

Eduardo Vinicius Kuhn

**CONTRIBUIÇÕES À MODELAGEM ESTOCÁSTICA DE  
ALGORITMOS ADAPTATIVOS NORMALIZADOS**

Florianópolis  
2015



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA ELÉTRICA**

Eduardo Vinicius Kuhn

**CONTRIBUIÇÕES À MODELAGEM ESTOCÁSTICA DE  
ALGORITMOS ADAPTATIVOS NORMALIZADOS**

Tese submetida ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Rui Seara, Dr.

Florianópolis  
2015

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Kuhn, Eduardo Vinicius

Contribuições à modelagem estocástica de algoritmos adaptativos normalizados / Eduardo Vinicius Kuhn ; orientador, Rui Seara - Florianópolis, SC, 2015.  
169 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica.

Inclui referências

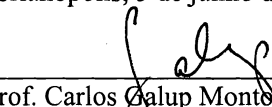
1. Engenharia Elétrica. 2. Processamento digital de sinais. 3. Filtragem adaptativa. 4. Modelagem estocástica. 5. Algoritmos normalizados. I. Seara, Rui. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

# CONTRIBUIÇÕES À MODELAGEM ESTOCÁSTICA DE ALGORITMOS ADAPTATIVOS NORMALIZADOS

Eduardo Vinicius Kuhn

Esta Tese foi julgada adequada para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica, Área de Concentração *Comunicações e Processamento de Sinais*, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 3 de junho de 2015.

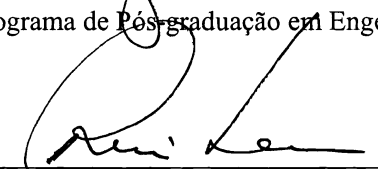


---

Prof. Carlos Galup Monteiro, Dr.

Coordenador do Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica

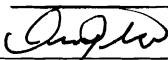
Banca Examinadora:



---

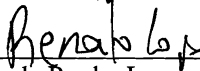
Prof. Rui Seara, Dr. - UFSC

Orientador



---

Prof. Luís Geraldo Pedroso Meloni, Dr. - UNICAMP



---

Prof. Renato da Rocha Lopes, Ph.D. - UNICAMP



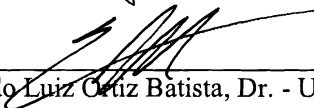
---

Prof. Bartolomeu Ferreira Uchôa Filho, Ph.D. - UFSC



---

Prof. Walter Pereira Carpes Júnior, Dr. - UFSC



---

Prof. Eduardo Luiz Cruz Batista, Dr. - UFSC



Dedico este trabalho aos meus pais  
Sérgio e Tânia, e ao meu irmão  
Fernando.





## AGRADECIMENTOS

Deixo aqui registrados meus sinceros agradecimentos a todos que contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho, em especial:

À minha família pelo incentivo, apoio, dedicação e compreensão ao longo dos últimos anos.

Ao Prof. Rui Seara pela amizade, incentivo, motivação, apoio e dedicação, fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho de pesquisa e para minha formação acadêmica e profissional.

Ao Prof. Eduardo Luiz Ortiz Batista pelas valiosas contribuições durante o desenvolvimento deste trabalho, pelas inúmeras conversas sobre filtragem adaptativa e outros tópicos de pesquisa relevantes.

Ao Prof. Hans Helmut Zürn, pelos conhecimentos transmitidos através das revisões dos artigos produzidos ao longo dos últimos anos.

Aos membros da banca examinadora pelas pertinentes contribuições e sugestões, as quais têm melhorado significativamente a qualidade deste material.

Aos meus amigos Ciro Pitz, Eduardo Beck, Fabio Perez, Guilherme Zilli, Hermes Barbosa, Marcos Matsuo e Raimundo Nonato pelas valiosas conversas e pelo apoio no decorrer dos últimos anos.

Aos meus amigos Elton e Walter, pelo grande apoio à realização deste trabalho, seja manifestando suas opiniões, realizando favores, oferecendo conselhos e conversando sobre os mais diversos assuntos.

Não menos importante, a todos os colegas do LINSE pela ótima convivência diária. Para registrar, um muito obrigado ao Augusto Hentz, André Schlichting, Fernando Pacheco, Guilherme Bosco, Guilherme Steinmann, João Paulo Acosta Luz, Rodrigo Tessari, Rui Seara Junior, Sandra Kafka, Sidnei Noceti Filho e Simone Klein.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro, à Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) e ao LINSE-Laboratório de Circuitos e Processamento de Sinais pela infraestrutura disponibilizada para a realização deste trabalho.

Estendo ainda os agradecimentos a todos que de alguma forma contribuíram direta ou indiretamente para o desenvolvimento e conclusão deste trabalho de pesquisa.



## RESUMO

Este trabalho de pesquisa trata da modelagem estocástica de três algoritmos adaptativos bem conhecidos da literatura, a saber: o algoritmo NLMS (*normalized least-mean-square*), o algoritmo IAF-PNLMS (*individual-activation-factor proportionate NLMS*) e o algoritmo TDLMS (*transform-domain least-mean-square*). Particularmente para o algoritmo NLMS, um modelo estocástico analítico é obtido levando em conta um ambiente não estacionário e sinais de entrada gaussianos complexos. Baseado nas expressões de modelo, o impacto dos parâmetros do algoritmo sobre o seu desempenho é discutido, evidenciando algumas das características de rastreamento do algoritmo NLMS frente ao ambiente não estacionário considerado. Para o algoritmo IAF-PNLMS, assumindo um ambiente estacionário, um modelo estocástico mais preciso do que os até então disponíveis na literatura é apresentado, considerando sinais de entrada gaussianos correlacionados tanto complexos quanto reais. Com respeito ao algoritmo TDLMS, um modelo estocástico melhorado é derivado focando em um ambiente não estacionário e sinais de entrada gaussianos correlacionados reais. A partir das expressões de modelo obtidas, o impacto dos parâmetros do algoritmo TDLMS sobre o seu desempenho é discutido. Resultados de simulação para diferentes cenários de operação são mostrados, confirmando a precisão dos modelos estocásticos propostos tanto na fase transitória quanto em regime permanente.

**Palavras-chave:** Algoritmo NLMS, algoritmo IAF-PNLMS, algoritmo TDLMS, filtragem adaptativa, modelagem estocástica.



## ABSTRACT

This research work focuses on the stochastic modeling of three well-known adaptive algorithms from the literature, namely: the normalized least-mean-square (NLMS) algorithm, the individual-activation-factor proportionate NLMS (IAF-PNLMS) algorithm, and the transform-domain least-mean-square (TDLMS) algorithm. Particularly for the NLMS algorithm, an analytical stochastic model is obtained taking into account a nonstationary environment and complex-valued Gaussian input data. Based on the obtained model expressions, the impact of the algorithm parameters on its performance is discussed, clarifying some of the tracking properties of the NLMS algorithm vis-à-vis the nonstationary environment considered. For the IAF-PNLMS algorithm, assuming a stationary environment, a more accurate stochastic model than those available so far in the literature is presented considering both complex- and real-valued Gaussian correlated input data. Regarding the TDLMS algorithm, an improved stochastic model is derived focusing on a nonstationary environment and real-valued Gaussian correlated input data. From the obtained model expressions, the impact of the TDLMS algorithm parameters on its performance is discussed. Simulation results for different operating scenarios are shown, confirming the accuracy of the proposed stochastic models for both transient and steady-state phases.

**Keywords:** NLMS algorithm, IAF-PNLMS algorithm, TDLMS algorithm, adaptive filtering, stochastic modeling.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1. Diagrama de blocos de um filtro adaptativo aplicado no contexto de um problema de identificação de sistema (adaptado de [2]-[4]).	27
Figura 1.2. Diagrama de blocos de um filtro adaptativo considerando uma estrutura transversal de filtragem (adaptado de [4]).	29
Figura 2.1. Curvas de EQME em regime permanente [obtidas a partir de (2.41)-(2.43)] para $\alpha = 0,999$ e três valores de $\sigma_{\phi}^2$ .	48
Figura 2.2. Curvas de EQME em regime permanente [obtidas a partir de (2.41)-(2.43)] para $\sigma_{\phi}^2 = 10^{-8}$ e três valores de $\alpha$ .	48
Figura 2.3. Curvas individuais de EQME em regime permanente [obtidas de (2.41), (2.42) e (2.43)] para $\alpha = 0,999$ e $\sigma_{\phi}^2 = 10^{-8}$ .	49
Figura 2.4. Passo de adaptação ótimo que leva ao EQME em regime permanente mínimo [dado por (2.54)] obtido considerando $\sigma_{\phi}^2$ variável e $\alpha = 0,999$ .	52
Figura 2.5. Exemplo 1. Curvas de aprendizagem (EQM) obtidas por simulações de MC (linhas cinza irregulares) e através do modelo proposto (linhas escuras tracejadas) para (a) $\chi = 34,73$ e (b) $\chi = 1097,96$ .	54
Figura 2.6. Resposta ao impulso da planta do Exemplo 2. (Linha cinza sólida) parte real. (Linha escura tracejada) parte imaginária.	55
Figura 2.7. Exemplo 2. Comportamento médio do vetor de coeficientes obtido por simulações de MC (linhas cinza) e através do modelo proposto (linhas escuras tracejadas), considerando SNR = 20 dB. (a) Parte real. (b) Parte imaginária.	56
Figura 2.8. Exemplo 2. Curvas de aprendizagem (EQME) obtidas através de simulações de MC (linhas cinza irregulares) e a partir do modelo proposto (linhas escuras tracejadas).	57
Figura 2.9. Exemplo 2. Curvas de EQME em regime permanente obtidas por simulações de MC (triângulo cinza), expressões de modelo (2.34) e (2.38) (linhas escuras tracejadas), e expressões de modelo (2.41)-(2.43) (linhas escuras sólidas). (a) SNR = 20 dB. (b) SNR = 40 dB.	58

Figura 2.10. Respostas ao impulso de planta do Exemplo 3. (Linha cinza sólida) parte real. (Linha escura tracejada) parte imaginária. ....59

Figura 2.11. Exemplo 3. Curvas de aprendizagem (EQME) obtidas por simulações de MC (linhas cinza irregulares) e a partir do modelo proposto (linhas escuras tracejadas) para valores diferentes de  $\sigma_{\phi}^2$ , considerando (a) e (c) SNR = 20 dB, e (b) e (d) SNR = 40 dB. (a) e (b) Planta  $\mathbf{w}_0^C$ . (c) e (d) Planta  $\mathbf{w}_0^D$ . ....61

Figura 2.12. Exemplo 4. Curvas de aprendizagem (EQME) obtidas por simulações de MC (linhas cinza irregulares) e através do modelo proposto (linhas escuras tracejadas) para  $\mu = 0,1$ ,  $\mu = 0,25$  e  $\mu = 0,5$ . (a) SNR = 20 dB. (b) SNR = 40 dB. ....62

Figura 2.13. Exemplo 4. Curvas de EQME em regime permanente obtidas por simulações de MC (triângulo cinza) e através da expressão de modelo (2.52) (linhas escuras sólidas). (a) SNR = 20 dB. (b) SNR = 40 dB. ....63

Figura 3.1. Exemplo 1. Comportamento médio da parte real e da parte imaginária de cinco coeficientes do filtro adaptativo. (Linhas cinza) simulações de MC. (Linhas escuras tracejadas) modelo proposto. (a)-(b)  $\chi = 57,59$ . (c)-(d)  $\chi = 1211,85$ . ....83

Figura 3.2. Exemplo 1. Curvas de aprendizagem (EQM) obtidas por simulações de MC (linhas cinza irregulares) e a partir do modelo proposto (linhas escuras tracejadas). (a)  $\chi = 57,59$ . (b)  $\chi = 1211,85$ . ....84

Figura 3.3. Respostas ao impulso da planta do Exemplo 2. (Linha cinza sólida) parte real. (Linha escura tracejada) parte imaginária. (a) Planta  $\mathbf{w}_0^B$ . (b) Planta  $\mathbf{w}_0^C$ . ....85

Figura 3.4. Exemplo 2. Curvas de aprendizagem (EQM) obtidas através de simulações de MC (linhas cinza irregulares) e a partir do modelo proposto (linhas escuras tracejadas). (a) Planta  $\mathbf{w}_0^B$ . (b) Planta  $\mathbf{w}_0^C$ . ....86

Figura 3.5. Exemplo 3. Curvas de EQME em regime permanente obtidas por simulações de MC (marcadores cinza) e a partir do modelo proposto (linhas escuras sólidas). ....87

Figura 3.6. Exemplo 4. Curvas de aprendizagem (EQM) obtidas através de simulações de MC (linhas cinza irregulares) e a partir do modelo proposto (linhas escuras tracejadas). (a) Planta  $\mathbf{w}_0^D$  com  $\xi(\mathbf{w}_0^D) = 0,6106$ . (b) Planta  $\mathbf{w}_0^E$  com  $\xi(\mathbf{w}_0^E) = 0,9582$ . ....89



Figura 3.7. Respostas ao impulso da planta do Exemplo 5 obtidas a partir da Recomendação G.168 da ITU-T [92]. (a) Planta $w_o^F$ . (b) Planta $w_o^G$ . .....	90
Figura 3.8. Exemplo 5. Comportamento médio de cinco coeficientes do filtro adaptativo. (Linhas cinza) simulações de MC. (Linhas escuras tracejadas) modelo proposto. (a) Planta $w_o^F$ . (b) Planta $w_o^G$ . .....	91
Figura 3.9. Exemplo 5. Curvas de aprendizagem (EQM) obtidas através de simulações de MC (linhas cinza irregulares) e a partir do modelo proposto (linhas escuras tracejadas). (a) Planta $w_o^F$ . (b) Planta $w_o^G$ . ...	92
Figura 3.10. Exemplo 6. Curvas de EQME em regime permanente obtidas por simulações de MC (marcadores cinza) e a partir do modelo proposto (linhas escuras sólidas). .....	93
Figura 4.1. Diagrama de blocos de um filtro adaptativo operando no domínio transformado. ....	101
Figura 4.2. Superfície de desajuste obtida [através de (4.57)-(4.59)] considerando (a) $\alpha$ variável e $\sigma_\phi^2 = 5 \times 10^{-7}$ , e (b) $\alpha = 0,999$ e $\sigma_\phi^2$ variável. ....	111
Figura 4.3. Curvas individuais de desajuste obtidas a partir de (4.57), (4.58) e (4.59) com $\alpha = 0,999$ para (a) $\sigma_\phi^2 = 5 \times 10^{-7}$ e (b) $\sigma_\phi^2 = 10^{-5}$ . ....	114
Figura 4.4. Passo de adaptação que leva ao EQME em regime permanente mínimo [dado por (4.63)] obtido considerando $\sigma_\phi^2$ variável e $\alpha = 0,999$ . ....	114
Figura 4.5. Exemplo 1. Comportamento médio do vetor de erro nos coeficientes transformados obtido por simulações de MC (linhas cinza) e através do modelo proposto (linhas escuras tracejadas). (a) SNR = 40 dB. (b) SNR = 60 dB. ....	119
Figura 4.6. Exemplo 1. Curvas de aprendizagem (EQME) obtidas por simulações de MC (linhas cinza irregulares) e através do modelo proposto (linhas escuras tracejadas). ....	119
Figura 4.7. Exemplo 2. Curvas de aprendizagem (EQME) obtidas por simulações de MC (linhas cinza irregulares) e através do modelo proposto (linhas escuras tracejadas). (a) $\chi = 581,13$ para $M = 32$ e $N = 16$ . (b) $\chi = 941,17$ para $M = 64$ e $N = 32$ . ....	121

Figura 4.8. Exemplo 3. Curvas de EQME em regime permanente obtidas por simulações de MC (×) e através do modelo proposto (linhas escuras tracejadas) para (a)-(c) SNR = 40 dB e (d)-(f) SNR = 60 dB. (a) e (d)  $\sigma_{\phi}^2 = 5 \times 10^{-6}$ . (b) e (e)  $\sigma_{\phi}^2 = 5 \times 10^{-8}$ . (c) e (f)  $\sigma_{\phi}^2 = 5 \times 10^{-10}$ . ..... 123

Figura 4.9. Exemplo 4. Curvas de aprendizagem (EQME) obtidas por simulações de MC (linhas cinza irregulares), através do modelo de [29] (linhas escuras pontilhadas) e a partir do modelo proposto (linhas escuras tracejadas). (a)  $N = 8$ . (b)  $N = 64$ . ..... 125

Figura 4.10. Resultados do teste da Aproximação  $\mathbf{E}_2(n)$  [dada em (4.30)] obtidos por simulações de MC de  $\{E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)\tilde{\mathbf{x}}(n)\tilde{\mathbf{x}}^T(n)\tilde{\mathbf{v}}(n)\tilde{\mathbf{w}}_o^T(n)]\}_{i,i}$  (linhas cinza irregulares) e modelo  $\{\mathbf{P}[\tilde{\mathbf{K}}'(n) - \tilde{\mathbf{K}}_o(n)]\}_{i,i}$  (linhas escuras tracejadas). (a)  $N = 8$ . (b)  $N = 64$ . ..... 126

Figura 4.11. Resultados do teste da Aproximação  $\mathbf{E}_3(n)$  [dada em (4.31)] obtidos por simulações de MC de  $\{E[\tilde{\mathbf{v}}(n)\tilde{\mathbf{v}}^T(n)\tilde{\mathbf{x}}(n)\tilde{\mathbf{x}}^T(n)\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)]\}_{i,i}$  (linhas cinza irregulares) e modelo de  $[\tilde{\mathbf{K}}(n)\mathbf{P}^T]_{i,i}$  (linhas escuras tracejadas). (a)  $N = 8$ . (b)  $N = 64$ . ..... 127

Figura 4.12. Resultados do teste da Aproximação  $\mathbf{E}_4(n)$  [dada em (4.32)] obtidos por simulações de MC de  $\{E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)\tilde{\mathbf{x}}(n)\tilde{\mathbf{x}}^T(n)\tilde{\mathbf{v}}(n)\tilde{\mathbf{v}}^T(n)\tilde{\mathbf{x}}(n)\tilde{\mathbf{x}}^T(n)\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)]\}_{i,i}$  (linhas cinza irregulares) e modelo  $\{2\mathbf{P}\tilde{\mathbf{K}}(n)\mathbf{P}^T + \text{Str}[\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{K}}(n)]\}_{i,i}$  (linhas escuras tracejadas). (a)  $N = 8$ . (b)  $N = 64$ . ..... 128

Figura 4.13. Comparações dos resultados obtidos por simulações de MC (×), através da abordagem descrita em [29] (o) e a partir das soluções consideradas aqui (□). (a) Matriz  $\mathbf{P}$ . (b) Matriz  $\mathbf{S}$ . ..... 129

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AR	<i>Autoregressive process</i> (processo autorregressivo)
DCT	<i>Discrete cosine transform</i> (transformada discreta de cosseno)
EQM	Erro quadrático médio
EQME	Erro quadrático médio em excesso
FIR	<i>Finite impulse response</i> (resposta ao impulso finita)
IAF-PNLMS	<i>Individual-activation-factor proportionate normalized least-mean-square</i>
IIR	<i>Infinite impulse response</i> (resposta ao impulso infinita)
IPNLMS	<i>Improved proportionate normalized least-mean-square</i>
ITU-T	<i>International telecommunications union - Telecommunication standardization sector</i>
KLT	<i>Karhunen-Loève transform</i> (transformada de Karhunen-Loève)
LMS	<i>Least-mean-square</i>
MC	Monte Carlo
$\mu$ -law PNLMS	$\mu$ -law proportionate normalized least-mean-square
NLMS	<i>Normalized least-mean-square</i>
PM	Princípio da média
PNLMS	<i>Proportionate normalized least-mean-square</i>
SNR	<i>Sinal-to-noise ratio</i> (razão sinal-ruído)
TDLMS	<i>Transform-domain least-mean-square</i>
VSSLMS	<i>Variable step-size least-mean-square</i>



## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO.....</b>	<b>25</b>
<b>1.1 Fundamentos de filtragem adaptativa e formulação do problema.....</b>	<b>25</b>
1.1.1 Problema de identificação de sistema.....	26
1.1.2 Filtros adaptativos .....	27
<b>1.2 Modelagem estocástica de algoritmos adaptativos.....</b>	<b>31</b>
<b>1.3 Objetivos do presente trabalho de pesquisa .....</b>	<b>32</b>
<b>1.4 Estrutura do trabalho.....</b>	<b>33</b>
<b>CAPÍTULO 2 - MODELAGEM DO ALGORITMO NLMS .....</b>	<b>35</b>
<b>2.1 Considerações e motivação.....</b>	<b>35</b>
<b>2.2 Formulação do problema .....</b>	<b>37</b>
2.2.1 Ambiente não estacionário .....	38
2.2.2 Revisitando o algoritmo NLMS .....	39
<b>2.3 Modelo proposto.....</b>	<b>39</b>
2.3.1 Comportamento médio do vetor de coeficientes .....	40
2.3.2 Curva de aprendizagem .....	41
2.3.3 Matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes ...	42
2.3.4 EQME em regime permanente .....	45
2.3.5 Desajuste .....	47
2.3.6 <i>Insights</i> sobre o comportamento do algoritmo em regime permanente .....	47
2.3.7 Análise para sinais de entrada não correlacionados .....	49
<b>2.4 Resultados de simulação.....</b>	<b>52</b>
2.4.1 Exemplo 1.....	53
2.4.2 Exemplo 2.....	55
2.4.3 Exemplo 3.....	57
2.4.4 Exemplo 4.....	61
<b>2.5 Conclusões .....</b>	<b>64</b>
<b>CAPÍTULO 3 - MODELAGEM DO ALGORITMO IAF-PNLMS ...</b>	<b>65</b>
<b>3.1 Considerações e motivação.....</b>	<b>65</b>
<b>3.2 Revisitando o algoritmo IAF-PNLMS.....</b>	<b>68</b>
<b>3.3 Modelo proposto.....</b>	<b>69</b>
3.3.1 Comportamento médio do vetor de coeficientes .....	70
3.3.2 Curva de aprendizagem .....	70
3.3.3 Matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes ...	71
3.3.4 EQME em regime permanente .....	72

3.3.5 Desajuste .....	74
<b>3.4 Sobre os valores esperados surgidos na derivação do modelo ...</b>	<b>74</b>
3.4.1 Decomposição de $\bar{\mathbf{G}}(n)$ , $\mathbf{R}$ e $\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R}$ .....	74
3.4.2 Solução de $\mathbf{R}_1(n)$ .....	76
3.4.3 Solução de $\mathbf{R}_2(n)$ .....	78
3.4.4 Solução de $\mathbf{R}_3(n)$ .....	78
3.4.5 Solução de $E_1(\infty)$ .....	80
<b>3.5 Resultados de simulação.....</b>	<b>81</b>
3.5.1 Sinais de entrada complexos .....	82
3.5.2 Sinais de entrada reais .....	88
3.5.3 Discussão.....	93
<b>3.6 Conclusões .....</b>	<b>94</b>
<b>CAPÍTULO 4 - MODELAGEM DO ALGORITMO TDLMS .....</b>	<b>97</b>
<b>4.1 Considerações e motivação .....</b>	<b>97</b>
<b>4.2 Revisitando o algoritmo TDLMS .....</b>	<b>100</b>
<b>4.3 Modelo proposto .....</b>	<b>101</b>
4.3.1 Comportamento médio do vetor de erro nos coeficientes transformados.....	102
4.3.2 Curva de aprendizagem.....	104
4.3.3 Matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes transformados.....	104
4.3.4 EQME em regime permanente.....	107
4.3.5 Desajuste .....	109
4.3.6 Passo de adaptação que leva ao EQME mínimo .....	112
4.3.7 Grau de não estacionaridade .....	115
4.3.8 Relação entre o desajuste e o grau de não estacionaridade ...	116
<b>4.4 Resultados de simulação.....</b>	<b>117</b>
4.4.1 Avaliação do modelo proposto.....	118
4.4.2 Validação das aproximações $E_2(n)$ - $E_4(n)$ .....	124
4.4.3 Avaliação das soluções de $\mathbf{P}$ e $\mathbf{S}$ .....	129
<b>4.5 Conclusões .....</b>	<b>130</b>
<b>CAPÍTULO 5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>131</b>
<b>5.1 Conclusões e comentários finais .....</b>	<b>131</b>
<b>5.2 Trabalhos publicados .....</b>	<b>134</b>
<b>5.3 Sugestões para trabalhos futuros .....</b>	<b>134</b>

<b>APÊNDICE A - DETERMINAÇÃO DE (2.5), (2.21) E (2.22) .....</b>	<b>137</b>
<b>A.1 Determinação de <math>R_1</math> .....</b>	<b>137</b>
<b>A.2 Determinação de <math>R_2</math> .....</b>	<b>139</b>
<b>A.3 Determinação de <math>R_3</math> .....</b>	<b>140</b>
<b>APÊNDICE B - DETERMINAÇÃO DE (3.8), (3.18), (3.19) E (3.29).</b>	<b>143</b>
.....	<b>143</b>
<b>B.1 Determinação de <math>R_1(n)</math> .....</b>	<b>143</b>
B.1.1 Sinais de entrada complexos.....	144
B.1.2 Sinais de entrada reais.....	145
<b>B.2 Determinação de <math>R_2(n)</math> .....</b>	<b>146</b>
B.2.1 Sinais de entrada complexos.....	147
B.2.2 Sinais de entrada reais.....	147
<b>B.3 Determinação de <math>R_3(n)</math> .....</b>	<b>148</b>
B.3.1 Sinais de entrada complexos.....	148
B.3.2 Sinais de entrada reais.....	150
<b>B.4 Determinação de <math>E_1(\infty)</math> .....</b>	<b>150</b>
B.4.1 Sinais de entrada complexos.....	150
B.4.2 Sinais de entrada reais.....	151
<b>APÊNDICE C - DETERMINAÇÃO DE (4.12) E (4.36).....</b>	<b>153</b>
<b>C.1 Determinação de P .....</b>	<b>153</b>
<b>C.2 Determinação de S .....</b>	<b>157</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>159</b>





## **INTRODUÇÃO**

Nas últimas décadas, o uso de filtragem adaptativa tem se mostrado uma importante solução nas mais diversas aplicações práticas, especialmente, nos casos em que não se tem conhecimento *a priori* das estatísticas dos sinais envolvidos e/ou quando o sistema considerado é variante no tempo [1]-[6]. Logo, devido ao seu vasto campo de aplicação, a filtragem adaptativa tem se consolidado como uma importante área de pesquisa, a qual apresenta ainda inúmeros desafios teóricos a serem superados. No contexto de filtragem adaptativa, os principais tópicos de pesquisa focam sobre o desenvolvimento de novas estruturas de filtragem e novos algoritmos adaptativos, a determinação de parâmetros ótimos para os algoritmos adaptativos existentes e a modelagem estocástica de algoritmos adaptativos (objeto de estudo do presente trabalho de pesquisa).

### **1.1 Fundamentos de filtragem adaptativa e formulação do problema**

Basicamente, filtros adaptativos são sistemas capazes de se autoprojetar ou se adaptar ao ambiente no qual estão inseridos, utilizando para isso um algoritmo recursivo [4]. Devido a essa habilidade de operar em um ambiente desconhecido, aprendendo e rastreando as variações das estatísticas dos sinais envolvidos e/ou do ambiente considerado, os filtros adaptativos têm emergido como uma ferramenta poderosa nas mais diversas aplicações práticas [4], [5]. Dentre as principais aplicações que atualmente fazem uso de filtros adaptativos, destacam-se: o cancelamento de eco acústico ou de rede (envolvendo voz ou dados) [7]-[10], a equalização de canal [2], [4]-[6], o cancelamento adaptativo de ruído [1]-[6], o controle ativo de ruído [11], a conformação de feixe em arranjo de antenas [2]-[5], a codificação preditiva [12] e os sistemas de controle [3], [4]. Embora essas aplicações sejam diferentes em sua natureza, de modo geral, elas podem ser classificadas em quatro grupos distintos em função da forma

---

como os sinais envolvidos são caracterizados ou extraídos do ambiente de operação [6], a saber: identificação de sistema, modelagem de sistema inverso, predição de sinais e cancelamento de interferências [2]-[4]. Particularmente, para o desenvolvimento do presente trabalho de pesquisa, considera-se as aplicações relacionadas à identificação de sistema (como discutido a seguir).

### 1.1.1 Problema de identificação de sistema

Em problemas de identificação de sistema, busca-se através de um filtro adaptativo obter a melhor estimativa possível da resposta ao impulso de um sistema desconhecido (planta) [3], [4]. No caso de sistemas de controle, o filtro adaptativo tem por objetivo estimar os parâmetros ou o estado da planta, visando então projetar um controlador eficiente a partir de tais informações. De forma similar, em sistemas de cancelamento de eco para aplicações envolvendo comunicação de voz ou dados, tem-se por objetivo modelar o caminho de eco (canal de transmissão) visando gerar uma estimativa do eco de maneira a cancelá-lo por subtração no domínio elétrico [3]. Ainda, em implementações de receptores digitais, tais como aqueles equipados com detectores de máxima verossimilhança (*maximum likelihood*), faz-se necessário o conhecimento de uma estimativa da resposta ao impulso do canal de comunicação [2].

Na Figura 1.1, é apresentado um diagrama de blocos ilustrando um problema de identificação de sistema. Nesse tipo de topologia, tanto a planta quanto o filtro adaptativo (destacado na região tracejada) são excitados com o mesmo sinal de entrada  $x(n)$ . Por sua vez, o sinal de saída da planta é corrompido por um ruído aditivo de medição  $z(n)$ , resultando no sinal desejado  $d(n)$ . A diferença entre o sinal desejado e sua estimativa  $\hat{d}(n)$ , obtida na saída do filtro adaptativo, caracteriza o sinal de erro

$$e(n) = d(n) - \hat{d}(n). \quad (1.1)$$

Então, baseado no sinal de entrada  $x(n)$  e no sinal de erro  $e(n)$ , o algoritmo adaptativo ajusta recursivamente os coeficientes da estrutura de filtragem [6] a fim de minimizar a diferença (quadrática) entre  $d(n)$  e  $\hat{d}(n)$ , fazendo com que o filtro adaptativo convirja iterativamente para a resposta ao impulso do sistema desconhecido (planta) [3]. Tal convergência pode ocorrer tanto em um ambiente estacionário quanto não estacionário, contanto que, neste último, as estatísticas dos sinais

envolvidos e/ou do sistema desconhecido variem de forma relativamente lenta, possibilitando ao filtro exercer sua capacidade de rastreamento [1]-[6]. Especificamente, com respeito ao caso de ambientes não estacionários, salienta-se que tal não estacionaridade pode estar associada às características estatísticas do sinal de entrada, ao ruído de medição ou ainda ao sistema desconhecido (planta) [6], [13].

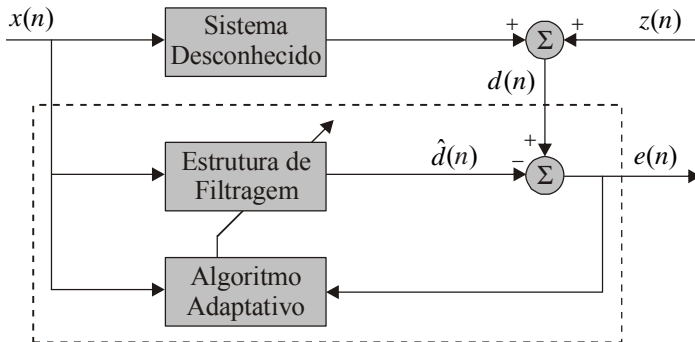


Figura 1.1. Diagrama de blocos de um filtro adaptativo aplicado no contexto de um problema de identificação de sistema (adaptado de [2]-[4]).

### 1.1.2 Filtros adaptativos

Na literatura, os filtros adaptativos são comumente caracterizados por dois blocos básicos (veja a região tracejada destacada na Figura 1.1), a saber: uma estrutura de filtragem cujos coeficientes são atualizados conforme a necessidade da aplicação, e um algoritmo adaptativo responsável por ajustar iterativamente os coeficientes da estrutura de filtragem visando atender um dado critério de desempenho pré-estabelecido (isto é, minimizar a função custo considerada) [2], [5], [6].

#### 1.1.2.1 Estruturas de filtragem

Como os coeficientes da estrutura de filtragem são ajustados recursivamente através de um algoritmo adaptativo, pode-se inferir que um filtro adaptativo é na verdade um sistema não linear [2], [4]. Apesar disso, os filtros adaptativos são comumente classificados como lineares ou não lineares dependendo da estrutura de filtragem utilizada [4]. Com

respeito aos filtros adaptativos lineares, as diversas estruturas de filtragem utilizadas podem ser classificadas em dois grandes grupos, a saber: estruturas com resposta ao impulso infinita (*infinite impulse response* - IIR) e estruturas com resposta ao impulso finita (*finite impulse response* - FIR) [3]-[5]. Em contraste com as estruturas do tipo IIR, as estruturas do tipo FIR (tais como o filtro transversal, o preditor *lattice* e o arranjo sistólico) têm emergido como soluções atrativas do ponto de vista prático devido à sua inerente estabilidade [4]. Dentre as estruturas do tipo FIR, o filtro transversal (comumente denominado apenas como filtro FIR) vem sendo a estrutura mais utilizada em aplicações práticas de filtros adaptativos em função da sua facilidade de implementação [2], [4].

A Figura 1.2 ilustra o diagrama de blocos de um filtro adaptativo considerando uma estrutura transversal de filtragem (destacada pela região pontilhada). A partir de tal figura, constata-se que o sinal de saída do filtro adaptativo, nesse caso a estimativa do sinal desejado  $\hat{d}(n)$ , é gerado como uma combinação linear das amostras atrasadas do sinal de entrada  $x(n)$  com os coeficientes  $w_i(n)$  do filtro adaptativo. Dessa forma, tem-se que a relação de entrada e saída para uma estrutura transversal de filtragem pode ser escrita como<sup>1</sup> [1]-[6]

$$\hat{d}(n) = \mathbf{w}^H(n)\mathbf{x}(n) \quad (1.2)$$

onde  $\mathbf{w}(n) = [w_1(n) \ w_2(n) \ \cdots \ w_M(n)]^T$  denota o vetor de coeficientes do filtro adaptativo,  $\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \cdots \ x(n-M+1)]^T$ , o vetor com as amostras mais recentes do sinal de entrada,  $M$ , a ordem do filtro,  $(.)^T$ , o transposto,  $(.)^H$ , o Hermitiano transposto e  $*$ , o complexo conjugado. Ainda referente à Figura 1.2, note que o sinal de erro pode agora ser reescrito como

$$e(n) = d(n) - \mathbf{w}^H(n)\mathbf{x}(n). \quad (1.3)$$

---

<sup>1</sup> Vale lembrar que as estruturas de filtragem e os algoritmos adaptativos representados na forma complexa correspondem ao caso mais geral, incluindo a representação na forma real como um caso particular [4]. Assim, já que alguns dos modelos aqui propostos focam sobre o caso de sinais de entrada complexos, o desenvolvimento apresentado ao longo deste trabalho busca sempre que possível tratar o caso mais geral.

---

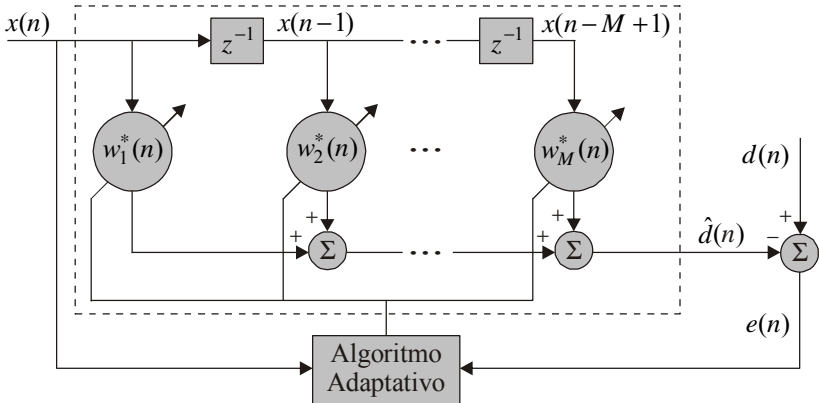


Figura 1.2. Diagrama de blocos de um filtro adaptativo considerando uma estrutura transversal de filtragem (adaptado de [4]).

### 1.1.2.2 Algoritmos adaptativos

Embora existam atualmente diversos algoritmos adaptativos disponíveis na literatura, o algoritmo LMS (*least-mean-square*) é considerado um dos precursores na teoria de filtragem adaptativa [2]-[6]. Esse algoritmo foi proposto por Widrow e Hoff em 1960 no contexto de um estudo sobre reconhecimento de padrões considerando dados reais [14], sendo posteriormente estendido para lidar com o caso de dados complexos no contexto de conformação de feixe em arranjo de antenas [15]. Originalmente, o algoritmo LMS foi concebido a partir da minimização de uma função custo envolvendo o erro quadrático instantâneo, isto é,  $J(n) = |e(n)|^2$ , o que foi motivado pela escassez de informações *a priori* das características estatísticas dos sinais envolvidos. A minimização de tal função custo deu origem à bem conhecida equação de adaptação do algoritmo LMS [4], [5]

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu \mathbf{x}(n)e^*(n) \quad (1.4)$$

na qual  $\mu$  denota o passo de adaptação, que controla a velocidade de convergência e a estabilidade do algoritmo. Dessa forma, para uma dada condição inicial  $\mathbf{w}(0)$ , conhecidos os valores instantâneos do sinal de entrada  $x(n)$  e do sinal de erro  $e(n)$ , a expressão (1.4) permite ajustar iterativamente os coeficientes da estrutura de filtragem de forma a minimizar o erro quadrático instantâneo.

Visto que o passo de adaptação afeta a estabilidade do algoritmo, o ajuste de tal parâmetro deve ser feito cuidadosamente de forma a satisfazer à seguinte condição [3], [4]:

$$0 < \mu < \frac{2}{M\sigma_x^2} \quad (1.5)$$

onde  $\sigma_x^2$  caracteriza a potência média (variância) do sinal de entrada  $x(n)$ . Todavia, como a análise de estabilidade de algoritmos adaptativos é realizada em sua grande maioria levando em conta o comportamento médio do algoritmo, tem-se que esses algoritmos podem ser apenas considerados estáveis na média. Além disso, visto que são geralmente utilizadas algumas hipóteses simplificativas durante a análise a fim de simplificar a derivação matemática, as condições de estabilidade obtidas podem não ser mais válidas quando tais hipóteses são violadas (para detalhes, veja [3] e [4]). Diante disso, é importante enfatizar que as condições de estabilidade descritas na literatura devem ser tratadas com certa ressalva (sobretudo, em aplicações práticas).

Apesar de apresentar uma elevada robustez numérica e baixa complexidade computacional (características bastante atrativas em aplicações práticas), o algoritmo LMS apresenta também algumas desvantagens que precisam ser consideradas em aplicações práticas. Por exemplo, sabe-se que a velocidade de convergência desse algoritmo é comprometida frente a sinais de entrada fortemente correlacionais (isto é, com o aumento da dispersão de autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada) [2]-[6]. Outra desvantagem do algoritmo LMS é que sua velocidade de convergência também é afetada por variações na potência do sinal de entrada, uma vez que a atualização do vetor de coeficientes se dá por meio do produto entre o vetor de entrada  $\mathbf{x}(n)$  e o sinal de erro  $e(n)$  [veja (1.4)] [4], [5]; tais variações de potência podem também tornar o algoritmo instável quando um valor de passo de adaptação próximo ao limite superior de estabilidade é utilizado [veja a discussão envolvendo (1.5)]. Para contornar tal problema, o passo de adaptação do algoritmo LMS é usualmente mantido pequeno [muito menor do que o limite superior de estabilidade dado por (1.5)], degradando sobremaneira a velocidade de convergência do algoritmo [4], [5]. Além desses aspectos, é importante destacar que o ajuste do passo de adaptação no algoritmo LMS afeta o comportamento do algoritmo em regime permanente [2], [5].

Diante do exposto, diversas estratégias vêm sendo propostas na literatura visando superar os problemas mencionados, resultando assim em algoritmos melhorados, como o algoritmo NLMS (*normalized LMS*) [2]-[6], os algoritmos da família PNLMS (*proportionate NLMS*) [16]-[20], o algoritmo TDLMS (*transform-domain LMS*) [2], [4], [21], e os algoritmos do tipo VSSLMS (*variable step-size LMS*) [22]-[26] (para detalhes, veja [27]), dentre outros. Além disso, novos algoritmos são frequentemente propostos na literatura no intuito de reduzir as limitações de algoritmos já consagrados ou ainda buscando tratar condições específicas de operação.

Tendo em vista a vasta gama de algoritmos disponíveis na literatura, fica evidente que o sucesso no projeto de dispositivos contendo filtros adaptativos depende tanto da escolha apropriada do algoritmo adaptativo a ser utilizado na aplicação quanto do ajuste adequado de seus parâmetros [6]. Por isso, torna-se importante conhecer claramente as principais características (vantagens e limitações) de cada algoritmo, bem como o impacto dos parâmetros do algoritmo sobre o seu desempenho. Nesse sentido, um caminho para se melhor entender o funcionamento de um dado algoritmo se dá por meio de seu modelo estocástico, o que vem motivando diversas pesquisas a respeito da modelagem estocástica de algoritmos adaptativos ao longo das últimas décadas.

## 1.2 Modelagem estocástica de algoritmos adaptativos

Na modelagem estocástica de algoritmos adaptativos, busca-se determinar expressões analíticas<sup>2</sup>, isto é, um modelo matemático que permita prever (com certa precisão) o comportamento de um dado algoritmo frente a diferentes condições de operação, fornecendo assim uma base teórica para o estudo do algoritmo considerado. Tais modelos visam ainda auxiliar o projetista no ajuste dos parâmetros do algoritmo como também em análises de desempenho, evitando assim a necessidade de extensivas simulações de Monte Carlo (MC). Além disso, através de um modelo analítico, algumas relações de causa e efeito entre os parâmetros do algoritmo e as métricas de desempenho

---

<sup>2</sup> Cabe ressaltar que o termo solução/expressão analítica é utilizado ao longo do trabalho para indicar equações matemáticas cuja determinação não requer o uso de técnicas numéricas. Esse tipo de solução/expressão é usualmente desejado na modelagem de algoritmos adaptativos já que permite um estudo mais detalhado das variáveis envolvidas sem a necessidade da utilização de ferramentas computacionais e/ou extensivas simulações.

---

podem ser estabelecidas, resultando dessa forma em diretrizes de projeto consistentes [28]-[32]. Ainda, modelos analíticos podem revelar comportamentos indesejados (anômalos) do algoritmo, permitindo modificá-lo seja para corrigir tal comportamento ou customizá-lo para condições de operação específicas [33].

Todavia, a modelagem estocástica de algoritmos adaptativos não é uma tarefa trivial, apresentando ainda diversos desafios<sup>3</sup> matemáticos a serem superados. Na maioria das vezes, tais desafios são contornados durante o desenvolvimento do modelo utilizando certo número de hipóteses simplificativas (por exemplo, baseadas no valor do passo de adaptação, comprimento do filtro ou mesmo nas características estatísticas do sinal de entrada) [4], [5]. Contudo, o uso de muitas hipóteses simplificativas geralmente dá origem a modelos com limitada aplicabilidade prática (isto é, restritos a condições de operação específicas), uma vez que uma precisão adequada é alcançada somente quando tais hipóteses são válidas. Logo, para obter modelos precisos em uma ampla faixa de condições de operação, um número reduzido de hipóteses simplificativas coerentes com a operação do algoritmo deve ser considerado, o que implica maiores desafios matemáticos [34]. Portanto, é possível inferir que existe uma importante relação de compromisso entre a complexidade matemática enfrentada durante o desenvolvimento do modelo, o número/coerência das hipóteses simplificativas utilizadas e a precisão do modelo obtido.

### 1.3 Objetivos do presente trabalho de pesquisa

No contexto de modelagem estocástica de algoritmos adaptativos, o presente trabalho de pesquisa visa contribuir com o desenvolvimento de modelos estocásticos mais precisos do que os até então apresentados na literatura para três importantes algoritmos adaptativos. Particularmente, são aqui abordados os algoritmos NLMS [2]-[6], IAF-PNLMS (*individual-activation-factor* PNLMS) [19], [20] e TDLMS [2], [4], [21]. Com respeito ao algoritmo NLMS, busca-se obter um modelo estocástico analítico levando em conta um ambiente não estacionário (planta variante no tempo) e sinais de entrada gaussianos complexos. Para o algoritmo IAF-PNLMS, focando particularmente

---

<sup>3</sup> Apesar dos esforços até então despendidos, não existe ainda uma teoria unificada para a modelagem de todos os algoritmos adaptativos disponíveis na literatura [5]; conseqüentemente, a modelagem estocástica de um dado algoritmo deve ser encaminhada levando em conta as particularidades associadas ao referido algoritmo.

---



sobre o caso de um ambiente estacionário, tem-se por objetivo derivar um modelo estocástico considerando sinais de entrada gaussianos correlacionados tanto complexos quanto reais. Por sua vez, busca-se também desenvolver um modelo estocástico para o algoritmo TDLMS considerando um ambiente não estacionário (planta variante no tempo) e sinais de entrada gaussianos correlacionados reais.

### **1.4 Estrutura do trabalho**

Este trabalho está organizado conforme descrito a seguir. No Capítulo 2, são inicialmente apresentadas algumas considerações acerca da modelagem do algoritmo NLMS; em seguida, um modelo estocástico bastante preciso para o referido algoritmo é derivado. Ainda no Capítulo 2, a precisão do modelo proposto para o algoritmo NLMS é ratificada através de resultados de simulação de MC. No Capítulo 3, são primeiramente estabelecidas as premissas relacionadas à modelagem do algoritmo IAF-PNLMS; em seguida, é derivado um modelo estocástico mais preciso do que aqueles até então discutidos na literatura. Ainda no Capítulo 3, são mostrados resultados de simulação de MC confirmando a precisão do modelo proposto para o algoritmo IAF-PNLMS. No Capítulo 4, são inicialmente feitas algumas considerações a respeito da modelagem do algoritmo TDLMS; em seguida, um modelo estocástico melhorado é desenvolvido para o referido algoritmo. Ainda no Capítulo 4, são apresentados resultados de simulação de MC atestando a precisão do modelo proposto para o algoritmo TDLMS. Finalmente, o Capítulo 5 traz as considerações finais do presente trabalho de pesquisa, destacando especialmente os artigos científicos publicados a partir dos resultados aqui apresentados.

---



## **MODELAGEM DO ALGORITMO NLMS**

Este capítulo apresenta um modelo estocástico para o algoritmo NLMS operando em um ambiente não estacionário com sinais de entrada gaussianos complexos. Especificamente, são primeiramente obtidas expressões de modelo descrevendo o comportamento médio do vetor de coeficientes, a curva de aprendizagem e a matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes. A partir de tais resultados, são em seguida derivadas expressões analíticas que permitem prever o erro quadrático médio em excesso (EQME) em regime permanente, o desajuste e o passo de adaptação que leva ao EQME mínimo. Baseado nas expressões de modelo, o impacto dos parâmetros do algoritmo sobre o seu desempenho é discutido, clarificando as propriedades de rastreamento do algoritmo NLMS frente a uma planta variante no tempo. Através de resultados de simulação, a precisão do modelo proposto é avaliada para diferentes cenários de operação.

### **2.1 Considerações e motivação**

Desde a sua concepção em 1937 por Kaczmarz [35] (correntemente também creditada a [36] e [37]), o algoritmo NLMS<sup>1</sup> vem sendo usado com sucesso em muitas aplicações práticas, tais como cancelamento de eco acústico e de rede, cancelamento de ruído, controle ativo de ruído, equalização de canal e conformação de feixe em arranjo de antenas [2], [4], [5], [39]-[43]. Esse sucesso é principalmente devido à sua baixa complexidade computacional, muito boa característica de rastreamento, alta robustez frente a uma ampla faixa de condições de operação e menor sensibilidade a variações na potência do sinal de entrada. Basicamente, tais características advêm do uso de um passo de

---

<sup>1</sup> A terminologia de LMS normalizado foi cunhada por Bitmead e Anderson em 1980 [38].

---

adaptação normalizado em contraste ao algoritmo LMS, o que torna o algoritmo NLMS menos susceptível a variações na potência do sinal de entrada [2], [4], [5]. Contudo, devido ao uso desse passo de adaptação normalizado, a modelagem estocástica do algoritmo NLMS se torna uma tarefa bastante complicada (quando comparada à modelagem do algoritmo LMS), sendo ainda um problema de pesquisa em aberto.

Em relação à modelagem estocástica do algoritmo NLMS, como destacado em [28] e [44], um dos maiores desafios reside na determinação das matrizes de autocorrelação normalizada surgidas no desenvolvimento do modelo. Com respeito ao cálculo de tais matrizes, para o caso de sinais de entrada reais, diversas<sup>2</sup> abordagens podem ser encontradas na literatura considerando diferentes aproximações e, conseqüentemente, resultando em modelos com diferentes níveis de precisão (isto é, exibindo melhor ou pior casamento com as simulações de MC) [28], [45]-[53]. Em contraste, para sinais de entrada complexos (como ocorre em diversas aplicações práticas [2]-[5], [39], [40]), os resultados apresentados na literatura são escassos e eventualmente exibem certas inconsistências [54], [55]. Por exemplo, em [54], os autores afirmam que soluções analíticas para o cálculo das matrizes de autocorrelação normalizada são apresentadas; contudo, essa afirmação não é plausível visto que tais soluções envolvem a integral exponencial generalizada [56], cuja determinação requer o uso de técnicas numéricas (para detalhes, veja [46]). Em [55], outra solução para a matriz de autocorrelação normalizada (requerida na expressão de modelo que descreve o comportamento médio do vetor de coeficientes) foi derivada; no entanto, é possível mostrar que tal solução diverge quando filtros com ordem maior do que dois são considerados (veja [57, Apêndice D]). Recentemente, visando contornar as limitações das abordagens até então apresentadas na literatura, em [57]-[59] foram apresentadas soluções analíticas bastante precisas para calcular as matrizes de autocorrelação normalizada. Tais soluções são aqui utilizadas objetivando assegurar a precisão do modelo estocástico proposto.

Além do cálculo das matrizes de autocorrelação normalizada, é importante enfatizar que outros desafios surgem durante a derivação de expressões de modelo descrevendo o comportamento do algoritmo em regime permanente. Particularmente, tal análise considerando o algoritmo NLMS foi abordada em [5], [47], [48], [50], [53] e [54]; no

---

<sup>2</sup> Um trabalho pioneiro sobre este assunto data de 1986 [45], no qual uma metodologia bastante precisa foi apresentada. Entretanto, as soluções analíticas obtidas lá contemplam somente algumas condições particulares.

---

entanto, as expressões de modelo obtidas na maior parte desses trabalhos focam exclusivamente sobre o caso de sinais de entrada reais. Para sinais de entrada complexos, expressões de modelo descrevendo o comportamento do algoritmo em regime permanente são derivadas apenas em [5] e [54]; todavia, a determinação das expressões apresentadas tanto em [5] quanto em [54] requerem o uso de técnicas numéricas. Em particular, os resultados apresentados em [5] requerem a determinação de um valor esperado cuja solução não foi ainda descrita na literatura. Da mesma forma, as expressões desenvolvidas em [54] envolvem o cálculo das matrizes de autocorrelação normalizada bem como a inversa de uma matriz cheia, para as quais não foram fornecidas soluções analíticas. Recentemente, visando prever adequadamente o comportamento do algoritmo em regime permanente, expressões de modelo (analíticas) precisas foram desenvolvidas em [57] e [59] para o caso de sinais de entrada gaussianos tanto reais quanto complexos.

Portanto, com respeito à modelagem estocástica do algoritmo NLMS para sinais de entrada complexos, conclui-se que os melhores resultados até então obtidos foram apresentados em [57]-[59]. Contudo, as expressões de modelo apresentadas em tais trabalhos se restringem ao caso de um ambiente estacionário. Nesse contexto, focando sobre a metodologia apresentada em [57], tem-se aqui por objetivo:

- obter expressões de modelo descrevendo o comportamento médio do vetor de coeficientes, a curva de aprendizagem e a matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes, considerando um ambiente não estacionário (isto é, uma planta variante no tempo);
- derivar expressões analíticas que permitem prever o EQME em regime permanente, o desajuste como também o passo de adaptação que leva ao EQME mínimo; e
- investigar como os parâmetros do algoritmo afetam seu desempenho frente ao ambiente não estacionário considerado.

## 2.2 Formulação do problema

Nesta seção, uma breve descrição do ambiente não estacionário considerado no desenvolvimento do modelo proposto é primeiramente apresentada. Em seguida, as expressões gerais do algoritmo NLMS são revisitadas.

---

### 2.2.1 Ambiente não estacionário

Visto que uma característica fundamental dos filtros adaptativos diz respeito à sua capacidade de rastrear as variações nas características estatísticas dos sinais envolvidos e/ou do sistema a ser identificado (planta), é importante desenvolver modelos estocásticos descrevendo o comportamento dos algoritmos frente a ambientes não estacionários<sup>3</sup>. Nesse contexto, um modelo baseado em um processo de Markov de primeira ordem vem sendo comumente utilizado na literatura para representar uma planta variante no tempo [1]-[6], o qual estabelece que o vetor de coeficientes da planta  $\mathbf{w}_o(n)$  sofre variações aleatórias de acordo com [4], [5]

$$\mathbf{w}_o(n+1) = \alpha \mathbf{w}_o(n) + \boldsymbol{\phi}(n) \quad (2.1)$$

onde  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $\mathbf{w}_o(0)$  caracteriza um vetor de inicialização arbitrário e  $\boldsymbol{\phi}(n) = [\phi_1(n) \ \phi_2(n) \ \cdots \ \phi_M(n)]^T$  denota o vetor de perturbação da planta.

Na literatura, o valor do parâmetro  $\alpha$  em (2.1) é usualmente assumido ser muito próximo de 1, implicando que muitas iterações do modelo de Markov são requeridas para produzir uma mudança significativa na planta [2]-[5]. Assim, para valores de  $\alpha$  muito próximos de 1, o modelo de primeira ordem de Markov [dado por (2.1)] pode ser simplificado (fazendo  $\alpha = 1$ ) para o modelo de uma caminhada aleatória (*random walk*) [3]. Por outro lado, ao invés de simplificar (2.1) para o modelo de caminhada aleatória como feito em [2]-[5], o parâmetro  $\alpha$  é mantido livre no desenvolvimento apresentado aqui. Dessa forma, visto que o modelo proposto não é restrito a um valor específico de  $\alpha$ , a condição em que (2.1) reduz-se ao modelo de caminhada aleatória (i.e.,  $\alpha = 1$ ) segue como um caso particular. Note ainda que, fazendo  $\alpha = 1$  e  $\boldsymbol{\phi}(n) = \mathbf{0} \ \forall n$  em (2.1), a planta se torna invariante no tempo [isto é,  $\mathbf{w}_o(n) = \mathbf{w}_o \ \forall n$ ]; como consequência, retorna-se ao caso particular de um ambiente estacionário usualmente utilizado na análise de algoritmos adaptativos (para detalhes, veja [57]).

---

<sup>3</sup> Embora o presente trabalho trate apenas o caso de planta variante no tempo, é importante destacar que a não estacionaridade do ambiente no qual o filtro adaptativo está inserido pode ainda estar associada a variações nas características estatísticas do sinal de entrada e/ou do ruído de medição (para detalhes, veja [13]).

---

### 2.2.2 Revisitando o algoritmo NLMS

Para dados complexos, a equação de adaptação do algoritmo NLMS é dada por [4]

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu \frac{\mathbf{x}(n)e^*(n)}{\mathbf{x}^H(n)\mathbf{x}(n) + \varepsilon} \quad (2.2)$$

onde  $\mathbf{w}(n) = [w_1(n) \ w_2(n) \ \cdots \ w_M(n)]$  denota o vetor de coeficientes do filtro adaptativo,  $\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \cdots \ x(n-M+1)]^T$ , o vetor contendo as amostras mais recentes do sinal de entrada (vetor do sinal de entrada),  $M$ , a ordem do filtro,  $\mu$ , o passo de adaptação,  $e(n)$ , o sinal de erro, e  $\varepsilon > 0$ , um parâmetro de regularização que previne divisão por zero [2], [4].

Considerando um problema de identificação de sistemas (veja Figura 1.1) no qual a planta a ser identificada é não estacionária [dada por (2.1)], o sinal de erro (1.3) pode agora ser reescrito como

$$e(n) = [\mathbf{w}_o(n) - \mathbf{w}(n)]^H \mathbf{x}(n) + z(n) \quad (2.3)$$

onde  $z(n)$  denota o ruído de medição. Note que, visando simplificar o desenvolvimento do modelo, é assumido em (2.3) que o filtro adaptativo e a planta têm a mesma ordem  $M$ ; caso contrário, a modelagem deve ser encaminhada de maneira diferente (para detalhes, veja [60]).

### 2.3 Modelo proposto

Nesta seção, levando em conta as expressões que caracterizam o ambiente não estacionário considerado, expressões de modelo que descrevem o comportamento médio do algoritmo NLMS são derivadas. Para tal, as seguintes hipóteses simplificativas utilizadas durante o processo de modelagem são primeiramente estabelecidas:

- H1) O sinal de entrada é obtido a partir de um processo gaussiano com média zero, variância  $\sigma_x^2$  e matriz de autocorrelação  $\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)]$  [2]-[5].
- H2) O parâmetro de regularização pode ser desprezado durante a modelagem estocástica sob certas condições, isto é,  $\varepsilon \ll E[\mathbf{x}^H(n)\mathbf{x}(n)]$  [29], [44].
- H3) O ruído de medição é obtido de um processo de média zero e variância  $\sigma_z^2$ , o qual não é correlacionado com qualquer outro sinal no sistema [2]-[5].

- H4) O vetor de perturbação da planta  $\phi(n)$  é obtido a partir de um processo com média zero, variância  $\sigma_\phi^2$  e matriz de autocorrelação  $\Phi = E[\phi(n)\phi^H(n)]$ , sendo ainda assumido não correlacionado com qualquer outro sinal no sistema. Além disso, considera-se que  $\phi(n)$  e  $\phi(m)$  são não correlacionados para  $n \neq m$  [2]-[5].
- H5) Para uma condição de adaptação lenta,  $\mathbf{w}(n)$  e  $\mathbf{x}(n)$  são assumidos estatisticamente independentes [2]-[5].

### 2.3.1 Comportamento médio do vetor de coeficientes

Uma expressão que descreve o comportamento médio do vetor de coeficientes do algoritmo NLMS pode ser determinada substituindo (2.3) em (2.2), tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante e usando as Hipóteses H2)-H4). Assim,

$$E[\mathbf{w}(n+1)] = (\mathbf{I} - \mu\mathbf{R}_1)E[\mathbf{w}(n)] + \mu\mathbf{R}_1E[\mathbf{w}_o(n)] \quad (2.4)$$

onde  $\mathbf{I}$  denota a matriz identidade e

$$\mathbf{R}_1 = E \left[ \begin{array}{c} \mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n) \\ \mathbf{x}^H(n)\mathbf{x}(n) \end{array} \right]. \quad (2.5)$$

Note que, a partir de (2.1) e da Hipótese H4), o termo em (2.4) relacionado à não estacionaridade da planta pode ser reescrito como

$$E[\mathbf{w}_o(n)] = \alpha^n \mathbf{w}_o(0). \quad (2.6)$$

O ponto principal agora é determinar a matriz de autocorrelação normalizada  $\mathbf{R}_1$ , a qual é dada por (2.5). Contudo, o procedimento para computar tal valor esperado [bem como aqueles em (2.21) e (2.22)] requer o conhecimento da função densidade de probabilidade do sinal de entrada; como consequência, soluções distintas são obtidas dependendo das características estatísticas do sinal de entrada. Particularmente, para sinais de entrada gaussianos complexos e correlacionados,  $\mathbf{R}_1$  pode ser escrita como<sup>4</sup> (veja Apêndice A)

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{Q}\mathbf{H}\mathbf{Q}^H \quad (2.7)$$

com  $\mathbf{Q}$  denotando a matriz de autovetores oriunda da autodecomposição

---

<sup>4</sup> A solução apresentada em [33] foi reproduzida aqui a fim de tornar o presente documento autocontido.



da matriz de autocorrelação do sinal de entrada  $\mathbf{R}$  (isto é,  $\mathbf{R} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^H$  onde  $\mathbf{\Lambda}$  é uma matriz diagonal contendo os autovalores  $\lambda_i$  [2]-[5]) e  $\mathbf{H}$ , uma matriz diagonal cujos elementos são dados por

$$h_{l,i} = \frac{1}{G} \left[ -\frac{A_i}{\omega_i} - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^M B_{l,i} \ln \left( \frac{\omega_l}{\omega_i} \right) \right] \quad (2.8)$$

com

$$\omega_i = \frac{-1}{\lambda_i}, \quad (2.9)$$

$$G = \prod_{k=1}^M \lambda_k, \quad (2.10)$$

$$A_i = \frac{1}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M (\omega_i - \omega_k)} \quad (2.11)$$

e

$$B_{l,i} = \frac{1}{(\omega_l - \omega_i) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^M (\omega_l - \omega_k)}. \quad (2.12)$$

Portanto, a partir da expressão de modelo (2.4), associado com (2.6) e a solução da matriz de autocorrelação normalizada  $\mathbf{R}_1$  [dada por (2.7)-(2.12)], o comportamento médio do vetor de coeficientes do algoritmo NLMS pode ser predito tanto para um ambiente não estacionário quanto estacionário.

### 2.3.2 Curva de aprendizagem

A fim de derivar uma expressão que descreve a curva de aprendizagem do algoritmo [erro quadrático médio (EQM)], define-se inicialmente o vetor de erro nos coeficientes como

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_o(n). \quad (2.13)$$

Assim, usando (2.13), o sinal de erro (2.3) pode ser reescrito como

$$e(n) = -\mathbf{v}^H(n)\mathbf{x}(n) + z(n). \quad (2.14)$$

Então, determinando o produto  $e(n)e^*(n)$ , tomando o valor esperado de

ambos os lados da expressão resultante e considerando as Hipóteses H3) e H4), obtém-se [2]-[5]

$$\begin{aligned} J(n) &= E[|e(n)|^2] \\ &= J_{\min} + J_{\text{ex}}(n) \end{aligned} \quad (2.15)$$

com

$$J_{\min} = \sigma_z^2 \quad (2.16)$$

caracterizando o EQM mínimo<sup>5</sup> atingível em regime permanente e

$$J_{\text{ex}}(n) = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{k}'(n) \quad (2.17)$$

o EQME, onde  $\boldsymbol{\lambda}$  e  $\mathbf{k}'(n)$  denotam vetores contendo, respectivamente, os autovalores de  $\mathbf{R}$  e os elementos da diagonal de

$$\mathbf{K}'(n) = \mathbf{Q}^H \mathbf{K}(n) \mathbf{Q} \quad (2.18)$$

sendo  $\mathbf{K}(n) = E[\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^H(n)]$  a matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes.

Portanto, a partir das expressões de modelo (2.15)-(2.17), a curva de aprendizagem do algoritmo NLMS pode ser predita se os elementos da diagonal da matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes  $\mathbf{K}'(n)$  são conhecidos.

### 2.3.3 Matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes

Visto que (2.17) requer o conhecimento dos elementos da diagonal de  $\mathbf{K}'(n)$ , uma expressão recursiva para  $\mathbf{k}'(n)$  é aqui obtida. Para tal, a partir (2.1), (2.13) e (2.14), a equação de adaptação dada por (2.2) é primeiramente reescrita em termos de  $\mathbf{v}(n)$  como

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(n+1) &= \\ \mathbf{v}(n) - \mu \frac{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\mathbf{v}(n)}{\mathbf{x}^H(n)\mathbf{x}(n) + \varepsilon} + \mu \frac{\mathbf{x}(n)z^*(n)}{\mathbf{x}^H(n)\mathbf{x}(n) + \varepsilon} + (1 - \alpha)\mathbf{w}_o(n) - \boldsymbol{\phi}(n). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Logo, determinando o produto externo  $\mathbf{v}(n+1)\mathbf{v}^H(n+1)$ , tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante e considerando as Hipóteses H2)-H4), tem-se

---

<sup>5</sup> Cabe mencionar que, caso a ordem do filtro adaptativo seja menor do que a ordem da planta, o EQM mínimo irá conter uma parcela adicional referente ao erro (imprecisão) de estimação da planta (para detalhes, veja [60]).

---

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}(n+1) = & \mathbf{K}(n) - \mu \mathbf{K}(n) \mathbf{R}_1 - \mu \mathbf{R}_1 \mathbf{K}(n) + \mu^2 \mathbf{R}_2 + \mu^2 J_{\min} \mathbf{R}_3 \\
 & - \mu(1-\alpha) \{ \mathbf{R}_1 [\tilde{\mathbf{K}}(n) - \mathbf{K}_o(n)] + [\tilde{\mathbf{K}}^H(n) - \mathbf{K}_o^H(n)] \mathbf{R}_1 \} \\
 & + (1-\alpha) \{ [\tilde{\mathbf{K}}(n) - \mathbf{K}_o(n)] + [\tilde{\mathbf{K}}^H(n) - \mathbf{K}_o^H(n)] \} \\
 & + (1-\alpha)^2 \mathbf{K}_o(n) + \Phi
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

com

$$\mathbf{R}_2 = \mathbb{E} \left\{ \frac{\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) \mathbf{K}(n) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n)}{[\mathbf{x}^H(n) \mathbf{x}(n)]^2} \right\}, \tag{2.21}$$

$$\mathbf{R}_3 = \mathbb{E} \left\{ \frac{\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n)}{[\mathbf{x}^H(n) \mathbf{x}(n)]^2} \right\}, \tag{2.22}$$

$$\mathbf{K}_o(n) = \mathbb{E}[\mathbf{w}_o(n) \mathbf{w}_o^H(n)] \tag{2.23}$$

e

$$\tilde{\mathbf{K}}(n) = \mathbb{E}[\mathbf{w}(n) \mathbf{w}_o^H(n)]. \tag{2.24}$$

Agora, levando em conta os resultados descritos no Apêndice A, pré- e pós-multiplicando (2.20) por  $\mathbf{Q}^H$  e  $\mathbf{Q}$ , respectivamente, e tomando os elementos da diagonal da expressão resultante, obtém-se a seguinte expressão recursiva para  $\mathbf{k}'(n)$ :

$$\mathbf{k}'(n+1) = \mathbf{B} \mathbf{k}'(n) + g \mathbf{s} + 2(1-\alpha) \mathbf{A} [\tilde{\mathbf{k}}'(n) - \mathbf{k}'_o(n)] + (1-\alpha)^2 \mathbf{k}'_o(n) + \phi' \tag{2.25}$$

onde  $\phi'$  representa um vetor contendo os elementos da diagonal de  $\mathbf{Q}^H \Phi \mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{A}$  denota uma matriz diagonal dada por

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mu \mathbf{H} \tag{2.26}$$

$\mathbf{B}$ , uma matriz cheia definida como

$$\mathbf{B} = \mathbf{I} - 2\mu \mathbf{H} + \mu^2 (\mathbf{T} + \mathbf{P}) \tag{2.27}$$

e

$$g = \mu^2 J_{\min}. \tag{2.28}$$

Note que (2.25) requer o conhecimento dos vetores  $\mathbf{k}'_o(n)$  e  $\tilde{\mathbf{k}}'(n)$ , os quais são relacionados aos elementos da diagonal de (2.23) e (2.24), respectivamente. Então, determinando o produto externo de (2.1) [i.e.,  $\mathbf{w}_o(n+1) \mathbf{w}_o^H(n+1)$ ], computando o valor esperado de ambos os lados,

pré- e pós-multiplicando por  $\mathbf{Q}^H$  e  $\mathbf{Q}$ , respectivamente, e tomando os elementos da diagonal da expressão resultante, uma expressão recursiva para  $\mathbf{k}'_o(n)$  é obtida como

$$\mathbf{k}'_o(n+1) = \alpha^2 \mathbf{k}'_o(n) + \phi'. \quad (2.29)$$

Similarmente, a partir de (2.1)-(2.3), tem-se

$$\tilde{\mathbf{k}}'(n+1) = \alpha \mathbf{A} \tilde{\mathbf{k}}'(n) + \alpha \mu \mathbf{H} \mathbf{k}'_o(n). \quad (2.30)$$

Em (2.25)-(2.30), as matrizes  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{P}$ , e o vetor  $\mathbf{s}$  advêm do cálculo das matrizes de autocorrelação normalizada  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$  e  $\mathbf{R}_3$  (veja Apêndice A), o que implica que a determinação de  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{s}$  depende das características estatísticas do sinal de entrada. Particularmente, para sinais de entrada gaussianos complexos e correlacionados,  $\mathbf{H}$  é determinada como na Seção 2.3.1 [veja (2.8)], enquanto que os elementos da matriz diagonal  $\mathbf{T}$  são dados por<sup>6</sup>

$$t_{i,i} = \frac{1}{G} \left( -\frac{A_i}{2\omega_i} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^M \frac{B_{l,i}}{\omega_l - \omega_i} \left\{ \omega_l \left[ 1 + \ln \left( \frac{\omega_l}{\omega_l} \right) \right] - \omega_i \right\} \right) \quad (2.31)$$

os elementos fora da diagonal<sup>7</sup> da matriz simétrica  $\mathbf{P}$  por

$$\begin{aligned} p_{i,j} = & \frac{1}{G} \left( \frac{A_i}{\omega_j - \omega_i} \left\{ \ln(-\omega_i) + \frac{2\omega_j[1 - \ln(-\omega_j)]}{\omega_j - \omega_i} \right\} \right. \\ & + B_{j,i} \left\{ \frac{2\omega_i[1 - \ln(-\omega_i)]}{\omega_j - \omega_i} - \ln(-\omega_j) \right\} \\ & + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i,j}}^M B_{l,i} \left\{ \frac{(\omega_l - \omega_i)(\omega_l + \omega_i - 2\omega_j)\omega_j[1 - \ln(-\omega_j)]}{(\omega_j - \omega_i)^2(\omega_l - \omega_j)} \right. \\ & \left. + \frac{(\omega_l + \omega_j - 2\omega_i)\omega_l[1 - \ln(-\omega_i)]}{(\omega_j - \omega_i)^2} + \frac{\omega_l[1 - \ln(-\omega_l)]}{\omega_l - \omega_j} \right\} \Big) \end{aligned} \quad (2.32)$$

<sup>6</sup> É importante destacar que (2.31), (2.32) e (2.33) são aqui reproduzidas visando tornar o presente documento autocontido (para detalhes, veja [57]).

<sup>7</sup> Como indicado no Apêndice A, os elementos da diagonal de  $\mathbf{P}$  são também determinados através de (2.31).

e os elementos do vetor  $\mathbf{s}$  por

$$s_i = \frac{1}{G} \left( -A_i \ln(-\omega_i) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^M B_{l,i} \{ \omega_l [1 - \ln(-\omega_l)] - \omega_i [1 - \ln(-\omega_i)] \} \right) \quad (2.33)$$

sendo  $\omega_i$ ,  $G$ ,  $A_i$  e  $B_{l,i}$  obtidas a partir de (2.9), (2.10), (2.11) e (2.12), respectivamente.

Portanto, a partir das expressões de modelo (2.15)-(2.17), associado com (2.8)-(2.12) e (2.25)-(2.33), a curva de aprendizagem do algoritmo pode ser predita tanto para um ambiente não estacionário quanto estacionário.

### 2.3.4 EQME em regime permanente

Uma expressão de modelo descrevendo o EQME em regime permanente pode ser obtida fazendo  $n \rightarrow \infty$  em (2.17), o que resulta em

$$\mathbf{J}_{\text{ex}}(\infty) = \lambda^T \mathbf{k}'(\infty) \quad (2.34)$$

evidenciando assim que a determinação de  $\mathbf{k}'(\infty)$  se faz necessária. Dessa forma, fazendo  $n \rightarrow \infty$  em (2.25), tem-se

$$\mathbf{k}'(\infty) = \mathbf{B} \mathbf{k}'(\infty) + g \mathbf{s} + 2(1 - \alpha) \mathbf{A} [\tilde{\mathbf{k}}'(\infty) - \mathbf{k}'_0(\infty)] + (1 - \alpha)^2 \mathbf{k}'_0(\infty) + \boldsymbol{\phi}' \quad (2.35)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{k}'_0(\infty) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{k}'_0(n) \\ &= \frac{1}{(1 - \alpha^2)} \boldsymbol{\phi}' \end{aligned} \quad (2.36)$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{k}}'(\infty) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{k}}'(n) \\ &= \frac{\mu \alpha}{(1 - \alpha^2)} (\mathbf{I} - \alpha \mathbf{A})^{-1} \mathbf{H} \boldsymbol{\phi}' \end{aligned} \quad (2.37)$$

Então, substituindo (2.36) e (2.37) em (2.35), usando (2.26) e resolvendo a expressão resultante para  $\mathbf{k}'(\infty)$ , obtém-se

$$\mathbf{k}'(\infty) = (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} [g \mathbf{s} + 2\mu(1 + \alpha)^{-1} (\mathbf{I} - \alpha \mathbf{A})^{-1} \mathbf{H} \boldsymbol{\phi}']. \quad (2.38)$$

Note que (2.38) envolve a inversa de uma matriz diagonal  $(\mathbf{I} - \alpha \mathbf{A})$ , a

qual tem solução trivial, bem como a inversa de uma matriz cheia  $(\mathbf{I} - \mathbf{B})$ , cuja solução não pode ser determinada de forma analítica no caso de sinais de entrada correlacionados. Então, visando evitar o uso de métodos numéricos, a seguinte aproximação é considerada:

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} &= \frac{1}{2\mu} \mathbf{C}^{-1} \left\{ \mathbf{I} + \frac{\mu}{2} \mathbf{P} \left[ \mathbf{I} - \frac{\mu}{2} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{P} \right]^{-1} \mathbf{C}^{-1} \right\} \\ &\cong \frac{1}{2\mu} \mathbf{C}^{-1} \left( \mathbf{I} + \frac{\mu}{2} \mathbf{P} \mathbf{C}^{-1} \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

a qual é obtida utilizando o lema de inversão de matrizes [61] e assumindo uma condição de adaptação lenta<sup>8</sup>, com

$$\mathbf{C} = \mathbf{H} - \frac{\mu}{2} \mathbf{T} \quad (2.40)$$

denotando uma matriz diagonal.

Finalmente, substituindo (2.28) e (2.39) em (2.38), e a expressão resultante em (2.34), o EQME em regime permanente pode agora ser reescrito como

$$J_{\text{ex}}(\infty) = J_{\text{ex},1}(\infty) + J_{\text{ex},2}(\infty) \quad (2.41)$$

onde

$$J_{\text{ex},1}(\infty) \cong \frac{\mu}{2} J_{\text{min}} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{C}^{-1} \left( \mathbf{I} + \frac{\mu}{2} \mathbf{P} \mathbf{C}^{-1} \right) \mathbf{s} \quad (2.42)$$

representa a parcela do EQME presente em ambos os casos estacionário e não estacionário, enquanto

$$J_{\text{ex},2}(\infty) \cong \frac{1}{(1 + \alpha)} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{C}^{-1} \left( \mathbf{I} + \frac{\mu}{2} \mathbf{P} \mathbf{C}^{-1} \right) (\mathbf{I} - \alpha \mathbf{A})^{-1} \mathbf{H} \boldsymbol{\phi}' \quad (2.43)$$

denota a parcela do EQME relacionada ao ambiente não estacionário considerado. De acordo com [2]-[5],  $J_{\text{ex},1}(\infty)$  é devido ao ruído no vetor de coeficientes do filtro, sendo denominado erro de estimação, enquanto  $J_{\text{ex},2}(\infty)$  é devido ao atraso no rastreamento do vetor de coeficientes da planta, sendo denominado erro de atraso.

---

<sup>8</sup> Para detalhes sobre o impacto da hipótese de adaptação lenta na precisão da expressão de modelo proposta para prever o EQME em regime permanente [dada por (2.41)], veja os resultados apresentados na Figura 2.9.

---

### 2.3.5 Desajuste

Na literatura, o desajuste é definido como [1]-[6]

$$\mathcal{M} = \frac{J_{\text{ex}}(\infty)}{J_{\text{min}}} \quad (2.44)$$

onde  $J_{\text{min}}$  denota o EQM mínimo [dado por (2.16)]. Assim, a partir de (2.41)-(2.43), tem-se

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \quad (2.45)$$

com

$$\mathcal{M}_1 \cong \frac{\mu}{2} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{C}^{-1} \left( \mathbf{I} + \frac{\mu}{2} \mathbf{P} \mathbf{C}^{-1} \right) \mathbf{s} \quad (2.46)$$

e

$$\mathcal{M}_2 \cong \frac{1}{(1+\alpha)J_{\text{min}}} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{C}^{-1} \left( \mathbf{I} + \frac{\mu}{2} \mathbf{P} \mathbf{C}^{-1} \right) (\mathbf{I} - \alpha \mathbf{A})^{-1} \mathbf{H} \boldsymbol{\Phi}' \quad (2.47)$$

### 2.3.6 *Insights* sobre o comportamento do algoritmo em regime permanente

Aqui, são discutidos aspectos importantes observados a partir das expressões de modelo (2.41)-(2.43), visando fornecer *insights* sobre o comportamento do algoritmo NLMS em regime permanente frente ao ambiente não estacionário considerado. Nesse contexto, para avaliar o impacto da velocidade de variação da planta sobre o algoritmo adaptativo, a Figura 2.1 mostra curvas de EQME em regime permanente obtidas a partir de (2.41)-(2.43) para  $\alpha = 0,999$  e três valores diferentes de  $\sigma_\phi^2$ . [Os valores dos demais parâmetros são os mesmos usados no Exemplo 2 da Seção 2.4, considerando uma razão sinal-ruído (SNR)<sup>9</sup> igual a 40 dB.] Observe a partir dessa figura que, à medida que  $\sigma_\phi^2$  é aumentado (implicando mudanças mais rápidas no vetor de coeficientes da planta), o algoritmo passa a exibir valores de EQME em regime permanente maiores, o que se deve principalmente ao erro de atraso  $J_{\text{ex},2}(\infty)$ . Seguindo o mesmo padrão de apresentação, a Figura 2.2 ilustra curvas de EQME em regime permanente para  $\sigma_\phi^2 = 10^{-8}$  e três valores diferentes de  $\alpha$ . A partir de tal figura, verifica-se que existe um valor de passo de adaptação intermediário que leva ao EQME em regime permanente mínimo para valores de  $\alpha$  próximos de 1, o qual tende a 0 conforme  $\alpha$  é decrescido (por exemplo, para  $\alpha = 0,95$ ).

---

<sup>9</sup> Conforme definida em (2.58).

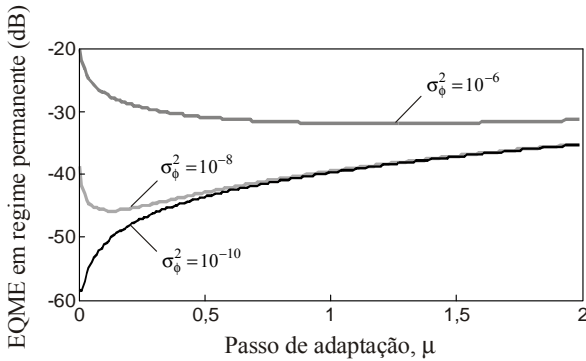


Figura 2.1. Curvas de EQME em regime permanente [obtidas a partir de (2.41)-(2.43)] para  $\alpha = 0,999$  e três valores de  $\sigma_\phi^2$ .

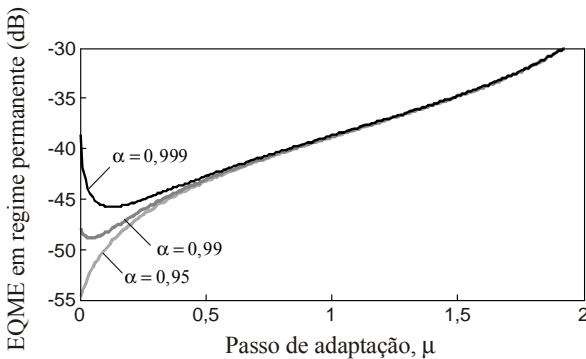


Figura 2.2. Curvas de EQME em regime permanente [obtidas a partir de (2.41)-(2.43)] para  $\sigma_\phi^2 = 10^{-8}$  e três valores de  $\alpha$ .

Visando conseguir mais detalhes sobre o comportamento do EQME em regime permanente, a Figura 2.3 apresenta curvas separadas de (2.41), (2.42) e (2.43) para  $\alpha = 0,999$  e  $\sigma_\phi^2 = 10^{-8}$ . Observe que, devido à característica conflitante das parcelas  $J_{\text{ex},1}(\infty)$  e  $J_{\text{ex},2}(\infty)$ , o EQME em regime permanente  $J_{\text{ex}}(\infty)$  exibe (sob certas condições) um ponto de mínimo para valores de passo de adaptação intermediários, o que pode ser explicado como segue. Primeiramente, sabe-se que o erro de estimação  $J_{\text{ex},1}(\infty)$  é uma função crescente em relação ao passo de



adaptação; por isso, valores de erro de estimação pequenos são obtidos com valores de  $\mu$  pequenos [2]-[5]. Por outro lado, o erro de atraso  $J_{ex,2}(\infty)$  exibe uma característica decrescente<sup>10</sup> com respeito a  $\mu$ , visto que valores de passo de adaptação maiores são requeridos para rastrear apropriadamente as variações da planta. Portanto, conclui-se que existe uma relação de compromisso entre o erro de estimação  $J_{ex,1}(\infty)$ , o erro de atraso  $J_{ex,2}(\infty)$  e o passo de adaptação  $\mu$ .

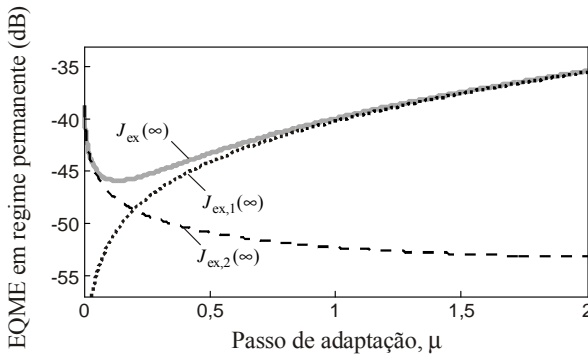


Figura 2.3. Curvas individuais de EQME em regime permanente [obtidas de (2.41), (2.42) e (2.43)] para  $\alpha = 0,999$  e  $\sigma_{\phi}^2 = 10^{-8}$ .

### 2.3.7 Análise para sinais de entrada não correlacionados

Em contraste com o desenvolvimento até então apresentado neste trabalho, são aqui descritos alguns resultados particulares obtidos especificamente para sinais de entrada gaussianos complexos e não correlacionados. Nesse contexto, fazendo  $\lambda_i = \sigma_x^2 \forall i$  em (A.6), (A.12), (A.13) e (A.16), e resolvendo as integrais resultantes [56], as seguintes soluções são obtidas para:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{I}}{M}, \tag{2.48}$$

<sup>10</sup> Na verdade, se a aproximação (2.39) não é utilizada para obter (2.43),  $J_{ex,2}(\infty)$  exibe uma característica levemente crescente para  $\mu > 1$ , implicando dessa forma que existe também um valor de  $\mu$  que minimiza  $J_{ex,2}(\infty)$ . Todavia, visto que  $\mu > 1$  não é considerado em implementações práticas, tal aspecto não impacta na discussão apresentada aqui.

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{I}}{M(M+1)}, \quad (2.49)$$

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{M(M+1)} \quad (2.50)$$

e

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{1}}{M(M-1)\sigma_x^2} \quad (2.51)$$

onde  $\mathbf{1}$  representa um vetor de dimensão  $M$  cujos elementos são iguais a 1. Dessa forma, as expressões de modelo descrevendo o comportamento médio do vetor de coeficientes, a curva de aprendizagem e a matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes [isto é, (2.4), (2.15) e (2.25)] podem também ser usadas para prever o comportamento do algoritmo frente a sinais de entrada gaussianos complexos e não correlacionados.

Devido à estrutura particular de (2.48)-(2.51), uma expressão de modelo para o EQME em regime permanente pode ser determinada [sem considerar a aproximação dada em (2.39)] substituindo (2.48)-(2.51) em (2.38) e a expressão resultante em (2.34), usando a identidade de Sherman-Morrison [2], e fazendo  $\lambda = \sigma_x^2 \mathbf{1}$  e  $\phi' = \sigma_\phi^2 \mathbf{1}$ . Dessa forma, levando em consideração (2.41), o erro de estimação pode agora ser escrito como

$$J_{\text{ex},1}(\infty) = \frac{\mu}{(2-\mu)} \frac{M}{(M-1)} J_{\text{min}} \quad (2.52)$$

e o erro de atraso como

$$J_{\text{ex},2}(\infty) = \frac{2M^2 \sigma_x^2 \sigma_\phi^2}{(1+\alpha)[(1-\alpha)M + \alpha\mu](2-\mu)}. \quad (2.53)$$

De (2.52), constata-se que o erro de estimação não depende da variância do sinal de entrada, evidenciando assim a imunidade do algoritmo NLMS contra variações na potência do sinal de entrada em contraste com o algoritmo LMS (por exemplo, veja [5, eq. (21.13)]). Por outro lado, observe que o erro de atraso (2.53) é diretamente proporcional a  $\sigma_x^2$ , o que pode comprometer o desempenho do algoritmo se a potência do sinal de entrada atinge valores elevados. Além do mais, visto que (2.53) é também uma função crescente de  $M$  e  $\sigma_\phi^2$ , filtros ordem de alta e/ou plantas que exibem variações rápidas acarretam valores de erro

de atraso maiores. Ainda, exceto pelo termo comum  $(2-\mu)$ , nota-se que (2.52) é diretamente proporcional a  $\mu$  enquanto (2.53) é inversamente proporcional a  $\mu$ , ratificando a existência de uma relação de compromisso entre o erro de estimação, o erro de atraso e o passo de adaptação.

Conforme discutido anteriormente, a curva de EQME em regime permanente exhibe (sob certas condições) um ponto de mínimo para valores de passo de adaptação intermediários (veja Figura 2.3). Assim, é evidente a existência de um passo de adaptação ótimo, isto é, um valor de passo de adaptação que leva ao EQME em regime permanente mínimo. Para essa condição, uma expressão analítica para o passo de adaptação ótimo pode ser determinada substituindo (2.52) e (2.53) em (2.41), derivando em relação a  $\mu$  e igualando a expressão resultante a zero, o que resulta

$$\mu_o = \frac{M(M-1)\sigma_x^2\sigma_\phi^2}{\alpha(1+\alpha)J_{\min}} \left( \sqrt{1 + \frac{(1+\alpha)[(1-\alpha)M + 2\alpha]J_{\min}}{M(M-1)\sigma_x^2\sigma_\phi^2}} - 1 - \frac{(1-\alpha^2)J_{\min}}{(M-1)\sigma_x^2\sigma_\phi^2} \right). \quad (2.54)$$

Note que, para  $M \gg 1$  e  $\alpha \approx 1$ , (2.54) pode ser simplificada para

$$\mu_o \cong \frac{M^2\sigma_x^2\sigma_\phi^2}{2J_{\min}} \left( \sqrt{1 + \frac{4J_{\min}}{M^2\sigma_x^2\sigma_\phi^2}} - 1 \right) \quad (2.55)$$

corroborando os resultados descritos até então na literatura [5, pp. 314].

No intuito de melhor entender como o passo de adaptação deve ser ajustado frente a um ambiente não estacionário, a Figura 2.4 ilustra o passo de adaptação ótimo  $\mu_o$  [dado pela expressão de modelo (2.54)] como uma função da variância do vetor de perturbação da planta  $\sigma_\phi^2$ . (Os valores dos demais parâmetros são os mesmos usados no Exemplo 2 da Seção 2.4, considerando agora sinal de entrada não correlacionado e uma SNR = 40 dB.) Observe a partir de tal figura que, para valores de  $\sigma_\phi^2$  altos (implicando mudanças rápidas no vetor de coeficientes da planta), a expressão de modelo (2.54) leva a valores de passo de adaptação maiores; em contraste, para valores de  $\sigma_\phi^2$  baixos (isto é, mudanças lentas no vetor de coeficientes da planta), o passo de adaptação ótimo tende a zero. Além disso, (2.54) apresenta saturação

para valores de  $\sigma_\phi^2$  tanto muito baixos quanto muito altos, condições nas quais o EQME é afetado principalmente pelo erro de estimação e pelo erro de atraso, respectivamente. Particularmente, para valores de  $\sigma_\phi^2$  muito altos, a saturação ocorre para  $\mu_o$  em torno de 1, isto é, o valor de passo de adaptação que fornece a velocidade de convergência mais rápida para o algoritmo NLMS [62].

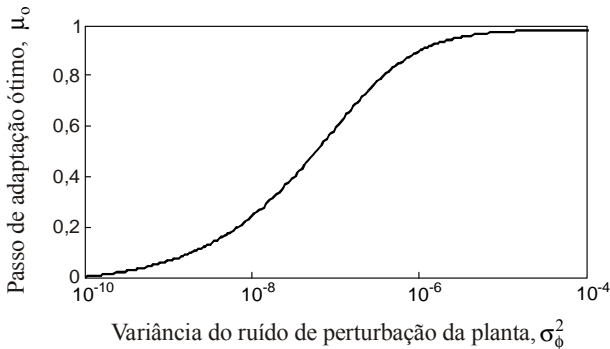


Figura 2.4. Passo de adaptação ótimo que leva ao EQME em regime permanente mínimo [dado por (2.54)] obtido considerando  $\sigma_\phi^2$  variável e  $\alpha = 0,999$ .

## 2.4 Resultados de simulação

Nesta seção, visando avaliar a precisão do modelo proposto, quatro exemplos são apresentados considerando diferentes cenários de operação, isto é, contemplando diferentes tipos de plantas com diversos comprimentos, valores distintos de SNR como também uma ampla faixa de níveis de correlação do sinal de entrada (ou seja, valores de dispersão de autovalores<sup>11</sup> da matriz de autocorrelação do sinal de entrada denotada aqui por  $\chi$ ). Nesses exemplos, os resultados obtidos a partir de simulações de MC (média de 200 realizações independentes) são

<sup>11</sup> A dispersão de autovalores é uma medida comumente utilizada na literatura para avaliar o grau de condicionamento da matriz de autocorrelação do sinal de entrada, sendo definida como  $\chi = \lambda_{\max} / \lambda_{\min}$  onde  $\lambda_{\max}$  e  $\lambda_{\min}$  denotam o maior e o menor autovalor de  $\mathbf{R}$ , respectivamente [2]-[4]. Logo, dependendo do nível de correlação do sinal de entrada,  $\chi$  pode variar de 1 (sinal de entrada não correlacionado) a valores muito grandes (sinais de entrada fortemente correlacionados).

comparados com o comportamento predito através do modelo proposto. Em tais exemplos, um sinal de entrada  $x(n)$  gaussiano de média zero e variância  $\sigma_x^2 = 1$  é considerado, o qual é obtido através de [4]

$$x(n) = -a_1 x(n-1) - a_2 x(n-2) + v(n) \quad (2.56)$$

onde  $a_1$  e  $a_2$  denotam os coeficientes do processo autorregressivo de segunda ordem AR(2), e  $v(n)$  é um ruído branco cuja variância<sup>12</sup> é dada por

$$\sigma_v^2 = \left( \frac{1-a_2}{1+a_2} \right) [(1+a_2)^2 - a_1^2]. \quad (2.57)$$

É importante mencionar que, ao longo deste trabalho de pesquisa, a razão sinal-ruído é definida como

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left( \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2} \right) \quad (2.58)$$

sendo  $\sigma_x^2$  e  $\sigma_z^2$  a variância do sinal de entrada e do ruído de medição, respectivamente.

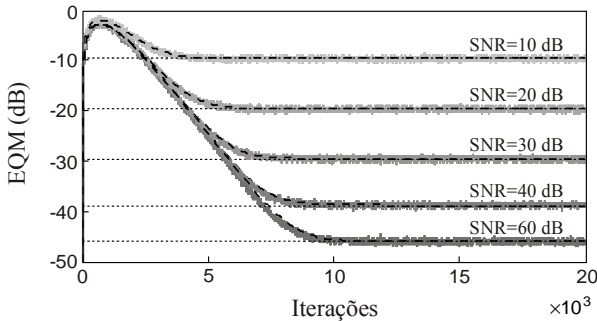
### 2.4.1 Exemplo 1

Neste exemplo, assumindo um ambiente não estacionário, a precisão do modelo proposto é verificada [via curva de aprendizagem (EQM)] para diferentes níveis de correlação do sinal de entrada como também para valores de SNR distintos. Para tal, é usada uma planta complexa  $\mathbf{w}_0^A$ , com  $M = 32$  coeficientes, obtida a partir de um modelo de canal de Rayleigh [5]. Os valores de dispersão de autovalores considerados para a matriz de autocorrelação do sinal de entrada são  $\chi = 34,73$  [obtido a partir de (2.56) para  $a_1 = -0,2$  e  $a_2 = 0,7$ ] e  $\chi = 1097,69$  (alterando  $a_2$  para 0,97). Além disso, são usados cinco valores de SNR diferentes, isto é, SNR = 10 dB, 20 dB, 30 dB, 40 dB e 60 dB. Para esse cenário, a condição inicial do vetor de coeficientes adaptativo é  $\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0^A$  a fim de avaliar a capacidade de rastreamento do algoritmo [3], o passo de adaptação é  $\mu = 0,15$  e o parâmetro de regularização é  $\varepsilon = 10^{-3}$ . A fim de obter uma planta variante no tempo, assume-se  $\alpha = 0,999$ ,  $\sigma_\phi^2 = 10^{-8}$  e  $\mathbf{w}_\phi(0) = \mathbf{w}_0^A$  em (2.1).

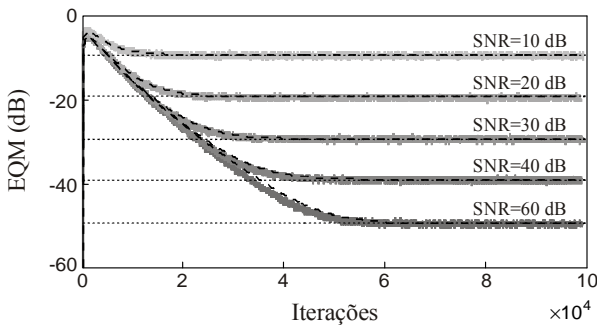
---

<sup>12</sup> Cabe salientar que, ajustando a variância de  $v(n)$  através de (2.57), o sinal de saída  $x(n)$  do processo AR(2) [definido em (2.56)] tem variância unitária ( $\sigma_x^2 = 1$ ) [4, pp. 64].

A Figura 2.5 mostra curvas de aprendizagem (EQM) obtidas por simulações de MC e a partir do modelo proposto para diferentes níveis de correlação do sinal de entrada bem como valores de SNR. Nessa figura, uma precisão muito boa do modelo proposto é verificada (tanto na fase transitória quanto em regime permanente) para  $\chi=34,73$  [Figura 2.5(a)] e  $\chi=1097,69$  [Figura 2.5(b)], independente do valor de SNR considerado. Dessa forma, são somente considerados nos próximos exemplos os casos de SNR = 20 dB e 40 dB. Adicionalmente, observe, a partir da Figura 2.5, que o comportamento predito pela expressão de modelo descrevendo o EQME em regime permanente [isto é, (2.15) associado com (2.41)-(2.43)] exibe um casamento muito bom com o resultado obtido através de simulação.



(a)



(b)

Figura 2.5. Exemplo 1. Curvas de aprendizagem (EQM) obtidas por simulações de MC (linhas cinza irregulares) e através do modelo proposto (linhas escuras tracejadas) para (a)  $\chi=34,73$  e (b)  $\chi=1097,96$ .

2.4.2 Exemplo 2

Este exemplo tem por objetivo primeiramente avaliar a precisão das expressões de modelo descrevendo o comportamento médio do vetor de coeficientes (2.4), a curva de aprendizagem (via EQME) (2.17) e o EQME em regime permanente (2.41)-(2.43). Como segundo objetivo, busca-se ratificar a afirmação de que existe (sob certas condições) um valor de passo de adaptação ótimo, o qual leva ao EQME em regime permanente mínimo. Para tal, é considerada uma planta complexa  $\mathbf{w}_o^B$  com  $M = 32$  coeficientes, obtida a partir de um modelo de canal de modem a cabo [63, Canal 1] (veja Figura 2.6). O sinal de entrada é obtido a partir de (2.56) com  $a_1 = -0,2$  e  $a_2 = 0,9$ , resultando em uma dispersão de autovalores de  $\chi = 232,04$  para a matriz de autocorrelação do sinal de entrada. Nesse cenário, o valor do passo de adaptação é  $\mu = 0,15$ , o qual de acordo com a Figura 2.3 resulta no EQME mínimo. Aqui, as condições iniciais para o vetor de coeficientes adaptativo e para o processo de Markov de primeira ordem são  $\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_o^B$  e  $\mathbf{w}_o(0) = \mathbf{w}_o^B$ , respectivamente, sendo os valores dos demais parâmetros iguais aos usados no Exemplo 1. Especialmente para alcançar o segundo objetivo, os resultados preditos através de (2.41)-(2.43) são comparados com aqueles obtidos a partir de simulações de MC, tomando a média dos últimos 100 valores de EQME em regime permanente [5, pp. 250].

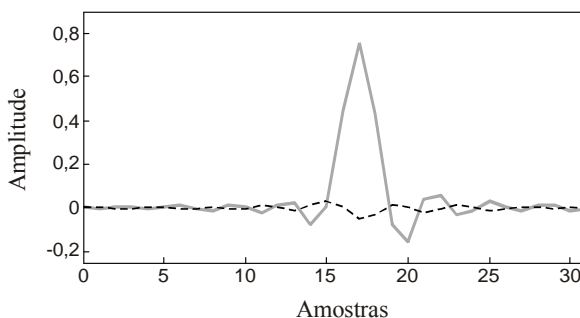


Figura 2.6. Resposta ao impulso da planta do Exemplo 2. (Linha cinza sólida) parte real. (Linha escura tracejada) parte imaginária.

Considerando o cenário de operação do Exemplo 2, a Figura 2.7 ilustra o comportamento médio da parte real [Figura 2.7(a)] e da parte

imaginária [Figura 2.7(b)] de apenas quatro coeficientes do filtro adaptativo para uma melhor visualização. (Na Figura 2.7, o caso de SNR = 40 dB foi omitido, visto que os resultados são bastante similares ao caso de SNR = 20 dB.) A partir de tais figuras, observa-se um casamento muito bom entre as simulações de MC e o comportamento predito através da expressão de modelo (2.4), tanto para a parte real quanto para a parte imaginária dos coeficientes do filtro adaptativo. Ainda, a Figura 2.8 mostra curvas de aprendizagem (EQME) obtidas por simulações de MC e a partir da expressão de modelo (2.17), onde uma precisão muito boa é também verificada para ambas as fases (transitória e regime permanente).

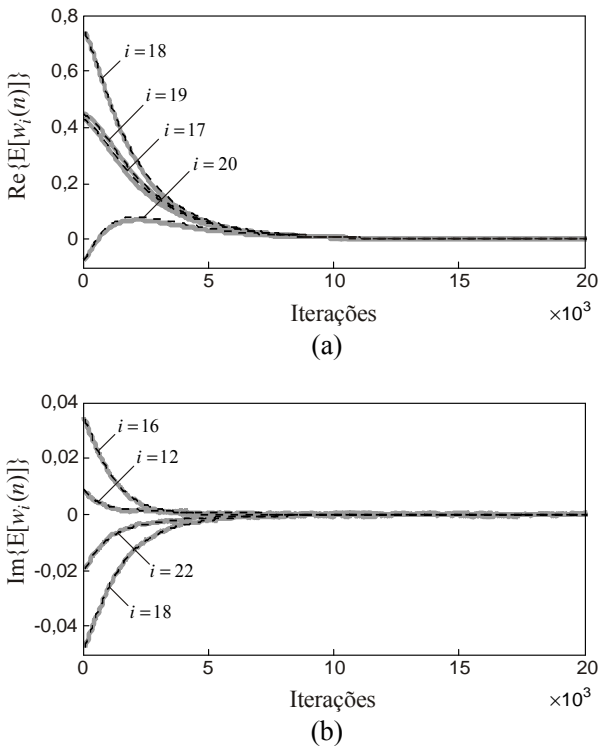


Figura 2.7. Exemplo 2. Comportamento médio do vetor de coeficientes obtido por simulações de MC (linhas cinza) e através do modelo proposto (linhas escuras tracejadas), considerando SNR = 20 dB. (a) Parte real. (b) Parte imaginária.



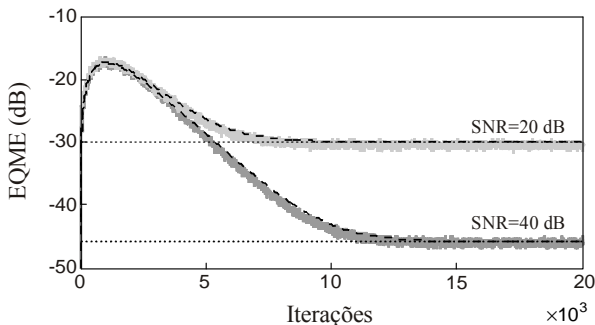


Figura 2.8. Exemplo 2. Curvas de aprendizagem (EQME) obtidas através de simulações de MC (linhas cinza irregulares) e a partir do modelo proposto (linhas escuras tracejadas).

A Figura 2.9 ilustra curvas de EQME em regime permanente (obtidas por simulações de MC e a partir do modelo proposto) como função de  $\mu$ , confirmando a existência (sob certas condições) de um valor de passo de adaptação ótimo [veja Figura 2.9(b)]. Observe a partir dessa figura que as expressões de modelo (2.34) e (2.38) exibem um casamento muito bom com os resultados obtidos a partir de simulações de MC mesmo para valores de passo de adaptação próximos ao limite superior de estabilidade<sup>13</sup>. Por outro lado, devido ao uso da aproximação (2.39), um descasamento é verificado entre as simulações e os resultados preditos a partir das expressões de modelo (2.41)-(2.43) à medida que o valor do passo de adaptação é aumentado (por exemplo, para  $\mu > 1$ ).

### 2.4.3 Exemplo 3

Aqui, visando avaliar a robustez do modelo proposto frente a diferentes tipos de planta, são agora consideradas duas plantas encontradas em sistemas de comunicação de micro-ondas. Tais plantas, denominadas  $\mathbf{w}_o^C$  ( $M = 64$ ) e  $\mathbf{w}_o^D$  ( $M = 128$ ), são obtidas a partir de [64, Canais 3 e 7], respectivamente (veja Figura 2.10). As dispersões de autovalores das matrizes de autocorrelação do sinal de entrada são  $\chi = 326,03$  para  $M = 64$  e  $\chi = 394,43$  para  $M = 128$ , ambas obtidas considerando os mesmos coeficientes AR(2) dados no Exemplo 2. Os

<sup>13</sup> De acordo com [38], [47] e [48], a estabilidade do algoritmo NLMS é garantida para valores de passo de adaptação satisfazendo a condição  $0 < \mu < 2$ .

valores dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\mu$  e  $\varepsilon$  são os mesmos usados no Exemplo 2, com  $\mathbf{w}(0)$  e  $\mathbf{w}_o(0)$  igual à planta considerada. Particularmente para esse exemplo, três valores diferentes de variância do vetor de perturbação da planta são considerados, a saber:  $\sigma_\phi^2 = 10^{-10}$ ,  $\sigma_\phi^2 = 10^{-8}$  e  $\sigma_\phi^2 = 10^{-6}$ , visando avaliar o modelo proposto frente a plantas que sofrem mudanças lentas, moderadas e rápidas, respectivamente.

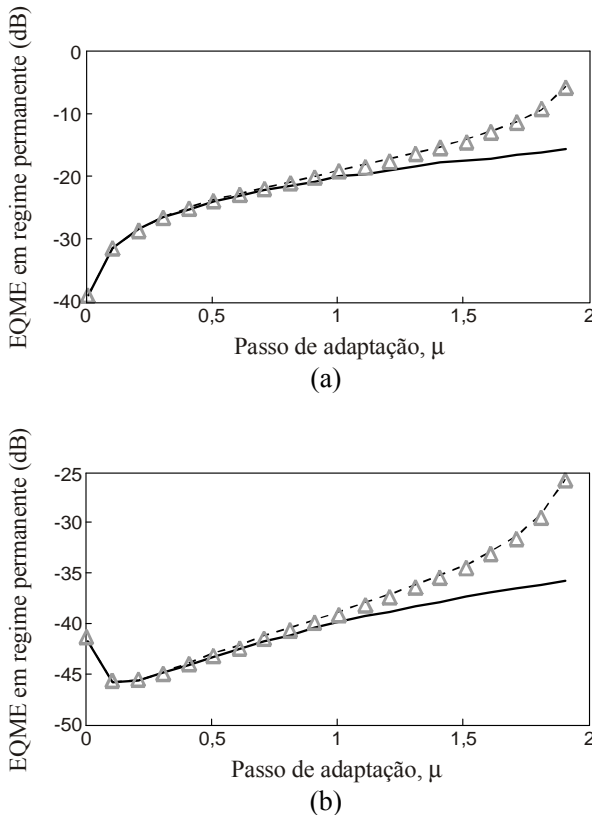


Figura 2.9. Exemplo 2. Curvas de EQME em regime permanente obtidas por simulações de MC (triângulo cinza), expressões de modelo (2.34) e (2.38) (linhas escuras tracejadas), e expressões de modelo (2.41)-(2.43) (linhas escuras sólidas). (a) SNR = 20 dB. (b) SNR = 40 dB.

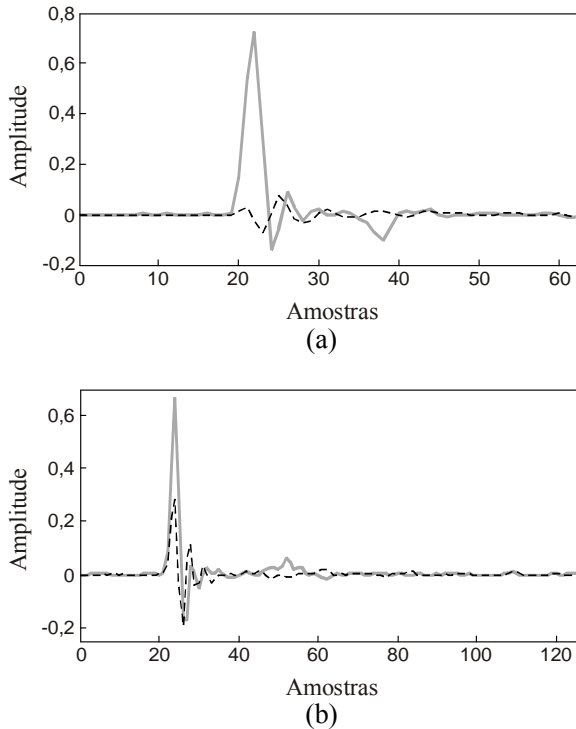
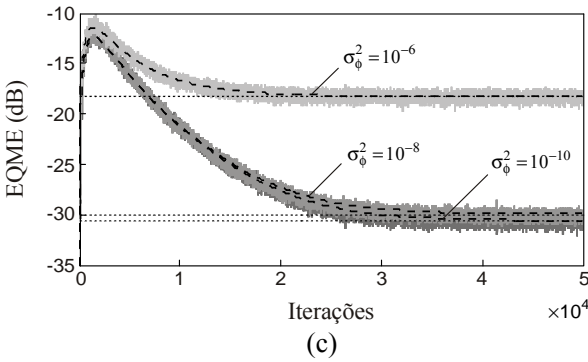
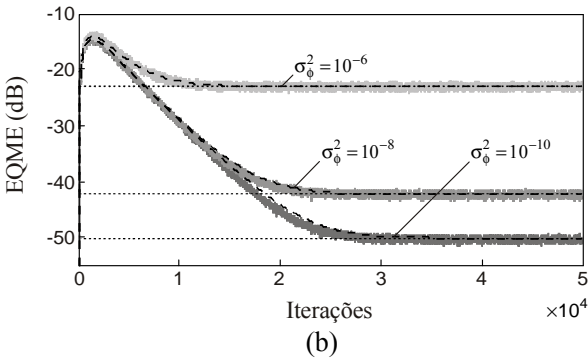
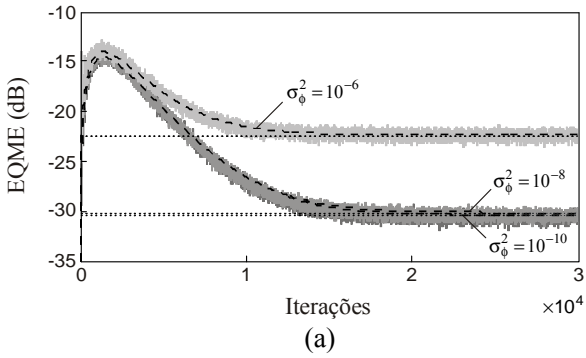


Figura 2.10. Respostas ao impulso de planta do Exemplo 3. (Linha cinza sólida) parte real. (Linha escura tracejada) parte imaginária.

A Figura 2.11 mostra os resultados obtidos através de simulações de MC e as previsões de modelo, considerando as plantas dadas na Figura 2.10. Especificamente nas Figuras 2.11(a) e (b), a precisão do modelo proposto é verificada através de curvas de aprendizagem (EQME) para a planta  $w_o^C$ ; seguindo o mesmo padrão de apresentação, as Figuras 2.11(c) e (d) ilustram a evolução do EQME para a planta  $w_o^D$ . Observe a precisão muito boa alcançada pelo modelo proposto para essas plantas mais realísticas, independentemente do valor de variância considerado para o vetor de perturbação da planta. Além disso, verifica-se que plantas variando rapidamente no tempo (obtidas aumentando  $\sigma_0^2$ ) levam a valores de EQME em regime permanente maiores devido ao atraso de rastreamento, o que corrobora os resultados discutidos na Seção 2.3.6.



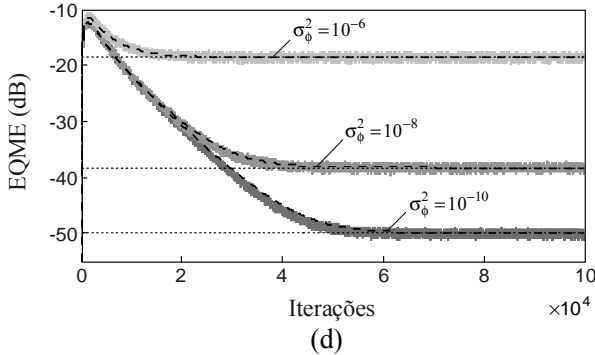


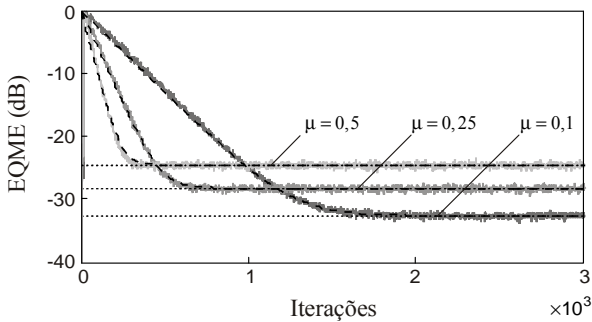
Figura 2.11. Exemplo 3. Curvas de aprendizagem (EQME) obtidas por simulações de MC (linhas cinza irregulares) e a partir do modelo proposto (linhas escuras tracejadas) para valores diferentes de  $\sigma_{\phi}^2$ , considerando (a) e (c) SNR = 20 dB, e (b) e (d) SNR = 40 dB. (a) e (b) Planta  $\mathbf{w}_0^C$ . (c) e (d) Planta  $\mathbf{w}_0^D$ .

#### 2.4.4 Exemplo 4

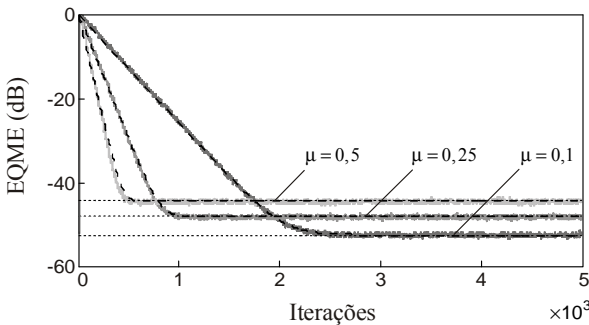
Neste exemplo, o modelo proposto é avaliado [via curva de aprendizagem (EQME)] para sinais de entrada gaussianos complexos e não correlacionados [isto é, fazendo  $a_1 = a_2 = 0$  em (2.56)] e um ambiente estacionário [obtido fazendo  $\alpha = 1$  e  $\sigma_{\phi}^2 = 0$  em (2.1)]. Para tal, são agora consideradas as soluções (2.48)-(2.51) para as matrizes de autocorrelação normalizada juntamente com as expressões de modelo (2.17) e (2.25). Aqui, a planta usada é a mesma do Exemplo 2 (veja Figura 2.6),  $\mathbf{w}(0) = \mathbf{0}$ ,  $\varepsilon = 0$  e três valores de passo de adaptação são considerados, a saber:  $\mu = 0,1$ ,  $\mu = 0,25$  e  $\mu = 0,5$ . Além disso, visando verificar a precisão da expressão de modelo descrevendo o EQME em regime permanente, resultados obtidos a partir de simulações de MC (tomando a média dos últimos 100 valores de EQME em regime permanente [5, pp. 250]) são comparados com aqueles preditos a partir da expressão de modelo (2.52).

Para o cenário do Exemplo 4, a Figura 2.12 ilustra curvas de aprendizagem (EQME) obtidas através de simulações de MC e a partir do modelo proposto, considerando sinais de entrada gaussianos complexos e não correlacionados. Novamente, observe a precisão muito

boa alcançada pelo modelo proposto para os valores de passo de adaptação considerados. Ainda, a Figura 2.13 mostra curvas de EQME em regime permanente (como uma função de  $\mu$ ) obtidas através de simulações de MC e a partir da expressão de modelo (2.52) para ambos os valores de SNR considerados. A partir de tais figuras, um casamento muito bom pode também ser verificado mesmo para valores de passo de adaptação próximos ao limite superior de estabilidade do algoritmo (isto é,  $\mu \rightarrow 2$ ).

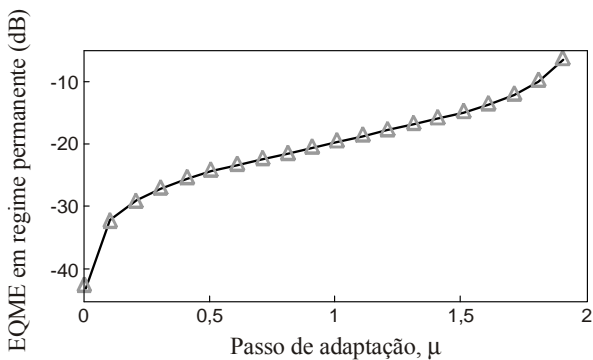


(a)

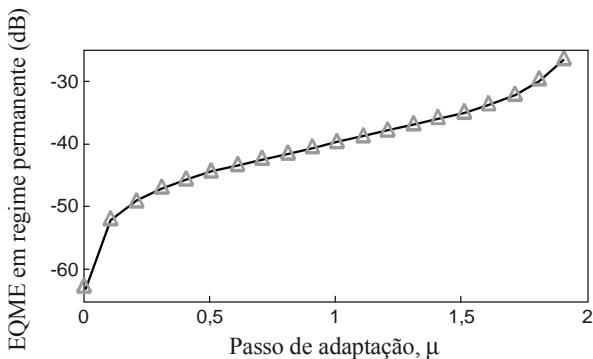


(b)

Figura 2.12. Exemplo 4. Curvas de aprendizagem (EQME) obtidas por simulações de MC (linhas cinza irregulares) e através do modelo proposto (linhas escuras tracejadas) para  $\mu = 0,1$ ,  $\mu = 0,25$  e  $\mu = 0,5$ . (a) SNR = 20 dB. (b) SNR = 40 dB.



(a)



(b)

Figura 2.13. Exemplo 4. Curvas de EQME em regime permanente obtidas por simulações de MC (triângulo cinza) e através da expressão de modelo (2.52) (linhas escuras sólidas). (a) SNR = 20 dB. (b) SNR = 40 dB.

Baseado nos resultados previamente apresentados, pode-se inferir que o modelo proposto apresenta uma precisão muito boa frente a diferentes condições de operação. Especificamente, tal precisão foi confirmada para diversos tipos de plantas e comprimentos, uma ampla faixa de dispersões de autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada (isto é, diversos níveis de correlação do sinal de entrada), como também valores diferentes de SNR,  $\alpha$  e  $\sigma_{\phi}^2$ .

## 2.5 Conclusões

Neste capítulo, considerando sinais de entrada gaussianos complexos, um modelo estocástico analítico para o algoritmo NLMS operando em um ambiente não estacionário foi apresentado, a partir do qual um modelo para um ambiente estacionário segue como um caso particular. Particularmente, foram primeiramente derivadas expressões de modelo descrevendo o comportamento médio do vetor de coeficientes, a curva de aprendizagem e a matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes. Além disso, foram ainda obtidas expressões analíticas que permitem prever o EQME em regime permanente, o desajuste e o passo de adaptação que leva ao EQME mínimo. Baseado nessas expressões, alguns aspectos importantes do algoritmo NLMS operando em um ambiente não estacionário foram discutidos. Através de resultados de simulação, a precisão do modelo proposto foi confirmada para ambientes tanto não estacionários quanto estacionários. Tais resultados mostraram ainda que o modelo prediz adequadamente o comportamento do algoritmo, tanto na fase transitória quanto em regime permanente, frente a uma ampla faixa de condições de operação.

---



## **MODELAGEM DO ALGORITMO IAF-PNLMS**

Este capítulo apresenta um modelo estocástico para o algoritmo IAF-PNLMS operando em um ambiente estacionário com sinais de entrada gaussianos correlacionados complexos e reais. Especificamente, são derivadas aqui expressões de modelo descrevendo o comportamento médio do vetor de coeficientes, a curva de aprendizagem e a matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes do algoritmo IAF-PNLMS, levando em conta a característica variante no tempo da matriz de distribuição de ganhos. Além disso, com respeito ao comportamento do algoritmo em regime permanente, são obtidas expressões analíticas que permitem prever o EQME em regime permanente e o desajuste. Considerando diferentes cenários de operação, a precisão do modelo proposto é verificada através de resultados de simulação para sinais de entrada gaussianos correlacionados tanto complexos quanto reais.

### **3.1 Considerações e motivação**

Atualmente, respostas ao impulso esparsas<sup>1</sup> são comumente encontradas em muitas aplicações práticas, tais como aquelas que envolvem sistemas de comunicação sem fio, comunicação acústica subaquática, cancelamento de eco, conformação de feixe em arranjo de antenas, processos sísmicos, e sistemas de radar e sonar [65]-[70]. Para tal classe de respostas ao impulso, os algoritmos adaptativos especialmente concebidos para lidar com plantas esparsas [71] superam

---

<sup>1</sup> Uma resposta ao impulso é qualitativamente classificada como esparsa se a maioria de seus coeficientes tem magnitude nula (ou valores próximos de zero) e apenas alguns poucos coeficientes apresentam valores significativos [65].

---

os algoritmos clássicos<sup>2</sup> tanto em termos de velocidade de convergência quanto em capacidade de rastreamento [66], [69]. Como consequência, a concepção de algoritmos customizados para operar com plantas esparsas tem se tornado um tópico de pesquisa bastante ativo, como pode ser verificado pela variedade de algoritmos propostos na literatura nas últimas décadas [16]-[20], [72]-[76].

Na literatura, a família de algoritmos PNLMS constitui um importante conjunto de algoritmos adaptativos desenvolvidos especialmente para lidar com plantas esparsas. Dentre os principais algoritmos dessa família, destacam-se o PNLMS padrão [16], o IPNLMS (*improved* PNLMS) [17], o PNLMS com lei  $\mu$  ( $\mu$ -*law* PNLMS) [18] e o IAF-PNLMS [19], [20]. Em tais algoritmos, o passo de adaptação é ajustado proporcionalmente à magnitude do correspondente coeficiente do filtro adaptativo por meio de uma matriz (diagonal) de distribuição de ganhos [veja à frente (3.1)], fazendo com que os coeficientes com maior magnitude convirjam mais rapidamente.

Levando em consideração a grande aplicabilidade dos algoritmos da família PNLMS, a modelagem estocástica desses algoritmos se torna um problema de pesquisa de grande relevância. Na prática, a modelagem de algoritmos da família PNLMS vem se mostrando um tópico de pesquisa bastante desafiador, principalmente, devido à inerente complexidade matemática envolvida na derivação de modelos precisos para uma ampla faixa de condições de operação. Basicamente, a obtenção de modelos estocásticos precisos para esses algoritmos requer que sejam levadas em consideração durante a derivação do modelo tanto as características da planta (representada pela matriz de distribuição de ganhos) quanto as estatísticas do sinal de entrada; caso contrário, resultados bastante limitados serão obtidos (conforme destacado a seguir).

No modelo simplificado apresentado em [16] para o algoritmo PNLMS padrão, assume-se que o sinal de entrada é não correlacionado e que a matriz de distribuição de ganho é invariante no tempo; contudo, a hipótese de invariância no tempo da matriz de distribuição de ganhos, também usada em [77], não representa uma condição de operação realística para os algoritmos da família PNLMS, resultando em uma predição pobre do comportamento do algoritmo (especialmente na fase transitória). Ainda referente a [16], destaca-se que uma expressão de

---

<sup>2</sup> No presente trabalho de pesquisa, os algoritmos clássicos são entendidos como aqueles que utilizam o mesmo passo de adaptação para todos os coeficientes do filtro (por exemplo, o algoritmo NLMS).

---

modelo descrevendo o EQME em regime permanente foi apresentada; entretanto, tal expressão foi também obtida à luz de condições bastante restritivas (versão simplificada do algoritmo e sinal de entrada não correlacionado).

Buscando prever adequadamente o comportamento do algoritmo também na fase transitória, uma abordagem mais realística foi discutida em [78], considerando então que a matriz de distribuição de ganhos é variante no tempo; entretanto, o referido modelo foi ainda derivado levando em conta uma versão simplificada do algoritmo PNLMS. Posteriormente, buscando um modelo mais geral, os resultados de [16] e [78] foram estendidos em [79] desconsiderando a versão simplificada do algoritmo PNLMS. Em [79], são também apresentadas expressões de modelo que permitem prever o EQME em regime permanente e o desajuste do algoritmo. Contudo, é ainda assumido em [16], [78] e [79] que o sinal de entrada é não correlacionado. Tal hipótese foi também considerada em [80] durante o desenvolvimento de um modelo para o algoritmo IPNLMS operando com plantas variantes no tempo.

Recentemente, visando sinais de entrada correlacionados, um modelo preciso descrevendo o comportamento médio do vetor de coeficientes do algoritmo IAF-PNLMS foi apresentado em [81] e aprimorado em [82], nos quais a matriz de distribuição de ganhos é também assumida ser variante no tempo. Em seguida, buscando estender os resultados até então apresentados em [81] e [82], expressões de modelo descrevendo a curva de aprendizagem do algoritmo IAF-PNLMS foram obtidas em [83]. No entanto, além de tais resultados se restringirem ao caso de sinais de entrada reais, expressões de modelo descrevendo o comportamento do algoritmo IAF-PNLMS (por exemplo, o EQME) em regime permanente não foram ainda apresentadas na literatura [81]-[83].

Neste contexto, visto que os modelos até então apresentados na literatura para os algoritmos da família PNLMS contemplam somente o caso de sinais de entrada reais e que foram derivados considerando condições de operação específicas, tem-se aqui por objetivo:

- obter expressões de modelo descrevendo o comportamento médio do vetor de coeficientes, a matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes e a curva de aprendizagem do algoritmo IAF-PNLMS, considerando sinais de entrada gaussianos correlacionados tanto complexos quanto reais;

- determinar expressões de modelo que permitem prever o EQME em regime permanente bem como o desajuste do algoritmo; e
- apresentar uma metodologia geral de modelagem que pode também ser aplicada a outros algoritmos adaptativos da família PNLMS.

### 3.2 Revisitando o algoritmo IAF-PNLMS

Considerando o caso mais geral (dados complexos), a equação de adaptação dos algoritmos da família PNLMS é dada por [84]

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu \frac{\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n)e^*(n)}{\mathbf{x}^H(n)\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n) + \varepsilon} \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{w}(n) = [w_1(n) \ w_2(n) \ \dots \ w_M(n)]^T$  denota o vetor de coeficientes do filtro adaptativo,  $\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-M+1)]^T$ , o vetor com as amostras do sinal de entrada,  $\mathbf{G}(n)$ , uma matriz diagonal de distribuição de ganhos,  $\mu$ , o parâmetro de controle de passo, e  $\varepsilon$ , uma constante positiva de valor muito pequeno que visa prevenir divisão por zero [69].

Aqui, levando em conta que o modelo proposto foca somente no caso de um ambiente estacionário (isto é, planta invariante no tempo) e assumindo que o filtro adaptativo e a planta têm a mesma ordem  $M$ , o sinal de erro  $e(n)$  [dado por (2.3)] é reescrito como

$$e(n) = [\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}(n)]^H \mathbf{x}(n) + z(n) \quad (3.2)$$

onde  $\mathbf{w}_0$  denota agora uma planta invariante no tempo e  $z(n)$ , o ruído de medição.

Nos algoritmos da família PNLMS, a matriz  $\mathbf{G}(n)$  é usada para distribuir ganhos aos coeficientes do filtro de acordo com uma regra específica, a qual é definida conforme o algoritmo considerado. Particularmente, para o algoritmo IAF-PNLMS [19], [20], os elementos de  $\mathbf{G}(n)$  são obtidos como

$$g_i(n) = \frac{\phi_i(n)}{\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \phi_j(n)}, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.3)$$

sendo  $\phi_i(n)$  uma função de proporcionalidade dada por

$$\phi_i(n) = \max[f_i(n), |w_i(n)|] \quad (3.4)$$

com

$$f_i(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} |w_i(n)| + \frac{1}{2} \phi_i(n-1), & n = mM, m = 1, 2, \dots \\ f_i(n-1), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.5)$$

representando um fator de ativação individual (para detalhes, veja [83]). Vale ressaltar que, visando evitar o “congelamento” dos coeficientes de pequena magnitude, os fatores de ativação em (3.5) são inicializados considerando um valor positivo pequeno; tipicamente, adota-se que  $f_i(0) = 10^{-2} / M$ .

### 3.3 Modelo proposto

Nesta seção, tendo em vista o algoritmo IAF-PNLMS, são derivadas expressões de modelo descrevendo o comportamento médio do vetor de coeficientes, a curva de aprendizagem, a matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes, o EQME em regime permanente e o desajuste. Para tal, as seguintes hipóteses simplificativas são primeiramente estabelecidas:

- H1) O sinal de entrada é obtido a partir de um processo gaussiano estacionário de média zero, variância  $\sigma_x^2$  e matriz de autocorrelação  $\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)]$  [4], [5].
- H2) O parâmetro de regularização pode ser desprezado durante a modelagem estocástica sob certas condições, isto é, quando  $\varepsilon \ll E[\mathbf{x}^H(n)\mathbf{x}(n)]$  [29], [44].
- H3) O ruído de medição  $z(n)$  é não correlacionado com qualquer outro sinal envolvido no processo, tendo média nula e variância  $\sigma_z^2$  [2]-[5].
- H4) Para uma condição de adaptação lenta (passo de adaptação pequeno),  $\mathbf{w}(n)$  e  $\mathbf{x}(n)$  são estatisticamente independentes [4].
- H5) Os vetores  $\mathbf{g}(n) = [g_1(n) g_2(n) \dots g_M(n)]^T$  e  $\mathbf{x}(n)$  são também assumidos estatisticamente independentes sob a condição de adaptação lenta.
- H6) Devido à natureza invariante por partes da matriz de distribuição de ganhos [veja (3.3)-(3.5)], considera-se que  $\mathbf{g}(n)$  e  $\mathbf{w}(n)$  são estatisticamente independentes.

### 3.3.1 Comportamento médio do vetor de coeficientes

Substituindo (3.2) em (3.1), tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante e levando em consideração as Hipóteses H2)-H6), obtém-se

$$E[\mathbf{w}(n+1)] = [\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}_1(n)]E[\mathbf{w}(n)] + \mu \mathbf{R}_1(n) \mathbf{w}_o \quad (3.6)$$

sendo  $\mathbf{I}$  a matriz identidade e

$$\mathbf{R}_1(n) = E \left[ \frac{\mathbf{G}(n) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n)}{\mathbf{x}^H(n) \mathbf{G}(n) \mathbf{x}(n)} \right]. \quad (3.7)$$

De (3.7), observa-se que a determinação de  $\mathbf{R}_1(n)$  requer o conhecimento de  $\mathbf{G}(n)$ . No entanto, visto que a matriz de distribuição de ganhos  $\mathbf{G}(n)$  é uma variável do algoritmo, ela não está prontamente disponível para ser usada no modelo. Assim, uma estimativa de  $\mathbf{G}(n)$  obtida conforme indicado em [82] e denotada  $\bar{\mathbf{G}}(n)$  é considerada. Então, utilizando  $\bar{\mathbf{G}}(n)$  no lugar de  $\mathbf{G}(n)$ , o valor esperado  $\mathbf{R}_1(n)$  é agora expresso como

$$\mathbf{R}_1(n) \cong E \left[ \frac{\bar{\mathbf{G}}(n) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n)}{\mathbf{x}^H(n) \bar{\mathbf{G}}(n) \mathbf{x}(n)} \right]. \quad (3.8)$$

Portanto, conhecida a solução da matriz de autocorrelação normalizada  $\mathbf{R}_1(n)$  (veja à frente na Seção 3.4), o comportamento médio do vetor de coeficientes do algoritmo IAF-PNLMS pode ser predito através de (3.6).

### 3.3.2 Curva de aprendizagem

Visto que a planta é agora assumida ser invariante no tempo [isto é,  $\mathbf{w}_o(n) = \mathbf{w}_o$ ], o vetor de erro nos coeficientes  $\mathbf{v}(n)$  [dado por (2.13)] pode ser simplificado para

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_o. \quad (3.9)$$

Dessa forma, a partir de (3.2) e (3.9), determinando o produto  $e(n)e^*(n)$ , tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante e utilizando as Hipóteses H3) e H4), a curva de aprendizagem do algoritmo é obtida como (para detalhes, veja [4])

$$J(n) = J_{\min} + J_{\text{ex}}(n) \quad (3.10)$$

com

$$\begin{aligned} J_{\min} &= E[|z(n)|^2] \\ &= \sigma_z^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

caracterizando o EQM mínimo atingível em regime permanente e

$$\begin{aligned} J_{\text{ex}}(n) &= E[|\mathbf{v}^H(n)\mathbf{x}(n)|^2] \\ &= \text{tr}[\mathbf{R}\mathbf{K}(n)] \end{aligned} \quad (3.12)$$

o EQME, onde  $\mathbf{R}$  é a matriz de autocorrelação do sinal de entrada e

$$\mathbf{K}(n) = E[\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^H(n)] \quad (3.13)$$

a matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes (determinada a seguir).

### 3.3.3 Matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes

Aqui, é derivada uma expressão recursiva descrevendo a evolução da matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes  $\mathbf{K}(n)$  focando no algoritmo IAF-PNLMS. Para tal, utilizando (3.2) e (3.9), a equação de atualização dos coeficientes (3.1) é primeiramente reescrita em termos de  $\mathbf{v}(n)$  como

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) - \mu \frac{\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\mathbf{v}(n)}{\mathbf{x}^H(n)\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n) + \varepsilon} + \mu \frac{\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n)z^*(n)}{\mathbf{x}^H(n)\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n) + \varepsilon}. \quad (3.14)$$

Agora, determinando o produto externo  $\mathbf{v}(n+1)\mathbf{v}^H(n+1)$ , tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante, utilizando (3.13) e levando em conta as Hipóteses H2)-H6), tem-se

$$\mathbf{K}(n+1) = \mathbf{K}(n) - \mu\mathbf{K}(n)\mathbf{R}_1^H(n) - \mu\mathbf{R}_1(n)\mathbf{K}(n) + \mu^2 J_{\text{min}} \mathbf{R}_2(n) + \mu^2 \mathbf{R}_3(n) \quad (3.15)$$

com  $\mathbf{R}_1(n)$  dada por (3.7),

$$\mathbf{R}_2(n) = E \left\{ \frac{\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\mathbf{G}(n)}{[\mathbf{x}^H(n)\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n)]^2} \right\} \quad (3.16)$$

e

$$\mathbf{R}_3(n) = E \left\{ \frac{\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\mathbf{K}(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\mathbf{G}(n)}{[\mathbf{x}^H(n)\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n)]^2} \right\}. \quad (3.17)$$

Então, utilizando  $\bar{\mathbf{G}}(n)$  no lugar de  $\mathbf{G}(n)$  (veja Seção 3.3.1),  $\mathbf{R}_1(n)$  reduz-se a (3.8), enquanto

$$\mathbf{R}_2(n) \cong E \left\{ \frac{\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\bar{\mathbf{G}}(n)}{[\mathbf{x}^H(n)\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{x}(n)]^2} \right\} \quad (3.18)$$

e

$$\mathbf{R}_3(n) \equiv \mathbb{E} \left\{ \frac{\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\mathbf{K}(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\bar{\mathbf{G}}(n)}{[\mathbf{x}^H(n)\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{x}(n)]^2} \right\}. \quad (3.19)$$

Portanto, conhecidas as soluções das matrizes de autocorrelação normalizada  $\mathbf{R}_1(n)$ ,  $\mathbf{R}_2(n)$  e  $\mathbf{R}_3(n)$  (veja à frente na Seção 3.4), a curva de aprendizagem do algoritmo IAF-PNLMS pode ser predita por meio de (3.10) e (3.15).

### 3.3.4 EQME em regime permanente

Nesta seção, baseado no princípio de conservação de energia [5, pp. 229-295], uma expressão de modelo descrevendo o EQME em regime permanente para o algoritmo IAF-PNLMS é derivada. Para tal, (3.14) é inicialmente reescrita utilizando (3.2) como

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) + \mu \frac{\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n)e^*(n)}{\mathbf{x}^H(n)\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n) + \varepsilon}. \quad (3.20)$$

Em seguida, pré-multiplicando ambos os lados de (3.20) por  $\mathbf{x}^H(n)$  e considerando a Hipótese H2), tem-se que os erros *a priori*  $e_a(n)$  e *a posteriori*  $e_p(n)$  são relacionados por

$$e_p^*(n) = e_a^*(n) + \mu e^*(n) \quad (3.21)$$

com

$$e_a(n) = \mathbf{v}^H(n)\mathbf{x}(n) \quad (3.22)$$

e

$$e_p(n) = \mathbf{v}^H(n+1)\mathbf{x}(n). \quad (3.23)$$

Assim, resolvendo (3.21) para  $e^*(n)$  e substituindo a expressão resultante em (3.20), obtém-se

$$\mathbf{v}(n+1) + \frac{\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n)e_a^*(n)}{\mathbf{x}^H(n)\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n)} = \mathbf{v}(n) + \frac{\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n)e_p^*(n)}{\mathbf{x}^H(n)\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n)}. \quad (3.24)$$

Logo, determinando o produto  $\mathbf{v}^H(n+1)\mathbf{G}^{-1}(n)\mathbf{v}(n+1)$  a partir de (3.24), tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante, fazendo  $n \rightarrow \infty$ , e utilizando (3.2), (3.9) e (3.21), a seguinte relação de variância para os algoritmos da família PNLMS é obtida:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \frac{|e_a(n)|^2}{\mathbf{x}^H(n)\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \frac{|(1-\mu)e_a(n) + \mu z(n)|^2}{\mathbf{x}^H(n)\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n)} \right]. \quad (3.25)$$



Então, considerando a Hipótese H3 [veja (3.11)], aproximando [85]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \frac{|e_a(n)|^2}{\mathbf{x}^H(n)\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n)} \right] \cong \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E[|e_a(n)|^2]}{E[\mathbf{x}^H(n)\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n)]} \quad (3.26)$$

e lembrando que o EQME em regime permanente [veja (3.12) e (3.22)] é dado por [5]

$$J_{\text{ex}}(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} E[|e_a(n)|^2] \quad (3.27)$$

(3.25) pode ser simplificada para

$$\frac{(2-\mu)J_{\text{ex}}(\infty)}{\lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{x}^H(n)\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n)]} \cong \mu J_{\text{min}} \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \frac{1}{\mathbf{x}^H(n)\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n)} \right]. \quad (3.28)$$

Ainda, visto que a matriz de distribuição de ganhos  $\mathbf{G}(n)$  é aproximadamente constante em regime permanente, pode-se assumir que  $\mathbf{G}(n)$  e o sinal de entrada são mutuamente independentes [veja a Hipótese H5)]. Dessa forma,

$$E_1(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \frac{1}{\mathbf{x}^H(n)\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n)} \right] \cong E \left[ \frac{1}{\mathbf{x}^H(n)\bar{\mathbf{G}}(\infty)\mathbf{x}(n)} \right] \quad (3.29)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{x}^H(n)\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n)] \cong \text{tr}[\mathbf{R}\bar{\mathbf{G}}(\infty)] \quad (3.30)$$

com

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{G}}(\infty) &= \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{G}(n)] \\ &\cong \frac{1}{\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M |w_{o,j}|} \text{diag}(|\mathbf{w}_o| + \delta) \end{aligned} \quad (3.31)$$

caracterizando o valor médio da matriz de distribuição de ganhos em regime permanente<sup>3</sup>, onde  $\delta$  denota uma constante positiva de valor muito pequeno (tipicamente,  $\delta = 10^{-4}$ ) usada para assegurar que a matriz  $\bar{\mathbf{G}}(\infty)$  seja positiva definida (para detalhes, veja [86]).

---

<sup>3</sup> Em [86], uma expressão caracterizando  $\bar{\mathbf{G}}(\infty)$  foi também obtida para o algoritmo IPNLMS [17].

Finalmente, substituindo (3.29) e (3.30) em (3.28) e resolvendo a expressão resultante para  $J_{\text{ex}}(\infty)$ , uma expressão que permite prever o EQME em regime permanente é obtida como

$$J_{\text{ex}}(\infty) \cong \frac{\mu}{(2-\mu)} J_{\text{min}} \text{tr}[\mathbf{R}\bar{\mathbf{G}}(\infty)] E_1(\infty). \quad (3.32)$$

Portanto, conhecendo (3.29), o EQME em regime permanente do algoritmo IAF-PNLMS pode ser predito.

### 3.3.5 Desajuste

Para o algoritmo IAF-PNLMS, o desajuste pode ser determinado substituindo (3.32) em (2.44), o que resulta em

$$\mathcal{M} \cong \frac{\mu}{(2-\mu)} \text{tr}[\mathbf{R}\bar{\mathbf{G}}(\infty)] E_1(\infty) \quad (3.33)$$

com  $E_1(\infty)$  e  $\bar{\mathbf{G}}(\infty)$  dados por (3.29) e (3.31), respectivamente. Logo, uma vez que (3.29) seja conhecido, o desajuste do algoritmo pode também ser predito.

## 3.4 Sobre os valores esperados surgidos na derivação do modelo

A determinação de  $\mathbf{R}_1(n)$ ,  $\mathbf{R}_2(n)$ ,  $\mathbf{R}_3(n)$  e  $E_1(\infty)$  [isto é, (3.8), (3.18), (3.19) e (3.29), respectivamente] constitui um dos maiores desafios para a modelagem de algoritmos da família PNLMS, requerendo tanto o conhecimento das características do sinal de entrada quanto da matriz de distribuição de ganhos. Aqui, um procedimento para calcular tais valores esperados é apresentado levando em conta sinal de entrada gaussiano correlacionado tanto complexo quanto real (veja Hipótese H1), o que dá origem a duas soluções distintas para cada um dos valores esperados devido à forma como a função densidade de probabilidade é definida [87, eqs. (2.97) e (2.99)]. Especificamente, a abordagem proposta se baseia na decomposição *contragredient* [61], [88], [89] de  $\bar{\mathbf{G}}(n)$ ,  $\mathbf{R}$  e  $\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R}$ , a qual é introduzida a seguir.

### 3.4.1 Decomposição de $\bar{\mathbf{G}}(n)$ , $\mathbf{R}$ e $\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R}$

Nesta seção, um procedimento de diagonalização simultânea para  $\bar{\mathbf{G}}(n)$ ,  $\mathbf{R}$  e  $\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R}$  é primeiramente apresentado; em seguida, é proposta uma abordagem que visa assegurar a estabilidade das soluções obtidas para  $\mathbf{R}_1(n)$ ,  $\mathbf{R}_2(n)$ ,  $\mathbf{R}_3(n)$  e  $E_1(\infty)$ .

### 3.4.1.1 Diagonalização simultânea

A decomposição *contragredient* [61], [88], [89] permite diagonalizar simultaneamente um par de matrizes hermitianas usando a mesma matriz de transformação. A partir de tal decomposição, considerando que  $\bar{\mathbf{G}}(n)$  seja definida positiva [18] e assumindo que  $\mathbf{R}$  também seja definida positiva [4], pode-se escrever

$$\bar{\mathbf{G}}(n) = \mathbf{Q}(n)\mathbf{\Lambda}^{1/2}(n)\mathbf{Q}^H(n) \quad (3.34)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^{-H}(n)\mathbf{\Lambda}^{1/2}(n)\mathbf{Q}^{-1}(n) \quad (3.35)$$

e, como consequência,

$$\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R} = \mathbf{Q}(n)\mathbf{\Lambda}(n)\mathbf{Q}^{-1}(n) \quad (3.36)$$

onde  $\mathbf{Q}(n)$  representa a matriz de transformação e  $\mathbf{\Lambda}(n)$  denota uma matriz diagonal contendo os autovalores de  $\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R}$ , os quais são reais e positivos [61], [88], [89].

### 3.4.1.2 Procedimento para ordenar e descartar autovalores

No intuito de assegurar a estabilidade das soluções propostas para  $\mathbf{R}_1(n)$ ,  $\mathbf{R}_2(n)$ ,  $\mathbf{R}_3(n)$  e  $E_1(\infty)$ , adota-se uma abordagem baseada em ordenar os autovalores de  $\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R}$  (matriz essa, geralmente mal condicionada) visando descartar os menos significativos<sup>4</sup> [82]. Para tal, os autovalores de  $\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R}$  são inicialmente ordenados, isto é,

$$\lambda_1(n) > \dots > \lambda_L(n) > \lambda_{L+1}(n) > \dots > \lambda_M(n). \quad (3.37)$$

Dessa forma, a matriz  $\mathbf{\Lambda}(n)$  pode ser expressa como

$$\mathbf{\Lambda}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_A(n) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_B(n) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

com

$$\mathbf{\Lambda}_A(n) = \text{diag}[\lambda_1(n) \dots \lambda_L(n)] \quad (3.39)$$

contendo os autovalores mais significativos de  $\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R}$  e

$$\mathbf{\Lambda}_B(n) = \text{diag}[\lambda_{L+1}(n) \dots \lambda_M(n)]. \quad (3.40)$$

---

<sup>4</sup> Para detalhes sobre o impacto de descartar os autovalores menos significativos na precisão das soluções propostas para  $\mathbf{R}_1(n)$ ,  $\mathbf{R}_2(n)$ ,  $\mathbf{R}_3(n)$  e  $E_1(\infty)$ , veja a discussão apresentada na Seção 3.5.3.1.

---

Em (3.39),  $\lambda_L(n)$  denota o autovalor menos significativo de  $\Lambda_A(n)$ , obtido através do limiar  $\lambda_L(n) \geq \gamma \lambda_1(n)$  com  $\gamma$  sendo uma constante positiva de valor muito pequeno (tipicamente,  $\gamma = 10^{-4}$ ).

Levando em conta (3.38)-(3.40), a matriz de transformação  $\mathbf{Q}(n)$  de dimensão  $M \times M$  pode ser expressa como

$$\mathbf{Q}(n) = [\mathbf{Q}_A(n) \ \mathbf{Q}_B(n)] \quad (3.41)$$

onde  $\mathbf{Q}_A(n)$  representa uma matriz contendo as primeiras  $L$  colunas de  $\mathbf{Q}(n)$ . Analogamente, usando a mesma estratégia em  $\mathbf{Q}^{-1}(n)$ , tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{-1}(n) &= \mathbf{U}(n) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{U}_A(n) \\ \mathbf{U}_B(n) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.42)$$

com  $\mathbf{U}_A(n)$  contendo as primeiras  $L$  linhas de  $\mathbf{Q}^{-1}(n)$ .

Finalmente, a partir de (3.38), (3.41) e (3.42), (3.36) pode ser reescrita como

$$\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R} = [\mathbf{Q}_A(n) \ \mathbf{Q}_B(n)] \begin{bmatrix} \Lambda_A(n) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_B(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_A(n) \\ \mathbf{U}_B(n) \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Então, assumindo  $\gamma \ll 1$ , obtém-se

$$\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R} \cong \mathbf{Q}_A(n)\Lambda_A(n)\mathbf{U}_A(n) \quad (3.44)$$

assegurando dessa forma a estabilidade das soluções obtidas para  $\mathbf{R}_1(n)$ ,  $\mathbf{R}_2(n)$ ,  $\mathbf{R}_3(n)$  e  $E_1(\infty)$  (veja Apêndice B).

### 3.4.2 Solução de $\mathbf{R}_1(n)$

Baseado nos resultados descritos no Apêndice B e no procedimento de decomposição apresentado anteriormente,  $\mathbf{R}_1(n)$  pode ser escrita como

$$\mathbf{R}_1(n) \cong \mathbf{Q}_A(n)\mathbf{H}(n)\mathbf{U}_A(n) \quad (3.45)$$

onde  $\mathbf{Q}_A(n)$  e  $\mathbf{U}_A(n)$  são matrizes oriundas da decomposição de  $\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R}$ , enquanto  $\mathbf{H}(n)$  é uma matriz diagonal cujos elementos são determinados de formas diferentes dependendo do tipo do sinal de entrada (complexo ou real).

Para o caso de sinais de entrada gaussianos complexos e correlacionados, os elementos de  $\mathbf{H}(n)$  são dados por (para detalhes, veja o Apêndice B)

$$h_{i,i}^{\mathbb{C}}(n) = -\frac{1}{a^{\mathbb{C}}(n)} \left\{ \frac{A_{1,i}^{\mathbb{C}}(n)}{\omega_i^{\mathbb{C}}(n)} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^L B_{l,i}^{\mathbb{C}}(n) \ln \left[ \frac{\omega_l^{\mathbb{C}}(n)}{\omega_i^{\mathbb{C}}(n)} \right] \right\} \quad (3.46)$$

com

$$\omega_k^{\mathbb{C}}(n) = \frac{-1}{\lambda_k(n)}, \quad k = 1, 2, \dots, L, \quad (3.47)$$

$$a^{\mathbb{C}}(n) = \prod_{k=1}^L \lambda_k(n), \quad (3.48)$$

$$A_{l,i}^{\mathbb{C}}(n) = \frac{1}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^L [\omega_l^{\mathbb{C}}(n) - \omega_k^{\mathbb{C}}(n)]} \quad (3.49)$$

e

$$B_{l,i}^{\mathbb{C}}(n) = \frac{1}{[\omega_l^{\mathbb{C}}(n) - \omega_i^{\mathbb{C}}(n)] \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^L [\omega_i^{\mathbb{C}}(n) - \omega_k^{\mathbb{C}}(n)]}. \quad (3.50)$$

Por outro lado, para o caso de sinais de entrada gaussianos reais e correlacionados, os elementos de  $\mathbf{H}(n)$  são determinados através de (similamente à [81]-[83])

$$h_{i,i}^{\mathbb{R}}(n) \cong \frac{-1}{2\sqrt{a^{\mathbb{R}}(n)}} \left\{ A_{1,i}^{\mathbb{R}}(n) \ln[-\omega_i^{\mathbb{R}}(n)] + \sum_{l=1}^{L/2} B_{l,i}^{\mathbb{R}}(n) \ln[-\tilde{\omega}_l^{\mathbb{R}}(n)] \right\} \quad (3.51)$$

com

$$\omega_k^{\mathbb{R}}(n) = \frac{-1}{2\lambda_k(n)}, \quad k = 1, 2, \dots, L, \quad (3.52)$$

$$\tilde{\omega}_q^{\mathbb{R}}(n) = -\sqrt{\omega_{(2q-1)}^{\mathbb{R}}(n)\omega_{(2q)}^{\mathbb{R}}(n)}, \quad q = 1, 2, \dots, L/2, \quad (3.53)$$

$$a^{\mathbb{R}}(n) = 2^L \prod_{k=1}^L \lambda_k(n), \quad (3.54)$$

$$A_{l,i}^{\mathbb{R}}(n) = \frac{1}{\prod_{q=1}^{L/2} [\omega_i^{\mathbb{R}}(n) - \tilde{\omega}_q^{\mathbb{R}}(n)]} \quad (3.55)$$

e

$$B_{l,i}^{\mathbb{R}}(n) = \frac{1}{[\tilde{\omega}_l^{\mathbb{R}}(n) - \omega_i^{\mathbb{R}}(n)] \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq l}}^{L/2} [\tilde{\omega}_l^{\mathbb{R}}(n) - \tilde{\omega}_q^{\mathbb{R}}(n)]} \quad (3.56)$$

para  $L$  par.

### 3.4.3 Solução de $\mathbf{R}_2(n)$

A partir dos resultados apresentados no Apêndice B, uma solução para  $\mathbf{R}_2(n)$  pode ser obtida como

$$\mathbf{R}_2(n) \cong \mathbf{Q}_A(n) \mathbf{\Lambda}_A^{1/2}(n) \mathbf{S}(n) \mathbf{Q}_A^H(n) \quad (3.57)$$

sendo  $\mathbf{S}(n)$  uma matriz diagonal cujos elementos para sinais de entrada complexos são dados por

$$s_{i,i}^{\mathbb{C}}(n) = \frac{1}{a^{\mathbb{C}}(n)} \left[ -A_{l,i}^{\mathbb{C}}(n) \ln[-\omega_i^{\mathbb{C}}(n)] \right. \\ \left. + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^L B_{l,i}^{\mathbb{C}}(\omega_l^{\mathbb{C}}(n) \{1 - \ln[-\omega_l^{\mathbb{C}}(n)]\} - \omega_i^{\mathbb{C}}(n) \{1 - \ln[-\omega_i^{\mathbb{C}}(n)]\}) \right] \quad (3.58)$$

e, para o caso de sinais de entrada reais, por

$$s_{i,i}^{\mathbb{R}}(n) \cong \frac{1}{2\sqrt{a^{\mathbb{R}}(n)}} \left( A_{l,i}^{\mathbb{R}}(n) \omega_i^{\mathbb{R}}(n) \{1 - \ln[-\omega_i^{\mathbb{R}}(n)]\} \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^{L/2} B_{l,i}^{\mathbb{R}}(n) \tilde{\omega}_l^{\mathbb{R}}(n) \{1 - \ln[-\tilde{\omega}_l^{\mathbb{R}}(n)]\} \right). \quad (3.59)$$

### 3.4.4 Solução de $\mathbf{R}_3(n)$

Levando em consideração os resultados do Apêndice B,  $\mathbf{R}_3(n)$  pode ser expressa como

$$\mathbf{R}_3(n) \equiv \mathbf{Q}_A(n) \left( \zeta \mathbf{P}(n) \circ \mathbf{K}'(n) + \{[\mathbf{T}^{1/2}(n) \circ \mathbf{P}(n)] \mathbf{k}'(n)\} \mathbf{1}^T \circ \mathbf{I} \right) \mathbf{Q}_A^H(n) \quad (3.60)$$

onde  $\circ$  denota o produto de Hadamard [61],  $\mathbf{I}$ , uma matriz identidade com dimensão  $L \times L$ ,  $\mathbf{1}$ , um vetor de dimensão  $L$  cujos elementos são iguais a 1,  $\mathbf{K}'(n)$ ,  $\mathbf{k}'(n)$  e  $\mathbf{T}(n)$  são, respectivamente, definidos por (B.27), (B.28) e (B.29), e  $\zeta$  caracteriza o tipo do sinal de entrada (tomando valor 1 para dados complexos e 2 para dados reais).

Para o caso de sinais de entrada complexos, a matriz simétrica  $\mathbf{P}(n)$  tem seus elementos da diagonal dados por

$$p_{i,i}^{\mathbb{C}}(n) = \frac{1}{a^{\mathbb{C}}(n)} \left[ -\frac{A_{1,i}^{\mathbb{C}}(n)}{2\omega_i^{\mathbb{C}}(n)} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^L \frac{B_{l,i}^{\mathbb{C}}(n)}{\omega_l^{\mathbb{C}}(n) - \omega_i^{\mathbb{C}}(n)} \left( \omega_l^{\mathbb{C}}(n) \left\{ 1 + \ln \left[ \frac{\omega_l^{\mathbb{C}}(n)}{\omega_l^{\mathbb{C}}(n)} \right] \right\} - \omega_i^{\mathbb{C}}(n) \right) \right] \quad (3.61)$$

e os elementos fora da diagonal, por

$$p_{i,j}^{\mathbb{C}}(n) = \frac{1}{a^{\mathbb{C}}(n)} \left[ A_{1,i}^{\mathbb{C}}(n) \left( \frac{\ln[-\omega_i^{\mathbb{C}}(n)]}{\omega_j^{\mathbb{C}}(n) - \omega_i^{\mathbb{C}}(n)} + \frac{2\omega_j^{\mathbb{C}}(n) \{1 - \ln[-\omega_j^{\mathbb{C}}(n)]\}}{[\omega_j^{\mathbb{C}}(n) - \omega_i^{\mathbb{C}}(n)]^2} \right) + B_{j,i}^{\mathbb{C}}(n) \left( \frac{2\omega_i^{\mathbb{C}}(n) \{1 - \ln[-\omega_i^{\mathbb{C}}(n)]\}}{\omega_j^{\mathbb{C}}(n) - \omega_i^{\mathbb{C}}(n)} - \ln[-\omega_j^{\mathbb{C}}(n)] \right) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i,j}}^L B_{l,i}^{\mathbb{C}}(n) \left( \frac{[\omega_l^{\mathbb{C}}(n) + \omega_j^{\mathbb{C}}(n) - 2\omega_i^{\mathbb{C}}(n)] \omega_i^{\mathbb{C}}(n) \{1 - \ln[-\omega_i^{\mathbb{C}}(n)]\}}{[\omega_j^{\mathbb{C}}(n) - \omega_i^{\mathbb{C}}(n)]^2} + \frac{[\omega_l^{\mathbb{C}}(n) - \omega_i^{\mathbb{C}}(n)] [\omega_l^{\mathbb{C}}(n) + \omega_i^{\mathbb{C}}(n) - 2\omega_j^{\mathbb{C}}(n)] \omega_j^{\mathbb{C}}(n) \{1 - \ln[-\omega_j^{\mathbb{C}}(n)]\}}{[\omega_j^{\mathbb{C}}(n) - \omega_i^{\mathbb{C}}(n)]^2 [\omega_l^{\mathbb{C}}(n) - \omega_j^{\mathbb{C}}(n)]} + \frac{\omega_l^{\mathbb{C}}(n) \{1 - \ln[-\omega_l^{\mathbb{C}}(n)]\}}{\omega_l^{\mathbb{C}}(n) - \omega_j^{\mathbb{C}}(n)} \right) \right]. \quad (3.62)$$

Para o caso de sinais de entrada reais, os elementos da diagonal de  $\mathbf{P}(n)$  são dados por

$$p_{i,i}^{\mathbb{R}}(n) \cong \frac{1}{4\sqrt{a^{\mathbb{R}}(n)}} \left( -A_{1,i}^{\mathbb{R}}(n) \ln[-\omega_i^{\mathbb{R}}(n)] + \sum_{q=1}^{L/2} B_{1,i}^{\mathbb{R}}(n) \frac{\tilde{\omega}_l^{\mathbb{R}}(n) \{1 - \ln[-\tilde{\omega}_l^{\mathbb{R}}(n)]\} - \omega_i^{\mathbb{R}}(n) \{1 - \ln[\omega_i^{\mathbb{R}}(n)]\}}{\tilde{\omega}_l^{\mathbb{R}}(n) - \omega_i^{\mathbb{R}}(n)} \right) \quad (3.63)$$

enquanto os elementos fora da diagonal, por

$$p_{i,j}^{\mathbb{R}}(n) \cong \frac{1}{4\sqrt{a^{\mathbb{R}}(n)}} \left( A_{1,i}^{\mathbb{R}}(n) \frac{\omega_i^{\mathbb{R}}(n) \{1 - \ln[-\omega_i^{\mathbb{R}}(n)]\}}{\omega_i^{\mathbb{R}}(n) - \omega_j^{\mathbb{R}}(n)} + A_{1,j}^{\mathbb{R}}(n) \frac{\omega_j^{\mathbb{R}}(n) \{1 - \ln[-\omega_j^{\mathbb{R}}(n)]\}}{\omega_j^{\mathbb{R}}(n) - \omega_i^{\mathbb{R}}(n)} + \sum_{l=1}^{L/2} B_{1,i}^{\mathbb{R}}(n) \frac{\tilde{\omega}_l^{\mathbb{R}}(n) \{1 - \ln[-\tilde{\omega}_l^{\mathbb{R}}(n)]\}}{\tilde{\omega}_l^{\mathbb{R}}(n) - \omega_j^{\mathbb{R}}(n)} \right). \quad (3.64)$$

### 3.4.5 Solução de $E_1(\infty)$

Para sinais de entrada complexos,  $E_1(\infty)$  tem como solução (veja Apêndice B)

$$E_1^{\mathbb{C}}(\infty) \cong \sum_{l=1}^L \frac{1}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^L [\lambda_l(\infty) - \lambda_k(\infty)]} \lambda_l^{L-2}(\infty) \ln[\lambda_l(\infty)] \quad (3.65)$$

com  $\lambda_k(\infty)$  denotando os autovalores de  $\bar{\mathbf{G}}(\infty)\mathbf{R}$ . Por outro lado, para sinais de entrada reais, obtém-se (veja Apêndice B)

$$E_1^{\mathbb{R}}(\infty) \cong \frac{1}{2\sqrt{\prod_{k=1}^L \lambda_k(\infty)}} \sum_{l=1}^{L/2} \frac{1}{\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq l}}^{L/2} \left[ \frac{\tilde{\lambda}_l(\infty)}{\tilde{\lambda}_q(\infty)} - 1 \right]} \tilde{\lambda}_l^{(L/2)-1}(\infty) \ln[2\tilde{\lambda}_l(\infty)] \quad (3.66)$$

onde

$$\tilde{\lambda}_q(\infty) = \sqrt{\lambda_{(2q-1)}(\infty)\lambda_{(2q)}(\infty)}, \quad q = 1, 2, \dots, L/2 \quad (3.67)$$

caracteriza a média geométrica de pares adjacentes de autovalores de  $\bar{\mathbf{G}}(\infty)\mathbf{R}$ .



Portanto, levando em conta as soluções obtidas para as matrizes  $\mathbf{R}_1(n)$ ,  $\mathbf{R}_2(n)$  e  $\mathbf{R}_3(n)$  [dadas por (3.45), (3.57) e (3.60), respectivamente], o comportamento do vetor de coeficientes, a curva de aprendizagem e a matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes do algoritmo IAF-PNLMS pode ser predito através das expressões de modelo (3.6), (3.10) e (3.15), respectivamente. Ainda, a partir das soluções propostas para  $E_1(\infty)$  [dadas por (3.65) e (3.66)], o EQME em regime permanente e o desajuste do algoritmo podem ser preditos através das expressões de modelo (3.32) e (3.33), respectivamente.

### 3.5 Resultados de simulação

Agora, visando avaliar a precisão do modelo proposto frente a diferentes cenários de operação, simulações de MC (média de 200 realizações independentes) do algoritmo IAF-PNLMS são apresentadas para um problema de identificação de sistema. Especificamente, seis exemplos são mostrados considerando diferentes tipos de plantas com diversos comprimentos, valores distintos de SNR e uma ampla faixa de níveis de correlação do sinal de entrada (isto é, valores de dispersão de autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada). Aqui, o sinal de entrada correlacionado é também obtido através de um processo AR(2) [dado por (2.56) e (2.57)], tendo média zero e variância  $\sigma_x^2 = 1$ .

Para quantificar o grau de esparsidade das plantas consideradas, é utilizada uma medida comumente encontrada na literatura [65], [90], a qual é definida como

$$\xi(\mathbf{w}_o) \triangleq \frac{M}{M - \sqrt{M}} \left( 1 - \frac{\|\mathbf{w}_o\|_1}{\sqrt{M} \|\mathbf{w}_o\|_2} \right) \quad (3.68)$$

onde  $\mathbf{w}_o$  representa a resposta ao impulso da planta enquanto  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  denotam a norma 1 e 2, respectivamente. Cabe aqui salientar que a medida  $\xi(\mathbf{w}_o)$  pode variar entre 0 (grau de esparsidade de um filtro uniforme) e 1 (grau de esparsidade de um filtro de Dirac) [65], [69], [90]; logo,  $\xi(\mathbf{w}_o) \rightarrow 1$  implica plantas com elevado grau de esparsidade.

Nas simulações apresentadas, a menos que estabelecido o contrário, dois valores de SNR são usados, a saber: SNR = 20 dB e 30 dB. Os parâmetros do algoritmo IAF-PNLMS são  $f_i(0) = 10^{-3}$  e  $\mu = 0,01$ . Além disso, a condição inicial do vetor de coeficientes adaptativo nas simulações de MC é  $\mathbf{w}(0) = \mathbf{0}$ , o que implica  $\mathbf{K}(0) = \mathbf{w}_o \mathbf{w}_o^H$ . Em todos os cenários de simulação considerados, é assumido que  $\gamma = \delta = 10^{-4}$ .

### 3.5.1 Sinais de entrada complexos

Na sequência, três exemplos são apresentados a fim de avaliar a precisão do modelo proposto para sinais de entrada complexos.

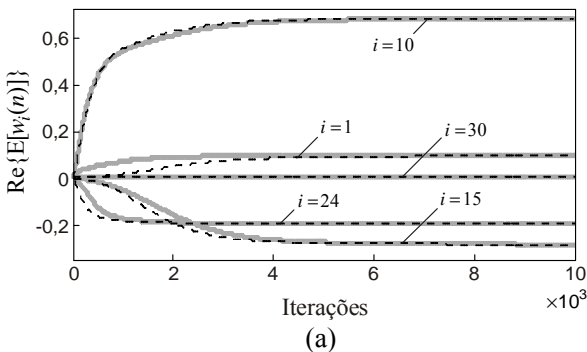
#### 3.5.1.1 Exemplo 1

Aqui, a precisão do modelo proposto é avaliada para diferentes valores de dispersão de autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada. Para tal, utiliza-se uma planta com  $M = 32$  coeficientes, sendo 4 ativos (não nulos) dados por

$$(\mathbf{w}_o^A)_i = \begin{cases} 0,1 + j0,2, & i = 1 \\ 0,7 - j0,1, & i = 10 \\ -0,3 - j0,2, & i = 15 \\ -0,2 + j0,7, & i = 24. \end{cases} \quad (3.69)$$

A partir de (3.68), tem-se que o grau de esparsidade da planta é  $\xi(\mathbf{w}_o^A) = 0,8205$ . Os valores de dispersão de autovalores considerados são  $\chi = 57,59$  [obtido a partir de (2.56) para  $a_1 = -0,6$  e  $a_2 = 0,7$ ] e  $\chi = 1211,85$  (mudando  $a_2$  para  $0,96$ ).

Na Figura 3.1, os resultados obtidos para o cenário de operação considerado são mostrados. Observe que a expressão de modelo (3.6) descreve adequadamente o comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo, exibindo uma precisão razoável (casamento com os resultados de simulação de MC) tanto na fase transitória quanto em regime permanente. Note que essa precisão é verificada independentemente do nível de correlação do sinal de entrada.



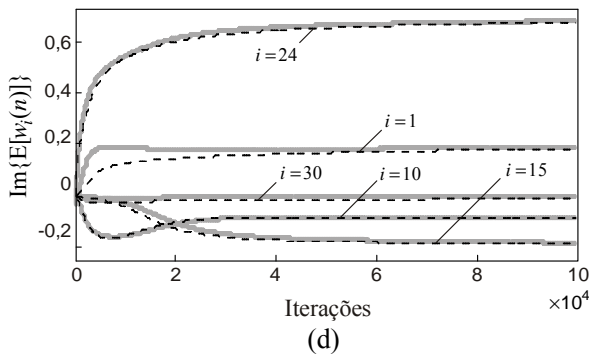
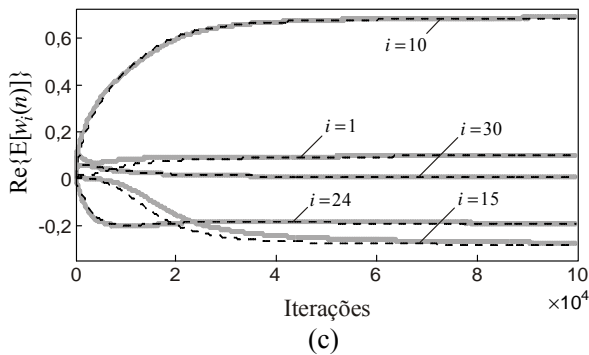
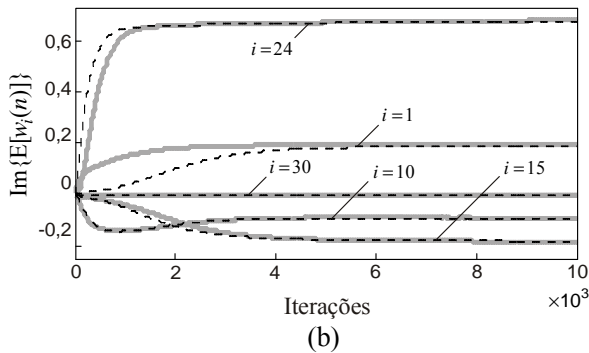


Figura 3.1. Exemplo 1. Comportamento médio da parte real e da parte imaginária de cinco coeficientes do filtro adaptativo. (Linhas cinza) simulações de MC. (Linhas escuras tracejadas) modelo proposto. (a)-(b)  $\chi = 57, 59$ . (c)-(d)  $\chi = 1211, 85$ .

A Figura 3.2 mostra curvas de aprendizagem (EQM) obtidas através de simulações de MC e a partir do modelo proposto (3.10) para os dois níveis de correlação do sinal de entrada. A partir dessa figura, verifica-se que o modelo proposto prediz muito bem o comportamento do algoritmo independente tanto do valor de SNR considerado quanto da dispersão de autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada. Além disso, observa-se que tal precisão é alcançada tanto na fase transitória quanto em regime permanente.

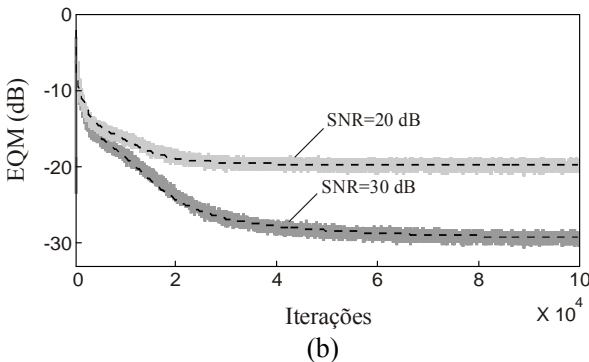
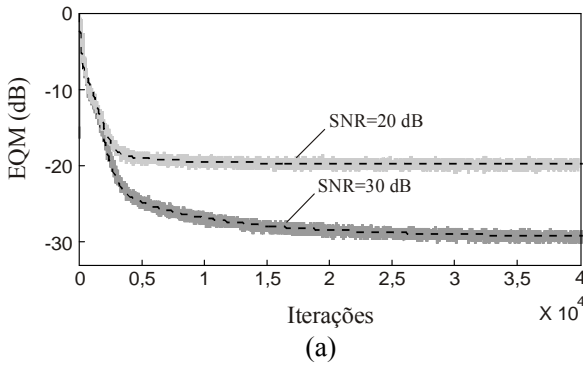


Figura 3.2. Exemplo 1. Curvas de aprendizagem (EQM) obtidas por simulações de MC (linhas cinza irregulares) e a partir do modelo proposto (linhas escuras tracejadas). (a)  $\chi = 57,59$ . (b)  $\chi = 1211,85$ .

3.5.1.2 Exemplo 2

Para avaliar a precisão do modelo proposto frente a um cenário de operação mais realista, são agora consideradas duas plantas encontradas em sistemas de comunicação, sendo uma delas obtida a partir de um modelo de canal de rádio de micro-ondas e a outra, de um modelo de canal de modem a cabo. Especificamente, tais plantas, denominadas  $w_o^B$  ( $M = 64$ ) e  $w_o^C$  ( $M = 128$ ), são obtidas a partir de [64, Canal 8] e [63, Canal 1] (veja Figura 3.3), exibindo esparsidades  $\xi(w_o^B) = 0,8246$  e  $\xi(w_o^C) = 0,8550$ , respectivamente. Os valores de dispersão de autovalores das matrizes de autocorrelação são  $\chi = 249,66$  para  $M = 64$  e  $\chi = 280,43$  para  $M = 128$ , ambos obtidos considerando  $a_1 = -0,6$  e  $a_2 = 0,85$  em (2.56).

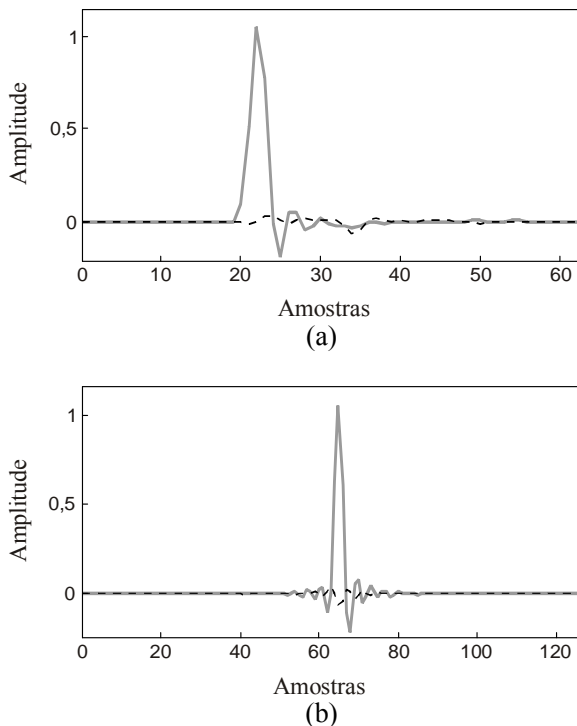


Figura 3.3. Respostas ao impulso da planta do Exemplo 2. (Linha cinza sólida) parte real. (Linha escura tracejada) parte imaginária. (a) Planta  $w_o^B$ . (b) Planta  $w_o^C$ .

A Figura 3.4 exibe curvas de aprendizagem obtidas simulações de MC e a partir do modelo proposto. Novamente, um casamento muito bom entre simulações e modelo pode ser verificado para o cenário em questão. Observe que, independente do valor de SNR considerado para cada aplicação, o modelo prediz muito bem o comportamento do algoritmo para ambas as plantas consideradas.

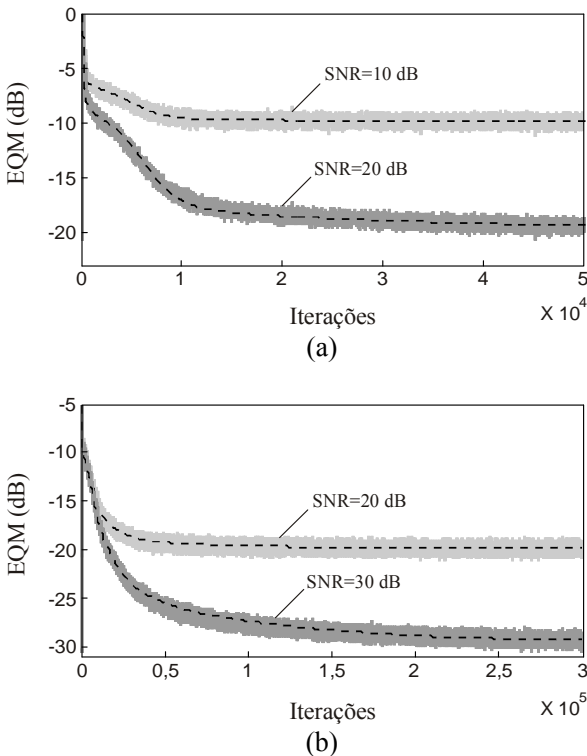


Figura 3.4. Exemplo 2. Curvas de aprendizagem (EQM) obtidas através de simulações de MC (linhas cinza irregulares) e a partir do modelo proposto (linhas escuras tracejadas). (a) Planta  $w_0^B$ . (b) Planta  $w_0^C$ .

3.5.1.3 Exemplo 3

Neste exemplo, a precisão da expressão de modelo descrevendo o EQME em regime permanente do algoritmo IAF-PNLMS é verificada. Para tal, os resultados preditos através do modelo são comparados com aqueles obtidos a partir de simulações de MC, para valores de passo de adaptação variando de 0,01 até 1,96. Além disso, visando facilitar a interpretação dos resultados de simulação, é tomada a média dos últimos 100 valores de EQME em regime permanente [5, pp. 250]. Para esse cenário, utiliza-se novamente a planta  $w_0^C$  com  $M=128$  coeficientes (veja Exemplo 2). A dispersão de autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada é  $\chi = 1211,85$ , a qual é obtida a partir de (2.56) com  $a_1 = -0,6$  e  $a_2 = 0,93$ . Ainda, objetivando avaliar a robustez do modelo, uma faixa mais ampla de valores de SNR é considerada, isto é, SNR = 20 dB, 40 dB e 60 dB.

A Figura 3.5 apresenta curvas de EQME em regime permanente obtidas para o cenário de operação considerado. Observe que, mesmo para valores de passo de adaptação próximos ao limite superior de estabilidade<sup>5</sup>, uma precisão muito boa do modelo proposto pode ser verificada. Note ainda que tal precisão pode ser observada em uma ampla faixa de valores de SNR.

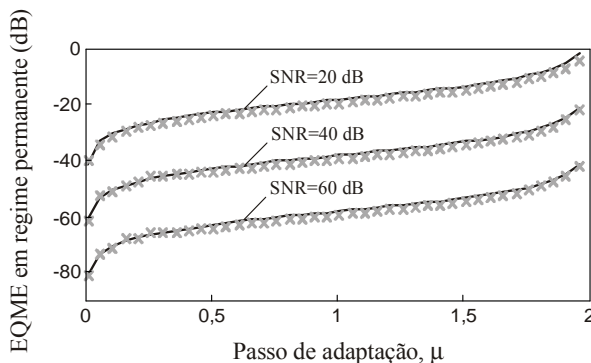


Figura 3.5. Exemplo 3. Curvas de EQME em regime permanente obtidas por simulações de MC (marcadores cinza) e a partir do modelo proposto (linhas escuras sólidas).

<sup>5</sup> De acordo com [69], os algoritmos da família PNLMS são não divergentes para valores de passo de adaptação satisfazendo a condição  $0 < \mu < 2$ .

### 3.5.2 Sinais de entrada reais

Nesta seção, a precisão do modelo é avaliada para sinais de entrada reais.

#### 3.5.2.1 Exemplo 4

Visando verificar a robustez do modelo proposto frente a plantas com diferentes graus de esparsidade, duas respostas ao impulso sintéticas são utilizadas [91], as quais são obtidas através de

$$\mathbf{w}_0 = [\mathbf{s}^T \mathbf{u}^T \mathbf{F}]^T \quad (3.70)$$

onde  $\mathbf{s} = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_{M-M_u}]^T$  é um vetor de variáveis gaussianas não correlacionadas com média zero e variância  $\sigma_s^2$ ,  $\mathbf{u} = [1 \ e^{-1/\tau} \ \dots \ e^{-(M_u-1)/\tau}]^T$ , um vetor com constantes obtidas a partir de uma exponencial decrescente e  $\mathbf{F}$ , uma matriz diagonal com dimensão  $M_u \times M_u$ , cujos elementos são variáveis gaussianas não correlacionadas de média zero e variância  $\sigma_f^2$ . Em (3.70), os parâmetros usados são  $M = 32$ ,  $M_u = 24$ ,  $\sigma_s^2 = 1,055 \times 10^{-4}$  e  $\sigma_f^2 = 0,9146$ , sendo  $\tau$  ajustado para obter plantas com diferentes graus de esparsidade. Especificamente, considera-se aqui  $\tau = 5$  e  $\tau = 0,1$ , levando a plantas com esparsidades de  $\xi(\mathbf{w}_0^D) = 0,6106$  e  $\xi(\mathbf{w}_0^E) = 0,9582$ , respectivamente. A dispersão de autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada é  $\chi = 197,26$ , obtida considerando os mesmos coeficientes AR(2) do Exemplo 2.

A Figura 3.6 mostra os resultados obtidos por simulações de MC e os resultados preditos pelo modelo proposto para o cenário deste exemplo. A partir de tal figura, verifica-se que o algoritmo IAF-PNLMS leva a valores de EQM em regime permanente maiores quando plantas com baixa ou média esparsidade são consideradas (veja também a Figura 3.9). Todavia, independentemente do grau de esparsidade da planta, observe que o modelo proposto prediz adequadamente o comportamento do algoritmo.



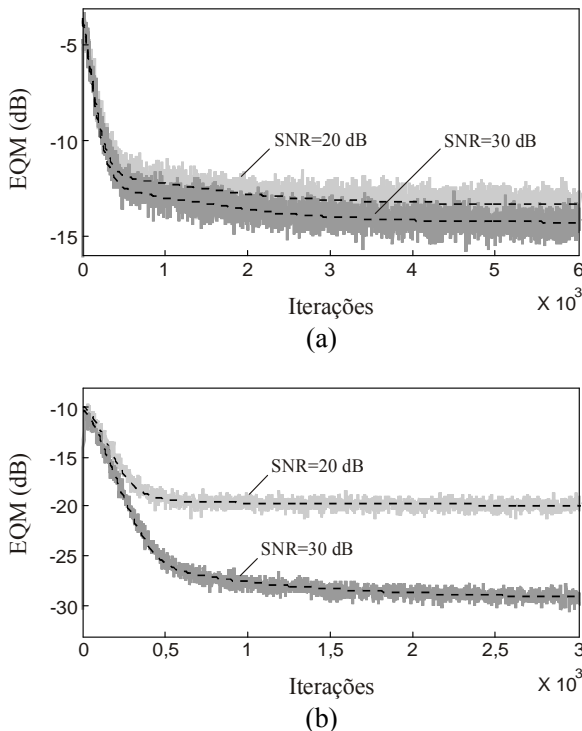


Figura 3.6. Exemplo 4. Curvas de aprendizagem (EQM) obtidas através de simulações de MC (linhas cinza irregulares) e a partir do modelo proposto (linhas escuras tracejadas). (a) Planta  $\mathbf{w}_0^D$  com  $\xi(\mathbf{w}_0^D) = 0,6106$ . (b) Planta  $\mathbf{w}_0^E$  com  $\xi(\mathbf{w}_0^E) = 0,9582$ .

### 3.5.2.2 Exemplo 5

Aqui, visando avaliar a precisão do modelo proposto frente a filtros de maior comprimento, são consideradas duas plantas  $\mathbf{w}_0^F$  e  $\mathbf{w}_0^G$  (ambas com  $M = 256$  coeficientes) obtidas a partir de modelos de caminho de eco definidos na Recomendação G.168 da ITU-T [92, Modelos 1 e 4] (veja Figura 3.7), as quais exibem valores de esparsidade de  $\xi(\mathbf{w}_0^F) = 0,8515$  e  $\xi(\mathbf{w}_0^G) = 0,6039$ , respectivamente. A dispersão de autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada é  $\chi = 292,81$ , obtida (para  $M = 256$ ) usando os mesmos coeficientes AR(2) considerados no Exemplo 2.

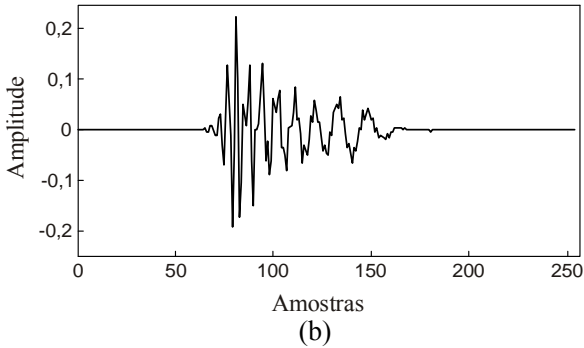
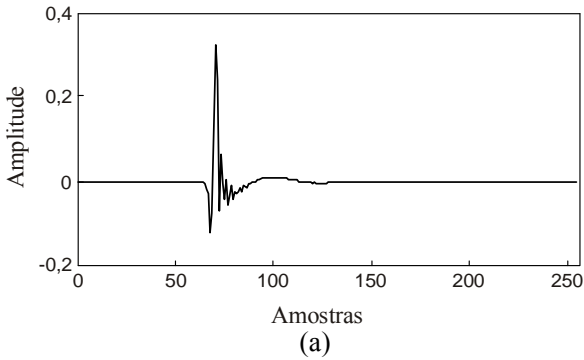


Figura 3.7. Respostas ao impulso da planta do Exemplo 5 obtidas a partir da Recomendação G.168 da ITU-T [92]. (a) Planta  $w_o^F$ . (b) Planta  $w_o^G$ .

Na Figura 3.8, são apresentados os resultados obtidos para o cenário aqui descrito. Observe que o modelo proposto descreve adequadamente o comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo, exibindo uma precisão muito boa tanto na fase transitória quanto em regime permanente. Note que tal precisão é verificada independentemente da ordem do filtro adaptativo e do tipo de planta considerado.

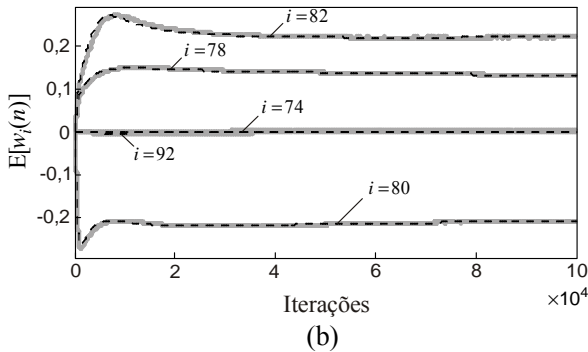
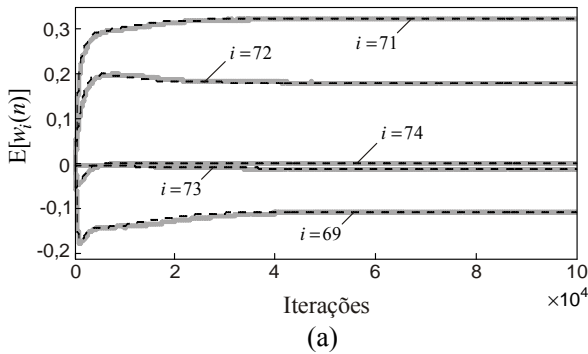


Figura 3.8. Exemplo 5. Comportamento médio de cinco coeficientes do filtro adaptativo. (Linhas cinza) simulações de MC. (Linhas escuras tracejadas) modelo proposto. (a) Planta  $\mathbf{w}_o^F$ . (b) Planta  $\mathbf{w}_o^G$ .

A Figura 3.9 mostra curvas de aprendizagem (EQM) obtidas através de simulações de MC e a partir do modelo proposto para as plantas ilustradas na Figura 3.7. Especificamente, na Figura 3.9(a), a precisão da expressão de modelo é verificada considerando a planta  $\mathbf{w}_o^F$  com  $\xi(\mathbf{w}_o^F)=0,8515$ ; seguindo o mesmo padrão de apresentação, a Figura 3.9(b) ilustra curva de aprendizagem (EQM) do algoritmo para a planta  $\mathbf{w}_o^G$  com  $\xi(\mathbf{w}_o^G)=0,6039$ . Observe, a partir dessas figuras, a precisão muito boa alcançada pelo modelo proposto frente a plantas mais realistas como também para os dois graus de esparsidade considerados.

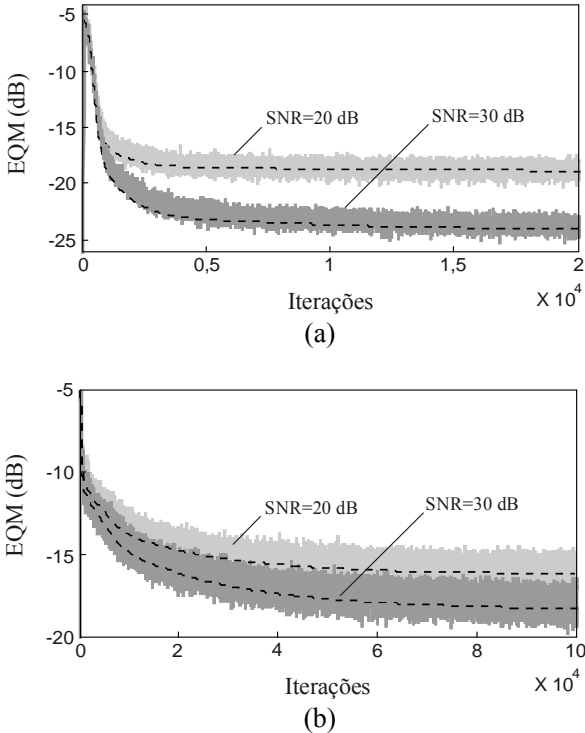


Figura 3.9. Exemplo 5. Curvas de aprendizagem (EQM) obtidas através de simulações de MC (linhas cinza irregulares) e a partir do modelo proposto (linhas escuras tracejadas). (a) Planta  $w_0^F$ . (b) Planta  $w_0^G$ .

### 3.5.2.3 Exemplo 6

Este exemplo tem por objetivo avaliar a precisão da expressão de modelo descrevendo o EQME em regime permanente do algoritmo IAF-PNLMS frente a valores de passo de adaptação variando de 0,01 até 1,96 (veja Exemplo 3). Nesse cenário, é novamente utilizada a planta  $w_0^F$ , a qual é obtida a partir de um modelo de caminho de eco definido na Recomendação G.168 da ITU-T [92, Modelo 1]. A dispersão de autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada é  $\chi = 292,81$ , a qual é obtida considerando os mesmos coeficientes AR(2) do Exemplo 5. Ainda, no intuito de avaliar a robustez do modelo proposto, são agora considerados os valores de SNR = 10 dB, 20 dB e 30 dB.

Para o cenário de operação descrito, a Figura 3.10 ilustra curvas de EQME em regime permanente como função do passo de adaptação. A partir de tal figura, constata-se que a expressão de modelo proposta apresenta uma precisão satisfatória mesmo para valores de passo de adaptação próximos do limite superior de estabilidade (isto é,  $\mu \rightarrow 2$ ). Ainda, destaca-se que tal precisão pode ser verificada mesmo frente a valores baixos de SNR.

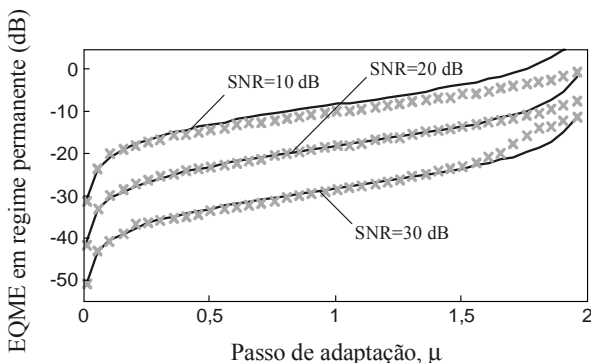


Figura 3.10. Exemplo 6. Curvas de EQME em regime permanente obtidas por simulações de MC (marcadores cinza) e a partir do modelo proposto (linhas escuras sólidas).

### 3.5.3 Discussão

Aqui, são feitos alguns comentários a respeito da escolha do parâmetro  $\gamma$ , o qual é usado para assegurar a estabilidade do modelo, bem como são destacados importantes aspectos referentes aos resultados de simulação.

#### 3.5.3.1 Sobre a seleção do parâmetro $\gamma$

O impacto da escolha do parâmetro  $\gamma$  sobre a precisão das soluções propostas para  $\mathbf{R}_1(n)$ ,  $\mathbf{R}_2(n)$ ,  $\mathbf{R}_3(n)$  e  $E_1(\infty)$  pode ser explicada como segue. Primeiramente, assumindo  $\gamma=0$ , todos os autovalores de  $\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R}$  são considerados no cálculo de tais valores esperados, implicando resultados muito precisos. Todavia, visto que sob certas condições alguns autovalores de  $\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R}$  possuem valores muito

pequenos, o uso de  $\gamma=0$  pode levar tais soluções à instabilidade devido a problemas numéricos. Por outro lado, para  $\gamma \rightarrow 1$  (buscando estabilidade numérica), somente os autovalores mais significativos de  $\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R}$  são considerados na determinação de  $\mathbf{R}_1(n)$ ,  $\mathbf{R}_2(n)$ ,  $\mathbf{R}_3(n)$  e  $E_1(\infty)$ , comprometendo assim a precisão do modelo proposto. Na prática, valores de  $\gamma$  em torno de  $10^{-4}$  têm demonstrado uma boa relação de compromisso entre precisão e estabilidade numérica do modelo proposto frente a diferentes cenários de operação.

### 3.5.3.2 Sobre a precisão do modelo proposto

Os resultados de simulação anteriormente apresentados ratificam a precisão muito boa do modelo proposto (casamento entre simulação e modelo) frente a diferentes cenários de operação, os quais consideram diversos tipos de plantas (artificial, sintética e realística) com diferentes graus de esparsidade e comprimentos. Além disso, uma ampla faixa de dispersões de autovalores para a matriz de autocorrelação do sinal de entrada e valores distintos de SNR são considerados. Baseado nos resultados até então apresentados, é possível inferir que o modelo proposto pode ser usado para prever o comportamento do algoritmo em diversas aplicações do mundo real, evitando assim a necessidade de simulações de MC. Dessa forma, a partir das expressões de modelo, algumas tarefas da etapa de projeto podem ser facilitadas, tais como a sintonia dos parâmetros do algoritmo, comparações de desempenho e o estudo de (possíveis) comportamentos indesejados. Em relação à identificação de comportamentos indesejados, observe os casos ilustrados nas Figuras 3.6 e 3.9, nos quais valores de EQM em regime permanente maiores são obtidos quando o algoritmo IAF-PNLMS é utilizado com plantas de baixa e média esparsidade.

## 3.6 Conclusões

Neste capítulo, levando em consideração sinais de entrada gaussianos correlacionados tanto complexos quanto reais, foi apresentado um modelo estocástico preciso para o algoritmo IAF-PNLMS operando em um ambiente estacionário. Particularmente, foram aqui derivadas expressões de modelo descrevendo o comportamento médio do vetor de coeficientes, a curva de aprendizagem, a matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes, o EQME em regime permanente e o desajuste. No desenvolvimento do referido modelo, a matriz de distribuição de ganhos foi assumida variante no tempo, resultando em expressões que descrevem

---

precisamente o comportamento do algoritmo tanto na fase transitória quanto em regime permanente. Tal precisão (a favor do modelo proposto) foi confirmada através de resultados de simulação para diferentes cenários de operação. A partir de tais resultados, observou-se que o modelo proposto prediz adequadamente o comportamento do algoritmo mesmo frente a sinais de entrada fortemente correlacionados. Além disso, é importante ressaltar que alterando a maneira como o valor esperado da matriz de distribuição de ganhos é determinado, a metodologia concebida aqui pode também ser utilizada para derivar modelos de outros algoritmos da família PNLMS.





## MODELAGEM DO ALGORITMO TDLMS

Este capítulo apresenta um modelo estocástico para o algoritmo TDLMS operando em um ambiente não estacionário com sinais de entrada gaussianos correlacionados reais, a partir do qual um modelo para um ambiente estacionário segue como um caso particular. Especificamente, são obtidas aqui expressões de modelo descrevendo o comportamento médio do vetor de erro nos coeficientes transformados, a curva de aprendizagem, a matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes transformados, o EQME em regime permanente, o desajuste, o passo de adaptação que leva ao EQME mínimo, o grau de não estacionaridade como também uma relação entre o desajuste e o grau de não estacionaridade. Baseado nas expressões obtidas, o impacto dos parâmetros do algoritmo sobre o seu desempenho é ainda discutido, evidenciando alguns aspectos importantes do comportamento do algoritmo frente ao ambiente não estacionário considerado. Através de resultados de simulação, a precisão do modelo proposto é avaliada para diferentes cenários de operação.

### 4.1 Considerações e motivação

Devido à sua baixa complexidade computacional e elevada robustez em uma ampla faixa de condições de operação, o algoritmo LMS é um dos mais bem conhecidos algoritmos adaptativos da literatura [1], o qual vem sendo utilizado com sucesso em muitas aplicações práticas [2]-[5]. Contudo, dependendo do nível de correlação do sinal de entrada (isto é, da dispersão de autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada), o algoritmo LMS tem sua velocidade de convergência severamente comprometida [1]-[5]. Assim, visando superar essa limitação, diferentes estratégias vêm sendo propostas e estudadas na literatura [2]-[5], [21], [93]-[104]. Tais estratégias geralmente levam a um desempenho melhor ao custo de um aumento significativo na complexidade computacional do algoritmo

---

(para detalhes, veja [5]). Todavia, em muitas aplicações práticas, é importante considerar a relação de compromisso entre complexidade computacional e velocidade de convergência. Para atender a esse desafio, o algoritmo TDLMS [21] emerge como uma alternativa interessante ao algoritmo LMS. Basicamente, o algoritmo TDLMS é obtido incluindo um estágio de pré-processamento no LMS [2], [4], [21], no qual uma transformação ortogonal é aplicada sobre o sinal de entrada seguida por uma normalização de potência [2], [102]. Tal abordagem visa reduzir o nível de correlação do sinal de entrada, melhorando assim a velocidade de convergência do algoritmo para sinais correlacionados [5], [21]. Então, levando em consideração a aplicabilidade prática do algoritmo TDLMS, seu modelo estocástico se torna uma ferramenta interessante para prever o comportamento do algoritmo sob diferentes condições de operação.

Com respeito ao algoritmo TDLMS, é importante mencionar que a maioria dos modelos apresentados até então na literatura focam exclusivamente sobre o caso de um ambiente estacionário [21], [29], [94], [95], [100], [105], [106], sendo o caso de um ambiente não estacionário (planta variante no tempo) discutido apenas em [30], [31], [34], [101], [107]. Entretanto, apesar de considerar um ambiente não estacionário, os resultados descritos nesses trabalhos apresentam ainda importantes limitações. Por exemplo, em [101], um estimador de potência modificado foi considerado no algoritmo TDLMS, levando a um modelo particularizado para tal algoritmo modificado. Por sua vez, utilizando um estimador de potência convencional, um modelo para o algoritmo TDLMS é apresentado em [107]; todavia, assim como em [101], foi também assumido durante o desenvolvimento do modelo que o sinal de saída de cada ramo de transformação representa uma sequência de amostras estatisticamente independentes. No entanto, como essa hipótese não é verdadeira para algoritmos no domínio transformado [29], a precisão dos resultados obtidos em [101] e [107] é significativamente comprometida (especialmente, na fase transitória). Já em [34], expressões de modelo para prever o EQME em regime permanente de alguns algoritmos (incluindo o TDLMS) foram derivadas; contudo, tais expressões não apresentam uma precisão satisfatória como também não foram adequadamente discutidas (veja [34, Fig. 11]). Por fim, visando contornar algumas das limitações observadas, outro modelo para o algoritmo TDLMS foi descrito em [30] e posteriormente aprimorado em [31]; entretanto, devido ao uso de certas aproximações durante o desenvolvimento desses modelos, as conclusões estabelecidas a partir das expressões obtidas não são

---

completamente coerentes com o comportamento do algoritmo no ambiente não estacionário considerado. Portanto, uma modelagem precisa do algoritmo TDLMS operando em um ambiente não estacionário associado a uma discussão dos resultados permanece ainda um problema de pesquisa em aberto.

Outro aspecto importante na modelagem do algoritmo TDLMS reside na determinação de valores esperados da seguinte forma:

$$E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)\hat{\mathbf{R}}(n)] \quad (4.1)$$

onde  $\hat{\mathbf{D}}(n)$  denota uma matriz de normalização diagonal [2] e  $\hat{\mathbf{R}}(n)$  representa uma estimativa da matriz de autocorrelação do sinal de entrada. Na literatura, diversas abordagens vêm sendo utilizadas para determinar analiticamente (4.1), cada uma delas tendo diferentes níveis de precisão [29]-[31], [100], [101], [105]-[107]. Em particular, os melhores resultados para sinais de entrada gaussianos correlacionados são obtidos em [31], no qual uma metodologia aproximada foi desenvolvida para computar as integrais hiperelípticas [56] surgidas no cálculo de tais valores esperados. É importante mencionar ainda que, em contraste com [101], [105] e [107], a metodologia apresentada em [31] não leva em consideração que o sinal de saída de cada ramo de transformação representa uma sequência de amostras estatisticamente independentes; consequentemente, soluções analíticas bastante precisas para calcular os valores esperados surgidos durante a derivação do modelo foram obtidas. Logo, visando assegurar a precisão do modelo, tais soluções são também utilizadas aqui.

Neste contexto, focando sobre a modelagem do algoritmo TDLMS operando em um ambiente não estacionário (isto é, considerando uma planta variante no tempo), tem-se aqui por objetivo:

- obter expressões de modelo descrevendo o comportamento médio do vetor de erro nos coeficientes transformados, a curva de aprendizagem e a matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes transformados;
- derivar expressões de modelo para o EQME em regime permanente, o desajuste, o passo de adaptação que leva ao EQME mínimo, o grau de não estacionaridade, como também uma relação entre o desajuste e o grau de não estacionaridade; e
- discutir como os parâmetros do algoritmo afetam o seu desempenho.

## 4.2 Revisitando o algoritmo TDLMS

A equação de adaptação do algoritmo TDLMS é dada por [2], [4], [21]

$$\tilde{\mathbf{w}}(n+1) = \tilde{\mathbf{w}}(n) + 2\mu \hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)e(n)\tilde{\mathbf{x}}(n) \quad (4.2)$$

onde  $\tilde{\mathbf{w}}(n) = [\tilde{w}_1(n) \ \tilde{w}_2(n) \ \cdots \ \tilde{w}_M(n)]^T$  denota o vetor de coeficientes no domínio transformado,  $\tilde{\mathbf{x}}(n) = \mathbf{T}\mathbf{x}(n) = [\tilde{x}_1(n) \ \tilde{x}_2(n) \ \cdots \ \tilde{x}_M(n)]^T$ , o vetor de entrada transformado,  $\mathbf{T}$ , uma matriz de transformação ortogonal real de dimensão  $M \times M$ ,  $e(n)$ , o sinal de erro, e  $\hat{\mathbf{D}}(n)$ , uma matriz diagonal de normalização cujos elementos são usualmente estimados através de

$$\hat{\sigma}_i^2(n) = \frac{1}{N} \tilde{\mathbf{x}}_i^T(n) \tilde{\mathbf{x}}_i(n) \quad (4.3)$$

com

$$\tilde{\mathbf{x}}_i(n) = [\tilde{x}_i(n) \ \tilde{x}_i(n-1) \ \cdots \ \tilde{x}_i(n-N+1)]^T \quad (4.4)$$

denotando um vetor de dimensão  $N$  (comprimento da janela de observação) contendo a saída do  $i$ -ésimo ramo de transformação (veja Figura 4.1). Vale destacar que, em implementações práticas, a variância do sinal de saída do  $i$ -ésimo ramo de transformação  $\hat{\sigma}_i^2(n)$  é comumente estimada através de

$$\hat{\sigma}_i^2(n) = \beta \hat{\sigma}_i^2(n-1) + (1-\beta) \tilde{x}_i^2(n) \quad (4.5)$$

com  $0 \ll \beta < 1$  [2], [3], [5]. Todavia, visto que o algoritmo exibe o mesmo comportamento seja considerando (4.3) ou (4.5), a primeira expressão é considerada aqui por simplicidade matemática.

Considerando o problema de identificação de sistema ilustrado na Figura 1.1 e assumindo que o filtro adaptativo e a planta têm a mesma ordem  $M$ , o sinal de erro pode agora ser expresso como

$$e(n) = d(n) - \tilde{\mathbf{w}}^T(n)\tilde{\mathbf{x}}(n) \quad (4.6)$$

com

$$\begin{aligned} d(n) &= \mathbf{w}_o^T(n)\mathbf{x}(n) + z(n) \\ &= \tilde{\mathbf{w}}_o^T(n)\tilde{\mathbf{x}}(n) + z(n) \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde  $\tilde{\mathbf{w}}_o(n) = \mathbf{T}\mathbf{w}_o(n)$  caracteriza o vetor de coeficientes da planta no domínio transformado e  $z(n)$ , o ruído de medição. Note que o sinal de saída do filtro adaptativo e o sinal de erro estão no domínio do tempo, embora  $\tilde{\mathbf{x}}(n)$ ,  $\tilde{\mathbf{w}}_o(n)$  e  $\tilde{\mathbf{w}}(n)$  estejam no domínio transformado [2].

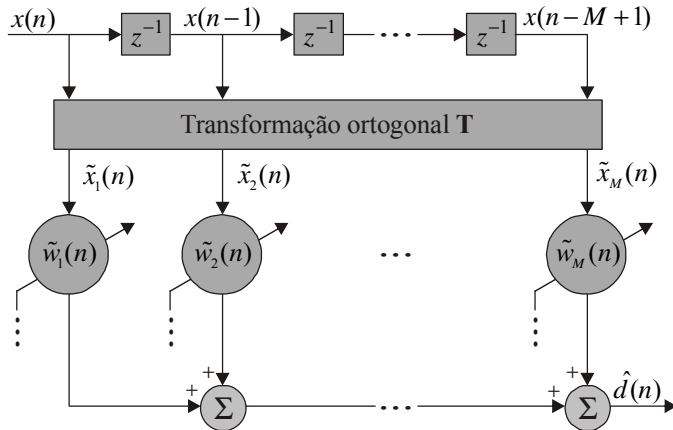


Figura 4.1. Diagrama de blocos de um filtro adaptativo operando no domínio transformado.

### 4.3 Modelo proposto

Nesta seção, focando sobre o algoritmo TDLMS, são derivadas expressões de modelo descrevendo o comportamento do algoritmo frente a um ambiente não estacionário (veja Seção 2.2.1). Primeiramente, são obtidas expressões de modelo descrevendo o comportamento médio do vetor de erro nos coeficientes transformados, a curva de aprendizagem e a matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes transformados. Em seguida, são também derivadas expressões de modelo para o EQME em regime permanente, o desajuste, o passo de adaptação que leva ao EQME mínimo, o grau de não estacionaridade bem como uma relação entre o grau de não estacionaridade e o desajuste. Para tal, as seguintes hipóteses simplificativas são consideradas:

- H1) O sinal de entrada é obtido a partir de um processo gaussiano estacionário de média zero, variância  $\sigma_x^2$  e matriz de autocorrelação  $\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]$  [4], [5].
- H2) O ruído de medição  $z(n)$  tem média nula e variância  $\sigma_z^2$ , sendo não correlacionado com qualquer outro sinal envolvido no processo, [2]-[5].

H3) O vetor de perturbação da planta  $\phi(n)$  é obtido a partir de um processo com média zero, variância  $\sigma_\phi^2$  e matriz de autocorrelação  $\mathbf{\Phi} = E[\phi(n)\phi^T(n)]$ , sendo ainda assumido não correlacionado com qualquer outro sinal no sistema. Além disso, considera-se que  $\phi(n)$  e  $\phi(m)$  são não correlacionados para  $n \neq m$  [2]-[5].

H4) Para uma condição de adaptação lenta (passo de adaptação pequeno),  $\tilde{\mathbf{w}}(n)$ ,  $\tilde{\mathbf{w}}_o(n)$  e  $\tilde{\mathbf{x}}(n)$  são estatisticamente independentes [4], [5].

Aqui, é importante destacar que essas hipóteses são válidas também para as variáveis transformadas correspondentes, isto é,  $\tilde{\mathbf{w}}(n)$ ,  $\tilde{\mathbf{w}}_o(n)$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}(n)$  e  $\tilde{\phi}(n)$ .

#### 4.3.1 Comportamento médio do vetor de erro nos coeficientes transformados

Uma expressão para prever o comportamento médio do vetor de erro nos coeficientes transformados pode ser determinada substituindo (4.7) em (4.6) e a expressão resultante em (4.2), usando (2.1) e definindo o vetor de erro nos coeficientes no domínio transformado como

$$\tilde{\mathbf{v}}(n) = \tilde{\mathbf{w}}(n) - \tilde{\mathbf{w}}_o(n). \quad (4.8)$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}(n+1) = & [\mathbf{I} - 2\mu\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)\tilde{\mathbf{x}}(n)\tilde{\mathbf{x}}^T(n)]\tilde{\mathbf{v}}(n) \\ & + 2\mu\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)\tilde{\mathbf{x}}(n)z(n) + (1-\alpha)\tilde{\mathbf{w}}_o(n) - \tilde{\phi}(n) \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde  $\mathbf{I}$  é uma matriz identidade de dimensão  $M \times M$  e  $\tilde{\phi}(n) = \mathbf{T}\phi(n)$  denota o vetor de perturbação da planta no domínio transformado. Então, tomando o valor esperado de ambos os lados de (4.9) e considerando as Hipóteses H2)-H4), tem-se

$$E[\tilde{\mathbf{v}}(n+1)] \cong (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{P})E[\tilde{\mathbf{v}}(n)] + (1-\alpha)E[\tilde{\mathbf{w}}_o(n)] \quad (4.10)$$

com

$$E[\tilde{\mathbf{w}}_o(n)] = \alpha^n \tilde{\mathbf{w}}_o(0) \quad (4.11)$$

e

$$\mathbf{P} = E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)\tilde{\mathbf{x}}(n)\tilde{\mathbf{x}}^T(n)]. \quad (4.12)$$

Agora, resta determinar uma solução analítica para (4.12), o que depende das características estatísticas do sinal de entrada. Considerando então sinais de entrada gaussianos reais e correlacionados (veja Hipótese H1), uma solução bastante precisa para calcular os elementos de  $\mathbf{P}$  é apresentada em [31], a qual é dada por (para detalhes, veja Apêndice C)

$$p(i, j) = N \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{H}_i \tilde{\mathbf{Q}}_i^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_{i,j} \quad (4.13)$$

onde  $\tilde{\mathbf{Q}}_i$  denota a matriz de autovetores surgida da autodecomposição de  $\tilde{\mathbf{R}}_i = E[\tilde{\mathbf{x}}_i(n)\tilde{\mathbf{x}}_i^T(n)]$ ,  $\tilde{\mathbf{q}}_i$ , um vetor contendo a primeira linha de  $\tilde{\mathbf{Q}}_i$ ,  $\tilde{\mathbf{r}}_{i,j} = E[\tilde{\mathbf{x}}_i(n)\tilde{x}_j(n)]$  representa um vetor de correlação cruzada entre  $\tilde{\mathbf{x}}_i(n)$  e  $\tilde{x}_j(n)$ , e  $\mathbf{H}_i$  é uma matriz diagonal cujos elementos são dados por

$$h_i(l, l) \equiv \frac{1}{2\lambda_{i,l}\sqrt{G_i}} \left[ \sum_{q=1}^{N/2} A_{i,l,q} \ln(\lambda'_{i,q}) + B_{i,l} \ln(\lambda_{i,l}) \right] \quad (4.14)$$

com

$$G_i = \prod_{k=1}^N \lambda_{i,k}, \quad (4.15)$$

$$A_{i,l,q} = \frac{(\lambda'_{i,q})^{N/2} \lambda_{i,l}}{\lambda'_{i,q} - \lambda_{i,l}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^{N/2} \frac{\lambda'_{i,j}}{\lambda'_{i,q} - \lambda'_{i,j}}, \quad (4.16)$$

e

$$B_{i,l} = \prod_{q=1}^{N/2} \frac{\lambda_{i,l} \lambda'_{i,q}}{\lambda_{i,l} - \lambda'_{i,q}} \quad (4.17)$$

onde

$$\lambda'_{i,q} = \sqrt{\lambda_{i,(2q-1)} \lambda_{i,(2q)}}, \quad q = 1, 2, \dots, N/2 \quad (4.18)$$

caracteriza a média geométrica de pares adjacentes de autovalores de  $\tilde{\mathbf{R}}_i$ .

Portanto, a partir da expressão de modelo (4.10), associado com (4.11) e a solução da matriz  $\mathbf{P}$  [dada por (4.13)-(4.18)], o comportamento médio do vetor de erro nos coeficientes transformados do algoritmo TDLMS pode ser predito tanto para um ambiente não estacionário quanto estacionário.

### 4.3.2 Curva de aprendizagem

Para o algoritmo TDLMS, uma expressão descrevendo a curva de aprendizagem pode ser obtida substituindo (4.7) em (4.6), usando (4.8), determinando  $e^2(n)$ , tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante e considerando as Hipóteses H2) e H4), o que resulta em [29]

$$J(n) = J_{\min} + J_{\text{ex}}(n) \quad (4.19)$$

com

$$\begin{aligned} J_{\min} &= E[z^2(n)] \\ &= \sigma_z^2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

caracterizando o EQM mínimo atingível em regime permanente e

$$\begin{aligned} J_{\text{ex}}(n) &= E\{[\tilde{\mathbf{v}}^T(n)\tilde{\mathbf{x}}(n)]^2\} \\ &= \text{tr}[\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{K}}(n)] \end{aligned} \quad (4.21)$$

o EQME, onde  $\tilde{\mathbf{R}} = E[\tilde{\mathbf{x}}(n)\tilde{\mathbf{x}}^T(n)]$  denota a matriz de autocorrelação do sinal de entrada no domínio transformado e

$$\tilde{\mathbf{K}}(n) = E[\tilde{\mathbf{v}}(n)\tilde{\mathbf{v}}^T(n)] \quad (4.22)$$

caracteriza a matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes transformados. Logo, a curva de aprendizagem do algoritmo TDLMS pode ser predita se a matriz  $\tilde{\mathbf{K}}(n)$  for conhecida.

### 4.3.3 Matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes transformados

Aqui, uma expressão recursiva descrevendo a evolução da matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes transformada  $\tilde{\mathbf{K}}(n)$  é obtida. Assim, determinando o produto externo de (4.9) [i.e.,  $\tilde{\mathbf{v}}(n)\tilde{\mathbf{v}}^T(n)$ ] e tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante, obtém-se



$$\begin{aligned}
 & E[\tilde{\mathbf{v}}(n+1)\tilde{\mathbf{v}}^T(n+1)] = \\
 & E[\tilde{\mathbf{v}}(n)\tilde{\mathbf{v}}^T(n)] + (1-\alpha)\mathbf{E}_1(n) - E[\tilde{\mathbf{v}}(n)\tilde{\boldsymbol{\phi}}^T(n)] + 2\mu E[\tilde{\mathbf{v}}(n)z(n)\tilde{\mathbf{x}}^T(n)\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)] \\
 & + (1-\alpha)\mathbf{E}_1^T(n) - 2\mu(1-\alpha)\mathbf{E}_2(n) - 2\mu(1-\alpha)\mathbf{E}_2^T(n) - 2\mu\mathbf{E}_3(n) - 2\mu\mathbf{E}_3^T(n) \\
 & + 4\mu^2\mathbf{E}_4(n) - 4\mu^2 E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)\tilde{\mathbf{x}}(n)\tilde{\mathbf{x}}^T(n)\tilde{\mathbf{v}}(n)z(n)\tilde{\mathbf{x}}^T(n)\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)] \\
 & + 2\mu E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)\tilde{\mathbf{x}}(n)\tilde{\mathbf{x}}^T(n)\tilde{\mathbf{v}}(n)\tilde{\boldsymbol{\phi}}^T(n)] - E[\tilde{\boldsymbol{\phi}}(n)\tilde{\mathbf{v}}^T(n)] \\
 & + 2\mu E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)\tilde{\mathbf{x}}(n)z(n)\tilde{\mathbf{v}}^T(n)] - (1-\alpha)E[\tilde{\boldsymbol{\phi}}(n)\tilde{\mathbf{w}}_0^T(n)] \\
 & - 4\mu^2 E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)\tilde{\mathbf{x}}(n)z(n)\tilde{\mathbf{v}}^T(n)\tilde{\mathbf{x}}(n)\tilde{\mathbf{x}}^T(n)\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)] + 4\mu^2\mathbf{E}_5(n) \\
 & + 2\mu(1-\alpha)E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)\tilde{\mathbf{x}}(n)z(n)\tilde{\mathbf{w}}_0^T(n)] - 2\mu E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)\tilde{\mathbf{x}}(n)z(n)\tilde{\boldsymbol{\phi}}^T(n)] \\
 & + 2\mu(1-\alpha)E[\tilde{\mathbf{w}}_0(n)z(n)\tilde{\mathbf{x}}^T(n)\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)] + (1-\alpha)^2 E[\tilde{\mathbf{w}}_0(n)\tilde{\mathbf{w}}_0^T(n)] \\
 & - (1-\alpha)E[\tilde{\mathbf{w}}_0(n)\tilde{\boldsymbol{\phi}}^T(n)] + 2\mu E[\tilde{\boldsymbol{\phi}}(n)\tilde{\mathbf{v}}^T(n)\tilde{\mathbf{x}}(n)\tilde{\mathbf{x}}^T(n)\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)] \\
 & - 2\mu E[z(n)\tilde{\boldsymbol{\phi}}(n)\tilde{\mathbf{x}}^T(n)\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)] + E[\tilde{\boldsymbol{\phi}}(n)\tilde{\boldsymbol{\phi}}^T(n)]
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

com

$$\mathbf{E}_1(n) = E[\tilde{\mathbf{v}}(n)\tilde{\mathbf{w}}_0^T(n)], \tag{4.24}$$

$$\mathbf{E}_2(n) = E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)\tilde{\mathbf{x}}(n)\tilde{\mathbf{x}}^T(n)\tilde{\mathbf{v}}(n)\tilde{\mathbf{w}}_0^T(n)], \tag{4.25}$$

$$\mathbf{E}_3(n) = E[\tilde{\mathbf{v}}(n)\tilde{\mathbf{v}}^T(n)\tilde{\mathbf{x}}(n)\tilde{\mathbf{x}}^T(n)\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)], \tag{4.26}$$

$$\mathbf{E}_4(n) = E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)\tilde{\mathbf{x}}(n)\tilde{\mathbf{x}}^T(n)\tilde{\mathbf{v}}(n)\tilde{\mathbf{v}}^T(n)\tilde{\mathbf{x}}(n)\tilde{\mathbf{x}}^T(n)\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)], \tag{4.27}$$

e

$$\mathbf{E}_5(n) = E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)\tilde{\mathbf{x}}(n)z^2(n)\tilde{\mathbf{x}}^T(n)\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)]. \tag{4.28}$$

Então, considerando as Hipóteses H2) e H3), todos os termos em (4.23) contendo  $z(n)$  e  $\tilde{\boldsymbol{\phi}}(n)$  são iguais a zero exceto aqueles envolvendo  $z^2(n)$  e  $E[\tilde{\boldsymbol{\phi}}(n)\tilde{\boldsymbol{\phi}}^T(n)]$ . Além disso, levando em conta a Hipótese H4), os termos não nulos restantes em (4.23) [isto é, (4.24)-(4.28)] podem ser reescritos como

$$\mathbf{E}_1(n) = \tilde{\mathbf{K}}'(n) - \tilde{\mathbf{K}}_0(n), \tag{4.29}$$

$$\mathbf{E}_2(n) \cong \mathbf{P}[\tilde{\mathbf{K}}'(n) - \tilde{\mathbf{K}}_0(n)], \tag{4.30}$$

$$\mathbf{E}_3(n) \cong \tilde{\mathbf{K}}(n)\mathbf{P}^T, \tag{4.31}$$

$$\mathbf{E}_4(n) \cong 2\mathbf{P}\tilde{\mathbf{K}}(n)\mathbf{P}^T + \text{Str}[\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{K}}(n)], \tag{4.32}$$

e

$$\mathbf{E}_5(n) = \mathbf{S} \sigma_z^2 \quad (4.33)$$

com

$$\tilde{\mathbf{K}}_o(n) = E[\tilde{\mathbf{w}}_o(n) \tilde{\mathbf{w}}_o^T(n)], \quad (4.34)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}'(n) = E[\tilde{\mathbf{w}}(n) \tilde{\mathbf{w}}_o^T(n)], \quad (4.35)$$

e

$$\mathbf{S} = E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n) \tilde{\mathbf{x}}(n) \tilde{\mathbf{x}}^T(n) \hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)]. \quad (4.36)$$

Portanto, a partir de (4.29)-(4.36), (4.23) reduz-se a

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}(n+1) = & \tilde{\mathbf{K}}(n) - 2\mu \tilde{\mathbf{K}}(n) \mathbf{P}^T - 2\mu \mathbf{P} \tilde{\mathbf{K}}(n) + 4\mu^2 \{2\mathbf{P} \tilde{\mathbf{K}}(n) \mathbf{P}^T + \text{Str}[\tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{K}}(n)]\} \\ & + 4\mu^2 \sigma_z^2 \mathbf{S} + (1-\alpha)[\tilde{\mathbf{K}}'(n) + \tilde{\mathbf{K}}'^T(n)] - 2\mu(1-\alpha) \mathbf{P}[\tilde{\mathbf{K}}'(n) - \tilde{\mathbf{K}}_o(n)] \\ & - 2\mu(1-\alpha)[\tilde{\mathbf{K}}'(n) - \tilde{\mathbf{K}}_o(n)]^T \mathbf{P}^T - (1-\alpha^2) \tilde{\mathbf{K}}_o(n) + \tilde{\Phi} \end{aligned} \quad (4.37)$$

com

$$\tilde{\Phi} = E[\tilde{\phi}(n) \tilde{\phi}^T(n)]. \quad (4.38)$$

Note agora que (4.37) depende do conhecimento das matrizes de correlação  $\tilde{\mathbf{K}}_o(n)$  [dada por (4.34)] e  $\tilde{\mathbf{K}}'(n)$  [dada por (4.35)], as quais são relacionadas ao ambiente não estacionário considerado. Por isso, é necessário determinar uma expressão auxiliar para computar recursivamente tais matrizes. Particularmente, uma expressão para a matriz de correlação da planta  $\tilde{\mathbf{K}}_o(n)$  pode ser obtida pré-multiplicando ambos os lados de (2.1) por  $\mathbf{T}$ , determinando o produto externo a partir da expressão resultante [isto é,  $\tilde{\mathbf{w}}_o(n) \tilde{\mathbf{w}}_o^T(n)$ ], tomando o valor esperado de ambos os lados e considerando a Hipótese H3). Dessa forma,

$$\tilde{\mathbf{K}}_o(n+1) = \alpha^2 \tilde{\mathbf{K}}_o(n) + \tilde{\Phi}. \quad (4.39)$$

Similarmente, uma expressão recursiva descrevendo  $\tilde{\mathbf{K}}'(n)$  pode ser obtida a partir de (2.1), (4.2), (4.6), (4.7) e da Hipótese H4) como

$$\tilde{\mathbf{K}}'(n+1) = \alpha(\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{P}) \tilde{\mathbf{K}}'(n) + 2\mu \alpha \mathbf{P} \tilde{\mathbf{K}}_o(n). \quad (4.40)$$

Ainda, faz-se necessário determinar uma solução para a matriz  $\mathbf{S}$  [dada em (4.36)]. Para isso, considera-se novamente os resultados apresentados em [31], onde uma solução bastante precisa para calcular os elementos da diagonal de  $\mathbf{S}$  é obtida como (para detalhes, veja Apêndice C)

$$s(i, i) = N^2 \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{U}_i \tilde{\mathbf{q}}_i \quad (4.41)$$

onde  $\tilde{\mathbf{q}}_i$  denota um vetor contendo a primeira linha de  $\tilde{\mathbf{Q}}_i$  e  $\mathbf{U}_i$  é uma matriz diagonal cujos elementos são

$$u_i(l, l) \cong \frac{-1}{4\sqrt{G_i}} \left\{ \sum_{q=1}^{N/2} \frac{A_{i,l,q}}{\lambda'_{i,q}} [1 + \ln(2\lambda'_{i,q})] + \frac{B_{i,l}}{\lambda_{i,l}} [1 + \ln(2\lambda_{i,l})] \right\} \quad (4.42)$$

com  $G_i$ ,  $A_{i,l,q}$ ,  $B_{i,l}$  e  $\lambda'_{i,q}$  dados por (4.15), (4.16), (4.17) e (4.18), respectivamente. Por sua vez, visando tornar a derivação matematicamente tratável e levando em conta que os elementos fora da diagonal de  $\mathbf{S}$  têm um impacto menos significativo na precisão da solução, os elementos fora da diagonal principal são computados usando o princípio da média (PM) [85], através de

$$s(i, j) \cong N^2 E \left[ \frac{1}{\tilde{\mathbf{x}}_i^T(n) \tilde{\mathbf{x}}_i(n)} \right] E[\tilde{x}_i(n) \tilde{x}_j(n)] E \left[ \frac{1}{\tilde{\mathbf{x}}_j^T(n) \tilde{\mathbf{x}}_j(n)} \right] \quad (4.43)$$

com  $E[\tilde{x}_i(n) \tilde{x}_j(n)]$  dado pelo  $(i, j)$ -ésimo elemento de  $\tilde{\mathbf{R}}$  e  $E\{[\tilde{\mathbf{x}}_i^T(n) \tilde{\mathbf{x}}_i(n)]^{-1}\}$  obtido como em [29]. Portanto, a matriz  $\mathbf{S}$  é computada aqui em uma forma mais precisa do que aquela apresentada em [29] (veja Seção 4.4.3).

Finalmente, levando em conta as soluções apresentadas para calcular  $\mathbf{P}$  [dada por (4.13)-(4.18)] e  $\mathbf{S}$  [dada por (4.41)-(4.43)], juntamente com as expressões de modelo (4.19), (4.37), (4.39) e (4.40), a curva de aprendizagem do algoritmo TDLMS é completamente caracterizada.

#### 4.3.4 EQME em regime permanente

Nesta seção, baseado no princípio de conservação de energia [5], uma expressão descrevendo o EQME em regime permanente  $J_{\text{ex}}(\infty)$  é derivada. Para tal, o EQME é primeiramente definido como [4], [5]

$$\begin{aligned} J_{\text{ex}}(n) &= E\{[e(n) - z(n)]^2\} \\ &= E\{[\tilde{\mathbf{v}}^T(n) \tilde{\mathbf{x}}(n)]^2\}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Dessa forma, o EQME em regime permanente pode ser obtido determinando o produto  $\tilde{\mathbf{v}}^T(n+1) \hat{\mathbf{D}}(n) \tilde{\mathbf{v}}(n+1)$  a partir de (4.9), tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante, fazendo  $n \rightarrow \infty$ , considerando (4.12), (4.20), (4.29), (4.44),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\tilde{\mathbf{v}}^T(n+1)\hat{\mathbf{D}}(n)\tilde{\mathbf{v}}(n+1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\tilde{\mathbf{v}}^T(n)\hat{\mathbf{D}}(n)\tilde{\mathbf{v}}(n)] \quad (4.45)$$

e as Hipóteses H2)-H4). Assim,

$$\begin{aligned} J_{\text{ex}}(\infty) &= \frac{1}{4\mu}(1-\alpha)\text{tr}\{E[\hat{\mathbf{D}}(\infty)][\tilde{\mathbf{K}}'(\infty) - \tilde{\mathbf{K}}_o(\infty)]\} \\ &+ \frac{1}{4\mu}(1-\alpha)\text{tr}\{E[\hat{\mathbf{D}}(\infty)][\tilde{\mathbf{K}}'(\infty) - \tilde{\mathbf{K}}_o(\infty)]^T\} \\ &+ \frac{1}{4\mu}(1-\alpha)^2 \text{tr}\{E[\hat{\mathbf{D}}(\infty)]\tilde{\mathbf{K}}_o(\infty)\} \\ &+ \frac{1}{4\mu} \text{tr}\{E[\hat{\mathbf{D}}(\infty)]\tilde{\Phi}\} + \mu J_{\min} \text{tr}(\mathbf{P}) + \mu E_6(\infty) \\ &- \frac{1}{2}(1-\alpha)\text{tr}\{\tilde{\mathbf{R}}[\tilde{\mathbf{K}}'(\infty) - \tilde{\mathbf{K}}_o(\infty)]\} \\ &- \frac{1}{2}(1-\alpha)\text{tr}\{\tilde{\mathbf{R}}[\tilde{\mathbf{K}}'(\infty) - \tilde{\mathbf{K}}_o(\infty)]^T\} \end{aligned} \quad (4.46)$$

com

$$E_6(\infty) = E[\tilde{\mathbf{x}}^T(\infty)\tilde{\mathbf{v}}(\infty)\tilde{\mathbf{v}}^T(\infty)\tilde{\mathbf{x}}(\infty)\tilde{\mathbf{x}}^T(\infty)\hat{\mathbf{D}}^{-1}(\infty)\tilde{\mathbf{x}}(\infty)]. \quad (4.47)$$

Então, notando que

$$\text{tr}\{E[\hat{\mathbf{D}}(\infty)][\tilde{\mathbf{K}}'(\infty) - \tilde{\mathbf{K}}_o(\infty)]\} = \text{tr}\{E[\hat{\mathbf{D}}(\infty)][\tilde{\mathbf{K}}'(\infty) - \tilde{\mathbf{K}}_o(\infty)]^T\} \quad (4.48)$$

e

$$\text{tr}\{\tilde{\mathbf{R}}[\tilde{\mathbf{K}}'(\infty) - \tilde{\mathbf{K}}_o(\infty)]\} = \text{tr}\{\tilde{\mathbf{R}}[\tilde{\mathbf{K}}'(\infty) - \tilde{\mathbf{K}}_o(\infty)]^T\} \quad (4.49)$$

(4.46) pode ser simplificada para

$$\begin{aligned} J_{\text{ex}}(\infty) &= \frac{1}{2\mu}(1-\alpha)\text{tr}\{E[\hat{\mathbf{D}}(\infty)][\tilde{\mathbf{K}}'(\infty) - \tilde{\mathbf{K}}_o(\infty)]\} \\ &+ \frac{1}{4\mu}(1-\alpha)^2 \text{tr}\{E[\hat{\mathbf{D}}(\infty)]\tilde{\mathbf{K}}_o(\infty)\} \\ &+ \frac{1}{4\mu} \text{tr}\{E[\hat{\mathbf{D}}(\infty)]\tilde{\Phi}\} + \mu J_{\min} \text{tr}(\mathbf{P}) \\ &+ \mu E_6(\infty) - (1-\alpha)\text{tr}\{\tilde{\mathbf{R}}[\tilde{\mathbf{K}}'(\infty) - \tilde{\mathbf{K}}_o(\infty)]\}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Agora, levando em conta que

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{K}}_0(\infty) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{K}}_0(n) \\ &= \frac{1}{1 - \alpha^2} \tilde{\Phi}\end{aligned}\quad (4.51)$$

e

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{K}}'(\infty) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{K}}'(n) \\ &= \frac{2\mu\alpha}{1 - \alpha^2} [(1 - \alpha)\mathbf{I} + 2\mu\alpha\mathbf{P}]^{-1} \mathbf{P}\tilde{\Phi}\end{aligned}\quad (4.52)$$

(4.50) reduz-se a

$$\begin{aligned}J_{\text{ex}}(\infty) &= \mu J_{\min} \text{tr}(\mathbf{P}) + \mu E_6(\infty) \\ &\quad + \frac{\text{tr}\left(\{\alpha E[\hat{\mathbf{D}}(\infty)] + (1 - \alpha)\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{P}^{-1}\}[(1 - \alpha)\mathbf{I} + 2\mu\alpha\mathbf{P}]^{-1} \mathbf{P}\tilde{\Phi}\right)}{1 + \alpha}.\end{aligned}\quad (4.53)$$

Finalmente, considerando

$$E_6(\infty) \cong \text{tr}(\mathbf{P})J_{\text{ex}}(\infty) \quad (4.54)$$

e

$$\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{P}^{-1} \cong E[\hat{\mathbf{D}}(\infty)] \quad (4.55)$$

o EQME em regime permanente é obtido como

$$J_{\text{ex}}(\infty) \cong \frac{\mu J_{\min} \text{tr}(\mathbf{P})}{1 - \mu \text{tr}(\mathbf{P})} + \frac{\text{tr}\{E[\hat{\mathbf{D}}(\infty)][(1 - \alpha)\mathbf{I} + 2\mu\alpha\mathbf{P}]^{-1} \mathbf{P}\tilde{\Phi}\}}{(1 + \alpha)[1 - \mu \text{tr}(\mathbf{P})]}.\quad (4.56)$$

#### 4.3.5 Desajuste

A partir de (2.44) e (4.56), uma expressão para o desajuste do algoritmo TDLMS é obtida como

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \quad (4.57)$$

com

$$\mathcal{M}_1 = \frac{\mu \text{tr}(\mathbf{P})}{1 - \mu \text{tr}(\mathbf{P})} \quad (4.58)$$

caracterizando a parcela do desajuste presente tanto em um ambiente estacionário quanto não estacionário e

$$\mathcal{M}_2 = \frac{\text{tr}\{E[\hat{\mathbf{D}}(\infty)][(1 - \alpha)\mathbf{I} + 2\mu\alpha\mathbf{P}]^{-1} \mathbf{P}\tilde{\Phi}\}}{J_{\min}(1 + \alpha)[1 - \mu \text{tr}(\mathbf{P})]} \quad (4.59)$$

denotando a parcela relacionada ao ambiente não estacionário considerado. (Note que, exceto para o caso particular de sinal de entrada não correlacionado<sup>1</sup>, o desajuste do algoritmo TDLMS é afetado pela escolha da matriz de transformação  $\mathbf{T}$ , já que  $E[\hat{\mathbf{D}}(\infty)]$ ,  $\mathbf{P}$  e  $\tilde{\Phi}$  são funções de variáveis no domínio transformado.)

De acordo com [2]-[5], a parcela  $\mathcal{M}_1$  [dada por (4.58)] é devida às flutuações no vetor de coeficientes do filtro (desajuste de estimação) enquanto a parcela  $\mathcal{M}_2$  [dada por (4.59)] é devida ao atraso no rastreamento do vetor de coeficientes da planta (desajuste de atraso). Dessa forma, visto que  $\mathcal{M}_2$  é igual à zero somente no caso de ambiente estacionário ( $\alpha=1$  e  $\tilde{\Phi}=\sigma_\phi^2\mathbf{I}$  com  $\sigma_\phi^2=0$ ), o desajuste  $\mathcal{M}$  [dado por (4.57)] atingido em um ambiente não estacionário é sempre maior do que aquele obtido em um ambiente estacionário. Além disso, observe a partir de (4.57)-(4.59) que, exceto pelo termo comum  $1-\mu\text{tr}(\mathbf{P})$ , a parcela  $\mathcal{M}_1$  é diretamente proporcional a  $\mu$  enquanto a parcela  $\mathcal{M}_2$  é inversamente proporcional a  $\mu$ , ratificando a existência de uma relação de compromisso entre essas duas parcelas que compõem o desajuste e o passo de adaptação.

A fim de tornar mais claro o impacto da velocidade de variação da planta sobre o desempenho do algoritmo adaptativo, a Figura 4.2 ilustra o comportamento das expressões de modelo (4.57)-(4.59) como função do parâmetro  $\alpha$  [Figura 4.2(a)] e  $\sigma_\phi^2$  [Figura 4.2(b)]. (Os valores dos demais parâmetros são os mesmos usados no Exemplo 1 da Seção 4.4.1, considerando uma SNR = 40 dB.) Observe a partir dessas figuras que o desajuste  $\mathcal{M}$  exibe uma característica convexa<sup>2</sup> com respeito a  $\mu$ ; conseqüentemente, existe um valor de passo de adaptação que leva ao desajuste mínimo. Particularmente, observe a partir da Figura 4.2(a) que, para  $\alpha$  próximo de 1, desajustes pequenos são alcançados com valores de passos de adaptação intermediários; por

---

<sup>1</sup> Para sinal de entrada não correlacionado, (4.57)-(4.59) podem ser simplificadas como 
$$\mathcal{M} \cong \frac{\mu M}{1 - \mu M} + \frac{\sigma_x^2 \text{tr}(\Phi)}{J_{\min}(1 - \mu M)(1 + \alpha)(1 - \alpha + 2\mu\alpha)}$$
;

conseqüentemente, neste caso particular, o desajuste não depende da matriz de transformação  $\mathbf{T}$  (para detalhes, veja [2, pp. 479-483]).

<sup>2</sup> Observando os resultados mostrados na Figura 4.3 em escala linear, é possível concluir que  $\mathcal{M}_1$  e  $\mathcal{M}_2$  são funções convexas com respeito a  $\mu$ ; logo, como a soma de funções convexas resulta em outra função convexa [108], tem-se que  $\mathcal{M}$  é também uma função convexa com respeito a  $\mu$  [veja (4.57)-(4.59)].

---

outro lado, conforme  $\alpha$  decresce, valores de desajuste pequenos são atingidos com passos de adaptação pequenos ( $\mu$  tendendo a zero). Ainda, verifica-se a partir da Figura 4.2(b) que, para valores de  $\alpha$  próximos de 1, passos de adaptação intermediários são requeridos para alcançar o desajuste mínimo frente a uma ampla faixa de valores de  $\sigma_\phi^2$ ; tal característica gradualmente desaparece conforme  $\sigma_\phi^2$  decresce.

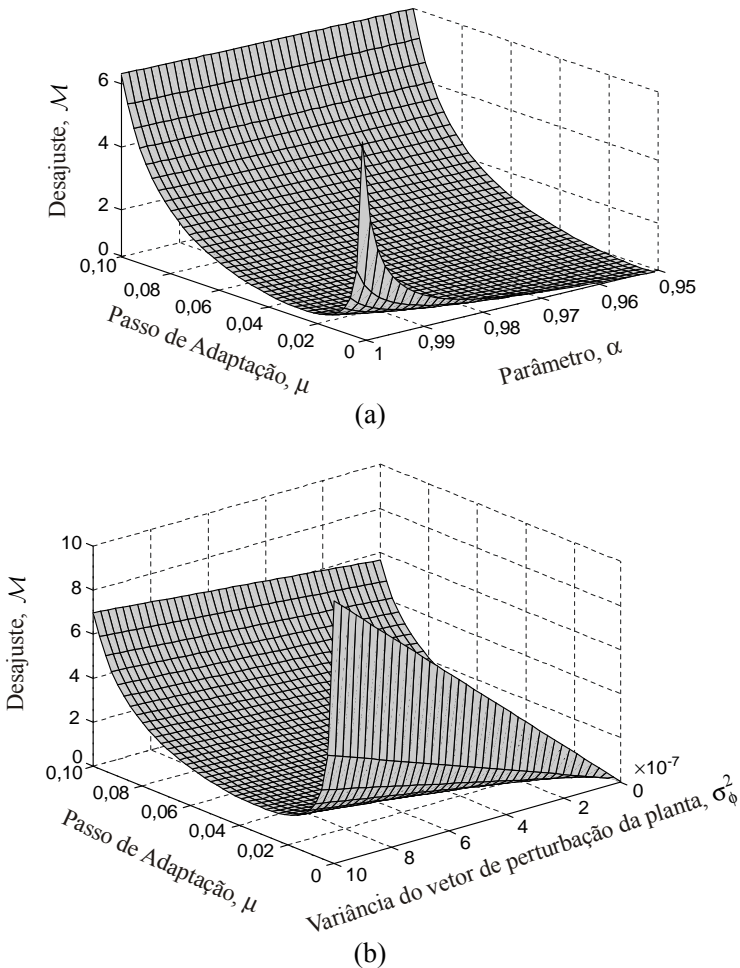


Figura 4.2. Superfície de desajuste obtida [através de (4.57)-(4.59)] considerando (a)  $\alpha$  variável e  $\sigma_\phi^2 = 5 \times 10^{-7}$ , e (b)  $\alpha = 0,999$  e  $\sigma_\phi^2$  variável.

Para mais detalhes sobre o comportamento do desajuste, a Figura 4.3 ilustra curvas separadas de (4.57), (4.58) e (4.59) para  $\sigma_{\phi}^2 = 5 \times 10^{-7}$  [Figura 4.3(a)] e  $\sigma_{\phi}^2 = 10^{-5}$  [Figura 4.3(b)] com  $\alpha = 0,999$ . A partir da Figura 4.3(a), verifica-se que a parcela  $\mathcal{M}_1$  é uma função (convexa) crescente de  $\mu$  e, conseqüentemente, valores de desajuste pequenos são alcançados com passos de adaptação pequenos; por outro lado, devido à característica da parcela  $\mathcal{M}_2$ , passos de adaptação pequenos levam a valores de desajuste grandes. Portanto, sob certas condições, é importante considerar um passo de adaptação intermediário  $\mu_{me}$  que satisfaz a essa relação de compromisso entre as parcelas  $\mathcal{M}_1$  e  $\mathcal{M}_2$ , o qual leva então ao desajuste mínimo [veja Figura 4.3(a)]. Por sua vez, para plantas que apresentam variações rápidas (obtidas aumentando  $\sigma_{\phi}^2$ ), observe a partir da Figura 4.3(b) que o desajuste  $\mathcal{M}$  é dominado pela parcela  $\mathcal{M}_2$  (desajuste de atraso). Dessa forma, visto que a parcela  $\mathcal{M}_2$  é uma função convexa com respeito a  $\mu$ , um valor de passo de adaptação  $\mu_{\mathcal{M}_2}$  que leva ao desajuste mínimo pode também ser determinado para essa condição [veja Figura 4.3(b)]. Note ainda que, como o desajuste  $\mathcal{M}$  varia pouco para uma faixa considerável de valores de  $\mu$ , existe (em ambas as condições) certa robustez quanto à escolha do valor do passo de adaptação que leva ao desajuste mínimo [veja Figura 4.3].

#### 4.3.6 Passo de adaptação que leva ao EQME mínimo

Visto que o desajuste (equivalentemente, o EQME em regime permanente) é uma função convexa com respeito a  $\mu$ , uma expressão aproximada para o passo de adaptação que minimiza  $J_{ex}(\infty)$  é derivada aqui. Para tal, levando em conta que valores de passo de adaptação intermediários são requeridos especialmente para valores de  $\alpha$  muito próximos de 1 [veja Figura 4.2(a)], a expressão (4.56) é primeiramente reescrita como

$$J_{ex}(\infty) \cong \frac{\mu J_{\min} \text{tr}(\mathbf{P})}{1 - \mu \text{tr}(\mathbf{P})} + \frac{\text{tr}\{E[\hat{\mathbf{D}}(\infty)]\tilde{\Phi}\}}{4\mu[1 - \mu \text{tr}(\mathbf{P})]}. \quad (4.60)$$

Então, derivando (4.60) com respeito a  $\mu$

$$\frac{\partial J_{ex}(\infty)}{\partial \mu} = \frac{J_{\min} \text{tr}(\mathbf{P})}{[1 - \mu \text{tr}(\mathbf{P})]^2} - \frac{[1 - 2\mu \text{tr}(\mathbf{P})] \text{tr}\{E[\hat{\mathbf{D}}(\infty)]\tilde{\Phi}\}}{4\mu^2 [1 - \mu \text{tr}(\mathbf{P})]^2} \quad (4.61)$$

igualando a expressão resultante a zero e resolvendo para  $\mu = \mu_{me}$ ,



obtem-se

$$\mu_{me} = \frac{\text{tr}\{E[\hat{\mathbf{D}}(\infty)]\tilde{\Phi}\}}{4J_{\min}} \left( \sqrt{1 + \frac{4J_{\min}}{\text{tr}\{E[\hat{\mathbf{D}}(\infty)]\tilde{\Phi}\}\text{tr}(\mathbf{P})}} - 1 \right). \quad (4.62)$$

Note que, para  $\tilde{\Phi} = \sigma_{\phi}^2 \mathbf{I}$ , (4.62) reduz-se a

$$\mu_{me} = \frac{M\sigma_x^2\sigma_{\phi}^2}{4J_{\min}} \left( \sqrt{1 + \frac{4J_{\min}}{M\sigma_x^2\sigma_{\phi}^2\text{tr}(\mathbf{P})}} - 1 \right). \quad (4.63)$$

Visando evidenciar o efeito do parâmetro  $\sigma_{\phi}^2$  em (4.63), a Figura 4.4 mostra o passo de adaptação que leva ao EQME em regime permanente (desajuste) mínimo  $\mu_{me}$  como função de  $\sigma_{\phi}^2$ . A partir dessa figura, verifica-se que (4.63) é uma função crescente de  $\sigma_{\phi}^2$ , apresentando saturação para valores de  $\sigma_{\phi}^2$  tanto muito baixos quanto muito altos. Tal comportamento pode ser interpretado da seguinte maneira: primeiramente, para valores de  $\sigma_{\phi}^2$  muito baixos, a planta é aproximadamente estacionária, implicando que  $\mu_{me}$  tende a zero; por sua vez, conforme  $\sigma_{\phi}^2$  aumenta, as variações da planta se tornam mais rápidas e, conseqüentemente, (4.63) leva a valores de  $\mu_{me}$  maiores. Em outras palavras, para plantas que sofrem variações lentas (valores de  $\sigma_{\phi}^2$  baixos), valores de passo de adaptação pequenos devem ser considerados para obter o desajuste mínimo. Por outro lado, para plantas que experimentam variações rápidas (valores de  $\sigma_{\phi}^2$  altos), valores de passo de adaptação maiores são requeridos para que o algoritmo possa rastrear adequadamente a planta com um desajuste mínimo. Particularmente, para plantas que sofrem variações muito rápidas (valores de  $\sigma_{\phi}^2$  elevados), o desajuste  $\mathcal{M}$  é dominado pela parcela  $\mathcal{M}_2$  [veja Figura 4.3(b)]. Nessa condição, o passo de adaptação que leva ao desajuste (EQME em regime permanente) mínimo pode ser obtido a partir de

$$\frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial \mu} = \frac{\text{tr}\{E[\hat{\mathbf{D}}(\infty)]\tilde{\Phi}\}[2\mu\text{tr}(\mathbf{P}) - 1]}{4J_{\min}[\mu - \mu^2\text{tr}(\mathbf{P})]^2} \quad (4.64)$$

o que resulta em uma expressão para o valor do passo de adaptação que depende somente das características estatísticas do sinal de entrada, isto é,

$$\mu_{\mathcal{M}_2} = \frac{1}{2\text{tr}(\mathbf{P})}. \quad (4.65)$$

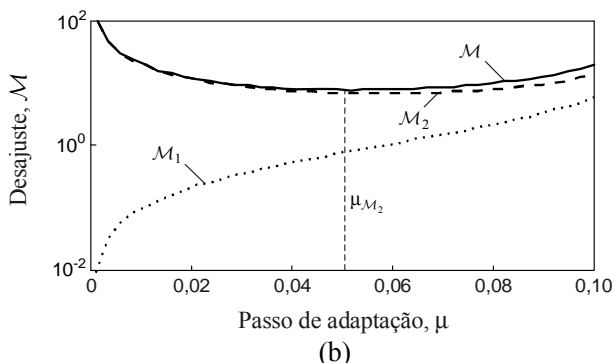
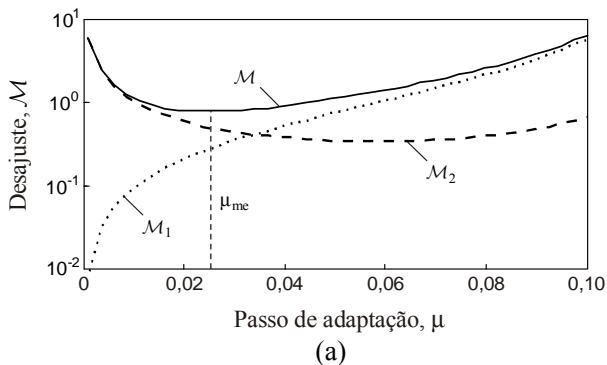


Figura 4.3. Curvas individuais de desajuste obtidas a partir de (4.57), (4.58) e (4.59) com  $\alpha = 0,999$  para (a)  $\sigma_{\phi}^2 = 5 \times 10^{-7}$  e (b)  $\sigma_{\phi}^2 = 10^{-5}$ .

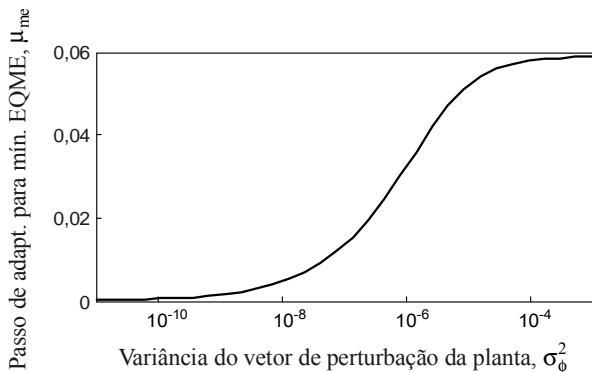


Figura 4.4. Passo de adaptação que leva ao EQME em regime permanente mínimo [dado por (4.63)] obtido considerando  $\sigma_{\phi}^2$  variável e  $\alpha = 0,999$ .

### 4.3.7 Grau de não estacionaridade

Agora, visando clarificar os conceitos de variação rápida e lenta do vetor de coeficientes da planta, uma expressão para o grau de não estacionaridade é derivada. Essa métrica é formalmente definida como [3]-[5]

$$\psi(n) = \sqrt{\frac{E[y_{o,inc}^2(n)]}{E[z^2(n)]}} \quad (4.66)$$

onde

$$y_{o,inc}(n) = [\tilde{\mathbf{w}}_o(n+1) - \tilde{\mathbf{w}}_o(n)]^T \tilde{\mathbf{x}}(n) \quad (4.67)$$

representa a variação incremental da saída da planta. Note que o numerador de (4.66) caracteriza a potência média introduzida pela variação da planta enquanto o denominador, o EQM mínimo [3].

Com respeito ao numerador de (4.66), pré-multiplicando ambos os lados de (2.1) por  $\mathbf{T}$ , substituindo a expressão resultante em (4.67) e considerando as Hipóteses H3) e H4), obtém-se

$$E[y_{o,inc}^2(n)] = \alpha^{2n} (1-\alpha)^2 \text{tr}[\tilde{\mathbf{K}}_o(0)\tilde{\mathbf{R}}] + \frac{2 - \alpha^{2n}(1-\alpha)}{1+\alpha} \text{tr}(\tilde{\Phi}\tilde{\mathbf{R}}). \quad (4.68)$$

Então, substituindo (4.68) em (4.66) e utilizando (4.20), o grau de não estacionaridade pode ser escrito como

$$\psi(n) = \left\{ \frac{\alpha^{2n}(1-\alpha)^2}{J_{\min}} \text{tr}[\tilde{\mathbf{K}}_o(0)\tilde{\mathbf{R}}] + \frac{2 - \alpha^{2n}(1-\alpha)}{J_{\min}(1+\alpha)} \text{tr}(\tilde{\Phi}\tilde{\mathbf{R}}) \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (4.69)$$

A partir de (4.69), verifica-se que o grau de não estacionaridade  $\psi(n)$  apresenta as seguintes características:

- a) Evolução exponencial, iniciando com o valor máximo

$$\psi(0) = \left\{ \frac{(1-\alpha)^2 \text{tr}[\tilde{\mathbf{K}}_o(0)\tilde{\mathbf{R}}] + \text{tr}(\tilde{\Phi}\tilde{\mathbf{R}})}{J_{\min}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.70)$$

e aproximando de

$$\psi(\infty) = \left[ \frac{2}{(1+\alpha)J_{\min}} \text{tr}(\tilde{\Phi}\tilde{\mathbf{R}}) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.71)$$

conforme  $n \rightarrow \infty$ .

- b) O grau de não estacionaridade  $\psi(n)$  é maior para  $\alpha < 1$  do que para  $\alpha = 1$ .
- c) Para  $\alpha = 1$ , (4.70) e (4.71) podem ser simplificadas para

$$\begin{aligned} \psi(n)|_{\alpha=1} &= \psi(0) \\ &= \psi(\infty) \\ &= \sqrt{\frac{\text{tr}(\tilde{\Phi}\tilde{\mathbf{R}})}{J_{\min}}} \end{aligned} \quad (4.72)$$

sendo esse um resultado comumente encontrado na literatura [3]-[5].

#### 4.3.8 Relação entre o desajuste e o grau de não estacionaridade

Aqui, uma expressão relacionando o grau de não estacionaridade  $\psi(n)$  e o desajuste  $\mathcal{M}$  é estabelecida a fim de fornecer *insights* sobre as condições nas quais o filtro adaptativo é capaz de rastrear adequadamente o vetor de coeficientes da planta. Para tal, usando (2.1) e considerando a Hipótese H3), (4.44) é primeiro reescrita como

$$J_{\text{ex}}(n) = E\{\tilde{\mathbf{x}}^T(n)\tilde{\mathbf{w}}(n) - \alpha\tilde{\mathbf{x}}^T(n)\tilde{\mathbf{w}}_o(n-1)\}^2 + \text{tr}(\tilde{\Phi}\tilde{\mathbf{R}}). \quad (4.73)$$

Similarmente, uma segunda relação é escrita [a partir de (4.44)] como

$$\alpha^2 J_{\text{ex}}(n) = E\{\alpha\tilde{\mathbf{x}}^T(n)\tilde{\mathbf{w}}(n) - \tilde{\mathbf{x}}^T(n)\tilde{\mathbf{w}}_o(n+1)\}^2 + \text{tr}(\tilde{\Phi}\tilde{\mathbf{R}}). \quad (4.74)$$

Então, manipulando (4.73) e (4.74), obtém-se

$$\begin{aligned} J_{\text{ex}}(n) &= \frac{1}{1+\alpha^2} \left[ E\left(\{\tilde{\mathbf{x}}^T(n)[\tilde{\mathbf{w}}(n) - \alpha\tilde{\mathbf{w}}_o(n-1)]\}^2\right) \right. \\ &\quad \left. + E\left(\{\tilde{\mathbf{x}}^T(n)[\alpha\tilde{\mathbf{w}}(n) - \tilde{\mathbf{w}}_o(n+1)]\}^2\right) + 2\text{tr}(\tilde{\Phi}\tilde{\mathbf{R}}) \right]. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Dessa forma, a seguinte desigualdade pode ser estabelecida:

$$J_{\text{ex}}(n) \geq \frac{2}{1+\alpha^2} \text{tr}(\tilde{\Phi}\tilde{\mathbf{R}}) \geq \frac{2}{1+\alpha} \text{tr}(\tilde{\Phi}\tilde{\mathbf{R}}). \quad (4.76)$$

Finalmente, dividindo ambos os lados de (4.76) por  $J_{\min}$ , isto é,

$$\frac{J_{\text{ex}}(n)}{J_{\min}} \geq \frac{2}{(1+\alpha)J_{\min}} \text{tr}(\tilde{\Phi}\tilde{\mathbf{R}}) \quad (4.77)$$

e considerando (2.44) e (4.71), tem-se que

$$\mathcal{M} \geq \psi^2(\infty). \quad (4.78)$$

A partir dessa desigualdade, as seguintes características podem ser observadas [3]-[5]:

- a) Se  $\psi(\infty) \gg 1$ , as variações da planta são muito rápidas para que o filtro seja capaz de rastrear, levando a um desajuste maior.
- b) Se  $\psi(\infty) \ll 1$ , o filtro adaptativo será geralmente capaz de rastrear as variações da planta, resultando em um desajuste pequeno.

Portanto, conclui-se que a condição  $\psi(\infty) \ll 1$  deve ser satisfeita para que o algoritmo possa rastrear as variações da planta com um desajuste pequeno.

#### 4.4 Resultados de simulação

Nesta seção, visando avaliar a precisão do modelo proposto, quatro exemplos são apresentados considerando um problema de identificação de sistema (veja Figura 1.1). Nesses exemplos, os resultados obtidos por simulações de MC (média de 200 realizações independentes) são comparados com o comportamento previsto pelo modelo proposto. Exceto quando estabelecido o contrário, é usado em tais exemplos um sinal de entrada  $x(n)$  gaussiano de média zero e variância unitária obtido através de um processo AR(2) [dado em (2.56)] com  $a_1 = -0,18$  e  $a_2 = 0,85$ , o que resulta em uma dispersão de autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada de  $\chi = 45,9$  para  $M = 8$ . (Note que o modelo depende do conhecimento da matriz de autocorrelação do sinal de entrada; logo, uma vez que tal matriz seja conhecida, o comportamento do algoritmo pode ser adequadamente previsto através do modelo proposto.) Aqui, a transformação ortogonal  $\mathbf{T}$  utilizada para reduzir o nível de correlação do sinal de entrada é a DCT (*discrete cosine transform*)<sup>3</sup>, visto que ela aproxima muito bem a KLT (*Karhunen-Loève transform*) [4].

Nas simulações, exceto quando estabelecido o contrário, são considerados valores de SNR = 40 dB e 60 dB. O vetor de coeficientes da planta é obtido como

---

<sup>3</sup> Embora a DCT tenha sido considerada nos resultados de simulação apresentados aqui, qualquer matriz de transformação ortogonal  $\mathbf{T}$  de dimensão  $M \times M$  com coeficientes reais pode ser utilizada no lugar.

---

$$\mathbf{w}_o(0) = \frac{\mathbf{w}_{aux}}{\sqrt{\mathbf{w}_{aux}^T \mathbf{w}_{aux}}} \quad (4.79)$$

com  $\mathbf{w}_{aux} = [\text{sinc}(0) \text{ sinc}(1/M) \cdots \text{sinc}(M-1/M)]^T$  denotando um vetor contendo as amostras de uma função *sinc*. Os coeficientes do filtro adaptativo são inicializados de maneiras diferentes, a saber [3]:

- a)  $\tilde{\mathbf{w}}(0) = \mathbf{T}\mathbf{w}_o(0)$ , visando avaliar o comportamento de rastreamento em um ambiente não estacionário; e
- b)  $\tilde{\mathbf{w}}(0) = \mathbf{0}$ , a fim de avaliar o comportamento do algoritmo durante a fase de aquisição em um ambiente estacionário.

#### 4.4.1 Avaliação do modelo proposto

Na sequência, são apresentados quatro exemplos visando verificar a precisão do modelo proposto frente a diferentes condições de operação.

##### 4.4.1.1 Exemplo 1

Aqui, o modelo proposto é avaliado em um ambiente não estacionário visando verificar a precisão das expressões de modelo descrevendo o comportamento médio do vetor de erro nos coeficientes transformados (4.10) e a curva de aprendizagem (4.19). Para tal, os seguintes valores de parâmetros são utilizados:  $M = 8$ ,  $N = 8$  e  $\mu = 0,1$ ,  $\mu_{me} = 0,00257$ . Além disso, para obter a planta variante no tempo, considera-se em (2.1) que  $\alpha = 0,999$  e que os elementos do vetor de perturbação da planta  $\phi(n)$  consistem de amostras tomadas de um processo gaussiano branco com matriz de autocorrelação  $\Phi = \sigma_\phi^2 \mathbf{I}$ , sendo  $\sigma_\phi^2$  ajustado de modo que  $\psi(\infty) = 0,2$  para cada valor de SNR considerado.

Para este cenário de operação, a Figura 4.5 mostra curvas ilustrando o comportamento médio do vetor de erro nos coeficientes transformados de apenas quatro coeficientes (a fim de facilitar a visualização). Especificamente, as Figuras 4.5(a) e (b) ilustram o caso de SNR = 40 dB e 60 dB, respectivamente. Por sua vez, a Figura 4.6 mostra as curvas de aprendizagem obtidas com ambos os valores de SNR. A partir de tais figuras, um casamento muito bom entre as simulações de MC e o modelo proposto pode ser verificado tanto para a fase transitória quanto em regime permanente.

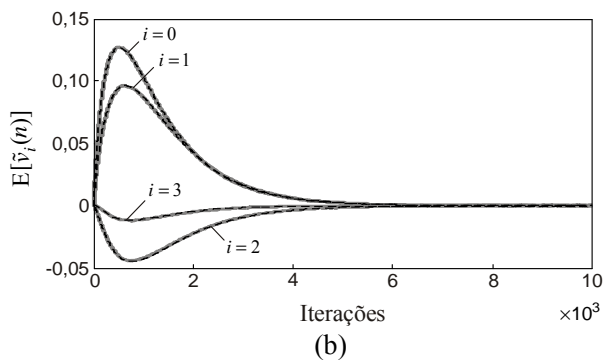
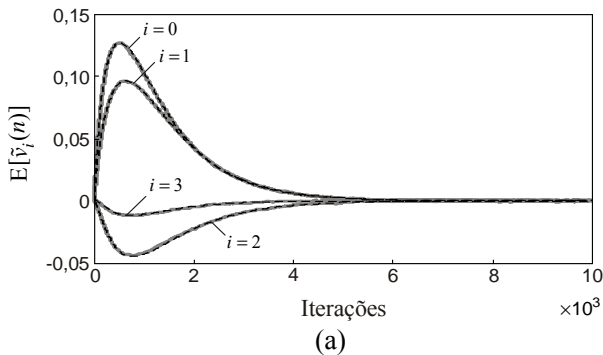


Figura 4.5. Exemplo 1. Comportamento médio do vetor de erro nos coeficientes transformados obtido por simulações de MC (linhas cinza) e através do modelo proposto (linhas escuras tracejadas). (a) SNR = 40 dB. (b) SNR = 60 dB.

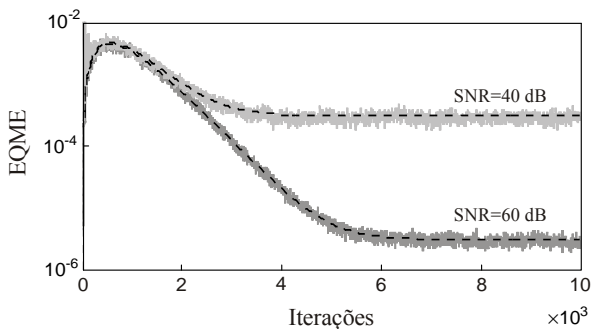


Figura 4.6. Exemplo 1. Curvas de aprendizagem (EQME) obtidas por simulações de MC (linhas cinza irregulares) e através do modelo proposto (linhas escuras tracejadas).

#### 4.4.1.2 Exemplo 2

Considerando ainda um ambiente não estacionário, a precisão do modelo proposto é avaliada aqui para filtros com diferentes comprimentos como também frente a valores distintos de dispersão de autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada. Para tal, são agora considerados filtros com  $M=32$  e  $M=64$  coeficientes para  $N=16$  e  $N=32$ , respectivamente. Em particular para esse cenário de operação, as dispersões de autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada são  $\chi=581,13$  para  $M=32$  e  $\chi=941,17$  para  $M=64$ , ambas obtidas fazendo  $a_1=-0,18$  e  $a_2=0,95$  em (2.56). Visando assegurar a estabilidade do algoritmo, o passo de adaptação é agora  $\mu=0,000257$ , sendo os valores dos demais parâmetros os mesmos usados no Exemplo 1.

Os resultados obtidos para este cenário de operação são apresentados na Figura 4.7. A partir de tal figura, verifica-se um casamento muito bom entre as simulações de MC e os resultados preditos pelo modelo proposto para os filtros de maior comprimento considerados. Além disso, constata-se que o modelo proposto exibe uma precisão muito boa mesmo para valores elevados de dispersões de autovalores, ratificando assim a precisão da metodologia utilizada para computar as matrizes **P** e **S**. Observa-se ainda que tal precisão independente do valor de SNR considerado.

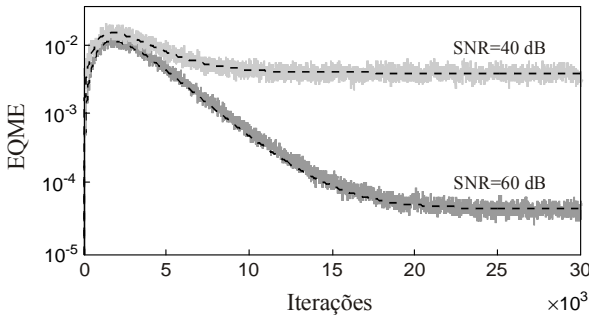
#### 4.4.1.3 Exemplo 3

Agora, a precisão das expressões de modelo descrevendo o EQME em regime permanente é verificada em um ambiente não estacionário para valores distintos de passo de adaptação. Para tal, resultados preditos a partir da expressão de modelo (4.56) são comparados com aqueles obtidos por simulações de MC, tomando a média dos 100 últimos valores de EQME em regime permanente [5, pp. 250]. Particularmente para esse exemplo, três valores diferentes para a variância do vetor de perturbação da planta são utilizados, i.e.,  $\sigma_\phi^2=5\times 10^{-6}$ ,  $\sigma_\phi^2=5\times 10^{-8}$  e  $\sigma_\phi^2=5\times 10^{-10}$ . Os valores dos demais parâmetros são os mesmos considerados no Exemplo 1.

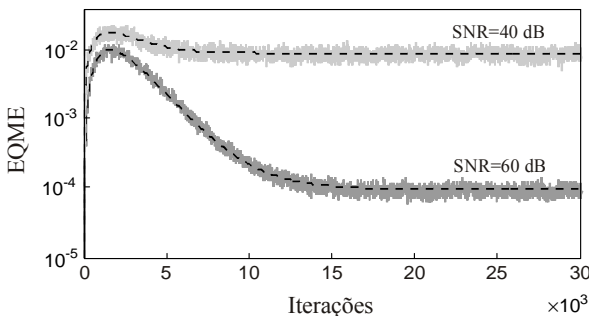
A Figura 4.8 ilustra o EQME em regime permanente como função de  $\mu$  para este cenário de operação. A partir dessa figura, verifica-se que a expressão de modelo (4.56) prediz muito bem o EQME



em regime permanente, independentemente do valor de SNR e  $\sigma_\phi^2$  considerado. Ainda, observe a partir das Figuras 4.8(a) e (d) que plantas que variam rapidamente (obtidas aumentando  $\sigma_\phi^2$ ) levam a valores de EQME em regime permanente elevados, devido principalmente ao erro de atraso no rastreamento da planta. Por outro lado, plantas variando lentamente (obtidas reduzindo  $\sigma_\phi^2$ ) levam a valores de EQME em regime permanente menores [veja Figuras 4.8(e) e (f)]. Especificamente nas Figuras 4.8(b) e (f), constata-se que existe (sob certas condições) um valor de passo de adaptação intermediário que leva ao EQME em regime permanente mínimo, corroborando a discussão apresentada nas Seções 4.3.5 e 4.3.6.

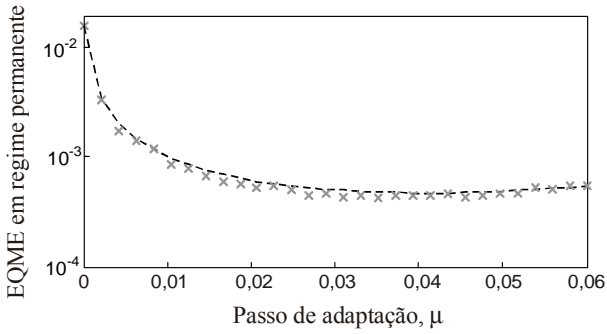


(a)

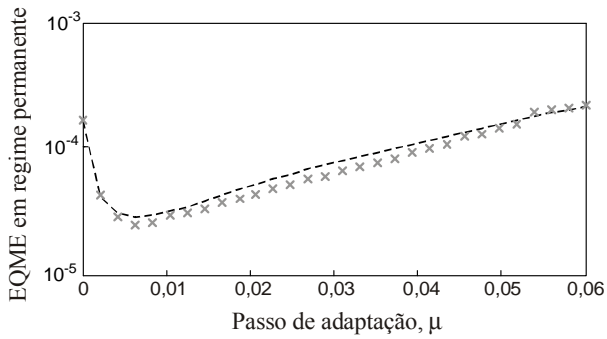


(b)

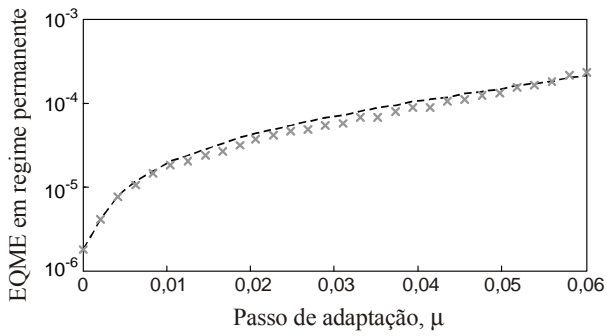
Figura 4.7. Exemplo 2. Curvas de aprendizagem (EQME) obtidas por simulações de MC (linhas cinza irregulares) e através do modelo proposto (linhas escuras tracejadas). (a)  $\chi = 581,13$  para  $M = 32$  e  $N = 16$ . (b)  $\chi = 941,17$  para  $M = 64$  e  $N = 32$ .



(a)



(b)



(c)

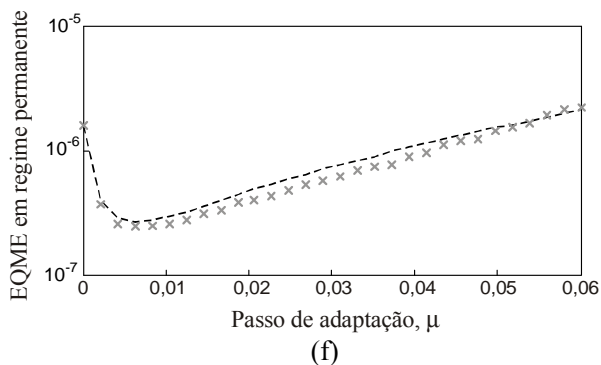
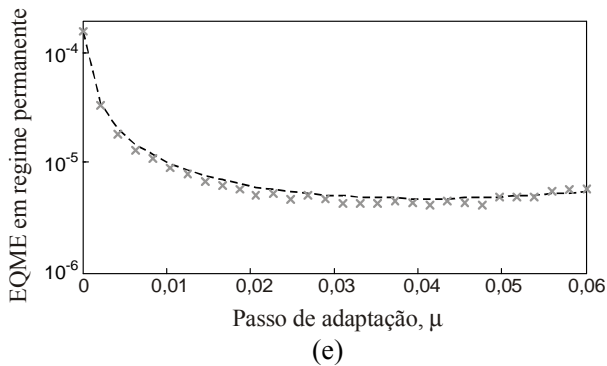
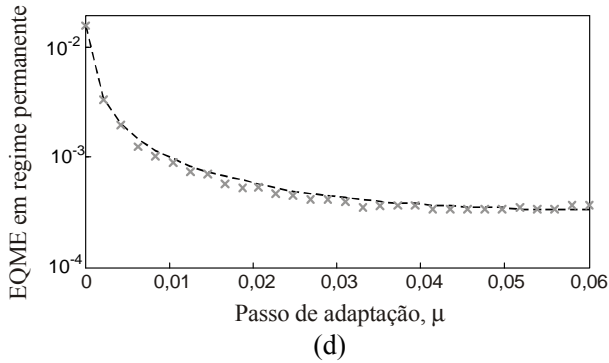


Figura 4.8. Exemplo 3. Curvas de EQME em regime permanente obtidas por simulações de MC (×) e através do modelo proposto (linhas escuras tracejadas) para (a)-(c) SNR = 40 dB e (d)-(f) SNR = 60 dB. (a) e (d)  $\sigma_{\phi}^2 = 5 \times 10^{-6}$ . (b) e (e)  $\sigma_{\phi}^2 = 5 \times 10^{-8}$ . (c) e (f)  $\sigma_{\phi}^2 = 5 \times 10^{-10}$ .

#### 4.4.1.4 Exemplo 4

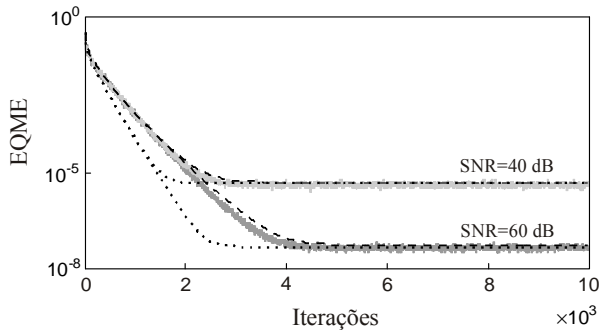
Este exemplo tem três objetivos principais, a saber: i) avaliar a precisão do modelo proposto (via curva de aprendizagem) em um ambiente estacionário ( $\alpha = 1$  e  $\sigma_{\phi}^2 = 0$ ); ii) verificar o impacto do valor de  $N$  sobre a precisão do modelo; e iii) comparar o modelo proposto com aquele apresentado em [29], o qual foi derivado exclusivamente utilizando o PM. Para tal, dois valores de  $N$  são usados, i.e.,  $N = 8$  e  $N = 64$ , enquanto os valores de  $M$  e  $\mu$  são os mesmos usados no Exemplo 1.

Os resultados obtidos para este cenário de operação são mostrados na Figura 4.9. Observe que o modelo dado em [29] não prediz adequadamente o comportamento do algoritmo durante a fase transitória para valores pequenos de  $N$  [veja Figura 4.9(a)]; na prática, resultados satisfatórios são obtidos para  $N > 30$ . Por outro lado, o modelo proposto exibe uma precisão muito boa tanto na fase transitória quanto em regime permanente, independente do valor de  $N$  considerado. Adicionalmente, observe a partir de tais figuras que o EQME em regime permanente é menor do que aquele alcançado em um ambiente não estacionário (veja Figura 4.9), ratificando assim a discussão realizada na Seção 4.3.5.

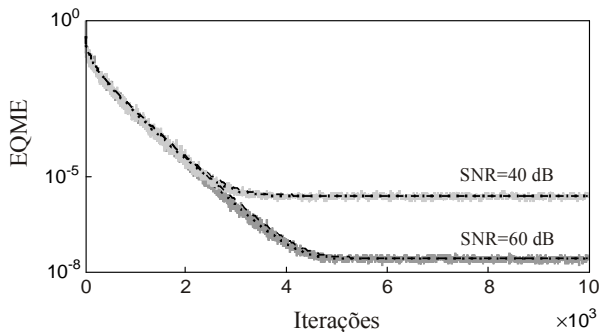
#### 4.4.2 Validação das aproximações $\mathbf{E}_2(n)$ - $\mathbf{E}_4(n)$

Neste seção, busca-se verificar a validade das aproximações (4.30)-(4.32) através de resultados de simulação. Para tal, é considerado o cenário descrito no Exemplo 1 para o caso de  $\text{SNR} = 40$  dB com  $N = 8$  e  $N = 64$ . Os resultados obtidos são apresentados nas Figuras 4.10, 4.11 e 4.12; em particular, a Figura 4.10 ilustra a precisão dos primeiros quatro elementos da diagonal principal de (4.30) tanto para  $N = 8$  quanto  $N = 64$ . A partir dessa figura, verifica-se a razoabilidade da aproximação considerada, o que é confirmado pelo casamento muito bom entre as curvas obtidas por simulações de MC de  $\{E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)\tilde{\mathbf{x}}(n)\tilde{\mathbf{x}}^T(n)\tilde{\mathbf{v}}(n)\tilde{\mathbf{w}}_o^T(n)]\}_{i,i}$  e através do modelo  $\{\mathbf{P}[\tilde{\mathbf{K}}'(n) - \tilde{\mathbf{K}}_o(n)]\}_{i,i}$ . Nas Figuras 4.11 e 4.12, o mesmo padrão de apresentação da Figura 4.10 é repetido para as aproximações dadas em (4.31) e (4.32), respectivamente. Com respeito à Figura 4.12(a), observe que (4.32) é menos precisa para  $N = 8$ , tornando-se uma aproximação

melhor à medida que  $N$  é aumentado [veja Figura 4.12(b)]. Diante do exposto, conclui-se que as aproximações utilizadas no desenvolvimento do modelo exibem uma precisão satisfatória para ambos os valores de  $N$  considerados.

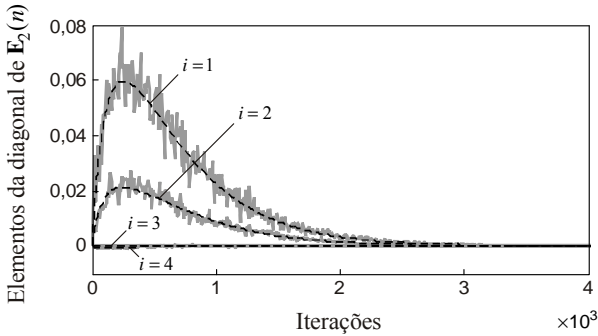


(a)

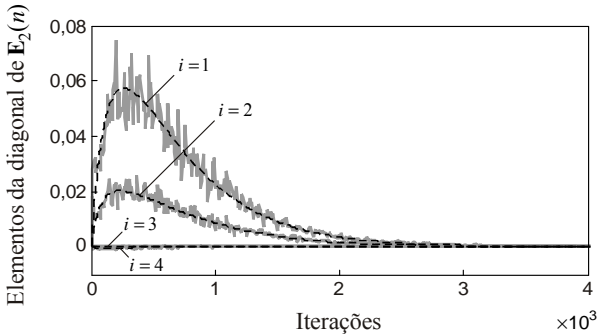


(b)

Figura 4.9. Exemplo 4. Curvas de aprendizagem (EQME) obtidas por simulações de MC (linhas cinza irregulares), através do modelo de [29] (linhas escuras pontilhadas) e a partir do modelo proposto (linhas escuras tracejadas). (a)  $N = 8$ . (b)  $N = 64$ .



(a)



(b)

Figura 4.10. Resultados do teste da Aproximação  $\mathbf{E}_2(n)$  [dada em (4.30)] obtidos por simulações de MC de  $\{E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)\tilde{\mathbf{x}}(n)\tilde{\mathbf{x}}^T(n)\tilde{\mathbf{v}}(n)\tilde{\mathbf{w}}_o^T(n)]\}_{i,i}$  (linhas cinza irregulares) e modelo  $\{\mathbf{P}[\tilde{\mathbf{K}}'(n) - \tilde{\mathbf{K}}_o(n)]\}_{i,i}$  (linhas escuras tracejadas). (a)  $N = 8$ . (b)  $N = 64$ .

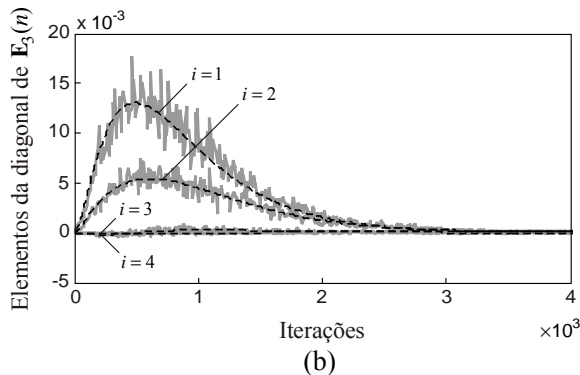
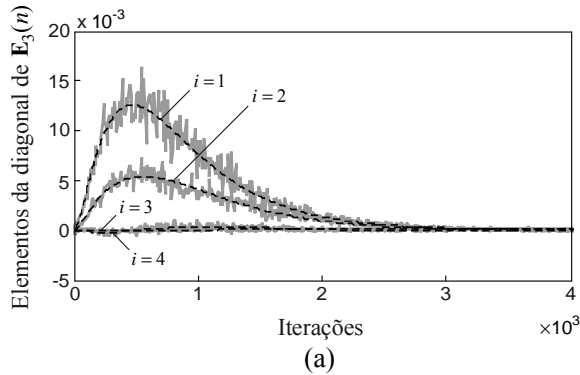


Figura 4.11. Resultados do teste da Aproximação  $\mathbf{E}_3(n)$  [dada em (4.31)] obtidos por simulações de MC de  $\{E[\tilde{\mathbf{v}}(n)\tilde{\mathbf{v}}^T(n)\tilde{\mathbf{x}}(n)\tilde{\mathbf{x}}^T(n)\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)]\}_{i,i}$  (linhas cinza irregulares) e modelo de  $[\tilde{\mathbf{K}}(n)\mathbf{P}^T]_{i,i}$  (linhas escuras tracejadas). (a)  $N = 8$ . (b)  $N = 64$ .

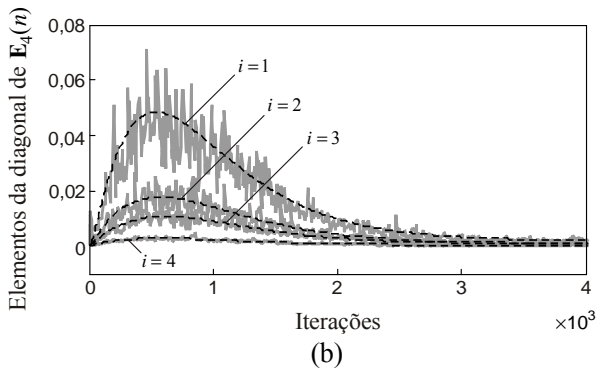
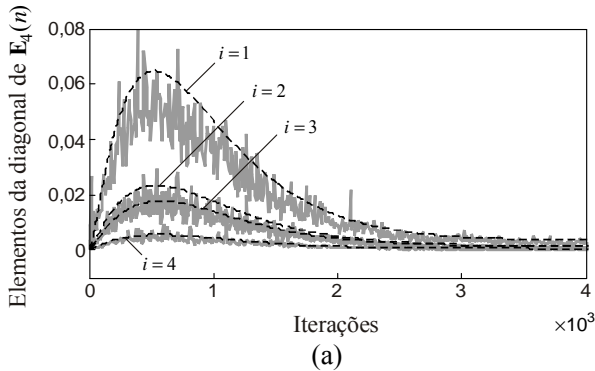


Figura 4.12. Resultados do teste da Aproximação  $\mathbf{E}_4(n)$  [dada em (4.32)] obtidos por simulações de MC de  $\{E[\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)\tilde{\mathbf{x}}(n)\tilde{\mathbf{x}}^T(n)\tilde{\mathbf{v}}(n)\tilde{\mathbf{v}}^T(n)\tilde{\mathbf{x}}(n)\tilde{\mathbf{x}}^T(n)\hat{\mathbf{D}}^{-1}(n)]\}_{i,i}$  (linhas cinza irregulares) e modelo  $\{2\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{K}}(n)\mathbf{P}^T + \text{Str}[\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{K}}(n)]\}_{i,i}$  (linhas escuras tracejadas). (a)  $N = 8$ . (b)  $N = 64$ .



4.4.3 Avaliação das soluções de **P** e **S**

Agora, resultados de simulação são apresentados no intuito de avaliar a precisão das soluções consideradas aqui para as matrizes **P** [veja (4.13)-(4.18)] e **S** [veja (4.41)-(4.43)] em comparação com aquelas obtidas utilizando exclusivamente o PM em [29]. Tais resultados, mostrados na Figura 4.13, são obtidos utilizando os mesmos valores de parâmetros utilizados no Exemplo 1. A partir dessa figura, verifica-se que a abordagem considerada aqui para computar **P** e **S** exibe uma precisão muito boa, isto é, um casamento muito bom entre os resultados de simulações de MC e o valor obtido através das soluções aqui consideradas [veja (4.13)-(4.18) e (4.41)-(4.43)]. Contudo, a mesma precisão não pode ser observada nos resultados obtidos através de [29].

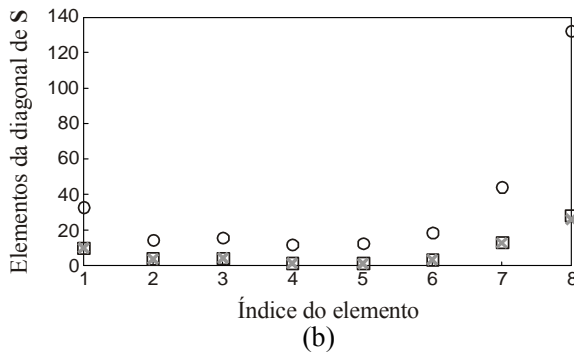
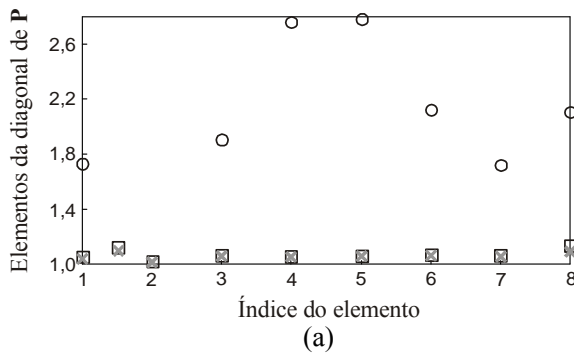


Figura 4.13. Comparações dos resultados obtidos por simulações de MC (×), através da abordagem descrita em [29] (○) e a partir das soluções consideradas aqui (□). (a) Matriz **P**. (b) Matriz **S**.

### 4.5 Conclusões

Neste capítulo, um modelo estocástico para o algoritmo TDLMS operando em um ambiente não estacionário (planta variante no tempo) foi apresentado, a partir do qual um modelo para um ambiente estacionário segue como um caso particular. Especificamente, foram derivadas expressões de modelo descrevendo o comportamento médio do vetor de erro nos coeficientes transformados, a curva de aprendizagem, a matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes transformados, o EQME em regime permanente, o desajuste, o grau de não estacionaridade como também uma relação entre o desajuste e o grau de não estacionaridade. Baseado nas expressões de modelo obtidas, foi discutido como os parâmetros do algoritmo afetam o seu desempenho como também quais condições devem ser satisfeitas para que o algoritmo seja capaz de rastrear adequadamente as variações da planta. É importante destacar ainda que tais expressões foram obtidas considerando um número reduzido de hipóteses simplificativas (coerentes com a operação do algoritmo), levando a um modelo que prediz adequadamente o comportamento do algoritmo frente a uma ampla faixa de condições de operação. Os resultados de simulação apresentados mostraram um casamento muito bom entre as simulações de MC e o comportamento predito através do modelo, ratificando assim a precisão do modelo proposto tanto na fase transitória quanto em regime permanente.

---

## **CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Neste capítulo, são apresentadas as considerações finais do presente trabalho de pesquisa. Inicialmente, é realizada uma discussão a fim de destacar os resultados mais relevantes de cada capítulo. Em seguida, são listados os artigos científicos publicados a partir das contribuições originais obtidas neste trabalho. Por fim, são apresentadas algumas sugestões para futuros trabalhos de pesquisa na área de modelagem estocástica de algoritmos adaptativos.

### **5.1 Conclusões e comentários finais**

Neste trabalho, foram apresentados modelos estocásticos analíticos para três algoritmos adaptativos bem conhecidos da literatura, a saber: o algoritmo NLMS, o algoritmo IAF-PNLMS e o algoritmo TDLMS. No desenvolvimento apresentado, um número reduzido de hipóteses simplificativas (coerentes com a operação dos referidos algoritmos) foi considerado, dando assim origem a modelos estocásticos bastante precisos. Em contraste com outros modelos da literatura, os quais geralmente não predizem apropriadamente a fase transitória do algoritmo, os modelos aqui propostos são capazes de prever adequadamente o comportamento do algoritmo tanto na fase transitória quanto em regime permanente para uma ampla faixa de condições de operação. Dessa forma, infere-se que os modelos obtidos podem auxiliar o projetista no ajuste dos parâmetros do algoritmo, no estabelecimento de relações de causa e efeito entre tais parâmetros e métricas de desempenho, e ainda na análise de desempenho, evitando assim o uso de extensivas simulações de MC.

No Capítulo 1, foram discutidos alguns conceitos básicos relacionados à filtragem adaptativa, visando fornecer uma base teórica adequada para o desenvolvimento do presente trabalho de pesquisa. Especificamente, foi brevemente revisitada a topologia de um problema de identificação de sistema, a qual foi considerada no desenvolvimento dos modelos aqui propostos. Em seguida, foram abordadas as estruturas

---

de filtragem e os algoritmos, os quais caracterizam os dois blocos básicos de um filtro adaptativo. Ainda no mesmo capítulo, foram discutidos aspectos importantes a respeito da modelagem estocástica de algoritmos adaptativos como também foram estabelecidos os objetivos gerais deste trabalho.

No Capítulo 2, considerando sinais de entrada gaussianos complexos, um modelo estocástico para o algoritmo NLMS operando em um ambiente não estacionário (planta variante no tempo) foi derivado, a partir do qual um modelo para um ambiente estacionário segue como um caso particular. No desenvolvimento de tal modelo, foram evitadas diversas aproximações comumente utilizadas na modelagem de algoritmos com passo de adaptação normalizado, dando assim origem a expressões de modelo bastante precisas descrevendo o comportamento do algoritmo tanto na fase transitória quanto em regime permanente. Com respeito ao comportamento do algoritmo em regime permanente, destaca-se que foram também obtidas expressões de modelo que permitem prever o EQME e o desajuste, além de expressões para o cálculo do passo de adaptação que leva ao EQME mínimo. A partir de tais expressões, importantes características do algoritmo NLMS operando em um ambiente não estacionário foram discutidas, propiciando assim uma melhor compreensão de como e quais parâmetros afetam seu desempenho. Através de resultados de simulação, a precisão do modelo proposto foi confirmada para diferentes condições de operação.

No Capítulo 3, levando em consideração sinais de entrada gaussianos correlacionados complexos e reais, foi apresentado um modelo estocástico para o algoritmo IAF-PNLMS operando em um ambiente estacionário. No desenvolvimento do referido modelo, a transformação *contragredient* foi utilizada para decompor tanto a matriz de distribuição de ganhos quanto a matriz de autocorrelação do sinal de entrada; então, visando estabilizar as soluções obtidas para os valores esperados oriundos da derivação do modelo, foi introduzido um procedimento para ordenar os autovalores surgidos em tal decomposição e descartar os menos significativos. Além disso, a matriz de distribuição de ganhos foi assumida variante no tempo durante a derivação do modelo, resultando em expressões que descrevem precisamente o comportamento do algoritmo. Tal precisão foi confirmada através de resultados de simulação para diferentes cenários de operação, considerando sinais de entrada gaussianos correlacionados complexos e reais. Por fim, cabe ainda salientar que a metodologia proposta aqui pode também ser utilizada para derivar modelos de outros algoritmos da

---

família PNLMS, alterando apenas a forma como o valor esperado da matriz de distribuição de ganhos é determinado.

No Capítulo 4, assumindo sinais de entrada gaussianos reais e correlacionados, foi desenvolvido um modelo estocástico para o algoritmo TDLMS operando em um ambiente não estacionário (planta variante no tempo), a partir do qual um modelo para um ambiente estacionário segue como um caso particular. No desenvolvimento desse modelo, um número reduzido de hipóteses simplificativas (coerentes com a operação do algoritmo) foi considerado, levando assim a expressões de modelo que predizem adequadamente o comportamento do algoritmo frente a uma ampla faixa de condições de operação. A partir das expressões obtidas, foi discutido como os parâmetros do algoritmo afetam o seu desempenho como também quais condições devem ser satisfeitas para que o algoritmo seja capaz de rastrear as variações da planta. Os resultados de simulação apresentados confirmam a precisão muito boa do modelo proposto tanto na fase transitória quanto em regime permanente. Ainda, observou-se que tal precisão praticamente independe do comprimento da janela usada para estimar a potência do sinal de saída de cada ramo de transformação; tal característica advém, sobretudo, da metodologia utilizada para computar os valores esperados provenientes do desenvolvimento do modelo.

Portanto, diante do que foi apresentado, acredita-se que os objetivos inicialmente estabelecidos foram alcançados com sucesso durante o desenvolvimento deste trabalho de pesquisa. Ainda, tendo em vista a precisão muito boa alcançada através da abordagem utilizada, é possível inferir que os modelos estocásticos aqui desenvolvidos permitem aumentar a aplicabilidade prática dos algoritmos adaptativos considerados em função do aperfeiçoamento da sua base teórica. Tal aperfeiçoamento também provê um melhor entendimento sobre as principais características dos algoritmos estudados frente às diferentes condições de operação como também estabelece diretrizes consistentes para o ajuste dos seus parâmetros. Além disso, acredita-se que os resultados obtidos aqui fornecem novas ferramentas para o desenvolvimento de modelos estocásticos mais precisos para outros algoritmos adaptativos da literatura; sobretudo, para aqueles com sinal de entrada normalizado. Dessa forma, é possível concluir que o material desenvolvido fomenta ainda novas perspectivas de avanço para pesquisas na área de modelagem estocástica de algoritmos adaptativos (como discutido a seguir).

---

## 5.2 Trabalhos publicados

Os resultados obtidos neste trabalho de pesquisa deram origem a 5 artigos científicos, sendo 4 deles publicados em periódicos internacionais e 1 em conferência nacional. Especificamente, as contribuições apresentadas nos Capítulos 2, 3 e 4 originaram as seguintes publicações:

- E. V. Kuhn, F. C. de Souza e R. Seara, “Modelo estocástico dos coeficientes para o algoritmo IAF-PNLMS operando com dados complexos e reais,” in *Anais do Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT)*, Fortaleza, CE, Brasil, Set. 2013, pp. 1-5.
- E. V. Kuhn, F. C. de Souza, R. Seara, and D. R. Morgan, “On the stochastic modeling of the IAF-PNLMS algorithm for complex and real correlated Gaussian input data,” *Signal Processing*, vol. 99, pp. 103-115, Jun. 2014.
- E. V. Kuhn, J. E. Kolodziej, and R. Seara, “Stochastic modeling of the NLMS algorithm for complex Gaussian input data and nonstationary environment,” *Digital Signal Processing*, vol. 30, pp. 55-66, Jul. 2014.
- E. V. Kuhn, F. C. de Souza, R. Seara, and D. R. Morgan, “On the steady-state analysis of PNLMS-type algorithms for correlated Gaussian input data,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 21, no. 11, pp. 1433-1437, Nov. 2014.
- E. V. Kuhn, J. E. Kolodziej, and R. Seara, “Analysis of the TDLMS algorithm operating in a nonstationary environment,” *Digital Signal Processing (in press)*.

## 5.3 Sugestões para trabalhos futuros

Como proposta para futuros trabalhos de pesquisa na área de modelagem estocástica de algoritmos adaptativos, sugere-se:

- Estender os resultados obtidos na modelagem do algoritmo NLMS para os algoritmos adaptativos de passo variável (VSSLMS).
  - Determinar um modelo de planta variante no tempo mais realista do ponto de vista prático.
-

- Aplicar a metodologia desenvolvida aqui na modelagem de outros algoritmos da família PNLMS.
  - Propor um modelo estocástico para os algoritmos da família PNLMS contemplando também o caso de um ambiente não estacionário.
  - Estender a modelagem do algoritmo TDLMS para o caso de sinais de entrada complexos.
  - Desenvolver modelos de algoritmos adaptativos em sub-banda utilizando os resultados obtidos para o algoritmo TDLMS.
-





## DETERMINAÇÃO DE (2.5), (2.21) E (2.22)

Neste apêndice, visando tornar o documento autocontido no que tange à modelagem estocástica do algoritmo NLMS, a metodologia utilizada para calcular as matrizes de autocorrelação normalizada  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$  e  $\mathbf{R}_3$  [dadas em (2.5), (2.21) e (2.22)] é brevemente revisitada. Tal metodologia utiliza como base a técnica desenvolvida em [45], a qual foi posteriormente estendida para o caso de sinais de entrada gaussianos complexos em [33] e [57] (para detalhes, veja [57]).

### A.1 Determinação de $\mathbf{R}_1$

No intuito de determinar o valor esperado dado em (2.5), define-se inicialmente uma função auxiliar<sup>1</sup> como

$$\mathbf{F}_1(\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{M \text{ vezes}} \frac{\mathbf{x}\mathbf{x}^H}{\mathbf{x}^H\mathbf{x}} e^{-\omega(\mathbf{x}^H\mathbf{x})} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{A.1})$$

onde  $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$  representa a função densidade de probabilidade do vetor de entrada  $\mathbf{x}(n)$  e  $M$ , a ordem do filtro adaptativo. Note que, fazendo  $\omega=0$ , (A.1) retorna ao requerido valor esperado, isto é,  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{F}_1(\omega)|_{\omega=0} = \mathbf{F}_1(0)$ . Então, considerando a função densidade de probabilidade gaussiana para dados complexos [87, eq. (2.99)] e diferenciando (A.1) em relação a  $\omega$ , o termo presente no denominador é eliminado, o que resulta em

$$\frac{\partial \mathbf{F}_1(\omega)}{\partial \omega} = -\frac{1}{\det[\mathbf{L}^{-1}(\omega)\mathbf{R}]} \mathbf{G}_1(\omega) \quad (\text{A.2})$$

---

<sup>1</sup> Por simplicidade de notação, o índice de tempo  $n$  é aqui desconsiderado.

com

$$\mathbf{L}^{-1}(\omega) = (\mathbf{I} + \omega \mathbf{R}) \mathbf{R}^{-1} \quad (\text{A.3})$$

e

$$\mathbf{G}_1(\omega) = \frac{1}{\pi^M \det[\mathbf{L}(\omega)]} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{M \text{ vezes}} \mathbf{xx}^H e^{-[\mathbf{x}^H \mathbf{L}^{-1}(\omega) \mathbf{x}]} d\mathbf{x}. \quad (\text{A.4})$$

Agora, note que os elementos de (A.4) são por definição a correlação cruzada entre  $x_i(n)$  e  $x_j^*(n)$  quando elas são variáveis conjuntamente gaussianas, com matriz de covariância dada por  $\mathbf{L}(\omega)$  [33], [87]. Dessa forma, fazendo  $\mathbf{G}_1(\omega) = \mathbf{L}(\omega)$ , integrando ambos os lados de (A.2) com respeito a  $\omega$  e usando a autodecomposição de  $\mathbf{R}$  [2]-[5], obtém-se

$$\mathbf{F}_1(\omega) = \mathbf{Q} \mathbf{H} \mathbf{Q}^H \quad (\text{A.5})$$

onde  $\mathbf{H}$  denota uma matriz diagonal cujos elementos são

$$\begin{aligned} h_{i,i} &= -\int \frac{\lambda_i}{(1 + \omega \lambda_i) \prod_{k=1}^M (1 + \omega \lambda_k)} d\omega + C_1 \\ &= -\frac{1}{G} \int \frac{1}{(\omega - \omega_i) \prod_{k=1}^M (\omega - \omega_k)} d\omega \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

com  $\omega_i$  e  $G$  dados por (2.9) e (2.10), respectivamente, e  $C_1 = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \mathbf{F}_1(\omega) = 0$ .

Finalmente, assumindo que os autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada são distintos (isto é, considerando sinal de entrada correlacionado), utilizando a técnica de expansão em frações parciais e resolvendo as integrais resultantes para  $\omega=0$  [56], a partir de (A.6) segue (2.8) e, conseqüentemente,  $\mathbf{R}_1$  de (2.7). Por outro lado, para o caso de sinais de entrada gaussianos complexos e não correlacionados, cabe salientar que a solução de (A.6) reduz-se à (2.48).

### A.2 Determinação de $\mathbf{R}_2$

Visando determinar (2.21) para sinais de entrada gaussianos complexos, uma função auxiliar  $\mathbf{F}_2(\omega)$  é primeiramente definida como

$$\mathbf{F}_2(\omega) = \frac{1}{\pi^M \det(\mathbf{R})} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{M \text{ vezes}} \frac{\mathbf{xx}^H \mathbf{K} \mathbf{xx}^H}{(\mathbf{x}^H \mathbf{x})^2} e^{-[\mathbf{x}^H \mathbf{L}^{-1}(\omega) \mathbf{x}]} d\mathbf{x} \quad (\text{A.7})$$

tal que (A.7) retorna ao valor esperado requerido para  $\omega=0$ , isto é,  $\mathbf{R}_2 = \mathbf{F}_2(\omega)|_{\omega=0} = \mathbf{F}_2(0)$ . Assim, diferenciando (A.7) duas vezes com respeito a  $\omega$ , tem-se

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_2(\omega)}{\partial \omega^2} = \frac{1}{\det[\mathbf{L}^{-1}(\omega) \mathbf{R}]} \mathbf{G}_2(\omega) \quad (\text{A.8})$$

com  $\mathbf{L}(\omega)$  dada por (A.3) e

$$\mathbf{G}_2(\omega) = \frac{1}{\pi^M \det[\mathbf{L}(\omega)]} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{M \text{ vezes}} \mathbf{xx}^H \mathbf{K} \mathbf{xx}^H e^{-[\mathbf{x}^H \mathbf{L}^{-1}(\omega) \mathbf{x}]} d\mathbf{x}. \quad (\text{A.9})$$

Agora, observando que (A.9) é por definição o valor esperado de um momento de quarta ordem de variáveis gaussianas ponderado por  $\mathbf{K}(n)$  e utilizando a autodecomposição de  $\mathbf{R}$  [2]-[5], tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{F}_2(\omega)}{\partial \omega^2} = \mathbf{Q} & \left( \frac{[\Lambda(\mathbf{I} + \omega \Lambda)^{-1}] \mathbf{K}'(n) [\Lambda(\mathbf{I} + \omega \Lambda)^{-1}]}{\prod_{k=1}^M (1 + \omega \lambda_k)} \right. \\ & \left. + \frac{[\Lambda(\mathbf{I} + \omega \Lambda)^{-1}] \text{tr} \{ \mathbf{K}'(n) [\Lambda(\mathbf{I} + \omega \Lambda)^{-1}] \}}{\prod_{k=1}^M (1 + \omega \lambda_k)} \right) \mathbf{Q}^H. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Então, integrando ambos os lados de (A.10) duas vezes com respeito a  $\omega$ , pré- e pós-multiplicando a expressão resultante por  $\mathbf{Q}^H$  e  $\mathbf{Q}$ , respectivamente, e levando em conta que somente os elementos da diagonal de  $\mathbf{K}'(n)$  são considerados em (2.25), (A.10) é reescrita como segue:

$$\mathbf{f}'_2(\omega) = (\mathbf{T} + \mathbf{P}) \mathbf{k}'(n) \quad (\text{A.11})$$

onde  $\mathbf{f}'_2(\omega)$  e  $\mathbf{K}'(n)$  representam vetores contendo os elementos da diagonal de  $\mathbf{Q}^H \mathbf{F}_2(\omega) \mathbf{Q}$  e  $\mathbf{K}'(n)$ , respectivamente,  $\mathbf{T}$  denota uma matriz diagonal cujos elementos são dados por

$$\begin{aligned} t_{i,i} &= \iint \frac{\lambda_i^2}{(1 + \omega \lambda_i)^2 \prod_{k=1}^M (1 + \omega \lambda_k)} d\omega + C_2 \\ &= \frac{1}{G} \iint \frac{1}{(\omega - \omega_i)^2 \prod_{k=1}^M (\omega - \omega_k)} d\omega \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

e  $\mathbf{P}$  uma matriz simétrica cujos elementos são

$$\begin{aligned} p_{i,j} &= \iint \frac{\lambda_i \lambda_j}{(1 + \omega \lambda_i)(1 + \omega \lambda_j) \prod_{k=1}^M (1 + \omega \lambda_k)} d\omega + C_2 \\ &= \frac{1}{G} \iint \frac{1}{(\omega - \omega_i)(\omega - \omega_j) \prod_{k=1}^M (\omega - \omega_k)} d\omega \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

com  $C_2 = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \mathbf{F}_2(\omega) = 0$ ,  $\omega_k$  dado por (2.9) e  $G$  por (2.10).

Portanto, assumindo que os autovalores da matriz de autocorrelação são distintos, realizando a expansão em frações parciais de (A.12) e (A.13), e resolvendo as integrais resultantes para  $\omega = 0$  [56], de (A.12) obtém-se (2.31) e, a partir de (A.13), tem-se (2.32) para  $i \neq j$ . Note que (A.13) reduz-se à (A.12) para  $i = j$ , conseqüentemente, (2.31) pode também ser usada para determinar os elementos da diagonal de  $\mathbf{P}$ . Ainda, para o caso de sinais de entrada gaussianos complexos e não correlacionados, (A.12) e (A.13) têm como solução (2.49) e (2.50), respectivamente.

### A.3 Determinação de $\mathbf{R}_3$

Para determinar (2.22) no caso de sinais de entrada gaussianos complexos, define-se também uma função auxiliar  $\mathbf{F}_3(\omega)$  tal que  $\mathbf{R}_3 = \mathbf{F}_3(0)$ . Assim, diferenciando duas vezes  $\mathbf{F}_3(\omega)$  em relação a  $\omega$ , tem-se

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_3(\omega)}{\partial \omega^2} = \frac{1}{\det[\mathbf{L}^{-1}(\omega)\mathbf{R}]} \mathbf{G}_1(\omega) \quad (\text{A.14})$$

com  $\mathbf{L}^{-1}(\omega)$  e  $\mathbf{G}_1(\omega)$  definidos em (A.3) e (A.4), respectivamente. Então, lembrando que  $\mathbf{G}_1(\omega) = \mathbf{L}(\omega)$ , considerando a autodecomposição de  $\mathbf{R}$  [2]-[5], pré- e pós-multiplicando por  $\mathbf{Q}^H$  e  $\mathbf{Q}$ , respectivamente, integrando ambos os lados da expressão resultante duas vezes com respeito a  $\omega$  e tomando os elementos da diagonal principal, (A.14) pode ser reescrita como

$$\mathbf{f}'_3(\omega) = \mathbf{s} \quad (\text{A.15})$$

sendo os elementos de  $\mathbf{s}$  definidos como

$$\begin{aligned} s_i &= \iint \frac{\lambda_i}{(1 + \omega\lambda_i) \prod_{k=1}^M (1 + \omega\lambda_k)} d\omega + C_3 \\ &= \frac{1}{G} \iint \frac{1}{(\omega - \omega_i) \prod_{k=1}^M (\omega - \omega_k)} d\omega \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

com  $C_3 = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \mathbf{F}_3(\omega) = 0$ ,  $\omega_k$  dado por (2.9) e  $G$  por (2.10).

Finalmente, assumindo que a matriz de autocorrelação do sinal de entrada possui apenas autovalores distintos, realizando a expansão em frações parciais e resolvendo as integrais resultantes para  $\omega = 0$  [56], a partir de (A.16) segue (2.33). Note que, para sinais de entrada gaussianos complexos e não correlacionados, a solução de (A.16) reduz-se à (2.51).



## DETERMINAÇÃO DE (3.8), (3.18), (3.19) E (3.29)

Neste apêndice, considerando sinais de entrada gaussianos correlacionados tanto complexos quanto reais, é apresentada a metodologia utilizada para calcular os valores esperados  $\mathbf{R}_1(n)$ ,  $\mathbf{R}_2(n)$ ,  $\mathbf{R}_3(n)$  e  $E_1(\infty)$  [definidos em (3.8), (3.18), (3.19) e (3.29)] surgidos na derivação do modelo proposto para o algoritmo IAF-PNLMS.

### B.1 Determinação de $\mathbf{R}_1(n)$

Para determinar (3.8), a definição de valor esperado [87, eq. (2.46)] é primeiramente utilizada para reescrever  $\mathbf{R}_1(n)$  como

$$\mathbf{R}_1(n) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{M \text{ vezes}} \frac{\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)}{\mathbf{x}^H(n)\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{x}(n)} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{B.1})$$

onde  $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$  denota a função densidade de probabilidade do sinal de entrada. Agora, uma função auxiliar é definida como

$$\mathbf{F}_1(n, \omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{M \text{ vezes}} \frac{\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)}{\mathbf{x}^H(n)\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{x}(n)} e^{-\omega[\mathbf{x}^H(n)\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{x}(n)]} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{B.2})$$

de modo que  $\mathbf{F}_1(n, \omega)$  reduz-se ao requerido valor esperado fazendo  $\omega = 0$ , isto é,  $\mathbf{R}_1(n) = \mathbf{F}_1(n, \omega)|_{\omega=0} = \mathbf{F}_1(n, 0)$ . Assim, diferenciando (B.2) duas vezes com respeito a  $\omega$ , o termo  $\mathbf{x}^H(n)\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{x}(n)$  do denominador é eliminado, resultando em

$$\frac{\partial \mathbf{F}_1(n, \omega)}{\partial \omega} = - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{M \text{ vezes}} \bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n) e^{-\omega[\mathbf{x}^H(n)\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{x}(n)]} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (\text{B.3})$$

A partir deste ponto, o desenvolvimento requer o conhecimento de  $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ ; dessa forma, duas soluções distintas são derivadas a seguir.

### B.1.1 Sinais de entrada complexos

Substituindo a função densidade de probabilidade complexa [87, eq. (2.99)] em (B.3), tem-se

$$\frac{\partial \mathbf{F}_1^{\mathbb{C}}(n, \omega)}{\partial \omega} = \frac{-\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{A}_1^{\mathbb{C}}(n, \omega)}{\det[\mathbf{L}_C^{-1}(n, \omega)\mathbf{R}]} \quad (\text{B.4})$$

com

$$\mathbf{L}_C^{-1}(n, \omega) = [\mathbf{I} + \omega\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R}]\mathbf{R}^{-1} \quad (\text{B.5})$$

e

$$\mathbf{A}_1^{\mathbb{C}}(n, \omega) = \frac{1}{\pi^M \det[\mathbf{L}_C(n, \omega)]} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{M \text{ vezes}} \mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n) e^{-[\mathbf{x}^H(n)\mathbf{L}_C^{-1}(n, \omega)\mathbf{x}(n)]} d\mathbf{x}. \quad (\text{B.6})$$

Agora, note que os elementos de  $\mathbf{A}_1^{\mathbb{C}}(n, \omega)$  são por definição a correlação cruzada entre  $x_i(n)$  e  $x_j^*(n)$  quando elas são variáveis aleatórias gaussianas, com matriz de covariância  $\mathbf{L}_C(n, \omega)$  [33], [87]. Dessa forma, fazendo  $\mathbf{A}_1^{\mathbb{C}}(n, \omega) = \mathbf{L}_C(n, \omega)$ , integrando ambos os lados de (B.4) com respeito a  $\omega$  e usando a decomposição apresentada na Seção 3.4.1, obtém-se

$$\mathbf{F}_1^{\mathbb{C}}(n, \omega) \cong \mathbf{Q}_A(n)\mathbf{H}(n, \omega)\mathbf{U}_A(n) \quad (\text{B.7})$$

onde  $\mathbf{H}(n, \omega)$  é uma matriz diagonal cujos elementos são

$$\begin{aligned} h_{i,i}^{\mathbb{C}}(n, \omega) &= -\int \frac{\lambda_i(n)}{[1 + \omega\lambda_i(n)] \prod_{k=1}^L [1 + \omega\lambda_k(n)]} d\omega + C_1^{\mathbb{C}} \\ &= \frac{-1}{a^{\mathbb{C}}(n)} \int \frac{1}{[\omega - \omega_i^{\mathbb{C}}(n)] \prod_{k=1}^L [\omega - \omega_k^{\mathbb{C}}(n)]} d\omega, \quad i = 1, 2, \dots, L \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$



sendo  $C_1^C = \lim_{\omega \rightarrow \infty} F_1^C(n, \omega) = 0$ ,  $\omega_i^C(n)$  dado por (3.47) e  $a^C(n)$  por (3.48).

Finalmente, assumindo que os autovalores de  $\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R}$  são distintos, realizando a expansão em frações parciais em (B.8) e integrando a expressão resultante para  $\omega=0$ , segue (3.46); conseqüentemente,  $\mathbf{R}_1(n)$  pode agora ser determinada analiticamente por meio de (3.45).

**B.1.2 Sinais de entrada reais**

Para sinais de entrada reais, um procedimento para determinar  $\mathbf{R}_1(n)$  foi primeiramente apresentado em [81]; entretanto, tal procedimento requer o uso de um parâmetro de regularização para estabilizar a solução obtida. Aqui, tal problema é contornado usando a decomposição derivada na Seção 3.4.1. Assim, substituindo a função densidade de probabilidade gaussiana [87, eq. (2.97)] em (B.3), tem-se

$$\frac{\partial F_1^{\mathbb{R}}(n, \omega)}{\partial \omega} = \frac{-\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{A}_1^{\mathbb{R}}(n, \omega)}{\sqrt{\det[\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^{-1}(n, \omega)\mathbf{R}]}} \tag{B.9}$$

com

$$\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^{-1}(n, \omega) = [\mathbf{I} + 2\omega\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R}]\mathbf{R}^{-1} \tag{B.10}$$

e

$$\mathbf{A}_1^{\mathbb{R}}(n, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^{M/2} \sqrt{\det[\mathbf{L}_{\mathbb{R}}(n, \omega)]}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{M \text{ vezes}} \mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n) e^{-\frac{1}{2}[\mathbf{x}^T(n)\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^{-1}(n, \omega)\mathbf{x}(n)]} d\mathbf{x} \tag{B.11}$$

cujos elementos constituem a correlação cruzada entre  $x_i(n)$  e  $x_j(n)$  quando elas são variáveis aleatórias conjuntamente gaussianas com matriz de covariância dada por (B.10) [28], [87]. Então, fazendo  $\mathbf{A}_1^{\mathbb{R}}(n, \omega) = \mathbf{L}_{\mathbb{R}}(n, \omega)$ , integrando ambos os lados de (B.9) com respeito a  $\omega$  e considerando a decomposição da Seção 3.4.1, obtém-se

$$\mathbf{F}_1^{\mathbb{R}}(n, \omega) \equiv \mathbf{Q}_A(n)\mathbf{H}(n, \omega)\mathbf{U}_A(n) \tag{B.12}$$

sendo os elementos da matriz diagonal  $\mathbf{H}(n, \omega)$  dados por

$$\begin{aligned}
 h_{i,i}^{\mathbb{R}}(n, \omega) &= -\int \frac{\lambda_i(n)}{[1 + 2\omega\lambda_i(n)] \sqrt{\prod_{k=1}^L [1 + 2\omega\lambda_k(n)]}} d\omega + C_1^{\mathbb{R}} \\
 &= \frac{-1}{2\sqrt{a^{\mathbb{R}}(n)}} \int \frac{1}{[\omega - \omega_i^{\mathbb{R}}(n)] \sqrt{\prod_{k=1}^L [\omega - \omega_k^{\mathbb{R}}(n)]}} d\omega, \quad i = 1, 2, \dots, L
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

sendo  $C_1^{\mathbb{R}} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \mathbf{F}_1^{\mathbb{R}}(n, \omega) = 0$ ,  $\omega_i^{\mathbb{R}}(n)$  dado por (3.52) e  $a^{\mathbb{R}}(n)$  por (3.54).

A integral definida em (B.13), conhecida como integral hiperelíptica [56], tem solução analítica somente em alguns casos particulares ou quando a ordem do polinômio do denominador é menor do que 4 [28], [56]. Dessa forma, visando obter uma solução analítica para tal integral, visto que todos os autovalores de  $\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R}$  são não negativos (veja Seção 3.4.1), a seguinte aproximação pode ser utilizada [29]:

$$h_{i,i}^{\mathbb{R}}(n, \omega) \cong \frac{-1}{2\sqrt{a^{\mathbb{R}}(n)}} \int \frac{1}{[\omega - \omega_i^{\mathbb{R}}(n)] \prod_{q=1}^{L/2} [\omega - \tilde{\omega}_q^{\mathbb{R}}(n)]} d\omega \tag{B.14}$$

com  $\tilde{\omega}_q^{\mathbb{R}}(n)$  [dado por (3.53)] denotando a média geométrica de pares adjacentes de raízes, para  $q = 1, 2, \dots, L/2$  com  $L$  par. Assim, assumindo raízes distintas em (B.14) e realizando a expansão em frações parciais, tem-se (3.51) como solução para (B.14); consequentemente,  $\mathbf{R}_1(n)$  segue de (3.45).

## B.2 Determinação de $\mathbf{R}_2(n)$

A fim de determinar (3.18), define-se uma função auxiliar  $\mathbf{F}_2(n, \omega)$  tal que  $\mathbf{R}_2(n) = \mathbf{F}_2(n, \omega)|_{\omega=0} = \mathbf{F}_2(n, 0)$ . Então, diferenciando  $\mathbf{F}_2(n, \omega)$  duas vezes com respeito a  $\omega$ , obtém-se

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_2(n, \omega)}{\partial \omega^2} = \int \dots \int \underbrace{\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\bar{\mathbf{G}}(n)}_{M \text{ vezes}} e^{-\omega[\mathbf{x}^H(n)\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{x}(n)]} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

(B.15)

Daqui em diante, o conhecimento da função densidade de probabilidade  $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$  do sinal de entrada se torna necessário; conseqüentemente, duas soluções distintas são determinadas como segue.

### B.2.1 Sinais de entrada complexos

Substituindo a função densidade de probabilidade para dados complexos [87, eq. (2.99)] em (B.15), e usando (B.5) e (B.6), tem-se

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_2^{\mathbb{C}}(n, \omega)}{\partial \omega^2} = \frac{\bar{\mathbf{G}}(n) \mathbf{A}_1^{\mathbb{C}}(n, \omega) \bar{\mathbf{G}}(n)}{\det[\mathbf{L}_{\mathbb{C}}^{-1}(n, \omega) \mathbf{R}]}. \quad (\text{B.16})$$

Então, levando em conta que  $\mathbf{A}_1^{\mathbb{C}}(n, \omega) = \mathbf{L}_{\mathbb{C}}(n, \omega)$ , integrando ambos os lados de (B.16) duas vezes com respeito a  $\omega$  e utilizando a decomposição dada na Seção 3.4.1, obtém-se

$$\mathbf{F}_2^{\mathbb{C}}(n, \omega) \equiv \mathbf{Q}_A(n) \Lambda_A^{1/2}(n) \mathbf{S}(n, \omega) \mathbf{Q}_A^H(n) \quad (\text{B.17})$$

onde  $\mathbf{S}(n, \omega)$  é uma matriz diagonal cujos elementos são dados por

$$s_{i,i}^{\mathbb{C}}(n, \omega) = \iint \frac{\lambda_i(n)}{[1 + \omega \lambda_i(n)] \prod_{k=1}^L [1 + \omega \lambda_k(n)]} d\omega + C_2^{\mathbb{C}}, \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (\text{B.18})$$

para  $C_2^{\mathbb{C}} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \mathbf{F}_2^{\mathbb{C}}(n, \omega) = 0$ . Finalmente, considerando autovalores distintos, realizando a expansão em frações parciais em (B.18) e resolvendo a expressão resultante para  $\omega = 0$ , segue (3.58) e conseqüentemente  $\mathbf{R}_2(n)$  de (3.57).

### B.2.2 Sinais de entrada reais

Em se tratando de dados reais, a partir de (B.15), (B.10) e (B.11), tem-se

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_2^{\mathbb{R}}(n, \omega)}{\partial \omega^2} = \frac{\bar{\mathbf{G}}(n) \mathbf{A}_1^{\mathbb{R}}(n, \omega) \bar{\mathbf{G}}(n)}{\sqrt{\det[\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^{-1}(n, \omega) \mathbf{R}]}}. \quad (\text{B.19})$$

Então, integrando (B.19) duas vezes com respeito a  $\omega$  e considerando a decomposição apresentada na Seção 3.4.1, é possível mostrar que

$$\mathbf{F}_2^{\mathbb{R}}(n, \omega) \equiv \mathbf{Q}_A(n) \Lambda_A^{1/2}(n) \mathbf{S}(n, \omega) \mathbf{Q}_A^T(n) \quad (\text{B.20})$$

onde  $\mathbf{S}(n, \omega)$  denota uma matriz diagonal cujos elementos são dados por

$$s_{i,i}^{\mathbb{R}}(n, \omega) = \int \int \frac{\lambda_i(n)}{[1 + 2\omega\lambda_i(n)] \sqrt{\prod_{k=1}^L [1 + 2\omega\lambda_k(n)]}} d\omega + C_2^{\mathbb{R}} \quad (\text{B.21})$$

com  $C_2^{\mathbb{R}} = 0$ . Finalmente, utilizando uma abordagem similar à [29], encontra-se (3.59) como solução aproximada para (B.21); conseqüentemente,  $\mathbf{R}_2(n)$  segue a partir de (3.57).

### B.3 Determinação de $\mathbf{R}_3(n)$

Visando determinar (3.19), uma função auxiliar  $\mathbf{F}_3(n, \omega)$  é inicialmente definida de tal forma que  $\mathbf{R}_3(n) = \mathbf{F}_3(n, \omega)|_{\omega=0} = \mathbf{F}_3(n, 0)$ . Assim, diferenciando  $\mathbf{F}_3(n, \omega)$  duas vezes com respeito a  $\omega$ , tem-se

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_3(n, \omega)}{\partial \omega^2} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{M \text{ vezes}} \bar{\mathbf{G}}(n) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) \mathbf{K}(n) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) \bar{\mathbf{G}}(n) e^{-\omega[\mathbf{x}^H(n) \bar{\mathbf{G}}(n) \mathbf{x}(n)]} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (\text{B.22})$$

Novamente, visto que (B.22) requer o conhecimento de  $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ , duas soluções distintas são obtidas a seguir.

#### B.3.1 Sinais de entrada complexos

Substituindo a função densidade de probabilidade gaussiana para dados complexos [87, eq. (2.99)] em (B.22) e usando (B.5), obtém-se

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_3^{\mathbb{C}}(n, \omega)}{\partial \omega^2} = \frac{\bar{\mathbf{G}}(n) \mathbf{A}_2^{\mathbb{C}}(n, \omega) \bar{\mathbf{G}}(n)}{\det[\mathbf{L}_{\mathbb{C}}^{-1}(n, \omega) \mathbf{R}]} \quad (\text{B.23})$$

com

$$\mathbf{A}_2^{\mathbb{C}}(n, \omega) = \frac{1}{\pi^M \det[\mathbf{L}_{\mathbb{C}}(n, \omega)]} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{M \text{ vezes}} \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) \mathbf{K}(n) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) e^{-[\mathbf{x}^H(n) \mathbf{L}_{\mathbb{C}}^{-1}(n, \omega) \mathbf{x}(n)]} d\mathbf{x} \quad (\text{B.24})$$

caracterizando um momento de quarta ordem ponderado de variáveis gaussianas [2]-[5]. Dessa forma, (B.23) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_3^{\mathbb{C}}(n, \omega)}{\partial \omega^2} = \frac{\bar{\mathbf{G}}(n) \{ \mathbf{L}_{\mathbb{C}}(n, \omega) \mathbf{K}(n) \mathbf{L}_{\mathbb{C}}(n, \omega) + \mathbf{L}_{\mathbb{C}}(n, \omega) \text{tr}[\mathbf{L}_{\mathbb{C}}(n, \omega) \mathbf{K}(n)] \} \bar{\mathbf{G}}(n)}{\det[\mathbf{L}_{\mathbb{C}}^{-1}(n, \omega) \mathbf{R}]} \quad (\text{B.25})$$

Então, integrando ambos os lados de (B.25) duas vezes com respeito a  $\omega$  e utilizando a decomposição dada na Seção 3.4.1, tem-se

$$\mathbf{F}_3^{\mathbb{C}}(n, \omega) \equiv \mathbf{Q}_A(n) \{ \mathbf{P}(n, \omega) \circ \mathbf{K}'(n) + \{ [\mathbf{T}^{1/2}(n) \circ \mathbf{P}(n, \omega)] \mathbf{k}'(n) \} \mathbf{1}^T \circ \mathbf{I} \} \mathbf{Q}_A^H(n) \quad (\text{B.26})$$

onde  $\circ$  denota o produto de Hadamard [61],  $\mathbf{I}$ , a matriz identidade com dimensão  $L \times L$ ,  $\mathbf{1}$ , um vetor de dimensão  $L$  cujos elementos são iguais a 1,

$$\mathbf{K}'(n) = \mathbf{U}_A(n) \mathbf{K}(n) \mathbf{U}_A^H(n) \quad (\text{B.27})$$

e

$$\mathbf{k}'(n) = \text{diag}[\mathbf{K}'(n)]. \quad (\text{B.28})$$

Em (B.26), os elementos das matrizes  $\mathbf{T}(n)$  e  $\mathbf{P}(n, \omega)$  são, respectivamente, dados por

$$t_{i,j} = \frac{\lambda_i(n)}{\lambda_j(n)} \quad (\text{B.29})$$

e

$$p_{i,j}^{\mathbb{C}}(n, \omega) = \iint \frac{\lambda_i(n) \lambda_j(n)}{[1 + \omega \lambda_i(n)] [1 + \omega \lambda_j(n)] \prod_{k=1}^L [1 + \omega \lambda_k(n)]} d\omega + C_3^{\mathbb{C}} \quad (\text{B.30})$$

com  $C_3^{\mathbb{C}} = 0$ . Finalmente, assumindo autovalores distintos, realizando a expansão em frações parciais em (B.30) e resolvendo para  $\omega = 0$ , obtém-se (3.61) para  $i = j$  e (3.62) para  $i \neq j$ ; conseqüentemente,  $\mathbf{R}_3(n)$  segue de (3.60).

### B.3.2 Sinais de entrada reais

Para dados reais, a partir de (B.10) e (B.22), obtém-se

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_3^{\mathbb{R}}(n, \omega)}{\partial \omega^2} = \frac{\bar{\mathbf{G}}(n) \{2\mathbf{L}_{\mathbb{R}}(n, \omega) \mathbf{K}(n) \mathbf{L}_{\mathbb{R}}(n, \omega) + \mathbf{L}_{\mathbb{R}}(n, \omega) \text{tr}[\mathbf{L}_{\mathbb{R}}(n, \omega) \mathbf{K}(n)]\} \bar{\mathbf{G}}(n)}{\sqrt{\det[\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^{-1}(n, \omega) \mathbf{R}]}} \quad (\text{B.31})$$

Agora, integrando ambos os lados de (B.31), usando (B.27), (B.28) e (B.29), é possível mostrar que

$$\mathbf{F}_3^{\mathbb{R}}(n, \omega) \equiv \mathbf{Q}_A(n) \{2\mathbf{P}(n, \omega) \circ \mathbf{K}'(n) + \{[\mathbf{T}^{1/2}(n) \circ \mathbf{P}(n, \omega)] \mathbf{k}'(n)\} \mathbf{1}^T \circ \mathbf{I}\} \mathbf{Q}_A^T(n) \quad (\text{B.32})$$

sendo os elementos de  $\mathbf{P}(n, \omega)$  dados por

$$p_{i,j}^{\mathbb{R}}(n, \omega) = \iint \frac{\lambda_i(n) \lambda_j(n)}{[1 + 2\omega \lambda_i(n)][1 + 2\omega \lambda_j(n)] \sqrt{\prod_{k=1}^L [1 + 2\omega \lambda_k(n)]}} d\omega + C_3^{\mathbb{R}} \quad (\text{B.33})$$

para  $C_3^{\mathbb{R}} = 0$ . Finalmente, levando em consideração a abordagem apresentada em [29], uma solução aproximada para (B.33) é obtida, da qual segue (3.63) para  $i = j$  e (3.64) para  $i \neq j$ ; consequentemente,  $\mathbf{R}_3(n)$  pode ser analiticamente determinada por meio de (3.60).

### B.4 Determinação de $E_1(\infty)$

Para determinar (3.29), uma função auxiliar  $F_1(n, \omega)$  é definida de tal forma que  $E_1(\infty) = F_1(n, 0)$ . Dessa forma, diferenciando  $F_1(n, \omega)$  com respeito a  $\omega$ , obtém-se

$$\frac{\partial F_1(n, \omega)}{\partial \omega} = - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{M \text{ vezes}} e^{-\omega \mathbf{x}^H(n) \bar{\mathbf{G}}(\infty) \mathbf{x}(n)} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (\text{B.34})$$

#### B.4.1 Sinais de entrada complexos

Agora, substituindo a função densidade de probabilidade

gaussiana para dados complexos [87, eq. (2.99)] em (B.34), integrando ambos os lados da expressão resultante com respeito a  $\omega$  e considerando a decomposição apresentada na Seção 3.4.1, tem-se

$$F_1^{\mathbb{C}}(n, \omega) \cong -\int \frac{1}{\prod_{k=1}^L [1 + \omega \lambda_k(\infty)]} d\omega + C \quad (\text{B.35})$$

com  $\lambda_k(\infty)$  denotando os autovalores de  $\bar{\mathbf{G}}(\infty)\mathbf{R}$  e  $C = \lim_{\omega \rightarrow \infty} F_1(n, \omega) = 0$ . Por fim, assumindo que os autovalores de  $\bar{\mathbf{G}}(\infty)\mathbf{R}$  são distintos, realizando a expansão em frações parciais de (B.35) e resolvendo a expressão resultante para  $\omega = 0$  [56], chega-se à (3.65).

#### B.4.2 Sinais de entrada reais

Para dados reais, a partir de (B.34) e da decomposição dada na Seção 3.4.1, tem-se

$$F_1^{\mathbb{R}}(n, \omega) \cong -\int \frac{1}{\sqrt{\prod_{k=1}^L [1 + 2\omega \lambda_k(\infty)]}} d\omega + C. \quad (\text{B.36})$$

Logo, usando a abordagem descrita em [29], uma solução aproximada para (B.36) é obtida como segue (3.66).





## DETERMINAÇÃO DE (4.12) E (4.36)

Neste apêndice, no intuito de tornar o documento autocontido em relação à modelagem estocástica do algoritmo TDLMS, a metodologia utilizada para calcular as matrizes  $\mathbf{P}$  [dada em (4.12)] e  $\mathbf{S}$  [dada em (4.36)] é brevemente revisitada. Tal metodologia foi originalmente apresentada em [31], sendo também considerada aqui a fim de assegurar a precisão do modelo proposto no presente trabalho de pesquisa.

### C.1 Determinação de $\mathbf{P}$

Para determinar o valor esperado dado em (4.12), define-se inicialmente

$$\tilde{\mathbf{x}}_{i,j}(n) = [\tilde{x}_i(n) \tilde{x}_i(n-1) \cdots \tilde{x}_i(n-N+1) \tilde{x}_j(n)]^T \quad (\text{C.1})$$

de forma que (4.3) pode ser agora reescrita como

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}_i^2(n-k) = \frac{1}{N} \tilde{\mathbf{x}}_{i,j}^T(n) \mathbf{I}_s \tilde{\mathbf{x}}_{i,j}(n) \quad (\text{C.2})$$

com  $\mathbf{I}_s$  denotando uma matriz de dimensão  $N+1 \times N+1$  definida por

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

onde  $\mathbf{I}_N$  representa uma matriz identidade de dimensão  $N \times N$  e  $\mathbf{0}$ , um vetor de dimensão apropriada cujos elementos são iguais a 0. Assim, utilizando a definição de valor esperado [87], considerando (C.2) e desprezando o índice de tempo  $n$  (por simplicidade de notação), o  $(i, j)$ -ésimo elemento de  $\mathbf{P}$  pode ser expresso como

$$p(i, j) = N \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{N+1 \text{ fold}} \frac{\tilde{x}_i \tilde{x}_j}{\tilde{\mathbf{x}}_{i,j}^T \mathbf{I}_s \tilde{\mathbf{x}}_{i,j}} f_{\mathbf{x}}(\tilde{\mathbf{x}}_{i,j}) d\tilde{\mathbf{x}}_{i,j} \quad (\text{C.4})$$

onde

$$f_{\mathbf{x}}(\tilde{\mathbf{x}}_{i,j}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{N+1} \det(\tilde{\mathbf{R}}_{i,j})}} e^{-\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_{i,j}^T \tilde{\mathbf{R}}_{i,j}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_{i,j}} \quad (\text{C.5})$$

representa a função densidade de probabilidade gaussiana [87, eq. (2.97)] de  $\tilde{\mathbf{x}}_{i,j}$  e  $\tilde{\mathbf{R}}_{i,j} = E[\tilde{\mathbf{x}}_{i,j}(n)\tilde{\mathbf{x}}_{i,j}^T(n)]$  a matriz de autocorrelação correspondente (veja Hipótese H1).

Agora, uma função auxiliar  $f_{i,j}(\omega)$  é definida [a partir de (C.4) e (C.5)] como

$$f_{i,j}(\omega) = \frac{N}{\sqrt{(2\pi)^{N+1} \det(\tilde{\mathbf{R}}_{i,j})}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{N+1 \text{ fold}} \frac{\tilde{x}_i \tilde{x}_j}{\tilde{\mathbf{x}}_{i,j}^T \mathbf{I}_s \tilde{\mathbf{x}}_{i,j}} e^{-\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_{i,j}^T \mathbf{L}_{i,j}^{-1}(\omega) \tilde{\mathbf{x}}_{i,j}} d\tilde{\mathbf{x}}_{i,j} \quad (\text{C.6})$$

com

$$\mathbf{L}_{i,j}(\omega) = (2\omega \mathbf{I}_s + \tilde{\mathbf{R}}_{i,j}^{-1})^{-1}. \quad (\text{C.7})$$

Note que, fazendo  $\omega = 0$ , (C.6) retorna ao requerido valor esperado, isto é,

$$p(i, j) = f_{i,j}(\omega) \Big|_{\omega=0} = f_{i,j}(0). \quad (\text{C.8})$$

Então, diferenciando (C.6) com respeito a  $\omega$ , o termo  $\tilde{\mathbf{x}}_{i,j}^T \mathbf{I}_s \tilde{\mathbf{x}}_{i,j}$  presente no denominador é eliminado, o que resulta em

$$\frac{\partial f_{i,j}(\omega)}{\partial \omega} = -N \sqrt{\frac{\det[\mathbf{L}_{i,j}(\omega)]}{\det(\tilde{\mathbf{R}}_{i,j})}} \Gamma(\omega) \quad (\text{C.9})$$

com

$$\Gamma(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{N+1} \det[\mathbf{L}_{i,j}(\omega)]}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{N+1 \text{ fold}} \tilde{x}_i \tilde{x}_j e^{-\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_{i,j}^T \mathbf{L}_{i,j}^{-1}(\omega) \tilde{\mathbf{x}}_{i,j}} d\tilde{\mathbf{x}}_{i,j} \quad (\text{C.10})$$

caracterizando a correlação cruzada entre  $\tilde{x}_i$  e  $\tilde{x}_j$  quando elas são variáveis aleatórias conjuntamente gaussianas com matriz de covariância dada por (C.7).

Visto que  $\tilde{x}_i$  e  $\tilde{x}_j$  denotam o primeiro e o  $(N+1)$ -ésimo elemento do vetor  $\tilde{\mathbf{x}}_{i,j}$ , respectivamente, e  $\Gamma(\omega)$  corresponde ao  $(1, N+1)$ -ésimo elemento da matriz  $\mathbf{L}_{i,j}(\omega)$ , (C.9) pode ser simplificada para

$$\frac{\partial f_{i,j}(\omega)}{\partial \omega} = \frac{-N[(2\omega\tilde{\mathbf{R}}_{i,j}\mathbf{I}_s + \mathbf{I}_{N+1})^{-1}\tilde{\mathbf{R}}_{i,j}]_{1,N+1}}{\sqrt{\det(2\omega\tilde{\mathbf{R}}_{i,j}\mathbf{I}_s + \mathbf{I}_{N+1})}}. \quad (\text{C.11})$$

Além disso, considerando a autodecomposição [2]-[5]

$$\tilde{\mathbf{R}}_{i,j}\mathbf{I}_s = \mathbf{Q}_{s,i,j}\mathbf{\Lambda}_{s,i,j}\mathbf{Q}_{s,i,j}^{-1} \quad (\text{C.12})$$

onde  $\mathbf{Q}_{s,i,j}$  representa a matriz de autovetores e  $\mathbf{\Lambda}_{s,i,j}$ , uma matriz diagonal contendo os autovalores de  $\tilde{\mathbf{R}}_{i,j}\mathbf{I}_s$ , tem-se a partir de (C.11) que

$$\frac{\partial f_{i,j}(\omega)}{\partial \omega} = \frac{-N[\mathbf{Q}_{s,i,j}(2\omega\mathbf{\Lambda}_{s,i,j} + \mathbf{I}_{N+1})^{-1}\mathbf{Q}_{s,i,j}^{-1}\tilde{\mathbf{R}}_{i,j}]_{1,N+1}}{\sqrt{\det(2\omega\mathbf{\Lambda}_{s,i,j} + \mathbf{I}_{N+1})}}. \quad (\text{C.13})$$

Alternativamente, (C.13) pode ser reescrita em uma forma mais compacta como

$$\frac{\partial f_{i,j}(\omega)}{\partial \omega} = \frac{-N\mathbf{q}_{s,i,j}^T(2\omega\mathbf{\Lambda}_{s,i,j} + \mathbf{I}_{N+1})^{-1}\mathbf{Q}_{s,i,j}^{-1}\mathbf{r}_{e,i,j}}{\sqrt{\det(2\omega\mathbf{\Lambda}_{s,i,j} + \mathbf{I}_{N+1})}} \quad (\text{C.14})$$

onde  $\mathbf{q}_{s,i,j}$  denota um vetor contendo a primeira coluna de  $\mathbf{Q}_{s,i,j}$  e  $\mathbf{r}_{e,i,j}$ , representa um vetor contendo a última coluna de  $\tilde{\mathbf{R}}_{i,j}$ .

Note que simplificações adicionais em (C.14) podem ser realizadas analisando a estrutura de  $\tilde{\mathbf{R}}_{i,j}\mathbf{I}_s$ . Por exemplo, a partir da autodecomposição (C.12), é possível verificar que

$$\mathbf{Q}_{s,i,j} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_i & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{r}}_{i,j}^T \tilde{\mathbf{Q}}_i \tilde{\mathbf{\Lambda}}_i^{-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.15})$$

$$\mathbf{\Lambda}_{s,i,j} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{\Lambda}}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.16})$$

e

$$\mathbf{Q}_{s,i,j}^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_i^T & \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{r}}_{i,j}^T \tilde{\mathbf{R}}_i^{-1} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.17})$$

onde  $\tilde{\mathbf{Q}}_i$  e  $\tilde{\Lambda}_i$  são matrizes contendo os autovetores e autovalores de  $\tilde{\mathbf{R}}_i$ , respectivamente, e  $\tilde{\mathbf{r}}_{i,j}$  é o vetor de correlação cruzada entre  $\tilde{\mathbf{x}}_i(n)$  e  $\tilde{\mathbf{x}}_j(n)$ . Ainda, é possível mostrar que  $\mathbf{r}_{e,i,j}$  pode ser reescrita em termos de  $\tilde{\mathbf{r}}_{i,j}$  como

$$\mathbf{r}_{e,i,j} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{r}}_{i,j} \\ \sigma_j^2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.18})$$

e  $\mathbf{q}_{s,i,j}$  em termos de  $\tilde{\mathbf{q}}_i$  como

$$\mathbf{q}_{s,i,j} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.19})$$

onde  $\sigma_j^2$  é o  $(j, j)$ -ésimo elemento de  $\tilde{\mathbf{R}}_{i,j}$  e  $\tilde{\mathbf{q}}_i$ , um vetor de dimensão  $N$  formado pelos elementos da primeira linha de  $\tilde{\mathbf{Q}}_i$ . Dessa forma, (C.14) reduz-se à

$$\frac{\partial f_{i,j}(\omega)}{\partial \omega} = \frac{-N \tilde{\mathbf{q}}_i^T (2\omega \tilde{\Lambda}_i + \mathbf{I}_N)^{-1} \tilde{\mathbf{Q}}_i^T \tilde{\mathbf{r}}_{i,j}}{\sqrt{\det(2\omega \tilde{\Lambda}_i + \mathbf{I}_N)}}. \quad (\text{C.20})$$

Finalmente, integrando ambos os lados de (C.20) com respeito a  $\omega$ , obtém-se

$$p(i, j) = N \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{H}_i \tilde{\mathbf{Q}}_i^T \tilde{\mathbf{r}}_{i,j} \quad (\text{C.21})$$

com  $\mathbf{H}_i$  denotando uma matriz diagonal cujos elementos são dados por

$$h_i(l, l) = \int \frac{1}{(1 + 2\omega \lambda_{i,l}) \sqrt{\prod_{k=1}^N (1 + 2\omega \lambda_{i,k})}} d\omega + C_i \quad (\text{C.22})$$

onde  $\lambda_{i,k}$  caracteriza os autovalores de  $\tilde{\mathbf{R}}_i$  e  $C_i = \lim_{\omega \rightarrow \infty} f_{i,j}(\omega) = 0$ .

Portanto, a determinação de  $\mathbf{P}$  envolve o cálculo de uma integral hiperelíptica. Entretanto, visto que não existe na literatura uma solução geral para esse tipo de integral [56], a abordagem<sup>1</sup> descrita em [29] é aqui considerada para obter (4.14) como uma solução aproximada para essa integral.

---

<sup>1</sup> Originalmente, tal abordagem foi apresentada em [52] considerando o algoritmo NLMS.

### C.2 Determinação de S

Para determinar (4.36) são consideradas duas estratégias, sendo uma utilizada para computar os elementos da diagonal principal de  $\mathbf{S}$  e outra para os elementos fora da diagonal principal. Especificamente, os elementos da diagonal principal de  $\mathbf{S}$  são obtidos de uma maneira similar como apresentado na Seção C.1; por sua vez, os elementos fora da diagonal principal são computados utilizando o PM como em [29]. Assim, a partir da função densidade de probabilidade gaussiana [87, eq. (2.97)], os elementos da diagonal principal de  $\mathbf{S}$  são primeiro expressos como

$$s(i,i) = \frac{N^2}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\tilde{\mathbf{R}}_i)}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{N \text{ fold}} \frac{\tilde{x}_i^2}{(\tilde{\mathbf{x}}_i^T \tilde{\mathbf{x}}_i)^2} e^{-\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_i^T \tilde{\mathbf{R}}_i^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_i} d\tilde{\mathbf{x}}_i. \quad (\text{C.23})$$

Então, definindo uma função auxiliar  $g_i(\omega)$  de forma que  $s(i,i) = g_i(\omega)|_{\omega=0} = g_i(0)$  e diferenciando tal função duas vezes com respeito a  $\omega$ , obtém-se

$$\frac{\partial^2 g_i(\omega)}{\partial \omega^2} = N^2 \sqrt{\frac{\det[\mathbf{M}_i(\omega)]}{\det(\tilde{\mathbf{R}}_i)}} \Upsilon(\omega) \quad (\text{C.24})$$

com

$$\Upsilon(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det[\mathbf{M}_i(\omega)]}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{N \text{ fold}} \tilde{x}_i^2 e^{-\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{M}_i^{-1}(\omega) \tilde{\mathbf{x}}_i} d\tilde{\mathbf{x}}_i \quad (\text{C.25})$$

e

$$\mathbf{M}_i(\omega) = (2\omega \mathbf{I}_N + \tilde{\mathbf{R}}_i^{-1})^{-1}. \quad (\text{C.26})$$

Agora, visto que  $\tilde{x}_i$  caracteriza o primeiro elemento de  $\tilde{\mathbf{x}}_i$ ,  $\Upsilon(\omega)$  corresponde ao (1,1)-ésimo elemento de  $\mathbf{M}_i(\omega)$ . Por isso, fazendo  $\Upsilon(\omega) = [\mathbf{M}_i(\omega)]_{1,1}$  e usando a autodecomposição de  $\tilde{\mathbf{R}}_i$ , (C.24) reduz-se à

$$\frac{\partial^2 g_i(\omega)}{\partial \omega^2} = \frac{N^2 \tilde{\mathbf{q}}_i^T (2\omega \tilde{\mathbf{\Lambda}}_i + \mathbf{I}_N)^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_i}{\sqrt{\det(2\omega \tilde{\mathbf{\Lambda}}_i + \mathbf{I}_N)}} \quad (\text{C.27})$$

com  $\tilde{\mathbf{Q}}_i$ ,  $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_i$  e  $\tilde{\mathbf{q}}_i$  definidos na Seção C.1. Logo, integrando ambos os lados de (C.27) duas vezes com respeito a  $\omega$ , os elementos da diagonal

principal de  $\mathbf{S}$  são obtidos como

$$s(i, i) = N^2 \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{U}_i \tilde{\mathbf{q}}_i \quad (\text{C.28})$$

onde  $\mathbf{U}_i$  denota uma matriz diagonal cujos elementos são

$$u_i(l, l) = \iint \frac{\lambda_{i,l}}{(1 + 2\omega\lambda_{i,l}) \sqrt{\prod_{k=1}^N (1 + 2\omega_{i,k})}} d\omega + C_i \quad (\text{C.29})$$

sendo  $C_i = \lim_{\omega \rightarrow \infty} g_i(\omega) = 0$ . Finalmente, considerando a abordagem descrita em [29], (4.42) é obtida como uma solução aproximada para a integral hiperelíptica dada em (C.29). Por sua vez, (4.43) segue como uma solução aproximada para os elementos fora da diagonal de  $\mathbf{S}$ .

## REFERÊNCIAS

- [1] B. Widrow and S. D. Stearns, *Adaptive Signal Processing*, 1st ed. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall, 1985.
  - [2] B. Farhang-Boroujeny, *Adaptive Filters: Theory and Applications*, 1st ed. Baffins Lane Chichester, UK: John Wiley & Sons, 1999.
  - [3] D. G. Manolakis, V. K. Ingle, and S. M. Kogon, *Statistical and Adaptive Signal Processing: Spectral Estimation, Signal Modeling, Adaptive Filtering and Array Processing*. Norwood, MA: McGraw-Hill, 2000.
  - [4] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 4th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2002.
  - [5] A. H. Sayed, *Adaptive Filters*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2009.
  - [6] P. S. R. Diniz, *Adaptive Filtering*, 3rd ed. Boston, MA: Springer Science+Business Media, 2008.
  - [7] M. M. Sondhi and D. A. Berkley, “Silencing echoes on the telephone network,” *Proc. IEEE*, vol. 68, no. 8, pp. 948–963, Aug. 1980.
  - [8] D. Messerschmitt, “Echo cancellation in speech and data transmission,” *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 2, no. 2, pp. 283–297, Mar. 1984.
  - [9] M. M. Sondhi, “The history of echo cancellation,” *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 23, no. 5, pp. 95–102, Sep. 2006.
  - [10] S. L. Gay and J. Benesty, *Acoustic Signal Processing for Telecommunication*, 1st ed. Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers, 2000.
  - [11] S. M. Kuo and D. R. Morgan, “Active noise control: a tutorial review,” *Proc. IEEE*, vol. 87, no. 6, pp. 943–975, Jun. 1999.
  - [12] Y. A. Huang and J. Benesty, *Audio Signal Processing: For Next-Generation Multimedia Communication Systems*, 1st ed. Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers, 2004.
-

- 
- [13] N. J. Bershad, E. Eweda, and J. C. M. Bermudez, “Stochastic analysis of the LMS and NLMS algorithms for cyclostationary white Gaussian inputs,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 62, no. 9, pp. 2238–2249, May 2014.
- [14] B. Widrow and M. E. Hoff, “Adaptive switching circuits,” *IRE WESCON Conv. Rec.*, vol. 4, pp. 96–104, Aug. 1960.
- [15] B. Widrow, J. McCool, and M. Ball, “The complex LMS algorithm,” *Proc. IEEE*, vol. 63, no. 4, pp. 719–720, Apr. 1975.
- [16] D. L. Duttweiler, “Proportionate normalized least-mean-squares adaptation in echo cancelers,” *IEEE Trans. Speech Audio Process.*, vol. 8, no. 5, pp. 508–518, Sep. 2000.
- [17] J. Benesty and S. L. Gay, “An improved PNLMS algorithm,” in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, Orlando, FL, May 2002, vol. 2, pp. 1881–1884.
- [18] H. Deng and M. I. Doroslovacki, “Proportionate adaptive algorithms for network echo cancellation,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 54, no. 5, pp. 1794–1803, May 2006.
- [19] F. C. de Souza, O. J. Tobias, R. Seara, and D. R. Morgan, “Alternative approach for computing the activation factor of the PNLMS algorithm,” in *Proc. European Signal Process. Conf. (EUSIPCO)*, Glasgow, Scotland, Aug. 2009, pp. 2633–2637.
- [20] F. C. de Souza, O. J. Tobias, R. Seara, and D. R. Morgan, “A PNLMS algorithm with individual activation factors,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 58, no. 4, pp. 2036–2047, Apr. 2010.
- [21] S. Narayan, A. Peterson, and M. Narasimha, “Transform domain LMS algorithm,” *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 31, no. 3, pp. 609–615, Jun. 1983.
- [22] R. Harris, D. Chabies, and F. Bishop, “A variable step (VS) adaptive filter algorithm,” *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 34, no. 2, pp. 309–316, Apr. 1986.
- [23] R. H. Kwong and E. W. Johnston, “A variable step size LMS algorithm,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 40, no. 7, pp. 1633–1642, Jul. 1992.
-



- 
- [24] B. Farhang-Boroujeny, “Variable-step-size LMS algorithm: new developments and experiments,” *IEE Vis. Image Signal Process.*, vol. 141, no. 5, pp. 311–317, Oct. 1994.
- [25] T. Aboulnasr and K. Mayyas, “A robust variable step-size LMS-type algorithm: analysis and simulations,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 45, no. 3, pp. 631–639, Mar. 1997.
- [26] J. G. F. Zipf, O. J. Tobias, and R. Seara, “Non-parametric VSS-NLMS algorithm with control parameter based on the error correlation,” in *Proc. IEEE Int. Telecommun. Symp. (ITS)*, Manaus, AM, Brazil, Sep. 2010, pp. 1–6.
- [27] J. G. F. Zipf, “Classificação, análise estatística e novas estratégias de algoritmos LMS de passo variável,” Tese, Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, SC, Brasil, 2011.
- [28] M. Rupp, “The behavior of LMS and NLMS algorithms in the presence of spherically invariant processes,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 41, no. 3, pp. 1149–1160, Mar. 1993.
- [29] E. M. Lobato, O. J. Tobias, and R. Seara, “Stochastic modeling of the transform-domain  $\epsilon$ LMS algorithm,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 56, no. 5, pp. 1840–1852, May 2008.
- [30] J. E. Kolodziej, O. J. Tobias, and R. Seara, “Stochastic analysis of the transform domain LMS algorithm for a non-stationary environment,” in *Proc. European Signal Process. Conf. (EUSIPCO)*, Glasgow, Scotland, Aug. 2009, pp. 1730–1734.
- [31] J. E. Kolodziej, “Algoritmos adaptativos com sinal de entrada normalizado: Modelagem estatística e aprimoramentos,” Tese, Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, SC, Brasil, 2010.
- [32] E. L. O. Batista and R. Seara, “On the performance of adaptive pruned Volterra filters,” *Signal Process.*, vol. 93, no. 7, pp. 1909–1920, Jul. 2013.
-

- [33] J. E. Kolodziej, O. J. Tobias, R. Seara, and D. R. Morgan, "On the constrained stochastic gradient algorithm: Model, performance, and improved version," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 57, no. 4, pp. 1304–1315, Apr. 2009.
- [34] M. S. E. Abadi and J. H. Husøy, "On the application of a unified adaptive filter theory in the performance prediction of adaptive filter algorithms," *Digit. Signal Process.*, vol. 19, no. 3, pp. 410–432, May 2009.
- [35] S. Kaczmarz, "Angenäherte Auflösung von Systemen linearer Gleichungen," *Bull. Int. Acad. Pol. Sci. Lettres A*, vol. 35, no. III, pp. 355–357, 1937.
- [36] J. I. Nagumo and A. Noda, "A learning method for system identification," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 12, no. 3, pp. 282–287, Jun. 1967.
- [37] A. E. Albert and L. S. Gardner Jr., *Stochastic Approximation and Nonlinear Regression*, 1st ed. Cambridge, MA: MIT Press, 1967.
- [38] R. Bitmead and B. Anderson, "Performance of adaptive estimation algorithms in dependent random environments," *IEEE Trans. Autom. Contr.*, vol. 25, no. 4, pp. 788–794, Aug. 1980.
- [39] Z. Tang and G. Leus, "Low-complexity equalization of time-varying channels with precoding," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 54, no. 9, pp. 3642–3648, Sep. 2006.
- [40] J. Homer, P. J. Kootsookos, and V. Selvaraju, "Enhanced NLMS adaptive array via DOA detection," *IET Commun.*, vol. 1, no. 1, pp. 19–26, 2007.
- [41] R. Vicen-Bueno, A. Martinez-Leira, R. Gil-Pita, and M. Rosa-Zurera, "Modified LMS-based feedback-reduction subsystems in digital hearing aids based on WOLA filter bank," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 58, no. 9, pp. 3177–3190, Sep. 2009.
- [42] N. Yousefian and P. C. Loizou, "A dual-microphone algorithm that can cope with competing-talker scenarios," *IEEE Trans. Audio, Speech, Lang. Process.*, vol. 21, no. 1, pp. 145–155, Jan. 2013.
-

- 
- [43] S. Ahmed, M. T. Akhtar, and X. Zhang, “Robust auxiliary-noise-power scheduling in active noise control systems with online secondary path modeling,” *IEEE Trans. Audio, Speech, Lang. Process.*, vol. 21, no. 4, pp. 749–761, Apr. 2013.
- [44] E. Eweda, “A new approach for analyzing the limiting behavior of the normalized LMS algorithm under weak assumptions,” *Signal Process.*, vol. 89, no. 11, pp. 2143–2151, Nov. 2009.
- [45] N. J. Bershad, “Analysis of the normalized LMS algorithm with Gaussian inputs,” *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 34, no. 4, pp. 793–806, Aug. 1986.
- [46] N. J. Bershad, “Behavior of the  $\epsilon$ -normalized LMS algorithm with Gaussian inputs,” *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 35, no. 5, pp. 636–644, May 1987.
- [47] M. Tarrab and A. Feuer, “Convergence and performance analysis of the normalized LMS algorithm with uncorrelated Gaussian data,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 34, no. 4, pp. 680–691, Jul. 1988.
- [48] D. T. M. Slock, “On the convergence behavior of the LMS and the normalized LMS algorithms,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 41, no. 9, pp. 2811–2825, Sep. 1993.
- [49] M. H. Costa and J. C. M. Bermudez, “An improved model for the normalized LMS algorithm with Gaussian inputs and large number of coefficients,” in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, Orlando, FL, May 2002, vol. 2, pp. 1385–1388.
- [50] G. Barrault, M. H. Costa, J. C. M. Bermudez, and A. Lenzi, “A new analytical model for the NLMS algorithm,” in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, Philadelphia, PA, Mar. 2005, vol. 4, pp. 41–44.
- [51] J. C. M. Bermudez and M. H. Costa, “A statistical analysis of the  $\epsilon$ -NLMS and NLMS algorithms for correlated Gaussian signals,” *J. Commun. Inform. Syst.*, vol. 20, no. 2, pp. 7–13, Aug. 2005.
-

- 
- [52] E. M. Lobato, O. J. Tobias, and R. Seara, “Stochastic model for the NLMS algorithm with correlated Gaussian data,” in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, Toulouse, France, May 2006, vol. 3, pp. 760–763.
- [53] S. C. Chan and Y. Zhou, “Convergence behavior of NLMS algorithm for Gaussian inputs: Solutions using generalized Abelian integral functions and step size selection,” *J. Signal Process. Syst.*, vol. 59, no. 3, pp. 255–265, Jul. 2009.
- [54] T. Y. Al-Naffouri and M. Moinuddin, “Exact performance analysis of the  $\epsilon$ -NLMS algorithm for colored circular Gaussian inputs,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 58, no. 10, pp. 5080–5090, Oct. 2010.
- [55] T. Y. Al-Naffouri, M. Moinuddin, and M. S. Sohail, “Mean weight behavior of the NLMS algorithm for correlated Gaussian inputs,” *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 18, no. 1, pp. 7–10, Jan. 2011.
- [56] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, 6th ed. San Diego, CA: Academic Press, 2000.
- [57] E. V. Kuhn, “Modelagem estocástica do algoritmo NLMS: Revisão e aprimoramentos,” Dissertação, Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, SC, Brasil, 2012.
- [58] E. V. Kuhn e R. Seara, “Modelo estocástico do algoritmo NLMS para sinais de entrada gaussianos complexos,” in *Anais do Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT)*, Brasília, DF, Brasil, Set. 2012, pp. 1–5.
- [59] E. V. Kuhn e R. Seara, “Análise de desempenho do algoritmo NLMS em regime permanente,” in *Anais do Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT)*, Fortaleza, CE, Brasil, Set. 2013, pp. 1–5.
- [60] K. Mayyas, “Performance analysis of the deficient length LMS adaptive algorithm,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 53, no. 8, pp. 2727–2734, Aug. 2005.
-

- 
- [61] D. S. Bernstein, *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas*, 2nd ed. Woodstock, OX: Princeton University Press, 2009.
- [62] E. Soria-Olivas, J. Calpe-Maravilla, J. F. Guerrero-Martinez, M. Martinez-Sober, and J. Espi-Lopez, “An easy demonstration of the optimum value of the adaptation constant in the LMS algorithm,” *IEEE Trans. Educ.*, vol. 41, no. 1, p. 81, Feb. 1998.
- [63] “SPIB - Signal Processing Information Base (Cable data),” Available: <http://spib.linse.ufsc.br/cable.html> [Online 22 Jul. 2013].
- [64] “SPIB - Signal Processing Information Base (Microwave channel data).” Available: <http://linse.ufsc.br/microwave.html> [Online 22 Jul. 2013].
- [65] R. K. Martin, W. Sethares, R. C. Williamson, and C. R. Johnson, “Exploiting sparsity in adaptive filters,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 50, no. 8, pp. 1883–1894, Aug. 2002.
- [66] Y. Huang, J. Benesty, and J. Chen, *Acoustic MIMO Signal Processing*, 1st ed. New York, NY: Springer-Verlag, 2006.
- [67] Y. Selen and E. Larsson, “RAKE receiver for channels with a sparse impulse response,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 6, no. 9, pp. 3175–3180, Sep. 2007.
- [68] B. Jelfs, D. P. Mandic, and J. Benesty, “A class of adaptively regularised PNLMS algorithms,” in *Proc. Int. Conf. on Digital Signal Process. (ICDSP)*, Cardiff, Wales, UK, Jul. 2007, pp. 19-22.
- [69] C. Paleologu, J. Benesty, and S. Ciochina, *Sparse Adaptive Filters for Echo Cancellation*. San Rafael, CA: Morgan and Claypool Publishers, 2010.
- [70] C. R. Berger, J. C. Preisig, and P. Willett, “Sparse channel estimation for multicarrier underwater acoustic communication: from subspace methods to compressed sensing,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 58, no. 3, pp. 1708-1721, Mar. 2010.
-

- 
- [71] S. L. Gay and S. C. Douglas, “Normalized natural gradient adaptive filtering for sparse and nonsparse systems,” in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, Orlando, FL, May 2002, pp. 1405–1408.
- [72] Y. Chen, Y. Gu, and A. O. Hero, “Sparse LMS for system identification,” in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, Taipei, China, Apr. 2009, pp. 3125–3128.
- [73] Y. Gu, J. Jin, and S. Mei, “10 norm constraint LMS algorithm for sparse system identification,” *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 16, no. 9, pp. 774–777, Sep. 2009.
- [74] Y. Kopsinis, K. Slavakis, and S. Theodoridis, “Online sparse system identification and signal reconstruction using projections onto weighted 11 balls,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 59, no. 3, pp. 936–952, Mar. 2011.
- [75] C. Paleologu, J. Benesty, and S. Ciochină, “An improved proportionate NLMS algorithm based on the 10 norm,” in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, Dallas, TX, Mar. 2010, pp. 309–312.
- [76] S. Chouvardas, K. Slavakis, Y. Kopsinis, and S. Theodoridis, “A sparsity promoting adaptive algorithm for distributed learning,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 60, no. 10, pp. 5412–5425, Oct. 2012.
- [77] M. I. Doroslovacki and H. Deng, “On convergence of proportionate-type NLMS adaptive algorithms,” in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, Toulouse, France, May 2006, vol. 3, pp. 105–108.
- [78] K. T. Wagner and M. I. Doroslovacki, “Towards analytical convergence analysis of proportionate-type NLMS algorithms,” in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, Las Vegas, NV, Mar. 2008, pp. 3825–3828.
- [79] K. T. Wagner and M. I. Doroslovacki, “Analytical analysis of transient and steady-state properties of the proportionate NLMS algorithm,” in *Proc. Asilomar Conf. Signals, Syst., Comput. (ACSSC)*, Pacific Grove, CA, Oct. 2008, pp. 256–260.
-

- 
- [80] P. Loganathan, E. A. P. Habets, and P. A. Naylor, “Performance analysis of IPNLMS for identification of time-varying systems,” in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, Dallas, TX, Mar. 2010, pp. 317–320.
- [81] F. C. de Souza, O. J. Tobias, R. Seara, and D. R. Morgan, “Stochastic model for the mean weight evolution of the IAF-PNLMS algorithm,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 58, no. 11, pp. 5895–5901, Nov. 2010.
- [82] F. C. Souza e R. Seara, “Considerações sobre a modelagem estocástica dos coeficientes do algoritmo adaptativo IAF-PNLMS,” in *Anais do Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT)*, Curitiba, PR, Brasil, Out. 2011, pp. 1–5.
- [83] F. C. de Souza, “Algoritmos adaptativos LMS normalizados proporcionais: Proposta de um novo algoritmo e sua modelagem estocástica,” Tese, Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, SC, Brasil, 2012.
- [84] S. Werner, J. A. Apolinário, and P. S. R. Diniz, “Set-membership proportionate affine projection algorithms,” *EURASIP J. Audio, Speech, Music Process.*, vol. 2007, pp. 1–10, Jan. 2007.
- [85] C. Samson and V. Reddy, “Fixed point error analysis of the normalized ladder algorithm,” *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 31, no. 5, pp. 1177–1191, Oct. 1983.
- [86] E. V. Kuhn, F. C. de Souza, R. Seara, and D. R. Morgan, “On the steady-state analysis of PNLMS-type algorithms for correlated Gaussian input data,” *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 21, no. 11, pp. 1433–1437, Nov. 2014.
- [87] C. W. Therrien, *Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing*, 1st ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1992.
- [88] A. J. Laub, M. T. Heath, C. C. Paige, and R. C. Ward, “Computation of system balancing transformations and other applications of simultaneous diagonalization algorithms,” *IEEE Trans. Autom. Contr.*, vol. 32, no. 2, pp. 115–122, Feb. 1987.
-

- 
- [89] A. J. Laub, *Matrix Analysis for Scientists and Engineers*, 1st ed. Philadelphia, PA: SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- [90] P. O. Hoyer, “Non-negative matrix factorization with sparseness constraints,” *J. Mach. Learn. Res.*, vol. 5, pp. 1457–1469, Nov. 2004.
- [91] A. W. H. Khong, P. A. Naylor, and J. Benesty, “A low delay and fast converging improved proportionate algorithm for sparse system identification,” *EURASIP J. Audio, Speech, Music Process.*, vol. 2007, pp. 1–8, Apr. 2007.
- [92] *ITU-T Recommendation G.168 - Digital Network Echo Cancellers*, International Telecommunications Union - Telecommunication Standardization Sector, Apr. 2015 (*Prepublished Recommendation*).
- [93] K. Ozeki and T. Umeda, “An adaptive filtering algorithm using an orthogonal projection to an affine subspace and its properties,” *Electron. Commun. Japan*, vol. 67-A, no. 5, pp. 19-27, May 1984.
- [94] J. C. Lee and C. K. Un, “Performance of transform-domain LMS adaptive digital filters,” *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 34, no. 3, pp. 499–510, Jun. 1986.
- [95] D. F. Marshall, W. K. Jenkins, and J. J. Murphy, “Use of orthogonal transforms for improving performance of adaptive filters.,” *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 36, no. 4, pp. 474–484, Apr. 1989.
- [96] A. Gilloire and M. Vetterli, “Adaptive filtering in subbands with critical sampling: Analysis, experiments, and application to acoustic echo cancellation,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 40, no. 8, pp. 1862–1875, Aug. 1992.
- [97] F. Beaufays, “Transform-domain adaptive filters: an analytical approach,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 43, no. 2, pp. 422-431, Feb. 1995.
- [98] S. L. Gay and S. Tavathia, “The fast affine projection algorithm,” in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, Detroit, MI, May 1995, vol. 5, pp. 3023-3026.
-



- 
- [99] S.-J. Chern, J.-C. Horng, and K. M. Wong, “The performance of the hybrid LMS adaptive algorithm,” *Signal Process.*, vol. 44, no. 1, pp. 67–88, Jun. 1995.
- [100] S. Hosur and A. H. Tewfik, “Wavelet transform domain adaptive FIR filtering,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 45, no. 3, pp. 617–630, Mar. 1997.
- [101] D. I. Kim and P. De Wilde, “Performance analysis of the DCT-LMS adaptive filtering algorithm,” *Signal Process.*, vol. 80, no. 8, pp. 1629–1654, 2000.
- [102] S. Zhao, Z. Man, S. Khoo, and H. R. Wu, “Stability and convergence analysis of transform-domain LMS adaptive filters with second-order autoregressive process,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 57, no. 1, pp. 119–130, Jan. 2009.
- [103] G. Murmu and R. Nath, “Convergence performance comparison of transform domain LMS adaptive filters for correlated signal,” in *Proc. Int. Conf. Devices Commun. (ICDECOM)*, Mesra, Ranchi, India, Feb. 2011, pp. 1–5.
- [104] W. Yin and A. S. Mehr, “Stochastic analysis of the normalized subband adaptive filter algorithm,” *IEEE Trans. Circuits Syst. I: Reg. Pap.*, vol. 58, no. 5, pp. 1020–1033, May 2011.
- [105] E. M. Lobato, O. J. Tobias, and R. Seara, “A stochastic model for the transform-domain LMS algorithm,” in *Proc. European Signal Process. Conf. (EUSIPCO)*, Vienna, Austria, Sep. 2004, pp. 1833–1836.
- [106] E. M. Lobato, O. J. Tobias, and R. Seara, “Stochastic modeling of the transform-domain  $\epsilon$ LMS algorithm for correlated Gaussian data,” in *Proc. Int. Telecommun. Symp. (ITS)*, Fortaleza, CE, Brazil, Sep. 2006, pp. 912–917.
- [107] E. M. Lobato, O. J. Tobias, and R. Seara, “Stochastic modeling of the transform-domain  $\epsilon$ LMS algorithm for a time-varying environment,” in *Proc. European Signal Process. Conf. (EUSIPCO)*, Antalya, Turkey, Sep. 2005, pp. 1–4.
- [108] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, 1st ed. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 2004.
-