

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

TRANSPORTE CONVECTIVO DE CALOR E MASSA  
EM MEIOS POROSOS SATURADOS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE  
SANTA CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE  
MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

DANIEL SANTANA DE FREITAS

FLORIANÓPOLIS, ABRIL DE 1991

TRANSPORTE CONVECTIVO DE CALOR E MASSA EM

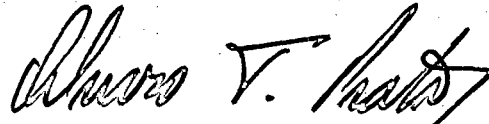
MEIOS POROSOS SATURADOS

DANIEL SANTANA DE FREITAS

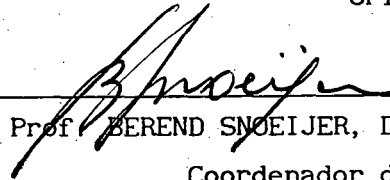
ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO CIÊNCIAS TÉRMICAS,  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
MECÂNICA.

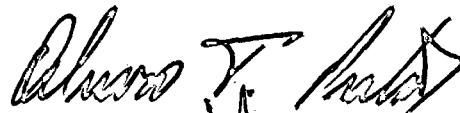


Prof. ÁLVARO T. PRATA, Ph.D.  
Orientador

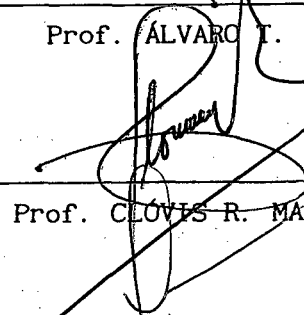


Prof. BEREND SNOEIJER, Dr.-Ing.  
Coordenador do curso

BANCA EXAMINADORA

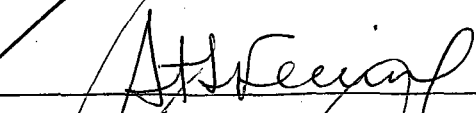


Prof. ÁLVARO T. PRATA, Ph.D.  
Presidente

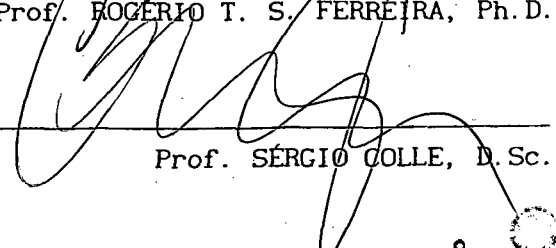


Prof. CLÓVIS R. MALISKA, Ph.D.

Prof. PAULO CÉSAR PHILIPPI, Dr.-Ing.



Prof. ROGERIO T. S. FERREIRA, Ph.D.



Prof. SÉRGIO COLLE, D.Sc.

---

## RESUMO

---

Equações governantes para variáveis médias em problemas de transporte em meios porosos saturados são deduzidas a partir da mecânica do contínuo. Durante o desenvolvimento, atenção especial é dedicada à modelagem dos termos desconhecidos que resultam do processo de média. O modelo é "fechado" com o auxílio de dados experimentais da literatura e de hipóteses relativas à essência de alguns dos mecanismos físicos envolvidos. A formulação resultante é, então, aplicada a um meio poroso constituído de esferas compactadas em um problema de placas paralelas. Com base nos resultados numéricos obtidos, o formalismo adotado é reavaliado e é discutida a influência de parâmetros importantes em casos práticos.

---

## ABSTRACT

---

Governing equations for average variables related to transport phenomena in saturated porous media are derived on the basis of the Continuum Mechanics. In the development, special attention is paid to the proper modelling of the unknown terms that come out of the averaging process. The model is "closed" with the aid of experimental data and assumptions relative to the essence of some physical mechanisms. The resulting formulation is applied to a particular problem consisting of a parallel plates channel filled with packed spheres. The adopted approach and the influence of some important practical parameters are discussed based upon the obtained numerical results.

---

TRANSPORTE CONVECTIVO DE CALOR E MASSA EM  
MEIOS POROSOS SATURADOS

---

Compreendo que se posso, com a ciência, me  
apoderar dos fenômenos e enumerá-los,  
não posso da mesma forma apreender o mundo.

Albert Camus [01]

---

**SUMÁRIO**

---

<b>Notação</b>	<b>vi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Caracterização do Modelo</b>	<b>6</b>
2-1 Princípios Fundamentais	6
2-2 Simplificações	11
<b>3 Problema Hidrodinâmico</b>	<b>12</b>
3-1 Conservação da Massa	12
3-2 Conservação da Quantidade de Movimento	13
<b>4 Transporte de um Escalar no Fluido</b>	<b>21</b>
4-1 Equação Geral de Transporte	21
4-2 Conservação da Energia no Fluido	22
4-3 Transporte de uma Espécie Química	30
<b>5 Condução no Sólido</b>	<b>34</b>
5-1 Adaptação do Teorema Fundamental	34
5-2 Equação Governante	35
<b>6 Termos-Fonte das Equações de Conservação</b>	<b>38</b>

<b>7</b>	<b>Características do Meio Poroso de Esferas</b>	<b>43</b>
7-1	Aspectos Hidrodinâmicos	44
7-2	Detalhes de Transporte	45
7-3	Características Estruturais	45
7-4	Regimes de Escoamento em Meio Poroso	50
7-5	Características Hidrodinâmicas	52
7-6	Características de Transporte	53
<b>8</b>	<b>Metodologia de Solução</b>	<b>54</b>
8-1	Adimensionalização	55
8-2	Discretização	60
8-3	Montagem do Sistema	67
<b>9</b>	<b>Validação do Processo Numérico</b>	<b>71</b>
9-1	Resultados a serem obtidos	71
9-2	Validação Numérica	73
9-3	Análise de Estabilidade	76
9-4	Independência de Malha	80
9-5	Validação Experimental	80
<b>10</b>	<b>Resultados</b>	<b>87</b>
10-1	Influência das condutividades térmicas	87
10-2	Aplicação a secagem de milho	92
<b>11</b>	<b>Conclusões</b>	<b>99</b>
<b>12</b>	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>102</b>



## APÊNDICES

A	Modelo Capilar para a Velocidade	105
B	Camada Limite Hidrodinâmica	109
C	Modelo Capilar para o Fluxo de Calor	112
D	Eliminação da Difusão nos Problemas de Transporte	115
E	Relações Termodinâmicas	119
F	Valores utilizados na validação experimental	121
G	Aplicação do formalismo no contorno	124
	Índice Remissivo	127

---

NOTAÇÃO

---

$A$	coeficiente de Forschheimer [ $m^{-1}$ ], eq. (7-15)
$A_F$	coeficiente de Fand, eq. (7-14)
$B$	parâmetro adimensional de pressão, eq. (8-2)
$B_F$	coeficiente de Fand, eq. (7-15)
$C$	coeficiente da equação do movimento, eq. (8-4)
$c_p$	calor específico do fluido a pressão constante [ $J/(kg K)$ ]
$d$	diâmetro da esfera [m]
$D_{AB}$	coeficiente de difusão molecular [ $m^2/s$ ]
$F$	derivada de $\theta_s$ , eq. (8-28)
$h$	coeficiente de transferência de calor, eq. (9-3)
$h_{fg}$	calor latente de vaporização a temperatura $T_s$ [ $J/kg$ ], eq. (E-2)
$H$	metade da distância entre as placas [m], fig. 3-3
$Ja$	número de Jakob, eq. (8-32)
$k$	condutividade térmica [ $W/(m K)$ ]
$k_R$	relação entre condutividades do fluido e do sólido, eq. (8-33)
$K$	permeabilidade [ $m^2$ ], eq. (7-14)
$Le$	número de Lewis = $Sc/Pr$
$M$	conteúdo de umidade [kg de água/kg de mat.], seção 10-2
$Nu$	número de Nusselt, seção 9-1
$Nu_d$	Nusselt local, eq. (6-2)
$p$	derivada de $\theta_f$ , eq. (8-16)
$P$	pressão [ $N/m^2$ ]
$Pe$	número de Peclet = $Re Pr$
$Pr$	número de Prandtl = $\nu_f/\alpha_f$
$q$	fluxo de calor [ $W/m^2$ ]
$Re_d$	Reynolds global, referente ao escoamento, eq. (7-16)
$Re_p$	Reynolds local, eqs. (6-3) e (8-9)
$Sc$	número de Schmidt = $\nu_f/D_{AB}$
$Sh_d$	número de Sherwood local, eq. (6-4)
$T$	temperatura [K]
$u$	componente horizontal da velocidade [m/s]

$U$	componente horizontal adimensional da velocidade, eq. (8-2)
$V$	volume-amostra [ $m^3$ ], cap. 2
$V_f$	volume de fluido contido no volume-amostra
$V_s$	volume de sólido contido no volume-amostra
$w$	fração mássica de soluto, eq. (4-20)
$x$	coordenada axial (ao longo do duto)
$y$	coordenada transversal ao duto

### *Símbolos gregos*

$\alpha$	difusividade térmica [ $m^2/s$ ]
$\beta$	relação área de troca/volume para a matriz sólida, eq. (6-6)
$\epsilon$	porosidade, eq. (2-1)
$\phi$	auxiliar na condição de contorno, eqs. (8-10)
$\phi$	umidade relativa, seção 10-2
$\gamma$	coeficiente de dispersão, eqs. (4-8), (4-26) e (7-21)
$\lambda$	parâmetro de ajuste da curva de porosidade, eq. (7-3)
$\mu$	viscosidade dinâmica [ $Ns/m^2$ ]
$\nu$	viscosidade cinemática [ $m^2/s$ ]
$\theta$	temperatura adimensional, eqs. (8-11)
$\rho$	massa específica [ $kg/m^3$ ]
$\mathcal{T}$	desvio na taxa de difusão, eqs. (4-5), (4-23) e (5-5)
$\tau$	tortuosidade, eqs. (4-12), (7-4) e (7-9)
$\Psi$	grandeza qualquer no interior do meio poroso, cap. 2

### *Subscritos e Superscritos*

$A$	espécie química transportada
$d$	relativo ao diâmetro das esferas
$e$	grandeza "equivalente"
$E$	válido para a entrada do duto
$f$	definido para o domínio fluido
$i$	índice de um ponto computacional em $x$ ("estação")
$j$	índice de um ponto da malha computacional em $y$
$P$	relativo à partícula
$s$	definido para o domínio sólido
$w$	relativo às paredes do canal
*	grandeza adimensional
$\infty$	propriedade típica no interior do meio poroso

---

## 1 INTRODUÇÃO

---

Escoamentos convectivos em meios porosos são encontrados em várias aplicações tecnológicas. Algumas destas aplicações envolvem sistemas geotérmicos, uso de leitos compactados na indústria química, armazenamento e secagem de grãos, isolamentos térmicos e tubos de calor. Não há, até o momento, uma teoria completa para a sua análise, de modo que diversos aspectos fundamentais associados a esses escoamentos ainda permanecem obscuros.

Ao escoar no interior de um meio poroso, uma partícula de fluido percorre um verdadeiro labirinto de canais, de modo que equações locais, ou seja, equações que permitam acompanhar individualmente cada uma destas partículas, não são ainda possíveis de serem resolvidas (equações da Mecânica do Contínuo a um nível de poro). Como um modo de extrair informações, então, resolvem-se equações que permitem analisar "volumes" dentro do meio. A cada ponto matematicamente definido é associado um volume e de cada volume sabe-se apenas a média do que está se passando no seu interior.

A dinâmica do escoamento de fluidos em um meio poroso tem suas raízes no século passado, com a engenharia de fontes públicas. Darcy [02], observando o escoamento de um fluido através de uma coluna de material poroso, descobriu que a vazão média de fluido é diretamente proporcional

ao gradiente de pressão estabelecido ao longo da coluna. Experimentos subseqüentes mostraram ainda que a vazão média era inversamente proporcional à viscosidade do fluido utilizado. Este resultado, conhecido como a "lei de Darcy", ocupou por muito tempo o lugar da equação da conservação da quantidade de movimento neste ramo da Mecânica dos Fluidos.

No início deste século, Forschheimer [03], com o intuito de levar em consideração o que é conhecido como "inércia do fluido", introduziu heurísticamente um termo que envolvia o quadrado da velocidade. Segundo dados experimentais, tal termo começava a ficar importante quando se aumentava a vazão.

Com a lei de Darcy, modificada por Forschheimer, já era possível resolver uma grande variedade de problemas. Com as modernas aplicações de meio poroso (tais como reatores catalíticos na indústria química), no entanto, surgiu a necessidade de se levar em consideração a presença de fronteiras sólidas. A fim de incluir tal condição de contorno, Brinkman [04], novamente de maneira heurística, adicionou um termo viscoso aos já existentes.

Os termos acrescentados representavam o que se convencionou chamar "efeitos não-darcinianos". O modelo "não-darciniano" resultante, apesar de bastante completo, carecia ainda de um formalismo que o legitimasse.

A base fundamental para este formalismo vem dos trabalhos pioneiros de Slattery e Whitaker ([06], pág.194 e [05]). Eles sugerem que, entre as diversas abordagens possíveis, o desenvolvimento de equações médias, a partir das equações da Mecânica do Contínuo, seja o melhor modo de atacar o problema. Estabelecem, então, de maneira tão rigorosa quanto possível, os fundamentos para a obtenção de tais equações. O teorema desenvolvido por Slattery para relacionar médias de gradientes e gradientes de médias, por exemplo, é o que possibilita a obtenção de "equações para variáveis médias" a partir de "médias das equações da Mecânica do Contínuo". Whitaker [05] aprofunda esta discussão e estabelece hipóteses e restrições que devem ser impostas para que o processo de integração sobre um "volume-amostra" de meio poroso produza termos do tipo encontrado na lei de Darcy.

Uma das primeiras tentativas teóricas de levar em conta os efeitos não-darcinianos em problemas práticos é o trabalho de Vafai e Tien [07]. A partir dos trabalhos fundamentais de Slattery e Whitaker, e com a ajuda de algumas medidas experimentais, Vafai e Tien deduziram os termos que tinham sido introduzidos de maneira heurística. Este trabalho já representou um

grande progresso em relação àqueles onde as equações foram obtidas de maneira quase intuitiva, embora os autores tenham empregado simplificações bastante restritivas. Do ponto de vista hidrodinâmico, foi considerado que, em toda a extensão do meio, a porosidade era constante. Sabe-se, entretanto, que, para meios porosos não-consolidados, próximo a fronteiras sólidas há muito mais fluido por unidade de volume do que longe destas e que tal fato tem uma influência decisiva sobre o campo de velocidades e, como conseqüência, sobre a transferência de calor. Na sua análise térmica, Vafai e Tien desconsideraram quaisquer trocas de calor que pudessem ter lugar entre a fase sólida e a fase fluida (foi considerado "equilíbrio térmico local"), o que, segundo os autores, não seria válido apenas para matrizes sólidas altamente condutoras ou em problemas com altas vazões.

Poulikakos e Renken, em um trabalho posterior [08], eliminam a simplificação relativa aos poros para um leito compactado de esferas e em seus resultados aparece um aumento da velocidade média de fluido próximo à parede. Nesta região há uma porosidade maior, o que proporciona uma maior "folga" para o fluido que ali escoar. Diz-se, então, que o perfil de velocidades determinado analiticamente está sujeito ao chamado "efeito canal".

Ainda considerando equilíbrio térmico local, Hunt e Tien [09] incluem mais um efeito observado experimentalmente, comumente designado na literatura por dispersão. Este efeito é relativo à "mistura" que ocorre no interior dos poros devido às inúmeras curvas a que o fluido é submetido.

Sebben [12] apresenta uma revisão bibliográfica mais detalhada sobre os chamados efeitos não-darcinianos.

Aparentemente, a primeira tentativa de resolver um problema de transferência de calor e massa acoplados em meio poroso, sem considerar a hipótese de equilíbrio térmico local, é apresentada por Sebben [12]. A partir de relações termodinâmicas, é sugerida uma relação entre as temperaturas de sólido e fluido, a fim de considerar transferência de massa entre as duas fases.

Durante a etapa de redação final do presente trabalho, Sozen e Vafai [19] publicaram uma análise em que ambas as fases (sólido e fluido) são consideradas independentemente. Isto lhes permitiu deduzir equações governantes para as variáveis médias com poucas hipóteses simplificativas, apresentando, inclusive, limites para a aplicação da hipótese de equilíbrio térmico local. Neste trabalho, Sozen e Vafai se limitam a apresentar as equações do problema em sua forma final e o enfoque

principal do artigo está nos aspectos numéricos associados à solução das mesmas. Não ficam claros os critérios adotados pelos autores na elaboração dos detalhes intermediários.

Em contraste a estas abordagens, há ainda o modo como este problema é enfrentado na área de Engenharia Química. A maior parte dos estudos de reatores químicos ([11], pág. 162) assume um perfil de velocidades plano (escoamento de Darcy), ignorando os efeitos discutidos anteriormente. Além de não serem considerados os efeitos viscosos, de inércia e o "efeito canal", são feitas fortes simplificações no problema térmico, onde é assumida, inclusive, a hipótese de equilíbrio térmico local. A troca de calor das paredes de um reator, mantidas a temperatura constante, com o meio poroso no seu interior é especificada através de uma condição de contorno tipo Robin, quando o natural seria estabelecer simplesmente que na parede a temperatura do fluido é prescrita e igual à temperatura da parede. Note-se que desta forma a temperatura do fluido na parede fica diferente da temperatura prescrita. A esta diferença está associado um coeficiente de troca de calor " $h_s$ " (o mesmo da condição de Robin), determinado experimentalmente. Usando esta pseudo-condição de contorno, o campo de temperaturas apresenta bons resultados quando comparado com perfis medidos ([09], pág. 380). Este tipo de análise, além de carecer de consistência física, tem o inconveniente de exigir extensivas investigações experimentais e de ser válido somente após certos comprimentos de entrada ([09], pág. 380).

O problema da transferência de calor em meios porosos exige que se chegue, pelo menos, a uma "solução de engenharia" do tipo daquela discutida anteriormente e adotada pelos engenheiros químicos, pois soluções mais elaboradas não satisfazem aos requisitos de projeto. Os autores que são mais rigorosos aparentemente não estão incorporando em seus modelos todas as peculiaridades do fenômeno. Como conseqüência, não há atualmente um consenso entre as diversas escolas sobre o formalismo a ser empregado.

A presente dissertação consiste de um estudo das equações que resultam da aplicação do processo de média descrito em [06] a fenômenos de transporte em meio poroso. Serão estudadas as equações associadas a quantidade de movimento, energia térmica no fluido, energia térmica no sólido e concentração de uma espécie química. Além da inclusão de transporte de massa, a elaboração é feita com bastante rigor, colocando bem claras as hipóteses feitas e discutindo seu significado. Para

possibilitar levar a dedução a um nível de aplicação a problemas práticos, são utilizados alguns dados experimentais. O modelo obtido ao final é testado para o caso particular de escoamento em leito de esferas compactadas e, após uma comprovação com resultados experimentais, são tiradas algumas conclusões a partir de simulações numéricas.

No segundo capítulo é apresentada uma caracterização do modelo, seus princípios fundamentais e diversas hipóteses básicas relativas às deduções das equações diferenciais.

Seguem-se, então, quatro capítulos com as deduções propriamente ditas das equações governantes para as variáveis médias. Ao final, a formulação está pronta para ser aplicada a um caso particular.

O meio poroso constituído de esferas compactadas, caso particular adotado para simulação numérica, apresenta diversas peculiaridades. Para melhor compreensão de sua modelagem, são discutidas no capítulo 7 as suas características.

Após uma descrição da metodologia de solução no capítulo 8, é apresentada no capítulo 9 a respectiva validação, baseada em casos particulares e resultados experimentais.

Como resultados da aplicação do processo numérico, no capítulo 10 são resolvidos dois problemas. Com o primeiro, é discutida a influência da relação entre as condutividades térmicas do fluido e da matriz porosa no processo de transferência de calor em meio poroso. Numa segunda etapa, a formulação completa é aplicada a um problema de secagem de milho.

No último capítulo é apresentado um resumo das conclusões gerais do trabalho.



---

## 2 CARACTERIZAÇÃO DO MODELO

---

### 2-1 PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS

Materiais porosos podem ser definidos como materiais constituídos de partículas sólidas (matriz sólida) e espaços vazios, os quais podem estar preenchidos com um ou mais tipos de fluido em uma ou mais fases. Se tais espaços vazios estiverem preenchidos apenas com uma fase ou um tipo de fluido, diz-se, então, que o meio poroso está saturado. Todo o desenvolvimento feito a seguir é válido para meios porosos saturados.

Se fosse possível fornecer todas as condições de contorno para todas as fronteiras que separam a matriz sólida da fase fluida no interior de um meio poroso, as equações da Mecânica do Contínuo poderiam ser aplicadas sem restrição. Resolvendo um problema de escoamento de fluidos em canais (poros) juntamente com um problema de condução no sólido, seria possível saber exatamente o que ocorre em cada ponto do meio poroso real (seria possível determinar valores locais).

A fig.2-1 dá uma idéia do intrincado sistema de fronteiras que separa a fase fluida da fase sólida em um meio poroso. Além de possuir dimensões e orientações muito variáveis (na maioria dos casos aleatórias), a rede de poros encontrada nos meios porosos (minúsculos "canais" por onde o fluido escoia) é, em casos práticos, imprevisível. A menos que se utilizasse

partículas regulares em arranjos perfeitamente ordenados, não seria possível, uma vez desfeita a rede de poros, reconstituí-la novamente.

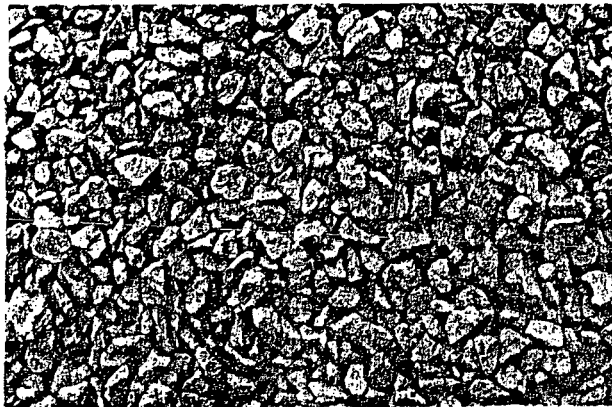


Figura 2-1 Meio poroso típico

Já que valores locais são tão complicados de obter, é importante, de alguma forma, "dissimular" a aleatoriedade do meio. Neste sentido, uma grandeza natural é a média volumétrica de Slattery e Whitaker ([06], pág. 194 e [05]). Sabe-se, então, de cada ponto, apenas a média volumétrica do "volume-amostra" a ele associado.

Ao ser efetuada esta média, alguma informação será perdida, a qual terá que ser recuperada com o auxílio de grandezas experimentais incorporadas ao modelo.

#### **Volume-amostra**

"Volume-amostra" é a designação que será dada ao volume sobre o qual será feita a integração para o cálculo da média volumétrica (fig.2-2). O resultado desta integração estará associado ao centróide do volume-amostra "V", ou, de maneira equivalente, após o processo de média volumétrica, cada ponto "P" do domínio será o centróide de algum volume-amostra V.

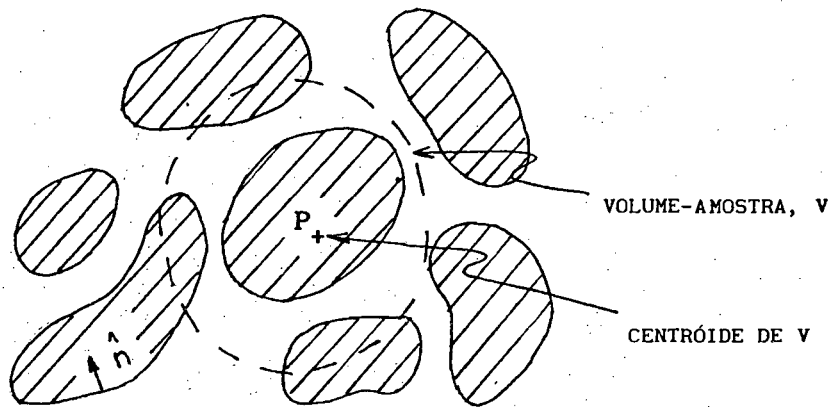


Figura 2-2 Volume-amostra

A interpretação do "volume-amostra"  $V$  é puramente conceitual. Apenas não se pode imaginar  $V$  como um volume pequeno demais, menor do que uma dimensão representativa dos poros, pois com esta ordem de grandeza uma pequena variação na sua dimensão representaria uma grande variação da média a ele associada. Por outro lado,  $V$  não pode ser grande demais, pois encobriria variações espaciais significativas das variáveis médias. O volume  $V$  deve, portanto, ser também menor do que alguma dimensão "macroscópica" característica do problema. Pode-se ver na fig.2-3 uma variação possível de uma média volumétrica de alguma grandeza  $\Psi$  em  $V$  e a faixa teórica em que ele se encontraria neste caso.

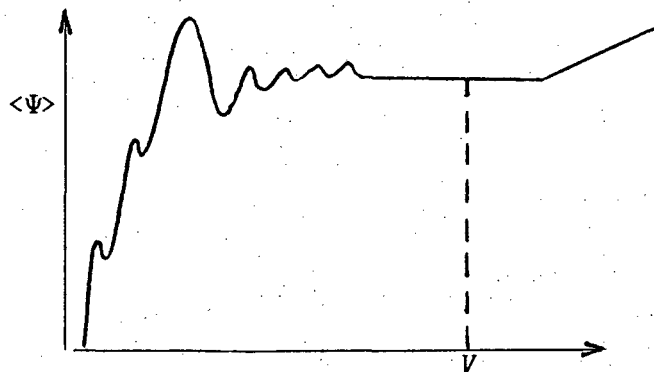


Figura 2-3 Tamanho do volume-amostra  $V$

Outra restrição é que, para todo o domínio de cálculo,  $V$  deverá ser constante, ou seja, ele não poderá sofrer deformação ou rotação durante o processo de cálculo. Esta restrição será fundamental na aplicação da técnica de média às equações.

### Porosidade

A porosidade é uma grandeza definida como a relação entre "volume de vazios" e "volume total" para uma amostra qualquer de meio poroso. Assim, tomando uma amostra de volume "V" que contenha um volume de fluido " $V_f$ ", pode-se calcular a sua porosidade como

$$\epsilon = \frac{V_f}{V} \quad (2-1)$$

onde " $\epsilon$ " representa, então, a porosidade média da quantidade de meio poroso que foi tomada como amostra.

Num problema de meio poroso vai haver um valor de  $\epsilon$  associado a cada ponto do domínio do problema. De acordo com o que já foi exposto,  $\epsilon$  representa o valor de porosidade que seria encontrado se fosse analisada uma amostra constituída com o material poroso de um volume-amostra definido em torno do ponto de interesse. Conforme ilustra a fig.2-2, sendo P o ponto de interesse, a porosidade do ponto P seria a relação entre volume de fluido e volume total que seria encontrada em uma amostra constituída exatamente do material limitado por "V".

A porosidade pode ser obtida experimentalmente e é determinada para todo o domínio.

### Média volumétrica local

Aplicando, então, um processo de média volumétrica às equações locais, chega-se às equações diferenciais para as variáveis médias, as quais estarão associadas ao centróide de cada "volume-amostra".

Como neste modelo o meio poroso está saturado, existem apenas duas fases, fluido e sólido (denotadas pelos índices f e s, respectivamente). Desta forma é possível afirmar que

$$V = V_f + V_s \quad (2-2)$$

onde  $V_f$  e  $V_s$  são, respectivamente, os volumes de fluido e de sólido contidos no volume de integração.

Pode-se agora definir a *média volumétrica global* de alguma grandeza  $\Psi$

na fase "f" (fluido) como

$$\langle \Psi_f \rangle = \frac{1}{V} \int_V \Psi_f dV \quad (2-3)$$

$\Psi_f$  é o valor de  $\Psi$  na fase "f" e é definido como zero na fase "s". Assim,

$$\langle \Psi_f \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_f} \Psi_f dV \quad (2-4)$$

Como pode ser visto em (2-3),  $\langle \Psi_f \rangle$  é definido para todo o domínio e será diferente de zero também para pontos que, antes do processo de média, se encontrem exatamente na fase "s" (sólido).

De maneira análoga,

$$\langle \Psi_s \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_s} \Psi_s dV \quad (2-5)$$

Uma outra média importante a ser considerada é a *média volumétrica intrínseca*,

$$\langle \Psi_f \rangle^f = \frac{1}{V_f} \int_{V_f} \Psi_f dV \quad (2-6)$$

Da mesma forma, uma vez que o ponto associado ao volume-amostra não precisa estar na fase "f", a média volumétrica intrínseca também é definida para todo o domínio.

Examinando as definições, pode-se concluir que as duas médias estão relacionadas através da porosidade,

$$\varepsilon \langle \Psi_f \rangle^f = \langle \Psi_f \rangle \quad (2-7)$$

Pode-se mostrar que para o volume-amostra vale

$$\langle \langle \Psi_f \rangle \rangle = \langle \Psi_f \rangle \quad (2-8)$$

ainda,

$$\langle \langle \Psi_f \rangle \rangle^f = \langle \Psi_f \rangle^f \quad (2-9)$$

e, do mesmo modo, para a média intrínseca,

$$\langle \langle \Psi_f \rangle^f \rangle = \langle \langle \Psi_f \rangle^f \rangle^f = \langle \Psi_f \rangle^f \quad (2-10)$$

Estas relações serão úteis mais adiante na manipulação das equações médias.

### Teorema fundamental

Após a integração das equações, será necessário utilizar, para explicitar o resultado em termos das variáveis médias, um teorema que relacione média de gradiente com gradiente de média. Tal teorema (e sua demonstração) pode ser encontrado em [06], pág.196 e estabelece que

$$\langle \nabla \Psi_f \rangle = \nabla \langle \Psi_f \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} \Psi_f \hat{n} dA \quad (2-11)$$

onde  $\hat{n}$  é a normal unitária, dirigida da fase fluida para a fase sólida (ver fig.2-2), e  $A_{sf}$  é a área da interface sólido-fluido dentro de  $V$ .

### 2-2 SIMPLIFICAÇÕES

As seguintes hipóteses simplificativas foram adotadas no desenvolvimento da presente dissertação:

- (i) propriedades termo-físicas constantes (com exceção do calor latente de vaporização);
- (ii) regime permanente;
- (iii) fluido newtoniano;
- (iv) ausência de dissipação viscosa;
- (v) estrutura rígida da matriz porosa;
- (vi) escoamento bidimensional.

---

### 3 PROBLEMA HIDRODINÂMICO

---

Neste capítulo serão apresentados os detalhes matemáticos da dedução das equações médias para o problema hidrodinâmico. Parte-se da equação local e chega-se à equação governante para as variáveis médias.

A dedução é feita de forma genérica e ao final as equações são particularizadas para coordenadas cartesianas e para um meio poroso constituído por esferas compactadas.

#### 3-1 CONSERVAÇÃO DA MASSA

A equação local, em que o vetor velocidade e o vetor posição são medidos relativamente a um referencial inercial rigidamente ligado ao meio poroso, é

$$\nabla \cdot (\rho_f \vec{v}_f) = 0 \quad (2-1)$$

Executando a média,

$$\frac{1}{V} \int_{V_f} \nabla \cdot (\rho_f \vec{v}_f) dV = 0$$

Por (2-11),

$$\nabla \cdot \langle \vec{v}_f \rangle = 0 \quad (3-2)$$

pois o escoamento é isocórico e  $A_{sf}$  é impermeável. Em outras palavras, basta que a equação (3-2) seja satisfeita para que a conservação da massa a nível de poro também o seja.

### 3-2 CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Partindo da equação local para o fluido

$$\nabla \cdot (\rho_f \vec{v}_f \vec{v}_f) = -\nabla P_f + \mu_f \nabla^2 \vec{v}_f \quad (3-3)$$

e aplicando a média, resulta

$$\rho_f \langle \nabla \cdot (\vec{v}_f \vec{v}_f) \rangle = -\langle \nabla P_f \rangle + \mu_f \langle \nabla^2 \vec{v}_f \rangle \quad (3-4)$$

Mas,

$$\langle \nabla \cdot (\vec{v}_f \vec{v}_f) \rangle = \nabla \cdot \langle \vec{v}_f \vec{v}_f \rangle \quad (3-5)$$

pois nas interfaces  $\vec{v}_f = 0$ .

Para seguir adiante é necessário, de alguma maneira, relacionar média de produto com produto de média de valores locais. Em todas as equações a serem deduzidas aparecerá uma expressão do tipo  $\langle \vec{v}_f \Psi_f \rangle^f$ . A fim de convertê-la em um produto de médias, Gray [10] sugere que se utilize uma decomposição do tipo

$$\vec{v}_f = \langle \vec{v}_f \rangle^f + \tilde{\vec{v}}_f \quad \text{na fase fluida,} \quad (3-6)$$

$$\vec{v}_f = 0 \quad \text{na fase sólida,} \quad (3-7)$$

$$\Psi_f = \langle \Psi_f \rangle^f + \tilde{\Psi}_f \quad \text{na fase fluida,} \quad (3-8)$$

$$\Psi_f = 0 \quad \text{na fase sólida.} \quad (3-9)$$



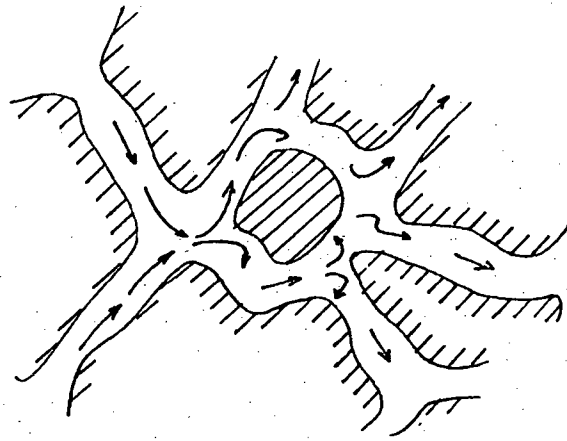


Figura 3-1 Escoamento local

Localmente, um escoamento no interior de um meio poroso apresenta um padrão confuso. A geometria é tão complexa e a trajetória das partículas de fluido tão irregular, que é razoável supor que se formem pequenas regiões de recirculação como consequência do escoamento dentro dos poros, como sugere a fig.3-1.

Fisicamente, a decomposição de Gray significa assumir que o valor de alguma grandeza  $\Psi$  pode ser visto simplesmente como a superposição de uma flutuação à evolução média de  $\Psi$ . A fig.3-2 ilustra esta interpretação para o caso da velocidade. O efeito local das regiões de recirculação fica, então, separado de sua movimentação média.

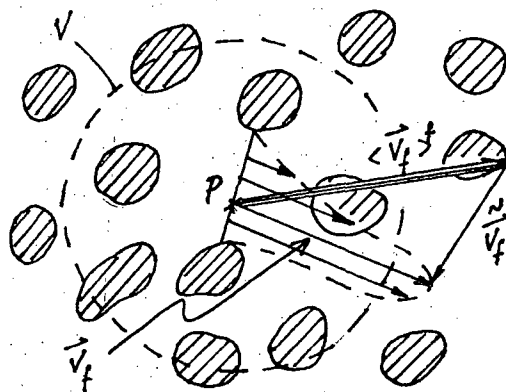


Figura 3-2 Representação esquemática de velocidades em P

Na decomposição anterior foi utilizada a média intrínseca. Parece natural considerar apenas os poros numa média que deve diferir do valor local apenas por uma flutuação. Se fosse utilizada a média global, o resultado estaria diminuído e não representaria a ordem de grandeza real

da velocidade, pois a integral das velocidades seria dividida também pelo sólido, onde já se sabe por hipótese que a velocidade é zero.

Considerando as equações (3-6) a (3-9), pode-se escrever, de maneira genérica,

$$\langle \vec{v}_f \Psi_f \rangle^f = \langle \left[ \langle \vec{v}_f \rangle^f + \tilde{\vec{v}}_f \right] \left[ \langle \Psi_f \rangle^f + \tilde{\Psi}_f \right] \rangle^f \quad (3-10)$$

Lembrando que para cada volume-amostra a média funciona como constante e levando em consideração a equação (2-10), tem-se, a partir da equação (3-10),

$$\langle \vec{v}_f \Psi_f \rangle^f = \langle \vec{v}_f \rangle^f \langle \Psi_f \rangle^f + \langle \tilde{\vec{v}}_f \tilde{\Psi}_f \rangle^f \quad (3-11)$$

em que o último termo, por envolver apenas "flutuações" das grandezas, está relacionado a uma "mistura" do fluido nos poros. Tal mistura é a chamada dispersão da variável  $\Psi_f$ .

De posse deste resultado, pode-se voltar à equação (3-4) e escrever

$$\rho_f \nabla \cdot \left[ \varepsilon \langle \vec{v}_f \rangle^f \langle \vec{v}_f \rangle^f \right] = -\langle \nabla P_f \rangle + \mu_f \langle \nabla^2 \vec{v}_f \rangle + p_f \nabla \cdot \langle \tilde{\vec{v}}_f \tilde{\vec{v}}_f \rangle \quad (3-12)$$

onde há, ainda, os termos difusivo e o de pressão, segundo e primeiro termos do lado direito da equação (3-12), respectivamente, com possibilidades de serem "trabalhados".

Aplicando (2-11), o Laplaciano da equação (3-12) fica

$$\langle \nabla \cdot \nabla \vec{v}_f \rangle = \nabla \cdot \left[ \langle \nabla \vec{v}_f \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{sf}} \vec{v}_f \hat{n} dA \right] + \frac{1}{V} \int_{A_{sf}} \nabla \vec{v}_f \cdot \hat{n} dA \quad (3-13)$$

onde o segundo termo entre colchetes é zero porque a velocidade é zero em  $A_{sf}$ .

Gray [10], trabalhando com a decomposição por ele sugerida, equações (3-6) a (3-9), obtém a seguinte variação do teorema de Slattery ([06],

pág. 196),

$$\langle \nabla \Psi_f \rangle = \varepsilon \nabla \langle \Psi_f \rangle^f + \frac{1}{V} \int_{A_{sf}} \tilde{\Psi}_f \hat{n} dA \quad (3-14)$$

em que agora o primeiro termo do lado direito contém a média volumétrica intrínseca e não a global. A média intrínseca de uma variável qualquer  $\Psi$ , por ser efetuada apenas no domínio de interesse, chega mais próximo à ordem de grandeza real de  $\Psi$  e é, portanto, mais consistente fisicamente.

Aplicando (3-14) ao termo de pressão da equação (3-12), resulta

$$\langle \nabla P_f \rangle = \varepsilon \nabla \langle P_f \rangle^f + \frac{1}{V} \int_{A_{sf}} \tilde{P}_f \hat{n} dA \quad (3-15)$$

Utilizando agora as equações (3-13) e (3-15), a equação (3-12) pode ser reescrita como

$$\frac{\rho_f}{\varepsilon} \nabla \cdot \left[ \varepsilon \langle \vec{v}_f \rangle^f \langle \vec{v}_f \rangle^f \right] = -\nabla \langle P_f \rangle^f + \frac{\mu_f}{\varepsilon} \nabla^2 \langle \vec{v}_f \rangle + \vec{\Phi} \quad (3-16)$$

onde

$$\vec{\Phi} = \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{1}{V} \int_{A_{sf}} \tilde{P}_f \hat{n} dA - \rho_f \nabla \cdot \langle \vec{v}_f \rangle^f \langle \vec{v}_f \rangle^f + \frac{\mu_f}{V} \int_{A_{sf}} \nabla \vec{v}_f \cdot \hat{n} dA \right]$$

O termo (\*) corresponde ao que Brinkman introduziu heurísticamente, a fim de considerar a presença de fronteiras sólidas. Conforme mostrado por Tien [07], este termo viscoso perde sua importância e pode ser desconsiderado para escoamento longe de tais fronteiras.

O termo do lado esquerdo da equação (3-16) representa a aceleração do fluido no meio e em geral deixa de influir muito rapidamente para escoamentos em meios porosos [07].

Para uma interpretação do significado de  $\vec{\Phi}$ , serão utilizados os resultados experimentais obtidos por Ergun em um trabalho com leitos compactados de esferas. Em escoamentos afastados de paredes sólidas e ignorando os efeitos de aceleração, Ergun [13], baseado em observações experimentais, obteve a correlação

$$\nabla P = -150 \frac{(1-\varepsilon)^2 \mu_f U_m}{\varepsilon^3 d^2} - 1,75 \frac{(1-\varepsilon) \rho_f U_m^2}{\varepsilon^3 d} \quad (3-17)$$

onde " $U_m$ " é a velocidade associada à vazão do fluido no experimento (considerando toda a área do duto) e " $d$ " o diâmetro da esfera utilizada. O primeiro e o segundo termos do lado direito da equação (3-17) são os termos de Darcy e de Forschheimer, respectivamente. É interessante notar que a forma da parte relativa à Lei de Darcy na função de correlação pode ser prevista teoricamente, tomando os canais do meio poroso por capilares, conforme descrito no apêndice A.

De (3-17) pode-se obter a expressão genérica

$$\nabla P_e = - \frac{\mu_f \vec{v}_e}{K} - \rho_f A |\vec{v}_e| \vec{v}_e \quad (3-18)$$

onde o índice "e" se refere a valores experimentais. Tudo o que é específico para esferas foi embutido nos coeficientes "K" e "A".

Por outro lado, ignorando o termo de Brinkman e o termo de aceleração do fluido, pode-se obter da equação (3-16) uma expressão análoga,

$$\nabla \langle P_f \rangle^f = \vec{\Phi} \quad (3-19)$$

A semelhança entre as equações (3-18) e (3-19) sugere, então, que seja possível obter uma correlação empírica para o termo  $\vec{\Phi}$ , desconhecido em (3-16). No entanto, para que a equação (3-18) possa ser utilizada para "fechar" o modelo, falta ainda relacionar as variáveis experimentais ( $\vec{v}_e$  e  $P_e$ ) com as teóricas ( $\langle P_f \rangle^f$  e  $\langle \vec{v}_f \rangle^f$ ).

No caso da pressão a relação é direta.  $\langle P_f \rangle^f$  é a variável teórica mais próxima do que é medido experimentalmente (o que explica a utilização de (3-14) na obtenção de (3-15)). Além disto, uma vez que a equação (3-16) já está ligada a um sistema de coordenadas global, os gradientes também são equivalentes.

No caso da velocidade, uma relação precisa ser montada. A idéia básica vem do fato de " $U_m$ " estar associada à vazão de fluido e à área total do duto. Em vista disto, um meio natural de descobrir tal relação consiste em determinar como um cálculo de vazão poderia ser feito no contexto das variáveis utilizadas neste trabalho.

De acordo com a fig. 3-3, sendo  $v_{f1}$  a componente na direção  $\hat{e}_1$  da velocidade local  $\vec{v}_f$ , a vazão  $\dot{m}$  (constante para cada experimento) pode ser calculada por

$$\dot{m} = \int_0^{2H} \rho_f v_{f1} dy \quad (3-20)$$

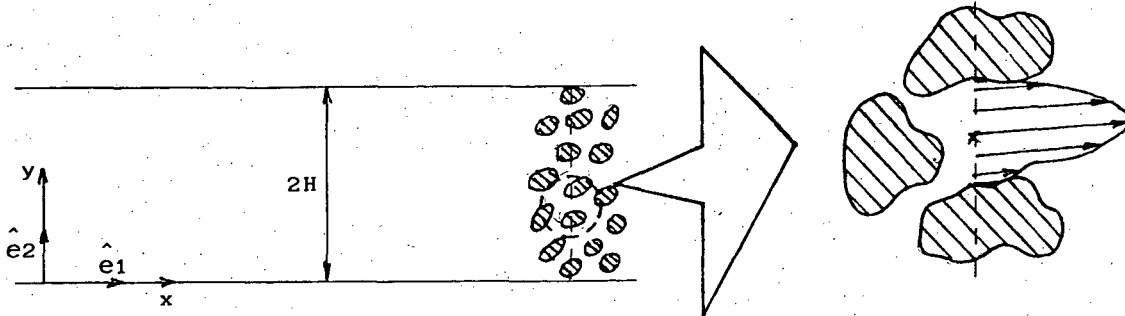


Figura 3-3 Velocidades locais em uma seção transversal de meio poroso

Nada se altera se, sobre ambos os lados da equação(3-20), for efetuada uma integração volumétrica sobre o volume-amostra,

$$\int_V \dot{m} dV = \int_V \int_0^{2H} \rho_f v_{f1} dy dV \quad (3-21)$$

Como  $\dot{m}$  e  $\rho_f$  são constantes, saem para fora da integral. Além disto, sendo V, por definição, constante, a ordem das integrais pode ser mudada e a expressão (3-21) pode ser escrita

$$\dot{m} = \rho_f \int_0^{2H} \left[ \frac{1}{V} \int_V v_{f1} dV \right] dy \quad (3-22)$$

Por definição,

$$v_{f1} = \vec{v}_f \cdot \hat{e}_1 \quad (3-23)$$

Substituindo (3-23) em (3-22) e lembrando que  $\hat{e}_1$  é constante para qualquer volume que se tome,

$$\dot{m} = \rho_f \int_0^{2H} \left[ \frac{1}{V} \int_V \vec{v}_f dV \right] \cdot \hat{e}_1 dy \quad (3-24)$$

Uma vez que  $\vec{v}_f$  é zero fora de  $V_f$ , a expressão entre colchetes da equação (3-24) é a própria definição de média global. Considerando que, por hipótese, o regime está plenamente desenvolvido, a equação (3-24) pode ser escrita como

$$\dot{m} = \rho_f \int_0^{2H} |\langle \vec{v}_f \rangle| dy = \rho_f 2 H |\overline{\langle \vec{v}_f \rangle}| \quad (3-25)$$

Mas, longe de paredes  $|\langle \vec{v}_f \rangle|$  é constante e pode-se chegar a

$$|\langle \vec{v}_f \rangle| = \frac{\dot{m}}{\rho_f 2 H} \quad (3-26)$$

que é a própria definição de  $U_m$ . Disto se conclui que

$$\vec{v}_e = \langle \vec{v}_f \rangle \quad (3-27)$$

ou seja, uma velocidade obtida experimentalmente a partir da vazão é equivalente à média global longe de fronteiras sólidas.

Este resultado torna compatíveis as variáveis teóricas e experimentais e permite, finalmente, escrever a equação (3-16) como

$$\begin{aligned} \frac{\rho_f}{\varepsilon} \nabla \cdot [\langle \vec{v}_f \rangle \langle \vec{v}_f \rangle^f] &= -\nabla \langle P_f \rangle^f + \frac{\mu_f}{\varepsilon} \nabla^2 \langle \vec{v}_f \rangle + \\ &- \frac{\mu_f}{K} \langle \vec{v}_f \rangle - \rho_f A |\langle \vec{v}_f \rangle| \langle \vec{v}_f \rangle \end{aligned} \quad (3-28)$$

Conforme discutido no apêndice B, o termo de aceleração pode ser ignorado. Como conseqüência, a equação (3-28) assume a forma que é normalmente encontrada em problemas de meios porosos,

$$-\frac{\nabla \langle P_f \rangle^f}{\rho_f} + \frac{\nu_f}{\varepsilon} \nabla^2 \langle \vec{v}_f \rangle - \frac{\nu_f}{K} \langle \vec{v}_f \rangle - A |\langle \vec{v}_f \rangle| \langle \vec{v}_f \rangle = 0 \quad (*) \quad (3-29)$$

Apesar de terem sido utilizados experimentos com esferas, do modo como está, a equação (3-29) é geral. Para ser aplicada a outros tipos de meio poroso, basta que sejam fornecidas as expressões de  $\varepsilon$ ,  $K$  e  $A$  correspondentes.

Em (3-29), além dos termos de Darcy e Brinkman, aparece também o termo

associado à energia cinética do fluido, introduzido heurísticamente por Forschheimer. Este termo, (\*), comumente chamado "inércia" do fluido, é a parcela do gradiente de pressão não utilizada para vencer o "labirinto de poros".

É interessante notar que a equação (3-29) é semelhante a tantas outras que aparecem na literatura sob a denominação de "equação para escoamentos não-darcinianos". Exemplo é a equação obtida em [21]. Tais equações, no entanto, diferem entre si por detalhes que muitas vezes são desconsiderados mas que alteram fundamentalmente a essência dos mecanismos envolvidos. Vafai [21], por exemplo, ignora a existência da porosidade no termo de Brinkman. Considerando o rigor associado à obtenção da eq. (3-29), parece ser esta a forma mais adequada para caracterizar estes escoamentos. Acredita-se que a obtenção da equação (3-29), fundamentada no formalismo do processo de médias, seja uma das contribuições da presente dissertação.

#### Equação do movimento em coordenadas cartesianas

Já que um problema prático de escoamento entre placas paralelas será resolvido numericamente, é conveniente expressar a equação (3-29) em coordenadas cartesianas.

Utilizando a seguinte notação simplificada,

u para a componente "x" de  $\langle \vec{v}_f \rangle$ ,

v para a componente "y" de  $\langle \vec{v}_f \rangle$ , e

P para  $\langle P \rangle_f$ ,

a equação (3-29) fica, para o sistema de coordenadas mostrado na fig. 3-3 e para a direção x,

$$-\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\nu_f}{\epsilon} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\nu_f}{K} u - A u^2 = 0 \quad (3-30)$$

em que a difusão em x foi desprezada, pois perde sua importância muito rapidamente para escoamentos em canais, conforme apêndice B.

#### Condições de contorno

- A velocidade média é nula em paredes sólidas
- Condição de simetria no centro de canais.

O problema da condição de contorno é bastante complexo e uma discussão mais detalhada a este respeito é apresentada no apêndice G.

---

## 4 TRANSPORTE DE UM ESCALAR NO FLUIDO

---

Para o problema hidrodinâmico não foi necessário determinar um campo de velocidades médias no sólido, pois o resultado seria, por hipótese, nulo (matriz rígida). No problema da conservação da energia, no entanto, o sólido desempenha um papel importante e não há como conhecer de antemão sua contribuição.

Neste capítulo são deduzidas as equações médias para os problemas de transferência de calor no fluido e transporte de uma espécie química. Aproveitando a semelhança entre os problemas de energia e de transporte de massa no fluido, uma grande parte da dedução de suas equações governantes é feita em conjunto, de forma genérica.

### 4-1 EQUAÇÃO GERAL DE TRANSPORTE

A equação local para a transferência de calor no interior dos poros guarda com a de transporte de uma espécie química uma semelhança formal que permite uma dedução comum. Certamente também seria possível incluir aqui a equação do movimento. Ela exigiria, no entanto, a interpretação de termos muito complexos envolvendo o "tensor tensão", o que tornaria inviável a



modelagem dos termos obscuros resultantes das integrações.

A equação geral de transporte para alguma propriedade  $\Psi$  nos interstícios de uma matriz porosa é uma equação clássica da Mecânica do Contínuo,

$$\rho_f \nabla \cdot (\vec{v}_f \Psi_f) = - \nabla \cdot \vec{\Gamma}_f \quad (4-1)$$

onde  $\vec{\Gamma}_f$  é um fluxo relativo à propriedade  $\Psi_f$ .

Tomando a média volumétrica da equação anterior resulta

$$\rho_f \langle \nabla \cdot (\vec{v}_f \Psi_f) \rangle = - \langle \nabla \cdot \vec{\Gamma}_f \rangle$$

Aplicando o teorema da média, equação (2-11), e lembrando que, em  $A_{sf}$ ,  $\vec{v}_f = 0$ ,

$$\rho_f \nabla \cdot \langle \vec{v}_f \Psi_f \rangle = - \nabla \cdot \langle \vec{\Gamma}_f \rangle - \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} \vec{\Gamma}_f \cdot \hat{n} \, dA$$

Aplicando a igualdade (3-11), chega-se a

$$\begin{aligned} \rho_f c_f \left[ \nabla \cdot (\langle \vec{v}_f \rangle \langle \Psi_f \rangle^f) + \nabla \cdot \langle \tilde{\Psi}_f \tilde{\vec{v}}_f \rangle \right] = \\ = - \nabla \cdot \langle \vec{\Gamma}_f \rangle - \frac{1}{V} \int_{A_{sf}} \vec{\Gamma}_f \cdot \hat{n} \, dA \end{aligned} \quad (4-2)$$

O desenvolvimento subsequente da equação anterior somente é possível perante a especificação do tipo de problema (definição de  $\Psi$ ).

#### 4-2 CONSERVAÇÃO DA ENERGIA NO FLUIDO

Substituindo

$\Psi_f$  pela entalpia do fluido ( $h_f$ ) e

$\vec{\Gamma}_f$  pelo vetor fluxo de calor ( $\vec{q}_f$ )

na equação (4-2), a equação média para a conservação da energia no fluido se torna

$$\begin{aligned} \rho_f c_{p_f} \left[ \nabla \cdot (\langle \vec{v}_f \rangle \langle T_f \rangle^f) + \nabla \cdot \langle \tilde{T}_f \tilde{v}_f \rangle \right] = \\ = - \nabla \cdot \langle \vec{q}_f \rangle - \frac{1}{V} \int_{A_{sf}} \vec{q}_f \cdot \hat{n} \, dA \end{aligned} \quad (4-3)$$

onde a entalpia do fluido foi substituída pela temperatura através da introdução do calor específico  $c_{p_f}$ .

Como  $\vec{q}_f$  é válido somente dentro do fluido, pode-se aplicar a lei de Fourier,

$$\vec{q}_f = - k_f \nabla T_f,$$

o que leva imediatamente a

$$\langle \vec{q}_f \rangle = - k_f \langle \nabla T_f \rangle \quad (4-4)$$

Para avaliar  $\langle \vec{q}_f \rangle$ , será empregada a expressão de Gray, equação (3-14), por explicitar  $\langle \vec{q}_f \rangle$  diretamente em função da média intrínseca da temperatura. Esta média, como foi discutido anteriormente, tem mais significado físico do que a global.

Assim, da equação (4-4) em conjunto com a equação (3-14), tem-se

$$\langle \vec{q}_f \rangle = - k_f \varepsilon \left[ \nabla \langle T_f \rangle^f + \vec{g}_T \right] \quad (4-5)$$

onde

$$\vec{g}_T = \frac{1}{V_f} \int_{A_{sf}} \tilde{T}_f \hat{n} \, dA$$

Neste momento, tudo que se pode afirmar sobre o termo envolvendo a integral de área é que ele está ligado a um desvio no fluxo médio de calor através do meio poroso.

Voltando à equação (4-3), a substituição de (4-5) resulta em

$$\begin{aligned} \rho_f c_{p_f} \nabla \cdot \left[ \langle \vec{v}_f \rangle \langle T_f \rangle^f \right] - \nabla \cdot \left[ k_f \varepsilon \left[ \nabla \langle T_f \rangle^f + \vec{g}_T \right] \right] + \\ + \rho_f c_{p_f} \nabla \cdot \langle \tilde{T}_f \tilde{v}_f \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{sf}} \vec{q}_f \cdot \hat{n} \, dA = 0 \end{aligned} \quad (4-6)$$

A exceção do primeiro termo do lado esquerdo da equação anterior, que

representa a energia transportada pelo fluido em escoamento através da velocidade média global, os demais termos da equação (4-6) precisam ser melhor explorados a fim de que seu significado físico seja perfeitamente entendido. A seguir, tais termos serão analisados separadamente.

$$(i) \frac{1}{V} \int_{A_{sf}} \vec{q}_f \cdot \hat{n} \, dA = q_f^*$$

corresponde ao calor trocado entre a fase sólida e o fluido (inclusive devido à transferência de massa). Para a sua avaliação serão utilizados dados experimentais. Seu detalhamento diz respeito também aos problemas da transferência de calor no sólido e da transferência de massa e será, por isto, apresentado no capítulo 6.

$$(ii) \rho_f c_{p_f} \nabla \cdot \langle \tilde{T}_f \tilde{\vec{v}}_f \rangle$$

Este termo é normalmente denominado "dispersão" e é usualmente modelado como um mecanismo de difusão ([22], pág.146 e [10], pág.232), sugerindo sua inclusão no termo difusivo através de um coeficiente difusivo equivalente. O primeiro passo na sua modelagem consiste em colocá-lo em uma estrutura semelhante à do termo difusivo, ou seja,

$$\rho_f c_{p_f} \nabla \cdot \langle \tilde{T}_f \tilde{\vec{v}}_f \rangle = \nabla \cdot \left[ \rho_f c_{p_f} \langle \tilde{\vec{v}}_f \tilde{T}_f \rangle \right]$$

o que permite induzir

$$\rho_f c_{p_f} \langle \tilde{\vec{v}}_f \tilde{T}_f \rangle \propto \nabla \langle T_f \rangle^f$$

ou

$$\rho_f c_{p_f} \langle \tilde{\vec{v}}_f \tilde{T}_f \rangle = - K_{dT} \nabla \langle T_f \rangle^f \quad (4-7)$$

em que os índices "d" e "T" se referem a "dispersão" e "temperatura", respectivamente.

De acordo com [9], pág. 380, e observando a expressão (4-7) acima, um modelo para  $K_{dT}$  é

$$K_{dT} = \rho_f c_{p_f} \varepsilon \left| \langle \tilde{\vec{v}}_f \rangle^f \right| l \gamma_T$$

ou

$$K_{dT} = \rho_f c_{p_f} |\langle \vec{v}_f \rangle| \ell \gamma_T \quad (4-8)$$

Neste modelo, " $\gamma_T$ " é uma constante dependente do tipo de meio poroso e " $\ell$ " é um comprimento de mistura. O comprimento de mistura deve dar uma idéia da ordem de grandeza da microestrutura do meio poroso e será modelado, para o caso particular de leitos de esferas compactadas, como

$$\frac{\ell}{d} = \left(\frac{y}{d}\right)^2 \quad \text{para } 0 \leq y \leq d$$

$$\ell = d \quad \text{para } y > d \quad (4-9)$$

onde "d" é o diâmetro de uma esfera. Este modelo baseia-se num trabalho [28] em que é apresentado um estudo da distribuição do coeficiente de dispersão transversal em leitos de esferas compactadas. Por meio do conceito de perturbação, os autores concluem que, próximo a fronteiras sólidas, o coeficiente de dispersão ( $\gamma$ ) é proporcional ao quadrado da distância da parede, adimensionalizada em relação ao diâmetro das esferas.

$$(iii) \quad k_f \varepsilon \left[ \nabla \langle T_f \rangle^f + \vec{\mathcal{J}}_T \right]$$

Por causa de  $\vec{\mathcal{J}}_T$ , o fluxo médio de calor não segue na direção do gradiente de temperaturas médias. Ele é desviado e a parte que efetivamente está na direção deste gradiente fica modificada, como se pode ver na fig.4-1.

Um modo de modelar este termo consiste em assumir uma condutividade térmica equivalente, ou seja,

$$\langle \vec{q}_f \rangle = - \bar{K}_e^f \cdot \nabla \langle T_f \rangle^f \quad (4-10)$$

De um modo geral não há razão para  $\vec{\mathcal{J}}_T$  estar alinhado com  $\nabla \langle T_f \rangle^f$ , o que significa que  $\bar{K}_e^f$  deverá ser um tensor de 2ª ordem (o que também é constatado por Whitaker [22]).

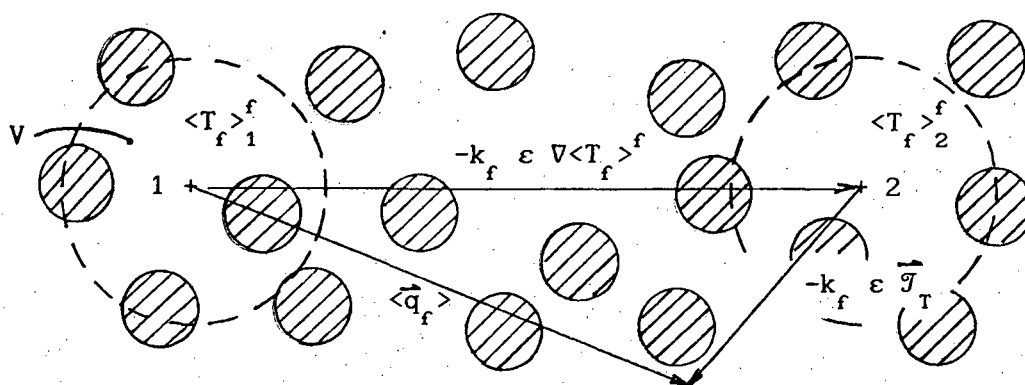


Figura 4-1 Efeito de  $\nabla_T \bar{T}$  em  $\langle \vec{q}_f \rangle$

Não há um modo simples de determinar  $\bar{K}_e^f$ . Uma alternativa é procurar o auxílio de outras abordagens.

No modelo de Bear e Bachmat ([15], pág.93), o espaço vazio de um meio poroso é visualizado como uma rede de "capilares" interconectados que se encontram em "junções". A cada capilar está associado um sistema de coordenadas que segue suas linhas de corrente. Assume-se que numa junção não há um padrão fixo de linhas de corrente, e que seu volume é muito menor do que o de um capilar.

De acordo com este modelo foram desenvolvidas as idéias do apêndice C. Fazendo uma analogia das grandezas deste trabalho com as utilizadas no modelo do capilar, espera-se chegar a uma expressão alternativa para o fluxo médio de calor  $\langle \vec{q}_f \rangle$ .

Numa tentativa de determinar quanto calor vai em média de um ponto a  $\langle T_f \rangle_1^f$  para um ponto a  $\langle T_f \rangle_2^f$ , imagine-se uma situação como a da fig.4-2.

Para tal situação, de acordo com o apêndice C, o fluxo de calor por um capilar de comprimento  $L_c$ , em termos de coordenadas lineares, fica

$$q = - \frac{\epsilon}{\tau_T^2} k_f \frac{\Delta \langle T_f \rangle^f}{L} \quad (4-11)$$

onde

$$\tau_T = \left( \frac{L_c}{L} \right)_T \quad (4-12)$$

em que o índice significa que  $\tau$  deverá ser tomado na direção do gradiente de temperatura.

## PAREDES ISOLADAS

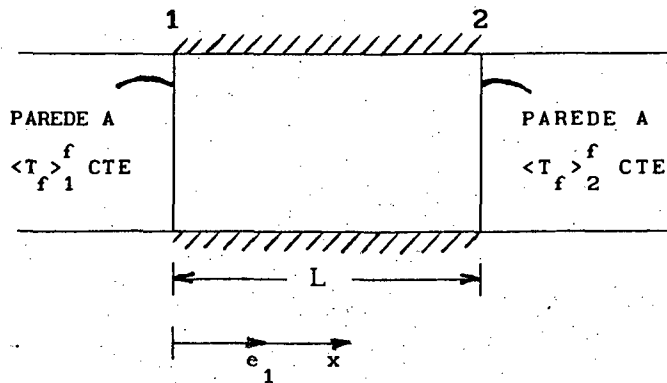


Figura 4-2 Representação esquemática de fluxo de calor em meio poroso

A grandeza  $\tau$  representa um coeficiente de mudança de coordenadas que seguem o capilar para as coordenadas globais (x-y) do problema. Seu valor representa uma média dos inversos dos cossenos diretores entre os vetores unitários dos dois sistemas numa direção específica (média entre um eixo que segue o capilar e o eixo "x", por exemplo).

Conforme descrito em [15], pág.110,  $\tau$  faz parte das componentes de uma matriz transformação de coordenadas mais complexa, associada ao modelo do capilar de Bear e Bachmat. Esta matriz é chamada *tortuosidade* e é descrita detalhadamente em [15], pág.106.

Por um outro ângulo, sendo  $\vec{q}_f$  o calor que vai de  $\langle T_f \rangle_1^f$  para  $\langle T_f \rangle_2^f$  no sistema de coordenadas x-y, pode-se escrever,

$$q_{1x} = \frac{\tau_{xx}}{\varepsilon} \vec{q}_f \cdot \hat{e}_1 \quad (4-13)$$

onde  $q_{1x}$  é a componente em x da parcela de  $\vec{q}_f$  que estaria alinhada com o capilar ( $\vec{q}_c$ ).

Imagine-se, então, que na situação da fig.4-2 todos os capilares têm comprimento  $L_c$  entre os pontos 1 e 2. Desta forma, seria correto afirmar

$$\langle \vec{q}_f \rangle = \vec{q}_f$$

ou

$$\langle \vec{q}_f \rangle = - \frac{\varepsilon k_f}{\tau_T^2} \nabla \langle T_f \rangle^f \quad (4-14)$$

A equação (4-14) define, portanto, um fluxo médio que está na direção do gradiente de médias.

Comparando as equações (4-5) e (4-14), tem-se

$$k_f \varepsilon \left[ \nabla \langle T_f \rangle^f + \vec{j}_T \right] = \frac{k_f \varepsilon}{\tau_T^2} \nabla \langle T_f \rangle^f$$

Um outro fator a considerar é que a eq. (4-6) será uma equação para  $\langle T_f \rangle^f$ . A razão disto é que foi realizada a média volumétrica local como ponto de partida apenas por conveniência matemática. O teorema utilizado para o processo de média emprega a divisão por  $V$  (volume-amostra inteiro) porque ele se comporta como um valor constante durante as deduções. No entanto, se, por exemplo,  $T_f = \text{cte}$ , a média volumétrica global não é igual a esta constante, ou seja, para  $T_f$  constante,  $\langle T_f \rangle \neq T_f$ , o que não acontece com a média intrínseca. Para o problema térmico adotou-se, portanto, a média intrínseca, por ser esta mais representativa do caso real (mais consistente fisicamente).

Assim, levando em consideração todos os detalhes anteriores, pode-se finalmente colocar a eq. (4-6) em termos de variáveis mais simples,

$$\rho_f c_{p_f} \langle \vec{v}_f \rangle \cdot \nabla \langle T_f \rangle^f - \nabla \cdot \left[ k_e^f \nabla \langle T_f \rangle^f \right] + q_f^* = 0 \quad (4-15)$$

onde

$$k_e^f = \frac{\varepsilon k_f}{\tau_T^2} + \rho_f c_{p_f} |\langle \vec{v}_f \rangle| \ell \gamma_T \quad (4-16)$$

em que  $\tau_T$ ,  $\gamma_T$  e  $\varepsilon$  são discutidos no capítulo 7.

Observe-se que a equação (4-15) se assemelha à equação da energia clássica para um meio contínuo, onde há um balanceamento dos termos convectivos, difusivos e de geração, de acordo com a primeira lei da Termodinâmica. Note-se ainda que a condutividade térmica do fluido  $k_f$  foi substituída por uma condutividade efetiva  $k_e^f$ , que incorpora a complexidade da matriz porosa via parâmetros  $\varepsilon$  e  $\tau_T$ , bem como os efeitos de dispersão associados ao escoamento.

Em Coordenadas Cartesianas

Utilizando

$$T_f = \langle T_f \rangle^f$$

e as demais convenções da eq. do movimento, a eq.(4-15) em coordenadas cartesianas fica

$$\rho_f c_{p_f} u \frac{\partial T_f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k_{ex}^f \frac{\partial T_f}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ k_{ey}^f \frac{\partial T_f}{\partial y} \right] - q_f^* \quad (4-17)$$

Para descrever escoamentos em canais, será desconsiderada a difusão em x, conforme apêndice D. Fica, então, a equação que efetivamente será resolvida,

$$\rho_f c_{p_f} u \frac{\partial T_f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ k_{ey}^f \frac{\partial T_f}{\partial y} \right] - q_f^* \quad (4-18)$$

*Condições de Contorno* (ver também apêndice G)

Neste modelo matemático foram consideradas as seguintes condições de contorno,

na parede,

- temperatura prescrita

$$T_f = T_p$$

ou

- fluxo prescrito

$$- k_f \frac{\partial T_f}{\partial y} = q''$$

no centro do canal, condição de simetria,

$$\frac{\partial T_f}{\partial y} = 0$$



Note-se que o fluxo  $q''$ , na verdade, representa um fluxo local. O que permite utilizar diretamente a temperatura média é o fato de que exatamente junto à parede só há fluido ( $\varepsilon = 1$ ). Em outras palavras, sendo

$$q'' = -k_f \nabla T_f$$

o fluxo local junto à parede, a temperatura local  $T_f$ , neste caso, pode ser escrita como

$$T_f = \langle T_f \rangle^f = \frac{1}{V_f} \int_{V_f} T_f \, dV$$

pois junto à parede só há fluido.

Tal argumentação leva a

$$q'' = -k_f \nabla \langle T_f \rangle^f$$

ou, em coordenadas cartesianas, com a notação simplificada,

$$q'' = -k_f \frac{\partial T_f}{\partial y}$$

#### 4-3 PROBLEMA DE TRANSPORTE DE UMA ESPÉCIE QUÍMICA

Da mesma forma que para o problema térmico, parte-se da equação local para conservação de uma espécie química, ou seja,

$$p_f \nabla \cdot (\vec{v}_f w) + \nabla \cdot \vec{J}_f = 0 \quad (4-19)$$

onde

$$w = \frac{\rho_A}{\rho} \quad (4-20)$$

representa a concentração da espécie química transportada "A".

Aproveitando a dedução da equação geral de transporte (4-2), e fazendo

$$\Psi_f = w \quad \vec{\Gamma}_f = \vec{J}_f$$

a equação média se torna

$$\rho_f \left[ \nabla \cdot \langle \vec{v}_f \rangle \langle w \rangle^f + \nabla \cdot \langle \tilde{w} \vec{v}_f \rangle \right] = - \nabla \cdot \langle \vec{J}_f \rangle - \frac{1}{V} \int_{A_{sf}} \vec{J}_f \cdot \hat{n} \, dA \quad (4-21)$$

Por um raciocínio semelhante ao que levou à utilização da lei de Fourier no problema térmico, dentro dos poros a lei de Fick também será utilizada. Assim,

$$\vec{J}_f = -\rho_f D_{AB} \nabla w$$

$$\Rightarrow \langle \vec{J}_f \rangle = -\rho_f D_{AB} \langle \nabla w \rangle \quad (4-22)$$

Aplicando ao fluxo  $\langle \vec{J}_f \rangle$  o teorema fundamental conforme apresentado por Gray na equação (3-14), tem-se

$$\langle \vec{J}_f \rangle = -\rho_f D_{AB} \varepsilon \left[ \nabla \langle w \rangle^f + \vec{\mathcal{J}}_w \right] \quad (4-23)$$

onde

$$\vec{\mathcal{J}}_w = \frac{1}{V} \int_{A_{sf}} \tilde{w} \hat{n} \, dA \quad (4-24)$$

Da mesma forma que para a transferência de calor, tudo que se pode afirmar sobre o termo envolvendo a integral de área é que ele está ligado a um desvio na taxa média de difusão da espécie química. No entanto, o modo como o meio poroso atua sobre a difusão de massa é diferente do modo como ele atua sobre a difusão de calor, tornando  $\vec{\mathcal{J}}_T$  fundamentalmente diferente de  $\vec{\mathcal{J}}_w$ . Não há transporte de massa através da matriz sólida, enquanto que no processo de transferência de calor pode haver difusão no sólido.

Voltando à equação (4-21), com a equação (4-23),

$$\rho_f \nabla \cdot \left[ \langle \vec{v}_f \rangle \langle w \rangle^f \right] - \nabla \cdot \left[ \rho_f D_{AB} \varepsilon \left( \nabla \langle w \rangle^f + \vec{j}_w \right) \right] + \rho_f \nabla \cdot \langle \vec{v}_f \tilde{w} \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{sf}} \vec{j}_f \cdot \hat{n} dA = 0 \quad (4-24)$$

Exceto pelo termo convectivo, os demais termos da equação anterior serão agora interpretados fisicamente.

$$(i) \frac{1}{V} \int_{A_{sf}} \vec{j}_f \cdot \hat{n} dA = -\rho_f G^*$$

Massa transferida da fase sólida para o fluido. Vem de dados experimentais e está detalhada no capítulo 6.

$$(ii) \rho_f \nabla \cdot \langle \vec{v}_f \tilde{w} \rangle$$

Termo de dispersão que, de maneira semelhante ao problema da energia, será modelado como um mecanismo de difusão.

Assim,

$$\rho_f \nabla \cdot \langle \vec{v}_f \tilde{w} \rangle = \nabla \cdot \left[ \rho_f \langle \vec{v}_f \tilde{w} \rangle \right]$$

Por analogia com o problema térmico,

$$\rho_f \langle \vec{v}_f \tilde{w} \rangle \propto \nabla \langle w \rangle^f$$

ou

$$\rho_f \varepsilon \langle \vec{v}_f \tilde{w} \rangle^f = -K_{Dw} \nabla \langle w \rangle^f$$

onde

$$K_{Dw} = |\langle \vec{v}_f \rangle| l \gamma_w \quad (4-26)$$

$$(iii) \langle \vec{j}_f \rangle = -\rho_f D_{AB} \varepsilon \left[ \nabla \langle w \rangle^f + \vec{j}_w \right]$$

Devido à grande semelhança formal com o problema térmico, será feita uma

analogia,

$$\langle \vec{J}_f \rangle = - \frac{\rho_f D_{AB} \varepsilon}{\tau_w^2} \nabla \langle w \rangle^f \quad (4-27)$$

em que  $\tau_w$  será dado pela equação (4-12).

A equação da massa, explicitada em termos mais usuais, fica, então,

$$\langle \vec{v}_f \rangle \cdot \nabla \langle w \rangle^f - \nabla \cdot \left[ D_e \nabla \langle w \rangle^f \right] + G^* = 0 \quad (4-28)$$

onde

$$D_e = \frac{\varepsilon D_{AB}}{\tau_w^2} + |\langle \vec{v}_f \rangle| \ell \gamma_w \quad (4-29)$$

em que  $\tau_w$ ,  $\varepsilon$  e  $\gamma_w$  são apresentados no capítulo 7.

### Em Coordenadas Cartesianas

Utilizando

$$w = \langle w \rangle^f$$

e as demais convenções até agora adotadas, a equação (4-28) torna-se, para escoamentos em canais,

$$u \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ D_e \frac{\partial w}{\partial y} \right] - G^* \quad (4-30)$$

em que a difusão em x foi desprezada, por analogia com o problema térmico (apêndice D).

Conforme esperado, a equação (4-30) é análoga à equação (4-17).

*Condições de Contorno* (ver também apêndice G)

Parede impermeável,

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

No centro do canal, condição de simetria,

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

---

## 5 CONSERVAÇÃO DA ENERGIA NO SÓLIDO

---

Neste capítulo, após uma adaptação dos fundamentos, é apresentada a equação governante para o problema de condução de calor no sólido.

### 5-1 ADAPTAÇÃO DO TEOREMA FUNDAMENTAL

Para a obtenção da equação média do transporte de energia no sólido, será necessário adaptar os teoremas de Whitaker (2-11) e de Gray (3-14). Eles foram deduzidos para o domínio do fluido, mas o processo que tem que ser aplicado para a dedução de expressões equivalentes no domínio sólido é, em essência, o mesmo.

Assim, aproveitando a semelhança com a abordagem do fluido, para o sólido o teorema de Whitaker se torna

$$\langle \nabla \Psi_s \rangle = \nabla \langle \Psi_s \rangle - \frac{1}{V} \int_{A_{sf}} \Psi_s \hat{n} \, dA \quad (5-1)$$

e o de Gray,

$$\langle \nabla \Psi_s \rangle = (1-\varepsilon) \nabla \langle \Psi_s \rangle^s - \frac{1}{V} \int_{A_{sf}} \tilde{\Psi}_s \hat{n} \, dA \quad (5-2)$$

O sinal negativo que antecede ambas as integrais volumétricas deve-se ao fato de  $\hat{n}$  representar o mesmo vetor normal unitário que aparece nas equações do fluido (dirigido da fase fluida para a sólida).

### 5-2 EQUAÇÃO GOVERNANTE

Na ausência de geração, a conservação de energia no domínio sólido requer

$$\nabla \cdot \vec{q}_s = 0 \quad (5-3)$$

Aplicando o teorema da média conforme indicado na equação (5-1) à equação local (5-3), obtém-se

$$\langle \nabla \cdot \vec{q}_s \rangle = \nabla \cdot \langle \vec{q}_s \rangle - \frac{1}{V} \int_{A_{sf}} \vec{q}_s \cdot \hat{n} \, dA = 0 \quad (5-4)$$

Utilizando, de maneira análoga à obtenção da equação (4-5), o teorema de Gray na avaliação da média do fluxo, resulta

$$\langle \vec{q}_s \rangle = -k_s \langle \nabla T_s \rangle$$

$$\langle \vec{q}_s \rangle = -k_s (1-\varepsilon) \left[ \nabla \langle T_s \rangle^s + \vec{j}_s \right] \quad (5-5)$$

onde

$$\vec{j}_s = -\frac{1}{V} \int_{A_{sf}} \tilde{T}_s \hat{n} \, dA$$

De maneira semelhante ao problema do fluido, o fluxo médio de calor  $\langle \vec{q}_s \rangle$  não está orientado na direção de  $\nabla \langle T_s \rangle^s$ . Aparece aqui um desvio cujo efeito pode, da mesma forma que no capítulo 4, ser embutido em um tensor "coeficiente de difusão equivalente" para o sólido (eq. 4-10).

Por outro lado, do mesmo modo que para o fluido, pode-se considerar um "modelo de capilar" para o sólido. Assumindo, então, que o meio poroso desvia o calor de maneira semelhante para sólido e fluido, obtém-se para o fluxo médio de calor  $\langle \vec{q}_s \rangle$  uma expressão análoga à equação (4-14), ou seja,

$$\langle \vec{q}_s \rangle = - \frac{(1-\epsilon) k_s}{\tau_T^2} \nabla \langle T_s \rangle^s \quad (5-6)$$

onde  $\tau_T$  tem a mesma interpretação da equação (4-12). Além disto, para uma fase sólida não-consolidada, foi desprezada a resistência de contato ao fluxo de calor.

Na obtenção da equação (5-6) foi considerado que o meio poroso tem as mesmas características de tortuosidade tanto na fase fluida como na fase sólida. Esta hipótese está baseada no fato de que as linhas que definem as fronteiras da fase sólida são, evidentemente, comuns à fase fluida, como mostra a fig.6-1. Lembrando que  $\tau_T$  na verdade representa um valor médio ([15],pág.110), parece razoável afirmar, em uma primeira aproximação, que  $\tau_T$  tem o mesmo valor em ambas as fases, já que seus contornos têm a mesma tortuosidade.

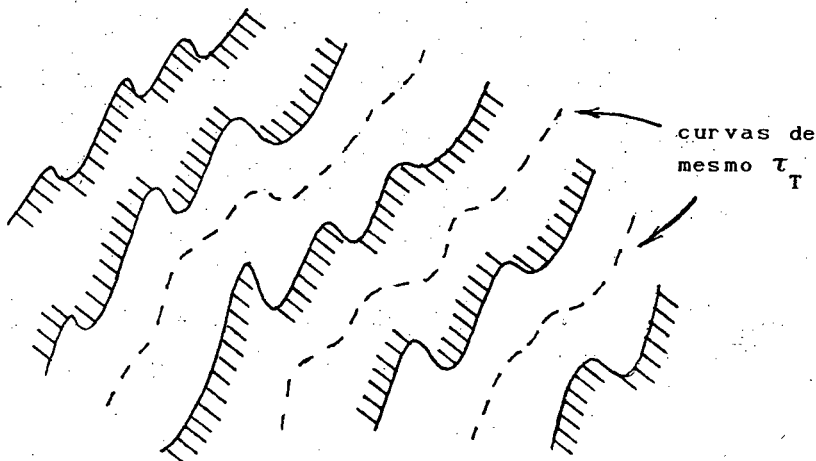


Figura 6-1 Detalhe das fronteiras entre as fases

A equação média para condução no sólido pode, então, ser escrita como

$$- \nabla \cdot \left[ k_e^s \nabla \langle T_s \rangle^s \right] + q_s^* = 0 \quad (5-7)$$

onde

$$k_e^s = \frac{(1-\epsilon) k_s}{\tau_T^2} \quad (5-8)$$

e

$$q_s^* = \frac{1}{V} \int_{A_{sf}} \vec{q}_s \cdot \hat{n} \, dA \quad (5-9)$$

A expressão (5-9) deve representar as trocas de calor com a fase fluida e sua modelagem está detalhada no capítulo 6.

#### Em Coordenadas Cartesianas

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left[ k_e^s \frac{\partial T_s}{\partial y} \right] + q_s^* = 0 \quad (5-10)$$

onde  $T_s = \langle T \rangle^s$ .

Na equação (5-10) a difusão axial foi ignorada, conforme análise do apêndice E. Tal simplificação tem sentido, em geral, em convecção forçada em canais, que é o caso particular que será analisado posteriormente.

#### Condições de Contorno (ver também apêndice G)

Além da condição de simetria no centro de canais, será considerado que o sólido está isolado das paredes do canal que limita o meio poroso.

Pode-se analisar a condição de isolamento sob 2 aspectos equivalentes,

- (i) a área de contato é muito pequena e a transferência de calor se dá preferencialmente pelo fluido;
- (ii) a condutividade térmica equivalente  $k_e^s = 0$  na parede, pois ali só há fluido ( $\epsilon = 1$ ).



---

## 6 TERMOS-FONTE DAS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO

---

Durante a dedução das equações, surgiram, como consequência do processo de média, termos que não puderam ser explicitados teoricamente, tais como

$$\rightarrow q_f^* = \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} \vec{q}_f \cdot \hat{n} \, dA \quad \text{na equação do fluido,}$$

$$\rightarrow q_s^* = \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} \vec{q}_s \cdot \hat{n} \, dA \quad \text{na equação do sólido e}$$

$$\rightarrow \rho_f G^* = \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} \vec{J}_f \cdot \hat{n} \, dA \quad \text{na equação de transporte de massa.}$$

Aparentemente, não há experimentos sobre as trocas de calor e massa no interior de um meio poroso em termos das variáveis médias utilizadas neste trabalho. O fluxo de calor, por exemplo, exige um tratamento complexo, o que torna difícil sua avaliação experimental. Tudo que se pode fazer, por enquanto, é assumir que o valor medido por um termopar em algum ponto determinado do meio poroso é a média intrínseca da temperatura.

Apesar das dificuldades, os termos fontes das equações governantes

devem ser avaliados com o auxílio de resultados experimentais. Para que isto seja possível, no entanto, é necessário especificar o tipo de meio poroso em consideração. Neste trabalho, o meio poroso em estudo é constituído de esferas compactadas.

O processo de médias utilizado transforma o leito de esferas num "contínuo", fazendo "desaparecer" a esfera do contexto do problema. Apesar disso, na determinação dos termos-fontes é conveniente se reportar a uma esfera isolada para, utilizando medições de trocas de calor e massa em leitos compactados, "fechar" o problema.

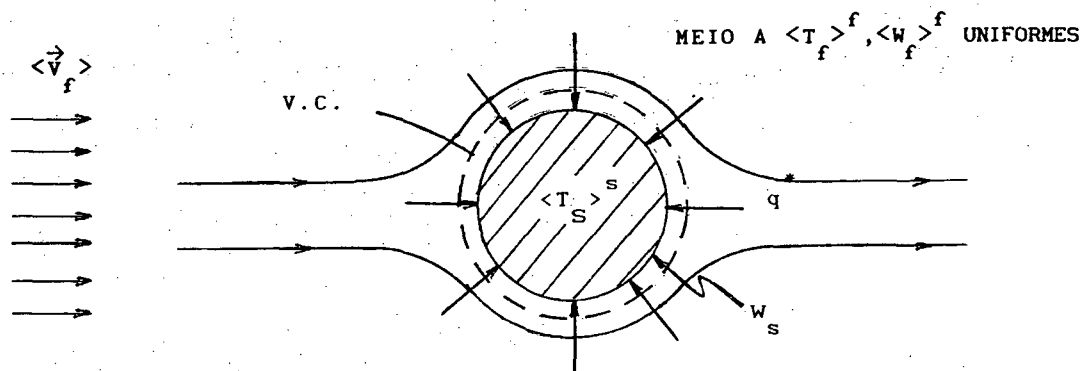


Figura 6-1 Trocas para uma esfera

Deseja-se, então, saber, para a esfera da fig.6-1, as trocas de calor e massa, com as seguintes hipóteses simplificativas:

- a esfera toda está a  $\langle T \rangle_s^S$ ;
- o meio que a envolve está todo a  $\langle T \rangle_f^f$  e tem uma concentração  $\langle w \rangle_f^f$ ;
- há um escoamento uniforme chegando com velocidade  $\langle \vec{v}_f \rangle^f$ ;
- a superfície da esfera apresenta uma concentração  $w_s$ . Uma vez que a temperatura na esfera é uniforme, pode-se ter condição de saturação na sua superfície e neste caso a concentração depende apenas de  $\langle T \rangle_s^S$  e vem de relações já conhecidas, ou seja,  $w_s = f(\langle T \rangle_s^S)$ .

Neste contexto pode ocorrer evaporação/condensação, dependendo de  $\langle w \rangle_f^f$  e  $w_s$ . Note-se que o tamanho da esfera não é modificado, pois o regime é permanente. Pode-se, por exemplo, simular um grão completamente úmido na primeira fase de um processo de secagem.

Analisando o volume de controle da fig.6-1 e, sem perda de generalidade, particularizando a análise para um processo de secagem ou umidificação, os processos de troca na interface sólido-fluido podem ser

equacionados em um balanço do tipo

$$\dot{q}_s + \dot{m} \left[ h_{fg} + c_{p_v} \left( \langle T_s \rangle^S - \langle T_f \rangle^f \right) \right] = \dot{q}_f \quad (6-1)$$

onde  $\dot{q}$  é a taxa de troca de calor por condução,  $\dot{m}$  é a taxa de evaporação ou condensação,  $h_{fg}$  é o calor latente de vaporização e  $c_{p_v}$  é o calor específico a pressão constante do vapor da fase química envolvida na transferência de massa (espécie química A). A parcela associada ao calor sensível na equação anterior em geral pode ser ignorada por ser substancialmente menor do que a parcela associada ao calor latente.

Do calor que é entregue ao volume de controle (que inclui sólido e camada em vaporização), uma parte vai para o sólido e outra é utilizada para o processo de transferência de massa. Pode-se objetar que anteriormente as temperaturas foram consideradas constantes para sólido e fluido e que parece incorreto escrever a equação (6-1) com condução nas camadas do fluido e do sólido adjacentes à interface sólido-fluido. É importante lembrar, porém, que na verdade até a própria esfera fica "dissimulada" no processo de média. Na realidade, tanto  $\langle T_s \rangle^S$  quanto  $\langle T_f \rangle^f$  representam campos e a idéia de uma esfera trocando calor com um fluido fica sem sentido no domínio das médias. O que está sendo feito é utilizar duas idéias de origens diferentes para obter um problema "bem posto".

Desta forma, as parcelas  $\dot{q}_f$  e  $\dot{q}_s$  serão avaliadas via coeficientes de transferência de calor. Para isto serão utilizadas correlações empíricas obtidas com esferas de naftaleno colocadas em um leito compactado submetido a um escoamento ([11], pág.292),

$$Nu_d = \frac{h d}{k_f} = 2 + 1,1 Pr^{1/3} Re_p^{0,6} \quad (6-2)$$

onde  $Pr$  é o número de Prandtl do fluido,  $d$  é o diâmetro das esferas e

$$Re_p = \frac{|\langle \vec{v}_f \rangle| d}{\nu_f} \Bigg|_{\text{local}} \quad (6-3)$$

Para a transferência de massa será estendido para o domínio das médias mais um resultado válido no "domínio discreto" (antes de executada a média). A analogia de Chilton-Colburn é considerada válida para meios porosos, ou seja,

$$Sh_d = \frac{K_w d}{D_{AB}} = 2 + 1,1 Sc^{1/3} Re_p^{0,6} \quad (6-4)$$

onde  $Sc$  é o número de Schmidt para o ar úmido. Experimentos recentes [26] indicam que estas correlações permanecem válidas mesmo para situações onde a relação entre o diâmetro hidráulico do leito de esferas e o diâmetro das esferas é extremamente baixa.

Com o balanço de energia na interface sólido-fluido estabelecido na equação (6-1), e sabendo que os coeficientes de troca locais,  $Sh_d$  e  $Nu_d$ , podem ser determinados a partir de parâmetros do próprio problema (equações (6-2) e (6-3)), é possível, finalmente, escrever os termos fontes das equações de conservação de energia e espécie química.

Assim sendo,

(i) termo fonte para a equação de transporte de massa,  $G^*$

A massa trocada entre as fases será calculada como

$$\dot{m} = \rho_f G^* = \rho_f K_w (w_s - \langle w \rangle^f) \quad \left[ \frac{\text{kg}_{\text{vapor}}}{\text{s m}^2_{\text{sup.sól.}}} \right]$$

ou

$$\dot{m} = \rho_f K_w \beta (w_s - \langle w \rangle^f) \quad \left[ \frac{\text{kg}_{\text{vapor}}}{\text{s m}^3_{\text{sól.}}} \right] \quad (6-5)$$

onde  $\beta$  é a relação área de troca por volume. No caso de esferas

$$\beta = \frac{\pi d^2}{\pi d^3/6} = \frac{6}{d} \quad (6-6)$$

Adicionalmente, como

$$(1-\epsilon) V = V_{\text{sól}}$$

tem-se

$$\dot{m} = \beta \rho_f K_w (1-\epsilon) (w_s - \langle w \rangle^f) \quad \left[ \frac{\text{kg}_{\text{vapor}}}{\text{s m}^3_{\text{meio por}}} \right] \quad (6-7)$$

onde  $K_w$  é obtido da equação (6-4).

(ii) termo fonte da equação da energia para o fluido,  $q_f^*$

o calor trocado entre a fase fluida e a sólida através da interface sólido-fluido é dado por

$$q_f^* = h (\langle T_f \rangle^f - \langle T_s \rangle^s) \left[ \frac{W}{m_{\text{sup.sól.}}^2} \right]$$

$$q_f^* = \beta h (1-\varepsilon) (\langle T_f \rangle^f - \langle T_s \rangle^s) \left[ \frac{W}{m_{\text{meio por.}}^3} \right] \quad (6-8)$$

onde  $h$  é obtido da equação (6-2).

(iii) Termo fonte da equação da energia para o sólido,  $q_s^*$

A parcela de energia proveniente do fluido que é fornecida ao sólido pode ser obtida da própria equação (6-1), em função do calor proveniente do fluido e da parcela de fluido envolvida no processo de transferência de massa. Desta forma tem-se

$$q_s^* = \frac{6(1-\varepsilon)}{d} \left[ h (\langle T_s \rangle^s - \langle T_f \rangle^f) + \rho_f K_w (w_s - \langle w \rangle^f) h_{fg} \right]$$

$$\text{em } \left[ \frac{W}{m_{\text{meio por.}}^3} \right] \quad (6-9)$$

Imaginar que todo o sólido está concentrado em uma esfera não é uma aproximação muito forte, pois nas equações, além dos coeficientes de troca, é necessário saber apenas a área de troca por unidade de volume " $\beta$ ". Em outras palavras, o que importa é quanto há de fronteira entre sólido e fluido, sendo a proporção volumétrica entre eles fornecida pela porosidade. Tal abordagem pode ser estendida a outros meios porosos desde que se conheçam os coeficientes de troca apropriados, bem como a relação entre a área superficial e o volume ocupado pela matriz sólida.

É de extrema importância observar que para determinar as quantidades trocadas foram utilizadas as médias intrínsecas. Do modo como está,  $q_f^*$ , por exemplo, tende a zero na entrada do leito, quando o fluido e o sólido estão a uma mesma temperatura. Isto não aconteceria se fosse utilizada a média global, conforme discussão apresentada após a equação (4-14) na secção 4-2.

---

## 7 CARACTERÍSTICAS DO MEIO POROSO DE ESFERAS

---

O processo de médias não depende, evidentemente, do meio poroso considerado. Se o domínio puder ser caracterizado como "meio poroso", ou seja, se for possível caracterizar um "volume-amostra" compatível com os limites discutidos, a dedução, em essência, independe do mesmo.

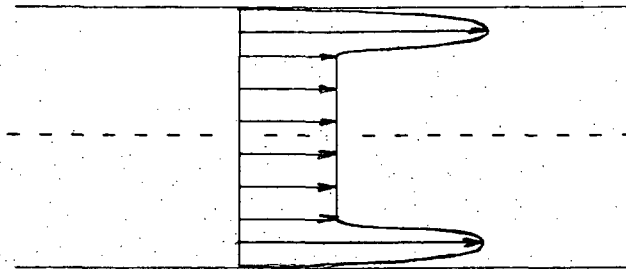
Para a obtenção de resultados e análise de casos particulares, no entanto, a modelação terá que levar em consideração a topologia e a natureza do meio poroso. Em outras palavras, terão que ser apresentadas as "relações constitutivas do meio".

Já que a maior parte dos trabalhos (teóricos e experimentais) disponíveis dizem respeito a leitos compactados de esferas, o caso particular a ser analisado neste trabalho será visto como um conjunto de esferas saturadas com água, as quais estão colocadas entre 2 placas paralelas sujeitas a temperatura prescrita ou fluxo de calor prescrito. O problema consistirá em determinar o campo de temperaturas e o de concentrações médios quando há um escoamento de ar úmido através do meio poroso.

## 7-1 ASPECTOS HIDRODINÂMICOS

Foi observado experimentalmente (e também teoricamente em alguns dos trabalhos citados na introdução) que, no caso de esferas compactadas, pode-se esperar que o escoamento tenha as seguintes características:

- região de entrada curta: o perfil de velocidades médias se desenvolve muito rapidamente, permitindo que se desconsidere a região de entrada;
- perfil plano na região central: conforme mostra a fig.7-1, longe das paredes é esperado que o campo de velocidades médias tenha um comportamento qualitativamente semelhante ao do escoamento darciniano;



**Figura 7-1** Perfil de velocidades médias típico em leito de esferas compactadas

- efeito canal: a fig.7-1 mostra ainda o comportamento esperado para o campo de velocidades próximo às fronteiras sólidas do problema. A fig.7-2 mostra esquematicamente o aumento de porosidade que conduz a tal efeito. O fluido tem, próximo à parede, muito mais folga para escoar (é como se tivesse verdadeiros "canais" sem sólido dentro do meio poroso nesta região).

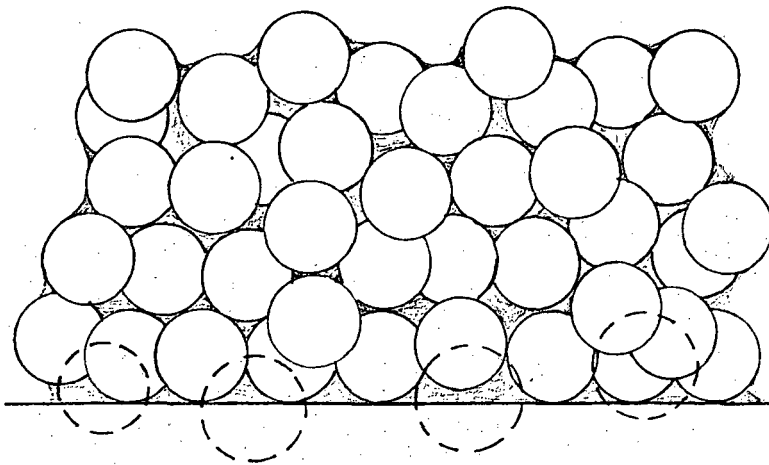


Figura 7-2 Organização esquemática das esferas próximo à parede

### 7-2 DETALHES DE TRANSPORTE

As esferas trocam calor e massa com o fluido, de onde se conclui que não será considerado equilíbrio térmico local. Dentro do contexto das médias descrito anteriormente, isto equivale a considerar que a cada ponto estarão associadas uma temperatura média volumétrica para o fluido ("f") e uma para o sólido ("s") que não serão consideradas iguais *a priori*.

Além disto, assume-se que as esferas não estão em contato puntual; há uma área de contato entre as mesmas, permitindo condução em toda a extensão da fase sólida.

### 7-3 CARACTERÍSTICAS ESTRUTURAIS

Na tentativa de caracterizar a estrutura do meio poroso, e auxiliar no tratamento teórico, diversas propriedades têm que ser definidas e medidas experimentalmente. Neste trabalho as grandezas relevantes são a permeabilidade ( $K$ ), o coeficiente de Forchheimer ( $A$ ), a porosidade ( $\epsilon$ ), a tortuosidade ( $\tau$ ) e a dispersão ( $\gamma$ ).

Estas propriedades dependem do meio poroso considerado e têm que ser avaliadas em cada caso particular. A seguir são apresentadas correlações para um meio poroso constituído de esferas compactadas em arranjo aleatório.



### Porosidade

De acordo com um levantamento feito por Hunt e Tien [9], as medidas experimentais de porosidade podem ser aproximadas por uma exponencial do tipo

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_{\infty} + (1 - \varepsilon_{\infty}) \exp(-\lambda y/d) \quad (7-1)$$

Nesta expressão  $\varepsilon_{\infty}$  representa um valor de porosidade em um local afastado de paredes,  $\lambda$  é um parâmetro de ajuste e as demais variáveis são as mesmas do texto.

O valor de  $\varepsilon_{\infty}$  depende apenas do arranjo das esferas. Para um arranjo aleatório,

$$\varepsilon_{\infty} = 0,37 \quad (7-2)$$

Conforme mostrado em [9], o valor de  $\lambda$  que melhor reflete a variação de porosidade próximo à parede é

$$\lambda = 6 \quad (7-3)$$

### Tortuosidade

A tortuosidade é uma característica anisotrópica do meio. Ela representa um coeficiente de mudança das coordenadas que seguem um capilar hipotético representativo dos poros para as coordenadas globais do problema.

De acordo com o capítulo 4, seu valor, para uma dada direção  $i$ , representa uma média nesta direção,

$$\tau_i = \left[ \frac{L_c}{L} \right]_i \quad (4-12)$$

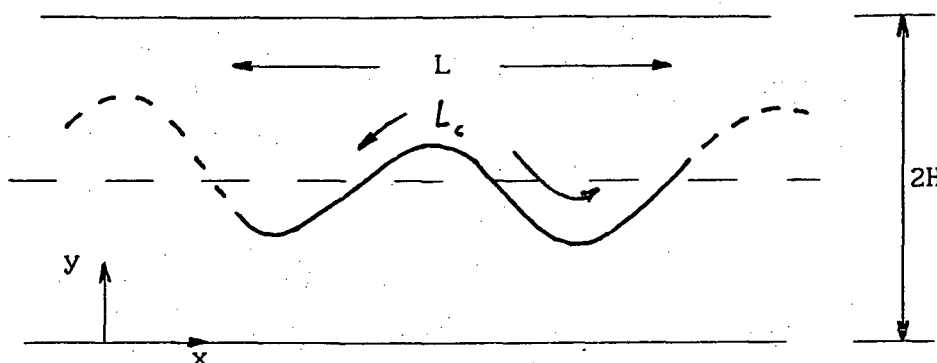


Figura 7-3 Capilar em um problema de placas paralelas

Sabe-se muito pouco sobre o valor correto de  $\tau_i$ . Bear [15], pág. 111, afirma que alguns valores citados na literatura para  $\tau$  variam na faixa de 1,25 a 1,79. Ele menciona ainda que ([15], pág. 167) um valor plausível para seções não-circulares é 1,41. Além disto, a única informação adicional baseia-se no fato de que deve haver uma relação entre  $\tau$  e  $\epsilon$ , pois onde há maior porosidade o caminho tende a ser menos tortuoso.

Antes de obter quaisquer expressões para a tortuosidade, é preciso definir o modo de interpretá-la. No contexto deste trabalho, tortuosidade em um ponto P, numa direção i em um meio poroso é a média das tortuosidades nesta direção, do material de um volume-amostra "coletado" em P, mantida a orientação original. É interessante notar que a referida "média" das tortuosidades é diferente da média volumétrica até aqui adotada.

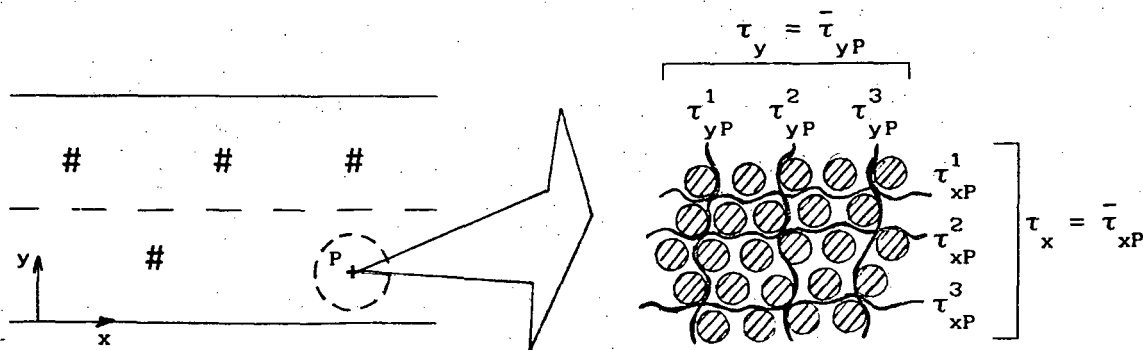


Figura 7-4 Definição de tortuosidade para um ponto P em um problema de placas paralelas

Em um problema de placas paralelas como o da fig. 7-3, há necessidade de se considerar a variação de  $\tau$  em  $x$  e em  $y$ . Para este problema, a fig. 7-4 mostra o significado de  $\tau$ . De acordo com o que foi exposto anteriormente,  $\tau_x$  e  $\tau_y$  serão idênticos para cada ponto, pois a cada volume-amostra está associado apenas um valor de porosidade. Estima-se, ainda, que eles seguirão uma variação similar à da porosidade, partindo de 1 na parede e crescendo com uma variação exponencial até uma posição suficientemente afastada da mesma, onde assumem um valor médio  $\tau_\infty$ . A fig. 7-5 mostra este comportamento.

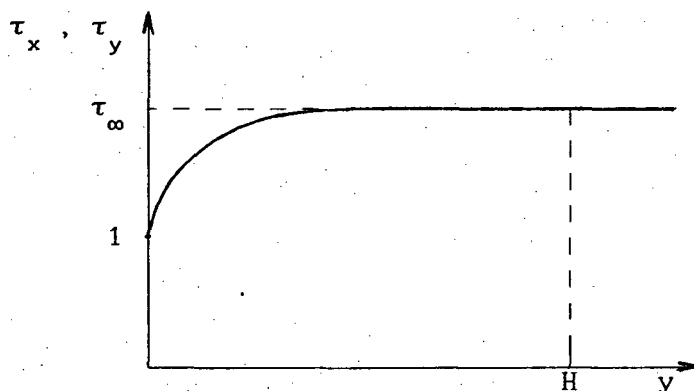


Figura 7-5 Variação de  $\tau$  com a distância da parede

Para uma completa definição da função que vai expressar a variação da tortuosidade no canal da fig. 7-3, falta apenas determinar o valor de  $\tau_\infty$  para arranjos aleatórios. Uma primeira estimativa pode ser obtida através de uma analogia com o conceito de "condutividade efetiva".

Em [11], pág.182, pode-se ver que, sob o ponto de vista de "condutividade térmica efetiva do meio poroso", mesmo quando o sólido já não tem mais influência no processo de condução de calor ( $k_s$  tendendo a zero), a condutividade térmica efetiva do meio não tende a ser apenas a do fluido. Em tal condição, o único efeito das esferas no processo de transferência de calor é "entortar" o fluxo. O valor de  $k_e$  (condutividade térmica efetiva) deve depender, portanto, somente do arranjo das esferas e da condutividade do fluido e vale, para arranjos ortorrômicos ( $\epsilon_\infty = 0.395$ ),

$$\left. \frac{k_e}{k_f} \right|_{k_s=0} = 0,244 \quad (7-5)$$

No presente trabalho, assumindo apenas condução (ausência de dispersão) e não considerando troca entre a fase fluida e a matriz sólida, a condutividade térmica efetiva pode ser obtida da equação (4-16) como sendo

$$\frac{k_e}{k_f} = \frac{\epsilon}{\tau_y^2} \quad (7-6)$$

Os resultados do problema resolvido em [11], pág. 180, apresentados na sua fig. 5.9, servem somente para arranjos ortorrômnicos. Para outros tipos de arranjos, as condições de contorno seriam outras. Isto significa que a porosidade não pode ser variada e deve ser tomada como " $\epsilon_\infty$ ". Então, uma comparação entre as expressões (7-5) e (7-6) fornece

$$\tau_\infty = \sqrt{\frac{\epsilon_\infty}{0,244}}$$

ou seja, uma boa estimativa para  $\tau_\infty$  é

$$\tau_\infty = \sqrt{\frac{0,395}{0,244}} = 1,27 \quad (7-7)$$

para arranjos ortorrômnicos.

Neste trabalho assume-se que as esferas estão em arranjo aleatório. Uma análise similar à apresentada em [11] se tornaria muito complexa para este caso. Por outro lado, é intuitivo que a tortuosidade é menor onde a porosidade é maior. Assim, uma boa estimativa para o valor de  $\tau_\infty$  correspondente a um arranjo aleatório de esferas é

$$\tau_\infty \approx 1,27 \frac{0,395}{0,37} = 1,36 \quad (7-8)$$

Este valor de  $\tau_\infty$  não é definitivo. Ele apenas servirá de guia para a obtenção do valor real, o que será feito com o auxílio de dados experimentais (ver item 9-4). A partir do momento em que  $\tau_\infty$  esteja determinado, será possível, finalmente, escrever uma variação para a tortuosidade em ambas as direções. Assim, utilizando-se a equação (7-1),

$$\tau_x = \tau_y = \tau_\infty + (1 - \tau_\infty) \exp(-\lambda y/d) \quad (7-9)$$

em que  $\lambda = 6$ . Note-se que a equação anterior é equivalente a

$$\frac{\tau_x - \tau_\infty}{1 - \tau_\infty} = \frac{\tau_y - \tau_\infty}{1 - \tau_\infty} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_\infty}{1 - \varepsilon_\infty} \quad (7-10)$$

Assumindo analogia entre os problemas térmico e mássico, estes valores serão os mesmos para o problema de transporte de massa.

Um outro aspecto a considerar é que, por conveniência numérica, a solução obtida para o problema particular será válida apenas para problemas em que pode ser desprezada a difusão em  $x$ . Isto leva a que, neste trabalho, apenas a expressão para  $y$  venha a ser utilizada. A expressão para  $\tau_x$  foi mantida por generalidade.

#### 7-4 REGIMES DE ESCOAMENTO EM MEIO POROSO

Em 1952, Ergun [13] concluiu, baseado em observações experimentais, que o gradiente de pressões pode ser equacionado à soma de dois termos como segue

$$-\frac{dP}{dx} = \frac{\mu}{K} \bar{u} + \rho_f A (\bar{u})^2 \quad (7-11)$$

onde  $\bar{u}$  estaria associado à vazão de fluido e  $K$  e  $A$  seriam dados por

$$K = \frac{d^2 \varepsilon^3}{150 (1-\varepsilon)^2} \quad (7-12)$$

$$A = \frac{1.75 (1-\varepsilon)}{\varepsilon^3 d} \quad (7-13)$$

Uma dedução para a equação (7-12) é apresentada no apêndice A.

Fand [18], contudo, após um estudo bastante detalhado, afirma que as expressões (7-12) e (7-13) na verdade são da forma

$$K = \frac{d^2 \varepsilon^3}{A_F (1-\varepsilon)^2} \quad (7-14)$$

$$A = \frac{B_F (1-\varepsilon)}{\varepsilon^3 d} \quad (7-15)$$

Nestas expressões, os coeficientes  $A_F$  e  $B_F$  (o índice "F" refere-se "a coeficientes de Fand") assumem valores diferentes em função do regime em que se encontra o escoamento. A este escoamento está associado um número de Reynolds,

$$Re_d = \frac{\bar{u} d}{\nu_f} \quad (7-16)$$

o qual, conforme o comportamento dos dados experimentais, permite estabelecer a seguinte divisão:

(i) fluxo darciniano

É a faixa dos escoamentos com  $Re_d \leq 3$ . Nesta faixa a lei de Darcy pode ser aplicada.

(ii) fluxo de Forschheimer

Para  $3 \leq Re_d \leq 100$ , o termo quadrático da equação (7-11) tem importância e

$$A_F = 182 \quad e \quad B_F = 1,92 \quad (7-17)$$

(iii) fluxo turbulento

Aumentando  $Re_d$  acima de 100, Fand notou o aparecimento de "turbilhões" característicos do problema de turbulência. Apesar da mudança drástica de comportamento, no entanto, ele observou que os resultados ainda podiam ser correlacionados pela expressão (7-11) desde que os coeficientes  $A_F$  e  $B_F$  assumissem os seguintes valores,

$$A_F = 225 \quad e \quad B_F = 1,61 \quad (7-18)$$

Em um trabalho posterior [25], Fand afirma haver uma restrição para as constantes  $A_F$  e  $B_F$ . Extrapolando seu resultado para diâmetro hidráulico (já que Fand realizou seus experimentos em dutos circulares e o interesse aqui é em placas paralelas),  $A_F$  e  $B_F$  somente são independentes da relação entre o diâmetro da esfera e o diâmetro hidráulico do duto,  $d/D_h$ , para

$$\frac{d}{D_h} \leq 0,025$$

Em placas paralelas,  $D_h = 4H$  (ver fig. 7-3), de modo que as constantes podem ser aplicadas da forma descrita apenas para

$$d/H \leq 0,1 \quad (7-19)$$

## 7-5 CARACTERÍSTICAS HIDRODINÂMICAS

### Permeabilidade

A permeabilidade  $K$  é uma propriedade "macroscópica" que expressa a facilidade com que um fluido pode ser transportado através da matriz porosa.

Assumindo um modelo capilar para o escoamento, conforme apêndice A, o fluxo darciniano resulta como uma manifestação "macroscópica" do fluxo de Hagen-Poiseuille no interior dos poros. Este modelo permite ainda prever a forma da função que relaciona  $K$  com as demais propriedades da matriz sólida (equação (A-15)).

A expressão matemática para  $K$  em um leito de esferas compactadas vem da equação (7-12),

$$K = \frac{d^2 \epsilon^3}{A_F (1-\epsilon)^2} \quad (7-20)$$

Bejan ([24], pág. 348) sugere que a lei de Darcy seja encarada como a própria definição de permeabilidade. Além disto, por uma comparação formal com a expressão do fluxo de Hagen-Poiseuille, e observando que  $K$  tem dimensão  $L^2$ , ele lembra que  $K^{1/2}$  pode representar a ordem de grandeza do diâmetro de poro efetivo.

### Coefficiente de Forschheimer

O coeficiente de Forschheimer,  $A$ , começa a ficar importante à medida que o fluxo começa a aumentar, pois está associado a um termo quadrático de velocidade. Este termo é conhecido como inércia do fluido e está relacionado à sua energia cinética.

O coeficiente de Forschheimer, designado por "A", é dado matematicamente pela expressão (7-15), onde  $B_F$  obedece aos regimes já descritos.

## 7-6 CARACTERÍSTICAS DE TRANSPORTE

### Coefficientes de Dispersão

De acordo com [11], pág.176, para meios porosos compostos de esferas em arranjos romboédricos, pode-se chegar, a partir de considerações teóricas, a

$$\gamma_F = 0,0895$$

o que, segundo [11], não é um valor definitivo.

Como uma maior variação da porosidade leva a um menor efeito de dispersão, supõe-se que uma estimativa para o caso de arranjos aleatórios é

$$\gamma_F = \gamma_w = 0,0895 \frac{0,26}{0,37} = 0,063 \quad (7-21)$$

É importante notar que este valor está ligado ao modelo de dispersão utilizado em [11], o qual supõe uma variação linear para o comprimento de mistura na região próxima à parede.



---

## 8 METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

---

Neste ponto a formulação está totalmente estabelecida e a atenção neste capítulo será voltada a um processo numérico para a solução das equações desenvolvidas anteriormente.

Conforme descrito no capítulo 2, o problema escolhido para análise envolve escoamento entre placas paralelas em um meio poroso composto de esferas. Entre a matriz sólida e o fluido em escoamento pode ocorrer transferência de calor e de massa. Adicionalmente, como não foi assumido equilíbrio térmico local, as temperaturas nas duas fases não são necessariamente iguais. Desta forma, em coordenadas cartesianas, o problema em consideração é descrito pelas seguintes equações,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3-2)$$

$$-\frac{1}{\rho_f} \frac{dP}{dx} + \frac{\nu_f}{\varepsilon} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\nu_f}{K} u - A u^2 = 0 \quad (3-30)$$

$$\rho_f c_{p_f} u \frac{\partial T_f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ k_e^f \frac{\partial T_f}{\partial y} \right] - q_f^* \quad (4-17)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ D_e \frac{\partial w}{\partial y} \right] - G^* \quad (4-30)$$

$$- \frac{\partial}{\partial y} \left[ k_e^s \frac{\partial T_s}{\partial y} \right] + q_s^* = 0 \quad (5-10)$$

onde  $q_f^*$ ,  $q_s^*$  e  $G^*$  são dados pelas equações (6-8), (6-9) e (6-7), respectivamente.

Neste capítulo é apresentada uma adimensionalização destas equações. Elas são, em seguida, discretizadas e submetidas a um método numérico adequado. Ao final são apresentados resultados que visam validar o método empregado. A solução obtida por computador é, então, comparada com resultados de problemas mais simples e com resultados experimentais.

## 8-1 ADIMENSIONALIZAÇÃO

### Campo de Velocidades

Em um escoamento em meios porosos as velocidades são da ordem da velocidade de Darcy,

$$u \sim \frac{K_\infty}{\mu_f} \left[ - \frac{dP}{dx} \right] \quad (8-1)$$

onde o índice " $\infty$ " se refere a uma propriedade típica no interior do meio poroso. A partir disto, uma possível adimensionalização para as grandezas do problema hidrodinâmico associado a um escoamento entre placas paralelas separadas por uma distância "2H" é

$$B = \frac{H^3}{\rho_f \nu_f^2} \left[ - \frac{dP}{dx} \right], \quad K_\infty^* = \frac{K_\infty}{H^2}$$

$$U = \frac{u H}{\nu_f B K_\infty^*}, \quad y_* = \frac{y}{H}, \quad d_* = \frac{d}{H} \quad (8-2)$$

Utilizando as expressões para  $\epsilon$ ,  $K$  e  $A$  apresentadas no capítulo 7, a substituição das grandezas adimensionais em (3-30) leva a

$$U + B C^* U^2 = \frac{K^*}{K_\infty^*} + \frac{K^*}{\varepsilon} \frac{d^2 U}{dy_*^2} \quad (8-3)$$

onde

$$C^* = \frac{B_F d_* K_\infty^*}{A_F (1-\varepsilon)} \quad K^* = \frac{d_*^2 \varepsilon^3}{A_F (1-\varepsilon)^2} \quad (8-4)$$

As condições de contorno para a equação (8-3) são

$$U|_{y_*=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial U}{\partial y_*} \right|_{y_*=1} = 0 \quad (8-5)$$

### Transferência de Calor no Fluido

Para a adimensionalização de (4-17) serão utilizadas as expressões dadas em (8-2) e

$$x_* = \frac{x}{H \text{Pr}} \quad (8-6)$$

$$T_f = T_E + T_E (1 - \theta_f) \phi(x) \quad (8-7)$$

$$T_s = T_E + T_E (1 - \theta_s) \phi(x) \quad (8-8)$$

$$\text{Nu}_d = \frac{h d}{k_f} = 2 + 1,1 \text{Pr}^{1/3} \text{Re}_P^{0,6} \quad (6-2)$$

$$\text{Re}_P = \frac{u d}{\nu_f} = B K_\infty^* U d_* \quad (8-9)$$

Nestas expressões o índice "e" se refere a "entrada do canal". A variável " $\phi$ " foi introduzida para permitir uma dedução única para os casos de temperatura prescrita e fluxo prescrita na parede do canal, sendo

$$\phi = \frac{T_w - T_E}{T_E} \quad \text{para temperatura prescrita, e}$$

$$\phi = \frac{q'' H}{k_f T_E} \text{ para um fluxo prescrito } q \quad (8-10)$$

o que significa que a variável  $\theta$  fica, para ambos os domínios (sólido e fluido),

$$\theta = \frac{T_w - T}{T_w - T_E} \text{ para temperatura prescrita e}$$

$$\theta = 1 - \frac{k_f}{q H} (T - T_E) \text{ para fluxo prescrito.} \quad (8-11)$$

Substituindo as variáveis adimensionais na equação (4-17) resulta

$$a_2 \frac{\partial \theta_f}{\partial x_*} + a_3 \theta_f - a_3 = \left[ a_4 p \right]' + \frac{6}{d_*^2} (1-\varepsilon) Nu_d (\theta_s - \theta_f) \quad (8-12)$$

onde o apóstrofo indica derivação em relação a  $y$  e as variáveis auxiliares introduzidas são definidas por

$$a_2 = B K_{\infty}^* U \quad (8-13)$$

$$a_3 = \frac{a_2 d\phi}{\phi dx_*} \quad (8-14)$$

$$a_4 = \frac{\varepsilon}{\tau_y^2} + \gamma_T Pr a_2 l_* \quad (8-15)$$

$$p = \frac{\partial \theta_f}{\partial y_*} \quad (8-16)$$

Os valores de  $\varepsilon$ ,  $\gamma_T$  e  $\tau_y$  são discutidos no capítulo 7 e o valor de  $l_*$  utilizado na definição (8-15) vai ser calculado por

$$l_* = y_* \quad \text{para } 0 \leq y_* \leq d_*$$

$$l_* = \frac{y_*^2}{d_*} \quad \text{para } y_* > d_* \quad (8-17)$$

## Condições de Contorno

$$\theta_f \Big|_{x_*=0} = 1 \quad (T_f = T_E) \quad (8-18)$$

$$\frac{\partial \theta_f}{\partial y_*} \Big|_{y_*=1} = 0 \quad (\text{simetria}) \quad (8-19)$$

$$\theta_f \Big|_{y_*=0} = 0 \quad (\text{para temperatura prescrita}) \quad (8-20)$$

$$\frac{\partial \theta_f}{\partial y_*} \Big|_{y_*=1} = 1 \quad (\text{para fluxo prescrito}) \quad (8-21)$$

## Transporte de uma Espécie Química

Considerando as definições (8-2), (8-6) e (4-29), a equação (4-30) adimensionalizada fica

$$\text{Le } a_2 \frac{\partial w}{\partial x_*} = \left[ a_5 W \right]' + \frac{6(1-\epsilon)}{d_*^2} \text{Sh}_d (w_s - w) \quad (8-22)$$

em que  $a_2$  é dado pela expressão (8-13), Le é o número de Lewis do fluido e

$$W = \frac{\partial w}{\partial y_*} \quad (8-23)$$

$$a_5 = \frac{\epsilon}{\tau_y^2} + \gamma_w \text{Sc } a_2 \ell_* \quad (8-24)$$

$$\text{Sh}_d = \frac{K_w d}{D_{AB}} = 2 + 1,1 \text{Sc}^{1/3} \text{Re}_P^{0,6} \quad (6-4)$$

em que  $\text{Re}_P$  é dado por (8-9) e  $\ell_*$  é dado por (8-17). As grandezas que não foram especificadas ( $\gamma$ ,  $\tau$  e  $w_s$ ) vêm do capítulo 7 e do apêndice E.

## Condições de Contorno

$$\left. \frac{\partial w}{\partial y_*} \right|_{y_*=0} = 0 \quad (\text{parede impermeável}) \quad (8-25)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial y_*} \right|_{y_*=1} = 0 \quad (\text{condição de simetria}) \quad (8-26)$$

## Transferência de Calor no Sólido

Utilizando as definições dos itens anteriores, a equação (5-10) adimensionalizada fica

$$\left[ a_6 F \right]' = \sigma_1 (1-\varepsilon) Nu_d (\theta_f - \theta_s) + \frac{\sigma_2}{\phi} (1-\varepsilon) Sh_d (w_s - w) \quad (8-27)$$

onde foram definidas as variáveis

$$F = \frac{\partial \theta_s}{\partial y_*} \quad (8-28)$$

$$a_6 = \frac{1-\varepsilon}{\tau_y^2} \quad (8-29)$$

$$\sigma_1 = - \frac{6}{d_*^2} k_R \quad (8-30)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{Ja Le} \quad (8-31)$$

Nas expressões (8-30) e (8-31) aparecem dois novos parâmetros do problema,

- o número de Jakob,

$$Ja = \frac{c_p T_E}{h_{fg}} \quad (8-32)$$

e

- a relação de condutividades,

$$k_R = \frac{k_f}{k_s} \quad (8-33)$$

*Condições de Contorno*

$$\left. \frac{\partial \theta_s}{\partial y_*} \right|_{y_*=0} = 0 \quad (\text{só há fluido em contato com a parede}) \quad (8-34)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_s}{\partial y_*} \right|_{y_*=1} = 0 \quad (\text{condição de simetria}) \quad (8-35)$$

**8-2 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES ADIMENSIONALIZADAS**

As equações apresentadas no item 8-1 estão prontas para serem discretizadas.

O método escolhido foi elaborado por H. B. Keller ([14], pág.391) e foi designado como "Método das Caixas". Sua aplicação é adequada a este caso porque, entre outras características, permite a obtenção de erros de segunda ordem com espaçamentos arbitrários em x e y e também permite uma fácil programação da solução de um grande número de equações acopladas (que neste trabalho serão seis).

A solução de um sistema de equações por este método pode ser obtida seguindo-se 4 passos,

- (i) reduzir as equações a um sistema de primeira ordem;
- (ii) discretizá-las utilizando diferenças centrais;
- (iii) escrevê-las numa forma matricial;
- (iv) resolver o sistema linear resultante pelo "Método de Eliminação Tri-diagonal em Blocos".

A discretização será feita em diferenças centrais, em que o ponto de centragem (ponto ao qual vão se referir as equações discretizadas) estará localizado conforme descrito na fig.8-1.

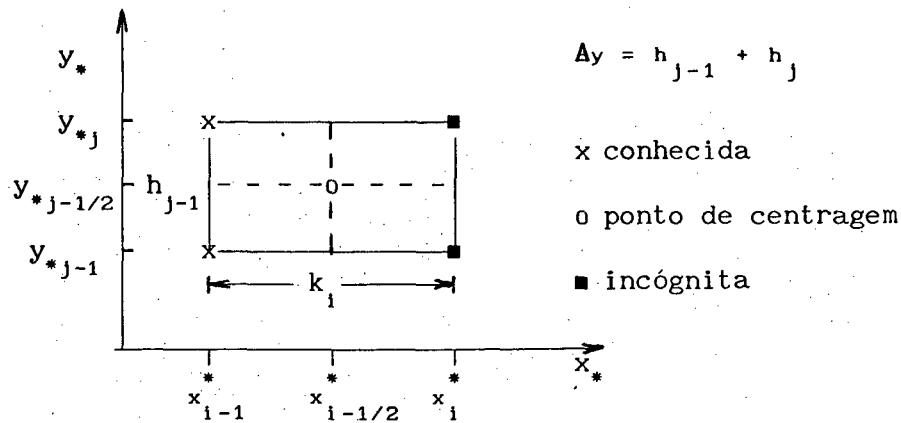


Figura 8-1 Ponto de centragem das discretizações

Tanto o espaçamento  $h$  como o espaçamento  $k$  podem ser não uniformes e, para todas as discretizações,

$$x_{i-1/2}^* = \frac{1}{2} (x_i^* + x_{i-1}^*) \quad (8-36)$$

$$y_{j-1/2}^* = \frac{1}{2} (y_j^* + y_{j-1}^*) \quad (8-37)$$

**Campo de Velocidades**

Esta é a única equação que não está acoplada com as demais. Sua solução será obtida por TDMA [27].

A equação adimensionalizada (8-3) pode ser convertida em um sistema do tipo

$$a_j U_j = b_j U_{j+1} + c_j U_{j-1} + d_j \quad (8-37)$$

onde

$$a_j = \frac{h_j + h_{j-1}}{2} + \frac{B}{2} C_j^* U_j^{ANT} (h_j + h_{j-1}) + \frac{K_j^*}{\epsilon_j} \left( \frac{1}{h_j} + \frac{1}{h_{j-1}} \right)$$

$$b_j = \frac{K_j^*}{\epsilon_j h_j}, \quad c_j = \frac{K_j^*}{\epsilon_j h_{j-1}}$$

$$d_j = \frac{K_j^*}{2} (h_j + h_{j-1}) \quad (8-38)$$



É importante notar que está sendo permitido que  $\epsilon$  varie apenas com  $y$ .

O índice  $j$ , por convenção, valerá 1 na parede do canal e NTP (Número Total de Pontos) na linha de centro do mesmo. O superíndice "ANT" se refere ao valor da variável na posição  $i-1$ .

As condições de contorno ficam

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 & b_1 &= 0 & c_1 &= 0 & d_1 &= 0 \\ a_{NTP} &= 1 & b_{NTP} &= 0 & c_{NTP} &= 1 & d_{NTP} &= 0 \end{aligned} \quad (8-39)$$

Após obtido o campo de velocidades, as demais equações podem ser resolvidas conforme apresentado a seguir.

#### Transferência de Calor no Fluido

Esta parte do problema é governada por duas equações acopladas, (8-12) e (8-16).

Como a derivada, equação (8-16), não tem termos em  $x_*$ , sua discretização será centrada em  $x_{*1}$ ,

$$(\theta_f)_j^i - (\theta_f)_{j-1}^i - \frac{h}{2} (p_j^i + p_{j-1}^i) = 0 = (r_4)_j \quad (8-40)$$

A equação (8-12) para  $x_{*i-1/2}$ , termo a termo, fica

$$\left[ a_2 \frac{\partial \theta_f}{\partial x_*} \right]_{j-1/2}^{i-1/2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{(a_2 \theta_f)_j^i - (a_2 \theta_f)_j^{i-1}}{k_i} + \frac{(a_2 \theta_f)_{j-1}^i - (a_2 \theta_f)_{j-1}^{i-1}}{k_i} \right] \quad (8-41)$$

$$\left[ a_3 \theta_f \right]_{j-1/2}^{i-1/2} = \frac{1}{4} \left[ (a_3 \theta_f)_j^i + (a_3 \theta_f)_{j-1}^i + 2 (a_3 \theta_f)_{j-1/2}^{i-1} \right] \quad (8-42)$$

$$(a_3)_{j-1/2}^{i-1/2} = \frac{1}{4} \left[ (a_3)_j^i + (a_3)_{j-1}^i + 2 (a_3)_{j-1/2}^{i-1} \right] \quad (8-43)$$

$$\left[ (a_4 p)_j \right]_{j-1/2}^{i-1/2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{(a_4 p)_j^i - (a_4 p)_{j-1}^i}{h_{j-1}} + \frac{(a_4 p)_j^{i-1} - (a_4 p)_{j-1}^{i-1}}{h_{j-1}} \right] \quad (8-44)$$

$$\left[ \frac{6}{d_*^2} (1-\varepsilon) Nu_d (\theta_s - \theta_f) \right]_{j-1/2}^{i-1/2} = \frac{1}{4} \frac{6}{d_*^2} \left[ \left( (1-\varepsilon) Nu_d (\theta_s - \theta_f) \right)_j^i + \left( (1-\varepsilon) Nu_d (\theta_s - \theta_f) \right)_{j-1}^i + 2 \left( (1-\varepsilon) Nu_d (\theta_s - \theta_f) \right)_{j-1/2}^{i-1} \right] \quad (8-45)$$

Substituindo as expressões anteriores na equação (8-12) e multiplicando por 2, resulta

$$(s_1)_j p_j^i + (s_2)_j p_{j-1}^i + (s_3)_j (\theta_f)_j^i + (s_4)_j (\theta_f)_{j-1}^i + (s_5)_j (\theta_s)_j^i + (s_6)_j (\theta_f)_{j-1}^i = R_{j-1/2}^i = (r_1)_j \quad (8-46)$$

onde

$$(s_1)_j = \frac{(a_4)_j}{h_{j-1}} \quad (s_2)_j = - \frac{(a_4)_{j-1}}{h_{j-1}}$$

$$(s_3)_j = - \frac{1}{2} (a_3)_j^i - \frac{(a_2)_j}{k_i} - \frac{3}{d_*^2} \left[ ((1-\varepsilon) Nu_d)_j \right]$$

$$(s_4)_j = - \frac{1}{2} (a_3)_{j-1}^i - \frac{(a_2)_{j-1}}{k_i} - \frac{3}{d_*^2} \left[ ((1-\varepsilon) Nu_d)_{j-1} \right]$$

$$(s_5)_j = \frac{3}{d_*^2} ((1-\varepsilon) Nu_d)_j$$

$$(s_6)_j = \frac{3}{d_*^2} ((1-\varepsilon) Nu_d)_{j-1}$$

$$\begin{aligned}
 R_{j-1/2}^{i-1} = & - \left[ \frac{(a_4 p)_j^{i-1} - (a_4 p)_{j-1}^{i-1}}{h_{j-1}} \right] - \frac{2}{k_i} (a_2 \theta_f)_{j-1/2}^{i-1} + \\
 & + (a_3 \theta_f)_{j-1/2}^{i-1} - \frac{1}{2} \left[ (a_3)_j^i + (a_3)_{j-1}^i + 2 (a_3)_{j-1/2}^{i-1} \right] + \\
 & + \frac{6}{d_*^2} ((1-\epsilon) Nu_d (\theta_f - \theta_s)_{j-1/2}^{i-1}) \quad (8-47)
 \end{aligned}$$

### Condições de Contorno

Utilizando a facilidade de se estar resolvendo "p" também, as condições de contorno podem ser escritas como

$$\alpha_1 \theta_1 + \alpha_1 p_1 = \xi_1$$

$$p_{NTP} = 0 \quad (8-48)$$

### Transporte de uma Espécie Química

Neste caso as equações pertinentes são (8-22) e (8-23).

Discretizando a equação (8-23),

$$(w)_j^i - (w)_{j-1}^i - \frac{h_{j-1}}{2} (W_j^i + W_{j-1}^i) = 0 = (r_5)_j \quad (8-49)$$

Para a equação (8-22), a discretização de cada termo resulta em

$$\begin{aligned}
 \left[ Le a_2 \frac{\partial w}{\partial x_*} \right]_{j-1/2}^{i-1/2} = & Le \left[ \frac{(a_2 w)_j^i - (a_2 w)_j^{i-1}}{k_i} + \right. \\
 & \left. + \frac{(a_2 w)_{j-1}^i - (a_2 w)_{j-1}^{i-1}}{k_i} \right] \quad (8-50)
 \end{aligned}$$

$$\left[ (a_5 W)_j \right]_{j-1/2}^{i-1/2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{(a_5 W)_j^i - (a_5 W)_{j-1}^i}{h_{j-1}} + \frac{(a_5 W)_j^{i-1} - (a_5 W)_{j-1}^{i-1}}{h_{j-1}} \right] \quad (8-51)$$

$$\left[ \frac{6}{d_*^2} (1-\epsilon) \text{Sh}_d (w_s - w) \right]_{j-1/2}^{i-1/2} = \frac{1}{4} \frac{6}{d_*^2} \left[ \begin{aligned} & \left( (1-\epsilon) \text{Sh}_d (w_s - w) \right)_j^i + \\ & \left( (1-\epsilon) \text{Sh}_d (w_s - w) \right)_{j-1}^i + \\ & + 2 \left( (1-\epsilon) \text{Sh}_d (w_s - w) \right)_{j-1/2}^{i-1} \end{aligned} \right] \quad (8-52)$$

Substituindo os termos anteriores na equação (8-22) e multiplicando por 2, resulta, após um rearranjo,

$$(z_1)_j W_j^i + (z_2)_j W_{j-1}^i + (z_3)_j W_j^i + (z_4)_j W_{j-1}^i = Z_{j-1/2}^{i-1} = (r_2)_j \quad (8-53)$$

onde

$$(z_1)_j = \frac{(a_5)_j}{h_{j-1}}, \quad (z_2)_j = - \frac{(a_5)_{j-1}}{h_{j-1}}$$

$$(z_3)_j = - \frac{\text{Le} (a_2)_j}{k_i} - \frac{3}{d_*^2} \left[ (1-\epsilon) \text{Sh}_d \right]_j$$

$$(z_4)_j = - \frac{\text{Le} (a_2)_{j-1}}{k_i} - \frac{3}{d_*^2} \left[ (1-\epsilon) \text{Sh}_d \right]_{j-1}$$

$$\begin{aligned} Z_{j-1/2}^{i-1} = & - \left[ \frac{(a_5 W)_j^{i-1} - (a_5 W)_{j-1}^{i-1}}{h_{j-1}} \right] - \frac{2 \text{Le}}{k_i} (a_2 w)_{j-1/2}^{i-1} + \\ & - \frac{6}{d_*^2} \left[ \left( (1-\epsilon) \text{Sh}_d (w_s - w) \right)_{j-1/2}^{i-1} + \left( (1-\epsilon) \text{Sh}_d w_s \right)_{j-1/2}^i \right] \end{aligned} \quad (8-54)$$

Condições de Contorno

$$W_1 = 0 \quad \text{e} \quad W_{\text{NTP}} = 0 \quad (8-55)$$

Transferência de Calor no Sólido

Discretizando a equação (8-28) resulta

$$(\theta_s)_j^i - (\theta_s)_{j-1}^i - \frac{h_{j-1}}{2} (F_j^i + F_{j-1}^i) = 0 = (r_6)_j \quad (8-56)$$

Uma vez que a equação (8-27), do mesmo modo que a equação (8-28), não apresenta derivadas em  $x_*$ , o ponto de centragem será  $x_{*i}$ .

Analisando individualmente cada termo da equação (8-27) tem-se

$$\left[ (a_6 F)_j \right]_{j-1/2}^{i-1/2} = \left[ \frac{(a_6 F)_j^i - (a_6 F)_{j-1}^i}{h_{j-1}} \right] \quad (8-57)$$

$$\left[ \sigma_1 (1-\varepsilon) Nu_d (\theta_f - \theta_s) \right]_{j-1/2}^i = \frac{\sigma_1}{2} \left[ ((1-\varepsilon) Nu_d (\theta_f - \theta_s))_j^i + ((1-\varepsilon) Nu_d (\theta_f - \theta_s))_{j-1}^i \right] \quad (8-58)$$

$$\left[ \sigma_2 \frac{(1-\varepsilon)}{\phi} Sh_d (w_s - w) \right]_{j-1/2}^i = \frac{\sigma_2}{2 \phi} \left[ ((1-\varepsilon) Sh_d (w_s - w))_j^i + ((1-\varepsilon) Sh_d (w_s - w))_{j-1}^i \right] \quad (8-59)$$

A equação (8-27) discretizada pode, então, ser escrita como

$$\begin{aligned} (g_1)_j F_j^i + (g_2)_{j-1} F_{j-1}^i + (g_3)_j (\theta_s)_j^i + (g_4)_j (\theta_s)_{j-1}^i + \\ - (g_3)_j (\theta_f)_j^i - (g_4)_j (\theta_f)_{j-1}^i + \\ + (g_5)_j w_j^i + (g_6)_j w_{j-1}^i = Q_{j-1/2}^i = (r_3)_j \end{aligned} \quad (8-60)$$

onde

$$(g_1)_j = \frac{(a_6)_j}{h_{j-1}} \quad (g_2)_j = - \frac{(a_6)_{j-1}}{h_{j-1}}$$



$$\bar{\delta} = \bar{\delta}_j \hat{e}_j \quad 1 \leq j \leq NTP \quad (8-64)$$

$$\bar{r} = \bar{r}_j \hat{e}_j \quad 1 \leq j \leq NTP \quad (8-65)$$

$$\bar{\delta}_j = \begin{bmatrix} (\theta_r)_j \\ p_j \\ w_j \\ W_j \\ (\theta_s)_j \\ F_j \end{bmatrix} \quad \bar{r}_j = \begin{bmatrix} (r_1)_j \\ (r_2)_j \\ (r_3)_j \\ (r_4)_j \\ (r_5)_j \\ (r_6)_j \end{bmatrix} \quad (8-66)$$

$$\bar{A}_j = \begin{bmatrix} (s_3)_j & (s_1)_j & & (s_5)_j \\ & & (z_3)_j & (z_1)_j \\ -(g_3)_j & & (g_5)_j & (g_1)_j \\ -1 & -\frac{h_j}{2} & & \\ & & -1 & -\frac{h_j}{2} \\ & & & -1 & -\frac{h_j}{2} \end{bmatrix} \quad 2 \leq j \leq NTP-1 \quad (8-67)$$

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & & 0 & 1 \\ -1 & -\frac{h_1}{2} & & & & \\ & & -1 & -\frac{h_1}{2} & & \\ & & & & -1 & -\frac{h_1}{2} \end{bmatrix} \quad (8-68)$$

$$\bar{A}_{NTP} = \begin{bmatrix} (s_3)_{NTP} & (s_1)_{NTP} & & & (s_5)_{NTP} \\ & & (z_3)_{NTP} & (z_1)_{NTP} & & \\ -(g_3)_{NTP} & & (g_5)_{NTP} & & (g_3)_{NTP} & (g_1)_{NTP} \\ 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8-69)$$

$$\bar{B}_j = \begin{bmatrix} (s_4)_j & (s_2)_j & & & (s_6)_j \\ & & (z_4)_j & (z_2)_j & & \\ -(g_4)_j & & (g_6)_j & & (g_4)_j & (g_2)_j \\ 0 & 0 & & & & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & & & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8-70)$$

$2 \leq j \leq NTP$

$$\bar{C}_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & & & \\ & & 0 & 0 & & \\ & & & & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{h_j}{2} & & & & \\ & & 1 & -\frac{h_j}{2} & & \\ & & & & 1 & -\frac{h_j}{2} \end{bmatrix} \quad (8-71)$$

$1 \leq j \leq NTP-1$

$$(r_1)_1 = \xi_1 \quad (r_2)_1 = 0 \quad (r_3)_1 = 0$$

$$(r_4)_{NTP} = 0 \quad (r_5)_{NTP} = 0 \quad (r_6)_{NTP} = 0$$

**Perfil de Temperaturas na Entrada para Sólido**

A discretização anterior representa, então, a equação para o sólido,



exceto para a primeira estação, onde os valores de  $\theta_f$  e  $w$  são dados, restando apenas o acoplamento entre  $T_s$  e  $w_s$  para ser resolvido. A primeira estação pode, então, ser resolvida por TDMA.

Discretizando termo a termo para TDMA a equação (8-27), chega-se a

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial y^*} \left[ a_6 \frac{\partial \theta_s}{\partial y^*} \right] \right]_j &= \frac{\left[ a_6 \frac{\partial \theta_s}{\partial y^*} \right]_{j+1/2} - \left[ a_6 \frac{\partial \theta_s}{\partial y^*} \right]_{j-1/2}}{(h_j + h_{j-1})/2} = \\ &= \left[ \left( \frac{(a_6)_{j+1} + (a_6)_j}{2} \right) \left( \frac{(\theta_s)_{j+1} - (\theta_s)_j}{h_j} \right) + \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{(a_6)_j + (a_6)_{j-1}}{2} \right) \left( \frac{(\theta_s)_j - (\theta_s)_{j-1}}{h_{j-1}} \right) \right] \frac{2}{(h_j + h_{j-1})} \quad (8-72) \end{aligned}$$

Substituindo a equação (8-72) e avaliando o lado direito da equação (8-27) para "j", pode-se chegar a uma expressão do tipo

$$a_j (\theta_s)_j = b_j (\theta_s)_{j+1} + c_j (\theta_s)_{j-1} + d_j \quad (8-73)$$

onde

$$a_j = \frac{2}{\Delta y} \left[ \frac{(a_6)_{j+1} + (a_6)_j}{2 h_j} + \frac{(a_6)_j + (a_6)_{j-1}}{2 h_{j-1}} \right] - \sigma_1 (1-\epsilon)_j (Nu_d)_j \quad (8-74)$$

$$b_j = \frac{(a_6)_{j+1} + (a_6)_j}{2 h_j \Delta y} \quad (8-75)$$

$$c_j = \frac{(a_6)_j + (a_6)_{j-1}}{2 h_{j-1} \Delta y} \quad (8-76)$$

$$d_j = -\sigma_1 \left[ (1-\epsilon) Nu_d \theta_f \right]_j - \sigma_2 (1-\epsilon)_j \frac{(Sh_d)_j}{\phi} \left[ (w_s)_j - w_j \right] \quad (8-77)$$

Condições de Contorno

$$\begin{array}{cccc} a_1 = 1 & b_1 = 1 & c_1 = 0 & d_1 = 0 \\ \hline a_{NTP} = 1 & b_{NTP} = 0 & c_{NTP} = 1 & d_{NTP} = 0 \end{array} \quad (8-78)$$

---

## 9 VALIDAÇÃO DO PROCESSO NUMÉRICO

---

### 9-1 RESULTADOS A SEREM OBTIDOS

Antes de validar o processo numérico, é preciso definir o tipo de resultado que vai ser extraído para análise. Há um problema de transferência de calor e um de transporte de massa envolvidos, o que leva, naturalmente, a procurar números de "Nusselt" e "Sherwood". Estes números, no entanto, devem ser definidos de modo a fornecer informações sobre o escoamento sem desrespeitar as peculiaridades matemáticas nem a significação física das variáveis utilizadas.

#### Número de Nusselt

Pretende-se aqui buscar o análogo do "h" de escoamentos em meios contínuos, ou seja,

$$h = \frac{-k_f \left. \frac{\partial T_f}{\partial y} \right|_{y=0}}{T_p - T_m} \quad (9-1)$$

onde  $T_m$  é a temperatura de mistura em uma seção do canal e  $T_p$  é a temperatura da parede no ponto correspondente à seção tomada.

O que é fornecido pelo programa, no entanto, são valores médios de temperatura, os quais não podem ser utilizados diretamente para o cálculo deste "h". Para o cálculo do calor que sai da parede, é preciso, para seguir rigorosamente a definição, conhecer valores locais. Um agravante a considerar é que para cada campo de temperaturas locais há apenas um campo de médias, mas não se pode garantir que a recíproca seja verdadeira.

Ocorre que junto à parede há apenas fluido, o que permite escrever

$$\langle T_f \rangle^f = \frac{1}{V_f} \int_V T_f \, dV = T_f \quad (9-2)$$

Adicionalmente,

- $T_p$  pode ser encarado como média, pois refere-se à parede;
- $T_m$  será uma "média de médias". Isto não faz diferença porque este valor servirá apenas para o cálculo do calor que sai da parede, quando necessário.

Diante disto, a expressão de "h" nas variáveis deste trabalho é

$$h = \frac{- \frac{k_f}{(\tau_y)_1^2} \frac{\partial \langle T_f \rangle^f}{\partial y}}{\langle T_p \rangle^f - \langle T_m \rangle^f} \quad (9-3)$$

em que  $(\tau_y)_1$  é o valor da tortuosidade na parede. Mas, junto à parede só há fluido, de modo que

$$(\tau_y)_1 = 1$$

Escrevendo em termos de variáveis adimensionais e na notação simplificada adotada,

$$Nu = \frac{- 2 \left. \frac{\partial T_f}{\partial y_*} \right|_{y_*=0}}{(T_p - T_m)}$$

mas

$$T_f = T_E + T_E \phi (1 - \theta_f)$$

logo, a expressão de Nusselt baseado na largura do canal "2H" é

$$Nu = \frac{2 \left. \frac{\partial \theta_f}{\partial y_*} \right|_{y_*=0}}{(\theta_{fm} - \theta_{fP})} \quad (9-4)$$

sendo  $\theta_{fm}$  calculado a partir de

$$T_{fm} = \frac{1}{H \bar{u}} \int_0^H u T_f dy \quad (9-5)$$

$$\theta_{fm} = 1 - \frac{(T_{fm} - T_E)}{T_E \phi} \quad (9-6)$$

Substituindo a expressão (9-5) em (9-6), resulta

$$\theta_{fm} = \frac{\int_0^1 U \theta_f dy_*}{\bar{U}} \quad (9-7)$$

## 9-2 VALIDAÇÃO NUMÉRICA

O objetivo nesta seção é adaptar as equações de meio poroso para resolver problemas com resultados conhecidos. Confirmados os resultados, pode-se ter certeza de que o método de solução está sendo bem aplicado.

O campo de velocidades é independente de  $x$  e das demais variáveis do problema. Ele não está envolvido no sistema utilizado para resolver simultaneamente as seis equações que compõem o problema parabólico de transferência de calor e massa. Trata-se, portanto, de testar dois blocos de solução distintos. No primeiro, será testado o TDMA utilizado para a solução do problema hidrodinâmico e no segundo o Método das Caixas de Keller.

### Campo de Velocidades

Impondo, no problema hidrodinâmico,

$$\begin{aligned} K^* &\equiv 1 & K_{\infty}^* &= 1 & B &= 1 \\ \varepsilon &= 1 & C^* &\equiv 0 \end{aligned} \quad (9-8)$$

a equação (7-3) fica

$$U'' - U = -1 \quad (9-9)$$

a qual, com as condições de contorno do problema,

$$U|_{y_*=0} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{dU}{dy_*} \right|_{y_*=1} = 0$$

tem a solução analítica

$$U = 1 - \frac{\cosh(1-y_*)}{\cosh 1} \quad (9-10)$$

Numa solução com 21 pontos e com a malha concentrada próximo ao centro do canal, chega-se a um erro máximo de 0,57%.

### Transferência de Calor no Fluido

As equações para o fluido e para o transporte de um soluto, (8-12) e (8-22), serão ambas convertidas na equação que descreve o desenvolvimento do perfil de temperaturas para o escoamento em um duto. O resultado, com um perfil parabólico imposto,

$$U = \frac{y_*}{K_{\infty}^*} \left[ 1 - \frac{y_*}{2} \right] \quad (9-11)$$

pode ser obtido da literatura.

A fim de converter a equação (7-12) na equação desejada, basta fazer

$$\varepsilon \equiv 1 \quad \tau_y \equiv 1 \quad Nu_d \equiv 0 \quad \gamma_f = 0 \quad (9-12)$$

Foi, então, calculado o número de Nusselt ao longo da região de entrada. Os resultados obtidos foram comparados com a solução analítica correspondente apresentada em [23] para uma condição de temperatura prescrita. A comparação foi feita entre valores adimensionalizados em relação a Nusselt plenamente desenvolvido, pois a solução de [23], possivelmente por arredondamento nas constantes, não tende ao valor exato para Nusselt plenamente desenvolvido.

O erro fica em torno de 0,2%. É interessante notar que a malha em  $y$  foi "comprimida" próximo à parede para captar a camada limite.

O programa foi testado também com relação a independência de malha e, diminuindo o incremento da malha ao longo do escoamento para a metade do utilizado, o Nusselt altera em menos de 0,02%.

Para fluxo prescrito foi obtido o valor de Nusselt plenamente desenvolvido com precisão de 2%.

### Transporte de um Sólido

Fazendo

$$\varepsilon \equiv 1 \quad \tau_y \equiv 1 \quad Sh_d \equiv 0 \quad \gamma_w = 0 \quad (9-13)$$

e  $Le = 1$ , a equação resultante fica idêntica, em forma, à equação da transferência de calor para escoamento em dutos.

Mudando a condição de contorno na parede para "w prescrito" ou "w' prescrito", um "número de Sherwood na parede" baseado em concentrações se comporta exatamente da mesma maneira que o Nusselt correspondente.

Na verdade, este problema foi resolvido juntamente com o anterior e, em todos os cálculos efetuados, o Nusselt calculado para o problema térmico do fluido e o "Sh de parede" não apresentaram diferença.

### Equação do Sólido

Fazendo

$$\varepsilon \equiv 0,9 \quad \tau_y \equiv 1 \quad Nu_d \equiv 1 \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 1$$

$$w \equiv 1 \quad \phi = 1 \quad Sh_d \equiv 0 \quad w_s \equiv 0,2$$

$$\theta_f \equiv 0.9 \quad \theta_s|_{y_*=0} = 2 \quad \left. \frac{\partial \theta_s}{\partial y_*} \right|_{y_*=1} = 0 \quad (9-14)$$

na equação (7-27), chega-se a

$$\theta_s'' + \theta_s = 1 \quad (9-15)$$

que tem como solução

$$\theta_s = 1 + \frac{\cos(1-y_*)}{\cos 1} \quad (9-16)$$

Utilizando 11 pontos em  $y$  e uma malha comprimida junto à parede, chega-se a um erro menor do que 0.07%.

### 9-3 ANÁLISE DE ESTABILIDADE

Apesar de os resultados obtidos estarem muito bons, houve algumas dificuldades em sua obtenção. Os problemas ocorridos são descritos a seguir.

Para as equações de transferência de calor no fluido e de transporte de massa, ocorreram problemas devido ao processo de "marcha" no canal. Com um  $\Delta x_*$  arbitrário, os números de Nusselt e Sherwood oscilavam antes de convergir.

Aplicando uma análise similar à de von Neumann, foi possível estimar um  $\Delta x_*$  máximo para que a solução não oscilasse.

Segundo von Neumann, para arranjo explícito em  $t$ ,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

vale

$$\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

onde  $\Delta t$  representa o avanço máximo permitido no tempo considerando um espaçamento de  $\Delta x$  para a malha em  $x$ .

Aproveitando a semelhança formal, para

$$(B K_{\infty}^* U) \frac{\partial \theta_f}{\partial x_*} = \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial y_*^2}$$

vale, como estimativa,

$$\Delta x_* \leq \left[ \frac{B K_{\infty}^*}{2} \right] U \Delta y_*^2$$

mas, para este problema

$$U = \frac{y_*}{K_{\infty}^*} \left[ 1 - \frac{y_*}{2} \right] \tag{9-11}$$

Certamente a combinação mais crítica se dá para o ponto mais próximo da parede, onde, sendo q a razão para uma malha em PG,

$$\Delta y_* = (\Delta y_*)_1 = \frac{(q-1)}{q^{NTP-1} - 1}$$

e

$$U = U_1 = \frac{(\Delta y_*)_1}{K_{\infty}^*} \left[ 1 - \frac{(\Delta y_*)_1}{2} \right]$$

o que leva, após desprezar o termo de ordem menor, a

$$\Delta x_* \leq \frac{B}{2} \left[ \frac{q-1}{q^{NTP-1} - 1} \right]^3 \tag{9-17}$$

Conforme introduzido no capítulo 8, NTP é o número total de pontos na direção y.

Para determinar o caso ótimo em termos computacionais, a expressão (9-17) não é suficiente. O importante é estimar quantas estações são necessárias para que seja atingido o regime plenamente desenvolvido.

De [23], pág.7-63 sabe-se que, com um erro desprezível, o Nusselt já estará plenamente desenvolvido para

$$x_* > 0,1 Re_{D_h} \tag{9-18}$$

É conhecido que

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{24}{Re_{D_h}} \frac{\rho u^2}{2H}$$



$$\Rightarrow B = \frac{3}{4} Re_{D_h}$$

o que permite, finalmente, afirmar que

$$x_{*PD} > \frac{0,4 B}{3} \quad (9-19)$$

de modo que o número de estações (quantidade de  $\Delta x_{*m\acute{a}x}$ ) que deverá ser rodado até o regime plenamente desenvolvido é

$$N_{est} > \frac{0,8}{3} \left[ \frac{q^{NTP-1} - 1}{q-1} \right]^3 \quad (9-20)$$

Com base em  $N_{est}$  foi, então, possível, determinar casos que demandassem um tempo de computação razoável.

Por analogia, para o problema de transporte de massa,

$$N_{est/massa} = \frac{N_{est}}{Le}$$

de modo que, fazendo  $Le = 1$ , os dois problemas (fluido e massa) se comportam da mesma forma.

### Análise de Estabilidade para o Problema Acoplado de Calor e Massa

Para o problema acoplado de transferência de calor e massa, pode haver oscilações numéricas na solução das equações (8-12) e (8-22). Para esta análise será considerada apenas a ordem de grandeza dos termos semelhantes ao da análise de von Neumann, que são os termos que parecem dar origem a estas oscilações.

Assim,

$$\alpha \sim \frac{a_4}{B K_{\infty}^*}$$

$$\Delta x_* \leq \frac{U \Delta y_*^2}{2 \alpha}$$

de onde se conclui que para que não haja oscilações numéricas, é necessário que

$$\Delta x_* \leq \frac{[U \Delta y_*^2]_{\text{crit}}}{2} \frac{B K_\infty^*}{\left[ \frac{\varepsilon}{\tau_\infty^2} + \text{Pr} B U_{\text{crit}} K_\infty^* d_* \gamma_T \right]} \quad (9-21)$$

Para uma malha suficientemente refinada, o ponto crítico vai ficar sempre perto da parede, uma vez que é aí que se encontram os menores valores de  $\Delta y_*$ . Desta forma, pode-se considerar

$$U_{\text{crit}} = U_1 \quad \text{e} \quad \Delta y_{*\text{crit}} = \Delta y_{*1}$$

Para a equação de transporte de massa tem-se uma expressão equivalente à equação (9-21), dependente de "Le" e  $\gamma_w$ .

Considerando que as equações (8-12) e (8-22) estão acopladas, é necessário adotar uma expressão que seja válida para ambos os casos. Em princípio, os coeficientes de dispersão ( $\gamma$ ) devem ser da mesma ordem de grandeza. Assumindo Le menor do que 1, a expressão que se encontra a favor da segurança é aquela associada à equação de transporte de massa, ou seja,

$$\Delta x_* \leq \frac{U_1 [\Delta y_*^2]_1}{2} \frac{\text{Le} B K_\infty^*}{\left[ \frac{\varepsilon}{\tau_\infty^2} + \text{Sc} B U_1 K_\infty^* d_* \gamma_w \right]} \quad (9-21)$$

De [12], pág.58, pode-se deduzir que o comprimento da região de entrada para o problema térmico (sem transferência de massa) com temperatura prescrita nas paredes do canal é da ordem de

$$x_{*PD} \approx 2,1 \cdot 10^{-4} B d_*^2 \quad (9-22)$$

A rigor, num problema geral (calor e massa) não há uma "camada limite", mas a região influenciada pela parede vai crescendo até que todo o canal seja atingido. O valor de  $x_{*PD}$  representa, portanto, uma boa estimativa para o ponto do canal em que se estará numa situação de "plenamente desenvolvido". Tal estimativa é importante na escolha de uma situação ótima em termos computacionais, ou seja, com ela é possível determinar qual a combinação de parâmetros de malha ( $q, \Delta x_*$ ) que, para um dado número de pontos, resolverá o problema da maneira mais eficiente.

Há, ainda, um outro detalhe a considerar. As equações para o transporte de um soluto representam um problema de fluxo prescrito nulo.

Desta forma, aproveitando a analogia entre as equações,

$$x_{*PD\text{ massa}} = x_{*PD\text{ térmico}} \quad \text{para fluxo prescrito}$$

De [12], pág.59,

$$\frac{x_{*PD}}{d_*^2 B} 10^4 \approx 5,2 \quad \text{para fluxo prescrito}$$

Considerando o problema de transporte de massa, vem, finalmente,

$$x_{*PD\text{ massa}} \approx 5,2 \cdot 10^{-4} d_*^2 B Le \quad (9-23)$$

De modo que um parâmetro significativo na escolha da malha, ou seja, o número de estações na direção  $x$  necessárias para se atingir o regime plenamente desenvolvido, é dado por

$$N_{\text{est}} \approx 1,04 \cdot 10^{-3} \frac{d_*^2}{U_1 [\Delta y_*]_1^2 K_\infty^*} \left( \frac{\varepsilon_1}{\tau_\infty^2} + Sc B U_1 K_\infty^* d_* \gamma_w \right) \quad (9-24)$$

#### 9-4 INDEPENDÊNCIA DE MALHA

Devido às dificuldades de se obter pontos com coordenadas iguais em malhas diferentes, o critério utilizado para comparação entre as soluções obtidas em diferentes malhas é a visualização gráfica dos resultados; a malha será considerada boa quando visualmente não houver mais diferença entre as curvas representativas dos resultados.

#### 9-5 VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL

No decorrer do desenvolvimento teórico apresentado anteriormente, muitas hipóteses foram adotadas. Para uma confirmação da validade do modelo resultante, e também para uma determinação mais segura de alguns parâmetros estimados, é apresentada a seguir uma comparação com valores

obtidos experimentalmente.

O modelo teórico foi particularizado para coordenadas cartesianas. O único experimento relativo a escoamentos em meios porosos entre placas paralelas encontrado na literatura foi o de Poulikakos e Renken [17]. Seus resultados incluem vários gráficos com valores de Nusselt e temperatura para um escoamento de água através de um meio poroso constituído de esferas de vidro, entre duas placas paralelas mantidas a temperatura constante.

As grandezas utilizadas neste trabalho para a simulação numérica do experimento foram

- temperatura de entrada da água = 10°C;
- temperatura das paredes do canal = 30°C;
- número de Prandtl = 7,07;
- condutividade térmica do fluido = 0,59 W/mK (k da água);
- condut. térmica do sólido = 0,64 W/mK (k do vidro de soda);
- $c_p$  do fluido = 4182 J/kgK ( $c_p$  da água);
- massa específica do fluido = 998,2 kg/m<sup>3</sup> ( $\rho$  da água);
- diâmetro das esferas = 3mm;
- altura até o centro do canal = 38,1mm;
- porosidade ( $\epsilon_w$ ) = 0,37

As propriedades foram tomadas a 20°C e as vazões são especificadas pelo parâmetro de pressão "B" (eq. 8-2), indicado em cada gráfico.

O máximo avanço longitudinal no canal ( $\Delta x_{*máx}$ ) foi obtido da equação (9-21), fazendo  $Le = 1$  e  $\gamma_w = \gamma_F$ . A malha empregada em todos os casos executados foi mantida sempre dentro do limite

$$\Delta x_* < \Delta x_{*máx} / 10 \quad (9-25)$$

o que, além de evitar oscilações, mostrou-se eficiente em termos de independência de malha. Na direção transversal foram utilizados 50 pontos, concentrados próximo à parede e estendendo-se até o centro do canal, segundo uma progressão geométrica com fator 1,0292.

Para tornar possível a comparação entre os resultados numéricos e os experimentais, foram incorporados à simulação numérica alguns detalhes do experimento. Por exemplo, a temperatura de mistura foi calculada segundo a descrição dos autores ([17], pág. 1402), ou seja, assumindo-se um escoamento uniforme ao longo do duto. Além disto, o gradiente de temperaturas na parede foi calculado com base apenas na temperatura da

parede e na temperatura teórica localizada a 1,5mm da mesma (a qual, segundo os autores, é a posição do termopar mais próximo à parede no experimento). Com isto, pretende-se reproduzir a situação real do experimento, pois, segundo os autores, este foi o procedimento adotado para o cálculo do número de Nusselt experimental.

Como não havia tabelas no artigo, os pontos foram determinados com o auxílio de uma mesa digitalizadora<sup>\*1</sup>, de maneira tão cuidadosa quanto possível. Os valores encontrados estão listados no apêndice F.

As figuras 9-1 e 9-2 mostram o campo de temperaturas adimensional ( $\theta_F$ ) para duas vazões diferentes em uma mesma posição, próximo à entrada do duto. As linhas tracejadas representam os valores obtidos ignorando os efeitos de tortuosidade e dispersão. Já as linhas contínuas representam os resultados numéricos associados a valores de  $\tau_\infty$  e  $\gamma_F$  cuidadosamente ajustados a fim de reproduzir os experimentos. Uma vez obtidos os valores de  $\tau_\infty$  e  $\gamma_F$ , os mesmos foram mantidos para todos os demais casos.

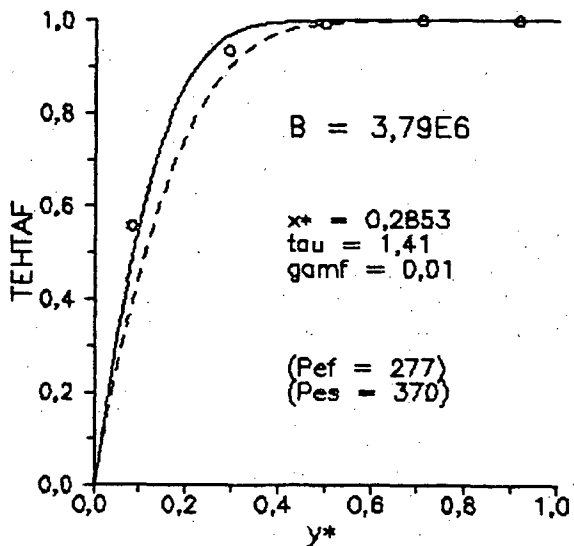


Figura 9-1 Distribuição de temperaturas adimensional para  $B=3,79E6$  e  $x^*=0,285$

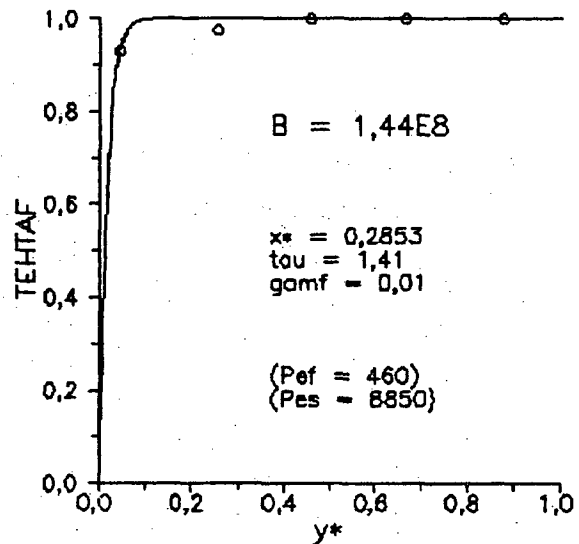


Figura 9-2 Distribuição de temperaturas adimensional para  $B=1,44E8$  e  $x^*=0,285$

A evolução dos perfis ao longo da região de entrada é apresentada nas figuras 9-3 a 9-5, para uma vazão intermediária em relação às duas primeiras. Como nas figuras 9-1 e 9-2, a curva tracejada mostra o caso padrão.

<sup>1</sup>\* gentilmente cedida pelo grupo de simulação numérica em mecânica dos fluidos e transferência de calor da UFSC

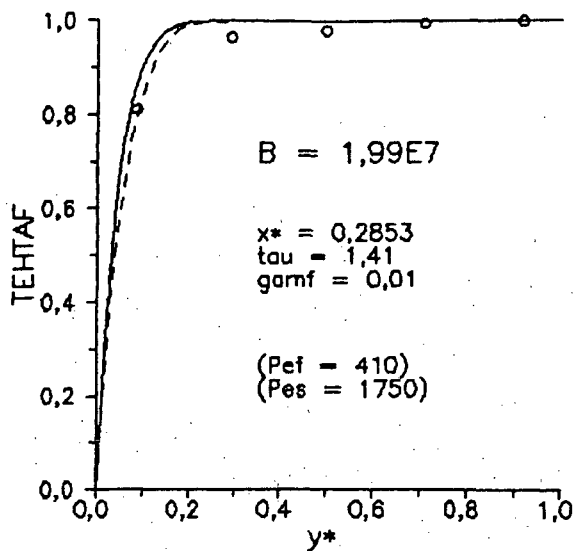


Figura 9-3 Distribuição de temperaturas adimensional para  $x^*=0,285$  e  $B=1,99E7$

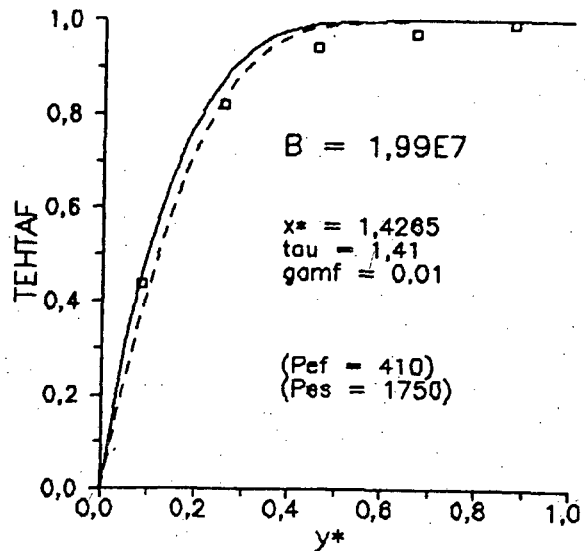


Figura 9-4 Distribuição de temperaturas adimensional para  $x^*=1,426$  e  $B=1,99E7$

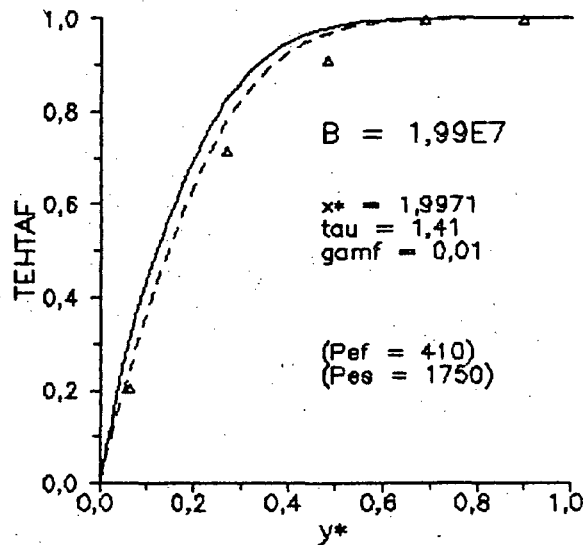


Figura 9-5 Distribuição de temperaturas para  $x^*=1,997$  e  $B=1,99E7$

No caso padrão são desprezados fenômenos importantes, como os relativos a tortuosidade e dispersão. Mesmo assim, com o conjunto de parâmetros ( $\tau_\infty$ ,  $\gamma_F$ ) adotado, há situações em que os resultados numéricos são até melhores no caso padrão. Ocorre que um ajuste completo aos campos de temperatura, que exigiria mais dispersão, gera curvas de Nusselt que não se adaptam bem aos valores experimentais. Foi necessário, então, chegar a uma solução que, de uma maneira global, fosse representativa. Adicionalmente, uma leitura cuidadosa da bancada e procedimento experimental sugere uma incerteza nas medições, que não permite uma determinação definitiva dos valores de  $\tau_\infty$  e  $\gamma_F$ .

Nas figuras 9-6 e 9-7, as medições foram repetidas para um conjunto de

vazões semelhante ao anterior. A única diferença é que a apresentação é feita em função de " $\theta_m$ ", que envolve, em sua adimensionalização, uma temperatura de mistura no lugar da temperatura de entrada de " $\theta_F$ ". Os dados experimentais, no entanto, carecem de consistência física, uma vez que indicam o aparecimento de pontos de máximo ao longo da coordenada transversal ( $y$ ). A existência de tais máximos, além de ser de difícil racionalização, não é observada na solução numérica. Como conseqüência, uma verificação da validade do resultado numérico fica prejudicada pela dúvida em relação aos resultados experimentais.

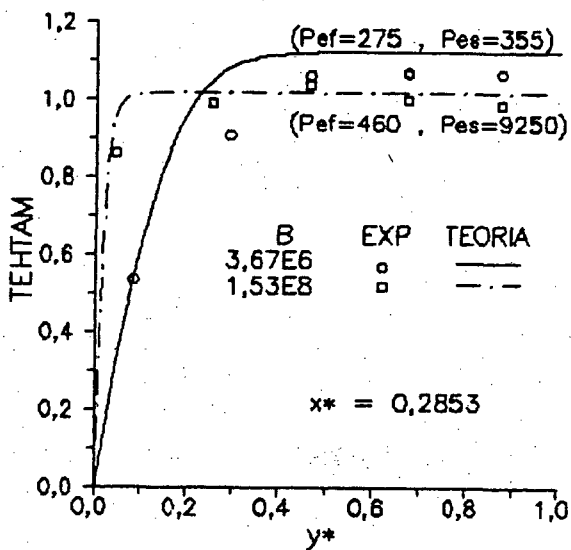


Figura 9-6 Distribuição da temperatura  $\theta_m$  para  $x^*=0,285$

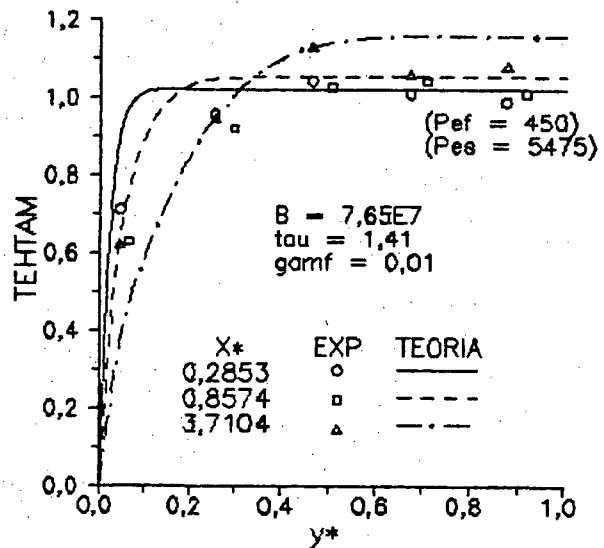


Figura 9-7 Distribuição da temperatura  $\theta_m$  para  $B=7,65E7$

As figuras 9-8 a 9-10 permitem avaliar o desempenho do modelo teórico em termos globais. As curvas contínuas representam o número de Nusselt experimental conforme calculado em [17], e as tracejadas representam o valor que seria correto, com base no gradiente de temperaturas exato na parede. Pode-se notar que, apesar de muito próximo à parede (1,5mm), o primeiro termopar não permite obter o gradiente com a precisão que seria necessária à determinação do número de Nusselt. Desta forma, os valores reportados através das linhas contínuas diferem substancialmente daqueles associados às linhas tracejadas. Adicionalmente, as curvas traço-ponto, caso padrão correspondente ( $\tau_\infty=1$  e  $\gamma_F=0$ ) obtido com o "falso gradiente", evidenciam de maneira mais clara que as curvas de temperatura, a importância de se levar em conta tortuosidade e dispersão. Tal fato é

particularmente verdadeiro ao se observar os valores do número de Nusselt quando as curvas tendem ao regime plenamente desenvolvido.

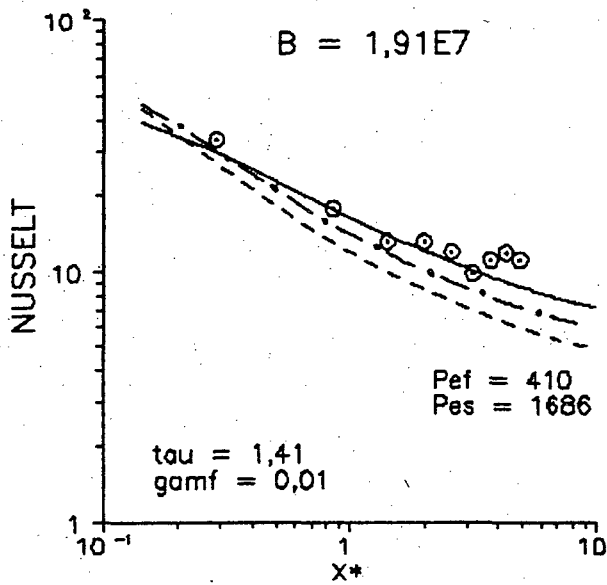


Figura 9-8 Nusselt na região de entrada para  $B=1,91E7$

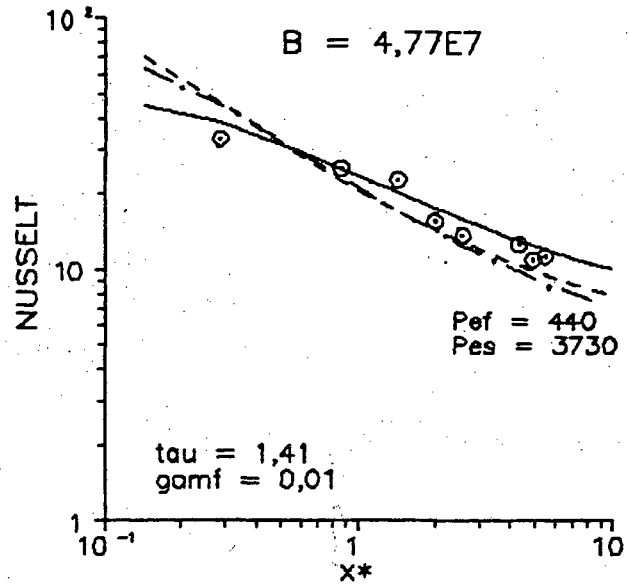


Figura 9-9 Nusselt na região de entrada para  $B=4,77E7$

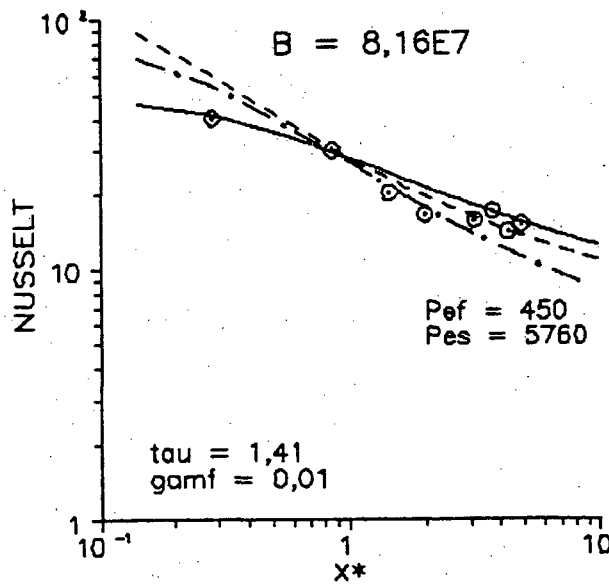


Figura 9-10 Nusselt na região de entrada para  $B=8,16E7$



Os valores

$$\tau_{\infty} = 1,41 \quad \text{e} \quad \gamma_F = 0,010 \quad (9-26)$$

foram, portanto, obtidos após várias tentativas de ajuste, com base nas estimativas teóricas (eqs. (7-8) e (7-21)), visando uma boa adaptação às medições de Nusselt e de temperatura. Pode-se notar que o coeficiente de dispersão ficou bastante longe da estimativa. Acredita-se que isto seja devido ao fato de que o valor que serviu de base para esta estimativa, obtido de [11], está relacionado a um modelo linear para o comprimento de mistura presente no termo de dispersão, diferente do modelo parabólico utilizado neste trabalho. Já o valor obtido para  $\tau_{\infty}$  difere apenas de 3,5% daquele estimado pela equação (7-8).

De um modo geral, a validação experimental foi bastante satisfatória. O essencial de toda esta comparação com as medidas experimentais de [17], no entanto, é a confirmação da capacidade do modelo empregado neste trabalho de prever resultados reais. Os ajustes não podem ser tomados como definitivos, pois não se sabe com que grau de confiança as medidas estão corretas. Na descrição do experimento em [17] não foi mencionado nenhum tratamento estatístico e há, inclusive, evidências de algumas inconsistências físicas nos resultados. Além disto, os pontos foram obtidos indiretamente, com o auxílio de uma mesa digitalizadora.

O objetivo principal desta validação foi atingido. Os resultados experimentais avalizam a aplicação do modelo teórico para um caso de transferência de calor em um duto com esferas compactadas, bem como a metodologia numérica empregada. Em seguida, com base nesta conclusão e na analogia entre transferência de calor e massa em meios contínuos, este modelo será extrapolado. No capítulo seguinte é feita uma análise puramente numérica de transporte de calor e massa em um meio poroso.

---

## 10 RESULTADOS

---

Este capítulo consta, basicamente, de duas etapas. Inicialmente é analisado um problema de transferência de calor, buscando avaliar qualitativamente a influência da relação entre as condutividades térmicas do fluido e do sólido no número de Nusselt e no campo de temperaturas. Numa segunda etapa, é feita uma demonstração da aplicação prática da teoria apresentada neste trabalho. Um problema típico de secagem é adaptado para a geometria de placas paralelas e é estimado o tempo de secagem para diferentes condições de entrada do ar.

### 10-1 INFLUÊNCIA DAS CONDUTIVIDADES TÉRMICAS

A relação entre as condutividades térmicas ( $k_R = k_f/k_s$ ) das fases envolvidas (fluido e sólido) é um dos parâmetros do problema, como mostra a equação (8-29). Pretende-se aqui verificar o que acontece com o processo de transferência de calor em um canal preenchido com esferas, quando tal relação é mudada. Nesta análise,  $k_R$  sofrerá uma variação de 0,01 a 10, o que, tomando o fluido como água, representa, para o sólido, uma variação desde aço carbono até terra diatomácea, aproximadamente.

Os resultados são apresentados para três valores do número de Reynolds, típicos para cada tipo de escoamento (Darcy, Forschheimer e turbulento). As paredes são mantidas a temperatura constante e o parâmetro  $d_* (=d/H)$  vale 0,07.

As figuras 10-1, 10-2 e 10-3 mostram o comportamento do número de Nusselt. Junto de cada curva é mostrada a relação de condutividades no caso em consideração. Adicionalmente, são apresentados os valores de Nusselt plenamente desenvolvido ( $Nu_{PD}$ ) e dos comprimentos das respectivas regiões de entrada ( $L_{re}$ ) (é considerado fim da região de entrada quando o número de Nusselt local já atingiu 99% do valor plenamente desenvolvido). De uma maneira geral, a troca de calor com as paredes do canal é mais eficiente com o aumento do Reynolds, o que é intuitivo. Além disto, fica claro que uma diminuição em  $k_R$  contribui para um aumento do Nusselt. Isto era de esperar, pois o sólido representa um "caminho concreto" para o calor percorrer após sair da parede do canal. À medida que aumenta a condutividade do sólido, aumenta a facilidade com que o calor é distribuído no meio, tornando, portanto, mais eficiente a retirada de calor da parede. Um outro aspecto importante é que, quanto maior a vazão, menor o aumento proporcional de eficiência causado pelo aumento de  $k_R$ . Em outras palavras, quanto maior o Reynolds, menor a influência de  $k_R$  no número de Nusselt.

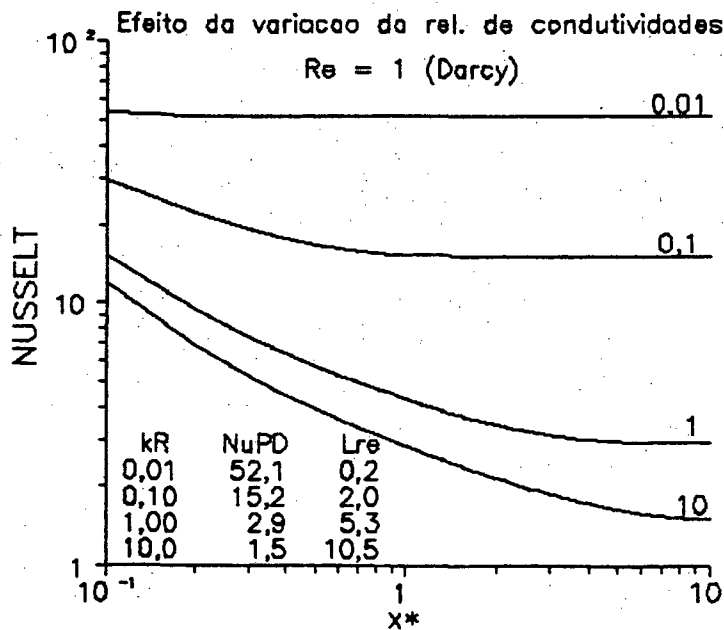


Figura 10-1 Efeito de  $k_R$  sobre  $Nu$  para o regime de Darcy

Ainda com relação ao número de Nusselt, é possível notar, principalmente no caso turbulento, uma tendência das curvas a "colapsar" quando  $k_R$  é aumentado. Aparentemente, supondo-se, por exemplo, um sólido constituído de material isolante, não seria possível notar algum efeito quando a condutividade do fluido fosse variada.

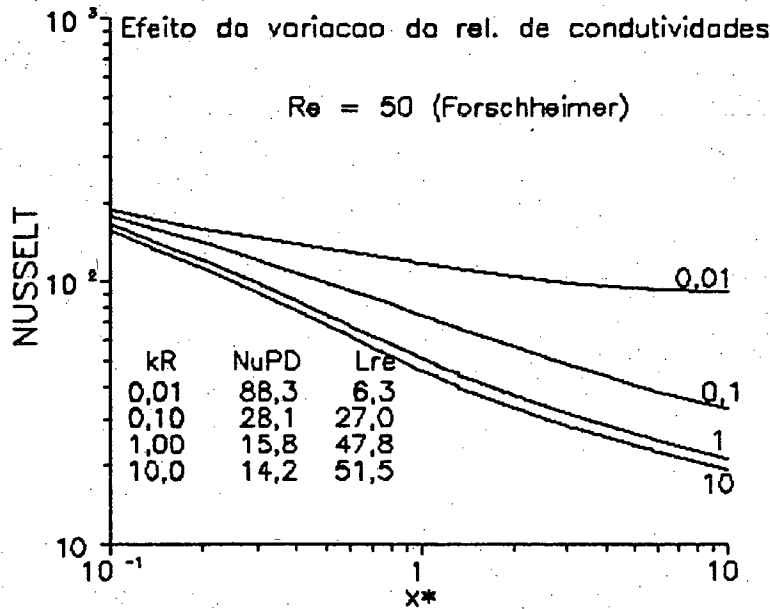


Figura 10-2 Efeito de  $k_R$  sobre  $Nu$  para o regime de Forschheimer

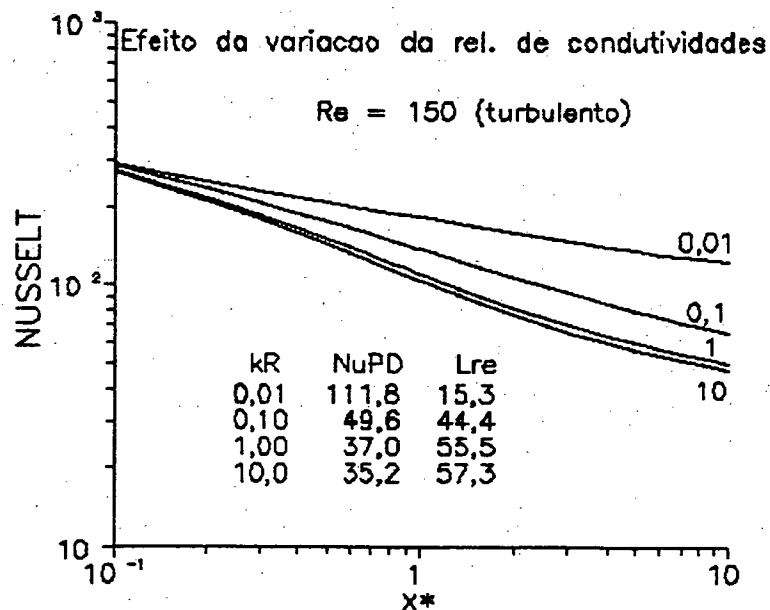


Figura 10-3 Efeito de  $k_R$  sobre  $Nu$  para o regime turbulento

As figuras 10-4 e 10-5 mostram como se comportam os campos de

temperatura no regime de Darcy, para duas posições no canal. Em cada curva estão indicados o "Peclet" do fluido e os "Peclets" do sólido, para dar uma idéia da validade da teoria aplicada. De acordo com a análise apresentada no apêndice D, a desconsideração da condução axial nas equações da energia, conforme adotado no presente modelo, se justifica para tais números de Peclet muito maiores do que um.

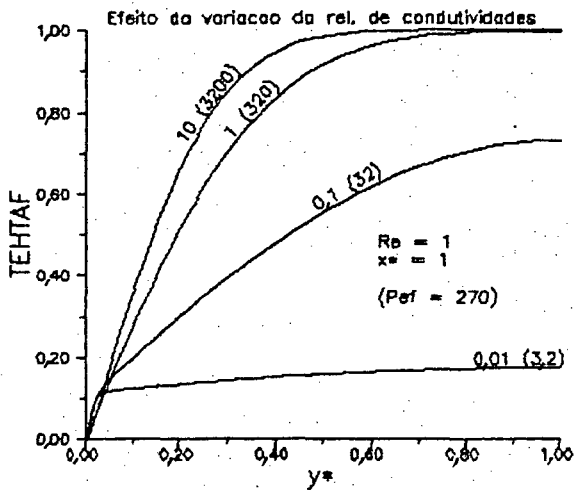


Figura 10-4 Efeito de  $k_R$  para regime de Darcy, em  $x_* = 1$

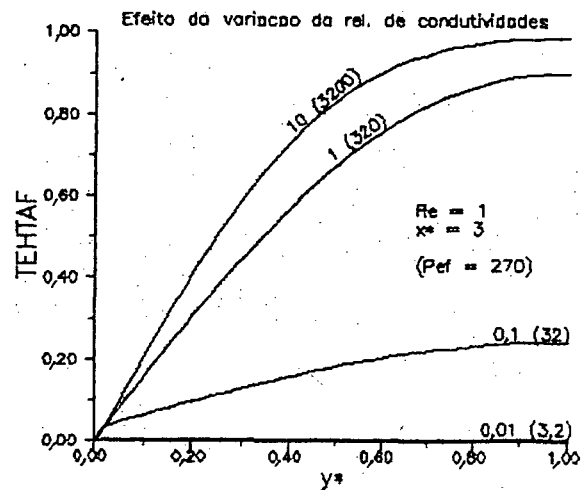


Figura 10-5 Efeito de  $k_R$  para regime de Darcy, em  $x_* = 3$

Como a vazão é muito baixa, a condição de temperatura prescrita nas paredes tende a se propagar muito facilmente na direção transversal ao duto. Desta forma, mesmo próximo à entrada ( $x_* = 1$ ), é possível notar que a temperatura do fluido, em média, já está mais próxima da temperatura das paredes do que da temperatura com que ele entrou no canal. Tal fato é particularmente verdadeiro para pequenos valores de  $k_R$  (sólido bom condutor). Mais para dentro do duto ( $x_* = 3$ ), fica bastante clara a importância de  $k_R$  no regime de Darcy. Mesmo estando nos limites de validade da teoria utilizada ( $Pes = 3.2$ ), pode-se concluir que, com uma condutividade térmica muito alta do sólido (ou muito baixa do fluido), o meio poroso, em  $x_* = 3$ , está numa situação quase isotérmica.

Para as vazões mais altas (regimes Forschheimer e turbulento), a influência da parede é menos sentida no perfil de temperaturas ao longo de  $y_*$ . Exceto para a situação em que  $k_R = 0.01$ , a temperatura no fluido está mais próxima à temperatura de entrada. Adicionalmente, aparece um fenômeno semelhante ao que ocorreu com os números de Nusselt; com vazões altas, o campo de temperaturas parece independe da relação de condutividades, para

sólido isolante ou fluido muito condutor.

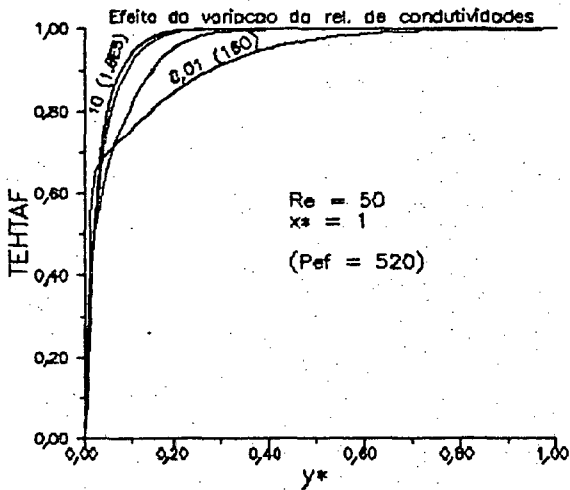


Figura 10-6 Efeito de  $k_R$  para reg. Forschheimer, em  $x_* = 1$

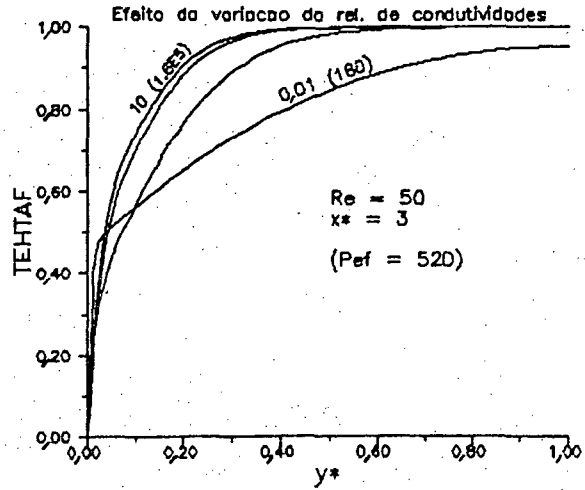


Figura 10-7 Efeito de  $k_R$  para reg. Forschheimer, em  $x_* = 3$

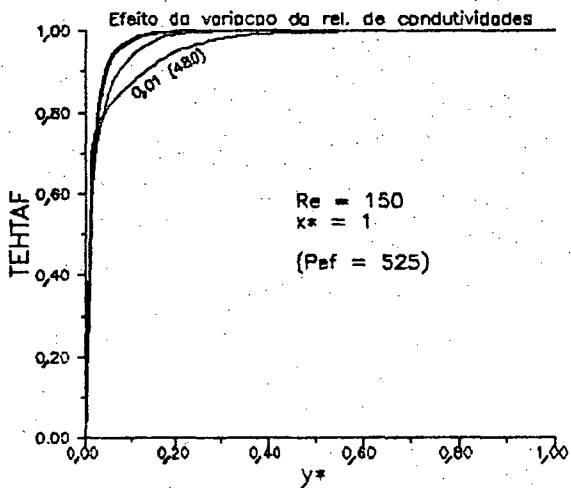


Figura 10-8 Efeito de  $k_R$  para reg. turbulento, em  $x_* = 1$

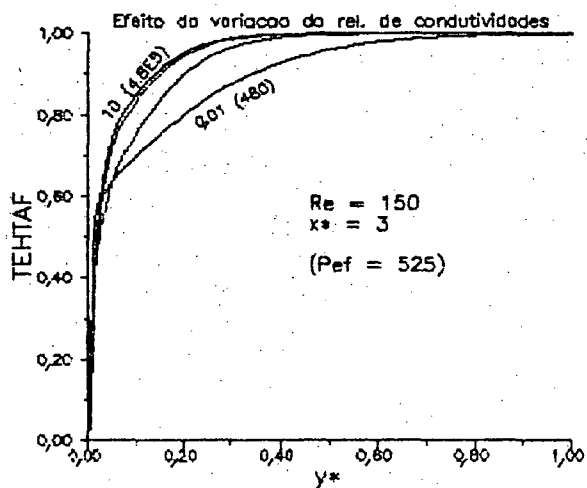


Figura 10-9 Efeito de  $k_R$  para reg. turbulento, em  $x_* = 3$

A relação de condutividades térmicas tem efeito decisivo, portanto, para escoamentos com vazões baixas. Nesta situação, uma pequena variação em  $k_R$  pode significar um grande aumento na eficiência da transferência de calor das paredes. Por outro lado, se a vazão for suficientemente alta, e o fluido bom condutor de calor, pode não fazer muita diferença o material de que é constituído o sólido.

## 10-2 SECAGEM DE GRÃOS

O problema de secagem de produtos alimentícios é de fundamental importância econômica e social. Basta observar que 98% da produção total de caju do Rio Grande do Norte são perdidos por falta de cuidados na sua conservação [34]. Uma técnica de secagem bem desenvolvida poderia diminuir bastante este desperdício.

Secagem de grãos é uma típica aplicação da teoria de escoamentos em meios porosos saturados onde ocorre transferência de calor e massa. Num problema característico, tem-se grãos úmidos de um cereal colocados em um silo. Para que estes grãos possam ficar armazenados por um período longo, eles devem ser secados até que atinjam um conteúdo ótimo de umidade, a fim de evitar o aparecimento de fungo e insetos ou a fim de manter a qualidade do grão. É sabido, por exemplo, que muito pouca atividade de insetos é verificada em grãos com um conteúdo de umidade abaixo de 10% ([29], pág.15). Para efetivar esta secagem, um procedimento usual consiste em insuflar ar ambiente para dentro do silo. Aparecem, então, alguns problemas, tais como,

(i) para uma determinada condição de entrada do ar, por quanto tempo deve ser mantido o processo de secagem para atingir a umidade desejada nos grãos?

(ii) se forem variadas as condições de entrada (se o ar for aquecido, por exemplo), qual será o efeito sobre a eficiência do processo como um todo?

De acordo com seu planejamento, o produtor determina por quanto tempo o cereal terá que ficar armazenado. Por meio de tabelas apropriadas (por exemplo, [29], págs. 59 e 60), pode-se determinar, para uma dada temperatura, qual o máximo de umidade que um grão pode conter para não se deteriorar ao longo do período estipulado para a armazenagem. Em geral, no momento em que é colocado no silo, o grão apresenta um conteúdo de umidade maior do que desejado. Deve-se, portanto, submetê-lo a um escoamento de ar durante um tempo suficiente para retirar o excesso. Este tempo vai depender, evidentemente, da capacidade que o ar utilizado tiver para extrair umidade dos grãos.

Dependendo do seu conteúdo de umidade e da temperatura em que se encontra, cada grão apresenta uma pressão de vapor de água característica.

É esta pressão de vapor que, quando confrontada com a pressão de vapor de água do ar a que o grão está exposto, vai dizer se o grão vai perder (desorver) ou ganhar (adsorver) umidade. Quando a pressão de vapor de água junto ao grão é igual à pressão de vapor de água do ar circundante, o conteúdo de umidade do cereal é chamado "conteúdo de umidade de equilíbrio".

O conteúdo de umidade de equilíbrio ( $M_e$ ) de um grão é definido como o conteúdo de umidade do produto depois de ter sido exposto a um ambiente específico por um período de tempo infinito ([29], pág. 69). O valor de  $M_e$  depende das condições de temperatura e umidade do ambiente, bem como da espécie, variedade e grau de maturação do grão. Em outras palavras, dado um conjunto de condições de secagem para um produto,  $M_e$  representa o mínimo conteúdo de umidade para o qual este produto pode ser secado. Os valores de  $M_e$  são obtidos experimentalmente e são, usualmente, apresentados em curvas do tipo  $M_e$  versus umidade relativa, em que a temperatura é mantida constante. Estas curvas, cujo aspecto característico é mostrado na figura 10-10, são muito importantes na indústria de secagem.

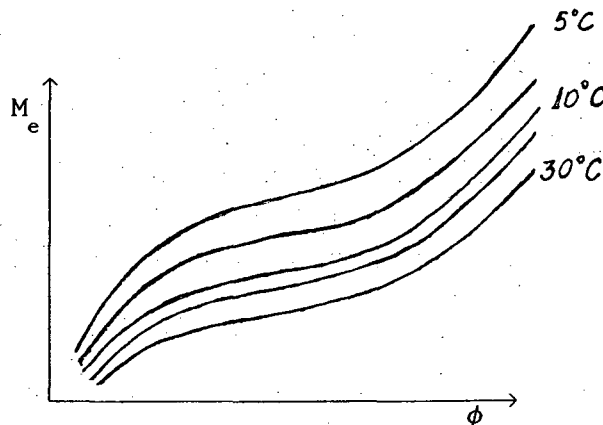


Figura 10-10 Curva  $M_e$  x umidade relativa típica em problemas de secagem

É importante notar que tais curvas são diferentes para desorção e adsorção. De maneira semelhante ao que ocorre em meios porosos insaturados, há o aparecimento de um fenômeno de histerese. Este ponto não foi considerado anteriormente porque, no estudo de secagem, o interesse recai sobre perda de umidade. As curvas utilizadas referem-se, portanto, a processos de desorção. Na área de tecnologia de alimentos, diversos trabalhos relativos à sua determinação podem ser encontrados na literatura. Em publicações recentes pode-se encontrar, por exemplo, a determinação das "isotermas de desorção" para batata doce [30], milho [31].



e milho miúdo [32], para diversas temperaturas e em função da umidade relativa (por eles denominada de "atividade da água").

### Análise Global do Processo de Secagem

Com base nos conceitos discutidos, pode-se fazer uma análise simplificada do problema de secagem, como a apresentada em [29], pág. 130. Avaliando o desempenho do sistema com uma abordagem global, o autor obtém uma rápida avaliação do processo em termos de tempos de secagem, quantidade de água removida e propriedades da zona de secagem. Uma análise mais rigorosa da teoria de secagem pode ser encontrada em [33]. O modelo mais simples serve, porém, para uma primeira verificação da aplicabilidade da teoria apresentada nesta dissertação a problemas de secagem.

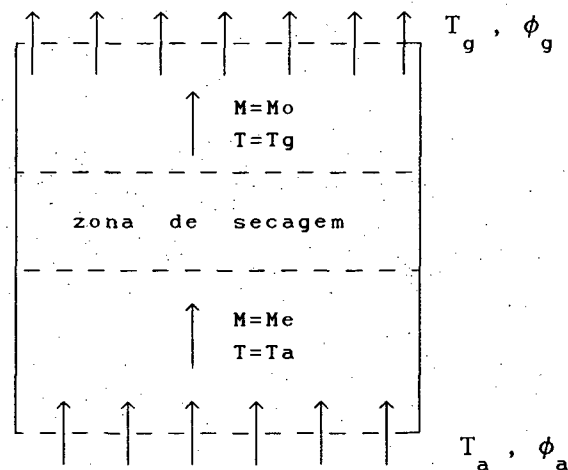


Figura 10-11 Processo de secagem em um silo para análise global.

A figura 10-11 mostra um modelo para o problema, em termos globais. Conforme ilustrado, há três zonas distintas a serem consideradas,

(i) uma zona em que o grão está em equilíbrio com o ar que está entrando. O grão, nesta zona, está com a temperatura do ar de entrada e com o "conteúdo de umidade de equilíbrio" relativo à umidade relativa deste ar;

(ii) para a saída do silo, é feita a hipótese de que o estado do grão não é modificado pelo ar que está passando. Nesta zona, portanto, o ar deverá ficar com a umidade relativa correspondente ao conteúdo de umidade inicial do grão, tomado como "conteúdo de umidade de equilíbrio";

(iii) entre as duas zonas supõe-se que há uma "zona de secagem", que representa a transição de uma para outra.

Admitindo o processo adiabático, a temperatura de saída ( $T_g$ ) pode ser obtida da carta psicrométrica.

Uma equação de balanço simplificada para o processo de secagem pode, então, ser escrita como

$$\dot{m} c_{p_{ar}} (T_a - T_g) \Delta t = h_{fg} m_{MS} (M_o - M_e) \quad (10-1)$$

em que

$\dot{m}$  é a vazão de ar no silo;

$c_{p_{ar}}$  é o calor específico do ar a pressão constante;

$\Delta t$  é o intervalo de tempo necessário para a secagem;

$h_{fg}$  é o calor latente de vaporização da água presa nos grãos;

$m_{MS}$  é a massa de cereal seco presente no silo;

$M$  é o conteúdo de umidade por kg de material seco.

É importante notar que o valor de  $h_{fg}$  já é modificado de maneira a levar em consideração o aumento adicional de dificuldade na vaporização. No valor de  $h_{fg}$  já está implícito o fato de que é mais fácil remover umidade de uma superfície de água livre do que de grãos de cereal (Lei de Kelvin).

Na verdade, o processo de secagem é transiente. Como mostra a figura 10-12, em um processo típico de secagem há um período em que a taxa de extração de umidade é constante, e um período em que ela começa a diminuir, até parar completamente (quando o grão atinge o  $M_e$ ). A taxa de secagem diminui quando já não é tão fácil extrair água do meio. O período inicial em que  $dM/dt$  é constante é chamado de "período de taxa constante". Neste período a resistência interna do grão associada à secagem é pequena e pode ser ignorada.

Cada produto agrícola apresenta um padrão característico para o comportamento da taxa de secagem. Em uma solução rigorosa, só é possível assumir regime permanente quando a curva de secagem do grão apresentar um grande período de taxa constante. Na solução representada pela equação (10-1), por exemplo, a temperatura " $T_g$ " não pode ser considerada constante no período em que a taxa de secagem está variando.

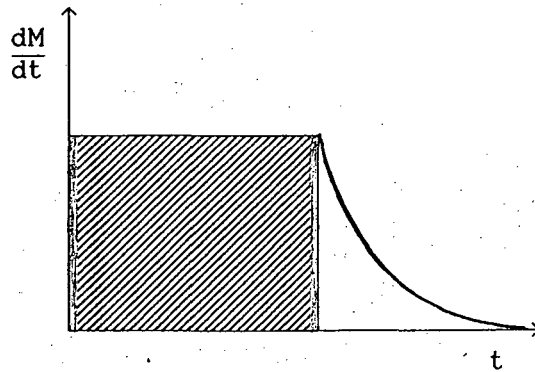


Figura 10-12 Evolução da taxa de secagem em um silo ao longo do tempo

**Utilizando a teoria de Meios Porosos Saturados**

Com os parâmetros adequados, a solução de um problema de transferência de calor e massa em meios porosos pode fornecer o campo de concentrações de um soluto em qualquer posição ao longo do duto. Levando o cálculo até uma posição que coincida com a saída do silo, pode-se, por exemplo, saber, com o auxílio do campo de velocidades, a taxa de extração de umidade de um produto que esteja sendo secado.

Lembrando o conceito de média intrínseca, é intuitivo que a quantidade de água que atravessa uma determinada seção transversal "i" do duto é dada por

$$\dot{m}_{w_i} = \rho_f \int_0^{2H} |\langle \vec{v}_f \rangle^f| \langle w_f \rangle^f dA^f \tag{10-2}$$

em que todas as grandezas dentro da integral referem-se a valores intrínsecos, com o objetivo de representar a quantidade de vapor que passa nos capilares. Ora, lembrando a definição de porosidade, e lembrando ainda que no presente trabalho é resolvido o campo de velocidades global e o campo intrínseco de concentrações, a equação (10-2) fica melhor escrita como

$$\dot{m}_{w_i} = \rho_f \int_0^{2H} u w_f dA \tag{10-3}$$

o que, em termos adimensionais, fica

$$\dot{m}_{w_1} = \frac{2 \text{ Pr } k_f}{c_{p_f}} B K_{\infty}^* \int_0^1 w U dy_* \quad (10-4)$$

Note-se que a equação (10-3) é facilmente obtida da equação (10-2), lembrando que

$$u = \varepsilon |\langle v_f \rangle^f|$$

e

$$\langle w_f \rangle^f = w_f$$

A teoria utilizada no presente trabalho fornece resultados próximos aos da análise global, por representar, de certa forma, uma análise também simplificada para o problema de secagem. É considerado, por exemplo, regime permanente, o que por si só impede um grande avanço em relação a uma análise global. Assumir regime permanente, no presente trabalho, é o mesmo que considerar que nunca pára de sair água do grão, o que não fica muito longe da hipótese de temperatura de saída constante (e igual a  $T_g$ ) utilizada na análise global de Brooker [29].

A inclusão da modelagem do problema no interior do grão, contudo, é bastante viável na teoria aqui apresentada e a análise global de Brooker serve como uma primeira validação para a modelagem apresentada.

### Exemplo Numérico

Para uma comparação entre as duas abordagens descritas anteriormente, será utilizado um exemplo numérico, apresentado em [29], pág. 135, cujo enunciado é o seguinte:

"um silo de 8,2m de diâmetro contém milho a 25% de umidade (baseado no peso do produto úmido) armazenado até uma altura de 2,4m. O silo está localizado em uma região em que a temperatura ambiente média é 15,4°C na época do armazenamento e a umidade relativa média é 75%. O gradiente de pressão medido é 237,15 N/m<sup>3</sup>. Encontre o tempo de secagem, quando ar ambiente é usado".

De acordo com sua análise global, o resultado encontrado em [29] é 13,2 dias.

Com base neste enunciado, pode-se elaborar um problema equivalente

para a geometria de placas paralelas. Este problema, mostrado na figura 10-13, forneceu exatamente o mesmo resultado que o exemplo de Brooker [29] para geometria cilíndrica (13,2 dias), quando era aplicada sua metodologia.

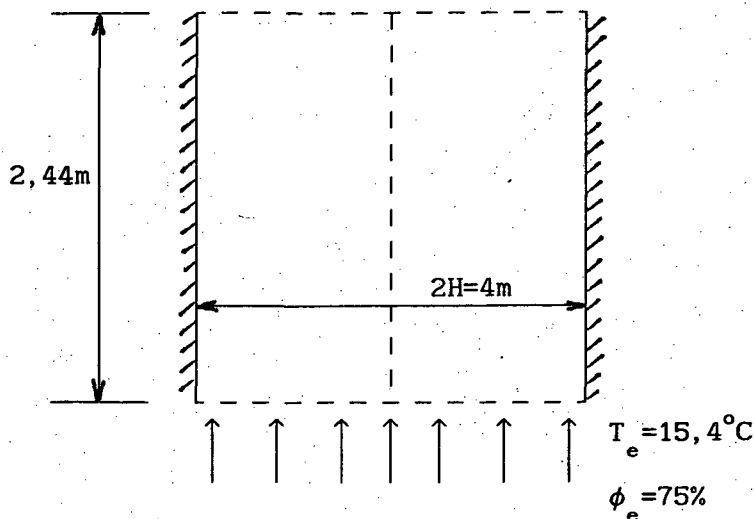


Figura 10-13 Problema de secagem para geometria de placas paralelas

Resolvendo o problema com a metodologia apresentada nesta dissertação, com os seguintes parâmetros,

- $Re_d = 23$
- $k_R = k_f/k_s = 0,15$
- $d_* = d/H = (2,45E-3)/2 = 0,00123$  (o diâmetro "d" corresponde ao diâmetro de uma esfera que constituiria um meio poroso com mesma permeabilidade que o constituído de milho)
- $\epsilon_\infty = 0,45$
- $\beta = 1300 \text{ m}^{-1}$  (este valor da relação área/volume foi estimado com base em um grão de milho estilizado)

obtém-se como resultado 13,4 dias para efetivar a secagem, o que difere em 1,1% do valor encontrado com a análise global.

Aumentando a temperatura de entrada do ar em  $20^\circ\text{C}$  para verificar o efeito na eficiência da secagem, chega-se à seguinte conclusão:

- análise global: 5,6 dias para a secagem;
- teoria de meios porosos saturados: 5,3 dias para secagem.

O aquecimento provocou uma drástica redução no tempo necessário para a secagem. Este resultado permite avaliar a importância de uma análise numérica em um problema deste tipo.

---

## 11 CONCLUSÕES

---

A principal conclusão deste trabalho parece ser que, em meios porosos saturados, é muito difícil acompanhar uma partícula apenas, mas o comportamento de grupos de partículas pode ser previsto e permite uma boa compreensão dos fenômenos físicos envolvidos.

Neste trabalho, com base no processo de médias de Slattery [6] e Whitaker [5], são obtidas equações governantes para os processos de transporte em meios porosos saturados.

Slattery e Whitaker apresentam esta dedução, além de restrições para a validade das hipóteses que são necessárias. Seu trabalho é bastante rigoroso, mas as equações, do modo como eles as deixam, apresentam muitos termos obscuros do ponto de vista físico. Uma vez que eles não prosseguem na modelagem destes termos, elas acabam ficando com pouca utilidade em problemas práticos, diante das equações semi-empíricas que vinham sendo utilizadas. A primeira vez em que é apresentado um conjunto de equações em uma forma que permite sua utilização em problemas de engenharia associados a meios porosos saturados, bem como uma interpretação física para alguns de seus termos é, aparentemente, o trabalho de Vafai e Tien [7]. Em seu trabalho, Vafai e Tien, ao utilizarem os resultados experimentais de Ergun [13], indicam o caminho para a obtenção dos termos da equação de

transporte de quantidade de movimento que tinham sido introduzidos heurísticamente. Suas deduções, no entanto, partem de equações semi-empíricas, em que é muito difícil a interpretação dos termos matemáticos, por não ser conhecida sua origem. Apesar de mencionarem o trabalho de Whitaker como a origem destas equações, Vafai e Tien não mostram onde está a ligação.

Neste contexto, surge a necessidade da dedução formal apresentada na presente dissertação. São considerados dois domínios separados (fluido e sólido) e as equações de transporte, deduzidas isoladamente para cada fase, são interligadas por meio de termos-fonte. O auxílio de experimentos, bem como a utilização de outras abordagens (como a de Bear [15]), também estão presentes ao longo das deduções, na modelagem dos termos resultantes do processo de média que não ficam claros do ponto de vista físico.

A teoria apresentada permite a solução de um problema de transporte convectivo de calor e massa em meios porosos saturados, considerando a condução de calor na fase sólida. Não são utilizados os conceitos de "condutividade equivalente" ou "difusividade equivalente", mas sim conceitos como o de "tortuosidade" e "dispersão", os quais surgem naturalmente do processo de médias.

As equações são, então, particularizadas para coordenadas cartesianas e para meio poroso constituído de esferas, sendo em seguida adimensionalizadas e discretizadas. O conjunto de equações algébricas resultante é submetido ao método das caixas de Keller [14], para a obtenção de uma solução numérica.

Quando comparado com resultados experimentais, o método apresenta boa concordância, comprovando a validade da abordagem de Slattery e Whitaker na modelagem deste tipo de problema.

Ao final, são apresentadas duas análises típicas desta área de Mecânica dos Fluidos. Aproveitando a inclusão do fenômeno de condução no sólido, é investigado o efeito da variação da relação entre as condutividades térmicas do fluido e do sólido ( $k_R$ ). Conclui-se, por exemplo, que o parâmetro  $k_R$  é crítico para vazões baixas (regime de Darcy). Um outro aspecto interessante é que, sendo a matriz sólida constituída de material isolante, não importa muito qual a condutividade térmica do fluido na eficiência do processo de troca de calor com as paredes do duto. Adicionalmente, é estimado o tempo necessário para secagem de uma certa quantidade de milho armazenada em um silo, e o

resultado fica muito próximo daquele obtido por meio da análise comumente feita por pesquisadores da área de engenharia agrícola [29].



---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

1. A. CAMUS, *O Mito de Sísifo*, Ed. Guanabara.
2. H. DARCY, *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*, Dalmont, Paris, 1856.
3. P.H. FORSCHHEIMER, *Z. Ver. Dstch. Ing.*, Vol. 45, pp. 1782-1788, 1901
4. H.C. BRINKMAN, A Calculation of the Viscous Force Extended by a Flowing Fluid on a Dense Swarm of Particles, *Appl. Sci. Res.*, Vol. A1, pp. 26-34, 1947.
5. S. WHITAKER, Advances in Theory of Fluid Motion in Porous Media, *Ind. Engng. Chem.*, Vol. 61, pp. 14-28, 1969
6. J. C. SLATTERY, *Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua*, Krieger, New York, 1978.
7. K. VAFAI and C.L. TIEN, Boundary and Inertia Effects on Flow and Heat Transfer in Porous Media, *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, Vol.24, pp. 195-203, 1981.
8. D. POULIKAKOS e K. RENKEN, Forced Convection in a Channel Filled with Porous Medium, Including the Effects of Flow Inertia, Variable Porosity and Brinkman Friction, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 109, pp. 880-888, 1987.
9. M.L. HUNT e C.L. TIEN, Non-Darcian Convection in Cylindrical Packed Beds, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 110, pp. 378-384, 1988.
10. W.G. GRAY, A Derivation of the Equations for Multi-Phase Transport, *Chemical Engineering Science*, Vol. 30, pp. 229-233, 1975.
11. N. WAKAO e S. KAGUEI, *Heat and Mass Transfer in Packed Beds*, Gordon and Breach Publishers Inc., New York, 1982.

12. S. SEBBEN, *Transferência Convectiva de Calor e Massa em um Duto Preenchido com Esferas Compactadas*, Dissertação de Mestrado, Univ. Fed. de Santa Catarina, 1990.
13. S. ERGUN, Fluid Flow Through Packed Columns, *Chem. Eng. Progress*, Vol. 48, nro. 2, pp. 89-94, 1952.
14. T. CEBECI e P. BRADSHAW, *Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer*, Springer-Verlag, New York, 1984.
15. J. BEAR, *Dynamics of Fluids in Porous Media*, American Elsevier, New York, 1972.
16. J.H. KEENAN, F.G. KEYES, P.G. HILL e J.G. MOORE, *Steam Tables*, John Wiley & Sons, New York, 1969.
17. K.J. RENKEN e D. POULIKAKOS, Experiment and Analysis of Forced Convective Heat Transport in a Packed Bed of Spheres, *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, Vol. 31, nr. 7, pp. 1399-1408, 1988.
18. R.M. FAND, B.Y.K. KIM, A.C.C. LAM e R.T. PHAN, Resistance to the Flow of Fluids Through Simple and Complex Porous Media whose Matrices are Composed of Randomly Packed Spheres, *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 109, pp. 268-274, 1987.
19. M. SOZEN e K. VAFAI, Analysis of Energy and Momentum Transport for Fluid Flow Through a Porous Bed, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 112, pp. 690-699, 1990.
20. S. ASTAM, M. CHARMCHI e R.A. GAGGIOLI, Psychrometric Analysis for Arbitrary Dry-Gas Mixtures and Pressures Using Microcomputers, *ASHRAE Transactions*, 1986, Part 1B, vol. 92.
21. K. VAFAI, Convective Flow and Heat Transfer in Variable Porosity Media, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 147, pp. 233-259, 1984.
22. S. WHITAKER, Simultaneous Heat, Mass and Momentum Transfer in Porous Media: A Theory of Drying, *Advances in Heat Transfer*, Vol. 13, pp. 119-203, Academic Press, New York, 1977.
23. W.M. KAYS e H.C. PERKINS, Forced Convection, Internal Flow in Ducts, in: *Handbook of Heat Transfer Fundamentals*, Ed. W.M. Rohsenow, J.P. Hartnett e E. N. Ganic, Mc Graw Hill, New York, 1985.
24. A. BEJAN, *Convection Heat Transfer*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
25. R.M. FAND e R. THINAKARAN, The Influence of the Wall on Flow Through Pipes Packed with Spheres, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 112, pp. 84-88, 1990.
26. E. TSOTSAS e E.V. SCHLUNDER, Measurements of Mass Transfer Between

- Particles and Gas in Packed Tubes at Very Low Tube to Particle Diameter Ratios, *Warme und Stoffubertragung*, Vol.25, pp. 245-256, 1990.
27. S.V. PATANKAR, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1980.
  28. TIEN, C.L., Transverse Dispersion in Packed Beds, *ASME Proceedings of the 1988 National Heat Transfer Conference*, Houston, TX, Jul. 24-27, 1988, publ. by ASME, New York, 1988, pp. 629-634.
  29. D.B. BROOKER, F.W. BAKKER-ARKEMA, C.W. HALL, *Drying Cereal Grains*, The AVI Publishing Company Inc., 1982.
  30. L.M. DIAMANTE e P.A. MUNRO, Water Desorption Isotherms of Two Varieties of Sweet Potato, *International Journal of Food Science and Technology*, Vol. 25, pp. 140-147, 1990.
  31. M.P. TOLABA e C. SUAREZ, Desorption Isotherms of Shelled Maize: Whole, Dehulled and Hulls, *International Journal of Food Science and Technology*, Vol. 25, pp. 435-441, 1990.
  32. E.S. AJISEGIRI e P.A. SOPADE, Moisture Sorption Isotherms of Nigerian Millet at Varying Temperatures, *Journal of Food Engineering*, Vol. 12, pp. 283-292, 1990.
  33. PEISHI CHEN e DAVID C.T. PEI, A Mathematical Model of Drying Processes, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 32, Nr. 2, pp. 297-310, 1989.
  34. V.M.F. CRUZ, *Secagem de Produtos Agrícolas: Obtenção de Fruta-Passa a partir do Pseudofruto do Cajueiro (Anacardium occidentalli, Linn)*, Dissertação de Mestrado, Univ. Fed. do Rio Grande do Norte, dezembro de 1989.
  35. M. PRAT, On the Boundary Conditions at the Macroscopic Level, *Transport in Porous Media*, Vol. 4, pp. 259-280, 1989.

---

 APÊNDICE A MODELO CAPILAR PARA A VELOCIDADE
 

---

O primeiro aspecto a ser considerado é que em um meio poroso o escoamento se dá no interior de pequenos capilares. Tais capilares são os únicos caminhos existentes no material por onde o fluido pode escoar. Na análise que se segue, será considerado apenas um destes capilares.

Como a seção transversal do capilar é de dimensões bem menores que seu comprimento, pode-se assumir que o escoamento está plenamente desenvolvido e que a velocidade é dada pela equação de Hagen-Poiseuille. No caso do capilar possuir seção transversal circular, tem-se

$$u_c(r) = - \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} R^2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (A-1)$$

e a velocidade média  $\bar{u}_c$  é dada por

$$\bar{u}_c = - \frac{R^2}{8\mu} \frac{dp}{dx} = - \frac{D^2}{32\mu} \frac{dp}{dx} \quad (A-2)$$

Certamente o capilar não terá uma seção transversal circular e desta forma pode-se generalizar o resultado anterior e escrever

$$\bar{u}_c = - \frac{D_h^2}{f\mu} \frac{dp}{dx} \quad (A-3)$$

onde  $D_h$  é o diâmetro hidráulico dado por

$$D_h = 4 \frac{\text{Área}}{\text{Perímetro}} = 4 \frac{\text{Volume de fluido}}{\text{Área molhada}} \quad (A-4)$$

e  $f$  é o fator de atrito associado à área da secção transversal do capilar.

Pode-se agora escrever,

$$-\Delta p = \frac{f\mu L_c}{D_h^2} \bar{u}_c \quad (A-5)$$

onde  $L_c$  é o comprimento do capilar.

Note-se agora que não é conveniente trabalhar com a velocidade média no capilar,  $\bar{u}_c$ , nem com o comprimento do capilar,  $L_c$ .

Considere-se  $u_i$  a velocidade intersticial, definida de forma que

$$L / u_i = L_c / \bar{u}_c \quad (A-6)$$

que é o tempo de residência de uma partícula de fluido no material poroso.

A dimensão  $L$  está indicada na fig. A-1.

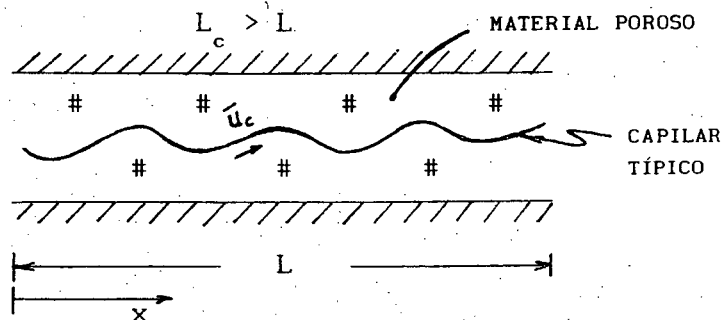


Figura A-1 Capilar típico

Da equação (A-6) conclui-se que

$$\bar{u}_c = u_i \left( \frac{L_c}{L} \right) \quad (A-7)$$

A grandeza  $(L_c/L)$  é comumente conhecida como tortuosidade do meio

poroso.

Ainda, como se quer falar em escoamento através do meio poroso e definir uma vazão global através do meio como na fig.A-2,

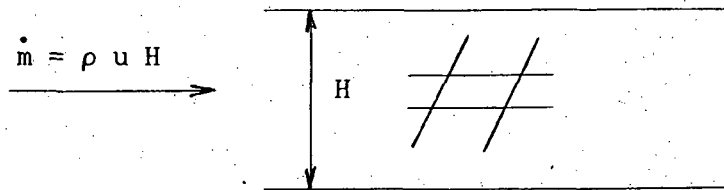


Figura A-2 Vazão global através do meio poroso

é conveniente definir

$$u = \varepsilon u_i \quad (A-8)$$

onde u é uma velocidade superficial e "ε" é a porosidade do meio poroso

$$\varepsilon = \frac{V_{\text{vazio}}}{V_{\text{total}}}$$

Assim,

$$\bar{u}_c = \frac{(L_c/L)}{\varepsilon} u \quad (A-9)$$

e desta forma,

$$-\Delta p = \frac{f \mu L_c}{D_h^2} \frac{(L_c/L)}{\varepsilon} u \quad (A-10)$$

ou,

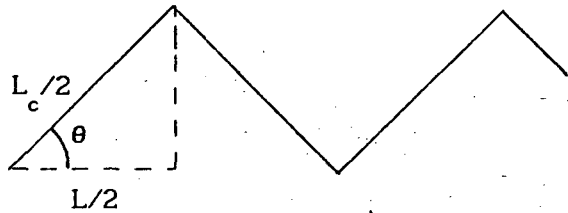
$$-\frac{\Delta p}{L} = \frac{\mu}{K} u \quad (A-11)$$

onde

$$K = \frac{D_h^2 \varepsilon}{f (L_c/L)^2} \quad (A-12)$$

A grandeza K é denominada permeabilidade do meio poroso e a equação (A-11) é a celebrada equação de Darcy.

Assumindo uma tortuosidade como a indicada a seguir,



$$L_c/L = \sec\theta$$

para  $\theta = 45^\circ$ ,

$$\Rightarrow L_c/L = \sqrt{2}$$

Ainda, para duto circular  $f$  vale 32 e para placas paralelas  $f$  vale 48. Tomando um valor médio de 40,

$$K = \frac{D_h^2 \epsilon}{40 \times 2} = \frac{D_h^2 \epsilon}{80} \quad (A-13)$$

O diâmetro hidráulico,

$$D_h = \frac{4 V_{\text{vazio}}}{A_{\text{superficial dos poros}}}$$

pode ser determinado se for conhecida a topologia do material poroso.

No caso de esferas compactadas de diâmetro  $d$ ,

$$V_{\text{total}} = V_{\text{vazio}} + V_{\text{sólido}}$$

onde, sendo  $N$  o número de esferas por unidade de volume,

$$V_{\text{sólido}} = N \frac{4}{3} \frac{\pi d^3}{8} = \frac{N \pi d^3}{6}$$

mas,

$$V_{\text{sólido}} = (1-\epsilon) V_T$$

$$V_{\text{vazio}} = \epsilon V_T = \epsilon \frac{N \pi d^3}{6} \frac{1}{(1-\epsilon)} = \frac{N \pi d^3}{6(1-\epsilon)} \epsilon$$

Assim,

$$D_h = \frac{4 \cdot N \pi d^3 \epsilon / [6(1-\epsilon)]}{N \pi d^2} = \frac{2}{3} \frac{d \epsilon}{(1-\epsilon)} \quad (A-14)$$

Logo,

$$K = \frac{4}{9} \frac{d^2 \epsilon^2}{(1-\epsilon)^2} \frac{\epsilon}{80} = \frac{d^2 \epsilon^3}{180(1-\epsilon)^2} \quad (A-15)$$

Medidas experimentais (Ergun, [13]) indicam que em esferas compactadas a expressão anterior correlaciona bastante bem os dados experimentais se utilizamos 150 em vez de 180. A expressão (A-15) para a permeabilidade é comumente denominada de relação de Carman-Kozeny.

---

 APÊNDICE B CAMADA LIMITE HIDRODINÂMICA
 

---

Ao longo do texto foi considerado que a camada limite hidrodinâmica se desenvolve rapidamente em escoamentos em canais. Este fato é intuitivo e pode ser comprovado por uma análise de ordem de grandeza semelhante à do escoamento em meios contínuos.

A equação da conservação da quantidade de movimento para a direção  $x$  pode ser escrita como (ver equação 3-28)

$$\frac{\rho_f}{\epsilon} \left[ u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u}{\epsilon} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u}{\epsilon} \right) \right] = - \frac{\partial P}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\mu_f}{\epsilon} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \frac{\mu_f}{K} u - \rho_f A u^2 \quad (B-1)$$

onde já foi utilizada a conservação da massa para simplificar o termo de aceleração.

Dentro da camada limite,

$y \ll \delta$  (espessura da camada limite)

$x \ll X$  (distância desde a borda da placa)



o que leva a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{u}{X^2}$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \ll \frac{u}{\delta^2}$$

o que permite desprezar a difusão em x, pois

$$\frac{\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)}{\left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)} \ll \left( \frac{\delta}{X} \right)^2 \ll 1$$

As demais ordens de grandeza são, definindo,

$$u_c = - \frac{K}{\mu_f} \frac{dP}{dx}$$

do tipo

$$u \ll u_c$$

$$\varepsilon \ll 1$$

$$\Rightarrow \rho_f \frac{u_c^2}{X}, \rho_f \frac{v u_c}{\delta} \ll \frac{\mu_f u_c}{K}, \frac{\mu_f u_c}{\delta^2}, \rho_f A u_c^2$$

Além disto, da equação da continuidade,

$$\frac{u_c}{X} \ll \frac{v}{\delta}$$

$$\Rightarrow \rho_f \frac{u_c^2}{X} \ll \frac{\mu_f}{K} u_c, \frac{\mu_f}{\delta^2} u_c, \rho_f A u_c^2$$

Os termos convectivos não terão mais importância quando

$$\frac{\left( \frac{\rho_f u_c^2}{X} \right)}{\left( \frac{\mu_f u_c}{K} \right)} \ll 1$$

ou

$$X \gg \frac{K u_c}{\nu_f} \quad (B-2)$$

o que deixa como termos importantes, após o desenvolvimento da camada limite apenas

$$\frac{\mu_f}{K} u_c, \frac{\mu_f}{\delta^2} u_c, \rho_f A u_c^2 \quad (B-3)$$

os quais deverão estar em equilíbrio.

De (B-3) pode-se tirar a ordem de grandeza da espessura da camada limite,

$$\delta \approx \sqrt{K} \quad (B-4)$$

A tabela B-1 apresenta resultados das equações (B-3) e (B-4) para fluidos comuns e meios porosos típicos, considerando uma velocidade  $u_c$  de 0,1 m/s [07].

**Tabela B-1** Características de camadas limites típicas em meios porosos de alta porosidade

FLUIDO	$\nu \cdot 10^6$ (m <sup>2</sup> /s)	d (mm)	$K \cdot 10^6$ (m <sup>2</sup> )	$\delta$ (m)	$\frac{K u_c}{\nu}$ (m)
AR	15	0,1	1	$10^{-3}$	0,066
AR	15	1	100	$10^{-2}$	0,6
ÁGUA	1,5	0,1	1	$10^{-3}$	0,06
ÁGUA	1,5	1	100	$10^{-2}$	6,6
ÓLEO LEVE	95	0,1	1	$10^{-3}$	0,001
ÓLEO LEVE	95	1	100	$10^{-2}$	0,1
ÓLEO MÁQ.	900	0,1	1	$10^{-3}$	0,0001
ÓLEO MÁQ.	900	1	100	$10^{-2}$	0,06

Os valores de K foram tomados a uma porosidade de referência,  $\epsilon = 0,98$ , pois K não está definido para  $\epsilon = 1$ .

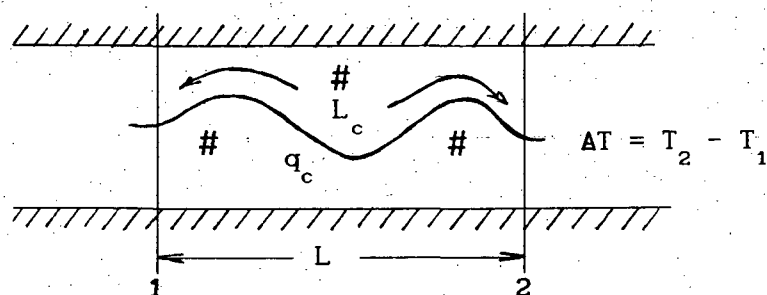
A tabela B-1 indica que a região de entrada pode ser desconsiderada, exceto para escoamentos de fluidos de baixa viscosidade dinâmica em meios altamente porosos [07].

---

 APÊNDICE C CONDUÇÃO DE CALOR ATRAVÉS DE UM MEIO POROSO SATURADO
 

---

Inicialmente será considerado um capilar de fluido de comprimento  $L_c$  e área de seção transversal  $A_c$ .



O calor transferido por condução através do capilar pode ser calculado pela lei de Fourier,

$$Q_c = q_c A_c \quad [\text{J/s}]$$

onde

$$q_c = -k \frac{\Delta T}{L_c} \quad (\text{C-1})$$

Como o que interessa é trabalhar com  $L$  e não  $L_c$ , é conveniente definir um fluxo de calor intersticial, respeitando, porém, a quantidade de energia sendo transportada entre 1 e 2,

$$\frac{q_c A_c \Delta t}{L_c} = \frac{q_i A_c \Delta t}{L}$$

onde  $\Delta t$  representa um intervalo de tempo e  $q_i$  um fluxo de calor intersticial.

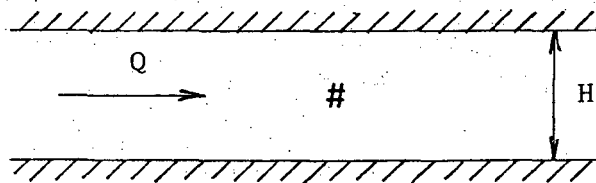
$$\Rightarrow q_c = \left[ \frac{L_c}{L} \right] q_i \quad (C-2)$$

Note-se que se for utilizado o caminho  $L$  para transportar a mesma energia que seria transportada através do caminho  $L_c$ , deve-se ter  $q_i < q_c$ , uma vez que  $L < L_c$ .

Adicionalmente, é requerida uma taxa de transferência de calor através do meio poroso como um todo. É conveniente, portanto, que se defina  $Q$  como

$$Q = q H$$

onde  $q$  é um fluxo de calor superficial.



Note-se que

$$q = \epsilon q_i \quad (C-3)$$

Combinando (C-2) e (C-3),

$$q_c = \frac{(L_c / L)}{\epsilon} q \quad (C-4)$$

Substituindo (C-4) em (C-1),

$$q = - \frac{\epsilon}{(L_c / L)} k \frac{\Delta T}{L_c}$$

ou

$$q = - \frac{\varepsilon}{(L_c/L)^2} k \frac{\Delta T}{L}$$

$$\Rightarrow q = - k_e \Delta T/L$$

onde

$$k_e = \frac{\varepsilon k}{(L_c/L)^2}$$

é a condutividade térmica efetiva.

Foi assumido que o calor é conduzido somente pelos capilares. Em resumo, a presente análise vale para a condução de calor pelo fluido.

Note-se ainda que agora é correto afirmar que

$$\vec{q} = -k_e \nabla T$$

---

## APÊNDICE D. SIMPLIFICAÇÃO DA DIFUSÃO AXIAL NOS PROBLEMAS DE TRANSPORTE

---

Em todas as equações de transporte do presente trabalho, a difusão axial foi desprezada, o que possibilitou a aplicação de um método numérico adequado a problemas parabólicos.

Neste apêndice são apresentadas análises de ordem de grandeza que permitem avaliar, em uma primeira aproximação, a faixa de validade de tais simplificações.

São apresentadas primeiro as simplificações relativas à transferência de calor. A seguir, aproveitando a semelhança formal existente, chega-se à condição em que pode ser simplificada a equação de transporte de massa.

### D-1 PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

O primeiro passo é reconhecer que na direção axial ( $x$ ), a energia pode ser transportada de três maneiras em meio poroso,

(i) pelo fluido

- por convecção

- por difusão

(ii) pelo sólido

Nas simplificações feitas está implícita a idéia de que a convecção no fluido é o fenômeno que normalmente domina o transporte de energia. Para saber a validade das equações resultantes, portanto, é preciso descobrir em que condições esta hipótese se aplica.

Uma análise de ordem de grandeza semelhante à de meios contínuos pode ser desenvolvida, desde que seja assumido equilíbrio térmico local. Tal hipótese é necessária para uma comparação entre sólido e fluido e para que uma "temperatura de mistura" possa, da forma como é usualmente definida, refletir a variação de energia entre duas seções transversais de um duto. Supõe-se ainda que ela não influencie em uma análise de ordem de grandeza.

### Transferência de Calor no Fluido

Assumindo equilíbrio térmico local,

$$T_f = T_s = T \quad (D-1)$$

a equação do fluido, eq. (4-16), fica

$$\rho_f c_{p_f} u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k_{ex}^f \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ k_{ey}^f \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (4-16)$$

Definindo

$$\alpha_{ex}^f = \frac{k_{ex}^f}{\rho_f c_{p_f}} = \frac{\epsilon \alpha_f}{\tau_x^2} + \gamma_T u d \quad (D-2)$$

$$\alpha_{ey}^f = \frac{k_{ey}^f}{\rho_f c_{p_f}} = \frac{\epsilon \alpha_f}{\tau_y^2} + \gamma_T u d \quad (D-3)$$

e lembrando que

$$\epsilon \ll \epsilon_\infty \quad \tau \ll \tau_\infty \quad u \ll \bar{u} \quad (D-4)$$

em que  $\bar{u}$  é a velocidade média no canal, chega-se a

$$\alpha_{ex}^f, \alpha_{ey}^f \ll \alpha_e^f \quad (D-5)$$

onde

onde

$$\alpha_e^f = \frac{\epsilon_\infty \alpha_f}{\tau_\infty^2} + \gamma_T \bar{u} d \quad (D-6)$$

A equação (4-16) é semelhante em forma à equação correspondente para meios contínuos. A análise apresentada em [24], pág. 84, permite, portanto, afirmar que a difusão axial da eq. (4-16) poderá ser desprezada se

$$Pe_e^f = \frac{\bar{u} H}{\alpha_e^f} \gg 1 \quad (D-7)$$

o que também pode ser escrito como

$$Pe_e^f = \frac{B K_\infty^* Pr \bar{U}}{\left[ \frac{\epsilon_\infty}{\tau_\infty^2} + \gamma_T Pr B K_\infty^* \bar{U} d_* \right]} \quad (D-8)$$

### Transferência de Calor no Sólido

Uma análise da equação governante para o sólido assumindo equilíbrio térmico local não faz sentido, pois o que impede que a solução da eq. (5-10) (completa) seja trivial é o termo fonte representativo da troca com o fluido. Mas uma comparação com o termo convectivo de calor no fluido é possível encarando  $T$  como estimativa para  $T_f$  e  $T_s$ . Em outras palavras, a comparação em termos de  $T$  entre as duas equações é equivalente a uma comparação em termos de  $T_f$  e  $T_s$ . O desenvolvimento é semelhante ao do fluido, apenas com a presença de  $k_s$  em lugar de  $k_f$ .

A simplificação da difusão no sólido é, então, válida quando

$$Pe_e^s = \frac{\bar{u} H}{\alpha_e^s} \gg 1 \quad (D-9)$$

onde

$$\alpha_e^s = \frac{k_e^s}{\rho_f c_{p_f}} = \frac{(1 - \epsilon_\infty) k_s}{\rho_f c_{p_f} \tau_\infty^2} \quad (D-10)$$

A expressão (D-9) pode também ser escrita como



$$Pe_e^s = \frac{Pr_s B \bar{U} K_\infty^* \tau_\infty^2}{(1 - \varepsilon_\infty)} \gg 1 \quad (D-11)$$

onde

$$Pr_s = Pr \left( \frac{k_f}{k_s} \right)$$

## D-2 PROBLEMA DE TRANSPORTE DE MASSA

Existe uma analogia entre o problema de transferência de calor no fluido e o problema de transferência de massa. Como consequência, é razoável admitir que a simplificação da equação para transporte de um soluto seja válida se

$$Pe_e^w = \frac{\bar{u} H}{D_{AB}^e} \gg 1 \quad (D-12)$$

O número de Peclet "mássico" também pode ser expresso por

$$Pe_e^w = \frac{B K_\infty^* Sc \bar{U}}{\left[ \frac{\varepsilon_\infty}{\tau_\infty^2} + \gamma_w Sc B \bar{U} K_\infty^* d_* \right]} \quad (D-13)$$

---

 APÊNDICE E RELAÇÕES TERMODINÂMICAS
 

---

E-1 EQUAÇÃO PARA  $w_s$  [20]

Para o cálculo da pressão de saturação, a seguinte expressão foi utilizada:

$$\frac{P_s}{P_c} = \exp \left[ \frac{1}{T_*} \frac{\sum_1^5 c_n (1-T_*)^n}{1 + c_6(1-T_*) + c_7(1-T_*)^2} - \frac{1 - T_*}{c_8(1-T_*)^2 + c_9} \right]$$

onde os  $c_n$  são

$$\begin{array}{lll} c_1 = -7,691234564 & c_2 = -26,08023696 & c_3 = -168,1706546 \\ c_4 = 64,23285504 & c_5 = -118,9646225 & c_6 = 4,16711732 \\ c_7 = 20,9750676 & c_8 = 1E8 & c_9 = 6,0 \end{array}$$

A temperatura adimensional é

$$T_* = \frac{T_s}{T_c}$$

em que  $T_s$  é a média intrínseca da temperatura no sólido.

$$T_c = 647,3 \text{ K}$$

$$P_c = 22120 \text{ kPa}$$

A umidade de saturação  $w_s$  e a pressão de saturação  $P_s$  estão relacionadas através da expressão

$$w_s = \frac{M_v}{M_{AR}} \frac{P_s}{P_A - P_s}$$

onde  $M_v$  é a massa molecular do vapor d'água,  $M_{AR}$  é a massa molecular do ar e  $P_A$  é a pressão atmosférica.

$$M_v = 18,01534 \text{ kg/kgmol}$$

$$M_{AR} = 28,9645 \text{ kg/kgmol}$$

$$P_A = 101,42 \text{ kPa}$$

A equação da umidade de saturação fica

$$w_s = 0,62198 \frac{P_s}{101,42 - P_s} \quad (\text{E-1})$$

É importante notar que para o cálculo de  $w_s$  a temperatura considerada foi  $T_s$ . Isto decorre de se estar considerando na modelagem a existência de uma camada de água na superfície das esferas a uma temperatura uniforme  $T_s$ .

## E-2 EQUAÇÃO PARA O CALOR LATENTE DE VAPORIZAÇÃO

$$h_{fg} = 2500,767765 - 2,368836114 T_s + 2,5868179E-4 T_s^2 \quad (\text{E-2})$$

$$(T_s \text{ em } ^\circ\text{C})$$

em que é empregado  $T_s$  pela mesma razão anterior, ou seja, a superfície da esfera está a  $T_s$ . Esta expressão resultou de um ajuste dos dados de [16].

---

 APÊNDICE F VALORES UTILIZADOS NA VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL
 

---

Na validação experimental, os resultados obtidos com o modelo numérico foram comparados com os resultados experimentais de [17]. Como no artigo não haviam tabelas referentes aos gráficos, os pontos foram determinados com o auxílio de uma mesa digitalizadora a partir de uma cópia do original. Este processo envolve vários erros, como, por exemplo, distorção da cópia e imprecisão visual. Portanto, os pontos experimentais que aparecem nos gráficos do item 9-4 apresentam, certamente, um erro em relação aos originais. Neste apêndice estão listados exatamente os valores que foram tomados. Os títulos referem-se à numeração das figuras em [17].

Figura 4 ( $x=7,62\text{cm}$ )

B = 3,79E6	
$y_*$	$\theta$
0,083	0,557
0,292	0,935
0,500	0,993
0,708	1,000
0,917	1,000

B = 1,44E8	
$y_*$	$\theta$
0,042	0,931
0,250	0,976
0,458	1,000
0,667	1,000
0,875	1,000

Figura 5 (x=7,62cm)

x = 7,62cm	
y <sub>*</sub>	θ
0,083	0,810
0,292	0,966
0,500	0,981
0,708	0,996
0,917	1,000

x = 38,1cm	
y <sub>*</sub>	θ
0,083	0,438
0,250	0,822
0,458	0,945
0,667	0,973
0,875	0,994

x = 53,3cm	
y <sub>*</sub>	θ
0,063	0,203
0,271	0,714
0,479	0,909
0,688	0,997
0,896	0,995

Figura 6 (x=7,62cm)

B = 3,67E6	
y <sub>*</sub>	θ <sub>m</sub>
0,083	0,536
0,292	0,907
0,458	1,060
0,667	1,068
0,875	1,066

B = 1,53E8	
y <sub>*</sub>	θ <sub>m</sub>
0,042	0,860
0,250	0,990
0,458	1,036
0,667	1,000
0,875	0,988

Figura 7 (B=7,65E7)

x = 7,62cm	
y <sub>*</sub>	θ <sub>m</sub>
0,042	0,713
0,250	0,958
0,458	1,044
0,667	1,011
0,875	0,989

x = 22,9cm	
y <sub>*</sub>	θ <sub>m</sub>
0,063	0,630
0,292	0,922
0,500	1,029
0,708	1,043
0,917	1,013

x = 99,1cm	
y <sub>*</sub>	θ <sub>m</sub>
0,042	0,624
0,250	0,948
0,458	1,132
0,667	1,062
0,875	1,082

Figura 9 (B=1,91E7)

x <sub>*</sub>	0,285	0,856	1,427	1,997	2,568	3,138	3,709	4,280	4,850
Nu	33,34	17,70	13,03	13,03	11,86	9,730	10,99	11,71	10,99

Figura 10 (B=4,77E7)

$x_*$	0,285	0,856	1,427	1,997	2,568	4,280	4,850	5,421
Nu	33,11	25,28	22,75	15,52	13,68	12,67	11,01	11,36

Figura 11 (B=8,16E7)

$x_*$	0,285	0,856	1,427	1,997	3,138	3,709	4,280	4,850
Nu	40,36	29,92	20,18	16,48	15,70	17,06	14,09	15,07

---

## APÊNDICE G APLICAÇÃO DO FORMALISMO AO CONTORNO \*

---

Entre as abordagens possíveis para o problema de meio poroso, este trabalho está fundamentado na técnica de médias volumétricas de Slattery e Whitaker. Basicamente, esta técnica é uma tentativa de caracterizar fenômenos de transporte em meios porosos com base em grandezas médias, representativas de volumes bem definidos chamados volume-amostra (cap. 2). Com auxílio de outros modelos e de experimentos, chega-se a uma descrição bastante satisfatória dos fenômenos físicos envolvidos, conforme extensamente discutido no texto da presente dissertação.

Para que este formalismo possa ser aplicado, no entanto, duas restrições devem ser cumpridas quanto ao volume-amostra  $V$ , quais sejam,

- (i) não pode haver rotação nem deformação de  $V$ , quando este for transladado no domínio de interesse, durante a obtenção do teorema de médias [6, pág. 196];
- (ii) sendo " $d$ " uma dimensão representativa dos poros, " $L$ " uma dimensão representativa do domínio de solução (representativa do problema macroscópico) e " $\ell$ " uma dimensão representativa de  $V$ , deve-se ter, para que a formulação obtida seja válida,

$$d \ll \ell \ll L$$

---

\* O autor agradece aos Professores P.C. Philippi e S. Borjes pelas valiosas críticas sobre esta questão, as quais geraram este apêndice.

Estas condições são válidas para todo o domínio e são importantes para que as equações que venham a ser obtidas não dependam de V.

Por outro lado, para que um problema prático envolvendo meios porosos fique bem posto e possa ser resolvido com fins de projeto, é necessário impor condições de contorno. Há diversas situações possíveis, tais como, por exemplo, meio poroso limitado por fronteira sólida, por um fluido, ou mesmo por outro meio poroso. Próximo a estas fronteiras, porém, não fica claro o volume-amostra que deve ser adotado e o próprio significado de uma média volumétrica associada a um ponto localizado nesta região é bastante discutível. Neste apêndice pretende-se discutir apenas a condição de fronteira sólida, por estar presente no problema resolvido numericamente no presente trabalho.

Conforme sugerido pela figura 7-2, quando um meio poroso não-consolidado é limitado por uma fronteira sólida, cria-se uma situação em que a região próxima a esta fronteira tem muito mais fluido do que o corpo do meio poroso, afastado da mesma. Como consequência, um volume-amostra, para ser representativo, deverá ser muito maior para pontos localizados próximo à parede.

É inevitável a conclusão de que, ao serem incluídas fronteiras sólidas, o volume-amostra necessariamente varia. Na presente dissertação, tal efeito é levado em consideração ao se permitir que a porosidade varie, de acordo com a equação (7-1), chegando a valer 1 para a região adjacente à parede, onde só há fluido. Esta metodologia inclui, evidentemente, uma contradição. Não se sabe a ordem de grandeza do erro envolvido, mas conforme mostrado por Sebben [12], sabe-se que os resultados melhoram quando se permite que a porosidade varie.

É importante notar que primeiro é efetuada a média e depois é permitido que a porosidade varie. Ou seja, quando a porosidade é levada a variar, já não existe, matematicamente, meio poroso algum, mas sim um contínuo correspondente às médias. Neste contínuo faz sentido até falar em gradientes, os quais representam variações em distâncias tão pequenas quanto se queira e, portanto, bem menores do que " $l$ ". Pode-se argumentar, portanto, que não aceitar a variação da porosidade implica em não aceitar os gradientes das equações médias, os quais estão perfeitamente fundamentados teoricamente.

Pode-se ainda levantar a questão do significado de um volume-amostra representado próximo à parede. Não parece fazer sentido, no entanto, tentar desenhar um volume-amostra diretamente nesta região. Uma



interpretação mais plausível para um volume-amostra associado a um ponto P próximo à parede é que ele representa um volume-amostra que se adapta a um meio poroso constituído do material retirado da região em torno de P. Em outras palavras, "porosidade variável" é equivalente a uma sequência de infinitos meios porosos de porosidade constante, cada um com seu volume-amostra adequado. Convém lembrar que, em um problema de placas paralelas, o domínio é infinito na direção perpendicular ao plano do domínio de solução.

O objetivo do presente apêndice é registrar a existência de controvérsia quanto à extensão da teoria utilizada no corpo do meio poroso para regiões próximas de fronteiras. Tal questão está longe de ser resolvida e a validade da aplicação de condições de contorno às equações obtidas no presente trabalho permanece passível de discussão. Imagina-se que os erros associados a tais aproximações sejam pequenos, notadamente no contexto da engenharia de leitos compactados. A corroborar esta idéia há ainda o trabalho de Prat [35], onde é mostrado que, para problemas de condução, o erro existe e pode ser desprezado quando são impostas condições de contorno de Dirichlet e na maioria dos casos envolvendo condições de contorno de Neumann.

---

## ÍNDICE

---

Caso padrão, 82

Conteúdo de umidade de equilíbrio, 93

Darcy, 1

Dispersão, 53

térmica, 24

mássica, 32

Efeito canal, 3, 44

Ergun, 16

Forschheimer, 2, 19

coeficiente de, 52

Média volumétrica, 9

global, 9

intrínseca, 10

Nusselt, 71

Peclets, 117

Permeabilidade, 52

Porosidade, 9, 46

Reynolds, 40, 51, 56

Teorema fundamental, 11

Tortuosidade, 26, 35, 46

---