ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-46-57

О показателях сходимости особого интеграла и особого ряда одной многомерной проблемы[1]

Л. Г. Архипова, В. Н. Чубариков

Архипова Людмила Геннадьевна — кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник кафедры математических и компьютерных методов анализа, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: arhiludka@mail.ru
Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, президент механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: chubarik2009@live.ru

Аннотация

В статье продолжены исследования по теории кратных тригонометрических сумм, в основе которой лежит метод И.М.Виноградова. Здесь мы находим для $n = r = 2$ оценки снизу показателей сходимости особого ряда и особого интеграла асимптотической формулы при $P \to \infty$ для числа решений следующей системы диофантовых уравнений

$$\sum_{j=1}^{2k}(-1)^j x_{1,j}^{t_1}\dots x_{r,j}^{t_r} = 0, \quad 0 \le t_1, \dots, t_r \le n,$$

где $n \ge 2, r \ge 1, k$ — натуральные числа, причём каждая переменная $x_{i,j}$ может принимать все целые значения от 1 до $P \ge 1$.

Ключевые слова: показатель сходимости, особый интеграл, особый ряд.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
Л. Г. Архипова, В. Н. Чубариков. О показателях сходимости особого интеграла и особого ряда одной многомерной проблемы // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 46–57.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 4.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-46-57

On the exponents of the convergence of singular integrals and singular series of a multivariate problem[2]

L. G. Arkhipova, V. N. Chubarikov

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №16-01-00-071).
[2]The work was carried out with the financial support of the RFBR (grant №16-01-00-071).

Arkhipova Lyudmila Gennadievna — candidate of physical and mathematical Sciences, Junior researcher of the Department of mathematics and computer methods of analysis, faculty of mechanics and mathematics, Lomonosov Moscow state University (Moscow).
e-mail: arhiludka@mail.ru
Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, head of the Department of mathematical and computer methods of analysis, president of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University (Moscov).
e-mail: chubarik2009@live.ru

Abstract

In the paper we continue studies on the theory of multivariate trigonometric sums, in the base of which lies of the I.M.Vinogradov's method. Here we obtain for $n = r = 2$ lower estimates of the convergence exponent of the singular series and the singular integral of the asymptotic formulas for $P \to \infty$ for the number of solutions of the following system of Diophantine equations

$$\sum_{j=1}^{2k}(-1)^j x_{1,j}^{t_1}\dots x_{r,j}^{t_r} = 0, \quad 0 \le t_1, \dots, t_r \le n,$$

where $n \ge 2, r \ge 1, k$ are natural numbers, moreover an each variable $x_{i,j}$ can take all integer values from 1 to $P \ge 1$.

Keywords: exponent of the convergence, singular integrals, singular series.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
L. G. Arkhipova, V. N. Chubarikov, 2019, "On the exponents of the convergence of singular integrals and singular series of a multivariate problem" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 46–57.

1. Введение

В настоящей работе продолжены исследования по теории кратных тригонометрических сумм, сердцевиной которой является мощный метод тригонометрических сумм И. М. Виноградова [1, 2]. Фундаментальные результаты в этой теории получены Г. И. Архиповым, А. А. Карацубой и вторым автором [5, 6, 7].

Ранее в статьях [12, 13] были найдены оценки снизу показателей сходимости особого ряда и особого интеграла асимптотической формулы при $P \to \infty$ для числа решений следующей системы диофантовых уравнений

$$\sum_{j=1}^{2k}(-1)^j x_{1,j}^{t_1}\dots x_{r,j}^{t_r} = 0, \quad 0 \le t_1, \dots, t_r \le n,$$

где $n \ge 2, r \ge 1, k$ — натуральные числа, причём каждая переменная $x_{i,j}$ может принимать все целые значения от 1 до $P \ge 1$.

Здесь мы уточняем эти оценки в случае $n = r = 2$. Далее мы рассматриваем систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \ldots + x_k = x_{k+1} + \ldots + x_{2k}, \\ y_1 + \ldots + y_k = y_{k+1} + \ldots + y_{2k}, \\ x_1^2 + \ldots + x_k^2 = x_{k+1}^2 + \ldots + x_{2k}^2, \\ x_1y_1 + \ldots + x_ky_k = x_{k+1}y_{k+1} + \ldots + x_{2k}y_{2k}, \\ y_1^2 + \ldots + y_k^2 = y_{k+1}^2 + \ldots + y_{2k}^2, \end{cases} \tag{1}$$

в которой неизвестные $x_1,\dots,x_{2k},y_1,\dots,y_{2k}$ принимают значения натуральных чисел от 1 до P, где $P\geq 1$, $k\geq 2$.

Пусть $L(x,y)=\alpha_{10}x+\alpha_{01}y$, $Q(x,y)=\alpha_{20}x^2+\alpha_{11}xy+\alpha_{02}y^2$. Тогда особый интеграл θ представляется в виде

$$\theta=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\int\limits_0^1\int\limits_0^1 e^{2\pi i(Q(x,y)+L(x,y))}dxdy\right|^{2k}d\alpha_{20}d\alpha_{11}d\alpha_{02}d\alpha_{10}d\alpha_{01}. \tag{2}$$

Далее, пусть $q_{10},q_{01},q_{20},q_{11},q_{02}$ — натуральные числа, $(a_{kl},q_{kl})=1$, $0\leq k,\ l\leq 2$, $q=q_{10}q_{01}q_{20}q_{11}q_{02}$,

$$L_q(x,y)=\frac{a_{10}}{q_{10}}x+\frac{a_{01}}{q_{01}}y,\ Q_q(x,y)=\frac{a_{20}}{q_{20}}x^2+\frac{a_{11}}{q_{11}}xy+\frac{a_{02}}{q_{02}}y^2, \tag{3}$$

$$F_q(x,y)=Q_q(x,y)+L_q(x,y). \tag{4}$$

Тогда особый ряд σ или среднее значение кратной полной рациональной тригонометрической суммы

$$S\left(q,F_q(x,y)\right)=\sum_{x=1}^{q}\sum_{y=1}^{q}e^{2\pi iF_q(x,y)} \tag{5}$$

имеет вид

$$\sigma=\sum_{q_{20}=1}^{+\infty}\sum_{q_{11}=1}^{+\infty}\sum_{q_{02}=1}^{+\infty}\sum_{q_{10}=1}^{+\infty}\sum_{q_{01}=1}^{+\infty}\times$$
$$\times\sum_{\substack{a_{20}=0\\(a_{20},q_{20})=1}}^{q_{20}-1}\sum_{\substack{a_{11}=0\\(a_{11},q_{11})=1}}^{q_{11}-1}\sum_{\substack{a_{02}=0\\(a_{02},q_{02})=1}}^{q_{02}-1}\sum_{\substack{a_{10}=0\\(a_{10},q_{10})=1}}^{q_{10}-1}\sum_{\substack{a_{01}=0\\(a_{01},q_{01})=1}}^{q_{01}-1}\left|q^{-1}S\left(q,F_q(x,y)\right)\right|^{2k}. \tag{6}$$

При исследовании показателя сходимости особого интеграла и ряда по сравнению с одномерной аддитивной задачей возникают следующие трудности: возможное появление особых кривых, связанных с многочленом в экспоненте сумм и интегралов, а также вопросы относительно сходимости кратных несобственных интегралов. В частности, имеем (см., например,[15])

$$\lim_{P\to+\infty}\int\limits_{-P}^{P}\int\limits_{-P}^{P}\sin\left(x^2+y^2\right)dxdy=\pi,$$

в то же время при натуральных значениях n находим

$$\lim_{n\to+\infty}\iint\limits_{x^2+y^2\leq 2\pi n}\sin\left(x^2+y^2\right)dxdy=0.$$

2. Особый интеграл

Лемма 1. *Пусть $Q(x,y)=a_{20}x^2+2a_{11}xy+a_{02}y^2$ — квадратичная форма с вещественными коэффициентами, $a_{20}^2+a_{11}^2+a_{02}^2\neq 0$. Тогда имеем*

$$J=\left|\lim_{B\to+\infty}\int_{-B}^{B}\int_{-B}^{B}e^{2\pi iQ(x,y)}dxdy\right|=(2\,|D|)^{-1/2},$$

где $D=a_{20}a_{02}-a_{11}^2$.

Доказательство. Сначала приведем квадратичную форму $Q(x,y)$ к диагональному виду. Пусть $a_{20}\neq 0$. Тогда имеем

$$Q(x,y)=a_{20}\left(x+\frac{a_{11}}{a_{20}}y\right)^2+\frac{D}{a_{20}}y^2=a_{20}x_1^2+\frac{D}{a_{20}}y_1^2=Q_1(x_1,y_1).$$

Следовательно,

$$J=\left|\lim_{B\to+\infty}\int_{-B}^{B}e^{2\pi i\frac{D}{a_{20}}y_1^2}dy_1\int_{-B+\frac{a_{11}}{a_{20}}y_1}^{B+\frac{a_{11}}{a_{20}}y_1}e^{2\pi ia_{20}x_1^2}dx_1\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{|D|}}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi ix^2}dx\right|^2=(2\,|D|)^{-1/2}.$$

Случай $a_{20}=a_{02}=0$, $a_{11}\neq 0$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $n\geq 1$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ — вещественные числа, и*

$$f(x)=\alpha_nx^n+\ldots+\alpha_1x,\ \beta_r(x)=f^{(r)}(x)/r!,\ r=1,\ldots,n.$$

$$H=H\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_n\right)=\min_{a\leq x\leq b}\sum_{r=1}^{n}|\beta_r(x)|^{1/r}.$$

Тогда для интеграла

$$J=\int_a^b e^{2\pi if(x)}dx$$

справедлива оценка

$$|J|\leq\min\left(b-a,6en^3H^{-1}\right).$$

Доказательство [6], теорема 1.1, с.13.

Лемма 3. *Пусть $F(x,y)=Q(x,y)+L(x,y)$, где $Q(x,y)$ — квадратичная форма вида $Q(x,y)=a_{20}x^2+2a_{11}xy+a_{02}y^2$, $D=a_{20}a_{02}-a_{11}^2$ — её дискриминант и $L(x,y)=a_{10}x+a_{01}y$ —линейная форма, и пусть*

$$H=\min_{0\leq x,y\leq 1}\left\{\sqrt{|D|}+\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|\right\}.$$

Тогда для интеграла J вида

$$J = \int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i F(x,y)} dxdy$$

справедлива оценка $|J| \le \min\left(1, H^{-1}\right)$.

Доказательство. При $H \le 1$ оценка $J \le 1$ очевидна. Пусть $H > 1$. Возможны несколько случаев: 1)$\sqrt{|D|} \ge \frac{H}{3}$, 2)$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| \ge \frac{H}{3}$ на некотором множестве $\Delta_1 \in K$, где K — квадрат $0 \le x, y \le 1$, 3)$\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \ge \frac{H}{3}$ на некотором множестве $\Delta_2 \in K$ и 4)$\sqrt{|D|} < \frac{H}{3}$, $\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| < \frac{H}{3}$, $\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| < \frac{H}{3}$ на множестве $K \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)$.

Рассмотрим случай 1). Из леммы 1 следует, что $|J| \le \left(\sqrt{|D|}\right)^{-1} \le H^{-1}$.

Пусть теперь имеет место случай 2). Тогда

$$|J| \le \int_0^1 dy \left| \int_0^1 e^{2\pi i F_1(x,y)} dx \right|,$$

где $F(x,y) = F_1(x,y) + a_{02}y^2 + a_{01}y$.

Представим многочлен $F_1(x,y)$ как многочлен $F_1(x,y) = F_2(x) = a_{20}x^2 + (2a_{11}y + a_{01})\,x$ от переменной x. Имеем $\left|\frac{\partial F_1}{\partial x}\right| = \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| = 2a_{20}x + 2a_{11}y + a_{01}$. Пользуясь леммой 2, получим

$$\left| \int_0^1 e^{2\pi i F_1(x,y)} dx \right| \le H^{-1}.$$

Отсюда находим $|J| \le H^{-1}$.

Случай 3) рассматривается аналогично.

Осталось рассмотреть случай 4). Этот случай не имеет места в силу определения величины H.

Лемма доказана.

Теорема 1. *Особый интеграл θ расходится при $k \le 5$.*

Доказательство. Пусть $P > 1$ — натуральное число. Обозначим символом $K\,(P)$ количество многочленов $F(x,y)$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{gathered} Q(x,y) = a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2,\ L(x,y) = a_{10}x + a_{01}y, \\ x_r = 0,25 + r\,(2P)^{-1},\ y_s = 0,25 + s\,(2P)^{-1},\ 1 \le r, s \le P, \\ F(x,y,r,s) = Q(x,y) + L(x,y) + a_{00} = \\ = Q(x - x_r, y - y_s) + \beta_{10}(x - x_r) + \beta_{01}(y - y_s) = \Phi(x - x_r, y - y_s), \end{gathered}$$

где $|\beta_{10}|, |\beta_{01}| \le c_1 P$, $c_1 =?$, $3P^2 < a_{20}, a_{02} \le 4P^2$, $P^2 < a_{11} \le 2P^2$.

Тогда для $\Phi = \Phi(x,y)$ имеем

$$J = \int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i F(x,y,r,s)} dxdy = \int_{-x_r}^{1-x_r} dx \int_{-y_s}^{1-y_s} e^{2\pi i \Phi(x,y)} dy = \sum_{k=1}^{5} J_k,$$

где при $\Delta = c/P$,

$$J_1 = \int\limits_{-\Delta}^{\Delta} dx \int\limits_{-\Delta}^{\Delta} e^{2\pi i\Phi} dy,\ J_2 = \int\limits_{-\Delta}^{\Delta} dx \int\limits_{\Delta}^{1-y_s} e^{2\pi i\Phi} dy,\ J_3 = \int\limits_{-\Delta}^{\Delta} dx \int\limits_{-y_s}^{-\Delta} e^{2\pi i\Phi} dy,$$

$$J_4 = \int\limits_{\Delta}^{1-x_r} dx \int\limits_{-y_s}^{1-y_s} e^{2\pi i\Phi} dy,\ J_5 = \int\limits_{-x_r}^{1-\Delta} dx \int\limits_{-y_s}^{1-y_s} e^{2\pi i\Phi} dy.$$

Сначала подготовим J_1 для оценки снизу. Имеем

$$J_1 = \int\limits_{-\Delta}^{\Delta} dx \int\limits_{-\Delta}^{\Delta} e^{2\pi iQ(x,y)} dy + \int\limits_{-\Delta}^{\Delta}\int\limits_{-\Delta}^{\Delta} \Psi(x,y) e^{2\pi iQ(x,y)} dxdy,$$

где $\Psi(x,y) = e^{2\pi i(\beta_{10}x+\beta_{01}y)} - 1$.

При $|x|, |y| \le \Delta$ находим

$$|\Psi(x,y)| = 2\left|\sin\pi\left(\beta_{10}x + +\beta_{01}y\right)\right| \le 2\pi\left(|\beta_{10}| + |\beta_{01}|\right)\Delta \le 4\pi c_1 \Delta P = 4\pi cc_1.$$

Следовательно,

$$\left|\int\limits_{-\Delta}^{\Delta}\int\limits_{-\Delta}^{\Delta} \Psi(x,y) e^{2\pi iQ(x,y)} dxdy\right| \le 4\pi c^3 c_1 P^{-2}$$

Далее, используя лемму 1, получим

$$\int\limits_{-\Delta}^{\Delta} dx \int\limits_{-\Delta}^{\Delta} e^{2\pi iQ(x,y)} dy = (2|D|)^{-1/2} + R,$$

где $R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$, причём

$$R_1 = \int\limits_{-\Delta}^{\Delta} dx \int\limits_{\Delta}^{+\infty} e^{2\pi iQ(x,y)} dy,\ R_2 = \int\limits_{-\Delta}^{\Delta} dx \int\limits_{-\infty}^{\Delta} e^{2\pi iQ(x,y)} dy,$$

$$R_3 = \int\limits_{\Delta}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi iQ(x,y)} dy,\ R_4 = \int\limits_{-\infty}^{-\Delta} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi iQ(x,y)} dy.$$

Оценим $|R|$ сверху. Имеем

$$R_1 = \int\limits_{-\Delta}^{\Delta} e^{2\pi i a_{20}x^2} dx \int\limits_{\Delta}^{+\infty} e^{2\pi i\left(a_{02}y^2 + 2a_{11}xy\right)} dy =$$

$$\int\limits_{-\Delta}^{\Delta} e^{2\pi i\left(a_{20} - \frac{a_{11}}{a_{02}}\right)x^2} dx \int\limits_{\Delta + \frac{a_{11}}{a_{02}}x}^{+\infty} e^{2\pi i a_{02}y^2} dy.$$

Отсюда, используя вторую теорему о среднем (см., например, теорема 10, с.212), находим $|R_1| \leq \left(\pi\sqrt{2}a_{02}\right)^{-1}$. Ананлогично получим, что $|R_2| \leq \left(\pi\sqrt{2}a_{02}\right)^{-1}$.

$$R_3 = \int\limits_{\Delta}^{+\infty} e^{2\pi i a_{20}x^2} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i\left(a_{02}y^2+2a_{11}xy\right)} dy =$$

$$= \int\limits_{\Delta}^{+\infty} e^{2\pi i\left(a_{20}-\frac{a_{11}^2}{a_{02}}\right)x^2} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i a_{02}y^2} dy = e^{\pi i/4}(2a_{02})^{-1/2} \int\limits_{\Delta}^{+\infty} e^{2\pi i\left(a_{20}-\frac{a_{11}^2}{a_{02}}\right)x^2} dx.$$

Следовательно, $|R_3| \leq \Delta\left(2\pi^2 a_{02}\right)^{-1/2}$. Аналогично $|R_4| \leq \Delta\left(2\pi^2 a_{02}\right)^{-1/2}$.

Таким образом, $|R| \leq \left((\pi\sqrt{2}a_{02})^{-1} + \Delta\left(2\pi^2 a_{02}\right)^{-1/2}\right)$.

Переходим к оценкам сверху интегралов J_k, $k = 2, 3, 4, 5$. Находим

$$|J_2| \leq \int\limits_{-\Delta}^{\Delta} \left| \int\limits_{\Delta}^{1-y_s} e^{2\pi i(a_{02}y^2+2a_{11}xy+a_{01}y)} dy \right| dx,$$

$$|J_4| \leq \int\limits_{-y_s}^{1-y_s} \left| \int\limits_{\Delta}^{1-x_r} e^{2\pi i(a_{20}x^2+2a_{11}xy+a_{10}x)} dx \right| dy.$$

Внутренний интеграл J_{41} в J_4 подобен внутреннему интегралу J_{21} в J_2, поэтому оценим только интеграл вида

$$J_{21} = \left| \int\limits_{\Delta}^{1-y_s} e^{2\pi i(a_{02}y^2+2a_{11}xy+a_{01}y)} dy \right| = \left| \int\limits_{\Delta+(a_{11}x+0,5a_{01})/a_{02}}^{1-y_s+(a_{11}x+0,5a_{01})/a_{02}} e^{2\pi i a_{02}y^2} \right|.$$

Далее, применяя вторую теорему о среднем к вещественной и мнимой частям интеграла J_{21}, получим

$$|J_{21}| \leq \left(2a_{02}\left(a_{02}a_{11} - 0,5a_{01}\right)\right)^{-1/2} \leq P^{-2}.$$

Подобно имеем $|J_{41}| \leq P^{-2}$. Таким образом находим оценки $|J_2| \leq \Delta P^{-2} \leq P^{-3}$, $|J_4| \leq P^{-2}$. Оценки интегралов J_3 и J_5 получаются аналогично. Имеем $|J_3| \leq P^{-3}$, $|J_5| \leq P^{-2}$. Следовательно, $|J| \geq 0,5\,(2\,|D|)^{-1/2}$.

Покажем теперь, что при $(r_1, s_1) \neq (r_2, s_2)$ многочлены $F(x, y, r_1, s_1)$ и $F(x, y, r_2, s_2)$ будут различны. Будем рассуждать от противного. Предположим, что $F(x, y, r_1, s_1) \equiv F(x, y, r_2, s_2)$ как функции от x и y. Имеем

$$F(x, y, r, s) = Q(x - x_r, y - y_s) + \beta_{10}(x - x_r) + \beta_{01}(y - y_s) =$$
$$= Q(x, y) - x\left(2a_{02}x_r + 2a_{11}y_s - \beta_{10}\right) - y\left(2a_{20}y_s + 2a_{11}x_r - \beta_{01}\right) + \beta.$$

В частности будут равны коэффициенты линейных форм, т.е.

$$\begin{cases} 2a_{20}x_{r_1} + 2a_{11}y_{s_1} - \beta_{10}^{'} = 2a_{20}x_{r_2} + 2a_{11}y_{s_2} - \beta_{10}^{''}, \\ 2a_{02}y_{r_1} + 2a_{11}x_{s_1} - \beta_{01}^{'} = 2a_{02}y_{r_2} + 2a_{11}x_{s_2} - \beta_{01}^{''}, \end{cases}$$

Подставляя $x_r = 0,25 + r\,(2P)^{-1}$, $y_s = 0,25 + s\,(2P)^{-1}$, $1 \leq r, s \leq P$ и полагая $r_1 - r_2 = u$, $s_1 - s_2 = v$, приходим к следующей системе уравнений

$$\begin{cases} a_{20}u + a_{11}v = \theta^{'}, \\ a_{11}u + a_{02}v = \theta^{''}, \end{cases}$$

где переменные u, v могут принимать только целые значения,

$$\theta' = P\left(\beta'_{10} - \beta''_{10}\right), \quad \theta'' = P\left(\beta'_{01} - \beta''_{01}\right).$$

Отсюда находим

$$u = \frac{\theta' a_{02} - \theta'' a_{11}}{D},\ v = \frac{\theta'' a_{20} - \theta' a_{11}}{D},\ D = a_{20}a_{02} - a_{11}^2.$$

Следовательно, $|u| < 1$, $|v| < 1$. Так как u и v — целые числа, то $u = v = 0$. Это противоречит тому, что многочлены $F(x, y, r_1, s_1)$ и $F(x, y, r_2, s_2)$ будут различны при $(r_1, s_1) \neq (r_2, s_2)$.

Таким образом, количество $K(P)$ многочленов F удовлетворяет неравенству $K(P) \leq P^{10}$.

Наконец, при $P_m = c_0^m$ имеем

$$\theta \geq \sum_{m=1}^{\infty} K(P_m) \left|J(P_m)\right|^{2k} \geq \sum_{m=1}^{\infty} P_m^{10-2k}.$$

Последний ряд расходится при $k \leq 5$.

Теорема доказана.

3. Особый ряд

Рассмотрим особый ряд σ, определяемый (3)-(6). Известно, что он сходится при $k > 9$ и расходится при $k \leq 5$. Здесь мы находим показатель сходимости σ.

Пусть каноническое разложение q имеет вид $q = \prod\limits_{p|q} p^{\alpha_p}$ и $q_p = q/p^{\alpha_p}$. Тогда имеем

$$S(q, F_q(x, y)) = \prod_{p|q} S\left(p^{\alpha_p}, q_p^{-1} F_q(q_p x, q_p y)\right).$$

Отсюда следует, что $\sigma = \prod\limits_p \sigma_p$, причём произведение распространяется на все простые числа, и

$$\sigma_p = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} A(p^s),\ A(p^s) = \sum_{a_{20}=0}^{p^s-1} \sum_{a_{11}=0}^{p^s-1} \sum_{\substack{a_{02}=0 \\ p|(a_{20},\ldots,a_{01})}}^{p^s-1} \sum_{a_{10}=0}^{p^s-1} \sum_{a_{01}=0}^{p^s-1} \left|p^{-2s} S(p^s, F_{p^s}(x, y))\right|^{2k}. \tag{7}$$

Лемма 4. *Пусть $p > 2$ — простое число, $F(x, y)$ — многочлен второй степени*

$$F(x, y) = a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y,$$

причём дискриминант его квадратичной формы $D = a_{20}a_{02} - a_{11}^2$ не сравним с нулём по модулю p.

Пусть далее

$$S = S(p, F(x, y)) = \sum_{x=1}^{p} \sum_{y=1}^{p} e^{2\pi i \left(\frac{a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y}{p^s}\right)}.$$

Тогда

$$|S(p, F(x, y))| = p.$$

Доказательство. Пусть $a_{20} \not\equiv 0 \pmod p$. Тогда имеем

$$F(x,y) = a_{20}\left(x + \frac{a_{11}}{a_{20}}y + \frac{a_{10}}{2}\right)^2 + \frac{D}{a_{20}}y^2 - a_{11}a_{10}y - \frac{a_{10}^2}{4}.$$

Воспользовавшись значением суммы Гаусса,отсюда находим

$$|S| = \sqrt{p}\left|\sum_{y=1}^{p} e^{2\pi i \frac{D}{a_{20}}y^2}\right| = p.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $p > 2$ — простое число, $s \geq 1$ — натуральное число, $F(x,y)$ — многочлен второй степени*

$$F(x,y) = a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y,$$

причём дискриминант его квадратичной формы $D = a_{20}a_{02} - a_{11}^2$ не сравним с нулём по модулю p.

Пусть далее

$$S = S\left(p^s, F(x,y)\right) = \sum_{x=1}^{p^s}\sum_{y=1}^{p^s} e^{2\pi i\left(\frac{a_{20}x^2+2a_{11}xy+a_{02}y^2+a_{10}x+a_{01}y}{p^s}\right)}.$$

Тогда

$$\left|S\left(p^s, F(x,y)\right)\right| \leq p^s.$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $s > 2$. Имеем

$$S = \sum_{u=1}^{p}\sum_{v=1}^{p} S_{u,v},$$

где

$$S_{u,v} = \sum_{\substack{x=1\\ x\equiv u \pmod p}}^{p^s} \sum_{\substack{y=1\\ y\equiv v \pmod p}}^{p^s} e^{2\pi i \frac{F(x,y)}{p^s}}.$$

Производя замену переменных $x = x_1 + p^{s-1}z_1$, $y = y_1 + p^{s-1}t_1$, $1 \leq x_1, y_1 \leq p^{s-1}$, $0 \leq z_1, t_1 \leq p$, получим

$$S_{u,v} = \sum_{\substack{x_1=1\\ x_1\equiv u \pmod p}}^{p^{s-1}} \sum_{\substack{y_1=1\\ y_1\equiv v \pmod p}}^{p^{s-1}} \sum_{z_1=0}^{p-1}\sum_{t_1=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{F(x_1+p^{s-1}z_1, y_1+p^{s-1}t_1)}{p^s}} =$$

$$= \sum_{\substack{x_1=1\\ x_1\equiv u \pmod p}}^{p^{s-1}} \sum_{\substack{y_1=1\\ y_1\equiv v \pmod p}}^{p^{s-1}} e^{2\pi i \frac{F(x_1,y_1)}{p^s}} \sum_{z_1=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{F'_{x_1}(x_1,y_1)z_1}{p}} \sum_{t_1=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{F'_{y_1}(x_1,y_1)t_1}{p}}.$$

Заметим, что для набора (u,v), не являющегося решением системы сравнений

$$\begin{cases} F'_x = 2a_{20}x + 2a_{11}y + a_{10} \equiv 0 \pmod p, \\ F'_y = 2a_{11}x + 2a_{02}y + a_{01} \equiv 0 \pmod p, \end{cases}$$

имеет место равенство $S_{u,v} = 0$.

Поскольку $D \not\equiv 0 \pmod p$, последняя система сравнений имеет единственное решение по модулю p: $u = \mu$, $v = \nu$. Следовательно, справедливо соотношение

$$S = S_{\mu,\nu} = p^2 \sum_{\substack{x_1=1 \\ x_1\equiv\mu \pmod p}}^{p^{s-1}} \sum_{\substack{y_1=1 \\ y_1\equiv\nu \pmod p}}^{p^{s-1}} e^{2\pi i \frac{F(x_1,y_1)}{p^s}}.$$

Далее находим

$$|S| = p^2 \left| \sum_{x_1=1}^{p^{s-2}} \sum_{y_1=1}^{p^{s-2}} e^{2\pi i F_1(x_1,y_1)} \right|,$$

где $F_1(x,y) = p^{-2}\left(F(\mu+px, \nu+py) - F(\mu,\nu)\right)$.

Применяя последнее соотношение $l = [s/2]$ раз, получим

$$|S| \le p^{2l} \left| \sum_{\substack{x_l=1 \\ x_l\equiv\mu_l \pmod p}}^{p^{s-2l}} \sum_{\substack{y_l=1 \\ y_l\equiv\nu_l \pmod p}}^{p^{s-2l}} e^{2\pi i \frac{F_l(x_l,y_l)}{p^{s-2l}}} \right|,$$

где $F_l(x,y) = p^{-2}\left(F_{l-1}(\mu_{l-1}+px, \nu_{l-1}+py) - F_{l-1}(\mu_{l-1},\nu_{l-1})\right)$.

Theorem 1. *Особый ряд σ расходится при $k \le 6$.*

Доказательство. Имеем $\sigma \ge \sigma_0$,где

$$\sigma_0 = \sum_{p>2} \sum_{\substack{a_{20}=1 \\ (a_{20},p)=1}}^{p^2} \sum_{\substack{a_{11}=1 \\ (a_{11},p)=1}}^{p^2} \sum_{\substack{a_{02}=1 \\ (a_{02},p)=1}}^{p^2} \sum_{\substack{a_{10}=1 \\ (a_{10},p)=1}}^{p} \sum_{\substack{a_{01}=1 \\ (a_{01},p)=1}}^{p} \sum_{b=1}^{(p-1)/2} \sum_{c=0}^{(p-1)} \sum_{d=0}^{(p-1)} \left| p^{-4} \sum_{x=1}^{p^2} \sum_{y=1}^{p^2} e^{2\pi i \Phi(bx+c, by+d)} \right|^{2k},$$

где

$$\Phi(x,y) = \frac{a_{20}}{p^2}x^2 + \frac{a_{11}}{p^2}xy + \frac{a_{02}}{p^2}y^2 + \frac{a_{10}}{p}x + \frac{a_{01}}{p}y.$$

Подставляя

$$x = u + pz,\ y = v + pt\ (1 \le u, v \le p,\ 0 \le z, t \le p-1),$$

при $p > 2$ находим

$$\sum_{x=1}^{p^2} \sum_{y=1}^{p^2} e^{2\pi i \Phi(x,y)} = \sum_{u=1}^{p} \sum_{v=1}^{p} e^{2\pi i \Phi(x,y)} \sum_{z=0}^{p-1} \sum_{t=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{2a_{20}uz + a_{11}(ut+vz) + 2a_{02}vt}{p}} = p^3$$

Следовательно,

$$\sigma_0 = \sum_{p>2} \sum_{\substack{a_{20}=1 \\ (a_{20},p)=1}}^{p^2} \sum_{\substack{a_{11}=1 \\ (a_{11},p)=1}}^{p^2} \sum_{\substack{a_{02}=1 \\ (a_{02},p)=1}}^{p^2} \sum_{\substack{a_{10}=1 \\ (a_{10},p)=1}}^{p} \sum_{\substack{a_{01}=1 \\ (a_{01},p)=1}}^{p} \sum_{b=1}^{(p-1)/2} \sum_{c=0}^{(p-1)} \sum_{d=0}^{(p-1)} p^{-2k} > 2^{-8} \sum_{p>n} p^{11-2k}.$$

Из расходимости ряда $\sum_p p^{11-2k}$ находим, что ряд σ_0, а значит и ряд σ расходятся при $11 - 2k \ge -1$, т.е. при $k \le 6$.

Теорема доказана.

4. Заключение

В настоящей статье для $n = r = 2$ доказаны нижние оценки показателей сходимости особого интеграла и особого ряда в многомерной проблеме Терри. На самом деле эти оценки точны. В ближайшее время мы предполагаем представить доказательство верхних оценок. Случай $n \geq 3$ является более сложным, так как отсутствуют точные формулы типа формул для сумм Гаусса.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М.: Наука, 1980.

2. Виноградов И. М. Основы теории чисел. Изд. 10-е. Спб.: Изд-во «Лань», 2004. 176 с.

3. Hua L.-K. Selected Papers. New York Inc.: Springer Verlag, 1983. 888 p.

4. Хуа Л.-Г. Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел. М.: Мир, 1964. 188 p.

5. Архипов Г. И. Избранные труды. Орёл.: Изд-во Орловского ун-та, 2013.

6. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. М.: Наука, 1987.

7. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. // Berlin-New York: Walter de Gruyter (de Gruyter Expositions in Mathematics 39), 2004.

8. Салиба Х. М., Чубариков В. Н. О многомерной системе сравнений Архипова–Карацубы // Докл. РАН. 2017. **472,** № 6. С. 631–633.

9. Салиба Х. М., Чубариков В. Н. Теорема о среднем для неполных рациональных тригонометрических сумм // Чебышёвский сб. 2019. **20,** № 1(69). С. 31–37.

10. Чубариков В. Н. Об одном кратном тригонометрическом интеграле // Докл. АН СССР. 1976. **227,** № 6. С. 1308–1310.

11. Чубариков В. Н. О кратных рациональных тригонометрических суммах и кратных интегралах // Матем. заметки. 1976. **20,** № 1. С. 61–68.

12. Чубариков В. Н. О показателе сходимости особого интеграла одной многомерной аддитивной проблемы // Докл. РАН. 2015. **46,** № 5. С. 530–532.

13. Чубариков В. Н. Показатель сходимости среднего значения полных рациональных арифметических сумм // Чебышёвский сб. 2015. **16,** № 4(56). С. 303–318.

14. Архипова Л. Г., Чубариков В. Н. Показатель сходимости особого ряда одной многомерной проблемы // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, математика, механика. 2018. № 5. С. 68–71.

15. Демидович Б. П. Сборник задач по математическому анализу. Изд. 19-е., испр. // СПб.: Изд-во «Лань», 2017. 624 с.

16. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу: Учеб. для вузов. Изд. 4-е., испр. // М.: Дрофа, 2004. 640 с.

REFERENCES

1. Vinogradov I. M. 1980. The method of trigonometric sums in the number theory // Moscow: Nauka, pp. 144.

2. Vinogradov I. M. 2004. Elements of the number theory. Ed. 10th. // Sankt-Petersburg: Publ. House «Lan'» , pp. 176.

3. Hua L.-K. 1983. Selected Papers. // New York Inc.: Springer Verlag, pp. 888.

4. Hua L.-K. 1964. The method of trigonometric sums and its applications in the number theory // Moscow: Mir, pp. 188.

5. Arkhipov G. I. 2013. Selected Works // Orjol: Publ.House of Orjol University.

6. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. 1987. The theory of multiple trigonometric sums // Moscow: Nauka.

7. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. 2004. Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis // Berlin-New York: Walter de Gruyter (de Gruyter Expositions in Mathematics 39).

8. Saliba H. M., Chubarikov V. N. 2017. On the multivariate Arkhipov–Karatsuba system of congruences // Dokl. RAS. **472,** № 6, p. 631–633.

9. Saliba H. M., Chubarikov V. N. 2019. The theorem on a mean value for non complete rational trigonometric sums // Chebyshev Sbornik. **20,** № 1(69), p. 31–37.

10. Chubarikov V. N. 1976. On a multiple integral // Dokl. AS USSR. **227,** № 6, p. 1308–1310.

11. Chubarikov V. N. 1976. On multiple rational trigonometric sums and multiple integrals // Math. notes. **20,** № 1, p. 61–68.

12. Chubarikov V. N. 2015. On the convergence exponent of the singular integral of a multivariate additive problem // Dokl. RAS. **46,** № 5, p. 530–532.

13. Chubarikov V. N. 2015. On the convergence exponent of the mean value of complete rational arithmetical sums // Chebyshev Sbornik. **16,** № 4(56), p. 303–318.

14. Arkhipova L. G., Chubarikov V. N. 2018. On the convergence exponent of the singular series of a multivariate problem // Vestn. Moscow University. Ser. 1, Mathematics, Mechanics. № 5, p. 68–71.

15. Demidovich B. P. 2017. The collection of problems on the mathematical analysis. Ed. 19th, correct. // Sankt-Petersburg: Publ.House «Lan'» , p. 624.

16. Arkhipov G. I., Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N. 2004. Lectures on the mathematical analysis: Text-book, Ed. 4th., correct. // Moscow: DROFA, p. 640.

Получено 28.10.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.