates. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 27, 361-382, (1989a)
- Reddy, J. N. - On The Generalization Of Displacement-Based Laminate Theories. *Appl. Mech. Rev.*, 42, n. 11, Part 2, (1989b)
- Reddy, J. N.; Barbero, E. J.; Teply, J. L. - A Plate Bending Element Based On A Generalized Laminate Plate Theory. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 28, 2275-2292, (1989)
- Reddy, J. N.; Khdeir, A. A.; Librescu, L. - Lévy Type Solutions For Symmetrically Laminated Rectangular Plates Using First Order Shear Deformation Theory. *Trans. ASME*, 54, 740-742, (1987)
- Reddy, J. N.; Sandidge, D. - Mixed Finite Element Models For Laminated Composite Plates. *J. Engng. Ind.*, 109, 39-45, (1987)
- Rehfield, L. W.; Murthy, P. L. N. - Toward A New Engineering Theory Of Bending Fundamentals. *AIAA Journal*, 20, n.5, 693-699, (1982)
- Rehfield, L. W.; Valisetty, R. R. - A Comprehensive Theory For

Planar Bending Of Composite Laminates. *Comp. & Struct.*, 16, 441-447, (1983)

- Reissner, E. - The Effect Of Transverse Shear Deformation On The Bending Of Elastic Plates. *J. Appl. Mech.*, 12, 69-77, (1945)
- Reissner, E. - On A Certain Mixed Variational Theorem And A Proposed Application. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 20, 1366-1368, (1984)
- Seide, P.; Chaudhuri, R. A. - Triangular Finite Element For Analysis Of Thick Laminated Shells. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 24, 1563-1579, (1987)
- Shi, G.; Benzine, G. - A General Boundary Integral Formulation For The Anisotropic Plate Bending Problems. *J. Composite Mat.*, 22, 694-716, (1988).
- Shi, G.; Benzine, G. - The Direct Boundary Integral Equation Method For The Free Vibration Analysis Of Orthotropic Plates. *Eur. J. Mech.*, 8, n.4, 277-291, (1989)
- Shimodaira, H. - Equivalence Between Mixed Models And Displacement Models Using Reduced Integration. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 21, 89-104, (1985)
- Spilker, R. L. - A Hybrid-Stress Finite Element Formulations For Thick Multilayered Laminates. *Comp. & Struct.*, 11, 507-514, (1980)
- Spilker, R. L. - Hybrid-Stress Eight-Node Elements For Thin And Thick Multilayer Laminated Plates. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 18, 801-828, (1982)
- Spilker, R. L. - An Invariant Eight-Node Hybrid-Stress Element For Thin And Thick Multilayer Laminated Plates. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 20, 573-587, (1984)
- Spilker, R. L. - Hybrid Stress Formulations For Multilayer Isoparametric Plate Elements. *Finite Element Methods For Plate And Shell Structures. Vol 1 - Element Technology. Cap 7, pp 175-199, Pineridge Press, UK, (1986)*
- Spilker, R. L.; Chou, S. C.; Orringer, O. - Alternate Hybrid-Stress Elements For Analysis Of Multilayer Composite Plates. *J. Compos. Mat.*, 11, 51-70, (1977)
- Spilker, R. L.; Engelmann, B. E. - Hybrid Stress Isoparametric Elements For Moderately Thick And Thin Multilayer Plates. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 56, 339-361, (1986)
- Spilker, R. L.; Jakobs, D. M. - Hybrid Stress Reduced Mindlin Elements For Thin Multilayer Plates. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 23, 555-578, (1986)

- Srinivas, S. - A Refined Analysis Of Composite Laminates. J. Sound & Vib., 30, n. 4, 495-507, (1973)
- Stern, M. - A General Boundary Integral Formulation For The Numerical Solution Of Plate Bending Problems. Int. J. Solids & Struct., 15, 769-782, (1979).
- Sun, C. T. - Theory Of Laminated Plates. J. Appl. Mech., 231-238, (1971)
- Sun, C. T.; Cheng, N. C. - On The Governing Equations For A Laminated Plate. J. Sound Vib., 21(3), 307-316, (1972)
- Sun, C. T.; Whitney, J. M. - Theories For The Dynamic Response Of Laminated Plates. AIAA Journal, 11, n.2, 178-183, (1972)
- Surana, K. S.; Sorem, R. M. - Curved Shell Elements Based On Hierarchical P-Approximation In The Thickness Direction For Linear Static Analysis Of Laminated Composites. Int. J. Num. Meth. Eng., 29, 1393-1420, (1990)
- Toledano, A.; Murakami, H. - A Composite Plate Theory For Arbitrary Laminate Configurations. J. Appl. Mech., 54, 181-189, (1987a)
- Toledano, A.; Murakami, H. - A High-Order Laminated Plate Theory With Improved In-Plane Responses. Int. J. Solids Struct., 23, 111-131, (1987b)
- Tsai, S. W.; Hahn, H. T. - Introduction To Composite Materials. Technomic Publishing Company, Inc., USA, (1980)
- Valisetty, R. R.; Rehfield, L. W. - A Theory For Stress Analysis Of Composite Laminates. AIAA Journal, 23, n.7, 1111-1117, (1985)
- Voyiadjis, G. Z.; Baluch, M. H. - Refined Theory For Thick Composite Plates. Journal of Eng. Mechanics, 114, n.4, (1988)
- Weeën, F. V. - Application Of The Direct Boundary Element Method To Reissner's Plate Model, in Boundary Elements in Engineering ( Ed. Brebbia, C. A. ), pp. 487-499, Proc. 4th. Int. Conf. on BEM, Southampton, 1982, Springer Verlag, Berlin and New York, (1982).
- Weeën, F. V. - Application Of The Boundary Integral Equation Method To Reissner's Plate Model. Int. J. Num. Meth. Engng., 18, 1-10, (1982).
- Westphal Jr. T.; Barcellos, C. S. - Applications Of The Boundary Element Method To Reissner's And Mindlin's Plate Models. Proc. 12th BEM Conf. Comp. Mech. Publ. ( Ed. Brebbia, C. A. ), (1990).
- Whitney, J. M. - Stress Analysis Of Thick Laminated Composite And

Sandwich Plates. *J. Compos. Materials*, 6, 426-440, (1972)

- Whitney, J. M. - Structural Analysis Of Laminated Anisotropic Plates. Technomic Publishing Company, Inc, Lancaster, Pensilvania, (1987)
- Whitney, J. M.; Leissa, A. W. - Analysis Of Heterogeneous Anisotropic Plates. *J. Appl. Mech.*, 261-266, (1969)
- Whitney, J. M.; Pagano, N. J. - Shear Deformation In Heterogeneous Anisotropic Plates. *J. Appl. Mech.*, 1031-1036, (1970)
- Whitney, J. M.; Sun, C. T. - A Higher Order Theory For Extensional Motion Of Laminated Composites. *J. Sound & Vib.*, 30, n. 1, 85-91, (1973)
- Yang, P. C.; Norris, C. H.; Stavsky, Y. - Elastic Wave Propagation In Heterogeneous Plates. *Int. J. Sol. Struct.*, 2, 665-684, (1966)

## CAPÍTULO 4

### SOLUÇÃO DE PLACAS COMPOSTAS LAMINADAS PELO MÉTODO MODIFICADO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL ATRAVÉS DE UMA TEORIA DE PRIMEIRA ORDEM

#### 4.1. INTRODUÇÃO.

Teoria de Primeira Ordem, doravante referenciada por FSDT ("First Order Shear Deformation Theory"), é assim denominada por representar o campo de deslocamentos através de expansões polinomiais lineares (de primeira ordem). É uma extensão ao caso de placas laminadas dos Modelos de Reissner [1945] e Mindlin [1951] para placas homogêneas, incorporando, além dos efeitos do cisalhamento transversal, os decorrentes do comportamento de membrana, aos quais o laminado também está sujeito [Jones (1975), Whitney (1987)].

A FSDT representa um dos modelos mais simples de placa laminada, envolvendo apenas cinco graus de liberdade por nó, correspondentes aos três deslocamentos de translação,  $u$ ,  $v$  e  $w$ , e a duas rotações,  $\theta_x$  e  $\theta_y$ . A simplificação do modelo implica em limitações do seu uso, restrito aos casos de placas finas ou semi-espessas. Quando a espessura cresce muito, aumentando a relação  $h/a$ , a FSDT já não é mais capaz de descrever, com precisão, o comportamento da placa.

Apesar de restrita, a Teoria de Primeira Ordem ainda é bastante utilizada em termos práticos, dentre outros motivos, para testar novas

técnicas de análise, e, em comparação com as outras teorias, por ser mais econômica computacionalmente. Mesmo soluções mais elaboradas e complexas fazem uso da FSDT. Assim é que Noor e Burton [1989] recomendam a FSDT em seu processo preditor-corretor para a correta avaliação de deslocamentos e tensões em placas laminadas. Alguns modelos mistos de elementos finitos desenvolvidos recentemente adotam um campo linear de deslocamentos, como na FSDT [Noel (1991a,b)]. É usual, também, a consideração de expansões polinomiais de primeira ordem para representar o campo de deslocamentos em uma lâmina em análises por meio de uma teoria do tipo Lâmina Discreta [Lardeur (1989)].

Por estes motivos, escolheu-se, inicialmente, a Teoria de Primeira Ordem para avaliar a viabilidade do uso do Método Modificado da Função de Green Local em problemas estático-lineares de placas ortotrópicas laminadas. Assim, este Capítulo mostra a implementação do MMFGL ao caso laminado por meio da FSDT. Ao seu final, diversos exemplos são apresentados para que se comprove a eficiência do novo método. No capítulo seguinte, o MMFGL será investigado, também, por meio de uma Teoria de Ordem Superior.

## 4.2. EQUAÇÕES GOVERNANTES NA TEORIA DE PRIMEIRA ORDEM.

### 4.2.1. Relações Deslocamentos-Deformações.

A Teoria de Primeira Ordem admite cinco graus de liberdade por nó, representados, a seguir, no vetor de deslocamentos generalizados,  $d$ :

$$d = \{ u_o, v_o, w_o, \theta_x, \theta_y \}^t \quad (4.1)$$

onde  $u_o$ ,  $v_o$ , e  $w_o$  são os deslocamentos de translação, na superfície de referência da placa ( $z = 0$ ), nas direções  $X$ ,  $Y$ , e  $Z$ , respectivamente;  $\theta_x$  e  $\theta_y$  são as rotações da reta normal ao redor dos eixos  $Y$  e  $X$ , respectivamente.

Os deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  de qualquer ponto da placa podem ser representados por combinações lineares das componentes do vetor  $d$  em (4.1) com a coordenada  $Z$ , ou seja,

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) + z \theta_x(x,y) \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) + z \theta_y(x,y) \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \quad (4.2)$$

A Teoria Clássica de Placas Laminadas (CLPT) pode ser considerada como um caso particular da Teoria de Primeira Ordem, desde que se adote  $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}$  e  $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}$ .

Uma vez determinado o campo de deslocamentos, as deformações infinitesimais,  $\epsilon_{ij}$ , podem ser obtidas através da seguinte expressão em notação indicial:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} ( u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j} ) \quad (4.3)$$

onde  $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ .

Considerando a convenção indicada em (3.2), e desprezando os termos não lineares em (4.3), as deformações podem ser expressas, genericamente, como:

$$\begin{aligned} \{ \epsilon_L \} &= \{ \epsilon^0 \} + z \{ K \} \\ \{ \epsilon_T \} &= \{ T \} \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde

$$\begin{aligned}
\{ \varepsilon_L \} &= \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_6 \}^t \\
\{ \varepsilon_T \} &= \{ \varepsilon_4, \varepsilon_5 \}^t \\
\{ \varepsilon^o \} &= \{ \varepsilon_1^o, \varepsilon_2^o, \varepsilon_6^o \}^t \\
\{ K \} &= \{ K_1, K_2, K_6 \}^t \\
\{ T \} &= \{ \varepsilon_4^o, \varepsilon_5^o \}^t
\end{aligned} \tag{4.5}$$

e

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^o = \varepsilon_x^o &= \frac{\partial u_o}{\partial x} & \varepsilon_2^o = \varepsilon_y^o &= \frac{\partial v_o}{\partial y} \\
\varepsilon_3^o = \varepsilon_z^o &= 0 & \varepsilon_4^o = \varepsilon_{yz}^o &= \theta_y + \frac{\partial w_o}{\partial y} \\
\varepsilon_5^o = \varepsilon_{xz}^o &= \theta_x + \frac{\partial w_o}{\partial x} & \varepsilon_6^o = \varepsilon_{xy}^o &= \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{\partial \theta_x}{\partial x} ; & K_2 &= \frac{\partial \theta_y}{\partial y} ; & K_3 &= 0 \\
K_4 &= 0 ; & K_5 &= 0 ; & K_6 &= \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Em (4.4),  $\{\varepsilon_L\}$  corresponde ao caso das deformações normais que ocorrem no plano da placa e, por isso, também denominadas de "deformações longitudinais". Por outro lado,  $\{\varepsilon_T\}$  está associado às deformações cisalhantes transversais. Os vetores  $\{\varepsilon^o\}$ ,  $\{K\}$  e  $\{T\}$ , determinados na superfície de referência da placa, relacionam-se às parcelas das deformações correspondentes aos efeitos de membrana, flexão e cisalhamento, respectivamente. Estes vetores podem ser expressos através das seguintes relações:

$$\{ \varepsilon^o \} = [ \mathcal{L}_M ] d \quad ; \quad \{ K \} = [ \mathcal{L}_F ] d \quad ; \quad \{ T \} = [ \mathcal{L}_C ] d \tag{4.8}$$

onde  $\mathcal{L}_M$ ,  $\mathcal{L}_F$ , e  $\mathcal{L}_C$  são operadores diferenciais relativos aos efeitos de membrana, flexão e cisalhamento, e valem:

$$[\mathcal{L}_M] = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 & 0 & 0 \\ \partial_y & \partial_x & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad [\mathcal{L}_F] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_y & \partial_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathcal{L}_C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \partial_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \partial_x \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

onde  $\partial_x = \partial(\cdot)/\partial x$  e  $\partial_y = \partial(\cdot)/\partial y$ .

#### 4.2.2. Relações Força-Deslocamento.

Conhecendo-se a distribuição de tensões ao longo da espessura da placa, as suas resultantes podem ser determinadas através de:

$$N_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i^{(L)} dz \quad i = 1, 2, 6 \quad (4.10)$$

$$M_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i^{(L)} z dz \quad i = 1, 2, 6 \quad (4.11)$$

$$Q_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i^{(L)} dz \quad i = 4, 5 \quad (4.12)$$

onde

$\sigma_i^{(L)}$  - é o  $i$ -ésimo componente do vetor de tensões da lâmina  $\underline{L}$ ;

$z$  - coordenada  $Z$  da lâmina  $\underline{L}$ ;

$N_i$ ,  $M_i$ ,  $Q_i$  - componentes dos vetores de forças normais, momentos fletores e esforços cortantes,  $N$ ,  $M$ , e  $Q$ .

$$\begin{aligned}
 N &= \{ N_1, N_2, N_6 \}^t = \{ N_x, N_y, N_{xy} \}^t \\
 M &= \{ M_1, M_2, M_6 \}^t = \{ M_x, M_y, M_{xy} \}^t \\
 Q &= \{ Q_4, Q_5 \}^t = \{ Q_y, Q_x \}^t
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Usando a Lei de Hooke, (3.5), em (4.10) resulta, para  $i, j = 1, 2, 6$ :

$$N_i = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij}^{(L)} \epsilon_j^{(L)} dz = \epsilon_j^o \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij}^{(L)} dz + K_j \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij}^{(L)} z dz \tag{4.14}$$

ou seja,

$$N_i = A_{ij} \epsilon_j^o + B_{ij} K_j \tag{4.15}$$

onde

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij}^{(L)} dz = \sum_{L=1}^{NL} C_{ij}^{(L)} (z_L - z_{L-1}) \tag{4.16}$$

$$B_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij}^{(L)} z dz = \frac{1}{2} \sum_{L=1}^{NL} C_{ij}^{(L)} (z_L^2 - z_{L-1}^2) \tag{4.17}$$

Nas expressões anteriores,  $C_{ij}^{(L)}$  são as componentes da matriz de rigidez da lâmina  $\underline{L}$ ;  $z_L$  é a coordenada  $z$  do topo da lâmina  $\underline{L}$ ; e  $z_{L-1}$  é a coordenada  $z$  do topo da lâmina precedente.

Analogamente, os momentos fletores (4.11) são determinados por:

$$M_i = B_{ij} \epsilon_j^o + D_{ij} K_j \tag{4.18}$$

onde

$$D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij}^{(L)} z^2 dz = \frac{1}{3} \sum_{L=1}^{NL} C_{ij}^{(L)} (z_L^3 - z_{L-1}^3) \quad (4.19)$$

Com relação aos esforços cisalhantes em (4.12), pode-se escrever:

$$Q_i = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij}^{(L)} \varepsilon_j^{(L)} dz = \varepsilon_j^o \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij}^{(L)} dz \quad (4.20)$$

ou, simplesmente

$$Q_i = A_{ij} T_j \quad \text{para } i, j = 4, 5 \quad (4.21)$$

As expressões (4.15), (4.18) e (4.21) podem ser expressas numa forma matricial didaticamente mais adequada como:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & D \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ K \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\begin{Bmatrix} Q \end{Bmatrix} = \left[ D_c \right] \begin{Bmatrix} T \end{Bmatrix}$$

Algumas conclusões importantes podem ser extraídas das expressões anteriores:

- a) As matrizes  $A$ ,  $B$  e  $D$  são denominadas de rigidez de membrana, de acoplamento flexão-membrana, e de flexão, respectivamente.

- b) A existência de acoplamento entre os efeitos de membrana e de flexão, incorporado pela matriz  $B$ , justifica o fato de que, ao se tracionar ou comprimir um laminado, o mesmo tenda a sofrer flexão ou empenamento. Inversamente, flexionando-o, observa-se um alongamento ou encurtamento na sua superfície de referência.
- c) O acoplamento só existe no caso de um laminado assimétrico. A matriz  $B$ , como pode se notar em (4.17), é identicamente nula quando as lâminas são simétricas.
- d) Por causa do acoplamento dos efeitos de flexão e de membrana, laminados assimétricos devem ser analisados cuidadosamente para evitar o empenamento provocado por contrações térmicas, por menores que sejam, por exemplo, durante a cura do material.

#### 4.3. DETERMINAÇÃO DA SOLUÇÃO DE PLACA LAMINADA PELO MMFGL.

O item anterior mostrou as equações governantes de uma placa laminada, com as quais é possível estabelecer o sistema de equações diferenciais que rege o problema. O Método Modificado da Função de Green Local na forma indicada no Capítulo 2, isto é, considerando a discretização de todo o domínio por meio de uma única célula de Green, será então empregado para resolver tal sistema e determinar o comportamento da placa em termos de deslocamentos, rotações, esforços e tensões.

Conforme apresentado no Capítulo 2, o MMFGL é indicado para resolver sistemas de equações diferenciais da forma:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} u &= b && \text{em } \Omega \\
 \mathcal{D} u &= \tau && \text{em } \partial\Omega_\tau \\
 \mathcal{N} u &= \delta && \text{em } \partial\Omega_\delta
 \end{aligned}
 \tag{4.23}$$

onde

$\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{N}$ , e  $\mathcal{D}$  são os operadores diferenciais do problema, de Neumann e de Dirichlet, respectivamente.

$\Omega$ ,  $\partial\Omega_\delta$  e  $\partial\Omega_\tau$  são o domínio, e as parcelas de contornos correspondentes aos operadores  $\mathcal{N}$  e  $\mathcal{D}$ .

Embora não seja essencial para a solução pelo MMFGL (pois basta o conhecimento de uma forma bi-linear que atenda as condições (2.2)-(2.7) para que sejam garantidas a existência e a unicidade da solução), como primeira etapa, a título de perfeita identificação das variáveis matemáticas envolvidas na análise, será determinado o operador diferencial  $\mathcal{L}$  para o problema de placa laminada através da Teoria de Primeira Ordem. Em seguida, será discutida a discretização no domínio e no contorno do problema, para que possam ser calculadas as Projeções das Funções de Green.

#### 4.3.1. Operador Diferencial Para o Problema de Placa Laminada.

O operador diferencial  $\mathcal{L}$  do sistema (4.23) para o problema de placas laminadas pode ser determinado a partir de princípios energéticos, usando as ferramentas do cálculo variacional. Para modelos de deslocamentos, como o adotado neste trabalho, é usual o emprego do Princípio da Energia Potencial Mínima para determinar equações de equilíbrio adequadas e associadas ao campo de deslocamentos indicado em (4.2).

A energia de deformação de uma placa laminada, como de um corpo elástico qualquer, é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_i^{(L)} \varepsilon_i^{(L)} dv \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (4.24)$$

onde

$\sigma_i^{(L)}$  e  $\varepsilon_i^{(L)}$  são os componentes dos vetores de tensões e deformações infinitesimais indicados em (3.1) e (3.2), respectivamente, para a lâmina  $\underline{L}$ .

$V$  é o volume total do laminado.

Assim como em (4.4), quando o vetor de deformações  $\{\varepsilon\}$  foi desmembrado em duas parcelas, uma dos efeitos normais, e outra dos transversais, o mesmo pode ser feito em relação à energia  $U$  de (4.24). Denominando-se de  $U_{FM}$  a energia de deformação associada aos efeitos longitudinais (flexão-membrana), e de  $U_c$  aos transversais (de cisalhamento), então:

$$U = U_{FM} + U_c \quad (4.25)$$

onde, lembrando que, por hipótese,  $\varepsilon_z$  é desprezado,

$$\begin{aligned} U_{FM} &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_i^{(L)} \varepsilon_i^{(L)} dv, \quad i = 1, 2, 6 \\ &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x^{(L)} \varepsilon_x^{(L)} + \sigma_y^{(L)} \varepsilon_y^{(L)} + \sigma_{xy}^{(L)} \varepsilon_{xy}^{(L)}) dv \end{aligned} \quad (4.26) \quad .26$$

$$\begin{aligned} U_c &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_i^{(L)} \varepsilon_i^{(L)} dv, \quad i = 4, 5 \\ &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{yz}^{(L)} \varepsilon_{yz}^{(L)} + \sigma_{xz}^{(L)} \varepsilon_{xz}^{(L)}) dv \end{aligned} \quad (4.27)$$

A energia  $U_{FM}$  em (4.26) pode ser expressa apenas em termos das componentes do vetor deslocamentos,  $d$ , em (4.1), e de suas derivadas. Para tanto, as tensões são substituídas pela Lei de Hooke, (3.5); as deformações são determinadas por (4.4); e as integrais de volume são

transformadas em integrais de domínio usando (4.16), (4.17) e (4.19). Assim procedendo, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 U_{FM} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [ & A_{11} u_{o,x}^2 + 2 A_{12} u_{o,x} v_{o,y} + A_{22} v_{o,y}^2 \\
 & + 2 A_{16} (u_{o,x} u_{o,y} + v_{o,x} v_{o,y}) \\
 & + 2 A_{26} (u_{o,y} v_{o,y} + v_{o,x} v_{o,y}) \\
 & + A_{66} (u_{o,y}^2 + 2 u_{o,y} v_{o,x} + v_{o,x}^2) \\
 & + 2 B_{11} u_{o,x} \theta_{x,x} + 2 B_{12} (u_{o,x} \theta_{y,y} + v_{o,y} \theta_{x,x}) \\
 & + 2 B_{16} (\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) u_{o,x} \\
 & + 2 B_{16} (u_{o,y} + v_{o,x}) \theta_{x,x} \\
 & + 2 B_{22} v_{o,y} \theta_{y,y} + B_{26} (u_{o,y} + v_{o,x}) \\
 & + 2 B_{26} (\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) v_{o,y} \\
 & + 2 B_{66} (\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) (u_{o,y} + v_{o,x}) \\
 & + D_{11} \theta_{x,x}^2 + 2 D_{12} \theta_{x,x} \theta_{y,y} \\
 & + 2 D_{16} (\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) \theta_{x,x} \\
 & + D_{22} \theta_{y,y}^2 + 2 D_{26} (\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) \theta_{y,y} \\
 & + D_{66} (\theta_{x,y}^2 + 2 \theta_{x,y} \theta_{y,x} + \theta_{y,x}^2) ] dx dy
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Repetindo de maneira análoga com relação a  $U_c$  em (4.27) resulta:

$$\begin{aligned}
 U_c = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [ & A_{44} (\theta_y + w_y)^2 + 2 A_{45} (\theta_x + w_x) (\theta_y + w_y) \\
 & + A_{55} (\theta_x + w_x)^2 ] dx dy
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Pelo Princípio da Energia Potencial Mínima, deve ser nula a primeira variação da energia potencial total, isto é,

$$\delta\pi = \delta U + \delta V = 0 \quad (4.30)$$

onde

- $\pi$  - energia potencial total
- $U$  - energia de deformação
- $V$  - trabalho das forças externas

De (4.25) tem-se:

$$\delta U = \delta U_{FM} + \delta U_C \quad (4.31)$$

onde as variações  $\delta U_{FM}$  e  $\delta U_C$  podem ser determinadas a partir de (4.28) e (4.29).

Para o caso de um carregamento  $q(x,y)$  distribuído ao longo da superfície da placa,

$$\delta V = - \int_{\Omega} q \delta w \, dx \, dy \quad (4.32)$$

Desenvolvendo (4.31) e agrupando convenientemente os termos, chega-se, finalmente, ao operador diferencial  $\mathcal{L}$  de (4.23), que vale

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{13} & \mathcal{L}_{14} & \mathcal{L}_{15} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{23} & \mathcal{L}_{24} & \mathcal{L}_{25} \\ \mathcal{L}_{31} & \mathcal{L}_{32} & \mathcal{L}_{33} & \mathcal{L}_{34} & \mathcal{L}_{35} \\ \mathcal{L}_{41} & \mathcal{L}_{42} & \mathcal{L}_{43} & \mathcal{L}_{44} & \mathcal{L}_{45} \\ \mathcal{L}_{51} & \mathcal{L}_{52} & \mathcal{L}_{53} & \mathcal{L}_{54} & \mathcal{L}_{55} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{11} &= A_{11} \partial_x^2(\cdot) + 2 A_{16} \partial_{xy}^2(\cdot) + A_{66} \partial_y^2(\cdot) \\ \mathcal{L}_{12} &= A_{16} \partial_x^2(\cdot) + (A_{12} + A_{66}) \partial_{xy}^2(\cdot) + A_{26} \partial_y^2(\cdot) \\ \mathcal{L}_{13} &= B_{11} \partial_x^2(\cdot) + 2 B_{16} \partial_{xy}^2(\cdot) + B_{66} \partial_y^2(\cdot) \\ \mathcal{L}_{14} &= B_{16} \partial_x^2(\cdot) + (B_{12} + B_{66}) \partial_{xy}^2(\cdot) + B_{26} \partial_y^2(\cdot) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{22} &= A_{66} \partial_x^2(\cdot) + 2 A_{26} \partial_{xy}^2(\cdot) + A_{22} \partial_y^2(\cdot) \\
\mathcal{L}_{23} &= B_{16} \partial_x^2(\cdot) + (B_{12} + B_{66}) \partial_{xy}^2(\cdot) + B_{26} \partial_y^2(\cdot) \\
\mathcal{L}_{24} &= B_{66} \partial_x^2(\cdot) + 2 B_{26} \partial_{xy}^2(\cdot) + B_{22} \partial_y^2(\cdot) \\
\mathcal{L}_{33} &= D_{11} \partial_x^2(\cdot) + 2 D_{16} \partial_{xy}^2(\cdot) + D_{66} \partial_y^2(\cdot) - k A_{55} \\
\mathcal{L}_{34} &= D_{16} \partial_x^2(\cdot) + (D_{12} + D_{66}) \partial_{xy}^2(\cdot) + D_{26} \partial_y^2(\cdot) - k A_{45} \\
\mathcal{L}_{35} &= -k ( A_{45} \partial_y(\cdot) + A_{55} \partial_x(\cdot) ) \\
\mathcal{L}_{44} &= D_{66} \partial_x^2(\cdot) + 2 D_{26} \partial_{xy}^2(\cdot) + D_{22} \partial_y^2(\cdot) - k A_{44} \\
\mathcal{L}_{45} &= -k ( A_{44} \partial_y(\cdot) + A_{45} \partial_x(\cdot) ) \\
\mathcal{L}_{55} &= k ( A_{55} \partial_x^2(\cdot) + 2 A_{45} \partial_{xy}^2(\cdot) + A_{44} \partial_y^2(\cdot) ) \\
\mathcal{L}_{21} &= \mathcal{L}_{12} \\
\mathcal{L}_{31} &= \mathcal{L}_{13} \\
\mathcal{L}_{41} &= \mathcal{L}_{14} \\
\mathcal{L}_{32} &= \mathcal{L}_{23} \\
\mathcal{L}_{42} &= \mathcal{L}_{24} \\
\mathcal{L}_{43} &= \mathcal{L}_{34} \\
\mathcal{L}_{53} &= \mathcal{L}_{35} \\
\mathcal{L}_{54} &= \mathcal{L}_{45} \\
\mathcal{L}_{15} &= \mathcal{L}_{25} = \mathcal{L}_{51} = \mathcal{L}_{52} = 0
\end{aligned} \tag{4.34}$$

onde

$$\begin{aligned}
\partial_x(\cdot) &= \partial/\partial x(\cdot) & \partial_y(\cdot) &= \partial/\partial y(\cdot) \\
\partial_x^2(\cdot) &= \partial^2/\partial x^2(\cdot) & \partial_y^2(\cdot) &= \partial^2/\partial y^2(\cdot) & \partial_{xy}^2(\cdot) &= \partial^2/\partial x \partial y(\cdot)
\end{aligned}$$

Em (4.34),  $k$  é o coeficiente de correção do cisalhamento para a Teoria de Primeira Ordem.

O operador  $\mathcal{L}$  de (4.33) é simétrico, contínuo, e auto-adjunto, ou seja,  $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}^*$ . Esta propriedade pode ser comprovada integrando-se por partes, duas vezes, a forma  $\int_{\Omega} v \mathcal{L} u \, d\Omega$ , onde  $v$  é uma variável auxiliar.

### 4.3.2. Determinação das Projeções dos Tensores de Green.

#### 4.3.2.1. Características das Matrizes de Green.

Para facilitar a compreensão deste item, é interessante estabelecer os seguintes parâmetros:

- $m = n_{gl}$  - número de graus de liberdade por nó;
- $n = n_{ef}$  - número de nós em um elemento finito; e
- $\ell = n_{ec}$  - número de nós em um elemento de contorno.
- $ntn$  - número total de nós dos elementos finitos.
- $ntnc$  - número total de nós dos elementos de contorno.

Vale, ainda, distinguir os seguintes vetores de deslocamentos generalizados:

- $d$  - vetor dos graus de liberdade por nó (deslocamentos em um nó);
- $a$  - vetor dos deslocamentos nodais em um elemento;
- $u$  - vetor dos deslocamentos nodais para todo o problema.

Tais vetores, quando se considera o espaço gerado pelos elementos finitos dentro da FSDT, correspondem a:

$$\{d\}_{(j)} = \{ u_o, v_o, w_o, \theta_x, \theta_y \}_{(j)}^t \quad \text{para um nó "j"};$$

$$\begin{aligned} \{a\}_{(e)} &= \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}_{(e)}^t \quad \text{para um elemento "e"}; \\ &= \{ \{d\}_{(1)}, \{d\}_{(2)}, \dots, \{d\}_n \}_{(e)}^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{u\}_G &= \{ u_1, u_2, \dots, u_{ntn} \}^t \quad \text{para todo o domínio.} \\ &= \{ \{d\}_1, \{d\}_2, \dots, \{d\}_{ntn} \}^t \end{aligned}$$

Assim,  $\{d\}_{(j)}$ ,  $\{a\}_{(e)}$  e  $\{u\}$  são vetores de dimensões  $[m \times 1]$ ,  $[(n \times m) \times 1]$ , e  $[(ntn \times m) \times 1]$ , respectivamente.

Usando as funções de interpolação convencionais de elementos finitos, os deslocamentos em um ponto Q qualquer do domínio podem ser determinados por meio de expansões dos deslocamentos nodais do elemento ao qual o ponto Q pertence (sistema de referência local). Neste caso, são utilizadas funções de interpolação locais, e os deslocamentos nesse ponto, expressos pelo vetor  $a_Q$ , são determinados por:

$$a_Q = \begin{bmatrix} [\psi_1] & \vdots & [\psi_2] & \vdots & \dots & \vdots & [\psi_n] \end{bmatrix} \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}^t \quad (4.35)$$

ou, genericamente, como

$$a = \Psi_e a_e \quad (4.36)$$

Cada submatriz de  $\Psi_e$  tem dimensões  $m \times m$  e são expressas por:

$$[\psi_j] = \begin{bmatrix} \psi_j & & & & 0 \\ & \psi_j & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & \psi_j \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

onde  $\psi_j$  é a função de interpolação do ponto Q correspondente ao j-ésimo ponto nodal do elemento finito a que ele pertence.

Logo, a matriz  $\Psi_e$  tem dimensões  $[m \times (m \times n)]$ .

Alternativamente, podem ser utilizadas funções de interpolações globais, com as quais os deslocamentos no ponto Q são determinados através de:

$$u_Q = \begin{bmatrix} [\psi_1] \\ [\psi_2] \\ \dots \\ [\psi_{ntn}] \end{bmatrix} \{ u_1, u_2, \dots, u_{ntn} \}^t \quad (4.38)$$

ou, genericamente,

$$u = \Psi_G u_G \quad (4.39)$$

Cada submatriz de  $\Psi_G$  tem formação idêntica à (4.37) e, conseqüentemente,  $\Psi_G$  têm dimensões  $[m \times (m \times ntn)]$ .

Uma vez que a projeção do Tensor de Green no domínio,  $G(P,Q)$ , é expressa por (2.69), isto é,

$$G_d(Q) = \int_{\Omega} G^t(P,Q) \Psi_G(P) d\Omega_P \quad (4.40)$$

e como  $G(P,Q)$  tem dimensões  $(m \times m)$ , lembrando que a lei de formação de  $\Psi_G$  é dada por (4.38), conclui-se que  $G^{DQ}$ , matriz dos valores nodais de  $G_d(P)$ , tem também a mesma lei de formação que  $\Psi_G$ , ou seja,

$$G^{DQ} = \begin{bmatrix} [G_1^{DQ}] \\ [G_2^{DQ}] \\ \dots \\ [G_{ntn}^{DQ}] \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Cada submatriz em (4.41) corresponde a um nó da malha de elementos finitos e possui dimensão  $[m \times m]$ . Conseqüentemente, a matriz  $G^{DQ}$  tem dimensão  $[m \times (m \times ntn)]$ .

Seja uma submatriz de  $G^{DQ}$  em (4.41) correspondente ao nó "j", isto é,  $[G_j^{DQ}]$ . Esta submatriz pode ser representada simplificadamente por:

$$[G_j^{DQ}] = \begin{bmatrix} \{g_{1j}^{DQ}\} \\ \{g_{2j}^{DQ}\} \\ \dots \\ \{g_{mj}^{DQ}\} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

onde  $\{g_{ij}^{DQ}\}$  é um vetor correspondente à  $i$ -ésima coluna (ou grau de liberdade) de  $[G_j^{DQ}]$ . Foi necessário chegar a este nível de detalhamento pois o funcional  $\mathcal{F}$  que determina as projeções do Tensor de Green, quando minimizado, utiliza os vetores  $\{g_{ij}^{DQ}\}$ .

O mesmo procedimento deve ser feito para determinação da projeção  $G_d(q)$  em (2.75).

De maneira inteiramente análoga, podem ser determinadas as projeções  $G_c(q)$  e  $G_c(Q)$ , em (2.74) e (2.68), no espaço gerado pelos elementos de contorno. Para tanto, devem ser substituídas as funções de interpolação de domínio,  $\psi_j$ , pelas funções de interpolação do contorno,  $\phi_j$ , e alterados os parâmetros  $n$  e  $ntn$  para, respectivamente,  $\ell$  e  $ntnc$ .

Assim procedendo, chega-se à conclusão que  $G^{CQ}$ , matriz dos valores nodais de  $G_c(Q)$ , tem dimensão  $[m \times (m \times ntnc)]$ , e é constituída por  $ntnc$  submatrizes de dimensões  $[m \times m]$ , isto é,

$$G^{CQ} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} [G_1^{CQ}] & [G_2^{CQ}] & \dots & [G_{ntnc}^{CQ}] \end{array} \right] \quad (4.43)$$

Os vetores  $g_{ij}^{CQ}$  correspondentes à  $i$ -ésima coluna da submatriz de (4.43) associada ao nó " $j$ " serão, também, utilizados na minimização do funcional  $\mathcal{F}$ .

#### 4.3.2.2. Determinação de $G_j^{DQ}$ e $G_k^{CQ}$ .

No Capítulo 2 foi mostrado que as projeções  $G_d$  e  $G_c$  podem ser determinadas mediante a minimização do funcional indicado em (2.90),  $\mathcal{F}(G_d, G_c)$ , cuja expressão envolve quatro formas bilineares distintas,  $B(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ ,  $B_1(G_d, [\Psi])$ ,  $B_2(G_c, [\Phi])$  e  $B_3(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ .

$B(\mathcal{G}, \mathcal{G})$  é a forma bilinear em estudo, desenvolvida para  $G_d$  ou para  $G_c$ , conforme corresponda  $\mathcal{G}$ . Para o problema de placa laminada pela Teoria de Primeira Ordem, a  $B(\mathcal{G}, \mathcal{G})$  corresponde exatamente à expressão da Energia de Deformação em (4.24).

As demais formas bilineares são fornecidas em (2.91)-(2.93).

O funcional  $\mathcal{F}(G_d, G_c)$  em (2.90) para o caso de placa laminada pela FSDT equivale a:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(G_j^{DQ}, G_j^{CQ}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{NGL} \int_{\Omega} \left( [\mathcal{L}_M g_i(Q)]^t A [\mathcal{L}_M g_i(Q)] \right. \\
 &\quad + [\mathcal{L}_M g_i(Q)]^t B [\mathcal{L}_F g_i(Q)] \\
 &\quad + [\mathcal{L}_F g_i(Q)]^t B [\mathcal{L}_M g_i(Q)] \\
 &\quad + [\mathcal{L}_F g_i(Q)]^t D [\mathcal{L}_F g_i(Q)] \\
 &\quad + [\mathcal{L}_C g_i(Q)]^t D_C [\mathcal{L}_C g_i(Q)] \\
 &\quad \left. - \beta [g_i(Q)]^t [\psi_i(Q)] \right) d\Omega \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{NGL} \int_{\partial\Omega} \left( [N' g_i(q)]^t g_i(q) \right. \\
 &\quad \left. - \alpha [g_i(q)]^t [\phi_i(q)] \right) d\partial\Omega
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

onde

$\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros pré-definidos conforme o problema considerado. Para a determinação de  $G_j^{DQ}$ , faz-se  $\alpha = 0$  e  $\beta = 1$ . No caso de  $G_j^{CQ}$ , adota-se  $\alpha = 1$  e  $\beta = 0$

$g_i$  é uma variável que corresponde às colunas da sub-matriz  $G_j^{CQ}$ , ou  $G_j^{DQ}$ , como em (4.39), conforme se deseja determinar  $G_j^{CQ}$  ou  $G_j^{DQ}$ , respectivamente.

Minimizando o funcional de (4.44) através de técnicas convencionais de elementos finitos, e desenvolvendo o agrupamento das matrizes dos elementos nas correspondentes matrizes globais, resulta o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g^{DQ} \\ \vdots \\ g^{CQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ \vdots \\ D \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

onde

$$K = K_{MEF} + K'$$

$K_{MEF}$  - é a matriz de rigidez convencional de elementos finitos;

$K'$  - é a matriz de rigidez resultante da primeira integral de contorno de (4.44)

$g^{DQ}$  e  $g^{CQ}$  - correspondem aos valores nodais de  $G^{DQ}$  e  $G^{CQ}$  respectivamente

$A$  e  $D$  - são as matrizes formadas pelos últimos termos nas integrais de domínio e de contorno, respectivamente, em (4.44), e coincidem com as matrizes indicadas em (2.65) e (2.71).

Como o vetor dos deslocamentos generalizados,  $d$ , em (4.1), pode ser expandido por meio das funções de interpolação  $[\psi]$  de domínio, os vetores  $\{\varepsilon^o\}$ ,  $\{K\}$ , e  $\{T\}$ , em (4.8), considerando que  $m = NNEF$ , podem ser re-escritos como:

$$\begin{aligned}
 \{\varepsilon^o\} &= [\mathcal{L}_M] \sum_{i=1}^m \psi_i d_i = \sum_{i=1}^m B_{iM} d_i = B_M a \\
 \{K\} &= [\mathcal{L}_F] \sum_{i=1}^m \psi_i d_i = \sum_{i=1}^m B_{iF} d_i = B_F a \\
 \{T\} &= [\mathcal{L}_C] \sum_{i=1}^m \psi_i d_i = \sum_{i=1}^m B_{iC} d_i = B_C a
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

onde

$$\begin{aligned}
 B_{iM} &= [\mathcal{L}_M] \psi_i & ; & & B_M &= \sum_{i=1}^m B_{iM} \\
 B_{iF} &= [\mathcal{L}_F] \psi_i & ; & & B_F &= \sum_{i=1}^m B_{iF} \\
 B_{iC} &= [\mathcal{L}_C] \psi_i & ; & & B_C &= \sum_{i=1}^m B_{iC}
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

$$e \quad a = \{ d_1, d_2, \dots, d_{NNEF} \}$$

Desse modo, a matriz  $K_{MEF}$  em (4.45), para o caso da Teoria de Primeira Ordem para placas laminadas, pode ser determinada através de:

$$K_{MEF} = \int_{\Omega} \left( B_M^t A B_M + B_M^t B B_F + B_F^t B B_M + B_F^t D B_F + B_C^t A_C B_C \right) d\Omega \tag{4.48}$$

onde  $A$ ,  $B$ ,  $D$  e  $D_C$  são as matrizes definidas em (4.21).

#### 4.3.3. Cálculo de Deslocamentos, Esforços e Tensões.

O Método Modificado da Função de Green Local, de maneira análoga a um método misto, é capaz de determinar, com mesmo grau de precisão, os valores dos deslocamentos e dos esforços nos pontos nodais da malha de contorno. A obtenção destes resultados se dá mediante a resolução do sistema modificado de equações de contorno expresso em (2.76).

Uma vez conhecidas as incógnitas nodais de contorno,  $u_c$  e  $f$ , os valores dos deslocamentos associados à malha de elementos finitos (no domínio) ficam determinados por meio de (2.104).

Para a obtenção dos esforços no domínio, o MMFGL exige o mesmo tratamento utilizado no MEF, ou seja, calcular as derivadas dos deslocamentos nodais e, através das relações constitutivas, determinar os momentos e esforços cisalhantes internos. Embora os valores nodais dos deslocamentos determinados pelo MMFGL sejam muito precisos, ocorre uma perda inevitável de precisão no cálculo das derivadas como a verificada, por exemplo, no Método dos Elementos Finitos.

Constatado que o MMFGL apresenta grande precisão nodal, uma excelente alternativa para melhor explorar esta característica e, dessa forma, aprimorar os esforços internos do domínio, é adotar a técnica de sub-regiões sugerida por Barbieri [1992], e equivalente à proposta original de Silva [1988]. Por meio desse processo, cada sub-região corresponde a uma "célula de Green", e os valores do contorno de cada célula são a resposta no domínio do problema original. Assim, os esforços internos são obtidos com a mesma precisão que os do contorno do problema.

Para o cálculo das tensões normais,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_{xy}$ , duas alternativas se mostram viáveis. Se o ponto em que se deseja calcular as tensões estiver sobre o contorno da célula, são conhecidos, com grande

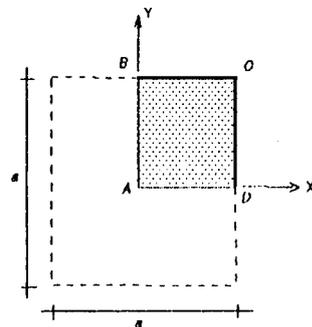
precisão, os valores dos esforços normais,  $N$ , e dos momentos fletores,  $M$ . Invertendo-se a equação (4.22), calculam-se as deformações  $\epsilon^o$  e  $K$  sem a perda de precisão que ocorreria caso tivesse sido feita uma derivação. Com os valores das deformações, emprega-se a relação constitutiva em cada lâmina, como em (3.24), para o cálculo das tensões planares. Assim, sem necessidade de derivação, o MMGFL alcança grande precisão nos valores das tensões.

Se, por outro lado, o ponto desejado estiver no interior do domínio, torna-se necessário o processo convencional de cálculo das derivadas dos deslocamentos nodais para que se obtenham as deformações e, com estas, usando-se as relações constitutivas, determinarem-se as tensões. O grau de precisão destes resultados, comparado com a alternativa anterior, é inferior, exatamente como consequência da derivação envolvida.

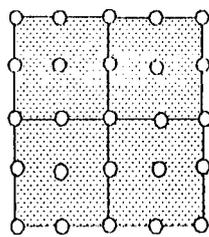
Quanto às tensões transversais,  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{yz}$ , caso pudessem ser calculadas por meio das relações constitutivas, as mesmas alternativas descritas acima para as tensões normais seriam válidas. Entretanto, em laminados é importante o cálculo através das equações de equilíbrio 3-D da Elasticidade. Essas equações, conforme visto no item 3.6 dependem das derivadas das tensões normais  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_{xy}$  em relação às coordenadas  $X$  e  $Y$ . O cálculo dessas derivadas é feito através da diferença entre os valores de tensões de dois pontos muito próximos um do outro, o que implica, necessariamente, em pelo menos um dos pontos no interior do domínio. Dessa forma, o cálculo das tensões cisalhantes considerando os valores nodais de contorno pelo MMFGL fica prejudicado. Resta, apenas, o procedimento convencional de cálculo das deformações mediante derivação dos deslocamentos. A derivação, como já mencionado, reduz a precisão dos resultados, que pode ser melhorada com o refino da malha, ou realizando algum tipo de pós-processamento para melhoria dos resultados como, por exemplo, o sugerido por Hinton et. alli. [1973]. Ainda assim, comparado aos outros métodos, os resultados de tensões cisalhantes pelo MMFGL são muito bons.

## 4.4. APLICAÇÕES.

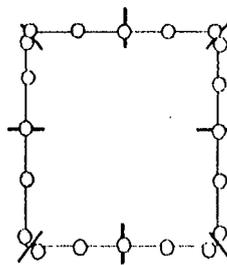
A série de aplicações a seguir apresentada visa comprovar a viabilidade do MMFGL aos problemas de placas laminadas, através de uma Teoria de Primeira Ordem, onde se usa um modelo de camada simples baseado em deslocamentos. Salienta-se, mais uma vez, que todas as aplicações foram feitas considerando apenas uma única "célula de Green" (sub-região) para descrever totalmente o domínio. O número de elementos finitos e de elementos de contorno é variado para estudo do processo de convergência. São considerados apenas elementos finitos lagrangeanos quadráticos de 9 nós na discretização do domínio, enquanto que, no contorno, são empregados elementos de 3 nós. Várias condições de carregamento, de contorno, de geometria e de configuração



(a) Placa: 1/4 discretizado



(b) Malha de Elementos Finitos



(c) Malha de Elementos de Contorno

Figura 4.1. Exemplo de discretização de uma placa, aproveitando-se as condições de simetria, e utilizando Malha 2x2 (4 elementos finitos e 8 elementos de contorno).

Tabela 4.1. Relação dos Materiais Utilizados nas Aplicações do MMFGL através da Teoria de Primeira Ordem.

Denominação	Tipo	Propriedades Elásticas
MATERIAL 1	Isotrópico	$\nu = 0.3$
MATERIAL 2	Trans. Isotr.	$E_1 = 25 E_2 ; G_{12} = G_{13} = 0.5 E_2 ;$ $G_{23} = 0.2 E_2 ; \nu_{12} = 0.25$
MATERIAL 3	Trans. Isotr.	$E_1 = 40 E_2 ; G_{12} = G_{13} = 0.6 E_2 ;$ $G_{23} = 0.5 E_2 ; \nu_{12} = 0.25$

do laminado são analisadas. Assim como no Método dos Elementos de Contorno, nós duplos são inseridos em pontos de descontinuidade da normal e/ou de condições de contorno. Como exemplo, é mostrado, na Figura 4.1., o caso de uma placa quadrada, onde 1/4 do seu domínio é discretizado por 4 elementos finitos e 8 elementos de contorno. Os resultados são comparados com as soluções aproximadas por séries, com as da Elasticidade, ou com as obtidas pelo Método dos Elementos Finitos.

Em todas as aplicações,  $h$  é a espessura da placa,  $a$  é o seu comprimento característico, e  $q_0$  é a intensidade do carregamento atuante. Os materiais empregados assim como suas propriedades estão listados na Tabela 4.1

Os resultados são adimensionalizados por meio das seguintes relações:

$$\bar{w} = w \left( \frac{E_2 h^3}{q_0 a^4} \right) \times 10^n \quad (a)$$

$$\bar{\sigma}_i = \sigma_i \left( \frac{h^2}{q_o a^2} \right) \quad i = 1, 2, \text{ e } 6 \quad (b)$$

$$\bar{\sigma}_j = \sigma_j \left( \frac{h}{q_o a} \right) \quad j = 4, 5 \quad (c)$$

$$\bar{M}_i = \frac{M_i \times 10^2}{q_o a^2} \quad i = 1, 2 \text{ e } 6 \quad (d)$$

$$\bar{\theta}_i = \frac{\theta_i E_T h^3}{q_o a^3} \times 10^2 \quad i = 1, 2 \quad (4.49-e)$$

onde  $\underline{n}$  é uma constante que define o fator multiplicativo de  $w$  em (4.49-a). Quando não houver nenhuma referência,  $n = 2$  ("default").

Vale lembrar que, das equações de equilíbrio de placas laminadas para a Teoria de Primeira Ordem, resultam cinco condições de contorno associadas aos graus de liberdade expressos em (4.1). No caso particular de uma placa retangular, com os bordos paralelos aos eixos de referência, em cada ponto no contorno devem ser especificadas as cinco condições, de acordo com a Tabela 4.2.

Para um bordo genérico, cujo vetor normal possui componentes definidas por seus cossenos diretores,  $n_x$  e  $n_y$ , os valores acima são substituídos pelas componentes "normal" e "tangencial", que podem ser determinadas a partir das seguintes relações:

$$u_n = u_o n_x + v_o n_y$$

$$u_t = -u_o n_y + v_o n_x$$

$$\theta_n = \theta_x n_x + \theta_y n_y$$

$$\begin{aligned}
\theta_t &= -\theta_x n_y + \theta_y n_x \\
N_n &= N_x n_x^2 + N_y n_y^2 + 2 n_x n_y N_{xy} \\
N_t &= (N_y - N_x) n_x n_y + N_{xy} (n_x^2 - n_y^2) \\
M_n &= M_x n_x^2 + M_y n_y^2 + 2 n_x n_y M_{xy} \\
M_t &= (M_y - M_x) n_x n_y + M_{xy} (n_x^2 - n_y^2) \\
Q_n &= Q_x n_x + Q_y n_y
\end{aligned} \tag{4.50}$$

A definição das condições de contorno num laminado é de fundamental importância, pois o comportamento direcional do mesmo é fortemente influenciado pela especificação que se dê aos bordos da placa, especialmente para o caso de laminados não simétricos. O MMFGL estabelece

Tabela 4.2. Especificação das Condições de Contorno em um bordo paralelo aos eixos coordenados.

Cond. Contorno			
	Essenciais		Naturais
Especificam-se:	$u_o$	ou	$N_x$
	$v_o$	ou	$N_y$
	$w_o$	ou	$Q_x$ (ou $Q_y$ )
	$\theta_x$	ou	$M_x$
	$\theta_y$	ou	$M_y$

Tabela 4.3. Graus de Liberdade Restritos (0) e Liberados (1) para um ponto nodal no contorno, em bordo paralelo ao Eixo "X".

Cond. Contorno	Sigla	Graus de Liberdade (FSDT)				
		$u$	$v$	$w$	$\theta_x$	$\theta_y$
Apoio Simples "Soft"	SS-1	1	1	0	1	1
Apoio Simples "Hard"	SS-2	0	1	0	0	1
Engaste	CC	0	0	0	0	0
Livre	FF	1	1	1	1	1
Simetria	SX	1	0	1	1	0

tais condições para cada grau de liberdade. Definindo por "0" o grau restrito, e por "1" o liberado, a Tabela 4.3. mostra, no caso de um bordo paralelo ao Eixo "X", a definição dos graus de liberdade para um ponto nodal, conforme as condições de contorno correspondentes àquele nó. Para o caso do apoio na direção Y, basta trocar os graus de liberdade  $u$  por  $v$  e  $\theta_x$  por  $\theta_y$ . A restrição ou não do grau de liberdade deve vir acompanhada, necessariamente, do valor prescrito do deslocamento ou do esforço associado, conforme indicado na Tabela 4.2.

É conveniente lembrar a distinção entre os casos SS-1 e SS-2 da tabela anterior. Embora ambos correspondam a uma situação de apoio simples, a especificação dos graus restritos e liberados, conforme indicado, implicará em resultados completamente distintos, especialmente nos cantos, onde é maior a influência do momento de torção  $M_{xy}$ . Segundo Häggblad & Bathe [1990], uma condição de apoio simples "soft" remove, de um canto da placa, o comportamento singular dos esforços resultantes observados no modelo de Kirchhoff. Salvo indicação em contrário, os exemplos a seguir apresentados correspondem ao caso SS-2.

## 4.4.1. Placa Isotrópica Simplesmente Apoiada.

A aplicação inicial do MMFGL usando a Teoria de Primeira Ordem corresponde ao caso de uma placa isotrópica, quadrada, e simplesmente apoiada. As análises são realizadas considerando-se carregamento senoidal ou uniformemente distribuído ao longo da superfície da placa. O coeficiente de Poisson,  $\nu$ , vale 0.3. Devido às condições de simetria, apenas 1/4 da placa é discretizado. São utilizadas malhas com 1, 4, 9, e 16 elementos finitos no domínio para examinar a convergência dos resultados.

A análise inicial corresponde ao caso de um carregamento senoidal, expresso pela relação:

$$q(x,y) = q_0 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi y}{a} \right) \quad (4.51)$$

onde  $q_0$  é a intensidade do carregamento no centro da placa e  $a$  é a dimensão característica.

Tabela 4.4. - Placa isotrópica ( $\nu=0.3$ ), quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO SENOIDAL: valores dos deslocamentos verticais no nó central

$\frac{a}{h}$	Reddy (séries)	MMFGL			
		$M_{1 \times 1}$	$M_{2 \times 2}$	$M_{3 \times 3}$	$M_{4 \times 4}$
5	3.4349	3.4089	3.4340	3.4347	3.4348
10	2.9607	2.9405	2.9601	2.9606	2.9606
12.5	2.9038	2.8843	2.9032	2.9037	2.9038
20	2.8422	2.8234	2.8416	2.8420	2.8421
50	2.8090	2.7906	2.8085	2.8089	2.8089
100	2.8042	2.7859	2.8037	2.8041	2.8042

Placa Fina : 2.8027

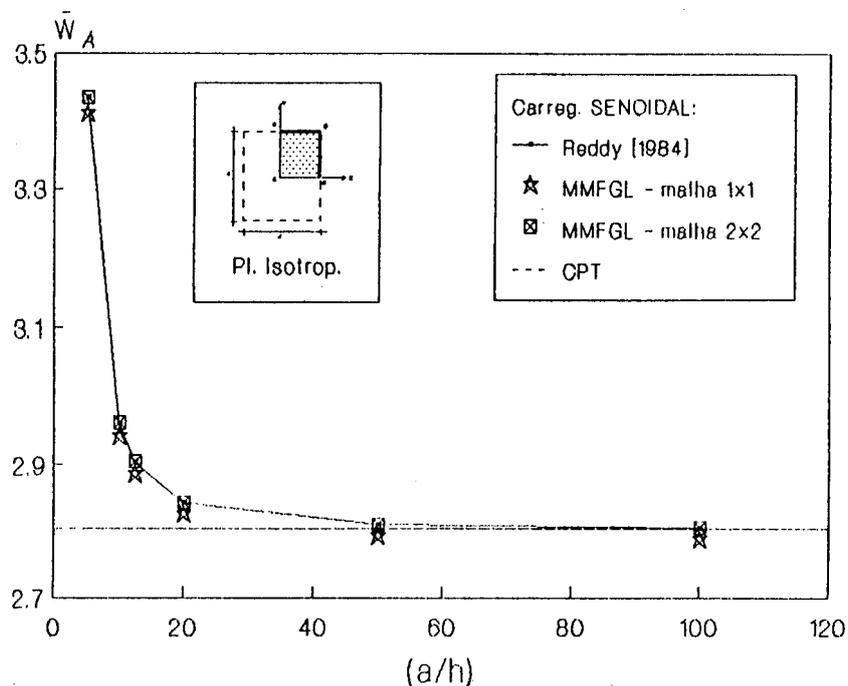


Figura 4.2. - Placa isotrópica ( $\nu=0.3$ ), quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO SENOIDAL: deslocamentos  $\bar{w}$  no centro (Ponto A).

Para diversas relações  $a/h$ , onde  $h$  é a espessura da placa, são calculados os deslocamentos verticais no ponto central e comparados com os resultados obtidos por Reddy [1984] através de expansões em séries com 19 termos. Todos estes valores estão indicados na Tabela 4.4.

Na Figura 4.2, são apresentados os deslocamentos calculados pelas malhas 1x1 e 2x2 de elementos finitos, bastante próximos aos fornecidos por Reddy. É interessante observar que a desconsideração do cisalhamento transversal na Teoria Clássica, conduz a um erro da ordem de 22.5 % para o caso de placas espessas.

A análise seguinte é efetuada considerando-se um carregamento uniformemente distribuído na superfície da placa. Neste caso, além dos resultados fornecidos por Reddy [1984] determinados por séries, são indicados, também, os de Lakshiminarayana e Murthy [1984], que implementaram um elemento finito triangular de placa, de três pontos nodais e 15 graus de liberdade por nó, denominado de "TRIPLT". Esse elemento é baseado na Teoria de Primeira Ordem (FSDT), e mostrou-se altamente preciso nas aplicações realizadas. Novamente, quatro malhas foram utilizadas para testar o MMFGL, com 1, 4, 9 e 16 elementos finitos.

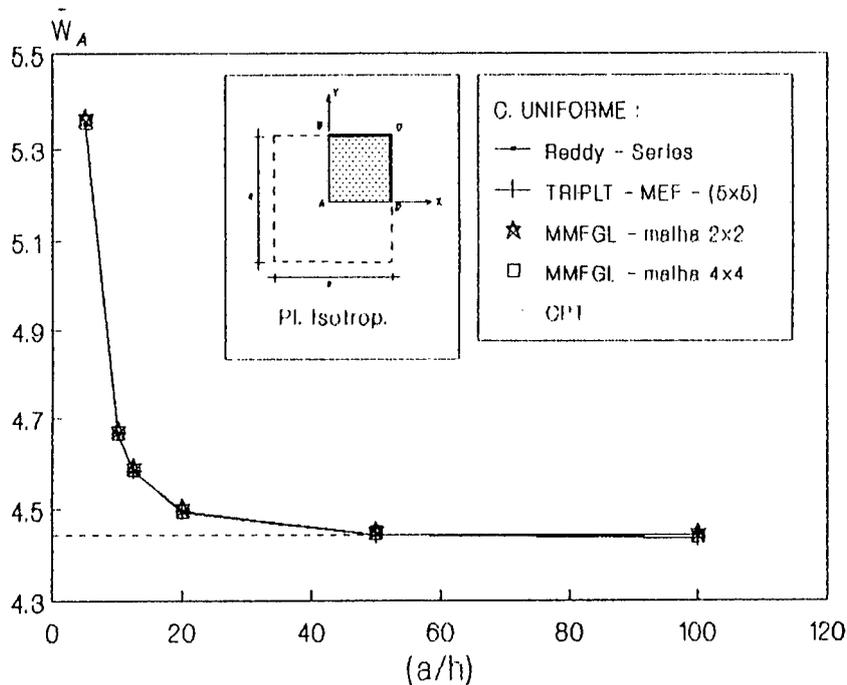


Figura 4.3. - Placa isotrópica ( $\nu=0.3$ ), quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO UNIFORME: deslocamentos  $\bar{w}$  no centro da placa (Ponto A)

Tabela 4.5. - Placa isotrópica ( $\nu=0.3$ ), quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO UNIFORME: valores dos deslocamentos verticais no nó central

$\frac{a}{h}$	Reddy (séries)	TRIPLT (5x5)	MMMGL			
			$M_{1 \times 1}$	$M_{2 \times 2}$	$M_{3 \times 3}$	$M_{4 \times 4}$
5	5.3556	—	5.5161	5.3668	5.3570	5.3560
10	4.6660	4.6671	4.8138	4.6735	4.6674	4.6664
12.5	4.5832	4.5839	4.7295	4.5907	4.5846	4.5836
20	4.4936	4.4970	4.6383	4.5010	4.4950	4.4940
50	4.4453	4.4443	4.5890	4.4526	4.4466	4.4457
100	4.4438	4.4363	4.5820	4.4457	4.4398	4.4388
1000	—	4.3467	4.5797	4.4434	4.4375	4.4365

Placa Fina: 4.4370

Os resultados de deslocamentos do nó central fornecidos por Reddy, Lakshminarayana e pelo MMFGL estão indicados na Tabela 4.5. Os resultados do elemento TRIPLT correspondem a uma malha 5x5, com 50 elementos triangulares, e foi adotado um coeficiente de correção do cisalhamento,  $k_s$ , igual a 0.91. Para o MMFGL, considerou-se  $k_s = 5/6$ . Os valores constantes na Tabela 4.5 estão representados, graficamente, na Figura 4.3.

Tomando por referência os resultados fornecidos por Reddy, o MMFGL apresenta diferenças, cujos valores, em porcentagem, estão representados nas Figuras 4.4 e 4.5. Na primeira delas, mostra-se a variação dos resultados com o refino da malha, para relações  $a/h$  iguais a 5 e a 100, tanto para o carregamento uniforme quanto para o senoidal. Observa-se que, com malha 2x2, o MMFGL apresenta resultados bastante aceitáveis, com erro máximo da ordem de 0.02 % . Um único elemento (malha 1x1), corresponde a um erro de 0.76 % para o carrega-

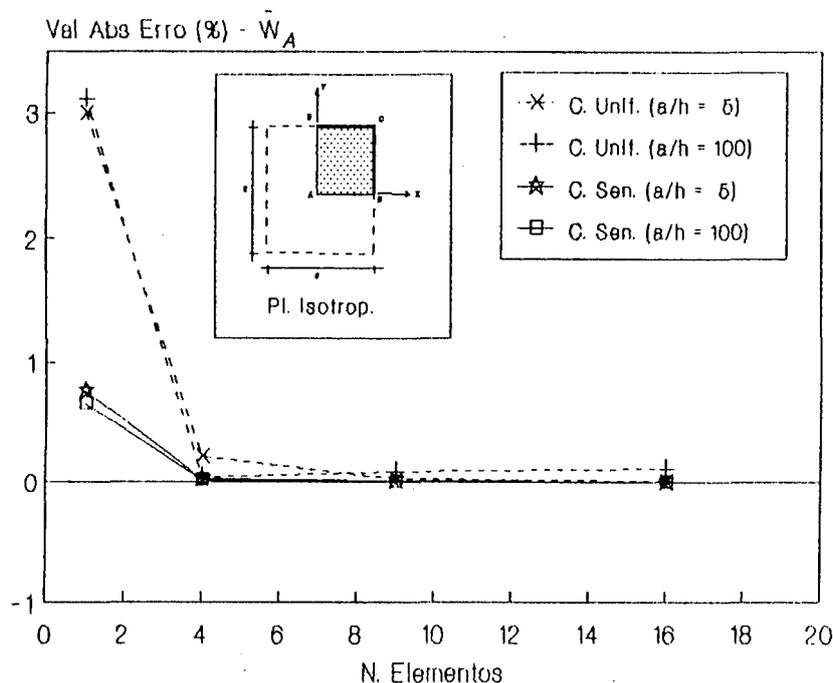


Figura 4.4. - Placa isotrópica ( $\nu=0.3$ ), quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO SENOIDAL ou UNIFORME: erro em (%) com o refino da malha.

mento senoidal, e a 3.22 % para o uniforme. Variando-se a relação  $a/h$ , há uma tendência das diferenças permanecerem nesses patamares, conforme mostra a Figura 4.5, para as malhas  $1 \times 1$  e  $2 \times 2$  elementos de domínio.

Reddy [1984] também fornece, para este caso, os valores das tensões normais e cisalhantes, estas últimas calculadas por Relação Constitutiva ou por Equilíbrio. Para comparar a precisão e convergência dos resultados das tensões por meio do MMFGL, foi preparada a Tabela 4.6., considerando duas relações de  $a/h$  iguais a 5 e a 10. Os resultados das colunas indicadas por "MEF" foram determinados

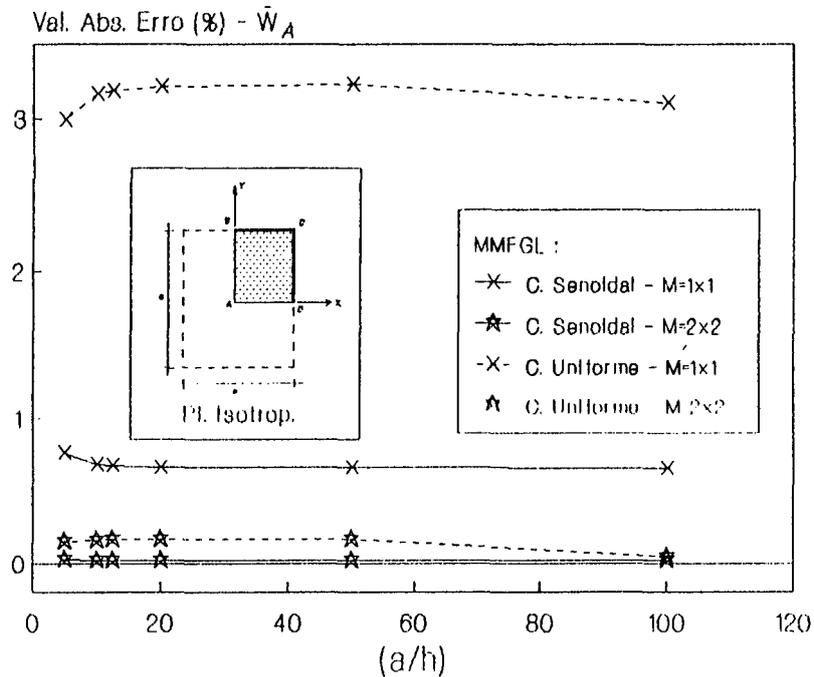


Figura 4.5. - Placa isotrópica ( $\nu=0.3$ ), quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO SENOIDAL OU UNIFORME: erro em (%) conforme a variação de  $a/h$ .

pelo processo convencional de elementos finitos, ou seja, derivação do campo de deslocamentos e utilização de relações constitutivas. Já os indicados nas colunas "MMFGL" foram calculados diretamente a partir dos esforços nodais determinados pelo método integral. É interessante observar que, através do MMFGL, pode-se obter resultados razoáveis de tensões normais para o caso de um único elemento finito, o que, evidentemente, não ocorre no MEF.

Tabela 4.6. - Placa isotrópica ( $\nu=0.3$ ), quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO UNIFORME: resultados de tensões fornecidos por séries [Reddy (1984)], por derivação do campo de deslocamentos (MEF), e pelos valores nodais dos esforços do MMFGL.

a/h	MALHA	$\sigma_x = \sigma_y$		$\sigma_{xy}$		$\sigma_{xz} = \sigma_{yz}$	
		MEF	MMFGL	MEF	MMFGL	MEF †	MMFGL ‡
5	M	0.0000	0.3021	0.0000	0.2172	0.3088	0.4718
	M <sup>1x1</sup>	0.1824	0.2898	0.0866	0.1996	0.3664	0.4240
	M <sup>2x2</sup>	0.2381	0.2882	0.1321	0.1974	0.4026	0.4120
	M <sup>3x3</sup>	0.2591	0.2878	0.1539	0.1965	0.4250	0.4084
	M <sup>4x4</sup>	0.2691	0.2876	0.1658	0.1960	0.4394	0.4070
	M <sup>5x5</sup>						
	Reddy	0.2873		0.1946		0.4909	0.3928
10	M	0.0000	0.3017	0.0000	0.2209	0.3118	0.4668
	M <sup>1x1</sup>	0.1823	0.2898	0.0866	0.1996	0.3665	0.4231
	M <sup>2x2</sup>	0.2381	0.2882	0.1321	0.1975	0.4026	0.4120
	M <sup>3x3</sup>	0.2591	0.2878	0.1539	0.1966	0.4251	0.4084
	M <sup>4x4</sup>	0.2691	0.2876	0.1658	0.1961	0.4394	0.4071
	M <sup>5x5</sup>						
	Reddy	0.2873		0.1946		0.4909	0.3928

† Cálculo por meio das Equações de Equilíbrio;

‡ Cálculo por meio de Relações Constitutivas.

A convergência das tensões normais e cisalhantes é ilustrada nas Figuras 4.6 à 4.8, onde se observa uma rápida aproximação dos resultados de  $\sigma_x$  e de  $\sigma_{xy}$  aos fornecidos por Reddy, mas, para as tensões transversais,  $\sigma_{xz}$ , como consequência do processo de derivação, a aproximação é mais lenta.

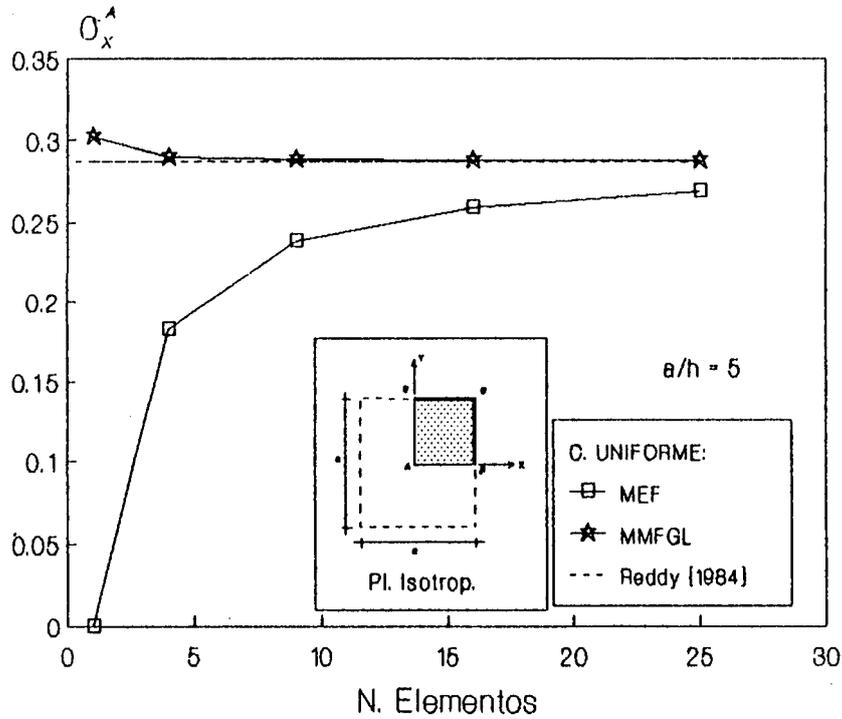


Figura 4.6. - Placa isotrópica ( $\nu=0.3$ ), quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO UNIFORME: tensões  $\sigma_x$  para  $a/h=5$ .

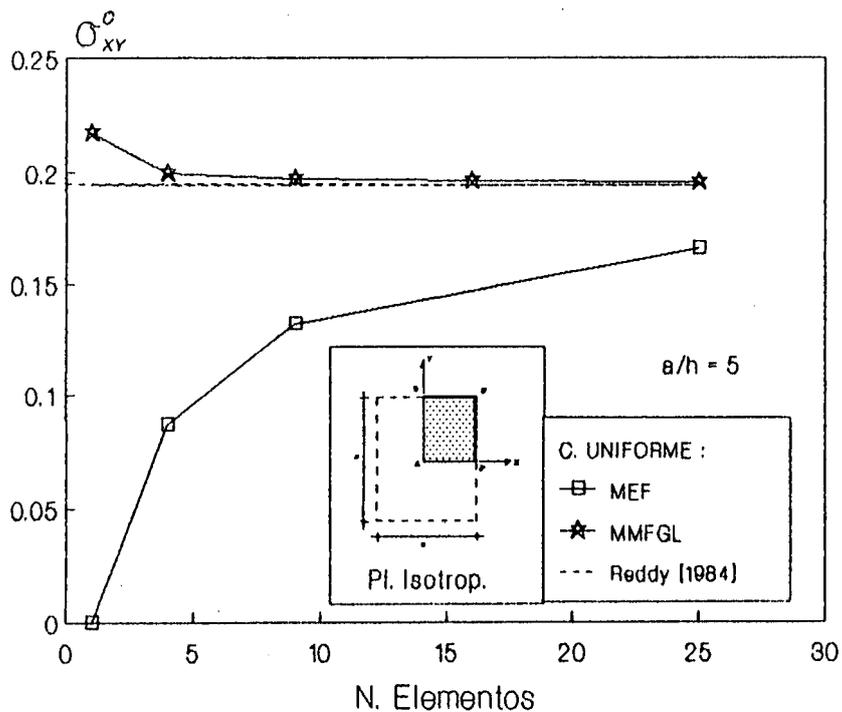


Figura 4.7. - Placa isotrópica ( $\nu=0.3$ ), quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO UNIFORME: tensões  $\sigma_{xy}$  para  $a/h=5$ .

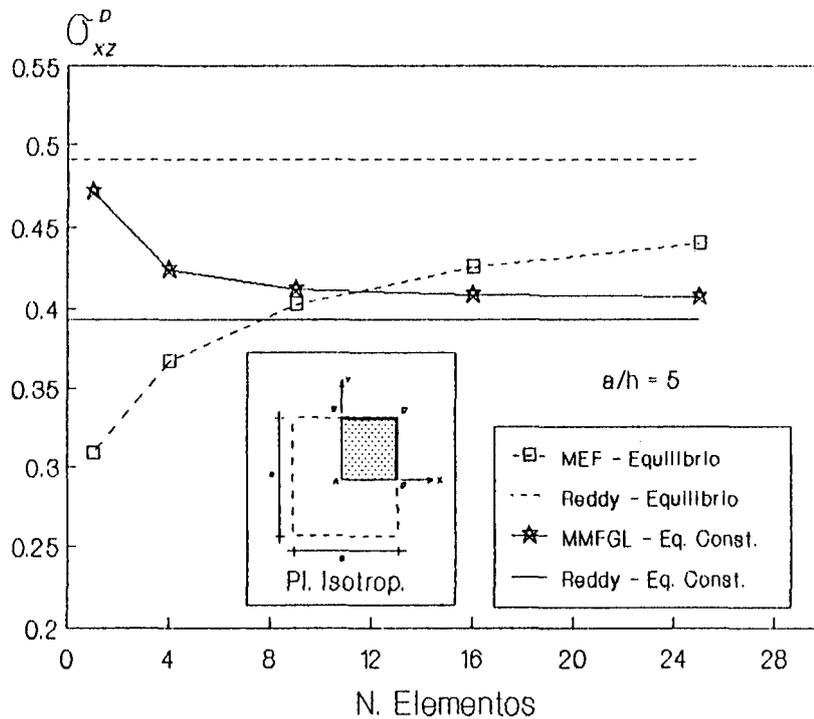


Figura 4.8. - Placa isotrópica ( $\nu=0.3$ ), quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO UNIFORME: tensões  $\sigma_{xz}$  para  $a/h=5$ .

Finalmente, na Tabela 4.7. são comparados os resultados do presente trabalho com aqueles obtidos por Barbieri [1992], que utilizou o MMFGL para analisar placas isotrópicas utilizando o Modelo de Mindlin, com três graus de liberdade por nó. Os resultados indicados na Tabela 4.7. foram determinados, por ambas as alternativas, considerando-se elementos lagrangeanos quadráticos de nove nós em malha  $2 \times 2$ . São fornecidos os resultados de deslocamentos e de momentos  $M_x$  no centro da placa, momentos  $M_{xy}$  no canto, e esforço cisalhante  $Q_x$  ou  $Q_y$  no meio do lado. Verifica-se a total concordância entre os resultados.

Tabela 4.7. - Placa isotrópica ( $\nu=0.3$ ), quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO UNIFORME: resultados do MMFGL determinados por um Modelo de Mindlin [Barbieri (1992)] e pela Teoria de Placa Laminada de Primeira Ordem (FSDT) considerando Malha 2x2.

$a/h$	$\bar{w}$		$M_x$		$M_{xy}$		$Q_x$	
	Mindlin	FSDT	Mindlin	FSDT	Mindlin	FSDT	Mindlin	FSDT
5	5.3638	5.3638	4.8270	4.8307	3.3308	3.3272	-3.5332	-3.5332
20	4.5010	4.5010	4.8267	4.8301	3.3655	3.3621	-3.5048	-3.5048
100	4.4457	4.4457	4.8264	4.8295	3.4011	3.3980	-3.4642	-3.4642
1000	4.4434	4.4434	4.8264	4.8294	3.4012	3.4011	-3.4062	-3.4062

#### 4.4.2. Placa Ortotrópica Simplesmente Apoiada.

O segundo exemplo a ser tratado refere-se ao caso de uma placa ortotrópica quadrada e simplesmente apoiada. As propriedades elásticas correspondem às do Material 2, indicadas na Tabela 1. Duas condições de carregamento são consideradas: carregamento senoidal, com distribuição regida pela expressão (4.46), e carregamento uniforme. Devido às condições de simetria, apenas 1/4 da placa é discretizado. Resultados de deslocamentos são comparados com os fornecidos por Reddy [1984], que utilizou expansões em séries (19 termos).

Inicialmente, na Tabela 4.8, são mostrados os deslocamentos no centro da placa para diversas relações  $a/h$ , e para diversos tipos de malhas uniformes usadas pelo MMFGL, considerando o caso de carregamento senoidal. O mesmo é feito na Tabela 4.9 para o carregamento uniforme.

Tabela 4.8. - Placa ortotrópica (Material 2), quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO SENOIDAL: deslocamentos verticais do nó central.

$\frac{a}{h}$	Reddy (séries)	MMFGL			
		$M_{1 \times 1}$	$M_{2 \times 2}$	$M_{3 \times 3}$	$M_{4 \times 4}$
5	1.2327	1.2174	1.2318	1.2325	1.2326
10	0.6383	0.6321	0.6381	0.6383	0.6383
12.5	0.5644	0.5593	0.5643	0.5644	0.5644
20	0.4836	0.4794	0.4835	0.4836	0.4836
50	0.4397	0.4360	0.4395	0.4396	0.4396
100	0.4334	0.4298	0.4332	0.4333	0.4333

Placa Fina: 0.4313

Tabela 4.9. Placa ortotrópica (Material 2), quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO UNIFORME: deslocamentos verticais do nó central.

$\frac{a}{h}$	Reddy (séries)	MMFGL			
		$M_{1 \times 1}$	$M_{2 \times 2}$	$M_{3 \times 3}$	$M_{4 \times 4}$
5	1.8159	1.8552	1.8165	1.8162	1.8162
10	0.9519	0.9881	0.9521	0.9520	0.9520
12.5	0.8442	0.8796	0.8443	0.8442	0.8442
20	0.7262	0.7606	0.7262	0.7261	0.7262
50	0.6620	0.6957	0.6619	0.6620	0.6620
100	0.6528	0.6864	0.6527	0.6527	0.6528

Placa Fina : 0.6497

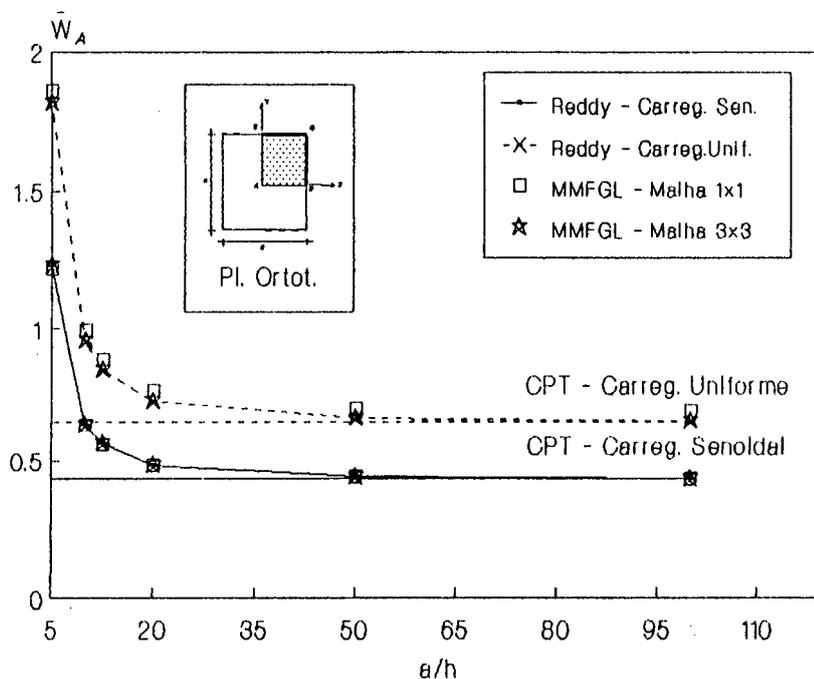


Figura 4.9. - Placa ortotrópica (Material 2), quadrada, e apoiada: valores dos deslocamentos verticais no nó central (Ponto A).

A Figura 4.9. ilustra, graficamente, a variação dos deslocamentos correspondentes aos carregamentos senoidal e uniforme, para os casos de malhas 1x1 e 3x3, conforme a relação  $a/h$ . A Figura 4.10. mostra o erro absoluto, em porcentagem, dos deslocamentos determinados pelo MMFGL em relação aos fornecidos por Reddy, para os dois casos de carregamento, e para  $a/h$  igual a 5 e a 100. Fica evidente que o desempenho de um único elemento, neste caso, já não é tão bom como no isotrópico, uma vez que, para o carregamento senoidal, o erro corresponde a 1,24 %, enquanto que, para o uniforme, ele sobe a 5,15 %, valores bem superiores aos 0,76 % e 3,15 %, respectivamente, do exemplo anterior.

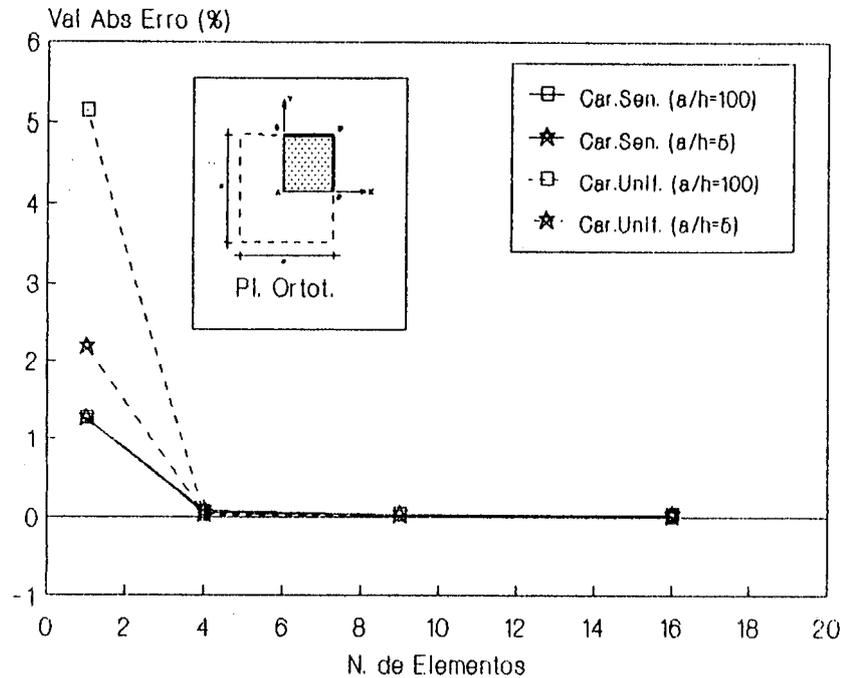


Figura 4.10. - Placa ortotrópica (Material 2) quadrada e apoiada: erro percentual dos deslocamentos no nó central (Ponto A).

Se a desconsideração dos efeitos cisalhantes transversais em placas espessas e semi-espessas isotrópicas já representava um erro razoável, agora, para o problema ortotrópico, tal procedimento implica em falha ainda mais grave. No exemplo em questão, os deslocamentos verticais no nó central calculados pela FSDT correspondem a 2,8581 vezes aqueles determinados pela CPT, considerando carregamento senoidal e relação  $a/h$  igual a 5; se o carregamento for uniforme, tal diferença chega a 2,795 vezes.

#### 4.4.3. Placa Laminada $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$ Simplesmente Apoiada.

O terceiro exemplo corresponde ao caso de um laminado simétrico, composto de quatro lâminas de mesma espessura, com propriedades elásticas correspondentes às do Material 2 indicado na Tabela 4.1. As lâminas são dispostas segundo uma configuração  $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$ . A placa está submetida a um carregamento uniformemente distribuído. Devido às condições de simetria, apenas um quarto da placa é discretizado. São utilizadas malhas de  $2 \times 2$  e  $4 \times 4$  elementos finitos no domínio.

Resultados de deslocamentos, tensões normais, e tensões cisalhantes calculadas pelas Equações de Equilíbrio para diversas relações  $a/h$  estão apresentados na Tabela 4.10., e foram adimensionalizados segundo as expressões (4.44) com  $n = 2$ . São fornecidos, também, os resultados de Pagano [1970a], Engblom e Uchoa [1985, 1986], Putchá e Reddy [1986], Reddy [1984] e Noel [1991a,b]. Deve-se salientar que os resultados de Pagano, determinados pela Teoria da Elasticidade, estão indicados apenas como comparação pois, como já mencionado, a Teoria de Primeira Ordem (FSDT) é naturalmente limitada para os aproximar, especialmente no caso de placas espessas. Por outro lado, Putchá e Reddy [1986] utilizaram uma formulação mista de elementos finitos. Os resultados de Reddy [1984] foram determinados por meio de uma Teoria de Primeira Ordem. Engblom e Uchoa [1985, 1986] empregaram uma formulação refinada, expandindo os deslocamentos planares por meio de polinômios quadráticos. E, finalmente, Noel [1991a,b] adotou um procedimento misto baseado em deformações supostas para desenvolver um elemento de casca de dupla curvatura. Esta é uma das mais avançadas formulações de elementos finitos na atualidade. Os seus resultados estão indicados para os casos de malhas  $3 \times 3$  e  $6 \times 6$ . Entretanto, como se pode observar, os resultados do MMFGL estão bem próximos à eles.

Tabela 4.10 - Placa Laminada  $0^{\circ}/90^{\circ}/90^{\circ}/0^{\circ}$ , quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO UNIFORME: deslocamentos, tensões normais e cisalhantes.

$a/h$	Fonte	$\bar{w}$ (Pt. A)	$\bar{\sigma}_x$ (Pt.A)	$\bar{\sigma}_y$ (Pt.A)	$\bar{\sigma}_{xy}$ (Pt.C)	$\bar{\sigma}_{yz}$ (Pt.B)	$\bar{\sigma}_{xz}$ (Pt.C)
4	Noel-3x3	17.087	0.414	0.597	0.032	0.271	0.256
	Noel-6x6	17.095	0.408	0.582	0.031	0.278	0.265
	Engblom	22.598	0.387	0.615	0.034	0.336	0.300
	Putcha	17.170	0.399	0.568	0.030	-	-
	Pagano	19.536	0.720	0.666	0.048	0.292	0.270
	Reddy	17.170	0.406	0.577	0.031	0.196	0.140
	MMFGL-2x2	17.088	0.413	0.589	0.031	0.246	0.177
	MMFGL-4x4	17.095	0.408	0.587	0.031	0.271	0.243
10	Noel-3x3	6.627	0.511	0.372	0.025	0.174	0.304
	Noel-6x6	6.627	0.502	0.364	0.024	0.179	0.314
	Engblom	7.704	0.490	0.382	0.026	0.209	0.325
	Putcha	6.642	0.491	0.356	0.024	-	-
	Pagano	7.434	0.559	0.403	0.028	0.196	0.301
	Reddy	6.628	0.499	0.362	0.024	0.129	0.167
	MMFGL-2x2	6.626	0.507	0.377	0.024	0.158	0.208
	MMFGL-4x4	6.627	0.501	0.375	0.024	0.175	0.287
20	Noel-3x3	4.912	4.540	0.304	0.023	0.144	0.319
	Noel-6x6	4.911	0.530	0.298	0.022	0.149	0.329
	Engblom	5.233	0.528	0.298	0.023	0.167	0.339
	Putcha	4.916	0.519	0.291	0.021	-	-
	Pagano	5.172	0.543	0.309	0.023	0.156	0.328
	Reddy	4.912	0.527	0.296	0.022	0.109	0.175
	MMFGL-2x2	4.911	0.534	0.310	0.023	0.132	0.217
	MMFGL-4x4	4.912	0.529	0.310	0.022	0.145	0.301
50	Noel-3x3	4.410	0.549	0.280	0.022	0.135	0.324
	Noel-6x6	4.409	0.540	0.275	0.022	0.139	0.334
	Engblom	4.498	0.542	0.265	0.022	0.152	0.345
	Putcha	4.410	0.528	0.269	0.021	-	-
	Pagano	4.485	0.539	0.276	0.022	0.141	0.337
	Reddy	-	-	-	-	-	-
	MMFGL-2x2	4.409	0.540	0.289	0.023	0.123	0.220
	MMFGL-4x4	4.409	0.538	0.288	0.022	0.136	0.305
100	Noel-3x3	4.338	0.550	0.277	0.022	0.133	0.324
	Noel-6x6	4.337	0.541	0.272	0.022	0.137	0.335
	Engblom	4.395	0.544	0.259	0.022	0.146	0.346
	Putcha	4.337	0.530	0.266	0.021	-	-
	Pagano	4.385	0.539	0.271	0.021	0.139	0.339
	Reddy	4.337	0.541	0.271	0.021	0.101	0.178
	MMFGL-2x2	4.336	0.540	0.285	0.023	0.121	0.134
	MMFGL-4x4	4.337	0.539	0.285	0.022	0.134	0.306
	CPT	4.350	0.539	0.269	0.021	0.138	0.339

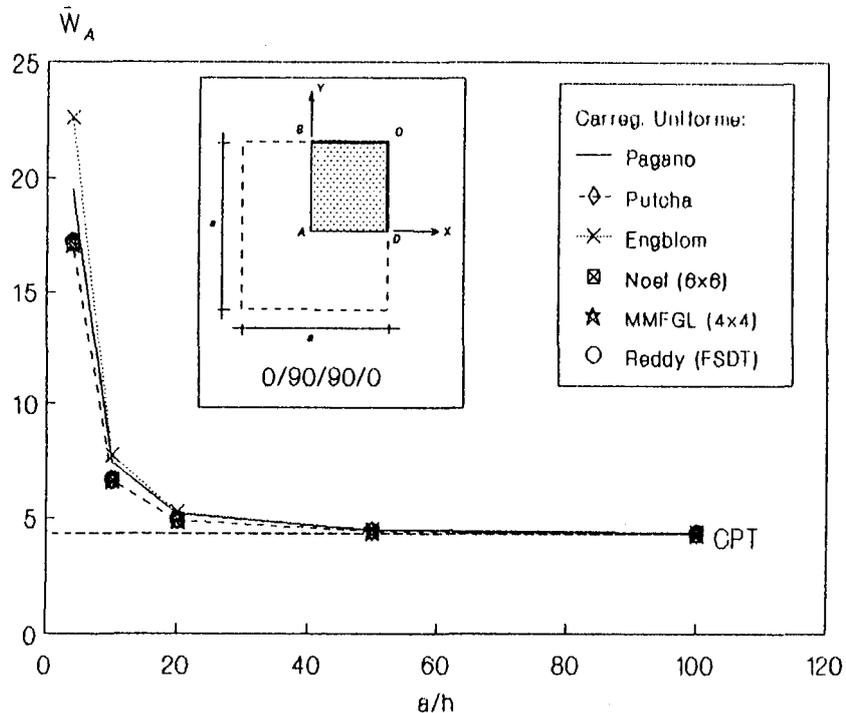


Figura 4.11. - Placa Laminada 0/90/90/0, quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO UNIFORME: deslocamentos verticais no nó central

Os valores apresentados correspondem aos seguintes pontos:  $\bar{w}$  no Ponto A (0,0,0);  $\bar{\sigma}_x$  no Ponto A (0,0,  $\pm h/2$ );  $\bar{\sigma}_y$  no Ponto A (0,0,  $\pm h/4$ );  $\bar{\sigma}_{xy}$  no ponto C (a/2, a/2,  $\pm h/2$ );  $\bar{\sigma}_{yz}$  no ponto B (0, a/2, 0); e  $\bar{\sigma}_{xz}$  no ponto D (a/2, 0, 0).

Os resultados indicados na tabela anterior estão representados graficamente nas Figuras 4.11 à 4.15. Assim, a variação dos deslocamentos, para várias relações  $a/h$ , está ilustrada na Figura 4.11. Nota-se que o modelo adotado pelo MMFGL é um pouco mais rígido do que o necessário para alcançar os resultados de Pagano (Elasticidade). No

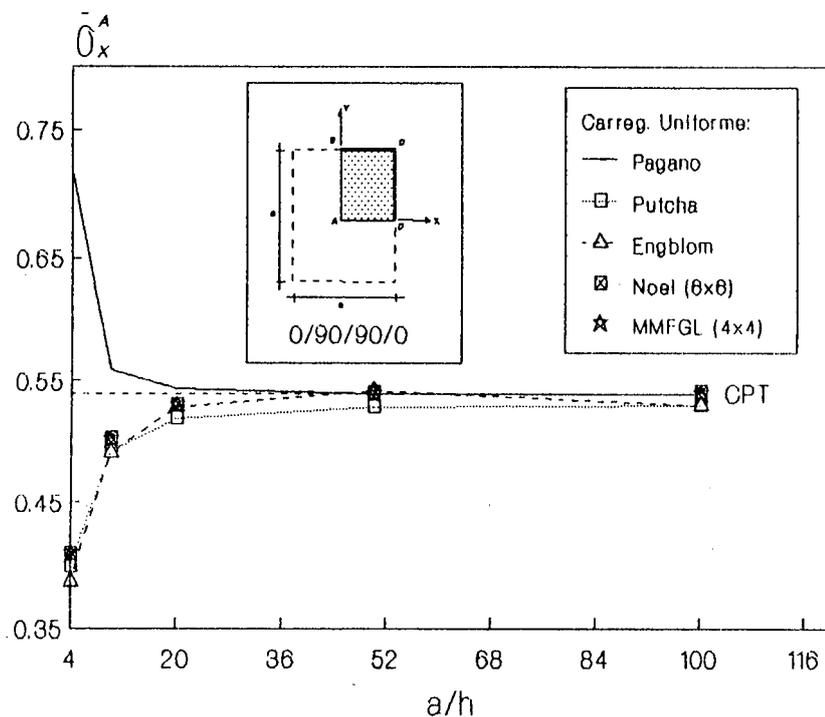


Figura 4.12. - Placa Laminada O/90/90/0, quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO UNIFORME: tensões normais  $\sigma_x$  no ponto central.

entanto, esta é uma das características inerentes da FSDT, sendo também observada nos modelos de Noel e de Putchá, que adotaram expansões lineares semelhantes do campo de deslocamentos. Por outro lado, deve-se observar que a diferença entre o resultado de Pagano e aquele determinado pela Teoria Clássica representa um expressivo valor de 4.49 vezes quando a relação  $a/h$  vale 4.0.

As tensões normais  $\sigma_x$  e  $\sigma_{xy}$  estão apresentadas nas Figuras 4.12 e 4.13, respectivamente. Calculadas diretamente a partir dos valores

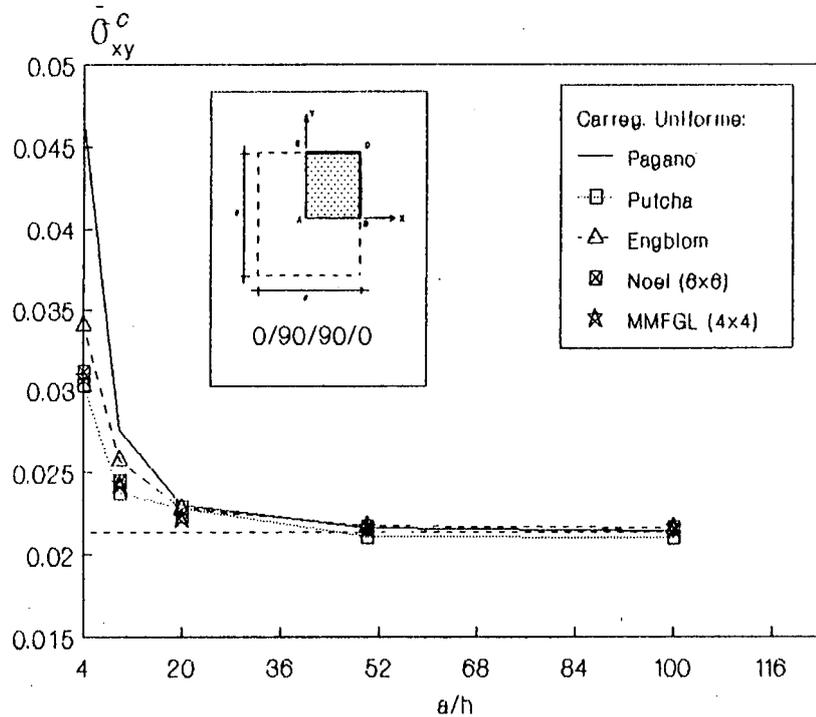


Figura 4.13. - Placa Laminada 0/90/90/0, quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO UNIFORME: tensões  $\sigma_{xy}$  no Ponto C.

nodais do MMFGL, seus resultados são muito bons. Já as tensões transversais  $\sigma_{yz}$  e  $\sigma_{xz}$ , mostradas em 4.14 e 4.15, não têm o mesmo desempenho pois seus valores são afetados pelo processo de derivação para o cálculo das deformações. A limitação da FSDT de representar adequadamente o caso de placas espessas fica bem demonstrada na Figura 4.12, onde nenhum dos modelos aproximou os resultados da Teoria da Elasticidade (Pagano).

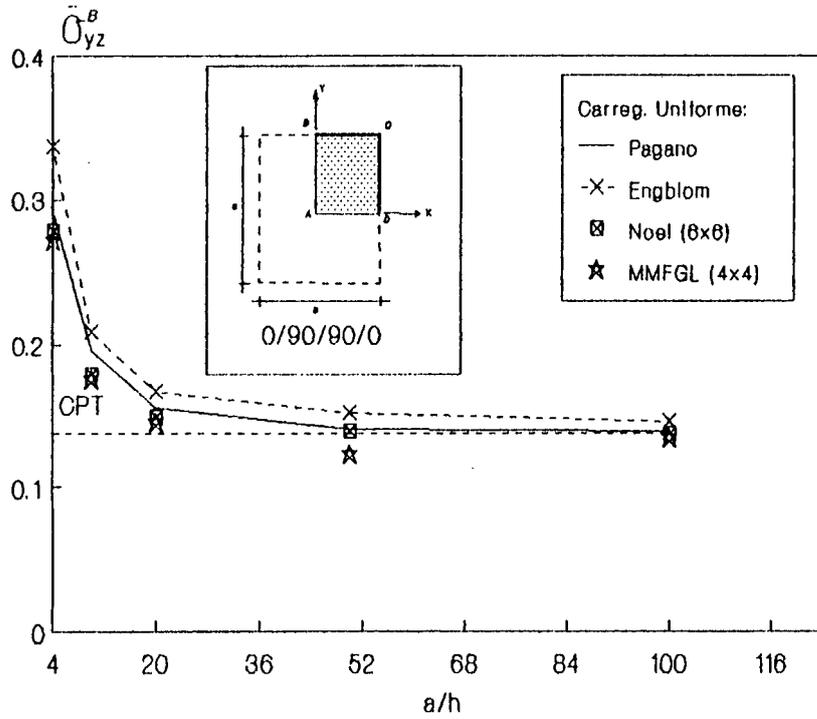


Figura 4.14. - Placa Laminada 0/90/90/0, quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO UNIFORME: tensões  $\sigma_{yz}$  no Ponto B.

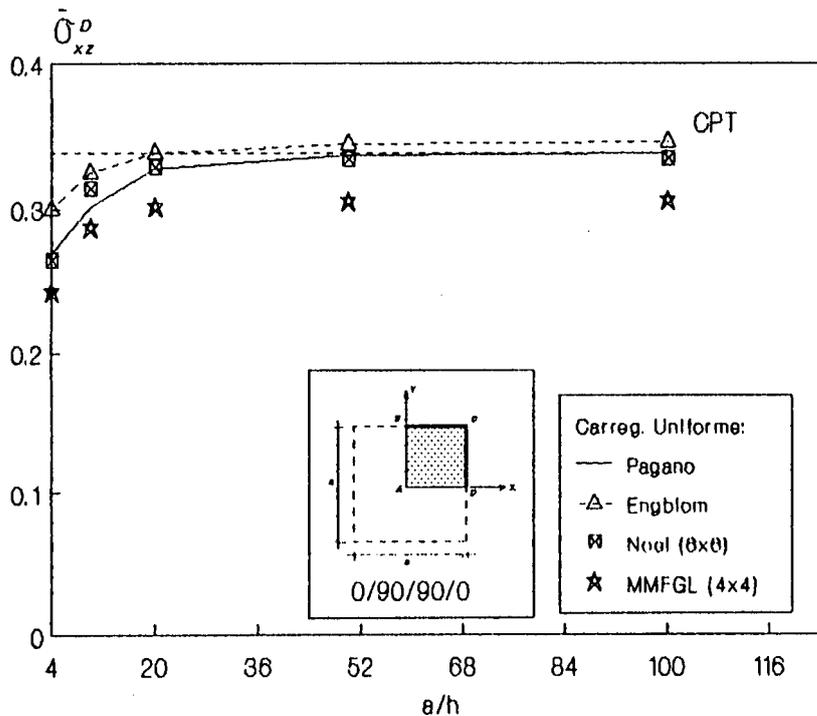


Figura 4.15. - Placa Laminada 0/90/90/0, quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO UNIFORME: tensões  $\sigma_{xz}$  no Ponto D.

#### 4.4.4. Placa Laminada Quadrada $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ .

A aplicação de agora consiste numa placa quadrada de três lâminas de mesma espessura,  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ , simplesmente apoiada, e submetida a um carregamento senoidal como em (4.46). As propriedades elásticas correspondem às do Material 2 na Tabela 4.1. Aproveitando as condições de simetria do problema, somente 1/4 da placa é discretizado. São utilizadas malhas uniformes com 2x2 e 4x4 elementos de domínio para aproximação das matrizes de Green.

Resultados de deslocamentos e de tensões estão fornecidos na Tabela 4.11. Nessa tabela, são apresentados, também, resultados de tensões obtidos pela Teoria da Elasticidade por Pagano [1970]; alguns resultados de deslocamentos e de tensões, determinados pela FSDT por Reddy e Chao [1981] via Método dos Elementos Finitos e considerando o coeficiente de correção do cisalhamento igual a 5/6; e valores de tensões determinados por Engblom e Uchoa [1985] através de elementos finitos quadrangulares, denominados QHD-40, com oito nós e sete graus de liberdade por nó. Tais elementos foram desenvolvidos a partir de uma expansão polinomial quadrática dos deslocamentos planares.

Levando-se em conta as limitações do modelo de primeira ordem, percebe-se, mais uma vez, o bom desempenho do MMFGL tanto em termos de deslocamentos quanto em termos de tensões normais. Embora o grau de precisão das tensões cisalhantes não seja tão acentuado como no caso das normais, em comparação com os outros resultados, seus valores estão muito bons.

A distribuição das tensões  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{xy}$  ao longo da espessura da placa, para o caso de  $a/h = 4$ , é ilustrada nas Figuras 4.16 e 4.17, respectivamente. Mesmo com um modelo de primeira ordem, o MMFGL apresenta uma razoável distribuição dessas tensões quando comparado com os resultados de Engblom. Nas duas figuras são também indicadas as soluções de Pagano (Elasticidade) e da Teoria Clássica de Placas (CPT).

Tabela 4.11. - Placa Laminada  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ , quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO SENOIDAL: deslocamentos e tensões atuantes, considerando malhas uniformes.

$a/h$	Fonte	$w$	$\sigma_x^A$	$\sigma_y^A$	$\sigma_{xy}^C$	$\sigma_{xz}^D$	$\sigma_{yz}^B$
4	Pagano	—	0.755	0.556	0.0505	0.282	0.217
	Reddy (FSDT)	1.7763	0.4369	—	—	—	0.1562
	Engblom-2x2	—	0.414	0.598	0.0465	0.296	0.238
	Engblom-6x6	—	0.391	0.572	0.0448	0.308	0.251
	MMFGL-2x2	1.7750	0.4438	0.4754	0.0378	0.3115	0.1775
	MMFGL-4x4	1.7758	0.4383	0.4955	0.0371	0.3295	0.1919
10	Pagano	—	0.590	0.288	0.0289	0.357	0.123
	Reddy (FSDT)	0.6693	0.5134	—	—	—	0.0915
	Engblom-2x2	—	0.529	0.292	0.0289	0.352	0.123
	Engblom-6x6	—	0.500	0.279	0.0280	0.369	0.130
	MMFGL-2x2	0.6692	0.5209	0.2746	0.0261	0.3483	0.1007
	MMFGL-4x4	0.6693	0.5145	0.2748	0.0253	0.3714	0.1083
20	Pagano	—	0.552	0.210	0.0234	0.385	0.0938
	Reddy (FSDT)	—	—	—	—	—	—
	Engblom-2x2	—	0.560	0.206	0.0240	0.367	0.0910
	Engblom-6x6	—	0.531	0.189	0.0233	0.387	0.0954
	MMFGL-2x2	0.4921	0.5378	0.2215	0.0239	0.3566	0.0825
	MMFGL-4x4	0.4921	0.5328	0.2216	0.0225	0.3815	0.0882
50	Pagano	—	0.541	0.185	0.0216	0.393	0.0842
	Reddy (FSDT)	—	—	—	—	—	—
	Engblom-2x2	—	0.567	0.178	0.0226	0.374	0.0812
	Engblom-6x6	—	0.541	0.164	0.0217	0.392	0.0843
	MMFGL-2x2	0.4410	0.5400	0.2055	0.0242	0.3582	0.0772
	MMFGL-4x4	0.4411	0.5384	0.2050	0.0217	0.3848	0.0819
100	Pagano	—	0.539	0.181	0.0213	0.395	0.0828
	Reddy (FSDT)	0.4337	0.5384	—	—	—	0.0703
	Engblom-2x2	—	0.566	0.174	0.0224	0.375	0.0803
	Engblom-6x6	—	0.542	0.167	0.0215	0.393	0.0827
	MMFGL-2x2	0.4336	0.5395	0.2033	0.0246	0.3581	0.0765
	MMFGL-4x4	0.4337	0.5391	0.2026	0.0218	0.3853	0.0811
	CPT	—	0.539	0.180	0.0213	0.395	0.082

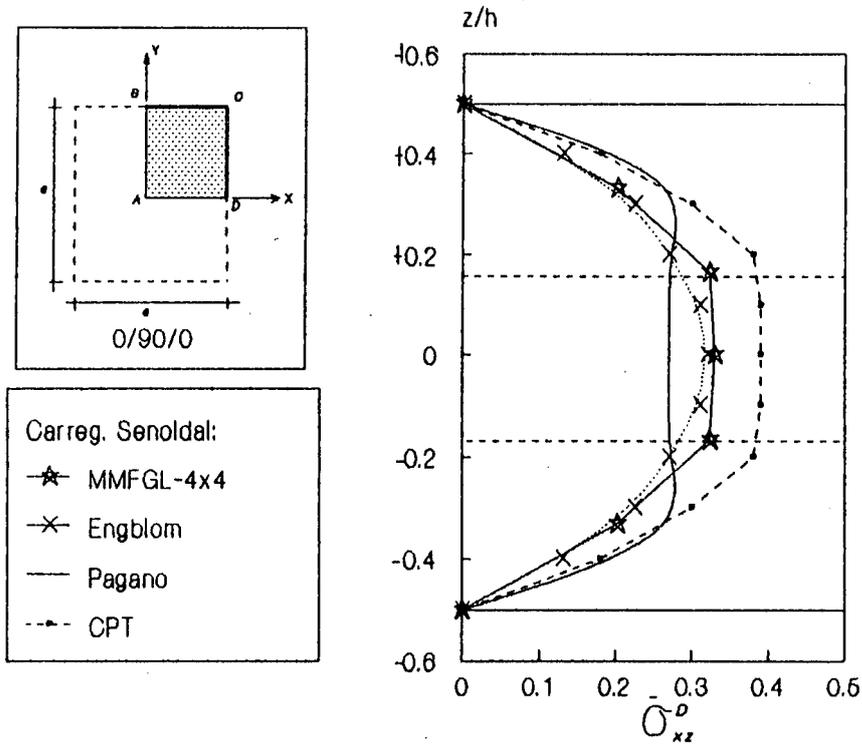


Figura 4.16. - Placa Laminada 0/90/0, quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO SENOIDAL: distribuição das tensões  $\sigma_{xz}$  ao longo da espessura ( $a/h = 4$ ).

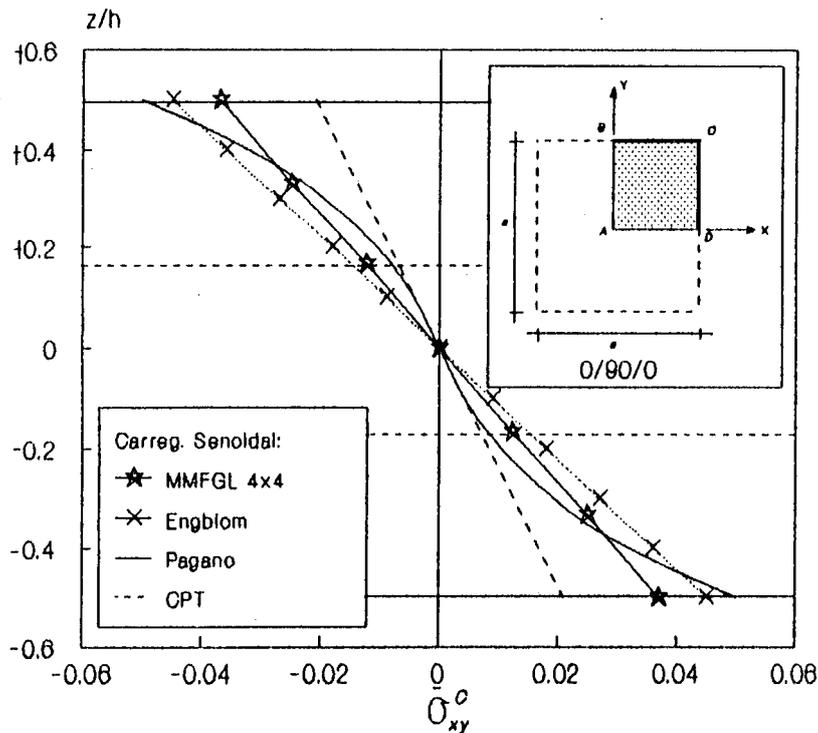


Figura 4.17. - Placa Laminada 0/90/0, quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO SENOIDAL: distribuição das tensões  $\sigma_{xy}$  ao longo da espessura ( $a/h = 4$ ).

Considerando este mesmo laminado, nova aplicação é realizada empregando-se as malhas distorcidas MD-1, MD-2 e MD-3 indicadas na Figura 4.18. O objetivo é testar a sensibilidade do método às distorções geométricas de seus elementos. Os resultados de deslocamentos e de tensões estão apresentados na Tabela 4.12, onde se incluem, também, as respostas do já citado trabalho de Engblom e Uchoa [1985], que utilizaram as mesmas malhas. Graficamente, estes resultados estão representados nas Figuras 4.19 à 4.23.

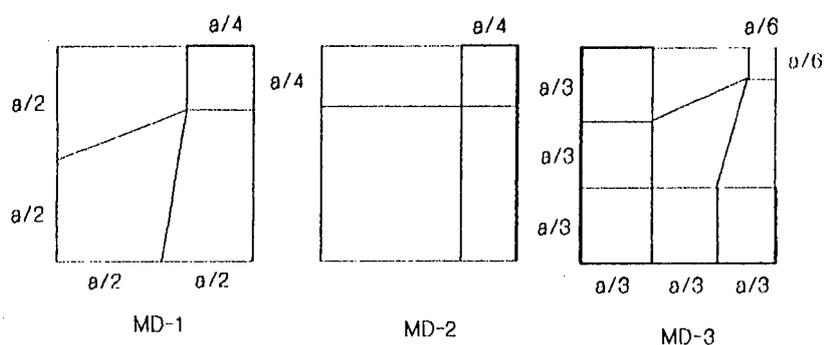


Figura 4.18. - Malhas Distorcidas Utilizadas

Os deslocamentos verticais do nó central estão ilustrados na Figura 4.19. São apresentados os resultados do MMFGL para as três malhas distorcidas. Na mesma figura, são indicadas as soluções de Engblom, com malhas distorcidas, e a de Reddy, por séries. Os resulta-

Tabela 4.12. - Placa Laminada  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ , quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO SENOIDAL: deslocamentos e tensões atuantes, considerando malhas distorcidas.

$a/h$	Fonte	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x^A$	$\bar{\sigma}_y^A$	$\bar{\sigma}_{xy}^C$	$\bar{\sigma}_{xz}^D$	$\bar{\sigma}_{yz}^B$
4	Pagano	—	0.755	0.556	0.0505	0.282	0.217
	Engblom (MD-1)	2.709	0.409	0.620	0.0525	0.128	0.122
	Engblom (MD-2)	2.473	0.393	0.573	0.0485	0.254	0.206
	Engblom (MD-3)	2.587	0.402	0.596	0.0472	0.290	0.229
	MMFLG (MD-1)	1.7720	0.4556	0.4988	0.0374	0.3134	0.1771
	MMFGL (MD-2)	1.7750	0.4573	0.4956	0.0373	0.3420	0.1860
	MMFGL (MD-3)	1.7758	0.4395	0.4953	0.0370	0.3235	0.1885
10	Pagano	—	0.590	0.288	0.0289	0.357	0.123
	Engblom (MD-1)	0.866	0.539	0.292	0.0344	0.141	0.0686
	Engblom (MD-2)	0.812	0.502	0.279	0.0300	0.293	0.107
	Engblom (MD-3)	0.839	0.530	0.286	0.0290	0.357	0.114
	MMFGL (MD-1)	0.6682	0.5309	0.2761	0.02455	0.3506	0.1001
	MMFGL (MD-2)	0.6697	0.5342	0.2722	0.02508	0.3832	0.1031
	MMFGL (MD-3)	0.6693	0.5159	0.2744	0.02482	0.3629	0.1067
20	Pagano	—	0.552	0.210	0.0234	0.385	0.0938
	Engblom (MD-1)	0.545	0.574	0.198	0.0297	0.153	0.0552
	Engblom (MD-2)	0.529	0.531	0.199	0.0248	0.303	0.079
	Engblom (MD-3)	0.539	0.571	0.198	0.0239	0.378	0.088
	MMFGL (MD-1)	0.4910	0.5475	0.2216	0.0223	0.3554	0.0819
	MMFGL (MD-2)	0.4925	0.5483	0.2196	0.0228	0.3907	0.0834
	MMFGL (MD-3)	0.4921	0.5345	0.2216	0.0212	0.3696	0.0862
50	Pagano	—	0.541	0.185	0.0216	0.393	0.0842
	Engblom (MD-1)	0.443	0.585	0.174	0.0300	0.180	0.0516
	Engblom (MD-2)	0.445	0.533	0.178	0.0226	0.304	0.070
	Engblom (MD-3)	0.449	0.587	0.177	0.0221	0.378	0.096
	MMFGL (MD-1)	0.4388	0.556	0.1978	0.0292	0.3452	0.0767
	MMFGL (MD-2)	0.4413	0.5456	0.2051	0.0251	0.3890	0.0793
	MMFGL (MD-3)	0.4410	0.5400	0.2066	0.0196	0.3580	0.0730
100	Pagano	—	0.539	0.181	0.0213	0.395	0.0828
	Engblom (MD-1)	0.418	0.591	0.190	0.0312	0.200	0.0363
	Engblom (MD-2)	0.432	0.531	0.176	0.0215	0.302	0.069
	Engblom (MD-3)	0.433	0.596	0.180	0.0212	0.359	0.112
	MMFGL (MD-1)	0.4304	0.5653	0.1843	0.0366	0.3335	0.0749
	MMFGL (MD-2)	0.4339	0.5420	0.2037	0.0269	0.3871	0.0797
	MMFGL (MD-3)	0.4365	0.5394	0.2051	0.0177	0.3331	0.0554
	CPT	—	0.539	0.180	0.0213	0.395	0.082

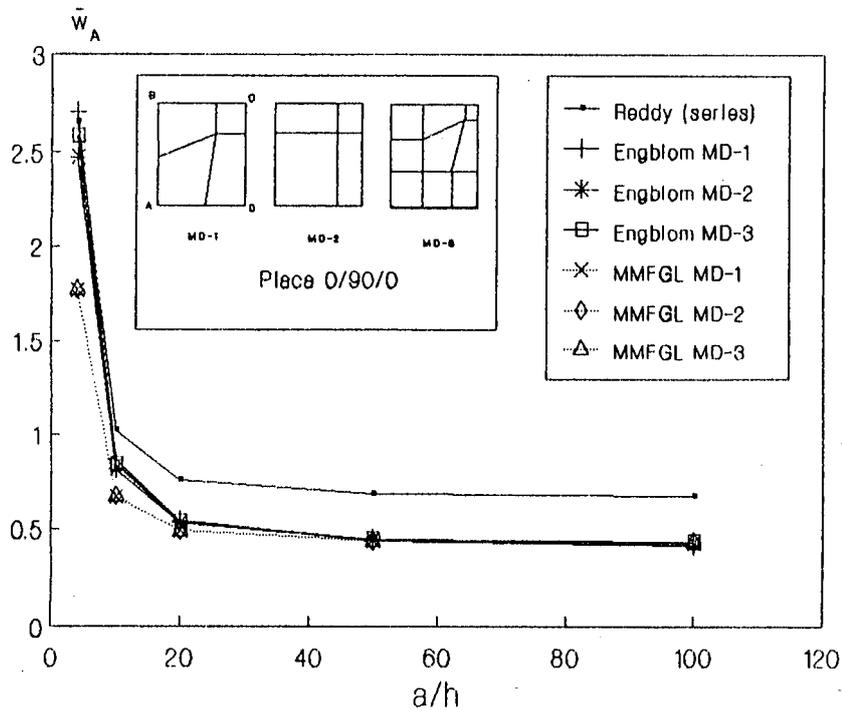


Figura 4.19. - Placa Laminada 0/90/0, quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO SENOIDAL: deslocamentos verticais no centro (Ponto A)

dos de Engblom, determinados com expansões quadráticas dos deslocamentos, aproximam-se dos de Reddy para os casos de placas espessas e semi-espessas, mas coincidem com os do MMFGL quando a relação  $a/h$  aumenta. O MMFGL mostrou-se muito menos sensível à distorção da malha, em termos de deslocamentos, do que o elemento QHD-40, de Engblom.

Quanto à variação de tensões, as Figuras 4.20 à 4.23 mostram, novamente, um comportamento mais estável do MMFGL do que o apresentado pelo QHD-40. Observa-se que, no caso das tensões  $\sigma_{xy}$ , Figura 4.22, ocorre uma certa instabilidade dos resultados, para a Malha MD-1 e  $a/h = 100$ . Esse efeito, no entanto, foi eliminado com o refino da

malha, como no caso MD-3. Chama atenção, também, o desempenho mais "regular" do MMFGL do que o elemento QHD-40, para o caso das tensões transversais  $\sigma_{xz}$ , mesmo com a malha MD-1 (Figura 4.23).

A ligeira degradação dos resultados do MMFGL com a distorção da malha já havia sido observada por Barbieri [1992] no estudo de placas isotrópicas. A sensibilidade é menor para elementos de ordem mais elevada, por exemplo,  $p = 3$  ou  $p = 4$ .

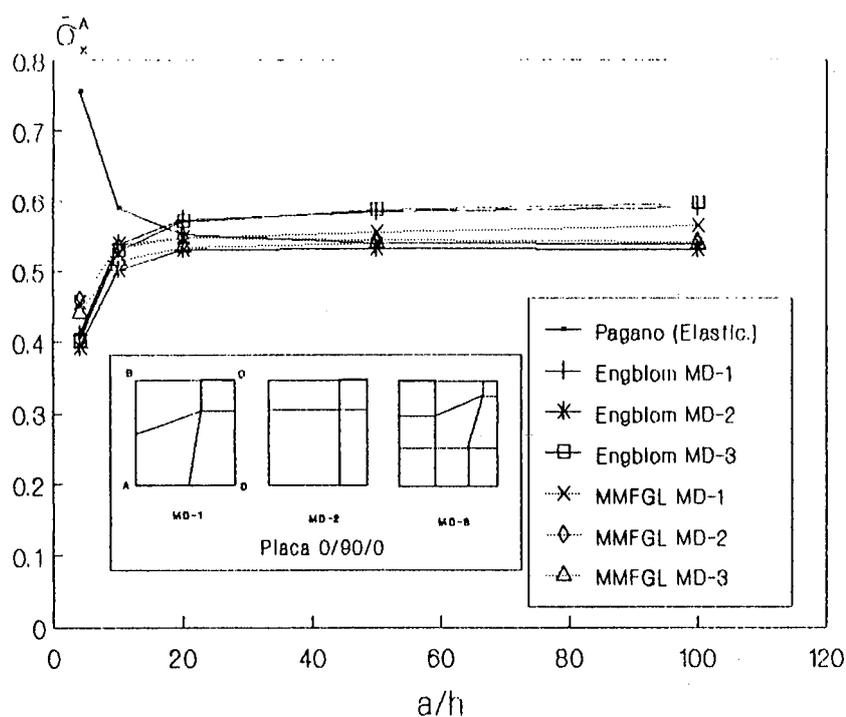


Figura 4.20. - Placa Laminada 0/90/0, quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO SENOIDAL: tensões  $\sigma_x$  (Ponto A)

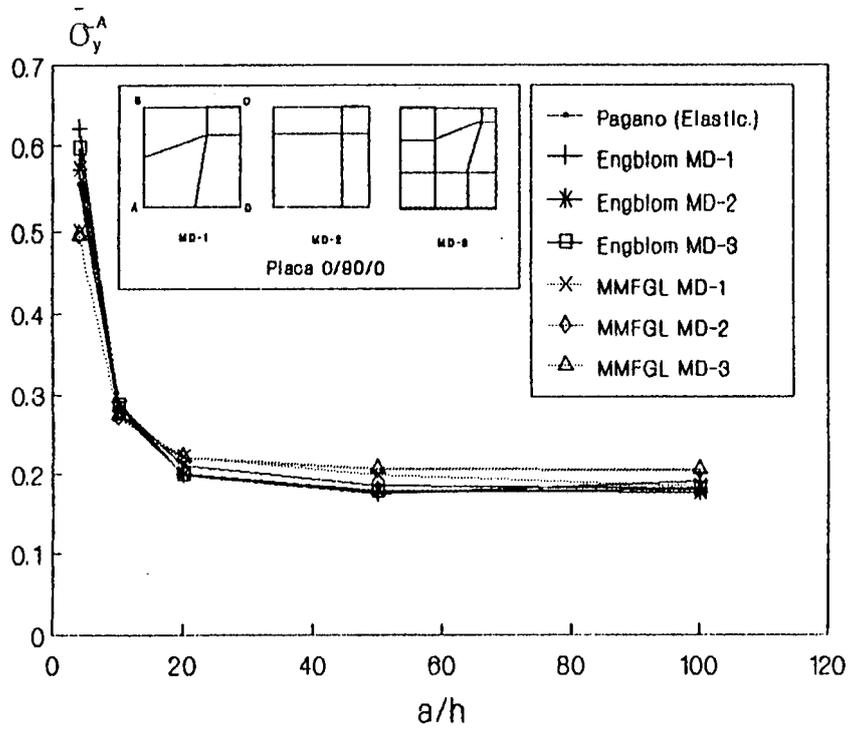


Figura 4.21. - Placa Laminada 0/90/0, quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO SENOIDAL: tensões  $\sigma_y$  (Ponto A)

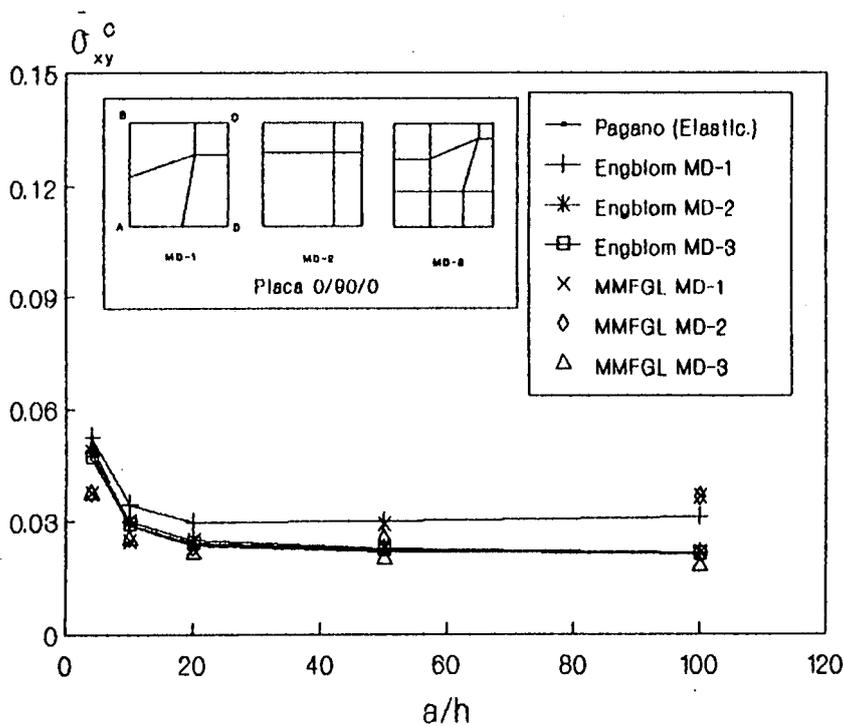


Figura 4.22. - Placa Laminada 0/90/0, quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO SENOIDAL: tensões  $\sigma_{xy}$  (Ponto C)

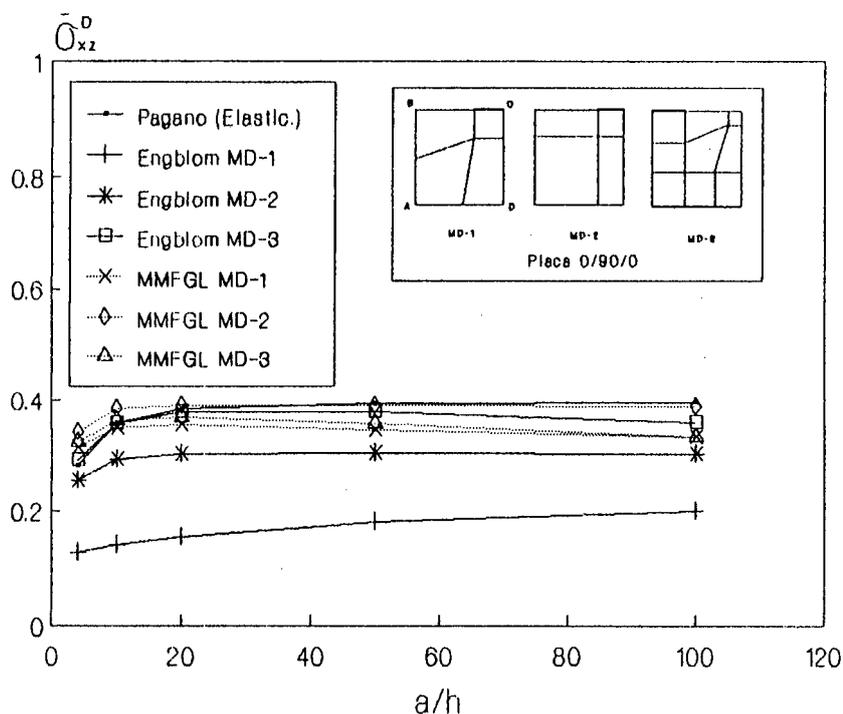


Figura 4.23. - Placa Laminada 0/90/0, quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO SENOIDAL: tensões  $\sigma_{xz}$  (Ponto D)

#### 4.4.5. Placa Laminada Retangular 0°/90°/0°.

Uma vez verificada a sensibilidade do MMFGL à distorção, nova aplicação é realizada com o mesmo laminado 0°/90°/0° do exemplo anterior, considerando, agora, o caso de uma placa retangular,  $b/a=3$ , simplesmente suportada, submetida a um carregamento senoidal e com lâminas de mesma espessura. São consideradas duas malhas regulares de 2x2 e 4x4 elementos, discretizando apenas 1/4 do domínio a fim de aproveitar as condições de simetria do problema.

Resultados de deslocamentos e de tensões estão indicados na Tabela 4.14. Por se tratar de um caso de flexão cilíndrica de placas que foi resolvido por Pagano [1969] através da Teoria da Elasticidade, seus resultados estão inclusos nessa tabela. São apresentados, também, os fornecidos por Reddy [1984], que empregou expansões em séries para determinar a solução pela Teoria de Primeira Ordem.

Uma solução de Reddy, determinada aproximadamente por meio do Método dos Elementos Finitos, empregando ainda uma formulação baseada na FSDT, é indicada na Tabela 4.14. Esta solução foi transcrita do trabalho de Engblom e Uchoa [1985], de onde se indicam, também, os resultados determinados pelo já citado elemento QHD-40, através de malha de 6x6 elementos finitos.

A variação dos deslocamentos conforme o valor de  $a/h$  é mostrada na Figura 4.24, onde se observa a boa aproximação do MMFGL àqueles apresentados por Reddy, tanto por suas soluções em séries, como por elementos finitos. Como no exemplo anterior, as soluções determinadas pelo MMFGL e pelos outros modelos baseados na Teoria de Primeira Ordem, mostram-se ligeiramente mais rígidas do que as determinadas por Pagano, especialmente para o caso de placas espessas. Todavia, mesmo em termos de tensões, os resultados alcançados pelo MMFGL comparam-se aos de Engblom e Uchoa, que utilizaram formulações refinadas, e aos de Reddy.

Observa-se na Figura 4.24, mais uma vez, a importância da consideração dos efeitos cisalhantes transversais, uma vez que a sua omissão, representada pela CPT, implica em deslocamentos 5,61 vezes inferiores àqueles determinados por Pagano, pela Teoria da Elasticidade, quando a relação  $a/h$  chega a 4,0.

Tabela 4.14. Placa Laminada  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ , retangular ( $b/a = 3$ ), simplesmente suportada, submetida a um CARREGAMENTO SENOIDAL: valores dos deslocamentos e de tensões ( $h_i = h/3$ )

$a/h$	Fonte	$w$	$\sigma_x^A$	$\sigma_y^A$	$\sigma_{xy}^C$	$\sigma_{xz}^D$	$\sigma_{yz}^B$
4	Pagano	2.82	1.10	0.119	0.0281	0.387	0.0334
	Reddy (séries)	2.3626	0.6130	0.0934	0.0205	0.1879	0.0308
	Reddy (MEF)	—	—	—	—	—	—
	Engblom-2x2	3.55	0.657	0.130	0.0296	0.410	0.0357
	Engblom-6x6	3.58	0.612	0.126	0.0284	0.431	0.0391
	MMFGL-2x2	2.3523	0.6331	0.1066	0.0231	0.4053	0.0244
	MMFGL-4x4	2.3619	0.6171	0.1177	0.0206	0.4270	0.0274
10	Pagano	0.919	0.725	0.0435	0.0123	0.420	0.0152
	Reddy (séries)	0.803	0.6214	0.0375	0.0105	0.1894	0.0159
	Reddy (MEF)	0.802	0.603	0.0364	0.0102	—	—
	Engblom-2x2	0.995	0.669	0.0431	0.0125	0.414	0.0143
	Engblom-6x6	1.000	0.625	0.0421	0.0121	0.436	0.016
	MMFGL-2x2	0.8012	0.6376	0.0534	0.0145	0.4052	0.0120
	MMFGL-4x4	0.8029	0.6253	0.0623	0.0107	0.4299	0.0136
20	Pagano	0.610	0.650	0.0299	0.0093	0.434	0.0299
	Reddy (séries)	0.5784	0.6228	0.0283	0.0088	0.1896	0.0135
	Reddy (MEF)	0.578	0.605	0.0276	0.0086	—	—
	Engblom-2x2	0.625	0.666	0.0286	0.00959	0.415	0.0112
	Engblom-6x6	0.629	0.628	0.0278	0.00928	0.437	0.0121
	MMFGL-2x2	0.5777	0.6323	0.0486	0.0153	0.4016	0.0105
	MMFGL-4x4	0.5784	0.6263	0.0531	0.0094	0.4301	0.0113
50	Pagano	0.520	0.628	0.0259	0.0084	0.439	0.0110
	Reddy (séries)	—	—	—	—	—	—
	Reddy (MEF)	0.515	0.604	0.0251	0.0081	—	—
	Engblom-2x2	0.521	0.659	0.0252	0.00878	0.416	0.0113
	Engblom-6x6	0.524	0.629	0.0237	0.00848	0.437	0.0110
	MMFGL-2x2	0.5151	0.6256	0.0505	0.01737	0.3974	0.0105
	MMFGL-4x4	0.5154	0.6248	0.0509	0.00978	0.4294	0.0108
100	Pagano	0.508	0.624	0.0253	0.0083	0.439	0.0108
	Reddy (séries)	0.5064	0.6233	0.0253	0.0083	0.2886	0.0129
	Reddy (MEF)	0.506	0.603	0.0253	0.0080	—	—
	Engblom-2x2	0.507	0.657	0.0259	0.00856	0.416	0.0127
	Engblom-6x6	0.509	0.628	0.0231	0.00837	0.437	0.0108
	MMFGL-2x2	0.5062	0.6241	0.0512	0.0180	0.3964	0.0105
	MMFGL-4x4	0.5064	0.6239	0.0509	0.0104	0.4287	0.0107
	CPT	0.503	0.623	0.0253	0.0083	—	—

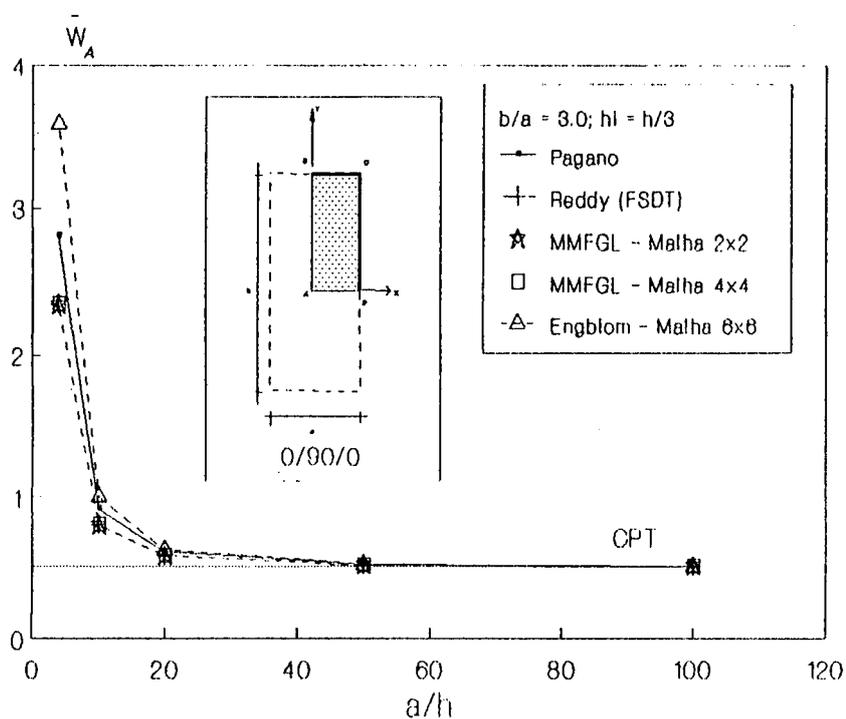


Figura 4.24. - Placa Laminada 0/90/0 Retangular ( $b/a=3$ ), simplesmente apoiada, submetida a um carregamento SENOIDAL: deslocamentos verticais no centro da placa.

A variação das tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_{xy}$ , e  $\sigma_{xz}$ , conforme a relação  $a/h$ , está ilustrada nas Figuras 4.25 à 4.27. Os resultados do MMFGL mostram o bom desempenho do método, comparando-se com os de Engblom e Uchoa, mesmo no caso de  $a/h = 4,0$ .

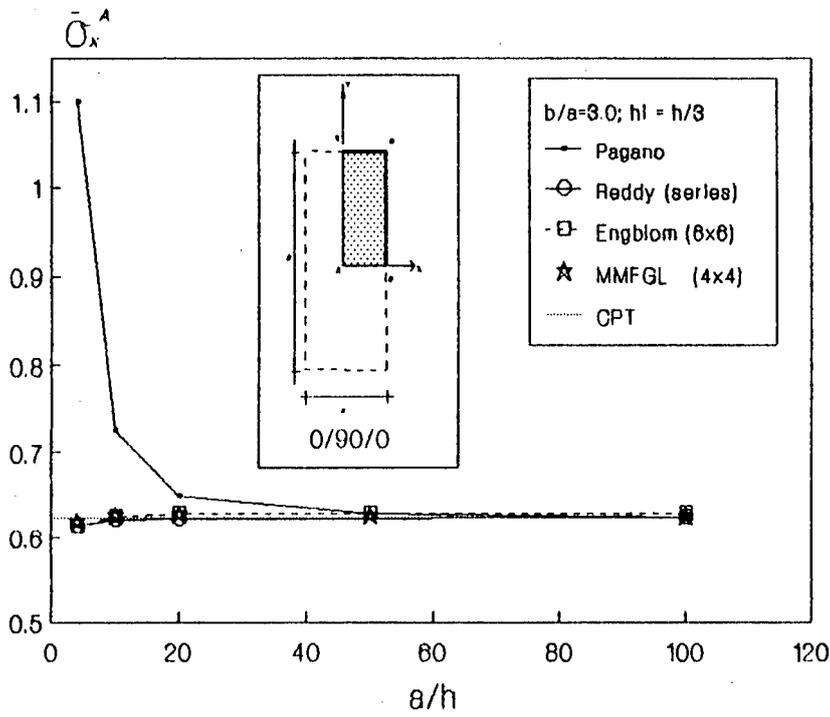


Figura 4.25 - Placa Laminada 0/90/0 Retangular ( $b/a=3$ ), simplesmente apoiada, submetida a um carregamento SENOIDAL: tensões  $\sigma_x$  no centro da placa.

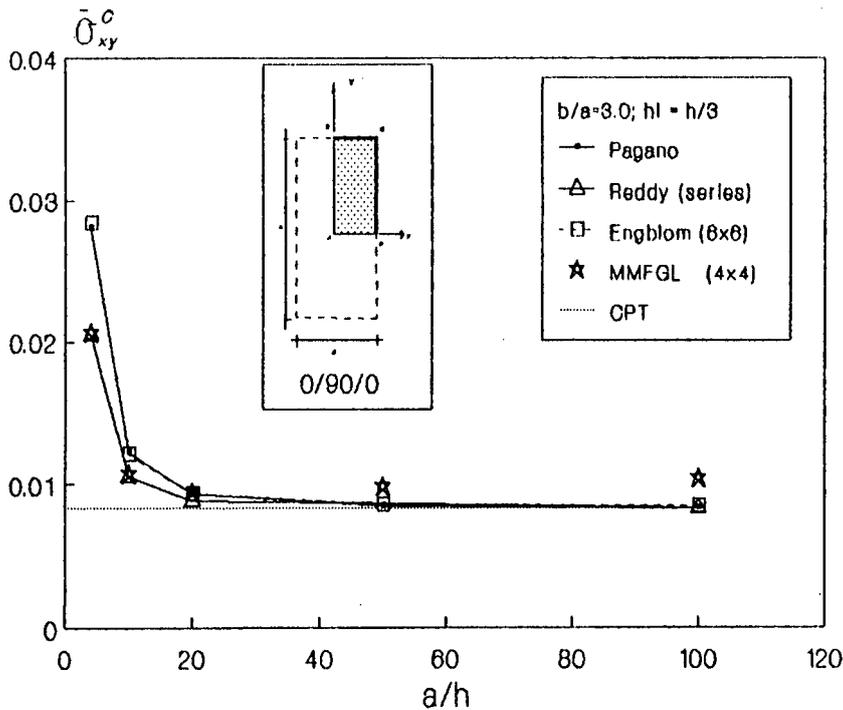


Figura 4.26 - Placa Laminada 0/90/0 Retangular ( $b/a=3$ ), simplesmente apoiada, submetida a um carregamento SENOIDAL: tensões  $\sigma_{xy}$  no canto da placa (Ponto C).

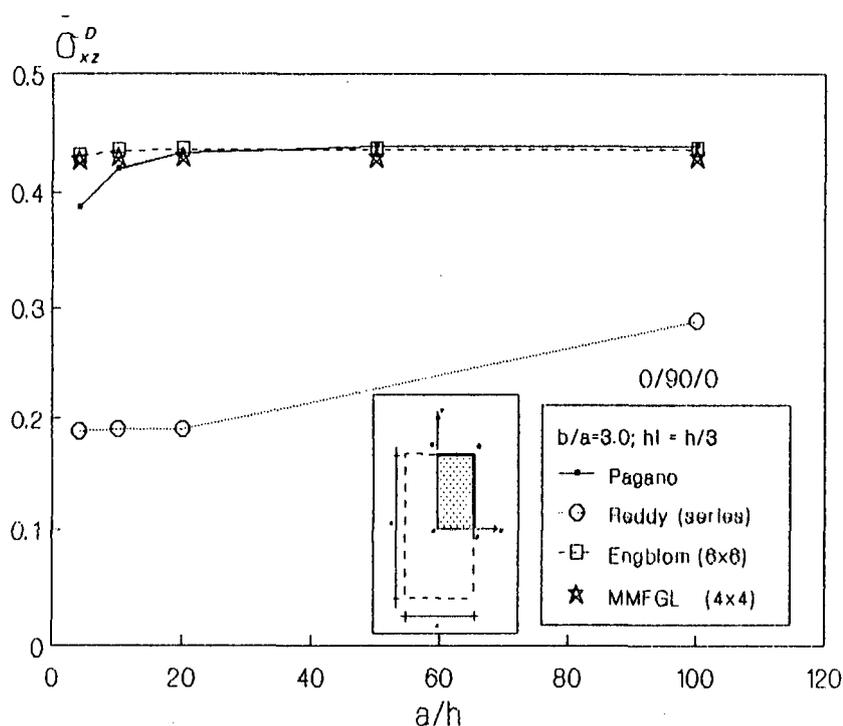


Figura 4.27. - Placa Laminada 0/90/0 Retangular ( $b/a=3$ ), simplesmente apoiada, submetida a um carregamento SENOIDAL: tensões  $\sigma_{xz}$  no meio do lado (Ponto D).

#### 4.4.6. Placa Laminada Simétrica - $[0^\circ/90^\circ/\dots]$ - 9 lâminas.

O sexto exemplo desta série corresponde a uma placa laminada simétrica, quadrada, simplesmente apoiada, constituída por nove lâminas  $0^\circ/90^\circ/\dots$ , e submetida a um carregamento uniformemente distribuído. As propriedades elásticas correspondem às do Material 3 na Tabela 4.1. Devido às condições de simetria do problema, somente 1/4 da placa é discretizado. Os resultados são comparados com os determinados por Lakshminarayana & Murthy [1984], que utilizaram um elemento

finito triangular TRIPLT de 3 nós e 15 graus de liberdade por nó, baseado em um campo linear de deslocamentos. Nesse trabalho, a título de comparação, é citada a solução analítica determinada por Noor & Mathers [1975]. Como a análise realizada pelo TRIPLT foi feita considerando o coeficiente de correção do cisalhamento igual a 1,0, este mesmo valor foi adotado no presente estudo.

Deslocamentos no nó central, momentos fletores e rotações para várias relações de  $a/h$  e para vários tipos de malhas são fornecidos na Tabela 4.15. A solução correspondente ao elemento TRIPLT foi determinada considerando malha  $4 \times 4$ , num total de 32 elementos. A solução indicada como "analítica" corresponde aos valores transcritos de Noor & Mathers.

A Figura 4.28. mostra a convergência dos deslocamentos com o refino da malha para diversas relações  $a/h$ . Sendo um problema fortemente influenciado pela relação  $a/h$ , dois aspectos interessantes podem ser destacados: o primeiro, que o MMFGL, ao contrário do MEF-TRIPLT, mostrou-se pouco sensível com a variação da espessura, apresentando ótima aproximação já com a malha  $2 \times 2$ ; o segundo, que um único elemento de 9 nós é capaz de fornecer resultado com precisão razoável, não ocorrendo o mesmo com o MEF.

A boa aproximação dos deslocamentos determinados pelo MMFGL é mostrada na Figura 4.29, que ilustra a variação dos mesmos no centro da placa, conforme a relação  $a/h$ . Dessa figura se percebe que, comparado com os casos que envolvem menor número de lâminas, a diferença entre os resultados de placas semi-espessas daqueles determinados pela Teoria Clássica não é tão grande, mas ainda não deixa de ser um valor expressivo (cerca de 30 %).

Tabela 4.15. Placa Laminada Simétrica  $[0^\circ/90^\circ/\dots]$  - 9 lâminas: valores de deslocamentos, momentos e rotações.

$h/a$	Fonte	$\bar{w}_A$	$\bar{M}_x^A$	$\bar{M}_{xy}^C$	$\bar{\theta}_y^B$
0.1	TRIPLT-4x4	5.8481	8.4223	5.3563	1.53293
	Analítico	5.8480	8.424	5.3250	1.533
	MFGLM-1x1	6.0651	9.6221	8.9514	1.64873
	MFGLM-2x2	5.9036	9.1638	5.9718	1.6028
	MFGLM-3x3	5.8956	9.0775	5.6674	1.5920
	MFGLM-4x4	5.8943	9.0573	5.5505	1.5898
	MFGLM-5x5	5.8940	9.0510	5.4990	1.5891
0.01	TRIPLT-4x4	4.4846	8.8107	4.850	1.4668
	Analítico	4.4855	8.8786	—	—
	MFGLM-1x1	4.6100	9.9632	8.7547	1.4949
	MFGLM-2x2	4.4897	9.6779	6.4618	1.4772
	MFGLM-3x3	4.4834	9.6544	5.6118	1.4762
	MFGLM-4x4	4.4824	9.6495	5.2821	1.4759
	MFGLM-5x5	4.4821	9.6472	5.1308	1.4757
0.005	TRIPLT-4x4	—	—	—	—
	Analítico	—	—	—	—
	MFGLM-1x1	4.5987	9.9679	8.7393	1.4933
	MFGLM-2x2	4.4787	9.6808	6.5028	1.4755
	MFGLM-3x3	4.4725	9.6574	5.6851	1.4747
	MFGLM-4x4	4.4715	9.6532	5.3595	1.4745
	MFGLM-5x5	4.4712	9.6252	5.1900	1.4745
0.001	TRIPLT-4x4	4.4508	8.4182	4.511	1.4685
	Analítico	4.4718	8.8850	—	—
	MFGLM-1x1	4.5951	9.9695	8.7378	1.4929
	MFGLM-2x2	4.4753	9.6818	6.1499	1.4750
	MFGLM-3x3	4.4690	9.6582	5.7232	1.4741
	MFGLM-4x4	4.4681	9.6541	5.4061	1.4741
	MFGLM-5x5	4.4678	9.6530	5.2472	1.4740

Analogamente ao caso dos deslocamentos, é apresentada a Figura 4.30, que mostra a convergência dos momentos  $M_x$  no centro da placa. Embora a precisão dos resultados de momentos não se mostre em grau tão elevado quanto os de deslocamentos, permanecem válidas as mesmas observações comentadas anteriormente.

A distribuição de tensões normais  $\sigma_x$  no centro da placa, determinada por meio dos valores nodais do MMFGL, malha 4x4, e por processo de derivação dos deslocamentos, para a relação  $a/h = 100$ , é mostrada na Figura 4.31. A distribuição das tensões transversais  $\sigma_{xz}$  é ilustrada na Figura 4.32.

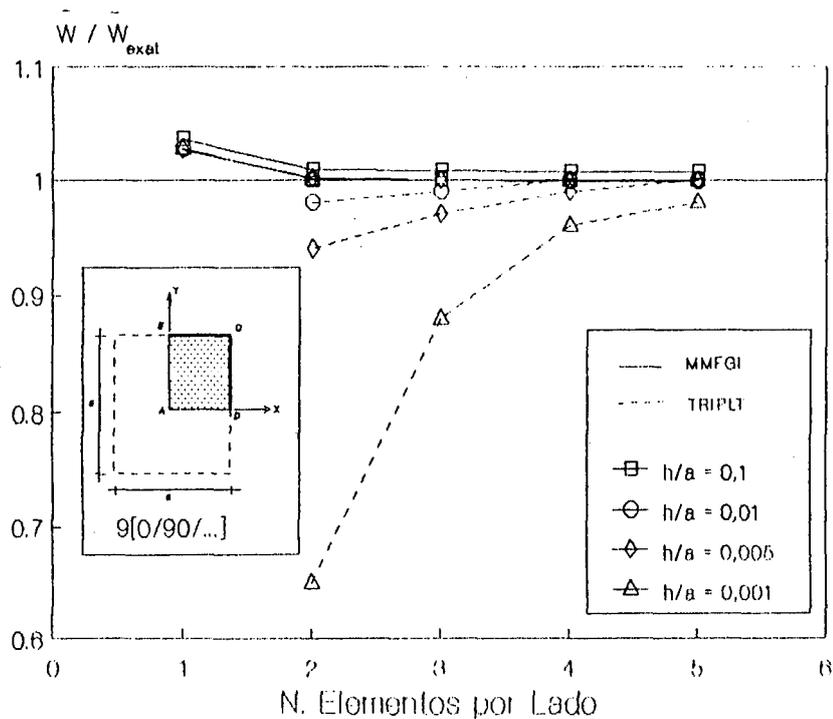


Figura 4.28. - Placa Laminada Simétrica 9x[0/90/...], quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO UNIFORME: convergência dos deslocamentos verticais no centro da placa.

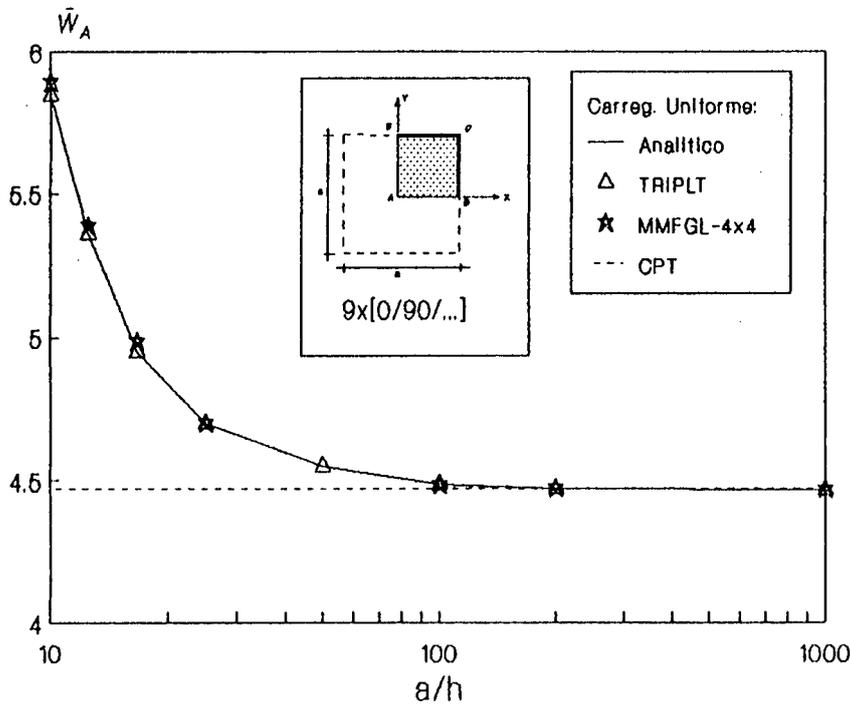


Figura 4.29. - Placa Laminada Simétrica 9x[0/90/...], quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO UNIFORME: deslocamentos verticais no centro da placa (Ponto A) conforme  $a/h$

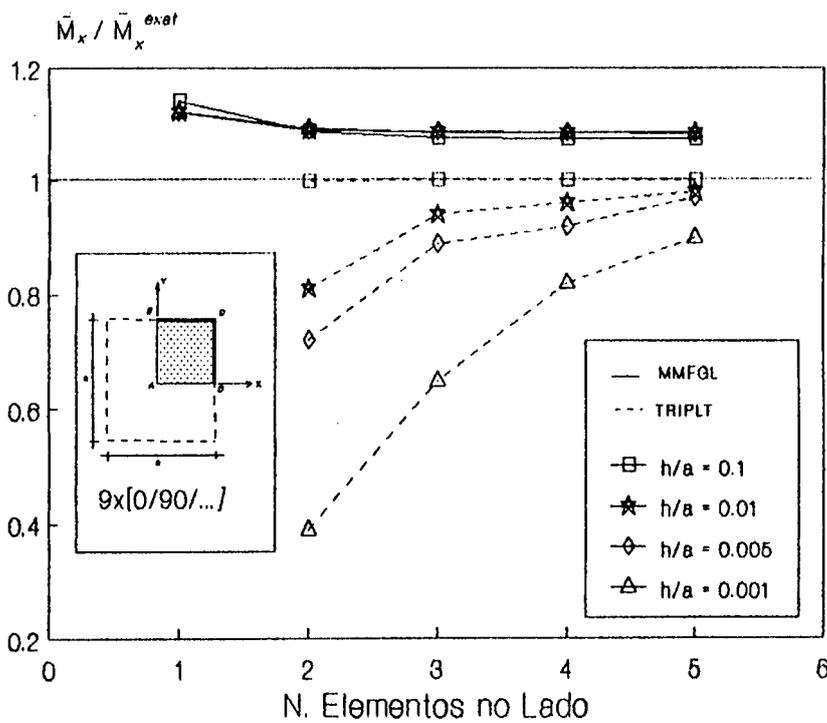


Figura 4.30. - Placa Laminada Simétrica 9x[0/90/...], quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO UNIFORME: convergência dos momentos  $M_x$  no centro da placa (Ponto A)

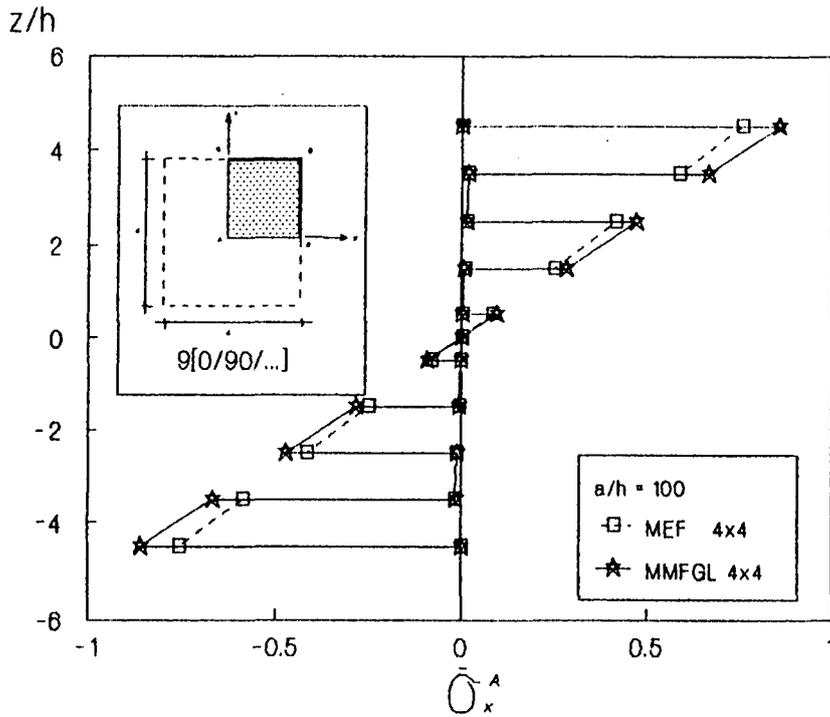


Figura 4.31. - Placa Laminada Simétrica 9x[0/90/...], quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO UNIFORME: distribuição das tensões normais  $\sigma_x$  ao longo da espessura.

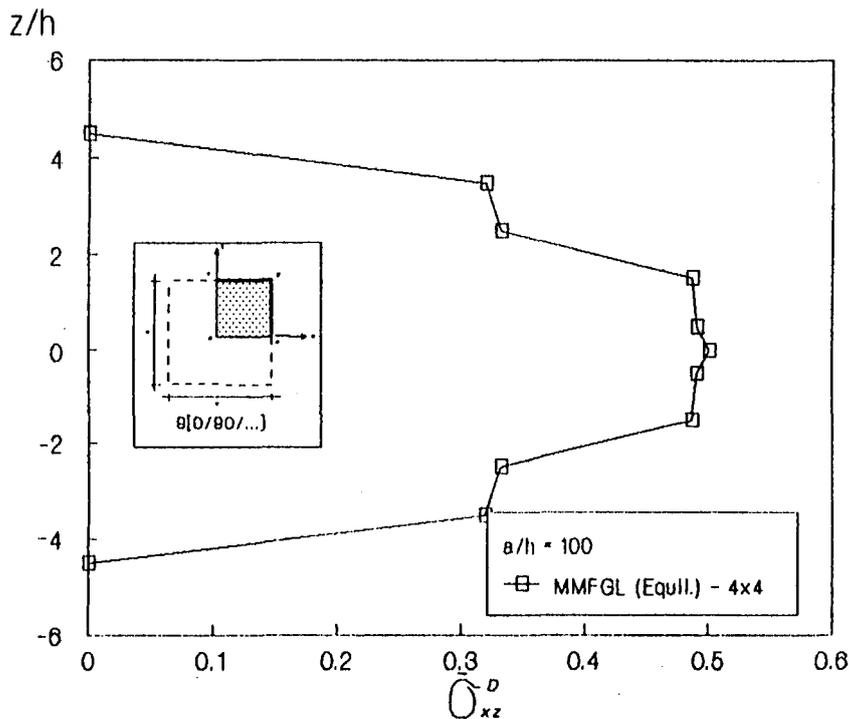


Figura 4.32. - Placa Laminada Simétrica 9x[0/90/...], quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO UNIFORME: distribuição das tensões cisalhantes  $\sigma_{xz}$  ao longo da espessura.

4.4.7. Placa Laminada Simétrica  $9 \times [0^\circ/90^\circ/\dots]$  Engastada.

A mesma placa do exemplo anterior é agora processada considerando que seus lados estejam engastados. É adotado um coeficiente de correção do cisalhamento igual a 1,0. Valores de deslocamentos verticais no centro da placa e dos momentos  $M_x$  no ponto de intersecção entre o bordo paralelo ao Eixo Y e a linha de simetria são fornecidos na Tabela 4.16 para vários valores de  $h/a$ , e considerando malhas de  $2 \times 2$  e  $4 \times 4$  elementos de domínio. Nessa tabela são apresentados, também, os resultados determinados por Lakshminarayana & Murthy [1984], através do elemento TRIPLT.

Tabela 4.16. - Placa Laminada Simétrica  $9 \times [0^\circ/90^\circ/\dots]$ , quadrada, engastada, submetida a um CARREGAMENTO UNIFORME: valores dos deslocamentos verticais e de momentos no centro da placa.

$h/a$	$\bar{w}$ no centro			$\bar{M}_x$ no meio do lado		
	M $2 \times 2$	M $4 \times 4$	TRIPLT	M $2 \times 2$	M $4 \times 4$	TRIPLT
0.1	2.358375	2.348775	2.3199	6.0575	5.9131	5.6602
0.08	1.864160	1.854874	—	6.2971	6.1505	—
0.06	1.474281	1.465258	—	6.5870	6.4438	—
0.04	1.189872	1.181184	—	6.8858	6.7621	—
0.02	1.014840	1.006500	—	7.0884	7.0166	—
0.01	0.970350	0.962100	0.96278	7.1245	7.0810	6.6155
0.005	0.959156	0.950906	—	7.1305	7.0893	—
0.001	0.955500	0.947325	0.93410	7.1322	7.0837	6.6551

Os resultados de deslocamentos estão ilustrados graficamente na Figura 4.33, onde se percebe a boa concordância entre os valores obtidos pelo MMFGL e pelo elemento TRIPLT. Comparando-se as Figuras 4.33 e 4.29 verifica-se que o erro em decorrência da desconsideração dos efeitos do cisalhamento é muito superior ao caso de placa engastada do que à de simplesmente suportada.

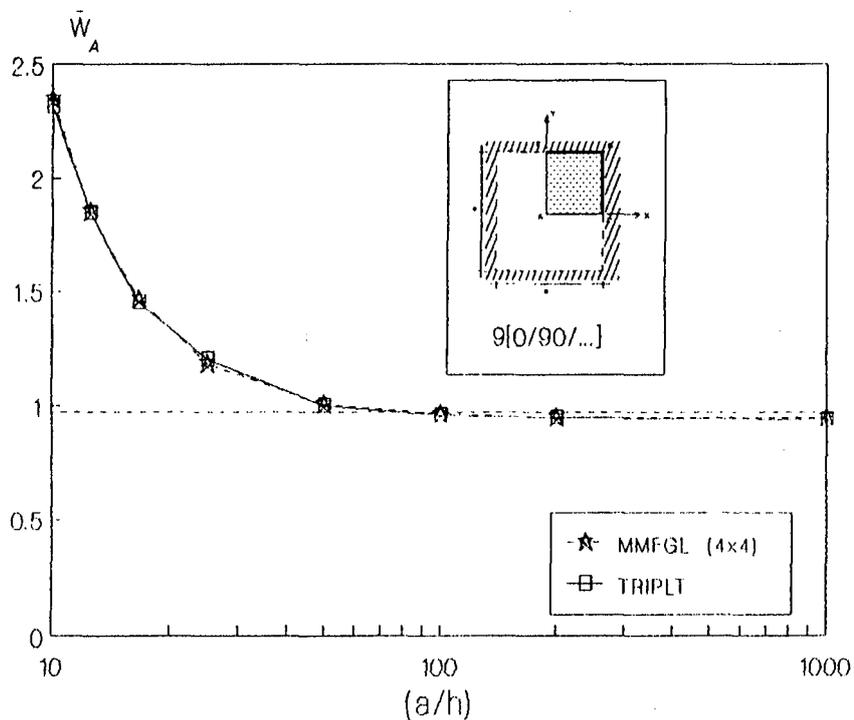


Figura 4.33. - Placa Laminada Simétrica  $9x[0/90/...]$ , quadrada, engastada, submetida a um CARREGAMENTO UNIFORME: variação dos deslocamentos verticais no centro da placa.

A Figura 4.34 mostra a variação dos momentos fletores  $M_x$  e  $M_y$  ao longo do bordo paralelo ao Eixo Y, para relações  $a/h$  iguais a 10, 100 e 1000. Para tanto, foram utilizados os resultados obtidos através da malha  $4x4$ .

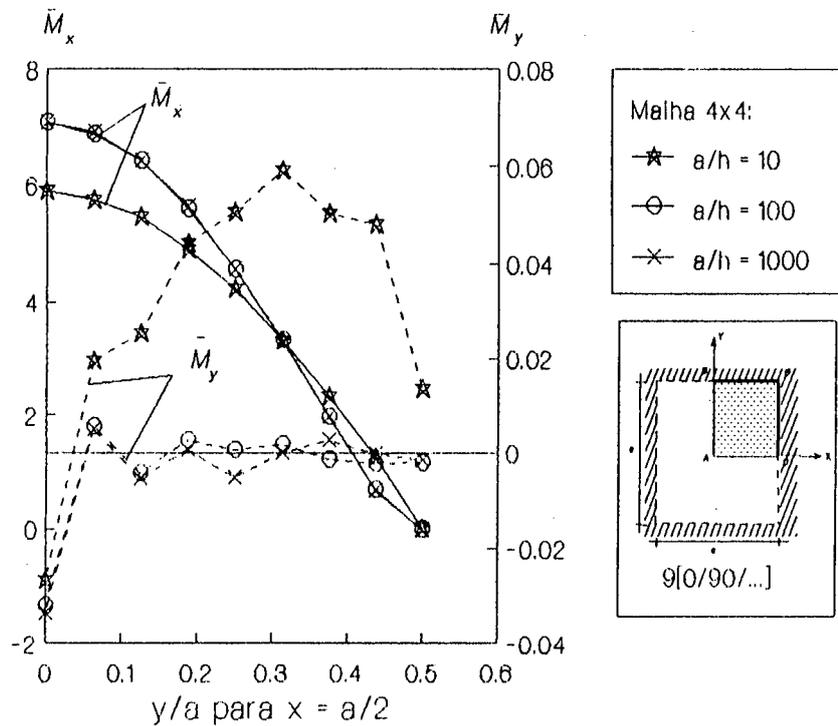


Figura 4.34. - Placa Laminada Simétrica 9x[0/90/...], quadrada, engastada, submetida a um CARREGAMENTO UNIFORME: variação dos momentos fletores  $M_x$  e  $M_y$  ao longo do bordo paralelo ao Eixo Y.

#### 4.4.8. Placa Laminada Simétrica [+θ/-θ/...] - 9 lâminas.

O objetivo agora é testar a sensibilidade do MMFGL às mudanças nas orientações das fibras de cada lâmina. Dessa forma, é analisado um laminado simétrico, de configuração [+θ/-θ/...], nove lâminas, onde θ, o ângulo de orientação das fibras, é tomado no intervalo de 0° à 45°. As propriedades elásticas correspondem às do Material 3 na Tabela 4.1. A placa está simplesmente apoiada e submetida a um carregamento uniforme. A exemplo dos problemas anteriores, foi considerado um coeficiente de correção do cisalhamento igual a 1.0.

Considerando a placa discretizada integralmente, foi elaborada a Tabela 4.17 que apresenta os resultados de deslocamentos verticais no ponto central para diversas relações  $h/a$  e para  $\theta = 45^\circ$ . Os resultados do MMFGL foram determinados por meio de malhas de 3x3 e 4x4 elementos de domínio. A título de comparação, são indicados os resultados de Lakshminarayana & Murthy [1984] que, com seu elemento TRIPLT, também consideraram todo o domínio discretizado por uma malha de 6x6 elementos.

Tabela 4.17. - Placa Laminada Simétrica [ $+\theta/-\theta/\dots$ ], 9 lâminas, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO UNIFORME: valores de deslocamentos verticais no centro da placa para  $\theta = 45^\circ$ .

$\frac{h}{a}$	$\bar{w}$		
	TRIPLT	$M_{3 \times 3}$	$M_{4 \times 4}$
0.1	3.7323	3.8097	3.7998
0.01	2.3999	2.4652	2.4650
0.001	2.2231	2.4517	2.4516

Na Figura 4.35 são apresentadas as respostas em termos de deslocamentos verticais no centro da placa determinadas pelo MMFGL e pelo TRIPLT quando o ângulo  $\theta$  varia de 5 em 5 graus. São consideradas relações  $h/a$  iguais a 0.1 e a 0.01. É interessante observar como a placa laminada é influenciada pela orientação de suas fibras. Usando o mesmo material, pode-se, mediante um giro de  $45^\circ$  na orientação de cada lâmina, reduzir consideravelmente os deslocamentos verticais na ordem de 25% para placa finas, e 40% para placas semi-espessas.

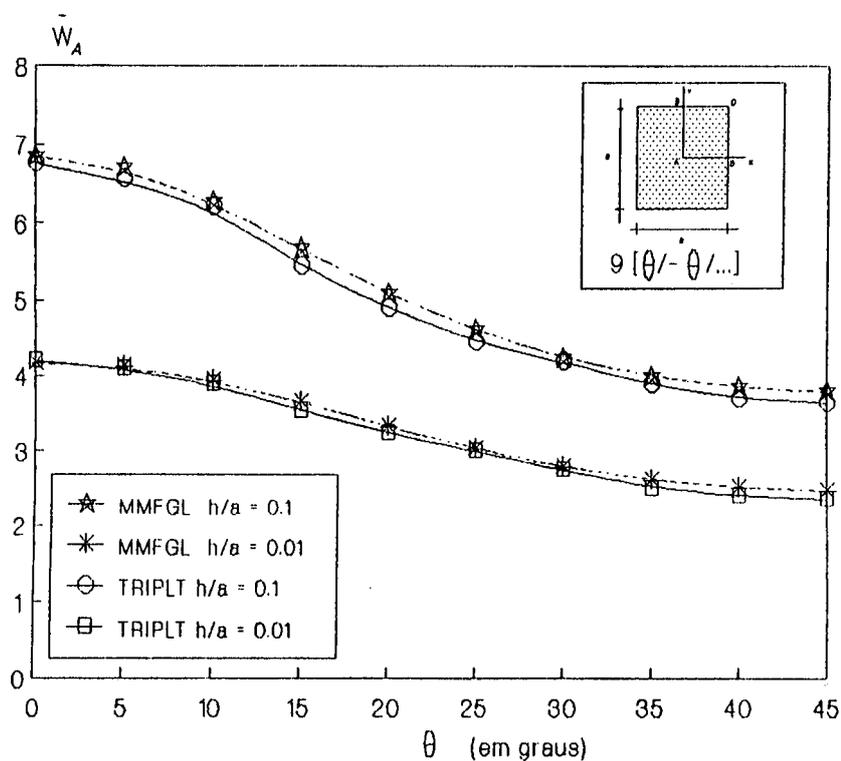


Figura 4.35 - Placa Laminada Simétrica  $[+\theta/-\theta/\dots]$  - 9 lâminas, quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO UNIFORME: variação dos deslocamentos verticais no centro da placa conforme  $\theta$ .

A Figura 4.36 mostra a variação dos deslocamentos verticais no centro da placa, para diversos valores de  $\theta$ , conforme a relação  $h/a$ . Os resultados foram determinados usando malha com  $3 \times 3$  elementos de domínio discretizando a placa inteira. Observa-se que a desconsideração dos efeitos transversais é menos significativa em laminados  $[+45/-45/\dots]$  do que nos demais.

Deve-se observar que, discretizando integralmente a placa, os resultados de deslocamentos no centro referem-se a valores de domínio. Ainda assim, o MMFGL foi capaz de representar bem o comportamento do laminado, para as diversas orientações das fibras.

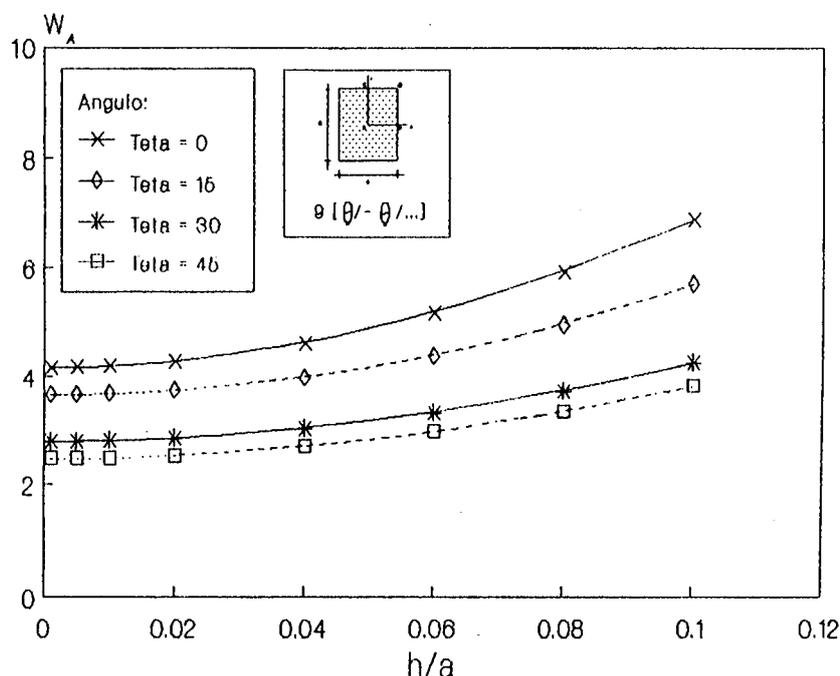


Figura 4.36 - Placa Laminada Simétrica [ $+\theta/-\theta/\dots$ ] - 9 lâminas, quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um CARREGAMENTO UNIFORME: variação dos deslocamentos no centro da placa conforme  $a/k$  e  $\theta$ .

#### 4.4.9. Placa Retangular Anisotrópica Engastada.

O caso ora em estudo não permite a discretização de uma parte do domínio, pois não existem condições de contorno apropriadas para a consideração da simetria. Trata-se de uma placa retangular anisotrópica engastada, com as fibras orientadas segundo uma direção  $\theta$  genérica. A relação entre o maior e o menor lado,  $b/a$ , é igual a 2.0. As propriedades elásticas consideradas coincidem com as do Material 3 da Tabela 4.1. O carregamento atuante é distribuído uniformemente. Neste problema, o acoplamento entre os efeitos de flexão e de membrana

é de grande relevância, sendo mais um motivo para que a discretização seja feita na placa inteira.

Os resultados de deslocamentos verticais do nó central estão indicados na Tabela 4.18, para a relação  $a/h$  igual a 10. A Tabela 4.19 foi elaborada para a relação  $a/h$  igual a 100. Em ambas as situações são apresentados os resultados de Lakshminarayana & Murthy [1985], que utilizaram uma malha de 8x8 elementos TRIPLT; e os de Noel [1991] que, por meio de uma formulação mista de deformações supostas, utilizou malha de 8x8 elementos finitos. São ainda apresentados os resultados de Wilt et. alli. [1990], determinados com malha 10x10, para o caso correspondente a  $a/h = 100$ . A solução pelo MMFGL foi determinada com malha regular de 4x4 elementos de domínio. No entanto, no primeiro caso, considerou-se, também, malha 5x5, onde se percebe pouca variação entre os resultados das duas discretizações.

Tabela 4.18. Placa Retangular Anisotrópica Engastada,  $b/a=2.0$ , CARREGAMENTO UNIFORME: deslocamentos verticais no centro, considerando relação  $a/h = 10$ .

Orientação das Fibras	Noel-8x8	TRIPLT-8x8	MMFGL-4x4	MMFGL-5x5
0°	16.227	16.051	16.340	16.240
15°	15.064	14.854	15.180	15.080
30°	11.175	11.001	9.852	9.817
45°	6.905	6.840	6.054	6.054
60°	4.537	4.522	4.383	4.385
75°	3.546	3.543	3.537	3.551
90°	3.280	3.280	3.236	3.266

Tabela 4.19. Placa Retangular Anisotrópica Engastada,  $b/a=2.0$ ,  
 CARREGAMENTO UNIFORME: deslocamentos verticais no centro, considerando  
 relação  $a/h = 100$ .

Orientação das Fibras	Noel-8x8	TRIPLT-8x8	Wilt-10x10	MMFGL-4x4
0°	10.660	10.538	10.888	10.750
15°	9.891	9.446	10.022	10.010
30°	6.478	6.086	6.513	5.675
45°	2.897	2.899	2.923	2.750
60°	1.385	1.414	1.382	1.447
75°	0.918	0.913	0.913	0.947
90°	0.805	0.802	0.807	0.873

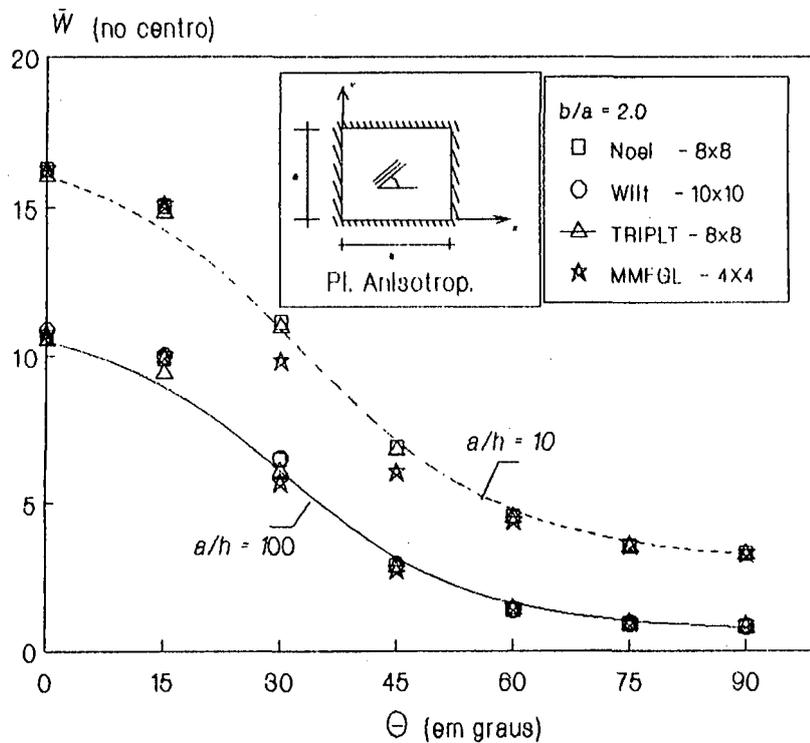


Figura 4.37 - Placa Retangular Anisotrópica Engastada submetida a um  
 CARREGAMENTO UNIFORME: deslocamentos verticais no centro.

Com malha grosseira, comparada com as outras referências, o MMFGL consegue boa precisão dos resultados, mesmo considerando que as suas respostas advêm de um nó interno de domínio. Tal desempenho pode ser visto na Figura 4.37, que ilustra a variação dos deslocamentos no centro da placa para diversos ângulos de orientação das fibras.

#### 4.4.10. Placa Laminada $[0^\circ/90^\circ/\dots]$ Não Simétrica.

O desempenho do modelo adotado para análise de laminados não simétricos é examinado nesta aplicação, onde se verificam, também, novos casos de condições de contorno. Considera-se uma placa laminada quadrada, submetida a um carregamento senoidal como o expresso em (4.46). A configuração do laminado é  $[0^\circ/90^\circ/\dots]$ , sendo o número de lâminas variável. As propriedades elásticas correspondem às do Material 2 na Tabela 4.1. As condições de contorno nos lados paralelos ao eixo Y são simplesmente apoiadas. Nos demais, são admitidas as condições SS, CC e FF. Para estas situações, Reddy [1989] determinou soluções analíticas por um processo que envolve um conceito estado/espaço do tipo Lévy.

São utilizadas malhas de  $2 \times 2$  e  $4 \times 4$  elementos de domínio e, apesar de se tratar de um problema não simétrico, apenas  $1/4$  da placa é discretizado. Reddy [1989] mostrou que, para o caso particular  $[0^\circ/90^\circ/\dots]$  ou para  $[+45^\circ/-45^\circ/\dots]$ , mediante condições de contorno apropriadas, é possível discretizar apenas  $1/4$  da placa. Para a configuração  $[0^\circ/90^\circ/\dots]$ , basta utilizar as condições de simetria convencionais.

Os resultados de deslocamentos verticais e de tensões estão apresentados na Tabela 4.20, considerando  $a/h = 10$  e uma configuração do laminado que compreende um total de duas lâminas. Na Tabela 4.21, são apresentados os resultados de um laminado com  $NL = 10$ , onde  $NL$  é o

número total de lâminas. Além das soluções pelo MMFGL, são apresentadas as respostas de Reddy [1989] determinadas pelo processo tipo Lévy e, também, as determinadas por Reddy e Kdheir (soluções estas transcritas do trabalho citado de Reddy). Constata-se a ótima concordância dos resultados do MMFGL com os fornecidos analiticamente por Reddy.

Tabela 4.20. Placa Laminada  $[0^\circ/90^\circ/\dots]$  Não Simétrica, quadrada, submetida a um CARREGAMENTO SENOIDAL: valores dos deslocamentos verticais e de tensões para várias condições de contorno e com  $NL = 2$ .  
( $\alpha/h = 10$ )

NL	Solução	Fonte	Condições de Contorno		
			SSSS	SSCC	SSFF
2	$w$	Reddy (FSDT)	1.238	0.657	2.027
		Analítico	1.237	0.656	2.028
		MMFGL-2x2	1.237	0.656	2.026
		MMFGL-4x4	1.237	0.656	2.028
		CPT	1.043	0.417	1.786
	$\sigma_1$	Reddy (FSDT)	6.948	4.232	2.331
		Analítico	7.157	4.450	2.442
		MMFGL-2x2	7.262	4.539	2.570
		MMFGL-4x4	7.225	4.491	2.550
		CPT	6.659	4.348	2.034
	$\sigma_2$	Reddy (FSDT)	6.948	3.661	11.654
		Analítico	7.157	3.799	11.884
		MMFGL-2x2	7.262	3.852	11.940
		MMFGL-4x4	7.225	3.845	11.910
		CPT	6.659	2.615	11.614
	$\sigma_4$	Reddy (FSDT)	2.652	1.459	3.814
		Analítico	2.729	1.523	3.882
		MMFGL-2x2	3.065	1.673	4.622
		MMFGL-4x4	3.253	1.771	4.980

Tabela 4.21. Placa Laminada  $[0^\circ/90^\circ/\dots]$  Não Simétrica, quadrada, submetida a um CARREGAMENTO SENOIDAL: valores dos deslocamentos verticais e de tensões para várias condições de contorno e com  $NL=10$ .

$$(a/h = 10)$$

NL	Solução	Fonte	Condições de Contorno		
			SSSS	SSCC	SSFF
10	$\bar{w}$	Reddy (FSDT)	0.616	0.386	0.914
		Analítico	0.615	0.385	0.915
		MMFGL-2x2	0.615	0.385	0.914
		MMFGL-4x4	0.615	0.385	0.915
		CPT	0.444	0.169	0.686
	$\bar{\sigma}_1$	Reddy (FSDT)	4.863	2.550	1.648
		Analítico	5.009	2.692	1.723
		MMFGL-2x2	5.103	2.776	1.815
		MMFGL-4x4	5.061	2.727	1.796
		CPT	4.611	2.798	1.324
	$\bar{\sigma}_2$	Reddy (FSDT)	4.863	3.031	7.384
		Analítico	5.009	3.135	7.533
		MMFGL-2x2	5.103	3.187	7.573
		MMFGL-4x4	5.061	3.165	7.551
		CPT	4.611	1.694	7.395
	$\bar{\sigma}_4$	Reddy (FSDT)	2.652	1.648	3.782
		Analítico	2.729	1.708	3.853
		MMFGL-2x2	2.193	1.370	3.064
		MMFGL-4x4	2.345	1.467	3.311

#### 4.4.11. Placa "Angle-Ply" $[+\theta/-\theta]$ Quadrada e Apoiada.

Este exemplo corresponde a uma placa laminada não-simétrica, quadrada, de duas lâminas de mesma espessura, e submetida a um carregamento uniformemente distribuído. As fibras estão orientadas segundo as direções  $+15^\circ/-15^\circ$ . A placa tem relação  $a/h = 0,02$ , onde  $a = 10,0$  in. As propriedades elásticas correspondem à do Material 3, na Tabela 4.1.

Tabela 4.22. - Placa "Angle-Ply"  $[+15^\circ/-15^\circ]$ , Apoiada, Submetida a um CARREGAMENTO UNIFORME: valores dos deslocamentos  $w$ ,  $u$  e  $v$ .

Fonte	$w$ $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0)$	$u$ $(\frac{a}{2}, 0, 0)$	$v$ $(0, \frac{a}{2}, 0)$
TRIPLT-6x6	9.04	0.00773	0.0327
Spilker	8.9486	0.0078	0.03279
$M_{1 \times 1}$	7.5122	0.00600	0.03214
$M_{2 \times 2}$	9.6463	0.00859	0.03312
$M_{3 \times 3}$	8.3385	0.00836	0.03202
$M_{4 \times 4}$	9.6650	0.00792	0.03204
$M_{5 \times 5}$	9.7689	0.00749	0.03234

As condições de contorno do problema correspondem ao caso SS-1 da Tabela 4.3. Por se tratar de um laminado não simétrico, onde os efeitos do acoplamento flexão-membrana são pronunciados, a placa será discretizada integralmente. São determinados os deslocamentos  $w$ ,  $u$  e  $v$ , respectivamente, nos pontos  $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0)$ ,  $(\frac{a}{2}, 0, 0)$  e  $(0, \frac{a}{2}, 0)$ .

Os resultados estão apresentados na Tabela 4.22 considerando vários refinamentos uniformes de malhas e coeficiente de cisalhamento igual a 5/6. São apresentados, também, os resultados de Lakshminarayana & Murthy [1984] que, utilizando o elemento TRIPLT, discretizaram a placa toda por meio de uma malha 6x6, e os de Spilker & Jakobs [1986] que resolveram este problema empregando uma formulação híbrida e malha 6x6.

É interessante observar a natureza oscilatória dos resultados determinados pelo MMFGL. Isto se explica pelo fato de que, para as malhas 1x1, 3x3 e 5x5, os resultados correspondem a um ponto nodal interno do elemento, enquanto que, para as malhas 2x2 e 4x4, estão

associados a um vértice do mesmo. Barbieri [1992] já havia observado, também, comportamento oscilatório semelhante em alguns outros exemplos.

#### 4.4.12. Placa Circular Ortotrópica Engastada.

O último exemplo desta série corresponde ao caso de uma placa circular ortotrópica engastada de raio  $a$ , submetida a um carregamento uniformemente distribuído de intensidade  $q$ . As propriedades elásticas correspondem às do Material 3, na Tabela 4.1. Devido às condições de simetria, apenas 1/4 da placa foi discretizado. A discretização de domínio adotada corresponde à ilustrada na Figura 4.38. A Figura 4.39 mostra a variação dos deslocamentos verticais no centro da placa, conforme a relação  $h/a$ . As Figuras 4.40 e 4.41 mostram, respectivamente, a variação dos deslocamentos verticais e dos momentos  $M_{xx}$  ao longo do eixo Y. São apresentados, também, os resultados fornecidos por Lakshiminarayana & Murthy [1984], com o elemento TRIPLT. Os deslocamentos foram adimensionalizados por meio da relação

$$\bar{w} = \frac{w D^*}{q a^4} \quad (4.51)$$

onde  $D^* = 3 (D_{11} + D_{22}) + 2 (D_{12} + 2 D_{66})$  e  $D_{ij}$  são os coeficientes da matriz de rigidez de flexão expressos em (4.19).

Novamente, o MMFGL demonstra um bom desempenho e revela oscilação entre os resultados dos nós dos cantos dos elementos e os intermediários, como indicado nas Figuras 4.40 e 4.41.

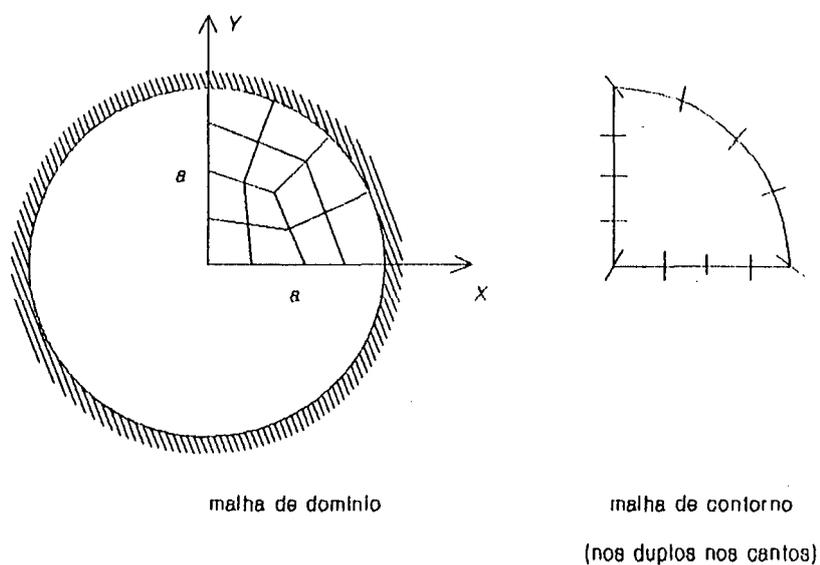


Figura 4.38. Placa Circular Ortotrópica Engastada: malhas utilizadas.

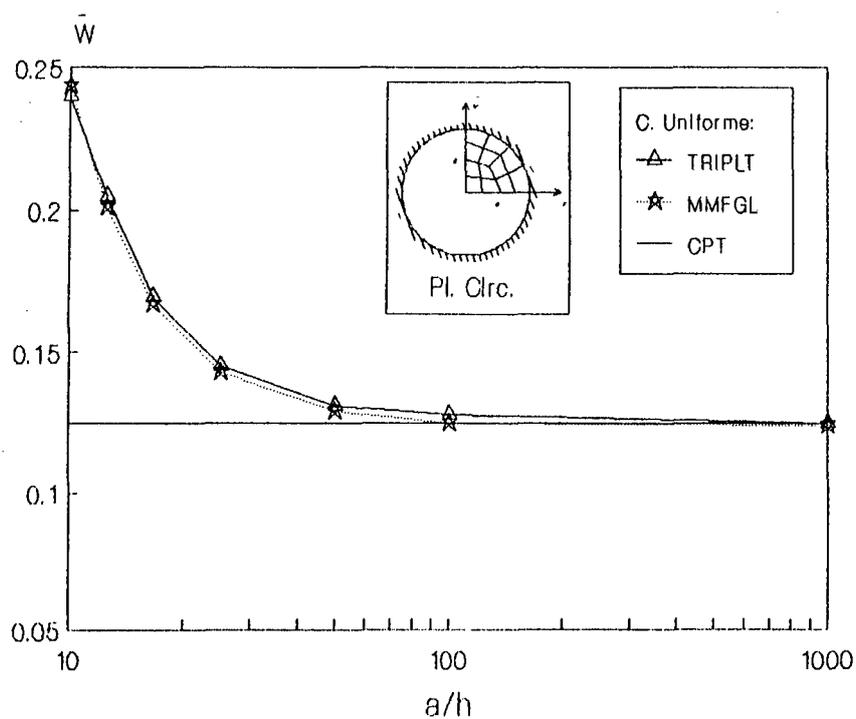


Figura 4.39. - Placa Circular Ortotrópica Engastada: variação dos deslocamentos verticais no centro, conforme a relação  $h/a$ .

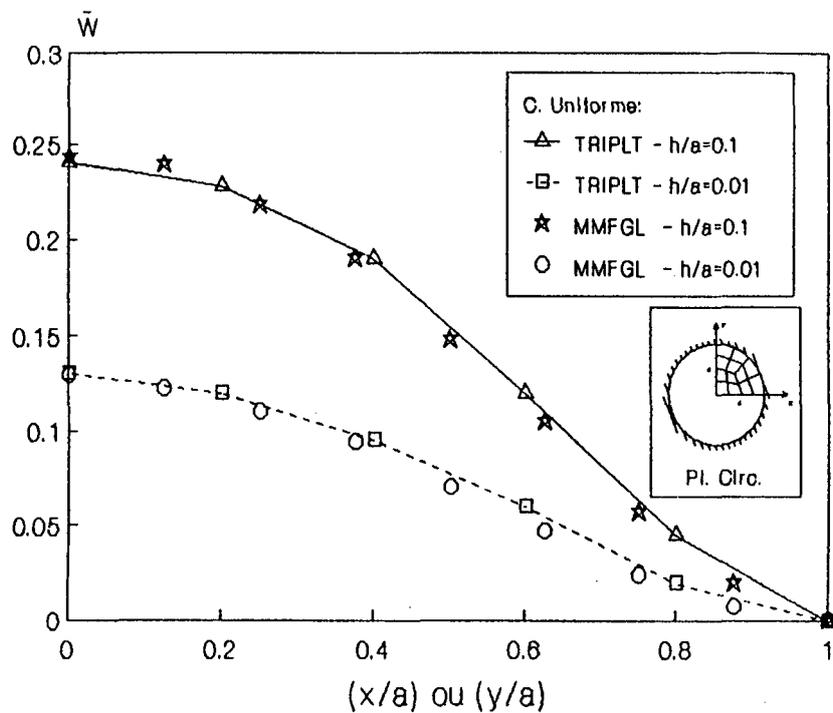


Figura 4.40. - Placa Circular Ortotrópica Engastada: variação dos deslocamentos verticais ao longo do eixo Y.

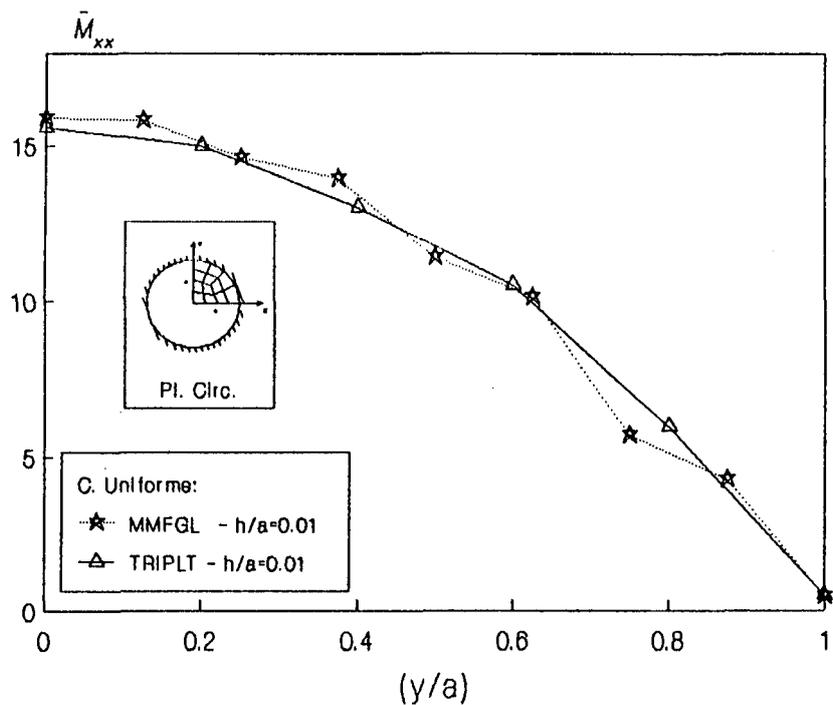


Figura 4.41. - Placa Circular Ortotrópica Engastada: variação dos momentos  $M_{xx}$  ao longo do eixo Y.

## 4.5. Referências Bibliográficas do Capítulo 4.

- Barbieri, R. - Desenvolvimento e Aplicação do Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) Para Problemas do Meio Contínuo. Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina (Tese de Doutorado), (1992)
- Engblom, J. J.; Ochoa, O. O. - Through The Thickness Stress Predictions For Laminated Plates Of Advanced Composite Materials. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 21, 1759-1776, (1985)
- Engblom, J. J.; Ochoa, O. O. - Finite Element Formulation Including Interlaminar Stress Calculations. *Comp. & Struct.*, 23, n.2, 241-249, (1986)
- Häggblad, B.; Bathe, K.J. - Specifications of Boundary Conditions For Reissner/Mindlin Plate Bending Finite Elements. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 30, 981-1011, (1990)
- Hinton, E.; Campbell, J.S. - Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Squares Method. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 8, 461-480, (1973)
- Jones, R. M. - *Mechanics Of Composite Material*. Mc. Graw-Hill Book Co. (1975)
- Lakshminarayana, H. V.; Shidhara-Murthy, S. - A Shear-Flexible Triangular Finite Element Model For Laminated Composite Plates. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 20, 591-623, (1984)
- Lardeur, P.; Batoz, J. L. - Composite Plate Analysis Using A New Discrete Shear Triangular Finite Element. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 27, 343-359, (1989)
- Machado, R.D.; Barcellos, C.S. - A First Modified Local Green's Function Method Approach To Ortotropic Laminated Plates. *Proc. of CADCOMP92 - Computer Aided Design for Composite Materials Conference*. Ed. C.A. Brebbia. Newark. USA, (1992).
- Mindlin, R. D. - Influence Of Rotatory Inertia And Shear On Flexural Motions Of Isotropic, Elastic Plates. *J. Appl. Mech.*, 31-38, (1951)
- Noel, A. T. - Desenvolvimento de Um Elemento Misto de Casca de Dupla Curvatura Para Análise de Materiais Multilaminados. *Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, (1991)*
- Noel, A. T.; Barcellos, C. S. - Desenvolvimento De Um Elemento Misto De Casca De Dupla Curvatura Para Análise de Materiais Multilaminados. *XI COBEM - Cong. Bras. Engen. Mecânica*, pp. 117-

120, SP/BRASIL. (1991)

- Noor, A. K.; Burton, W. S. - Assessment Of Shear Deformation Theories For Multilayered Composite Plates. Appl. Mech. Rev., 42, n.1, 1-12, (1989)
- Noor, A. K.; Mathers, M. D. - Anisotropy And Shear Deformation In Laminated Composite Plates. AIAA Journal, 14(2), 282-285, (1976)
- Noor, A. K.; Mathers, M. D. - Finite Element Analysis Of Anisotropic Plates. Int. J. Num. Meth. Engng., 11(2), 289-307, (1977)
- Pagano, N. J. - Exact Solutions For Composite Laminates In Cylindrical Bending. J. Composite Mat., 3, 398-411, (1969)
- Pagano, N. J. - Exact Solutions For Rectangular Bidirectional Composites And Sandwich Plates. J. Composite Mat., 4, 20-34, (1970)
- Putcha, N. S.; Reddy, J. N. - A Refined Mixed Shear Flexible Finite Element For The Non-Linear Analysis Of Laminated Plates. Comp. & Struct., 22, n.4, 529-538, (1986)
- Reddy, J. N. - Energy And Variational Methods In Applied Mechanics. Wiley, New York, (1984)
- Reddy, J.N. - On Refined Computational Models Of Composite Laminates. Int. J. Num. Meth. Engng., 27, 361-382, (1989)
- Reddy, J.N.; Chao, W.C. - A Comparison of Closed-Form and Finite-Element Solutions of Thick, Laminated, Anisotropic Rectangular Plates. Nuclear Engineering and Design, 64, 153-167, (1981)
- Reissner, E. - The Effect Of Transverse Shear Deformation On The Bending Of Elastic Plates. J. Appl. Mech., 12, 69-77, (1945)
- Silva, L.H.M. - Novas Formulações Integrais Para Problemas da Mecânica. Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina (Tese de Doutorado), (1988)
- Spilker, R. L.; Jakobs, D. M. - Hybrid Stress Reduced Mindlin Elements For Thin Multilayer Plates. Int. J. Num. Meth. Engng., 23, 555-578, (1986)
- Whitney, J. M. - Structural Analysis Of Laminated Anisotropic Plates. Technomic Publishing Company, Inc, Lancaster, Pensilvania, (1987)
- Wilt, T.E.; Saleeb, A.F.; Chang, T.Y. - A Mixed Element For Laminated Plates And Shells. Comp. & Struct., 37, N. 4, 597-611, (1990)

## CAPÍTULO 5

### SOLUÇÃO DE PLACAS COMPOSTAS LAMINADAS PELO MÉTODO MODIFICADO DA FUNÇÃO DE GREEN LOCAL ATRAVÉS DE UMA TEORIA DE ORDEM SUPERIOR

#### 5.1. INTRODUÇÃO.

No Capítulo anterior, mostrou-se a aplicação do Método Modificado da Função de Green Local (MMFGL) ao caso de placas ortotrópicas laminadas, utilizando-se uma Teoria de Primeira Ordem. Tal teoria baseava-se no Modelo de Mindlin para placa homogêneas e foi estendida pela primeira vez ao caso multi-laminado por Yang, Norris & Stavsky [1966]. A denominação de "Primeira Ordem" deve-se ao fato de se considerar uma variação linear dos deslocamentos ao longo da espessura. Como os efeitos das deformações cisalhantes transversais são também incorporados na própria formulação, decorre daí a identificação "FSDT - First Order Shear Deformation Theory".

A Teoria de Primeira Ordem, baseada num modelo de deslocamentos como a adotada anteriormente, é bastante simples de ser implementada e computacionalmente de baixo custo. Assim, a primeira investigação do MMFGL ao caso de placas laminadas foi feita através da FSDT. Os resultados alcançados, como demonstram as diversas aplicações realizadas, foram plenamente satisfatórios.

Apesar da simplicidade do modelo de primeira ordem, alguns aspectos não podem ser relevados na análise de um composto laminado,

sob pena de serem cometidos alguns erros.

Um deles, de grande importância, relaciona-se com a utilização do fator de correção de cisalhamento,  $k$ . Tendo sido introduzido artificialmente nos modelos de Reissner [1949] e Mindlin [1951] para que a resultante de tensões cisalhantes, em termos médios, fosse correta, o fator  $k$  é tomado constante para o caso de placas homogêneas. Embora este procedimento seja usual em placas laminadas e tenha sido adotado no Capítulo anterior, será mostrado que nem sempre isso é correto. Como a distribuição de tensões interlaminares ao longo da espessura não é linear, a utilização de um único e constante fator,  $k$ , é insuficiente para representar corretamente esse efeito, especialmente em placas espessas ou em laminados com propriedades muito distintas entre as lâminas.

Outro conceito muitas vezes admitido é o de que o comportamento de um laminado, quando cresce o número de lâminas, se aproxima de uma placa homogênea anisotrópica. Whitney [1972] mostrou que esta idéia nem sempre é verdadeira. Experimentos numéricos por ele realizados mostraram que os fatores de correção do cisalhamento não se aproximam, necessariamente, dos valores clássicos de placas homogêneas, quando cresce o número de lâminas. Tais coeficientes dependem da distribuição das tensões cisalhantes transversais ao longo da espessura que, por sua vez, dependem das propriedades locais de cada lâmina. Logo, se as propriedades variam muito, não é possível tratar o laminado como uma placa homogênea anisotrópica. Estas observações reforçam o fato de que a consideração de um único e constante fator de cisalhamento pode conduzir a resultados não totalmente corretos.

A maneira de incorporar os efeitos do cisalhamento transversal representa uma das grandes diferenças entre as diversas teorias de placas. É bom recordar que a Teoria Clássica, CPT, ao admitir que a normal permanece reta após a deformação, não considera tais efeitos, sendo, portanto, restrita apenas ao caso de placas finas.

Inúmeros trabalhos publicados por Pagano [1969, 1970a, 1970b], Pagano et. alli. [1971], Pagano & Hatfield [1972], Whitney & Leissa [1969], e Whitney & Pagano [1970], atestam a limitação da Teoria Clássica de Placas. Pagano, na série de artigos citados, desenvolve soluções "exatas", baseadas na Teoria da Elasticidade, para diversas configurações de laminados, simétricos ou não, e para vários casos de carregamento. Mostra, também, que os resultados decorrentes da CPT, quando comparados com suas soluções exatas, são aceitáveis apenas para grandes relações entre vão e espessura ( $a/h$ ).

A influência do coeficiente de correção do cisalhamento para diversos casos de laminados foi investigada por Whitney e Pagano [1970], que comprovaram que a Teoria de Primeira Ordem, da forma utilizada em casos homogêneos, não pode ser empregada indistintamente em laminados. Verificaram, também, que as tensões cisalhantes interlaminares, calculadas por meio de relações constitutivas, não tinham precisão aceitável e não satisfaziam as condições de equilíbrio nas interfaces.

Para atender o equilíbrio de tensões interlaminares, Pryor & Barker [1971] propuseram que as tensões cisalhantes fossem calculadas através das equações de equilíbrio da Elasticidade 3-D. Os autores mostraram que, assim procedendo, os resultados seriam mais coerentes e próximos daqueles obtidos por Pagano.

Pouco tempo depois, Whitney [1972], num caminhar inverso ao usual, isto é, partindo das equações de equilíbrio da Elasticidade, usando as relações constitutivas de cada lâmina, e substituindo-as na expressão da energia de deformação, concluiu que o campo de deslocamentos necessário para descrever a placa deformada não poderia ser linear, como no caso da Teoria de Primeira Ordem. Estabelecia, deste modo, a necessidade de utilização de polinômios de ordem mais elevada para melhor representar o campo de deslocamentos. A partir de então, começaram a surgir as Teorias de Ordem Superior ou Refinadas.

Muitas teorias refinadas foram desenvolvidas e podem ser encontradas na literatura. A principal diferença entre elas reside no grau do polinômio adotado para representar cada um dos deslocamentos  $u$ ,  $v$  ou  $w$ , ou, ainda, nos termos não nulos desse polinômio.

No presente Capítulo, três Teorias de Ordem Superior serão analisadas: a de Lo, Christiensen & Wu [1977a,b], a de Reddy [1984a,b,c], e a de Kant [1988]. Apresenta-se, também, o processo preditor-corretor de Noor & Burton [1989] que, mesmo adotando uma expansão linear de deslocamentos, consegue adequar os coeficientes de correção do cisalhamento para o caso específico do laminado em análise e, dessa forma, representar melhor a distribuição das tensões cisalhantes ao longo da espessura.

Embora o MMFGL seja totalmente geral e qualquer dos métodos citados pudesse ser utilizado numa análise refinada de placas laminadas, como primeira investigação, apenas a proposta simplificada de Kant & Pandya [1988] para laminados não simétricos será examinada.

Devido à importância dos trabalhos de Pagano e de Whitney, será feita, a seguir, uma breve revisão de suas obras, antes de serem apresentadas as teorias de ordem superior,

## 5.2. OS TRABALHOS DE WHITNEY & PAGANO.

Assim como Yang, Norris & Stavsky [1966] podem ser considerados como os pioneiros na modelagem pela Teoria Clássica de Placas Laminadas (CLPT), Whitney e Pagano podem ser admitidos como os precursores das Teorias de Ordem Superior (HSDT - High Order Shear Deformation Theory). Foi a partir de seus trabalhos que se salientou a necessidade de utilização de polinômios de maior ordem para descrever o campo de deslocamentos e representar melhor a distribuição das tensões cisalhantes ao longo da seção transversal.

Pagano [1969, 1970a, 1970b, 1971 e 1972] teve o grande mérito de ter desenvolvido soluções exatas, baseadas na Teoria da Elasticidade, para diversas configurações de laminados e para vários tipos de carregamento. Seus resultados servem, até hoje, como referência e aferição de novos métodos.

Em seu trabalho inicial [1969], Pagano estudou a flexão cilíndrica de laminados simétricos e simplesmente suportados, submetidos a um carregamento senoidal. A solução do problema de valor de contorno, determinado a partir das equações de equilíbrio, foi obtida supondo-se que as tensões normais também variassem por meio de uma senoide no sentido longitudinal da placa.

Nesse trabalho foram analisadas três configurações geométricas distintas: (a) uma placa uni-direcional com fibras orientadas na direção X; (b) uma placa não simétrica de duas lâminas; e, finalmente, (c) um laminado simétrico de três camadas de mesma espessura. Por meio desses exemplos, Pagano comparou os seus resultados com aqueles determinados pela Teoria Clássica de Placas, CPT, mostrando que esta teoria sub-avalia as deformações e, para pequenos valores de  $\nu = a/h$ , há necessidade de incorporar a influência das deformações por cisalhamento. Caso contrário, comete-se erro que, nos casos (a) e (c), vale, aproximadamente, 20%, quando  $\nu = 20$ .

Quanto à distribuição de tensões, apesar de algumas variações em relação à solução exata terem sido anotadas, Pagano observou uma substancial concordância entre os dois procedimentos. A aproximação das tensões transversais, responsáveis pelos problemas de delaminações, converge, pela CPT, à solução exata, muito mais rapidamente do que os valores dos deslocamentos perpendiculares ao plano médio.

A conclusão desse trabalho é que a Teoria Clássica, como agora já é tão sabido, só é adequada no projeto de peças muito finas, com

elevados valores de  $\kappa = a/k$ .

Pagano estendeu seu primeiro estudo a outras configurações geométricas, de distribuição de lâminas, e de casos de carregamento. No trabalho seguinte [1970a], foram determinadas as soluções exatas para compostos retangulares. Placas com lâminas orientadas segundo direções quaisquer ("angle-ply"), com ângulos correspondentes a  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $75^\circ$  e  $90^\circ$  foram também investigadas [1970b].

A flexão cilíndrica de compostos laminados submetidos a carregamentos uniforme ou concentrado foi discutida por Pagano et. alli. [1971]. O caso de laminados com maior número de lâminas foi abordado por Pagano & Hatfield [1972].

Um pouco antes, Whitney & Leissa [1969] apresentaram soluções aproximadas para laminados simétricos e simplesmente apoiados, utilizando as hipóteses de Kirchhoff acrescidas das hipóteses de grandes deslocamentos de Von Karman. Para tanto, empregaram um campo linear de deslocamentos. O acoplamento membrana-flexão foi também analisado.

Esta formulação foi posteriormente adotada por Whitney & Pagano [1970], que compararam os resultados com as soluções exatas desenvolvidas por Pagano [1969] para a flexão cilíndrica de placas. As principais conclusões deste trabalho reforçavam que:

- a) O fator de correção do cisalhamento influencia a qualidade final da solução do problema;
- b) O efeito das deformações por cisalhamento pode ser significativo para compostos com baixos valores de  $\kappa = a/k$ , por exemplo,  $\kappa \leq 20$ ;
- c) Placas laminadas anisotrópicas são muito mais suscetíveis às influências das deformações por cisalhamento do que as isotrópicas homogêneas.

O trabalho que mais incisivamente modificou a filosofia de abordagem das análises de placas laminadas por meio de expansões dos campos de deslocamentos foi o de Whitney [1972]. Até então, todas as teorias que incorporavam as deformações por cisalhamento o faziam de maneira análoga à Teoria de Mindlin para o caso de placas homogêneas. Os deslocamentos no plano da placa eram considerados como variando linearmente ao longo da espessura e as deformações transversais por cisalhamento nas superfícies da placa não eram anuladas.

Para considerar o fato de que as tensões cisalhantes transversais não são constantes em cada lâmina do laminado, Whitney utilizou dois fatores independentes de correção do cisalhamento,  $k_1$  e  $k_2$ , que foram incorporados nas relações constitutivas de cisalhamento da placa, tais como:

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1^2 A_{44} & k_1 k_2 A_{45} \\ k_1 k_2 A_{45} & k_2^2 A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{yz}^{\circ} \\ \varepsilon_{xz}^{\circ} \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

onde  $Q_y$  e  $Q_x$  são os esforços cisalhantes nas direções Y e X, respectivamente,  $\varepsilon_{yz}^{\circ}$  e  $\varepsilon_{xz}^{\circ}$  são as deformações transversais por cisalhamento na superfície de referência da placa, e  $A_{44}$ ,  $A_{45}$  e  $A_{55}$  são os coeficientes da matriz de rigidez do laminado, determinados de acordo com (4.16).

Partindo da equação constitutiva (4.22), isto é,

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^{\circ} \\ K \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

Whitney determinou as deformações

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ K \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ B^* & D^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

que, numa forma compactada, podem ser expressas como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^o &= A_{ij}^* N_j + B_{ij}^* M_j \\ K_i &= B_{ij}^* N_j + D_{ij}^* M_j \end{aligned} \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (5.4)$$

Supondo o caso de flexão cilíndrica, estado plano de tensões, e levando as deformações calculadas em (5.4) na Lei de Hooke, (3.5), chega-se, para uma lâmina genérica, L, a:

$$\sigma_i^{(L)} = Q_{ij}^{(L)} ( B_{jm}^* + z D_{jm}^* ) M_m \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (5.5)$$

onde  $Q_{ij}$  são os componentes da matriz de rigidez reduzida no Estado Plano de Tensões, dados por (3.19).

Levando-se (5.5) nas equações de equilíbrio da Elasticidade, (3.28), as tensões cisalhantes transversais da k-ésima lâmina podem ser obtidas após integração em relação a Z, chegando-se a:

$$\sigma_i^{(L)} = H_i^{(L)} - \frac{Z}{2} ( 2 B_{ij}^* + z D_{ij}^* ) Q_{jm}^* Q_m \quad (i, j = 4, 5) \quad (5.6)$$

onde  $H_i^{(L)}$  são termos constantes definidos pela continuidade de  $\sigma_i$  ( $i=4,5$ ) nas interfaces das diversas lâminas e pela condição de que essas tensões se anulem nas superfícies livres da placa. Desse modo ficam garantidas as condições de equilíbrio.

A expressão (5.6) revela que as tensões interlaminares variam quadraticamente em relação à coordenada Z. Se for utilizada na terceira equação de equilíbrio, (3.28), mostrará também que a tensão

normal  $\sigma_z$  varia cubicamente com a coordenada Z. Whitney concluiu ainda ser possível a determinação do valor exato dos coeficientes de correção do cisalhamento, usando (5.6) na expressão da energia de deformação do cisalhamento transversal, (4.27), isto é,

$$U_c = \frac{1}{2} \int_V ( \sigma_{yz}^{(L)} \epsilon_{yz}^{(L)} + \sigma_{xz}^{(L)} \epsilon_{xz}^{(L)} ) dV \quad (5.7)$$

Lembrando que

$$( Q_x, Q_y ) = \int_{-h/2}^{h/2} ( \sigma_{xz}, \sigma_{yz} ) dz \quad (5.8)$$

e substituindo (5.1) em (5.7), a energia de deformação pode ser expressa em termos dos esforços cisalhantes, ficando dependente apenas dos fatores de correção,  $k_1$  e  $k_2$ . Por outro lado, pode-se expressar  $U_c$  somente em termos das tensões transversais usando (5.6) e (5.8) em (5.7). Como, por qualquer dos dois processos o resultado deve ser o mesmo, igualando-se as duas expressões, determinam-se os coeficientes  $k_1$  e  $k_2$ .

Para evitar a redundância de duas incógnitas,  $k_1$  e  $k_2$ , e uma única equação, Whitney se baseou no fato de que o máximo valor de  $Q_y$ , no caso de uma flexão cilíndrica predominante na direção X, ser pelo menos uma ordem de grandeza inferior a  $Q_x$ . Desse modo, os termos que envolvem  $Q_y$  podem ser negligenciados e o coeficiente  $k_1$  pode ser determinado através de:

$$k_1^2 = A_{55}^* \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \left[ S_{55}^{(L)} \left( g_1^{(L)}(z) \right)^2 + 2 S_{45}^{(L)} g_1^{(L)}(z) g_2^{(L)}(z) + S_{44}^{(L)} \left( g_2^{(L)}(z) \right)^2 \right] dz \right\}^{-1} \quad (5.9)$$

onde

$$A_{55}^* = \frac{A_{44}}{(A_{44} A_{55} - A_{45}^2)} \quad (5.10)$$

$$g_1^{(L)}(z) = \left[ H_1^{(L)} - \frac{z}{2} \left( 2 B_{1j}^* + z D_{1j}^* \right) Q_{j1}^{(L)} \right] \quad (5.11)$$

$$g_2^{(L)}(z) = \left[ H_6^{(L)} - \frac{z}{2} \left( 2 B_{6j}^* + z D_{6j}^* \right) Q_{j1}^{(L)} \right]$$

e  $S_{ij}^{(L)}$  são os coeficientes da matriz de flexibilidade,  $S$ , correspondente à lâmina  $L$ . Por um procedimento análogo, determina-se o fator  $k_2$ .

Para melhor entendimento do trabalho de Whitney, considere-se o seguinte caso:

#### Caso Particular de uma Placa Isotrópica Homogênea:

Supondo que a placa esteja submetida a um Estado Plano de Tensões,  $u_0 = v_0 = 0$ , então as tensões normais correspondem a:

$$\sigma_x = \frac{-Ez}{(1-\nu)} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = \frac{12 M_x z}{h^3}$$

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \frac{-Ez}{(1-\nu)} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = \frac{12 M_y z}{h^3} \\ \sigma_{xy} &= \frac{-Ez}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{12 M_{xy} z}{h^3}\end{aligned}\quad (5.12)$$

Como este procedimento é geral, o mesmo será desenvolvido apenas para o caso de  $\sigma_{xz}$ , sendo inteiramente análogo para  $\sigma_{yz}$ . Logo, substituindo-se (5.12) na equação de equilíbrio (3.28), resulta:

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = -\frac{12z}{h^3} \left[ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right] \quad (5.13)$$

Integrando-se (5.13) em relação a  $Z$ , obtém-se:

$$\sigma_{xz} = \frac{-6z^2}{h^3} \left[ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right] + f_{xz}(x,y) \quad (5.14)$$

onde  $f_{xz}(x,y)$  é uma função a ser determinada impondo-se as condições de contorno  $\sigma_{xz} = 0$  em  $z = \pm h/2$ . Assim procedendo, chega-se a:

$$f_{xz}(x,y) = \frac{3}{2h} \left[ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right] \quad (5.15)$$

o que implica em

$$\sigma_{xz} = \frac{3}{2h} \left[ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right] \left[ 1 - 4 \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] \quad (5.16)$$

Analogamente,

$$\sigma_{yz} = \frac{3}{2h} \left[ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right] \left[ 1 - 4 \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] \quad (5.17)$$

Substituindo-se (5.16) e (5.17) na terceira equação de equilíbrio,  $\sigma_{xz,x} + \sigma_{yz,y} + \sigma_{z,z} = 0$ , integrando-se ao longo da coordenada  $Z$ , e impondo-se a condição  $\sigma_z(x,y,z=\pm h/2) = 0$ , chega-se a:

$$\sigma_z = -\frac{q}{2} \left[ 1 - 3 \left( \frac{z}{h} \right) + 4 \left( \frac{z}{h} \right)^3 \right] \quad (5.18)$$

onde  $q$  é o carregamento atuante sobre a placa.

Considerando ainda a placa homogênea isotrópica, é possível expressar a energia de deformação transversal,  $U_c$ , como sendo:

$$U_c = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} \left( \sigma_{xz} \epsilon_{xz} + \sigma_{yz} \epsilon_{yz} \right) d\Omega dz \quad (5.19)$$

Usando (5.1) em (5.19) e lembrando que, para a placa homogênea isotrópica,  $A_{44} = A_{55} = D_c$ ;  $A_{45} = 0$ ;  $k_1^2 = k_2^2 = k$ ; e  $D_c = Eh / [2(1+\nu)]$ ; então

$$U_c = \frac{1}{2 k D_c} \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} \left( Q_x^2 \sigma_{xz} + Q_y^2 \sigma_{yz} \right) dz d\Omega \quad (5.20)$$

Levando (5.8) em (5.20), pode-se escrever:

$$U_c = \frac{1}{2 k D_c} \int_{\Omega} \left( Q_x^2 + Q_y^2 \right) d\Omega \quad (5.21)$$

Por outro lado, observa-se que  $U_c$  em (5.19) pode ser re-escrita exclusivamente em termos de  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{yz}$ , uma vez que, pela equação constitutiva do caso isotrópico homogêneo

$$\sigma_{iz} = \frac{D_c \epsilon_{iz}}{h} \quad (i = 4,5) \quad (5.22)$$

Assim, a energia de deformação transversal resulta em

$$U_c = \frac{k}{2 D_c} \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} \left( \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2 \right) dz d\Omega \quad (5.23)$$

Substituindo (5.16) e (5.17) em (5.23) e integrando em relação a Z, obtém-se:

$$U_c = \frac{3}{5} \frac{1}{D_c} \int_{\Omega} \left( Q_x^2 + Q_y^2 \right) d\Omega \quad (5.24)$$

Igualando (5.24) a (5.21), resulta o já tradicional valor de  $k = 5/6$ , referente à Teoria de Reissner.

\* \* \* \*

Um último aspecto relevante a ser extraído deste tópico é que a Teoria Clássica de Placas, CPT, só tem validade se as tensões  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$  e  $\sigma_{zz}$  forem pequenas quando comparadas com as tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_{xy}$ . Como as tensões normais são da ordem  $[ q a^2 / k^2 ]$ ;  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$  e  $\sigma_{xy}$  são da ordem  $[ q a / k ]$ ; e  $\sigma_z$  é da ordem  $[ q ]$ , então, para relações  $a/k \leq 10$ , placas semi-espessas, é imprescindível a consideração das deformações cisalhantes transversais, especialmente nas regiões com elevados gradientes de tensões, como, por exemplo, na vizinhança de cargas concentradas.

### 5.3. O PROCESSO PREDITOR-CORRETOR DE NOOR E BURTON.

A grande restrição da Teoria de Primeira Ordem é a sua incapacidade de representar perfeitamente a distribuição não linear

das tensões transversais através de uma expansão linear do campo de deslocamentos ao longo da espessura. Os efeitos não lineares são mais pronunciados em peças espessas, não sendo, portanto, apropriado o seu uso nos casos de baixos valores da relação  $a/k$ .

A necessidade de utilização de polinômios de maior ordem para descrever o campo de deslocamentos, e a importância dos fatores de correção do cisalhamento transversal foram assuntos apresentados por Whitney e discutidos no item anterior.

Como os coeficientes de correção do cisalhamento, dependendo da configuração do laminado, podem assumir valores distintos dos considerados para o caso de placa homogêneas, Noor & Burton [1989b] propuseram um processo iterativo, de duas fases, para a correta determinação dos mesmos.

A idéia do método consiste em corrigir os coeficientes de cisalhamento da Teoria de Primeira Ordem, permitindo, dessa forma, que se descrevam, precisamente, os deslocamentos, tensões, etc. Portanto, utiliza-se, a princípio, a expansão linear da própria FSDT.

Na fase inicial, os coeficientes têm valores pré-estabelecidos e os deslocamentos globais da placa são calculados. Tais coeficientes podem ser tomados como sendo os valores clássicos da Teoria de Reissner ou Mindlin, mas nada impede que assumam quaisquer outros valores, por exemplo, a unidade. Na fase posterior, os fatores são corrigidos e procede-se a modificação dos deslocamentos globais. Com os deslocamentos globais corrigidos, realiza-se o cálculo das tensões ao longo da espessura da placa. A resposta final, tanto em termos de deslocamentos quanto de tensões, é muito boa.

A Figura 5.1. mostra, esquematicamente, os passos envolvidos nas duas fases do procedimento computacional. O método pode ser considerado "preditor-corretor" pois os valores utilizados na primeira fase são corrigidos e empregados na segunda quando, então,

## Teoria de Primeira Ordem

## Análise Tri-Dimensional

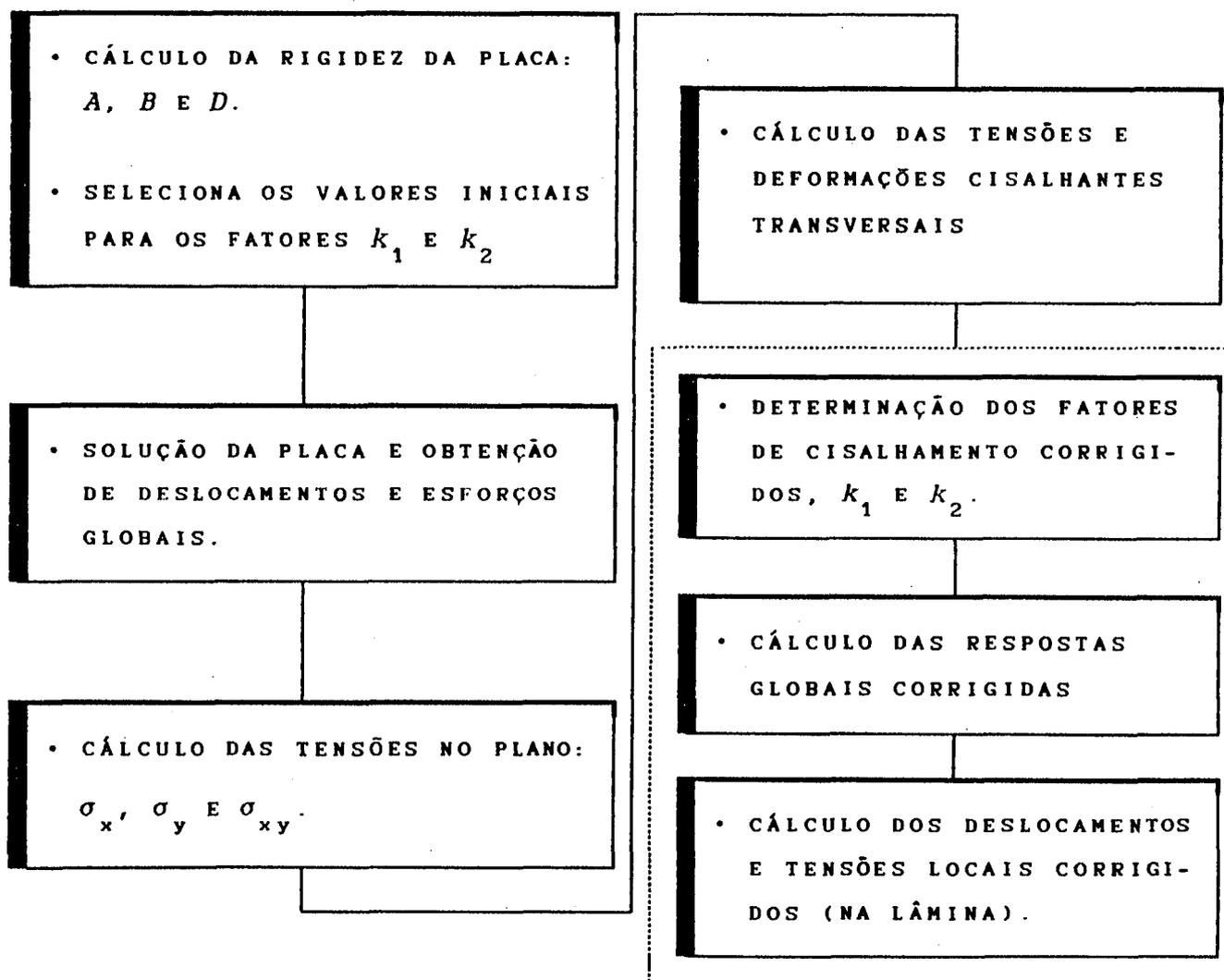


Figura 5.1. - Processo Preditor-Corretor de Noor & Burton

determina-se a solução final do problema.

A fase inicial é aquela onde se realiza uma primeira análise global, utilizando a FSDT em sua forma original, e procurando obter os valores dos deslocamentos e das rotações no plano médio da placa. São

obtidas, também, as deformações e as mudanças de curvatura na superfície média,  $\{\epsilon^0\}$  e  $\{K\}$ , respectivamente, bem como as deformações cisalhantes médias,  $\epsilon_{xz}$  e  $\epsilon_{yz}$ , e as resultantes de tensões,  $\{N\}$ ,  $\{M\}$ , e  $\{Q\}$ . Nessa fase, são ainda calculadas as tensões normais em cada lâmina por meio das relações constitutivas.

A segunda fase tem início com o cálculo das tensões transversais cisalhantes, por meio das três equações de equilíbrio da Elasticidade 3-D. Devido à descontinuidade das tensões cisalhantes nas faces inter-laminares, a integração desenvolvida nesta etapa é feita lâmina a lâmina.

Obtidas as tensões interlaminares, o passo seguinte consiste em se calcular as deformações cisalhantes correspondentes, utilizando-se, novamente, das relações constitutivas de cada lâmina e da matriz de flexibilidade.

Pode-se, dessa forma, calcular os coeficientes  $U_{xz}$  e  $U_{yz}$  da energia densidade de deformação por cisalhamento transversal, que são obtidos por:

$$\begin{aligned} U_{xz} &= \frac{1}{2} C_{55} \epsilon_{xz}^2 \\ U_{yz} &= \frac{1}{2} C_{44} \epsilon_{yz}^2 \end{aligned} \tag{5.25}$$

onde  $C_{55}$  e  $C_{44}$  são os coeficientes de rigidez tri-dimensional dados por (3.28).

Inspirados no processo de determinação do fator  $k$  sugerido por Whitney [1972], Noor & Burton propõem uma estimativa "a posteriori" dos fatores de correção do cisalhamento,  $k_1$  e  $k_2$ , igualando a integral da energia de deformação por cisalhamento transversal ao longo da espessura, com aquela obtida pela teoria bi-dimensional, isto é,

$$k_i \sum_{L=1}^{NL} \int_{h_{L-1}}^{h_L} U_{iz} dz = \frac{1}{2} \left( k_i^0 \right)^2 \bar{C}_{iz} \left( \epsilon_{iz} \right)^2 \quad (i = 4, 5) \quad (5.26)$$

onde

$$\bar{C}_{iz} = \sum_{L=1}^{NL} \int_{h_{L-1}}^{h_L} C_{iz}^{(L)} dz \quad (5.27)$$

e  $k_i^0$  e  $k_i$  são os fatores de cisalhamento inicial e corrigido, respectivamente;  $h_{L-1}$  e  $h_L$  são as distâncias das superfícies superior e inferior da lâmina L ao plano de referência da placa, e NL é o número de lâminas.

Os deslocamentos e rotações com valores médios corrigidos ao longo da espessura são calculados truncando-se a série de Taylor na forma:

$$\begin{aligned} \bar{w}_o &= w_o + \Delta k_j \frac{\partial w_o}{\partial k_j} \\ \bar{u}_{o_i} &= u_{o_i} + \Delta k_j \frac{\partial u_{o_i}}{\partial k_j} \quad (i, j = 1, 2) \\ \bar{\theta}_o &= \theta_o + \Delta k_j \frac{\partial \theta_{o_i}}{\partial k_j} \quad (i, j = 1, 2) \end{aligned} \quad (5.28)$$

onde  $\Delta k_j = k_j - k_j^0$  e  $\bar{w}_o$ ,  $\bar{u}_{o_i}$  e  $\bar{\theta}_{o_i}$  são os deslocamentos e as rotações médias no plano de referência da placa.

Os deslocamentos em qualquer ponto da peça podem ser calculados integrando-se as deformações ao longo da espessura, isto é,

$$\bar{w} = \int_{-h/2}^z \bar{\epsilon}_z dz + b_z \quad (5.29a)$$

$$\bar{u}_i = \int_{-h/2}^z \left( \bar{\epsilon}_{iz} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_i} \right) dz + b_i \quad (i = 1, 2) \quad (5.29b)$$

onde  $b_z$  e  $b_i$  são constantes determinadas igualando-se os deslocamentos obtidos em (5.28) com os valores médios determinados a partir de (5.29), ou seja,

$$\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \bar{w} dz = \bar{w}_o$$

$$\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \bar{u}_i dz = \bar{u}_{o_i} \quad (i = 1, 2) \quad (5.30)$$

Finalmente, com os deslocamentos corretamente determinados, as tensões e as deformações podem ser agora re-calculadas pelos procedimentos usuais.

A questão ainda pendente é quanto às derivadas em relação aos fatores  $k_j$  dos deslocamentos e das rotações que aparecem em (5.28). Para o caso estático, Noor & Burton sugerem a resolução do seguinte sistema algébrico de equações, baseado na FSDT para materiais ortotrópicos:

$$\left( [K]_o + k_1^o [K]_1 + k_2^o [K]_2 \right) \left\{ \frac{\partial X}{\partial k_1} \right\} = - [K]_1 \{ X \} \quad (5.31)$$

onde  $[K]$  é a parte da matriz de rigidez não afetada pelos coeficientes  $k_i^o$ 's (corresponde aos efeitos de membrana e de flexão);  $[K]_i$  é a parte da matriz de rigidez afetada pelo coeficiente  $k_i^o$ ; e, finalmente,  $k_i^o$  é o coeficiente de correção do cisalhamento usado na primeira fase do processo, onde  $i = 1,2$ .

O grande atrativo desta proposta consiste em permitir a análise refinada de um laminado, empregando a Teoria de Primeira Ordem, com apenas cinco graus de liberdade por nó. No entanto, o método exige que, em cada iteração, sejam resolvidos dois sistemas de equações, o inicial, para determinar os deslocamentos globais da peça, e o final, para obter as derivadas desses deslocamentos em relação aos coeficientes  $k_i$ 's.

Experimentos numéricos realizados por Noor & Burton indicaram que, em geral, uma única iteração é suficiente para obter os deslocamentos corretos da placa. Seus resultados, tanto de deslocamentos quanto de tensões, são muito bons.

Diversos outros artigos foram posteriormente publicados por Noor & Burton, como os de [1989a] e [1990a], empregando esta técnica. Mais recentemente o processo foi estendido, também, a outras aplicações como, por exemplo, para cascas [Noor, Burton & Peters (1990)] e flambagem térmica [1991].

#### 5.4. A TEORIA DE ORDEM SUPERIOR DE LO, CHRISTIENSEN E WU (LCW).

As Teorias de Ordem Superior (HSDT) foram desenvolvidas a partir da constatação de que os deslocamentos ao longo da espessura da placa não eram bem representados pela Teoria de Primeira Ordem (FSDT), uma vez que este modelo pressupunha a distribuição linear dos mesmos. O modelo correto deveria ser capaz de representar a distribuição não

linear dos deslocamentos, cujo efeito é mais pronunciado em placas espessas. Nestas condições, o uso da FSDT não é indicado.

As Teorias Refinadas foram desenvolvidas expandindo-se os deslocamentos em séries de potências, em termos da coordenada normal à superfície média,  $Z$ . A princípio, a precisão dessas teorias depende apenas da inclusão de um número suficiente de termos na série. Na prática, porém, o truncamento depende do grau de complexidade que a expansão polinomial acarreta à teoria. Um grande número de termos na série implica num aumento do número de graus de liberdade, tornando o sistema final de equações maior, majorando os gastos computacionais com o armazenamento e as operações dessas matrizes. Podem, também, surgir termos de ordem elevada cujo significado físico seja de difícil ou, até mesmo, impossível conceituação, dificultando o estabelecimento das condições de contorno pelo usuário.

Em virtude dessas limitações, poucas são as teorias que, na prática, podem ser adotadas. Uma delas é a desenvolvida por Lo, Christensen & Wu [1977a, 1977b, 1978], daqui por diante referenciada por "LCW", e que será, a seguir, apresentada.

A Teoria de LCW foi idealizada de tal modo que as deformações cisalhantes transversais,  $\epsilon_{xz}$  e  $\epsilon_{yz}$ , tivessem a mesma ordem, tanto para os termos derivados do deslocamento  $w$ , como para aqueles decorrentes dos deslocamentos no plano,  $u$  e  $v$ . Dessa forma, o campo de deslocamentos foi considerado como:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + z \theta_x + z^2 \xi_x + z^3 \phi_x \\ v &= v_0 + z \theta_y + z^2 \xi_y + z^3 \phi_y \\ w &= w_0 + z \theta_z + z^2 \xi_z \end{aligned} \quad (5.32)$$

Com o campo de deslocamentos indicado acima, LCW derivaram as expressões para o comportamento da placa a partir do Princípio da

Energia Potencial Estacionária, e compararam os resultados com a Teoria da Elasticidade. Apresentaram as expressões que determinam os esforços cisalhantes em função do campo de deslocamentos (5.32). As tensões normais foram calculadas por relações constitutivas enquanto que as transversais foram obtidas a partir das equações de equilíbrio da Elasticidade.

Os resultados obtidos para placas de comprimento infinito foram bastante próximos dos da Teoria da Elasticidade. Pequenas distorções foram observadas em alguns casos de tensões planas, mas apenas em regiões onde essas tensões atingiam valores relativamente baixos, não invalidando, portanto, a solução final. Neste modelo, não foram utilizados os fatores de correção do cisalhamento.

Deve-se notar que o número total de termos que definem os três deslocamentos em (5.32) é razoavelmente alto. São necessários onze graus de liberdade por nó, contra apenas cinco na FSDT. Os vários termos quadráticos e cúbicos dificultam, também, o estabelecimento apropriado das condições de contorno do problema.

A proposta de LCW mostrou-se adequada para resolver placas espessas, com relações  $a/h$  inferiores à unidade. Mas, casos como estes sugerem a utilização de elementos volumétricos, considerando-se a placa antes um sólido tri-dimensional do que um elemento bi-dimensional. Se, por um lado, os resultados para placas espessas foram muito bons, no caso de placas finas, a opção não se mostrou compensadora, a menos nos casos com variações acentuadas de carregamento, em problemas de impacto, fraturas, peças com aberturas, e todos os outros casos de natureza essencialmente tri-dimensional.

Um último aspecto importante é que a Teoria de LCW não incorpora automaticamente as condições de contorno de tensões cisalhantes nulas nas superfícies livres da placa. Para contornar esse inconveniente, Chomkwah & Avula [1990] utilizaram multiplicadores de Lagrange para que tais condições de contorno fossem atendidas. Essa opção

acrescentou seis novos termos na análise, elevando o número total de incógnitas nodais para dezessete. Os resultados de tensões, contudo, foram muito bons.

Por fim, vale ressaltar que a expansão sugerida por LCW em (5.32) engloba diversas outras teorias de placas laminadas, tais como:

a) Teoria de Primeira Ordem (FSDT):

Anulando-se os termos de ordem quadrática e cúbica, o campo de deslocamentos em (5.32) recai no modelo de primeira ordem já discutido anteriormente, e cuja expansão linear vale:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + z \theta_x \\ v &= v_0 + z \theta_y \\ w &= w_0 \end{aligned} \quad (5.33)$$

Como a Teoria Clássica de Placas é um caso particular da Teoria de Primeira Ordem, então é também representada por (5.32)-(5.33) tomando-se  $\theta_x$  e  $\theta_y$  como sendo, respectivamente,  $\partial u_0/\partial x$  e  $\partial v_0/\partial y$ .

b) Teoria de Nelson e Lorch.

O campo de deslocamentos proposto por Nelson & Lorch [1974] previa expansões quadráticas completas para cada direção, tais como:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + z \theta_x + z^2 \xi_x \\ v &= v_0 + z \theta_y + z^2 \xi_y \\ w &= w_0 + z \theta_z + z^2 \xi_z \end{aligned} \quad (5.34)$$

Observou-se que os termos quadráticos deste modelo não traziam vantagens significativas em relação à Teoria Clássica. Foram utilizados, também, coeficientes de correção do cisalhamento, o que tornou inconsistente o nível de aproximação em (5.34), uma vez que tais coeficientes só deveriam ser adotados quando a distribuição de tensões cisalhantes ao longo da seção fosse uniforme, o que, efetivamente, não decorria do campo de deslocamentos empregado.

c) Teoria de Naghdi e Essenburg.

Naghdi [1957], derivando uma teoria geral de cascas, e Essenburg [1975], desenvolvendo uma teoria correspondente ao caso de placas uni-dimensionais, utilizaram o seguinte campo de deslocamentos:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + z \theta_x \\ v &= v_0 + z \theta_y \\ w &= w_0 + z \theta_z + z^2 \xi_z \end{aligned} \quad (5.35)$$

A exemplo do caso anterior, esta proposta tornou-se inconsistente por também terem sido considerados os fatores de correção do cisalhamento.

Kwon & Akin [1987] fizeram uso deste campo de deslocamentos, empregando-o no desenvolvimento de um modelo misto de elementos finitos. Os autores tomaram o cuidado de não utilizar coeficientes de correção do cisalhamento, mas só apresentaram resultados de deslocamentos para o elemento isoparamétrico de quatro nós desenvolvido.

## d) Teoria de Ordem Superior de Reissner.

Para analisar problemas onde a distribuição não linear de tensões cisalhantes se manifesta mais acentuadamente, tais como placas com orifícios de mesma ordem de grandeza que sua espessura, Reissner [1975] propôs um modelo no qual são desprezadas as contribuições dos modos de deformação no plano; apenas os efeitos externos ao plano são considerados. Assim, o campo de deslocamentos adotado consistia em:

$$\begin{aligned} u &= z \theta_x + z^3 \phi_x \\ v &= z \theta_y + z^3 \phi_y \\ w &= w_0 + z^2 \xi_z \end{aligned} \quad (5.36)$$

Para o caso de uma placa com furo, o modelo de Reissner apresentou resultados bastante satisfatórios.

## 5.5. A TEORIA DE ORDEM SUPERIOR DE REDDY.

Reddy [1984a] propôs uma nova teoria refinada para laminados que, além de incorporar automaticamente as condições de tensões cisalhantes nulas nos bordos livres da placa, considerava uma expansão polinomial cúbica, em termos da coordenada  $Z$ , apenas para os deslocamentos no plano  $u$  e  $v$ . O deslocamento normal ao plano,  $w$ , era mantido independente de  $Z$ , sob o argumento de que as tensões  $\sigma_z$  eram da ordem de  $(h/a)^2$  vezes as tensões planares  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_{xy}$ , o que permitia esta simplificação.

O campo de deslocamentos adotado é da forma:

$$\begin{aligned}
 u &= u_0 + z \theta_x + z^2 \xi_x + z^3 \phi_x \\
 v &= v_0 + z \theta_y + z^2 \xi_y + z^3 \phi_y \\
 w &= w_0
 \end{aligned}
 \tag{5.37}$$

As deformações cisalhantes  $\epsilon_{xz}$  e  $\epsilon_{yz}$  calculadas a partir de (5.37), resultam em:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xz} &= \theta_x + 2z \xi_x + 3z^2 \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\
 \epsilon_{yz} &= \theta_y + 2z \xi_y + 3z^2 \phi_y + \frac{\partial w}{\partial y}
 \end{aligned}
 \tag{5.38}$$

Para que as tensões cisalhantes nos bordos livres da placa se anulem, é necessário que as deformações correspondentes,  $\epsilon_{xz}$  e  $\epsilon_{yz}$  também se anulem em  $\pm h/2$ . Quando isto acontece, os coeficientes de (5.38) ficam determinados como:

$$\begin{aligned}
 \xi_x &= 0 & \xi_y &= 0 \\
 \phi_x &= -\frac{4}{3h^2} \left( \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
 \phi_y &= -\frac{4}{3h^2} \left( \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)
 \end{aligned}
 \tag{5.39}$$

Levando-se (5.39) em (5.37), resulta no campo final de deslocamentos da proposta de Reddy, ou seja,

$$\begin{aligned}
 u &= u_0 + z \left[ \theta_x - \frac{4}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \left( \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\
 v &= v_0 + z \left[ \theta_y - \frac{4}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \left( \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \\
 w &= w_0
 \end{aligned}
 \tag{5.40}$$

Os dois grandes aspectos positivos dessa teoria são a inclusão das condições de contorno de tensões interlaminares na própria formulação, e o pequeno número de graus de liberdade envolvidos na análise. São apenas cinco incógnitas por nó,  $u_o$ ,  $v_o$ ,  $w_o$ ,  $\theta_x$  e  $\theta_y$ , exatamente as mesmas que na Teoria de Primeira Ordem.

Essas vantagens são, entretanto, compensadas pelo fato de que os deslocamentos em (5.40) dependem das derivadas de  $w$  em relação a  $X$  e a  $Y$ . Tais derivadas não são conhecidas *a priori*. Para determiná-las sem aumentar o número total de incógnitas do problema é necessário usar polinômios de Hermite que incorporam derivadas da função de interpolação na sua formulação. Elementos de classe  $\mathcal{C}^1$  fazem uso destes polinômios e apresentam continuidade tanto em termos de deslocamentos quanto de suas derivadas. Apesar de há bastante tempo conhecidos [Zienkiewicz (1974)], os elementos  $\mathcal{C}^1$  são até hoje restritos a domínios simples devido à dificuldades na sua implementação. A ineficiência computacional de tais elementos restringe a aplicação do modelo de Reddy em termos práticos.

Como o campo de deslocamentos indicado em (5.40) é capaz de gerar deformações cisalhantes transversais que variam quadraticamente ao longo da espessura, e também atendem às condições de contorno de (5.39), então não há necessidade de utilização dos coeficientes de correção do cisalhamento na Teoria de Reddy.

No trabalho citado [Reddy (1984a)], são apresentadas soluções exatas para laminados "cross-ply" ( $0^\circ/90^\circ/\dots$ ) simétricos em placas retangulares simplesmente apoiadas. Para obter essas soluções, Reddy empregou uma aproximação do tipo de Navier [Reddy (1984c)]. Foram mostrados, também, diversos resultados que confirmam as conclusões de Whitney e Pagano, especialmente o efeito provocado pela anisotropia do material nos deslocamentos normais ao plano da placa. As tensões normais foram calculadas por meio das relações constitutivas da Teoria de Ordem Superior e, portanto, mostraram-se melhores do que as obtidas

pelas Teorias Clássica e de Primeira Ordem. As tensões cisalhantes foram calculadas a partir das equações de equilíbrio da Elasticidade.

Phan & Reddy [1985] e, posteriormente, Khdeir [1988, 1989] e Khdeir e colegas [1987, 1988, 1989], apresentaram novas soluções aproximadas através da Teoria de Ordem Superior de Reddy. No primeiro foram empregadas as soluções de Navier para dois tipos de condições de contorno em placas retangulares. No segundo, foi desenvolvida uma solução do tipo Lévy para laminados simétricos, simplesmente apoiados em dois bordos opostos, e para diversas outras combinações de condições de contorno nos outros dois bordos. Os casos de carga uniforme, triangular e concentrada foram também analisados.

#### 5.6. A TEORIA DE ORDEM SUPERIOR DE KANT.

Um novo modelo bastante parecido com o de Lo, Christensen & Wu foi sugerido por Kant e empregado numa série de artigos [Kant et. alli. (1982); Pandya & Kant (1988); Kant & Pandya (1988); Mallikarjuna & Kant (1988); Kant et. alli. (1990); Kant & Menon (1991)]. No seu aspecto geral, o modelo utiliza polinômios cúbicos completos para descrever os deslocamentos no plano da placa, e considera que os deslocamentos perpendiculares a esse plano variem quadraticamente ao longo da espessura, ou seja,

$$\begin{aligned} u &= u_0 + z \theta_x + z^2 u_0^* + z^3 \theta_x^* \\ v &= v_0 + z \theta_y + z^2 v_0^* + z^3 \theta_y^* \\ w &= w_0 + z^2 w_0^* \end{aligned} \quad (5.41)$$

onde  $u$ ,  $v$ , e  $w$  são os deslocamentos num ponto qualquer de coordenadas  $(x, y, z)$ ;  $u_0$ ,  $v_0$  e  $w_0$  são os correspondentes deslocamentos no plano de

referência da placa  $(x,y,0)$ ;  $\theta_x$  e  $\theta_y$  são as rotações em torno dos eixos Y e X, respectivamente; e  $u_o^*$ ,  $v_o^*$ ,  $w_o^*$ ,  $\theta_x^*$  e  $\theta_y^*$  são os termos de ordem superior correspondentes a  $u_o$ ,  $v_o$ ,  $w_o$ ,  $\theta_x$  e  $\theta_y$ , respectivamente.

Na maioria das aplicações, o termo de ordem superior  $w_o^*$  em (5.41) é desconsiderado. Isso foi feito, por exemplo, na análise dinâmica de placas [Kant et. alli. (1990)], e no estudo de cascas cilíndricas [Kant & Menon (1991)]. O número de graus de liberdade corresponde, neste caso, a nove.

Em outras situações, como no caso de placas ortotrópicas [Pandya & Kant (1988a)], o campo de deslocamentos (5.41) é simplificado desconsiderando-se os termos associados às deformações de membrana, e reduzindo os graus de liberdade nodais a apenas seis incógnitas, ou seja,

$$\begin{aligned} u &= z \theta_x + z^3 \theta_x^* \\ v &= z \theta_y + z^3 \theta_y^* \\ w &= w_o + z^2 w_o^* \end{aligned} \tag{5.42}$$

O campo de deslocamentos indicado em (5.42) foi ainda empregado na análise de placas compostas laminadas submetidas a flexão [Pandya & Kant (1988b)].

Embora a teoria proposta por Kant e representada em (5.41) permita o uso de elementos finitos lagrangeanos de continuidade  $\mathcal{C}^0$ , tem o inconveniente de possuir um elevado número de graus de liberdade e de não incorporar, automaticamente, as condições de tensões cisalhantes nulas nos bordos livres das placas.

Esses dois inconvenientes foram suprimidos numa situação particular de (5.41), válida apenas para o caso de laminados não simétricos [Kant & Pandya (1988)]. O problema foi resolvido modificando-se a matriz global de cisalhamento,  $K_c$ , e embutindo, nessa matriz, as condições de contorno de tensões cisalhantes nulas em  $z = \pm h/2$ . Tal modificação não incluiu o aparecimento de derivadas dos deslocamentos originais e, portanto, foi possível manter o uso dos elementos classe  $\mathcal{E}^0$ . Dessa situação resultou, ainda, um modelo com apenas sete graus de liberdade por nó. Pela sua originalidade e, especialmente, pelos seus bons resultados, esta teoria será detalhada a seguir.

Para que as tensões cisalhantes transversais sejam nulas nos bordos livres da placa, é necessário que as deformações transversais,  $\epsilon_{xz}$  e  $\epsilon_{yz}$  também o sejam. Essas deformações, calculadas a partir de (5.41), são dadas por:

$$\begin{aligned}\epsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_y + 2z v_o^* + 3z^2 \theta_y^* + \frac{\partial w_o}{\partial y} \\ \epsilon_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta_x + 2z u_o^* + 3z^2 \theta_x^* + \frac{\partial w_o}{\partial x}\end{aligned}\quad (5.43)$$

Igualando  $\epsilon_{yz}$  e  $\epsilon_{xz}$  a zero em (5.43) nos níveis correspondentes a  $z = \pm h/2$ , as seguintes condições são obtidas:

$$\begin{aligned}v_o^* &= u_o^* = 0 \\ \theta_y^* &= \frac{4}{3h^2} \left( \theta_y + \frac{\partial w_o}{\partial y} \right) \\ \theta_x^* &= \frac{4}{3h^2} \left( \theta_x + \frac{\partial w_o}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (5.44)$$

Levando as expressões (5.43) em (5.41), o campo de deslocamentos passa a corresponder a:

$$\begin{aligned}
 u &= u_0 + z \theta_x + z^3 \theta_x^* \\
 v &= v_0 + z \theta_y + z^3 \theta_y^* \\
 w &= w_0
 \end{aligned}
 \tag{5.45}$$

Enquanto que Reddy [1984a] substituiu (5.44) em (5.45) para chegar a um campo de deslocamentos com apenas cinco graus de liberdade por nó, porém incluindo as derivadas de  $w_0$  em relação a X e a Y na expansão polinomial, Kant & Pandya trabalharam diretamente com as expressões (5.45) - portanto, com sete graus de liberdade por nó, e incluíram as condições (5.44) apenas na elaboração da matriz de rigidez de cisalhamento,  $K_c$ . Esse artifício evitou a manipulação dos termos de derivadas dos deslocamentos e permitiu a continuação do uso dos elementos lagrangeanos convencionais.

Para melhor entendimento, considerem-se as deformações associadas ao campo de deslocamentos (5.45):

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= \epsilon_x^0 + z K_x + z^3 K_x^* \\
 \epsilon_y &= \epsilon_y^0 + z K_y + z^3 K_y^* \\
 \epsilon_z &= 0 \\
 \epsilon_{xy} &= \epsilon_{xy}^0 + z K_{xy} + z^3 K_{xy}^* \\
 \epsilon_{yz} &= \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} + 3 z^2 \theta_y^* = \phi_y + z^2 \phi_y^* \\
 \epsilon_{xz} &= \theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} + 3 z^2 \theta_x^* = \phi_x + z^2 \phi_x^*
 \end{aligned}
 \tag{5.46}$$

onde

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x^o &= \frac{\partial u_o}{\partial x} & ; & & \varepsilon_y^o &= \frac{\partial v_o}{\partial y} & ; & & \varepsilon_{xy}^o &= \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} & ; \\
K_x &= \frac{\partial \theta^x}{\partial x} & ; & & K_y &= \frac{\partial \theta^y}{\partial y} & ; & & K_{xy} &= \frac{\partial \theta^x}{\partial y} + \frac{\partial \theta^y}{\partial x} & ; \\
K_x^* &= \frac{\partial \theta^{*x}}{\partial x} & ; & & K_y^* &= \frac{\partial \theta^{*y}}{\partial y} & ; & & K_{xy}^* &= \frac{\partial \theta^{*x}}{\partial y} + \frac{\partial \theta^{*y}}{\partial x} & ; \\
\phi_y &= \theta_y + \frac{\partial w_o}{\partial y} & ; & & \phi_x &= \theta_x + \frac{\partial w_o}{\partial x} \\
\phi_y^* &= 3 \theta_y^* & ; & & \phi_x^* &= 3 \theta_x^* & & & & & (5.47)
\end{aligned}$$

Assim como foi feito no Capítulo anterior, é conveniente o desmembramento das deformações em duas parcelas, uma decorrente dos efeitos longitudinais ou planares,  $\varepsilon_L$ , e a outra devido aos efeitos transversais ou cisalhantes,  $\varepsilon_T$ . No presente caso, tais vetores podem ser expressos como:

$$\begin{aligned}
\{ \varepsilon_L \} &= \{ \varepsilon^o \} + z \{ K \} + z^3 \{ K^* \} \\
\{ \varepsilon_T \} &= \{ T \} + z^2 \{ T^* \} & (5.48)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\{ \varepsilon_L \} &= \{ \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy} \}^t = \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_6 \}^t \\
\{ \varepsilon_T \} &= \{ \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz} \}^t = \{ \varepsilon_4, \varepsilon_5 \}^t \\
\{ \varepsilon^o \} &= \{ \varepsilon_x^o, \varepsilon_y^o, \varepsilon_{xy}^o \}^t = \{ \varepsilon_1^o, \varepsilon_2^o, \varepsilon_6^o \}^t \\
\{ K \} &= \{ K_x, K_y, K_{xy} \}^t = \{ K_1, K_2, K_6 \}^t \\
\{ K^* \} &= \{ K_x^*, K_y^*, K_{xy}^* \}^t = \{ K_1^*, K_2^*, K_6^* \}^t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{ T \} &= \{ T_y, T_x \}^t \\ \{ T^* \} &= \{ T_y^*, T_x^* \}^t \end{aligned} \quad (5.49)$$

A Teoria de Kant & Pandya, conforme o campo de deslocamentos indicado em (5.45), utiliza sete graus de liberdade por nó, que podem ser agrupados no vetor de deslocamentos generalizados,  $d$ , como:

$$d = \{ u_o, v_o, w_o, \theta_x, \theta_y, \theta_x^*, \theta_y^* \}^t \quad (5.50)$$

Desse modo, as deformações no plano de referência indicadas em (5.46)-(5.48), podem ser re-escritas em função do vetor  $d$ , tais como:

$$\begin{aligned} \{ \varepsilon^o \} &= [\mathcal{L}_M] d \quad ; \quad \{ K \} = [\mathcal{L}_F] d \quad ; \quad \{ K^* \} = [\mathcal{L}_F^*] d \\ \{ T \} &= [\mathcal{L}_C] d \quad ; \quad \{ T^* \} = [\mathcal{L}_C^*] d \end{aligned} \quad (5.51)$$

onde  $\mathcal{L}_M$ ,  $\mathcal{L}_F$ ,  $\mathcal{L}_C$  são os operadores diferenciais correspondentes às parcelas de primeira ordem das deformações de membrana, flexão e cisalhamento, respectivamente;  $\mathcal{L}_F^*$  e  $\mathcal{L}_C^*$  são os operadores diferenciais correspondentes às parcelas de ordem superior das deformações de flexão e de cisalhamento, respectivamente.

Lembrando, novamente, que  $\partial_x = \partial(\cdot)/\partial x$  e  $\partial_y = \partial(\cdot)/\partial y$ , então os operadores diferenciais acima mencionados valem:

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_M] &= \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_y & \partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.52a) \\ [\mathcal{L}_F] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_y & \partial_x & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (b) \end{aligned}$$

$$[\mathcal{L}_F^*] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_y & \partial_x \end{bmatrix} \quad (c)$$

$$[\mathcal{L}_c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial_x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_y & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (d)$$

$$[\mathcal{L}_c^*] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (e)$$

Minimizando o funcional da Energia Potencial da placa laminada, treze resultantes de tensões ficam estabelecidas:

$$N_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i^{(L)} dz \quad i = 1, 2, 6 \quad (5.53a)$$

$$M_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i^{(L)} z dz \quad i = 1, 2, 6 \quad (b)$$

$$M_i^* = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i^{(L)} z^3 dz \quad i = 1, 2, 6 \quad (c)$$

$$Q_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i^{(L)} dz \quad i = 4, 5 \quad (d)$$

$$Q_i^* = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i^{(L)} z^2 dz \quad i = 4, 5 \quad (e)$$

onde

$\sigma_i^{(L)}$  - é o  $i$ -ésimo componente do vetor de tensões da lâmina  $\underline{L}$ ;  
 $z$  - coordenada  $z$  da lâmina  $\underline{L}$ ;

$N_i, M_i, M_i^*, Q_i, Q_i^*$  - componentes dos vetores de força normais, momentos fletores e esforços cortantes, respectivamente,  $N, M, M^*, Q$  e  $Q^*$ .

$$\begin{aligned}
 N &= \{ N_1, N_2, N_6 \}^t = \{ N_x, N_y, N_{xy} \}^t \\
 M &= \{ M_1, M_2, M_6 \}^t = \{ M_x, M_y, M_{xy} \}^t \\
 M^* &= \{ M_1^*, M_2^*, M_6^* \}^t = \{ M_x^*, M_y^*, M_{xy}^* \}^t \\
 Q &= \{ Q_4, Q_5 \}^t = \{ Q_y, Q_x \}^t \\
 Q^* &= \{ Q_4^*, Q_5^* \}^t = \{ Q_y^*, Q_x^* \}^t
 \end{aligned} \tag{5.54}$$

Após a integração ao longo da espessura de (5.53), são obtidas as seguintes soluções, escritas em forma matricial, e que definem as relações entre as resultantes de tensão-deformação do laminado:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ M^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B^{PP} & B^{PS} \\ B^{PP} & D^{PP} & D^{PS} \\ B^{PS} & D^{PS} & D^{SS} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon^o \\ K \\ K^* \end{Bmatrix} \tag{5.55}$$

e

$$\begin{Bmatrix} Q \\ Q^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_c^{PP} & D_c^{PS} \\ D_c^{PS} & D_c^{SS} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T \\ T^* \end{Bmatrix} \tag{5.56}$$

onde os índices p e s referem-se, respectivamente, às contribuições dos termos de primeira ordem e de ordem superior, e

$$[A] = \sum_{L=1}^{NL} [Q]^{(L)} H_1 \quad (5.57a)$$

$$[B^{PP}] = \sum_{L=1}^{NL} [Q]^{(L)} H_2 \quad (b)$$

$$[B^{PS}] = \sum_{L=1}^{NL} [Q]^{(L)} H_4 \quad (c)$$

$$[D^{PP}] = \sum_{L=1}^{NL} [Q]^{(L)} H_3 \quad (d)$$

$$[D^{PS}] = \sum_{L=1}^{NL} [Q]^{(L)} H_5 \quad (e)$$

$$[D^{SS}] = \sum_{L=1}^{NL} [Q]^{(L)} H_7 \quad (f)$$

$$[D_C^{PP}] = \sum_{L=1}^{NL} [Q_C]^{(L)} H \quad (g)$$

$$[D_C^{PS}] = [0] \quad (h)$$

$$[D_C^{SS}] = \sum_{L=1}^{NL} [Q_C]^{(L)} H_C \quad (i)$$

Nas expressões anteriores, enquanto que  $[0]$  é uma matriz  $(2 \times 2)$  com todos os seus coeficientes nulos,  $[Q]$  e  $[Q_C]$  são as matrizes de rigidez reduzida no Estado Plano de Tensões, associadas às parcelas de

membrana-flexão e cisalhamento, respectivamente, e correspondentes a (3.17) e (3.18).

Ainda em (5.57),  $H_1, H_2, \dots, H_7, H$  e  $H_c$  são coeficientes multiplicativos das matrizes de rigidez e são determinados por:

$$H_k = \frac{1}{k} \left[ \left( z_L \right)^k - \left( z_{L+1} \right)^k \right] \quad (k = 1, 2, \dots, 7) \quad (5.58)$$

onde  $z_L$  e  $z_{L+1}$  são as coordenadas dos topos das lâminas  $L$  e  $L+1$ , respectivamente. Os coeficientes  $H$  e  $H_c$  correspondem a:

$$H = \left( H_1 - \frac{4}{h^2} H_3 \right) \quad (5.59)$$

$$H_c = \left( H_5 - \frac{h^2}{4} H_3 \right)$$

Nota-se que a matriz de rigidez de cisalhamento, na forma indicada em (5.56) já incorpora as condições de contorno para tensões interlaminares nulas nos bordos livres da placa, isto é,

$$T_y + \frac{h^2}{4} T_y^* = 0 \quad (5.60)$$

$$T_x + \frac{h^2}{4} T_x^* = 0$$

As condições (5.60) consideradas na matriz de rigidez (5.56) tornam a Teoria de Kant & Pandya consistente. Caso (5.60) não tivesse sido admitida, as condições de contorno de tensões nulas nos bordos livres não seriam automaticamente atendidas. Neste caso, a matriz de rigidez de cisalhamento, (5.56), seria constituída das seguintes sub-matrizes:

$$\begin{aligned}
 [D_C^{PP}] &= \sum_{L=1}^{NL} [Q_C]^{(L)} H_1 \\
 [D_C^{PS}] &= \sum_{L=1}^{NL} [Q_C]^{(L)} H_3 \\
 [D_C^{SS}] &= \sum_{L=1}^{NL} [Q_C]^{(L)} H_5
 \end{aligned} \tag{5.61}$$

Apesar de consistente, a Teoria de Kant & Pandya ainda necessita calcular as tensões cisalhantes transversais através da integração das equações de equilíbrio da Elasticidade 3-D, para garantir a continuidade das tensões interlaminares.

Um último aspecto a ser mencionado é que o fato de (5.56) já incluir as condições de cisalhamento nulo nos bordos livres da placa, (5.60), torna a matriz de rigidez global da estrutura não positiva definida, o que recomenda o emprego de métodos de solução apropriados para tais matrizes.

## 5.7. SOLUÇÃO DE PLACA LAMINADA PELO MMFGL ATRAVÉS DA TEORIA DE ORDEM SUPERIOR DE KANT E PANDYA.

### 5.7.1. Comentários Iniciais.

Durante todo o presente Capítulo, procurou-se mostrar a importância das Teorias de Ordem Superior na análise de placas ortotrópicas laminadas. Um número razoável de modelos foi apresentado, embora ainda possam ser encontradas na literatura diversas outras propostas. A existência de grande quantidade de Teorias Refinadas

revela a dificuldade de se estabelecer um modelo que seja adequado para todos os casos. Ao contrário, cada um deles apresenta características que o tornam mais ou menos favoráveis conforme a análise que se esteja realizando.

Um dos objetivos deste estudo não é avaliar a eficiência de cada uma das teorias citadas, mas verificar a aplicabilidade e examinar o desempenho de um novo método computacional, o Método Modificado da Função de Green Local (MMFGL), numa análise refinada de placas laminadas. Assim, a escolha do modelo a ser adotado representou uma séria decisão, pois não seria por causa de uma dessas propostas que se poderia julgar definitivamente o método, embora, dentre as inúmeras opções, um grau maior de dificuldade na implementação pudesse mascarar o desempenho do MMFGL.

Considerando que esta é a primeira aplicação do MMFGL ao caso de placas ortotrópicas laminadas por meio de uma Teoria de Ordem Superior, optou-se por um modelo que atendesse os seguintes requisitos: fácil implementação; possibilidade de ampla aplicação; baixo número de graus de liberdade; ordem polinomial maior ou igual a 2; consistente, ou seja, que não utilizasse coeficientes de correção do cisalhamento; e, finalmente, que atendesse às condições de tensões nulas nos bordos livres da placa.

Dentre os diversos modelos estudados, o que mais se aproximou destes requisitos foi a Teoria Simplificada de Kant & Pandya [1988], discutida no item 5.6., e restrita ao caso de laminados anti-simétricos.

O Modelo de Kant & Pandya foi desenvolvido considerando apenas sete graus de liberdade por nó. Não apresenta termos que envolvam derivadas de deslocamentos, permitindo, dessa forma, que sejam utilizados elementos de continuidade  $C^0$ . As condições de tensões nulas nos bordos livres da placa estão automaticamente incluídas na teoria através da modificação da matriz de rigidez de cisalhamento. Os

resultados apresentados mostraram ótima precisão, tanto para deslocamentos quanto para tensões normais e cisalhantes.

Kant & Pandya [1988] implementaram um elemento lagrangeano quadrático de nove pontos nodais para testar a nova teoria. Esse mesmo elemento já havia sido utilizado pelo MMFGL na solução de placas laminadas pela Teoria de Primeira Ordem [Machado & Barcellos (1992)]. A coincidência deste fator contribuiu, também, para a sua escolha.

Nos próximos itens serão discutidos os detalhes de implementação dessa Teoria de Ordem Superior pelo MMFGL, bem como algumas aplicações para validar o método.

#### 5.7.2. Determinação das Projeções dos Tensores de Green.

Uma das etapas fundamentais do MMFGL é a determinação das projeções dos tensores de Green, com os quais são montadas diversas matrizes do sistema de equações integrais. Tais projeções dependem do tipo do problema a ser considerado. Essencialmente, o processo utilizado no caso das Teorias de Ordem Superior, modelo de deslocamentos, é uma extensão daquele utilizado pela Teoria de Primeira Ordem e discutido no Capítulo 4.

As matrizes de Green mantêm as características apresentadas no item 4.3.2. Já a aproximação dos tensores  $G_j^{DP}$  e  $G_j^{CP}$  é feita através da minimização do seguinte funcional:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(G_j^{DP}, G_j^{CP}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{NGL} \int_{\Omega} \left( [\mathcal{L}_M g_i(P)]^t A [\mathcal{L}_M g_i(P)] \right. \\
&+ [\mathcal{L}_M g_i(P)]^t B^{PP} [\mathcal{L}_F g_i(P)] + [\mathcal{L}_M g_i(P)]^t B^{PS} [\mathcal{L}_F^* g_i(P)] \\
&+ [\mathcal{L}_F g_i(P)]^t B^{PP} [\mathcal{L}_M g_i(P)] + [\mathcal{L}_F g_i(P)]^t D^{PP} [\mathcal{L}_F g_i(P)] \\
&+ [\mathcal{L}_F g_i(P)]^t D^{PS} [\mathcal{L}_M^* g_i(P)] + [\mathcal{L}_F^* g_i(P)]^t B^{PS} [\mathcal{L}_M g_i(P)] \\
&+ [\mathcal{L}_F^* g_i(P)]^t D^{PS} [\mathcal{L}_F g_i(P)] + [\mathcal{L}_F^* g_i(P)]^t D^{SS} [\mathcal{L}_F^* g_i(P)] \\
&+ [\mathcal{L}_C g_i(P)]^t D_C^{PP} [\mathcal{L}_C g_i(P)] + [\mathcal{L}_C g_i(P)]^t D_C^{PS} [\mathcal{L}_C^* g_i(P)] \\
&+ [\mathcal{L}_C^* g_i(P)]^t D_C^{PS} [\mathcal{L}_C g_i(P)] + [\mathcal{L}_C^* g_i(P)]^t D_C^{SS} [\mathcal{L}_C^* g_i(P)] \\
&\left. - \beta [g_i(P)] [\psi_i(P)] \right) d\Omega \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{NGL} \int_{\partial\Omega} \left( [N^t g_i(P)]^t g_i(P) - \alpha [g_i(P)]^t [\phi_i(P)] \right) d\partial\Omega
\end{aligned} \tag{5.62}$$

onde

$\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros pré-definidos conforme o problema considerado. Para a determinação de  $G_j^{DP}$ , faz-se  $\alpha = 0$  e  $\beta = 1$ . No caso de  $G_j^{CP}$ , adota-se  $\alpha = 1$  e  $\beta = 0$

$g_i$  é uma variável que corresponde às colunas da sub-matriz  $G_j^{CP}$ , ou  $G_j^{DP}$ , como em (4.39), conforme se deseja determinar  $G_j^{CP}$  ou  $G_j^{DP}$ , respectivamente.

Minimizando o funcional de (5.62) através de técnicas convencionais de elementos finitos, e desenvolvendo o agrupamento das matrizes dos elementos nas correspondentes matrizes globais, resulta o seguinte sistema de equações, análogo à (4.45):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}^{DP} \\ \vdots \\ \mathbf{g}^{CP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} \tag{5.63}$$

onde

$$K = K_{MEF} + K'$$

$K_{MEF}$  - é a matriz de rigidez convencional de elementos finitos;

$K'$  - é a matriz de rigidez resultante da primeira integral de contorno de (5.62)

$g^{DP}$  e  $g^{CP}$  - correspondem aos valores nodais de  $G^D$  e  $G^C$  respectivamente

$A$  e  $D$  - são as matrizes formadas pelos últimos termos nas integrais de domínio e de contorno, respectivamente, em (5.62), e coincidem com as matrizes indicadas em (2.65) e (2.71).

Vale lembrar que o vetor de deslocamentos generalizados,  $d$ , que para a Teoria de Kant & Pandya é determinado por (5.50), pode ser expandido em termos das funções de interpolação  $[\psi]$  de domínio. Desse modo, considerando que  $m = NNEF$ , onde  $NNEF$  é o número de nós no elemento finito, as deformações calculadas em (5.51) podem ser re-escritas como:

$$\{\varepsilon^o\} = [\mathcal{L}_M] \sum_{i=1}^m \psi_i d_i = \sum_{i=1}^m B_{iM} d_i = B_M a$$

$$\{K\} = [\mathcal{L}_F] \sum_{i=1}^m \psi_i d_i = \sum_{i=1}^m B_{iF} d_i = B_F a$$

$$\{K^*\} = [\mathcal{L}_F^*] \sum_{i=1}^m \psi_i d_i = \sum_{i=1}^m B_{iF}^* d_i = B_F^* a \quad (5.64)$$

$$\{T\} = [\mathcal{L}_C] \sum_{i=1}^m \psi_i d_i = \sum_{i=1}^m B_{iC} d_i = B_C a$$

$$\{T^*\} = [\mathcal{L}_C^*] \sum_{i=1}^m \psi_i d_i = \sum_{i=1}^m B_{iC}^* d_i = B_C^* a$$

onde

$$B_{iM} = [\mathcal{L}_M] \psi_i \quad ; \quad B_M = \sum_{i=1}^m B_{iM}$$

$$B_{iF} = [\mathcal{L}_F] \psi_i \quad ; \quad B_F = \sum_{i=1}^m B_{iF}$$

$$B_{iF}^* = [\mathcal{L}_F^*] \psi_i \quad ; \quad B_F^* = \sum_{i=1}^m B_{iF}^* \quad (5.65)$$

$$B_{iC} = [\mathcal{L}_C] \psi_i \quad ; \quad B_C = \sum_{i=1}^m B_{iC}$$

$$B_{iC}^* = [\mathcal{L}_C^*] \psi_i \quad ; \quad B_C^* = \sum_{i=1}^m B_{iC}^*$$

e

$$a = \{ d_1, d_2, \dots, d_{NNEF} \}$$

Consequentemente, a matriz de rigidez convencional de elementos finitos,  $K_{MEF}$ , em (5.63), pode ser expressa por:

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}_{MEF} = \int_{\Omega} \left( \right. & B_M^t A B_M + B_M^t B^{PP} B_F + B_M^t B^{PS} B_F^* + \\
& B_F^t B^{PP} B_M + B_F^t D^{PP} B_F + B_F^t D^{PS} B_F^* + \\
& B_F^{*t} B^{PS} B_M + B_F^{*t} D^{PS} B_F + B_F^{*t} D^{SS} B_F^* + \\
& \left. B_C^t D_C^{PP} B_C + B_C^t D_C^{PS} B_C^* + B_C^{*t} D_C^{PS} B_C + B_C^{*t} D_C^{SS} B_C^* \right) d\Omega
\end{aligned}
\tag{5.66}$$

### 5.8. APLICAÇÕES.

Com o intuito de verificar o desempenho do MMFGL através da Teoria de Ordem Superior de Kant & Pandya, algumas aplicações serão realizadas, variando-se o número de elementos, as condições de contorno, a configuração do laminado, e o tipo de carregamento.

Nestes exemplos, serão consideradas apenas malhas regulares e uniformes. Rigorosamente, por se tratar de laminados não simétricos, onde o acoplamento dos efeitos de membrana-flexão é inevitável, os domínios deveriam ser discretizados integralmente. Entretanto, conforme observa Reddy [1984e,1989], para laminados [0°/90°/...] ou para [+45°/-45°/...], simplesmente apoiados é ainda possível discretizar apenas 1/4 da placa, com condições de simetria apropriadas. Esse procedimento será aqui adotado.

O material considerado em todas as aplicações apresenta propriedades elásticas com os seguintes valores:

$$\frac{E_1}{E_2} = 25 \quad ; \quad \frac{G_{12}}{E_2} = \frac{G_{13}}{E_2} = 0.50 \quad ; \quad \frac{G_{23}}{E_2} = 0.20 \quad ; \quad \nu_{12} = 0.25 \quad (5.68)$$

Os resultados apresentados estão adimensionalizados da mesma forma que em (4.49).

#### 5.8.1. Placa Laminada $[0^\circ/90^\circ]$ , Quadrada, Apoiada, Submetida a um Carregamento Senoidal.

A análise deste laminado será feita considerando relação  $a/h$  variável e diversos tipos de malhas. Os resultados são comparados com os fornecidos por Kant & Pandya [1988], que também utilizaram elementos lagrangeanos quadráticos de nove nós, com integração seletiva.

A Tabela 5.1. mostra a convergência dos deslocamentos máximos no centro da placa e de tensões, quando a relação  $a/h = 10$ . Observa-se a ótima concordância entre o MMFGL e os resultados de Kant, no que diz respeito aos deslocamentos. É grande, também, a aproximação dos resultados de tensões  $\sigma_x$  e  $\sigma_{xy}$  nos dois bordos da placa, onde atingem valores máximos. As tensões cisalhantes transversais  $\sigma_{xz}$ , calculadas tanto pelas relações constitutivas quanto por equilíbrio são equivalentes entre os dois procedimentos, e ambos revelam boa aproximação com os resultados de Pagano.

A Tabela 5.2. é idêntica à anterior, porém os resultados de Kant são substituídos por aqueles determinados pelo MMFGL utilizando a Teoria de Primeira Ordem, para que as duas teorias - FSDT e HSDT, possam ser comparadas. Nota-se que, em termos de deslocamentos, não houve diferença tão acentuada, uma vez que os resultados variaram em

torno de 2.0 % entre si. O mesmo aconteceu com as tensões  $\sigma_{xz}$  determinadas por equilíbrio, que mantiveram uma razão da ordem de 2.0 %. As tensões normais  $\sigma_x$  atingiram, para o caso de malha 5x5, a diferença de 5.89 %, enquanto que, para  $\sigma_{xz}$  determinada por relações constitutivas, os resultados da HSDT foram 25% maiores do que da FSDT.

A Figura 5.1. ilustra a convergência dos deslocamentos conforme a quantidade de elementos na malha. O mesmo é feito na Figura 5.2. para as tensões  $\sigma_x$ , e na Figura 5.3. para as tensões  $\sigma_{xz}$ . Em todos estes casos são incluídos os resultados de Kant, de Pagano, e do MMFGL usando a FSDT e a HSDT.

A Tabela 5.3. mostra a resposta em termos de deslocamentos, para diversos tipos de malhas, quando a relação  $a/h$  é considerada com valores iguais a 4, 10, 50 e 100. São apresentadas, também as respostas determinadas pela Teoria de Primeira Ordem. Observa-se grande aproximação entre as duas Teorias para altos valores de  $a/h$ . Entretanto, quando a placa torna-se espessa, a diferença entre as duas soluções deixa de ser desprezível, pois atinge o valor de 9.8 %.

Graficamente, a Figura 5.4. ilustra os valores indicados na Tabela 5.3., mostrando, com muita clareza, a diferença dos resultados de deslocamentos determinados pela FSDT e pela HSDT nos casos de placas espessas.

A Tabela 5.4. fornece os valores máximos dos deslocamentos, de momentos e de esforços cortantes determinados por Kant e pelo MMFGL. Os resultados do MMFGL correspondem ao caso de malha 4x4. Os valores indicados foram obtidos nos seguintes pontos:

$$\bar{w}_o \text{ em } (0,0,0) \quad ; \quad \bar{Q}_x \text{ em } \left(\frac{a}{2}, 0\right)$$

$$\bar{M}_x \text{ em } (0,0) \quad ; \quad \bar{M}_{xy} \text{ em } \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$$

Tabela 5.1. Placa Laminada Não Simétrica,  $[0^\circ/90^\circ]$ , Quadrada, Simplesmente Suportada, Submetida a um Carregamento Senoidal: convergência de deslocamentos e tensões para  $a/h = 10$ .

Malha	Fonte	$z/h$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{xz}^{EQ}$	$\bar{\sigma}_{xz}^{RC}$	$\bar{w}_0$
1x1	KANT	0.5	-	-	-	-	-
		-0.5	-	-	-	-	-
	MMFGL	0.5	0.7516	-0.0820	0.2359	0.3745	1.2046
		-0.5	-0.0790	0.0820			
2x2	KANT	0.5	0.7644	-0.0542	0.2693	0.3310	1.2128
		-0.5	-0.0862	0.0542			
	MMFGL	0.5	0.7675	-0.0603	0.3099	0.3535	1.2119
		-0.5	-0.0788	0.0603			
3x3	KANT	0.5	0.7633	-0.0537	0.3161	0.3369	1.2125
		-0.5	-0.0859	0.0537			
	MMFGL	0.5	0.7695	-0.0519	0.3225	0.3489	1.2123
		-0.5	-0.0790	0.0519			
4x4	KANT	0.5	0.7603	-0.0537	0.3234	0.3387	1.2125
		-0.5	-0.0857	0.0537			
	MMFGL	0.5	0.7696	-0.0536	0.3291	0.3454	1.2124
		-0.5	-0.0788	0.0536			
5x5	KANT	0.5	0.7593	-0.0537	0.3267	0.3395	1.2124
		-0.5	-0.0855	0.0537			
	MMFGL	0.5	0.7649	-0.0537	0.3316	0.3440	1.2124
		-0.5	-0.0788	0.0537			
	PAGANO	0.5	0.7300	-0.0538	0.331	-	-
		-0.5	-0.0890	0.0536			

Tabela 5.2. Placa Laminada Não Simétrica,  $[0^\circ/90^\circ]$ , Quadrada, Simplesmente Suportada, Submetida a um Carregamento Senoidal: Resultados Obtidos pelo MMFGL através da FSDT e da HSDT ( $a/h = 10$ )

Malha	Fonte	$z/h$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{xz}^{EQ}$	$\bar{\sigma}_{xz}^{RC}$	$\bar{w}_o$																																																																																																									
1x1	FSDT	0.5	0.7323	-0.0636	0.2347	0.3001	1.2284																																																																																																									
		-0.5	-0.0787	0.0636				1x1	HSDT	0.5	0.7516	-0.0820	0.2359	0.3745	1.2046	-0.5	-0.0790	0.0820	2x2	FSDT	0.5	0.7261	-0.0532	0.3064	0.2832	1.2369	-0.5	-0.0783	0.0532	2x2	HSDT	0.5	0.7675	-0.0603	0.3099	0.3535	1.2119	-0.5	-0.0788	0.0603	3x3	FSDT	0.5	0.7233	-0.0527	0.3198	0.2783	1.2372	-0.5	-0.0782	0.0527	3x3	HSDT	0.5	0.7695	-0.0519	0.3225	0.3489	1.2123	-0.5	-0.0790	0.0519	4x4	FSDT	0.5	0.7225	-0.0526	0.3253	0.2761	1.2372	-0.5	-0.0782	0.0526	4x4	HSDT	0.5	0.7696	-0.0536	0.3291	0.3454	1.2124	-0.5	-0.0788	0.0536	5x5	FSDT	0.5	0.7223	-0.0526	0.3277	0.2750	1.2373	-0.5	-0.0782	0.0526	5x5	HSDT	0.5	0.7649	-0.0537	0.3316	0.3440	1.2124	-0.5	-0.0788	0.0537	PAGANO	PAGANO	0.5	0.7300	-0.0538	0.331
1x1	HSDT	0.5	0.7516	-0.0820	0.2359	0.3745	1.2046																																																																																																									
		-0.5	-0.0790	0.0820				2x2	FSDT	0.5	0.7261	-0.0532	0.3064	0.2832	1.2369	-0.5	-0.0783	0.0532	2x2	HSDT	0.5	0.7675	-0.0603	0.3099	0.3535	1.2119	-0.5	-0.0788	0.0603	3x3	FSDT	0.5	0.7233	-0.0527	0.3198	0.2783	1.2372	-0.5	-0.0782	0.0527	3x3	HSDT	0.5	0.7695	-0.0519	0.3225	0.3489	1.2123	-0.5	-0.0790	0.0519	4x4	FSDT	0.5	0.7225	-0.0526	0.3253	0.2761	1.2372	-0.5	-0.0782	0.0526	4x4	HSDT	0.5	0.7696	-0.0536	0.3291	0.3454	1.2124	-0.5	-0.0788	0.0536	5x5	FSDT	0.5	0.7223	-0.0526	0.3277	0.2750	1.2373	-0.5	-0.0782	0.0526	5x5	HSDT	0.5	0.7649	-0.0537	0.3316	0.3440	1.2124	-0.5	-0.0788	0.0537	PAGANO	PAGANO	0.5	0.7300	-0.0538	0.331	-	-	-0.5	-0.0890	0.0536						
2x2	FSDT	0.5	0.7261	-0.0532	0.3064	0.2832	1.2369																																																																																																									
		-0.5	-0.0783	0.0532				2x2	HSDT	0.5	0.7675	-0.0603	0.3099	0.3535	1.2119	-0.5	-0.0788	0.0603	3x3	FSDT	0.5	0.7233	-0.0527	0.3198	0.2783	1.2372	-0.5	-0.0782	0.0527	3x3	HSDT	0.5	0.7695	-0.0519	0.3225	0.3489	1.2123	-0.5	-0.0790	0.0519	4x4	FSDT	0.5	0.7225	-0.0526	0.3253	0.2761	1.2372	-0.5	-0.0782	0.0526	4x4	HSDT	0.5	0.7696	-0.0536	0.3291	0.3454	1.2124	-0.5	-0.0788	0.0536	5x5	FSDT	0.5	0.7223	-0.0526	0.3277	0.2750	1.2373	-0.5	-0.0782	0.0526	5x5	HSDT	0.5	0.7649	-0.0537	0.3316	0.3440	1.2124	-0.5	-0.0788	0.0537	PAGANO	PAGANO	0.5	0.7300	-0.0538	0.331	-	-	-0.5	-0.0890	0.0536																	
2x2	HSDT	0.5	0.7675	-0.0603	0.3099	0.3535	1.2119																																																																																																									
		-0.5	-0.0788	0.0603				3x3	FSDT	0.5	0.7233	-0.0527	0.3198	0.2783	1.2372	-0.5	-0.0782	0.0527	3x3	HSDT	0.5	0.7695	-0.0519	0.3225	0.3489	1.2123	-0.5	-0.0790	0.0519	4x4	FSDT	0.5	0.7225	-0.0526	0.3253	0.2761	1.2372	-0.5	-0.0782	0.0526	4x4	HSDT	0.5	0.7696	-0.0536	0.3291	0.3454	1.2124	-0.5	-0.0788	0.0536	5x5	FSDT	0.5	0.7223	-0.0526	0.3277	0.2750	1.2373	-0.5	-0.0782	0.0526	5x5	HSDT	0.5	0.7649	-0.0537	0.3316	0.3440	1.2124	-0.5	-0.0788	0.0537	PAGANO	PAGANO	0.5	0.7300	-0.0538	0.331	-	-	-0.5	-0.0890	0.0536																												
3x3	FSDT	0.5	0.7233	-0.0527	0.3198	0.2783	1.2372																																																																																																									
		-0.5	-0.0782	0.0527				3x3	HSDT	0.5	0.7695	-0.0519	0.3225	0.3489	1.2123	-0.5	-0.0790	0.0519	4x4	FSDT	0.5	0.7225	-0.0526	0.3253	0.2761	1.2372	-0.5	-0.0782	0.0526	4x4	HSDT	0.5	0.7696	-0.0536	0.3291	0.3454	1.2124	-0.5	-0.0788	0.0536	5x5	FSDT	0.5	0.7223	-0.0526	0.3277	0.2750	1.2373	-0.5	-0.0782	0.0526	5x5	HSDT	0.5	0.7649	-0.0537	0.3316	0.3440	1.2124	-0.5	-0.0788	0.0537	PAGANO	PAGANO	0.5	0.7300	-0.0538	0.331	-	-	-0.5	-0.0890	0.0536																																							
3x3	HSDT	0.5	0.7695	-0.0519	0.3225	0.3489	1.2123																																																																																																									
		-0.5	-0.0790	0.0519				4x4	FSDT	0.5	0.7225	-0.0526	0.3253	0.2761	1.2372	-0.5	-0.0782	0.0526	4x4	HSDT	0.5	0.7696	-0.0536	0.3291	0.3454	1.2124	-0.5	-0.0788	0.0536	5x5	FSDT	0.5	0.7223	-0.0526	0.3277	0.2750	1.2373	-0.5	-0.0782	0.0526	5x5	HSDT	0.5	0.7649	-0.0537	0.3316	0.3440	1.2124	-0.5	-0.0788	0.0537	PAGANO	PAGANO	0.5	0.7300	-0.0538	0.331	-	-	-0.5	-0.0890	0.0536																																																		
4x4	FSDT	0.5	0.7225	-0.0526	0.3253	0.2761	1.2372																																																																																																									
		-0.5	-0.0782	0.0526				4x4	HSDT	0.5	0.7696	-0.0536	0.3291	0.3454	1.2124	-0.5	-0.0788	0.0536	5x5	FSDT	0.5	0.7223	-0.0526	0.3277	0.2750	1.2373	-0.5	-0.0782	0.0526	5x5	HSDT	0.5	0.7649	-0.0537	0.3316	0.3440	1.2124	-0.5	-0.0788	0.0537	PAGANO	PAGANO	0.5	0.7300	-0.0538	0.331	-	-	-0.5	-0.0890	0.0536																																																													
4x4	HSDT	0.5	0.7696	-0.0536	0.3291	0.3454	1.2124																																																																																																									
		-0.5	-0.0788	0.0536				5x5	FSDT	0.5	0.7223	-0.0526	0.3277	0.2750	1.2373	-0.5	-0.0782	0.0526	5x5	HSDT	0.5	0.7649	-0.0537	0.3316	0.3440	1.2124	-0.5	-0.0788	0.0537	PAGANO	PAGANO	0.5	0.7300	-0.0538	0.331	-	-	-0.5	-0.0890	0.0536																																																																								
5x5	FSDT	0.5	0.7223	-0.0526	0.3277	0.2750	1.2373																																																																																																									
		-0.5	-0.0782	0.0526				5x5	HSDT	0.5	0.7649	-0.0537	0.3316	0.3440	1.2124	-0.5	-0.0788	0.0537	PAGANO	PAGANO	0.5	0.7300	-0.0538	0.331	-	-	-0.5	-0.0890	0.0536																																																																																			
5x5	HSDT	0.5	0.7649	-0.0537	0.3316	0.3440	1.2124																																																																																																									
		-0.5	-0.0788	0.0537				PAGANO	PAGANO	0.5	0.7300	-0.0538	0.331	-	-	-0.5	-0.0890	0.0536																																																																																														
PAGANO	PAGANO	0.5	0.7300	-0.0538	0.331	-	-																																																																																																									
		-0.5	-0.0890	0.0536																																																																																																												

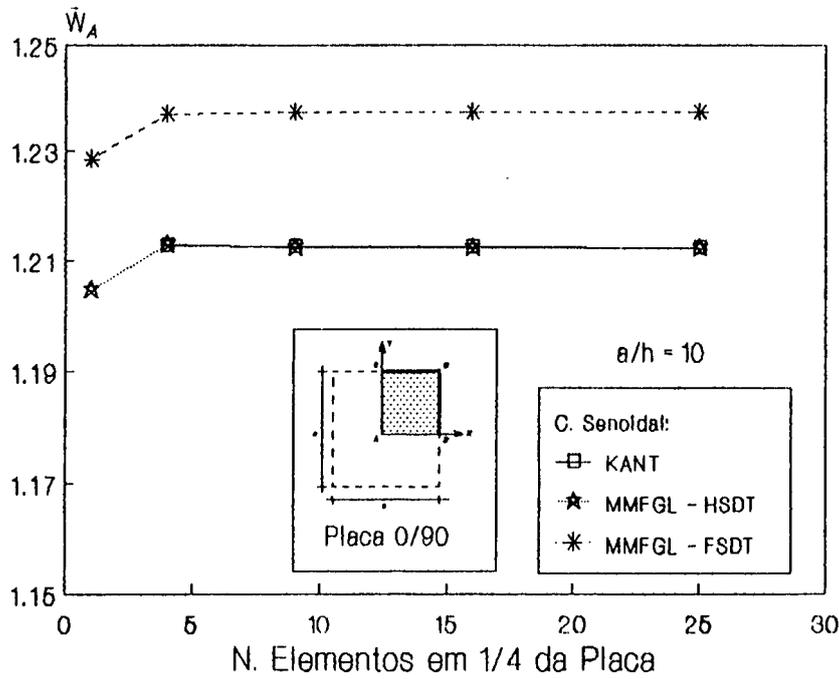


Figura 5.1. - Placa Laminada [0/90], Quadrada, Apoiada, Submetida a um Carregamento Senoidal: Convergência dos Deslocamentos Verticais no Centro da Placa.

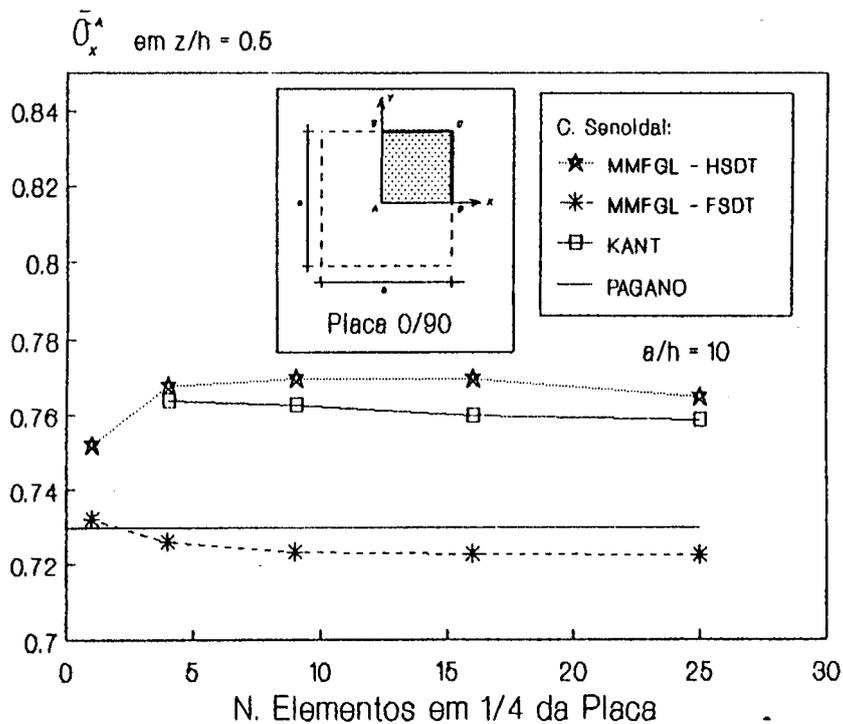


Figura 5.2. - Placa Laminada [0/90], Quadrada, Apoiada, Submetida a um Carregamento Senoidal: Convergência das Tensões  $\bar{\sigma}_x$  no centro.

Tabela 5.3. Placa Laminada Não Simétrica,  $[0^\circ/90^\circ]$ , Quadrada, Simplesmente Suportada, Submetida a um Carregamento Senoidal: Deslocamentos Verticais conforme a relação  $a/k$ .

$a/k$	TEORIA	KANT	MMFGL				
			$M_{1 \times 1}$	$M_{2 \times 2}$	$M_{3 \times 3}$	$M_{4 \times 4}$	$M_{5 \times 5}$
4	FSDT	-	2.1298	2.1481	2.1489	2.1490	2.1491
	HSDT	1.9562	1.9138	1.9547	1.9563	1.9564	1.9566
10	FSDT	-	1.2284	1.2369	1.2372	1.2372	1.2373
	HSDT	1.2128	1.2046	1.2119	1.2123	1.2124	1.2124
50	FSDT	-	1.0628	1.0702	1.0705	1.0705	1.0705
	HSDT	1.0701	1.0618	1.0693	1.0699	1.0695	1.0696
100	FSDT	-	1.0576	1.0650	1.0653	1.0653	1.0653
	HSDT	1.0656	1.0574	1.0648	1.0650	1.0651	1.0651

Tabela 5.4. Placa Laminada Não Simétrica,  $[0^\circ/90^\circ]$ , Quadrada, Simplesmente Suportada, Submetida a um Carregamento Senoidal: Deslocamentos e Esforços Máximos.

$a/k$	Fonte	$\bar{w}_0$	$\bar{M}_x$	$\bar{M}_{xy}$	$\bar{Q}_x$
4	KANT	1.9562	0.0432	-0.0080	0.1548
	MMFGL	1.9564	0.0427	-0.0080	0.1611
10	KANT	1.2128	0.0425	-0.0087	0.1545
	MMFGL	1.2124	0.0421	-0.0087	0.1611
50	KANT	1.0701	0.0423	-0.0088	0.1540
	MMFGL	1.0695	0.0419	-0.0088	0.1605
100	KANT	1.0656	0.0423	-0.0088	0.1538
	MMFGL	1.0651	0.0419	-0.0088	0.1600

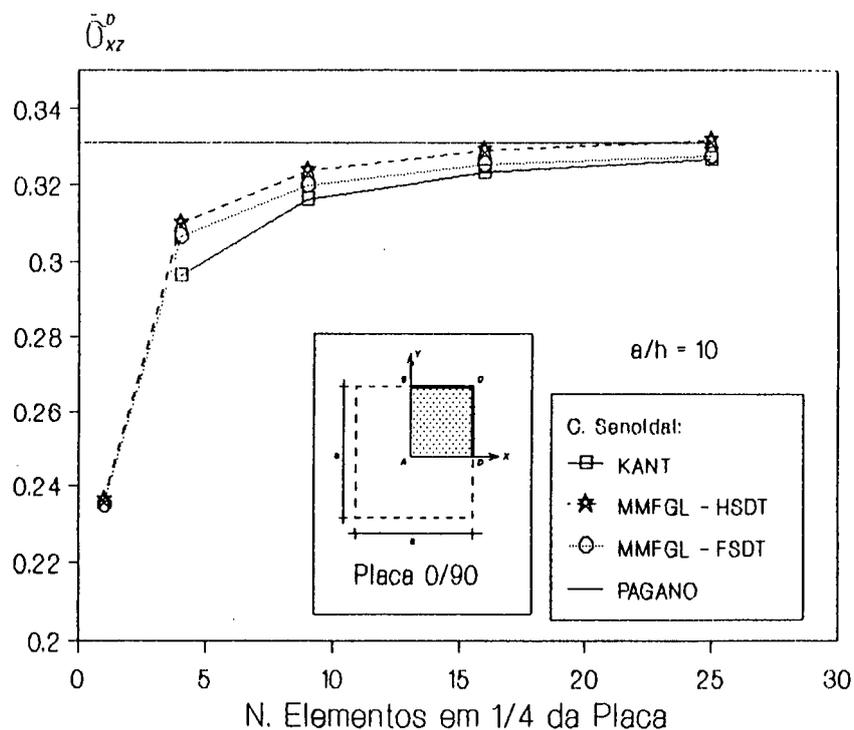


Figura 5.3. - Placa Laminada [0/90], Quadrada, Apoiada, Submetida a um Carregamento Senoidal: Convergência das Tensões  $\bar{\sigma}_{xz}$  no ponto D.

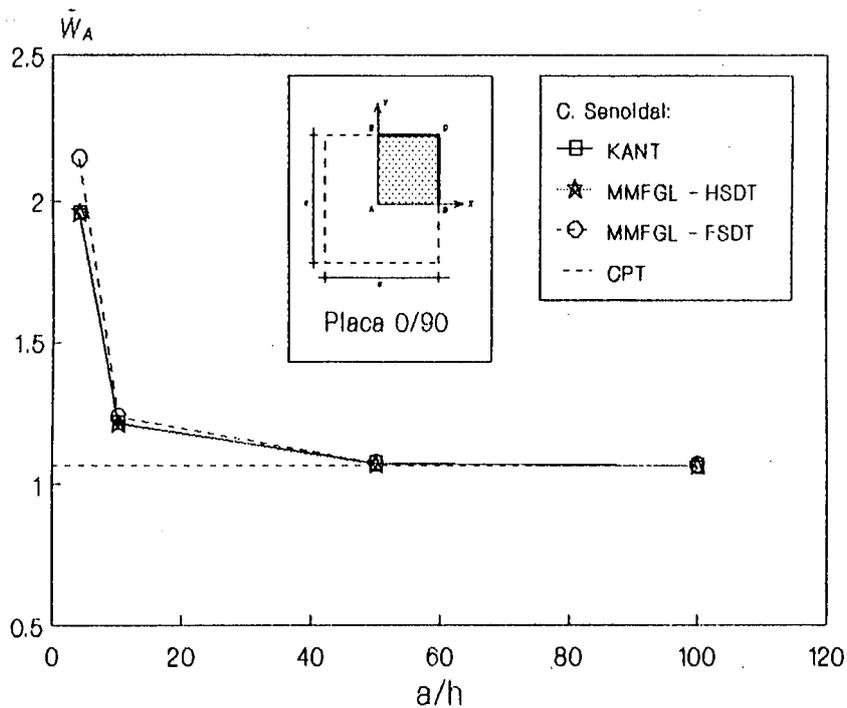


Figura 5.4. - Placa Laminada [0/90], Quadrada, Apoiada, Submetida a um Carregamento Senoidal: variação dos deslocamentos verticais no centro da placa conforme a relação  $a/h$ .

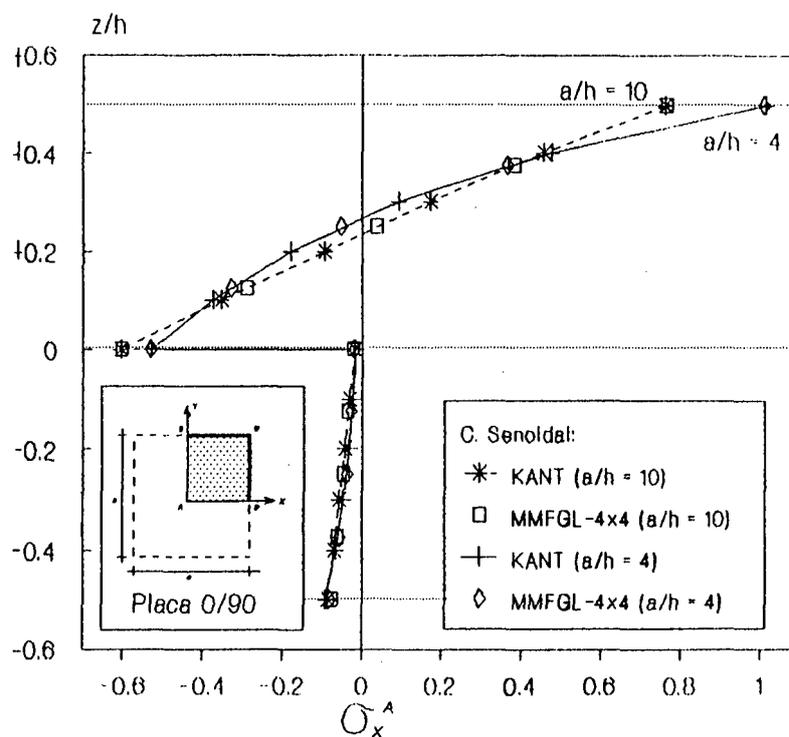


Figura 5.5. - Placa Laminada [0/90], Quadrada, Apoiada, Submetida a um Carregamento Senoidal: variação das tensões  $\bar{\sigma}_x$  ao longo da espessura ( $a/h = 4$  e  $a/h = 10$ ).

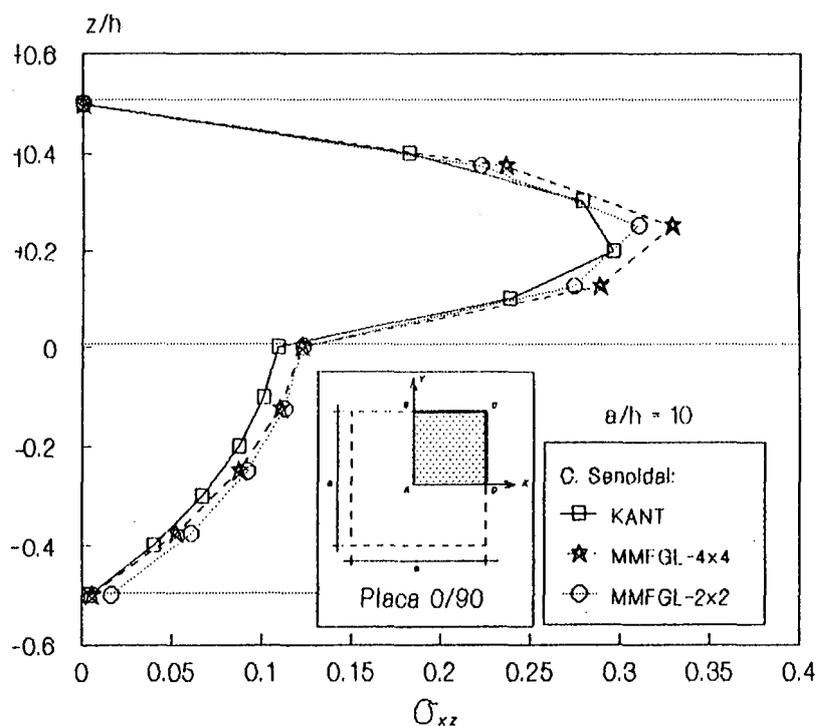


Figura 5.6. - Placa Laminada [0/90], Quadrada, Apoiada, Submetida a um Carregamento Senoidal: variação das tensões  $\bar{\sigma}_{xz}$  ao longo da espessura

Finalmente, as Figuras 5.5 e 5.6 mostram, respectivamente, a distribuição das tensões  $\bar{\sigma}_x$  e  $\bar{\sigma}_{xz}$  ao longo da espessura da placa. São fornecidas as respostas do MMFGL para os casos de malhas 2x2 e 4x4 elementos. É muito boa a concordância dos valores obtidos pelo método integral com aqueles fornecidos por Kant.

#### 5.8.2. Placa Laminada $[0^\circ/90^\circ]$ , Quadrada, Apoiada, Submetida a um Carregamento Uniforme.

O segundo exemplo desta série corresponde ao mesmo laminado do caso anterior, porém com o carregamento uniformemente distribuído. O problema é analisado para diversos refinamentos uniformes de malha, e os resultados de deslocamentos e de tensões estão apresentados na Tabela 5.6. para a relação  $a/h = 10$ .

Para que possa ser observada a diferença de resultados entre as teorias FSDT e HSDT foi elaborada a Tabela 5.7, idêntica à anterior, exceto que os valores fornecidos por Kant foram substituídos por aqueles determinados pelo MMFGL usando a Teoria de Primeira Ordem. Percebe-se que, se em termos de deslocamentos a diferença entre as duas teorias não é excessiva (para este exemplo, chega-se a uma razão de, aproximadamente, 1,50 %), em termos de tensões, a FSDT registra valores que variam entre 9,8 %, para o caso de tensões  $\bar{\sigma}_x$ , 8,5 % para tensões  $\bar{\sigma}_{xz}$  calculadas por equilíbrio, e até 28,5 % para tensões  $\bar{\sigma}_{xz}$  determinadas por relações constitutivas.

A convergência dos resultados de deslocamentos está representada graficamente na Figura 5.7.; para as tensões normais  $\bar{\sigma}_x$ , indica-se a Figura 5.8; e para as tensões  $\bar{\sigma}_{xz}$  calculadas por equilíbrio, a Figura 5.9.

Tabela 5.6. Placa Laminada Não Simétrica,  $[0^\circ/90^\circ]$ , Quadrada, Simplesmente Suportada, Submetida a um Carregamento Uniforme: convergência de deslocamentos e tensões para  $a/h = 10$ .

Malha	Fonte	$z/h$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{xz}^{EQ}$	$\bar{\sigma}_{xz}^{RC}$	$\bar{w}_0$
1x1	KANT	0.5	-	-	-	-	-
		-0.5	-	-	-	-	-
	MMFGL	0.5	1.1700	-0.2091	0.3723	0.8447	1.9652
		-0.5	-0.1220	0.2091			
2x2	KANT	0.5	1.1460	-0.0970	0.5030	0.6280	1.9113
		-0.5	-0.1290	0.0970			
	MMFGL	0.5	1.2220	-0.1137	0.5121	0.7717	1.9113
		-0.5	-0.1189	0.1137			
3x3	KANT	0.5	1.0600	-0.0973	0.5733	0.6703	1.9179
		-0.5	-0.1265	0.0973			
	MMFGL	0.5	1.0380	-0.0908	0.6064	0.7530	1.9179
		-0.5	-0.1165	0.0908			
4x4	KANT	0.5	1.0640	-0.0981	0.6073	0.6902	1.9165
		-0.5	-0.1271	0.0981			
	MMFGL	0.5	1.0650	-0.0931	0.6465	0.7468	1.9164
		-0.5	-0.1178	0.0536			
5x5	KANT	0.5	0.9948	-0.1000	0.6432	0.7118	1.9180
		-0.5	-0.11251	0.1000			
	MMFGL	0.5	0.9838	-0.1007	0.6955	0.7704	1.9180
		-0.5	-0.1162	0.1007			
2x2Q	PUTCHA	0.5	-	-	-	-	1.9193
Exato	REDDY	-0.5	-	-	-	-	1.9173

Tabela 5.7. Placa Laminada Não Simétrica,  $[0^\circ/90^\circ]$ , Quadrada, Simplesmente Suportada, Submetida a um Carregamento Uniforme: resultados determinados pelo MMFGL usando as teorias FSDT e HSDT.

( $a/h = 10$ )

Malha	Fonte	$z/h$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{xz}^{EQ}$	$\bar{\sigma}_{xz}^{RC}$	$\bar{w}_o$
1x1	FSDT	0.5	1.1230	-0.1190	0.3647	0.6738	2.0013
		-0.5	-0.1208	0.1190			
	HSDT	0.5	1.1700	-0.2091	0.3723	0.8447	1.9652
		-0.5	-0.1220	0.2091			
2x2	FSDT	0.5	1.0880	-0.0992	0.5106	0.6220	1.9500
		-0.5	-0.1176	0.0992			
	HSDT	0.5	1.2220	-0.1137	0.5121	0.7717	1.9113
		-0.5	-0.1189	0.1137			
3x3	FSDT	0.5	1.0830	-0.0976	0.5775	0.6061	1.9475
		-0.5	-0.1173	0.0976			
	HSDT	0.5	1.0380	-0.0908	0.6064	0.7530	1.9179
		-0.5	-0.1165	0.0908			
4x4	FSDT	0.5	1.0820	-0.0972	0.6169	0.6008	1.9471
		-0.5	-0.1172	0.0972			
	HSDT	0.5	1.0650	-0.0931	0.6465	0.7468	1.9164
		-0.5	-0.1178	0.0536			
5x5	FSDT	0.5	1.0810	-0.0970	0.6409	0.5987	1.9469
		-0.5	-0.1172	0.0970			
	HSDT	0.5	0.9838	-0.1007	0.6955	0.7704	1.9180
		-0.5	-0.1162	0.1007			
2x2Q	PUTCHA	0.5	-	-	-	-	1.9193
Exato	REDDY	-0.5	-	-	-	-	1.9173

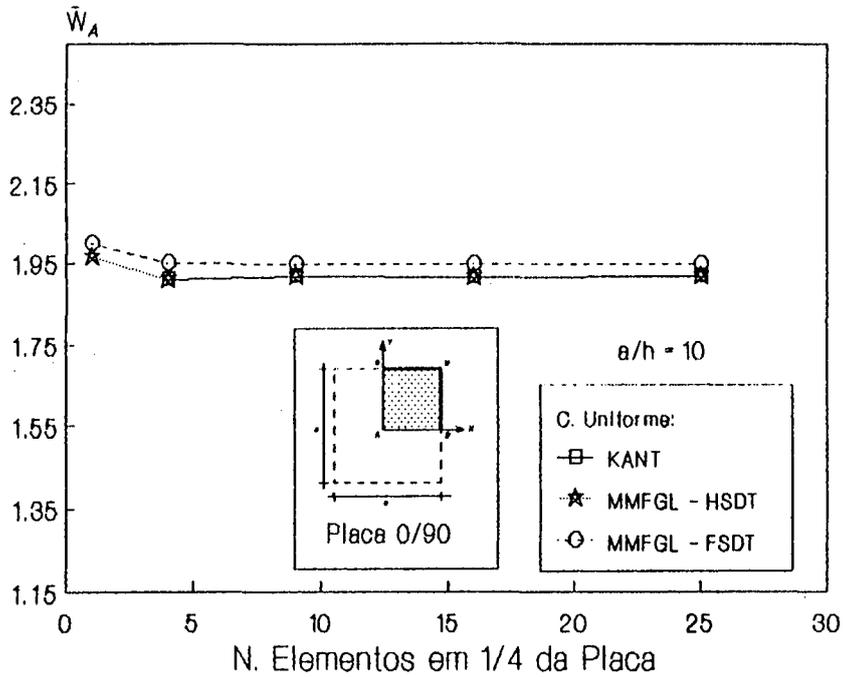


Figura 5.7. - Placa Laminada [0/90], Quadrada, Apoiada, Submetida a um Carregamento Uniforme: convergência dos deslocamentos verticais no centro da placa.

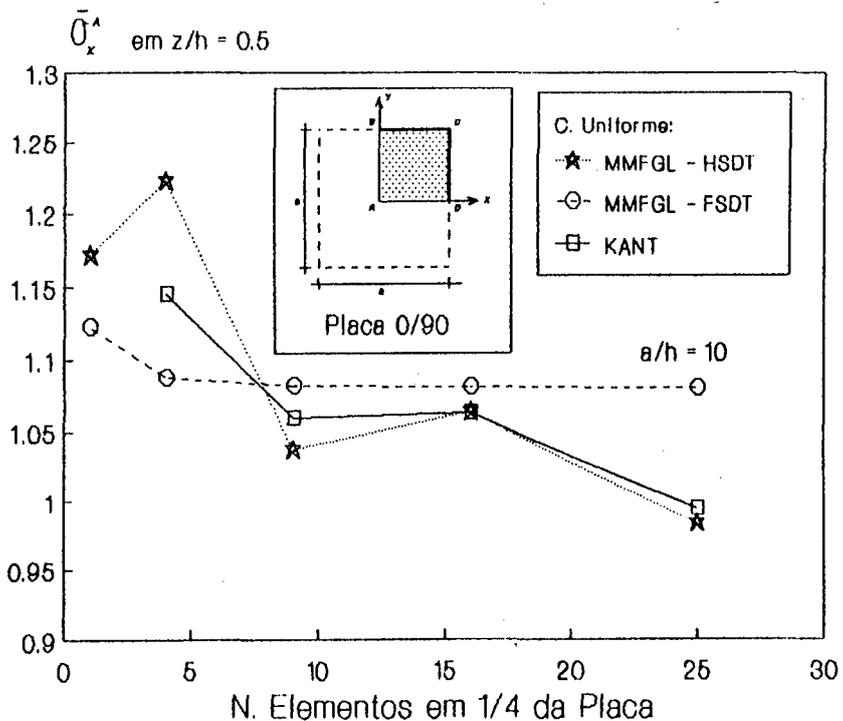


Figura 5.8. - Placa Laminada [0/90], Quadrada, Apoiada, Submetida a um Carregamento Uniforme: convergência das tensões  $\bar{\sigma}_x$  no Ponto A.

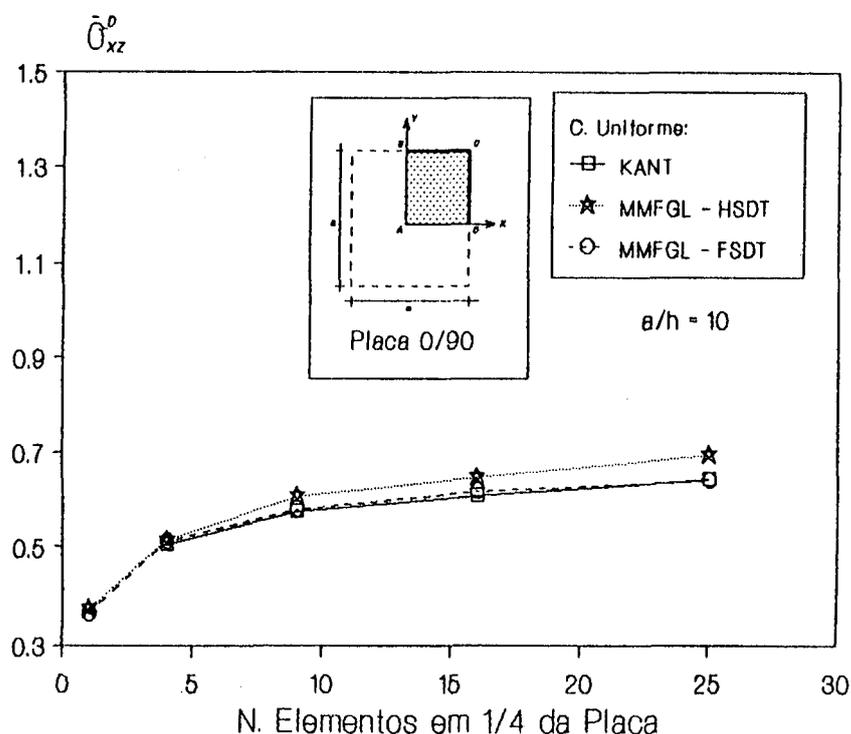


Figura 5.9. - Placa Laminada [0/90], Quadrada, Apoiada, Submetida a um Carregamento Uniforme: convergência das tensões  $\bar{\sigma}_{xz}$  no Ponto D.

### 5.8.3. Placa Laminada [+45°/-45°/ ... ], 8 lâminas, Simplesmente Apoiada, Submetida a um Carregamento Senoidal.

O modelo agora em estudo corresponde ao de um laminado quadrado não simétrico, de oito lâminas [+45°/-45°/ ... ], simplesmente apoiado, e recebendo um carregamento senoidal. Aproveitando as condições de simetria do problema, conforme sugerido por Reddy [1989], somente um quarto da placa será discretizado. Resultados de deslocamentos, tensões normais e cisalhantes determinados por Kant & Pandya [1988] e pelo MMFGL são mostrados na Tabela 5.8, para a relação  $a/h = 10$ .

Para comparar os resultados entre as teorias FSDT e HSDT foi elaborada a Tabela 5.9, análoga à anterior, mas com todos os resultados determinados pelo MMFGL.

A Tabela 5.10 fornece resultados de deslocamentos pelas teorias FSDT e HSDT para diversas relações  $a/k$ . São mostrados os resultados determinados por Kant & Pandya, com os quais o MMFGL apresenta ótima aproximação.

Deslocamentos, momentos e esforços cortantes são mostrados na Tabela 5.11, para diversas relações  $a/k$ . Os pontos de obtenção de tais valores tem as seguintes coordenadas:

$$\begin{aligned} \bar{w}_o & \text{ em } (0,0,0) & ; & & \bar{Q}_x & \text{ em } \left(\frac{a}{2}, 0\right) \\ \bar{M}_x & \text{ em } (0,0) & ; & & \bar{M}_{xy} & \text{ em } \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) ; \end{aligned}$$

Tabela 5.8. - Placa Laminada Não Simétrica, [+45°/-45°/...], 8 lâminas, Quadrada, Simplesmente Apoiada, Submetida a um Carregamento Senoidal: convergência de deslocamentos e tensões para  $a/h = 10$ .

Malha	Fonte	$z/h$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{xz}^{EQ}$	$\bar{\sigma}_{xz}^{RC}$	$\bar{w}_0$
1x1	KANT	0.5	-	-	-	-	-
		-0.5	-	-	-	-	-
	MMFGL	0.5	0.08572	-0.0950	0.1888	0.2694	0.4272
		-0.5	-0.06753	-0.0952			
2x2	KANT	0.5	0.1663	-0.1601	0.2488	0.2347	0.4193
		-0.5	-0.1806	0.1732			
	MMFGL	0.5	0.2025	-0.1845	0.2158	0.2491	0.4190
		-0.5	-0.1768	0.1849			
3x3	KANT	0.5	0.1591	-0.1545	0.2419	0.2371	0.4197
		-0.5	-0.1807	0.1724			
	MMFGL	0.5	0.2008	-0.1800	0.2194	0.2437	0.4196
		-0.5	-0.1732	0.1804			
4x4	KANT	0.5	0.1602	-0.1549	0.2452	0.2376	0.4196
		-0.5	-0.1832	0.1743			
	MMFGL	0.5	0.2052	-0.1830	0.2291	0.2421	0.4161
		-0.5	-0.1758	0.1834			
5x5	KANT	0.5	0.1626	-0.1415	0.2468	0.2379	0.4197
		-0.5	-0.1895	0.1606			
	MMFGL	0.5	0.2155	0.1653	0.2274	0.2398	0.4198
		-0.5	-0.1843	-0.1657			
2x2Q	PUTCHA	0.5	-	-	-	-	
Exato	REDDY	-0.5	-	-	-	-	0.42

Tabela 5.9. - Placa Laminada Não Simétrica, [+45 °-45 °...], 8 lâminas, Quadrada, Simplesmente Apoiada, Submetida a um Carregamento Senoidal: deslocamentos e tensões determinados pelo MMFGL considerando as teorias FSDT e HSDT para  $a/h = 10$ .

Malha	Fonte	$z/h$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{xz}^{EQ}$	$\bar{\sigma}_{xz}^{RC}$	$\bar{w}_0$
1x1	FSDT	0.5	0.1541	-0.1672	0.2174	0.2170	0.4116
		-0.5	-0.1541	0.1672			
	HSDT	0.5	0.0857	-0.0950	0.1888	0.2694	0.4272
		-0.5	-0.0675	-0.0952			
2x2	FSDT	0.5	0.1530	-0.1574	0.2516	0.2001	0.4160
		-0.5	-0.1530	0.1305			
	HSDT	0.5	0.2025	-0.1845	0.2158	0.2491	0.4190
		-0.5	-0.1768	0.1849			
3x3	FSDT	0.5	0.1521	-0.1575	0.2532	0.1959	0.4162
		-0.5	-0.1521	0.1285			
	HSDT	0.5	0.2008	-0.1800	0.2194	0.2437	0.4196
		-0.5	-0.1732	0.1804			
4x4	FSDT	0.5	0.1516	-0.1583	0.2532	0.1943	0.4162
		-0.5	-0.1516	0.1277			
	HSDT	0.5	0.2052	-0.1830	0.2291	0.2421	0.4161
		-0.5	-0.1758	0.1834			
5x5	FSDT	0.5	0.1514	-0.1591	0.2529	0.1935	0.4163
		-0.5	-0.1514	0.1272			
	HSDT	0.5	0.2155	0.1653	0.2274	0.2398	0.4198
		-0.5	-0.1843	-0.1657			
2x2Q	PUTCHA	0.5	-	-	-	-	0.42
Exato	REDDY	-0.5	-	-	-	-	

Tabela 5.10. - Placa Laminada Não Simétrica,  $[+45^\circ/-45^\circ/\dots]$ , 8 lâminas, Quadrada, Simplesmente Apoiada, Submetida a um Carregamento Senoidal: deslocamentos verticais no centro para vários valores de  $a/k$

a/k	TEORIA	KANT	MMFGL				
			$M_{1 \times 1}$	$M_{2 \times 2}$	$M_{3 \times 3}$	$M_{4 \times 4}$	$M_{5 \times 5}$
4	FSDT	-	1.31191	1.32734	1.32806	1.32819	1.32822
	HSDT	1.2791	1.27795	1.27795	1.27718	1.27783	1.27806
10	FSDT	-	0.41159	0.41602	0.41620	0.41623	0.41625
	HSDT	0.4193	0.42716	0.41895	0.41962	0.41961	0.41967
50	FSDT	-	0.24714	0.24929	0.24936	0.24938	0.24939
	HSDT	0.2522	0.24899	0.25202	0.25219	0.25233	0.25217
100	FSDT	-	0.24201	0.24407	0.24415	0.24417	0.24418
	HSDT	0.2469	0.24386	0.24671	0.24697	0.24707	0.24771

Tabela 5.11. - Placa Laminada Não Simétrica,  $[+45^\circ/-45^\circ/\dots]$ , 8 lâminas, Quadrada, Simplesmente Suportada, Submetida a um Carregamento Senoidal: deslocamentos e resultantes de tensões para vários valores de  $a/k$ .

a/k	Fonte	$\bar{w}_o$	$\bar{M}_x$	$\bar{M}_{xy}$	$\bar{Q}_x$
4	KANT	1.2791	0.0266	-0.0256	0.1540
	MMFGL	1.2778	0.0286	-0.0273	0.1593
10	KANT	0.4193	0.0264	-0.0254	0.1546
	MMFGL	0.4196	0.0276	-0.0261	0.1596
50	KANT	0.2522	0.0264	-0.0255	0.1544
	MMFGL	0.2523	0.0274	-0.0271	0.1557
100	KANT	0.2469	0.0264	-0.0255	0.1543
	MMFGL	0.2471	0.0273	-0.0263	0.1521

5.8.4. Placa Laminada [ $0^\circ/90^\circ/ \dots$  ], 10 lâminas, Quadrada, Simplesmente Apoiada, Submetida a um Carregamento Senoidal.

Um laminado de configuração [ $0^\circ/90^\circ/\dots$ ], composto de 10 lâminas de mesma espessura, quadrado, simplesmente suportado, é submetido a um carregamento senoidal. Embora seja uma placa não-simétrica, este caso particular pode ainda ser discretizado considerando apenas 1/4 do domínio total. Reddy [1988] determinou solução analítica para o mesmo cujos valores de deslocamentos e tensões estão apresentados na Tabela 5.12. Nessa mesma tabela são fornecidos resultados aproximados do próprio Reddy, bem como do MMFGL por meio de malhas 2x2 e 4x4 elementos de domínio. São apresentados tanto resultados da FSDT como da HSDT. Observa-se que os resultados do MMFGL estão muito próximos da solução analítica.

Tabela 5.12. - Placa Laminada [ $0^\circ/90^\circ/\dots$ ], 10 lâminas, quadrada, simplesmente apoiada, submetida a um carregamento senoidal: deslocamentos e tensões máximas pela FSDT e HSDT ( $a/h = 10$ ).

Teoria	Fonte	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\sigma}_{yz}$
FSDT	Reddy	0.616	0.4863	0.4863	0.2652
	Analít.	0.615	0.5009	0.5009	0.2729
	MMFGL	0.615	0.5103	0.5103	0.2193
	MMFGL <sub>2x2</sub> 4x4	0.615	0.5061	0.5061	0.2345
HSDT	Reddy	0.619	0.4842	0.4842	0.3577
	Analít.	0.616	0.5346	0.5346	0.3408
	MMFGL	0.616	0.5454	0.5454	0.2164
	MMFGL <sub>2x2</sub> 4x4	0.616	0.5404	0.5404	0.2315
CPT		0.442	0.5009	0.5009	-

5.8.5. Placa Laminada [ $0^\circ/90^\circ/\dots$ ],  $NL = 2$  ou  $10$ , Quadrada, Submetida a Um Carregamento Senoidal, e Com Condições de Contorno Variáveis.

Uma última aplicação é agora realizada considerando-se o caso de um laminado quadrado, submetido a um carregamento senoidal, e cuja configuração é [ $0^\circ/90^\circ/\dots$ ]. Considera-se que o número de lâminas,  $NL$ , seja igual a 2 ou a 10. Dois bordos opostos da placa são simplesmente apoiados. Os outro dois, serão considerados livres ou engastados. Nestas condições, Reddy [1989] determinou soluções analíticas utilizando um procedimento do tipo Lévy. A relação  $a/h$  é igual a 10.

Tabela 5.13. - Placa Laminada [ $0^\circ/90^\circ/\dots$ ], com  $NL$  lâminas, Quadrada, Submetida a um Carregamento Senoidal, Apoiada (SS) em Dois Bordos Opostos e nos Outros Dois Engastada (CC) ou Livre (FF): valores dos deslocamentos verticais no centro ( $a/h = 10$ )

NL	Fonte	Condições de Contorno	
		SS-CC	SS-FF
2	Reddy	0.605	0.2002
	Analítico	0.617	0.1992
	MMFGL	0.701	0.1984
	MMFGL <sub>2x2</sub>	0.635	0.1984
	CPT <sub>4x4</sub>	0.429	0.1977
10	Reddy	0.372	0.926
	Analítico	0.375	0.916
	MMFGL	0.403	0.915
	MMFGL <sub>2x2</sub>	0.380	0.914
	CPT <sub>4x4</sub>	0.167	0.665

Foram calculados os deslocamentos verticais no centro da placa considerando malhas de 2x2 e 4x4 elementos de domínio. Os resultados estão indicados na Tabela 5.13, onde são apresentados, também, os resultados analíticos de Reddy, bem como uma solução aproximada utilizando a sua teoria de ordem superior. Constata-se o bom desempenho do MMFGL.

### 5.9. Referências Bibliográficas do Capítulo 5.

- Chanterjee, S.; Kulkarni, S. V. - Shear Correction Factors For Laminated Plates. *AIAA Journal*, 17, 498-499, (1979)
- Chomkwah, V.; Avula, X.J.R. - A High-Order Theory for Laminated Composite Plates Using Lagrange Multiplier Technique. *Comput. & Structures.*, Vol 37, No. 5, pp. 845-861, (1990)
- Engblom, J. J.; Ochoa, O. O. - Through The Thickness Stress Predictions For Laminated Plates Of Advanced Composite Materials. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 21, 1759-1776, (1985)
- Engblom, J. J.; Ochoa, O. O. - Finite Element Formulation Including Interlaminar Stress Calculations. *Comp. & Struct.*, 23, n.2, 241-249, (1986)
- Essenburg, F. - On The Significance of The Inclusion of The Effect of Transverse Normal Strain in Problems Involving Beams With Surface Constraints. *J. Applied Mech.*, 42, n.1, Trans. ASME, Vol 97, Series E, 127-132, (1975)
- Kant, T.; Menon, M.P. - Estimation of Interlaminar Stresses in Fibre Reinforced Composite Cylindrical Shells. *Comp. & Struct.*, 38, No. 2, pp. 131-147, (1991)
- Kant, T; Pandya, B. N. - A Simple Finite Element Formulation Of Higher Order Theory For Unsymmetrically Laminated Composite Plates. *Compos. Struct.*, 9, 215-246, (1988)
- Kant, T; Varaiya, J.H.; Arora, C.P. - Finite Element Transient Analysis of Composite and Sandwich Plates Based on a Refined Theory and Implicit Time Integration Schemes. *Comp. & Struct.*, 36, No. 3, pp. 401-420 (1990)
- Khdeir, A. A. - Free Vibration And Buckling Of Symmetric Cross-Ply Laminated Plates By An Exact Method. *J. Sound & Vib.*, 126(3),

447-461, (1988)

- Khdeir, A. A. - Free Vibration And Buckling Of Unsymmetric Cross-Ply Laminated Plates Using A Refined Theory. *J. Sound & Vib.*, 128(3), 377-395, (1989)
- Khdeir, A. A.; Librescu, L.; Frederick, D. - A Shear Deformable Theory Of Laminated Composite Shallow Shell Type Panels And Their Response Analysis - II: Static Response. *Acta Mech.*, 77, 1-12, (1989)
- Khdeir, A. A.; Reddy, J. N. - Dynamic Response Of Antisymmetric Angle-Ply Laminated Plates Subjected To Arbitrary Loading. *J. Sound & Vib.*, 126(3), 437-445, (1988)
- Khdeir, A. A.; Reddy, J. N.; Librescu, L. - Analytical Solution Of A Refined Shear Deformation Theory For Rectangular Composite Plates. *Int. J. Solids Struct.*, 23, n. 10, 1447-1463, (1987)
- Kwon, Y. W.; Akin, J. E. - Analysis Of Layered Composite Plates Using A Higher Order Deformation Theory. *Comp. & Struct.*, 27, n.5, 619-623, (1987)
- Lakshminarayana, H. V.; Shidhara-Murthy, S. - A Shear-Flexible Triangular Finite Element Model For Laminated Composite Plates. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 20, 591-623, (1984)
- Lo, K. H.; Christensen, R. M.; Wu, E. M. - A High-Order Theory Of Plate Deformation - Part 1: Homogeneous Plates. *J. Appl. Mech.*, 663-668, (1977a)
- Lo, K. H.; Christensen, R. M.; Wu, E. M. - A High-Order Theory Of Plate Deformation - Part 2: Laminated Plates. *J. Appl. Mech.*, 669-676, (1977b)
- Lo, K. H.; Cristensen, R. M.; Wu, E. M. - Stress Solution Determination For High Order Plate Theory. *Int. J. Solids Struct.*, 44, 655-662, (1978)
- Machado, R.D.; Barcellos, C.S. - A First Modified Local Green's Function Method Approach To Ortotropic Laminated Plates. *Proc. of CADCOMP92 - Computer Aided Design for Composite Materials Conference*. Ed. C.A. Brebbia. Newark. USA, (1992).
- Machado, R.D.; Barbieri, R.; Barcellos, C.S; Filippin, C.G. - O Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) Aplicado a Problemas da Mecânica do Continuo: Parte II - Placas Ortotrópicas Laminadas. XIII CILAMCE - Cong. Ibero Latino- Americano Sobre Metodos Computacionais Para Engenharia. Porto Alegre, (1992)
- Mallikarjuna, K. T. - Dynamics Of Laminated Composite Plates With Higher Order Theory And Finite Element Discretization. *J. Sound &*

Vib., 126(3), 463-475, (1988)

- Mallikarjuna, K. T. - Free Vibration Of Symmetrically Laminated Plates Using A Higher Order Theory With Finite Element Technique. Int. J. Num. Meth. Engng., 28, 1875-1889, (1989)
- Mau, S. T. - A Refined Laminated Plate Theory. J. App. Mech, 40, 606-607, (1973)
- Mindlin, R. D. - Influence Of Rotatory Inertia And Shear On Flexural Motions Of Isotropic, Elastic Plates. J. Appl. Mech., 31-38, (1951)
- Naghdi, P. M. - On The Theory Of Thin Elastic Shells. Quarterly of Appl. Mathem., 14, 369-380, (1957)
- Nelson, R. B.; Lorch, D. R. - A Refined Theory Of Laminated Orthotropic Plates. J. Apl. Mech., 41, 171-183, (1984)
- Noor, A. K.; Burton, W. S. - Assessment Of Shear Deformation Theories For Multilayered Composite Plates. Appl. Mech. Rev., 42, n.1, 1-12, (1989)
- Noor, A. K.; Burton, W. S. - Stress And Free Vibration Analysis Of Multilayered Composite Plates. Composite Struct., 11, 183-204, (1989)
- Noor, A. K.; Burton, W. S. - Three Dimensional Solutions For Antisymmetrically Laminated Anisotropic Plates. Transactions of the ASME, 57, 182-188, (1990)
- Noor, A. K.; Burton, W. S.; Peters, J. M. - Predictor-Corrector Procedures For Stress And Free Vibration Analysis Of Multilayered Composite Plates And Shells. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 82, 341-363, (1990)
- Noor, A. K.; Mathers, M. D. - Anisotropy And Shear Deformation In Laminated Composite Plates. AIAA Journal, 14(2), 282-285, (1976)
- Noor, A. K.; Mathers, M. D. - Finite Element Analysis Of Anisotropic Plates. Int. J. Num. Meth. Engng., 11(2), 289-307, (1977)
- Owen, D. R. J.; Li, Z. H. - A Refined Analysis Of Laminated Plates By Finite Element Displacement Methods - I. Fundamentals And Static Analysis. Comp. & Struct., 26, n.6, 907-914, (1987)
- Pagano, N. J. - Exact Solutions For Composite Laminates In Cylindrical Bending. J. Composite Mat., 3, 398-411, (1969)
- Pagano, N. J. - Exact Solutions For Rectangular Bidirectional Composites And Sandwich Plates. J. Composite Mat., 4, 20-34, (1970a)

- Pagano, N. J. - Influence Of Shear Coupling In Cylindrical Bending Of Anisotropic Laminates. J. Composite Mat., 4, 330-343, (1970b)
- Pagano, N. J. - Stress Fields In Composite Laminates. Int. J. Solids Struct., 14, 385-400, (1978)
- Pagano, N. J. - Free Edge Stress Fields In Composite Laminates. Int. J. Solids Struct., 14, 401-406, (1978)
- Pagano, N. J.; Hatfield, Sharon J. - Elastic Behavior Of Multilayered Bidirectional Composites. AIAA Journal, 10, N° 7, 931-933, (1972)
- Pagano, N. J.; Patterson, W.; Wang, A. S. D. - Further Study Of Composite Laminates Under Cylindrical Bending. J. Composite. Mat., 5, 521-528, (1971)
- Pagano, N. J.; Soni, S. R. - Global-Local Laminate Variational Model. Int. J. Solids Struct., 19, n.3, 207-228, (1983)
- Pandya, B. N.; Kant, Tarun - A Refined Higher-Order Generally Orthotropic C° Plate Bending Element. Comp. & Struct, 28, N° 2, 119-133, (1988)
- Pandya, B.N.; Kant, T. - Flexural Analysis of Laminated Composites Using Refined Higher Order C° Plate Bending Elements. Comp. Meth. Num. Engng., 66, 173-198, (1988b)
- Phan, N. D.; Reddy, J. N. - Analysis Of Laminated Composite Plates Using A Higher Order Shear Deformation Theory. Int. J. Num. Meth. Engng., 21, 2201-2219, (1985)
- Pryor Jr, C. W.; Barker, R. M. - A Finite Element Analysis Including Transverse Shear Effects For Applications To Laminated Plates. AIAA Journal, 9(5), 912-917, (1971)
- Putcha, N. S.; Reddy, J. N. - A Refined Mixed Shear Flexible Finite Element For The Non-Linear Analysis Of Laminated Plates. Comp. & Struct., 22, n.4, 529-538, (1986)
- Reddy, J. N.- Bending Of Laminated Anisotropic Shells By A Shear Deformable Finite Element. Fibre Sci. Tech., 17, 9-24, (1982)
- Reddy, J. N. - A Simple Higher-Order Theory For Laminated Composite Plates. J. Appl. Mech., 51, 745-752, (1984a)
- Reddy, J. N. - A Refined Nonlinear Theory Of Plates With Transverse Shear Deformation. Int. J. Solids Struct., 20, 9/10, 881-896, (1984b)
- Reddy, J. N. - Energy And Variational Methods In Applied Mechanics.

Wiley, New York, (1984c)

- Reddy, J. N. - Exact Solutions Of Moderately Thick Laminated Shells. *J. Engng. Mech.*, 110, No. 5, (1984d)
- Reddy, J.N. - A Note On Symmetry Considerations In The Transient Response of Unsymmetrically Laminated Anisotropic Plates. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 20, 175-181, (1984e).
- Reddy, J. N. - On Mixed Finite-Element Formulations Of A Higher-Order Theory Of Composite Laminates. *Finite Element Methods For Plate And Shell Structures. Vol 2 - Formulations And Algorithms. Cap 2, pp 31-57, Pineridge Press, UK, (1986)*
- Reddy, J. N. - On Refined Computational Models Of Composite Laminates. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 27, 361-382, (1989)
- Reddy, J. N.; Khdeir, A. A.; Librescu, L. - Lévy Type Solutions For Symmetrically Laminated Rectangular Plates Using First Order Shear Deformation Theory. *Trans. ASME*, 54, 740-742, (1987)
- Reissner, E. - The Effect Of Transverse Shear Deformation On The Bending Of Elastic Plates. *J. Appl. Mech.*, 12, 69-77, (1945)
- Reissner, E. - On Transverse Bending Of Plates, Including The Effect Of Transverse Shear Deformation. *Int. J. Solids Struct.*, 11, 569-573, (1975)
- Srinivas, S. - A Refined Analysis Of Composite Laminates. *J. Sound & Vib.*, 30, n. 4, 495-507, (1973)
- Toledano, A.; Murakami, H. - A Composite Plate Theory For Arbitrary Laminate Configurations. *J. Appl. Mech.*, 54, 181-189, (1987)
- Toledano, A.; Murakami, H. - A High-Order Laminated Plate Theory With Improved In-Plane Responses. *Int. J. Solids Struct.*, 23, 111-131, (1987)
- Whitney, J. M. - *Structural Analysis Of Laminated Anisotropic Plates. Technomic Publishing Company, Inc, Lancaster, Pensilvania, (1987)*
- Whitney, J. M.; Leissa, A. W. - Analysis Of Heterogeneous Anisotropic Plates. *J. Appl. Mech.*, 261-266, (1969)
- Whitney, J. M.; Pagano, N. J. - Shear Deformation In Heterogeneous Anisotropic Plates. *J. Appl. Mech.*, 1031-1036, (1970)
- Whitney, J. M.; Sun, C. T. - A Higher Order Theory For Extensional Motion Of Lminated Composites. *J. Sound & Vib.*, 30, n. 1, 85-91, (1973)

- Yang, P. C.; Norris, C. H.; Stavsky, Y. - Elastic Wave Propagation In Heterogeneous Plates. *Int. J. Sol. Struct.*, 2, 665-684, (1966)
- Zienkiewicz, O.C. - The Finite Element Method. McGraw-Hill Book Company (UK) Limited. England. (1977).

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES

#### 6.1. COMENTÁRIOS INICIAIS.

Quando Barcellos & Silva [1987] idealizaram o Método Modificado da Função de Green Local (MMFGL), perceberam que estavam lidando com uma poderosa ferramenta de análise computacional para resolver problemas da Mecânica. Esse novo instrumento, no entanto, precisava ser melhor investigado para que sua potencialidade ficasse comprovada.

As primeiras aplicações do MMFGL corresponderam a casos bastante simples de hastes, vigas e membranas elásticas que mostraram a sua simplicidade de utilização e grande precisão dos resultados [Silva (1988)]. O método revelava um excelente desempenho para esses casos triviais e indicava ser uma boa opção para os métodos consagrados dos Elementos Finitos (MEF) e dos Elementos de Contorno (MEC).

Era necessário estender a aplicação do MMFGL a outros campos da Mecânica. Isso foi feito de modo bastante detalhado por Barbieri [1992], que resolveu problemas de Potenciais, de Elasticidade 2-D e 3-D, e de Placas Isotrópicas Homogêneas. Todas estas aplicações já haviam sido resolvidas tanto pelo MEF quanto pelo MEC e, comparados com os destes, os resultados do novo método integral mostraram-se altamente satisfatórios.

Barbieri & Barcellos [a ser publicado] estudando problemas potenciais em meios não homogêneos, mostraram a aplicabilidade do MMFGL em

casos onde não se dispõe de solução fundamental na forma explícita, o que impede a utilização do Método dos Elementos de Contorno. Esta característica talvez seja a mais importante no MMFGL, isto é, a determinação automática da solução fundamental do problema. Aliada a ela, as outras propriedades observadas, tais como taxas elevadas de convergência, acentuada precisão nodal tanto para as variáveis primais quanto para as duais, etc., abriram um grande horizonte de aplicações para o novo método.

O campo de atuação do MMFGL é, aparentemente, ilimitado. Mas, por se tratar de um método muito novo, outras investigações precisam ainda ser feitas para poder generalizar o seu uso.

Um dos problemas que sempre despertou grande curiosidade e expectativa quanto à utilização do MMFGL era o das placas laminadas de materiais compostos onde, até o momento, não se dispõe de solução fundamental apropriada, restringindo, dessa forma, a utilização do Método dos Elementos de Contorno em tais aplicações. É, talvez, por esse motivo que o número de artigos publicados pelo MEC em problemas de placas laminadas fique, até hoje, em níveis insignificantes. A grande opção dos pesquisadores sempre foi, sem dúvidas, o Método dos Elementos Finitos.

Uma vez que o Método Modificado da Função de Green Local é capaz de gerar automaticamente uma solução fundamental para o problema de contorno, foi a sua aplicação, pela primeira vez, ao caso de placas ortotrópicas laminadas, que motivou o presente estudo. Agora, no encerramento deste trabalho, pode-se dizer que o novo método integral é, realmente, uma ótima opção para a análise de estruturas laminadas. Muito ainda pode e deve ser feito nessa área para melhor qualificar o método. Mas, os objetivos que este trabalho perseguia foram plenamente alcançados, pois ficou comprovada a sua aplicabilidade e seu bom desempenho ao caso de placas laminadas, através de alguns dos modelos que normalmente são adotados em análises usuais pelo Método dos Elementos Finitos. Abre-se, dessa forma, mais uma grande e promissora

linha de aplicação para o MMFGL.

Para melhor concluir esta pesquisa, é interessante tratar o assunto sob dois aspectos distintos: a) quanto a aplicabilidade e desempenho do MMFGL ao caso de placas ortotrópicas laminadas; e, b) quanto a sua potencialidade para futuras investigações. Esses dois enfoques serão abordados nos itens seguintes.

## 6.2. APLICABILIDADE E DESEMPENHO DO MMFGL AO CASO DE PLACAS ORTOTRÓPICAS LAMINADAS.

### 6.2.1. Aplicabilidade.

Está mais do que provado que o Método Modificado da Função de Green Local é aplicável a problemas de placas ortotrópicas laminadas. As diversas aplicações realizadas mostraram uma boa resposta do método, tanto em termos de deslocamentos, quanto em termos de esforços e de tensões, seja pela Teoria de Primeira Ordem (FSDT) quanto pela Teoria de Ordem Superior (HSOT). Foram examinadas inúmeras situações de configuração do laminado, de carregamento, de condições de contorno, de materiais, e, até mesmo, de refinamentos regulares e irregulares das malhas. Em todos os casos, o MMFGL revelou algumas das suas propriedades detectadas em outras aplicações, confirmando-se, realmente, como um método de solução para problemas de placas ortotrópicas laminadas.

### 6.2.2. Desempenho.

Para que a análise de desempenho do MMFGL seja a mais correta possível, é necessário considerar alguns fatores envolvidos no estudo.

Inicialmente, deve-se ressaltar que o elemento finito utilizado para discretizar o domínio do problema e aproximar as Matrizes de Green - o lagrangeano quadrático de nove pontos nodais, é dos mais simples que existe na literatura. Outros elementos mais elaborados poderiam melhorar a solução. Filippin et. alli [1992], por exemplo, mostraram, num estudo da convergência  $p$  e  $h$  do MMFGL, que os elementos de maior ordem polinomial convergem mais rapidamente para a solução.

Outro fator importante é que o modelo de deslocamentos utilizado não contém grandes complexidades. Hoje em dia, existem inúmeras formulações mistas e híbridas que, no caso de placas, apresentam desempenho mais adequado.

O modelo de camada simples empregado é naturalmente limitado para descrever, com precisão, o comportamento local do laminado, por exemplo, em termos de tensões cisalhantes. Essa restrição, observada em inúmeros artigos que utilizaram o Método dos Elementos Finitos, foi também presenciada no MMFGL, embora, em termos das respostas globais de deslocamentos, seu desempenho tenha sido excelente. A utilização de uma Teoria de Ordem Superior não foi totalmente suficiente para melhorar esse quadro.

De um modo geral verificou-se grande precisão dos resultados em termos de deslocamentos e de tensões planares. Nos problemas onde as respostas desejadas correspondiam às variáveis de contorno, como, por exemplo, nos casos em que, pelas condições de simetria, apenas 1/4 da placa era discretizado, os resultados nodais das variáveis primais (deslocamentos e rotações) e das duais (esforços cisalhantes, normais e de flexão) revelaram-se altamente precisos. As tensões planares, calculadas diretamente a partir dos valores de contorno, comprovaram essa precisão. Já nos problemas onde a resposta correspondia às variáveis internas, como nos casos de laminados não simétricos, onde havia necessidade de discretização do domínio todo, os resultados de deslocamentos no domínio foram, ainda, de grande precisão, mas as respostas em termos de esforços e de tensões ficaram prejudicadas por

não mais poderem ser obtidas diretamente a partir das variáveis de contorno.

Esta é uma das razões para um desempenho não tão bom do MMFGL na avaliação das tensões transversais. Uma vez que, para calculá-las, é necessário empregar as equações de equilíbrio 3-D da Elasticidade, conseqüentemente, desse procedimento resultam cálculos das derivadas das tensões normais em pontos do interior do domínio (veja-se item 3.6.). Como nesses pontos não se dispõe dos resultados nodais do contorno que, para o MMFGL são de grande precisão, é necessário, então, que as derivadas sejam determinadas por processo convencional como o normalmente realizado pelo Método dos Elementos Finitos, a partir dos deslocamentos nodais calculados no elemento. Esse processo de derivação degrada, ligeiramente, a precisão dos resultados de tensões transversais. Mesmo assim, comparados com outras fontes, os resultados determinados pelo MMFGL são bastante aceitáveis.

Um aspecto muito importante é que não se observou o fenômeno de travamento ("locking") dos efeitos de cisalhamento ou de membrana, muitas vezes inevitáveis em outros métodos. Esse problema ocorre na medida em que a placa se torna muito fina, tornando-a ficticiamente mais rígida. Mesmo com relações  $a/h$  da ordem de  $10^5$  não se percebeu qualquer modificação dos resultados, ao contrário de alguns modelos de elementos finitos (veja-se, por exemplo, o elemento TRIPLT, de Lakshminarayana & Murthy [1984]).

### 6.3. POTENCIALIDADE DO MMFGL EM PROBLEMAS ORTOTRÓPICOS LAMINADOS.

Não há dúvidas de que as expectativas iniciais do MMFGL se confirmaram no caso de placas ortotrópicas laminadas e ampliaram o seu leque de aplicações, especialmente em área tão promissora como a de materiais compostos. Algumas recomendações, frutos da experiência

deste trabalho, podem ser citadas, visando novas investigações sobre o método.

Deve merecer grande atenção o processo de determinação de esforços e de tensões no interior do domínio. Comprovou-se que, no contorno, tais valores são altamente precisos. Mas, no domínio, exigem pós-processamento que lhes diminui esta propriedade. O cálculo das tensões planares no domínio, para o caso de laminados, é de grande importância, porque é com estes valores que as tensões cisalhantes transversais são calculadas a partir das equações de equilíbrio 3-D da Elasticidade.

Para resolver este problema, duas alternativas podem ser experimentadas. A primeira, pela implementação de "sub-regiões", ou "células de Green". Em todo este estudo, utilizou-se uma única "célula" para discretizar o problema, constituída de uma malha de elementos finitos no domínio, e outra à ela associada, no contorno, por meio de elementos de contorno. A divisão do problema em várias "células", com condições de contorno entre elas bem estabelecidas, permitirá que se obtenham resultados de tensões muito precisos, no contorno de uma sub-região, correspondentes ao interior do domínio do problema. O modelo original de Silva [1988] para o MMFGL, e o tratamento por sub-regiões sugerido por Barbieri [1992] representam alternativas que merecem ser implementadas.

Outra alternativa que merece investigação é a determinação das derivadas dos deslocamentos usando, para tanto, derivadas das projeções dos Tensores de Green. Se as projeções da Função de Green são calculadas com grande precisão para este e outros problemas, as suas derivadas poderão ter grau de precisão comparável, permitindo que sejam determinadas diretamente as deformações e, conseqüentemente, as tensões.

Não custa insistir que o cálculo das tensões no domínio serviriam apenas para quando os pontos interiores fossem importantes na análise,

em se tratando de tensões normais, ou então, para a determinação mais precisa das tensões cisalhantes. As tensões normais calculadas no contorno, como se mostrou neste trabalho, já são muito precisas.

Para melhorar ainda mais os resultados usando uma Teoria de Camada Simples baseada em modelo de deslocamentos, exatamente como as utilizadas neste trabalho, a alternativa mais evidente corresponde à melhoria do elemento finito adotado, mediante incremento em sua ordem polinomial. Elementos de ordem mais elevada devem apresentar resultados mais precisos, embora o esforço computacional seja maior. No entanto, isto pode ser compensado diminuindo o refino da malha.

Modelos mistos ou híbridos podem ser uma ótima alternativa para melhorar a performance do método, dentro das Teorias de Camada Simples. Na literatura são encontradas inúmeras alternativas, com os mais variados tipos de elementos baseados em tais formulações. Elementos triangulares de alto desempenho, apropriados para discretizar geometrias complexas, ou elementos baseados em deformações impostas, têm sido muito estudados e constituem-se, talvez, numa boa opção.

As teorias refinadas merecem maior experimentação. Está provado que o MMFGL também tem um bom desempenho quando se emprega uma Teoria de Ordem Superior. É, pois, de se esperar que qualquer outra proposta seja igualmente boa de ser adotada. Dentre as citadas nestes trabalho, o processo preditor-corretor de Noor & Burton [1989] teria a vantagem de permitir a utilização da FSDT no seu processo iterativo. O modelo de Reddy [1984] seria uma boa oportunidade para testar os elementos do tipo  $\mathcal{E}^1$  no MMFGL.

Mesmo com as teorias refinadas ou com as formulações mistas ou híbridas, se o modelo se basear numa Teoria de Camada Simples, um pós-processamento continuará sendo necessário para que as tensões interlaminares sejam determinadas a partir das equações de equilíbrio da Elasticidade 3-D. Esta é uma das grandes limitações das Teorias de

## Camada Simples.

Para contornar esta dificuldade e incrementar a precisão das tensões cisalhantes transversais, deve-se pensar na implementação de uma teoria do tipo Lâmina Discreta. Dentre elas, a GLPT - "Generalized Laminated Plate Theory", proposta por Reddy et. alli. [1989], parece ser muito interessante uma vez que, no plano da placa, a FSDT, como utilizada neste trabalho, pode ser empregada. Posteriormente, associada a um modelo de camada simples, a teoria de lâmina discreta poderia ser empregada num procedimento do tipo Global-Local.

O Método Modificado da Função de Green Local pode ser considerado como um "método de malha grosseira", uma vez que, com poucos elementos na discretização, atinge-se elevado grau de precisão dos resultados. Como apresenta, também, altas taxas de convergência, é natural pensar em utilizá-lo em procedimentos adaptativos. Esta é uma área recente em estruturas laminadas (veja-se, por exemplo, Surana & Sorem [1990], e Babuška et. alli. [1992]), na qual o MMFGL projeta grande potencialidade.

Finalmente, todos os comentários acima podem ser estendidos a outras aplicações importantes em laminados, por exemplo, problemas dinâmicos de vibrações livres, análises transientes, flambagem, problemas não-lineares, fraturas, danos, etc.

### 6.4. Referências Bibliográficas do Capítulo 6.

- Babuška, I.; Szabó, B.A.; Actis, R.L. - Hierarchic Models For Laminated Composites. Int. J. Num. Meth. Engng., 33, pp. 503-535, (1992)
- Barbieri, R. - Desenvolvimento e Aplicação do Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) Para Problemas do Meio Contínuo". Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina, (Tese de Doutorado), (1992).

- Barbieri, R.; Barcellos, C. S. - Non-Homogeneous Field Potential Problems Solution by the Modified Local Green's Function Method (MLGFM). Eng. Analysis With Boundary Elements (no prelo)
- Barcellos C. S.; Silva, L. H. M. - Elastic Membrane Solution by a Modified Local Green's Function Method. (Ed. Brebbia, C. A. and Venturini, W. S) Proc. Int. Conf. on Boundary Element Technology, 1987, Comp. Mech. Publ., Southampton, (1987)
- Filippin, C.G; Barbieri, R.; Barcellos, C.S. - Numerical Results for H- and P-Convergences for the Modified Local Green's Function Method. Proc. 14th Int. Conf. Boundary Element Technology, USA, (1992).
- Lakshminarayana, H. V.; Shidhara-Murthy, S. - A Shear-Flexible Triangular Finite Element Model For Laminated Composite Plates. Int. J. Num. Meth. Engng., 20, 591-623, (1984)
- Noor, A. K.; Burton, W. S. - Assessment Of Shear Deformation Theories For Multilayered Composite Plates. Composite Struct., 11, 183-204, (1989).
- Reddy, J. N. - A Simple Higher-Order Theory For Laminated Composite Plates. J. Appl. Mech., 51, 745-752, (1984).
- Reddy, J. N.; Barbero, E. J.; Teply, J. L. - A Plate Bending Element Based On A Generalized Laminate Plate Theory. Int. J. Num. Meth. Engng., 28, 2275-2292, (1989)
- Surana, K. S.; Sorem, R. M. - Curved Shell Elements Based On Hierarchical P-Approximation In The Thickness Direction For Linear Static Analysis Of Laminated Composites. Int. J. Num. Meth. Eng., 29, 1393-1420, (1990)
- Silva, L.H.M. - Novas Formulações Integrais Para Problemas da Mecânica. Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina, (Tese de Doutorado), (1988).