

Evaluación del uso de las cartas de control \bar{x} , EWMA y CUSUM en un sistema de control de calidad para procesos no correlacionados

Francisco Eljach*, Gustavo Penagos**,
Rita Patricia Peña-Baena Niebles***

Resumen

Debido a la globalización y las actuales tendencias de la economía, las organizaciones han orientado sus estrategias hacia el mejoramiento de la calidad y a la reducción de los costos de fabricación.

Esta investigación busca detectar las situaciones fuera de control que se puedan presentar al monitorear un proceso y tomar decisiones orientadas a mejorar la calidad y disminuir los costos asociadas a la misma. Esto se logrará mediante un programa computacional que permite simular el comportamiento de las cartas \bar{x} , CUSUM y EWMA y el uso de diferentes reglas de detención y el uso de diferentes reglas de detención y teniendo en cuenta la magnitud del cambio y los costos de calidad asociados.

Palabras claves: Control de calidad, costos de calidad, cartas de control \bar{x} , CUSUM y EWMA y reglas de detención.

Abstract

Due to globalization and the present tendencies of the economy, the organizations have oriented their strategies to the improvement of the quality and to the reduction of the costs of manufacture. The present investigation looks for to detect the situations outside control that can be displayed when a process is folloed and to make oriented decisions to improve the quality and to diminish the costos associated to the same one.

This was obtained by means of a computational program that allows simulating the behavior of Letters \bar{x} , CUSUM and EWMA and the use of different rules from halting and considering the magnitude of the change and the costs of quality associate.

Key words: Quality control, cost of quality, control letters \bar{x} , CUSUM, EWMA, detention rules.

Fecha de recepción: 8 de noviembre de 2005
Fecha de aceptación: 10 de junio de 2006

* Ingeniero Industrial, Universidad del Norte. fj_eljach@yahoo.com

** Ingeniero Industrial, Universidad del Norte. tavo707@hotmail.com

*** Ingeniera Industrial MsC, Universidad del Norte.

Dirección: Universidad del Norte, Departamento Ingeniería Industrial, Km 5 vía a Puerto Colombia, A.A. 1569, Barranquilla (Colombia).

1. INTRODUCCIÓN

Debido a la globalización y las actuales tendencias de la economía, las organizaciones han orientado sus estrategias hacia el mejoramiento de la calidad y a la reducción de los costos de fabricación; esta tendencia ha llevado a enfocar la producción hacia el uso de sistemas de control de calidad que además de proporcionar flexibilidad al proceso permitan obtener reducidos costos de calidad que garanticen la reducción de falsas alarmas por cambios en el proceso y la disminución de unidades disconformes.

Los gráficos utilizados para llevar a cabo el control estadístico del proceso se conocen como cartas o gráficas de control. Estas permiten observar los resultados obtenidos periódicamente de una forma más didáctica, indicando si las variaciones que se presentan en un proceso están por fuera de lo normal.

Durante la creación de un gráfico de control, el investigador deberá responderse tres preguntas claves:

1. ¿ Es la carta de control una herramienta apropiada para la aplicación que está llevando a cabo ?
2. ¿ Qué tipo de carta de control debe ser utilizada ?
3. ¿ Dónde deben colocarse los límites de control ?

Alwan y Roberts (1995) realizaron un estudio de 235 aplicaciones de control de calidad con el que demostraron que las violaciones a las suposiciones son la regla y no la excepción en la práctica. Ello se demostró en: a) asegurar falsamente que el proceso está bajo control, b) una búsqueda innecesaria de causas especiales, c) fallas para encontrar causas especiales que pueden ser vistas a través de un mejor análisis, d) fallas para ver y actuar ante variaciones sistemáticas, como tendencias, y variaciones periódicas y autorregresivas, e) cartas de control que están siendo ignoradas.

Esta investigación busca dar respuesta a la pregunta 2 evitando los escenarios c) y e), para así detectar las situaciones fuera de control que se puedan presentar al monitorear un proceso y tomar decisiones orientadas a mejorar la calidad y disminuir los costos asociados a la misma. Esto se logrará simulando el comportamiento de las cartas X, CUSUM y EWMA y el uso de diferentes reglas de detención y teniendo en cuenta la magnitud del cambio y los costos de calidad asociados.

2. CARTAS O GRÁFICOS DE CONTROL

En la actualidad existe un gran número de cartas disponibles para el estudio del estado de un proceso productivo.

La discusión respecto a cuál de las diferentes cartas tiene un mejor desempeño es cada vez mayor, debido a que cada una de ellas tiene un comportamiento diferente en cada campo de aplicación; por ejemplo, para Montgomery [16], la carta EWMA es tan efectiva como la CUSUM.

Tolley e English [17] reconocen que la carta EWMA tiene la ventaja de detectar cambios pequeños.

Jones [13] menciona que la EWMA se ha convertido en una carta ampliamente estudiada y aceptada como una alternativa para la tradicional *Shewart* o Carta X. Sin embargo, hay otros autores, como Lu y Reynolds [14] y Lucas y Saccucci [15], para los cuales la carta EWMA no presenta un desempeño muy superior al de otras cartas, ya que consideran que la capacidad para detectar cambios en la media de la EWMA y la CUSUM es similar y que para tomar la decisión de aplicaciones prácticas deben utilizarse otros criterios, como la facilidad de interpretación.

Tolley an English [17] recomiendan el uso combinado de la carta EWMA y la X, con lo cual pretenden mejorar el desempeño en términos de habilidad de detección del cambio y/o habilidades económicas.

2.1. Cartas de control EWMA

Para definir los valores que toma la EWMA, el estimador se define por la siguiente ecuación:

$$z_i = \lambda x_i + (a - \lambda) z_{i-1} \quad (1)$$

Donde $0 < \lambda < 1$ se toma como una constante y su valor inicial es el valor objetivo del proceso, es decir, $z_0 = \mu_0$.

De esta manera, la carta EWMA se construye a partir de la graficación de z_i versus el número de la muestra i . La línea central y los límites de control superior e inferior para la carta EWMA están dados por:

$$LSC = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)} [1 - (1-\lambda)^{2i}]} \quad (2)$$

$$\text{Línea central} = \mu_0 \quad (3)$$

$$LIC = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)} [1 - (1-\lambda)^{2i}]} \quad (4)$$

Los parámetros que se deben tener en cuenta para el diseño de estas cartas son el múltiplo de sigma en los límites de control (L) y el valor de λ .

En relación con los parámetros de la carta EWMA que se deben utilizar, se puede decir que son muchos los estudios que se han realizado sobre este tema; de hecho, la gran mayoría de estudios sobre diseño económico de cartas de control están relacionados con la determinación de los parámetros óptimos que se deben usar en estas cartas para obtener los mejores costos asociados a la calidad. Algunos de los autores que han investigado estos temas son Bannerjee y Rahim [2], Chen y Tirupati [2], Duncan [2], Ho y Case [2][6], Jones [13], Liderman [9], Lucas y Saccucci [15] y Montgomery [16].

Teniendo en cuenta lo establecido por Montgomery [16], que dice que en general los estudios determinan qué valores de λ en el intervalo $0.05 \leq \lambda \leq 0.25$ tienen un buen desempeño, una buena regla es utilizar pequeños valores de λ para detectar pequeños cambios. Los estudios determinan que para un $L=3$ (el usual límite de tres sigma) resulta útil trabajar con grandes valores de λ . Sin embargo, cuando $\lambda \leq 0.1$ es ventajoso reducir el ancho de límites utilizando valores de L entre 2.6 y 2.8.

Teniendo en cuenta lo anterior, para este estudio se decidió utilizar un $\lambda = 0.1$ y $L=2.7$, los cuales han demostrado ser unos buenos parámetros para las cartas EWMA [16].

2.2. Cartas de control \bar{X}

Suponiendo que cuando el proceso está bajo control, se cumple que

$$X; N(\mu, \sigma) \quad (5)$$

Esto quiere decir que el proceso está regido por una distribución normal, cuyos parámetros son μ (media) y σ (varianza). Teniendo en cuenta esto, se puede deducir que la media muestral \bar{X} también sigue una distribución normal, de la siguiente manera:

$$\bar{X}; N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad (6)$$

Para complementar el análisis de un proceso que siga la distribución antes descrita, se busca determinar la probabilidad que una muestra se encuentre en intervalos determinados por la cantidad de desviaciones estándar por encima y por debajo de la media. De esta manera se logró determinar que para tres desviaciones se obtiene lo siguiente:

$$p\left(\mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.997 \quad (7)$$

2.3. Cartas CUSUM

La carta CUSUM incorpora directamente toda la información contenida en las muestras tomadas del proceso, al graficar las sumas acumuladas de las desviaciones de éstas con respecto al parámetro de medición.

Por ejemplo, suponiendo que se tiene una muestra de tamaño $n \geq 1$ y \bar{x}_j es el promedio de la j -ésima muestra. Entonces, si μ_0 es el parámetro para la media del proceso, la gráfica de control de suma acumulada es elaborada con la siguiente cantidad:

$$C_i = \sum_{j=1}^i (\bar{x}_j - \mu_0) \quad (8)$$

Se le llama C_i a la suma que acumula las desviaciones de las medias muestrales con respecto a la media poblacional hasta la i -ésima muestra. El hecho de que este tipo de gráfica tenga en cuenta información de varias muestras, le da mayor sensibilidad ante cambios pequeños en los procesos, lo cual se traduce en una ventaja ante otros tipos de gráficos de control.

2.4. Diseño económico de cartas de control

Las cartas de control antes mencionadas son una herramienta ampliamente utilizada para establecer y mantener un control estadístico sobre un proceso. También se han logrado convertir en herramientas efectivas para la estimación de los distintos parámetros de un proceso productivo. El diseño de una carta de control requiere que el investigador (ingeniero o analista) seleccione el tamaño de la muestra, la frecuencia de muestreo o intervalo entre muestras, y los límites de control de la carta. De esta manera, a la selección de estos parámetros se le denomina el diseño de una carta de control.

El diseño conlleva consecuencias de tipo económico, debido a que existen costos asociados con la escogencia de los parámetros de la carta de control. Estos costos pueden ser:

- Costo derivados del muestreo y de pruebas.
- Costos asociados con el monitoreo de señales de un estado “fuera de control” y la posibilidad de corregir causas asignables.
- Costos de permitir que unidades no conformes lleguen al consumidor final.

Es por esto que se considera lógico diseñar cartas de control desde una perspectiva económica[16].

3. SIMULACIÓN DEL MONITOREO DE UN PROCESO UTILIZANDO CARTAS DE CONTROL \bar{X} , EWMA Y CUSUM

Esta investigación busca simular un proceso de producción en el que una característica de calidad es medida en cada unidad de tiempo generada, por el simulador, para todas las órdenes de producción.

Para realizar el monitoreo del proceso es necesario tener en cuenta los siguientes aspectos:

1. Se deben generar los datos que correspondan a una distribución normal con su correspondiente media y desviación estándar conocidos; esto con el fin de simular un proceso de producción determinado. Estos datos se generaran en el programa *Visual Basics*, y adicionalmente se introducirá al proceso un corrimiento o cambio en la media; este corrimiento se presentara de manera aleatoria.

2. Introducir en la simulación las cartas de control por variables X , CUSUM y EWMA junto con las reglas de detención, con el fin de evaluar el comportamiento de las cartas en el momento en que ocurra el cambio en la media del proceso; este cambio puede ser grande o pequeño según el proceso. De igual manera, los costos de falsas alarmas y de unidades no conformes asociados a las cartas de control pueden variar dependiendo del tipo de proceso; por esta razón, en la simulación se tendrán en cuenta dos casos para dichos costos: cuando el costo de las falsas alarmas es mayor que el de unidades defectuosas y viceversa.
3. Posteriormente se realizan todas las combinaciones posibles entre cartas de control, reglas de detención, tipo de cambio en la media y costo asociado.
4. Se realiza un análisis cualitativo y posteriormente un análisis estadístico de los resultados de la simulación, teniendo en cuenta que la investigación busca saber qué combinación de cartas y reglas presenta los menores costos y en qué tipo de situaciones.

4. DISEÑO DEL EXPERIMENTO

4.1. Objetivo del experimento

El experimento tiene como objetivo determinar qué tipo de cartas o combinación de éstas y qué tipo de reglas de detención minimizan los costos de calidad del proceso que están directamente relacionados con el uso de los diagramas de control en otras palabras, los costos de falsas alarmas y de unidades conformes.

4.2. Definición de los Factores y Niveles del experimento

Para este experimento se han definido seis factores que deben tenerse en cuenta:

- *Factor 1:* Carta de control X . Dos niveles: Inactiva (1), Activa (2)
- *Factor 2:* Carta de control EWMA. Dos niveles: Inactiva (1), Activa (2)
- *Factor 3:* Carta de control CUSUM. Dos niveles: Inactiva (1), Activa (1)
- *Factor 4:* Regla de detención. Siete niveles según se describe en la tabla N° 1
- *Factor 5:* Cambio en la media del Proceso. Dos niveles: Cambio pequeño en la media (1), Cambio grande en la media (2).
- *Factor 6.* Costo asociados con la calidad. Dos niveles: : Costo de Falsa Alarma menor que el Costo de la Unidad Defectuosa (1), Costo de Falsa Alarma mayor que el Costo de la Unidad Defectuosa (2).

Tabla 1
Reglas de Detención

(1) Un punto por fuera de los Límites	(2) Detección de Rachas	(3) Presencia de Tendencias	(4) Un punto fuera de los Límites y Detección de Rachas
(5) Un punto fuera de los Límites y Presencia de Tendencias	(6) Detección de Rachas y Presencia de Tendencias	(7) Un punto fuera de los Límites, Detección de Rachas y Presencia de Tendencias	

4.3. Selección de la Variable Respuesta

La variable respuesta que medirá el experimento será el costo asociado al uso de cada una de las cartas, a la aplicación de las reglas de detención en cada una de éstas, el tipo de cambio y el tipo de costo.

4.4. Escogencia del Diseño de Experimento que se va a realizar

El experimento que se va a utilizar para esta investigación será un diseño factorial, para determinar los efectos producidos sobre el costo asociado a la utilización de cartas de control por los seis factores anteriormente descritos.

Se realizaran 5 repeticiones para las combinaciones posibles, es decir que en el experimento se realizarán 1120 corridas de la simulación, mediante un programa en *Visual Basic* con ejecución en EXCEL.

5. CONCLUSIONES Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Con los datos generados por la simulación y utilizando el *software* Statgraphics se realizan los cálculos para el análisis de varianza (ANOVA), donde se puede analizar que factores como la carta X, EWMA, CUSUM y el factor CAMBIO en la media presentan una relación directa con el costo total

De igual forma, se puede concluir que la carta de control X detectó el mayor número de veces el cambio (27 % de las veces) en combinación con la regla 1, por lo cual se disminuyó el costo total, en contraste con el uso de la carta de control X y las reglas 2 y 3. La carta de control CUSUM, a diferencia de la carta de control X, incrementó el costo total debido al elevado número de falsas alarmas fruto de la inclusión de las reglas de rachas y tendencia; sólo detectó el cambio 14 % de las veces que estuvo activa. La regla más efectiva en el momento de indicar que el proceso se encontraba fuera de control fue

la regla 1, correspondiente a fuera de los límites de control, ya que tanto para cambios grandes como para cambios pequeños las cartas de control utilizaban esta regla de fuera de los límites como herramienta básica para decir que el proceso estaba fuera de control.

Finalmente, vemos que el 37% de las veces ninguna detectó el cambio, además, como se esperaba, el costo se ve incrementado notablemente cuando no se encontraba ninguna carta activa; por lo tanto, se recomienda a las empresas interesadas en implantar un sistema de control de calidad que disminuya los costos y que disminuya el número de unidades defectuosas, utilicen la carta de control X y la EWMA porque presentaron los menores costos cuando las dos estaban activas (nivel 1); además, después de la carta de control X, la carta EWMA detectó el cambio el 22% de las veces que estuvo activa. Con lo anterior, la investigación presenta propuestas para implantar un sistema de control de calidad basado en hechos concretos, con lo cual se espera disminuir los costos de calidad y brindar herramientas de juicio que permitan a los empresarios e investigadores crear políticas de gestión de proceso acordes con el entorno globalizado en que nos encontramos, recordando que los productos de un país compiten en el mercado mundial con otros países en otros continentes y que si estos productos cumplen los estándares de calidad exigidos, sus fabricantes lograrán un posicionamiento en el mercado mundial.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen por el soporte brindado a esta investigación al Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad del Norte y su grupo de Investigación de Productividad y Competitividad.

REFERENCIAS

- [1] ALWAN, C. and ROBERTS, H.V. Time Series Modeling for Statistical Process Control. *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 6.
- [2] BANERJEE, P.K. and RAHIM, M.A. Economic Design of \bar{X} Control Charts Under Weibull Shock Models. *Technometrics*, 1988, Vol. 30, p. 407-414.
- [3] CHEN, W.-H. and TIRUPATI, D. Economic Design of X – Control Charts : Insights on Design Variables. *The International Journal of Quality & Reliability Management*, 1997, Vol. 14, N° 3, p. 234-259.
- [4] DUNCAN, A.J. The Economic Design of \bar{X} Charts used to Mantain Current Control of a Process. *Journal of the American Statistical Association*, Vol 51, 1956.
- [5] HO, C. and CASE, K.E. Economic Design of Control Chart : A Literatura Review for 1981 - 1991. *Journal of Quality Technology*, January 1994, Vol. 26, N° 1, pp. 39 - 53.
- [6] HO, C. and CASE, K.E. The Economically – Based EWMA Control Chart. *International Journal of Production Research*, 1994, Vol. 32, N° 9, p. 2179-2186.

- [7] JONES, L.A., CHAMP, Ch.W. and RIGDON, S.E. The Performance of Exponentially Weighted Moving Average Charts with Estimated Parameters. *Technometrics*, 2001, Vol. 43, N° 2, p. 156-167.
- [8] INDERMAN, K. and CHOO, A. Robust Economic Control Chart Design. *IIE Transactions*, 2002, Vol. 34, p. 1069-1078.
- [9] LINDERMAN, K., LOVE and THOMAS, E. Economic and Economic Statistical Designs for MEWMA Control Charts. *Journal of Quality Technology*, octubre de 2000, Vol 32, N° 4, p. 410-417.
- [10] LUCAS, J.M. and SACCUCCI, M.S. Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements. *Technometrics*, Vol. 32.
- [11] MONTGOMERY, D.C. and FRIEDMAN, J.J. *Statistical Process Control in a Computer-Integrated Manufacturing Environment. Statistical Process Control in Automated Manufacturing*. Edited by J. B. Keats y N. F. Hubele, Dekker, Series in Quality and Realiability, New York.
- [12] MONTGOMERY, D.C., JOHNSON, L.A. and GARDINER, J.S. *Forecasting and Time Series Analysis*, 2nd. New York: McGraw-Hill.
- [13] JONES L., A. The Statistical Desing of EWMA Control Charts with Estimated Parameters. *Journal of Quality Technology*, January 2002, Vol. 34, No. 3, p. 277-288.
- [14] LU, C.W. and REYNOLDS Jr., M.R. Control Charts for Monitoring the mean and variance of Autocorrelated Proceses. *Journal of Quality Technology*, Vol. 31, N° 3.
- [15] LUCAS, J.M. and SACCUCCI, M.S. Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements. *Technometrics*. Vol. 32.
- [16] MONTGOMERY, D.C. *Introduction to Statistical Quality Control*, 4^a edición, Nueva York, John Wiley and Sons, 2001.
- [17] TOLLEY, G.O. and ENGLISH, J.R. Economic designs of constrained EWMA and combined EWMA- \bar{X} control schemes. *IIE Transactions*, 2001, Vol. 33, p. 429-436.