ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 511.6 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-357-370

Об ограниченности длин периодов непрерывных дробей ключевых элементов гиперэллиптических полей над полем рациональных чисел [1]

Г. В. Федоров

Федоров Глеб Владимирович — кандидат физико-математических наук, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: fedorov@mech.math.msu.su

Аннотация

Проблема периодичности функциональных непрерывных дробей элементов гиперэллиптического поля тесно связана с проблемой поиска и построения фундаментальных S-единиц гиперэллиптического поля и проблемой кручения в якобиане соответствующей гиперэллиптической кривой. Для эллиптических кривых над полем рациональных чисел проблема кручения была решена Б. Мазуром в 1978 году. Для гиперэллиптических кривых рода 2 и выше над полем рациональных чисел приведенные три проблемы остаются открытыми. Теория функциональных непрерывных дробей стала мощным арифметическим инструментом для исследования этих проблем. Кроме этого, возникающие в теория функциональных непрерывных дробей задачи имеют собственный интерес. Иногда эти задачи имеют аналоги в числовом случае, но особенно интересны задачи, которые значительно отличаются от числового случая. Одной из таких задач является задача об оценке сверху длин периодов функциональных непрерывных дробей элементов гиперэллиптического поля над полем рациональных чисел. В данной статье мы находим оценки сверху на длины периодов для ключевых элементов гиперэллиптического поля над полем рациональных чисел. В случае, когда гиперэллиптическое поле задается многочленом нечетной степени, длина периода рассматриваемых элементов либо бесконечна, либо не превосходит удвоенной степени фундаментальной S-единицы. Более интересный и сложный случай, когда гиперэллиптическое поле задается многочленом четной степени. В 2019 году В. П. Платоновым и Г. В. Федоровым для гиперэллиптических полей $L = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$, $\deg f = 2g + 2$, найден точный промежуток значений $s \in \mathbb{Z}$ таких, что непрерывные дроби элементов вида $\sqrt{f}/h^s \in L \setminus \mathbb{Q}(x)$ периодические. Используя этот результат в данной статье найдены точные оценки сверху на длины периодов функциональных непрерывных дробей элементов гиперэллиптического поля над полем рациональных чисел, зависящие только от рода гиперэллиптического поля и порядка группы кручения якобиана соответствующей гиперэллиптической кривой.

Ключевые слова: непрерывные дроби, длина периода, фундаментальные единицы, S-единицы, кручение в якобианах, гиперэллиптические поля, дивизоры, группа классов дивизоров.

Библиография: 27 названий.

Для цитирования:
Г. В. Федоров. Об ограниченности длин периодов непрерывных дробей ключевых элементов гиперэллиптических полей над полем рациональных чисел // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 357–370.

[1] Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 19-71-00029).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 4.

UDC 511.6 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-357-370

On boundedness of period lengths of continued fractions of key elements hyperelliptic fields over the field of rational numbers [2]

G. V. Fedorov

Fedorov Gleb Vladimirovich — candidate of physical and mathematical Sciences, faculty of mechanics and mathematics, Lomonosov Moscow state University (Moscow).
e-mail: fedorov@mech.math.msu.su

Abstract

The problem of the periodicity of functional continued fractions of elements of a hyperelliptic field is closely related to the problem of finding and constructing fundamental S-units of a hyperelliptic field and the torsion problem in the Jacobian of the corresponding hyperelliptic curve. For elliptic curves over a field of rational numbers, the torsion problem was solved by B. Mazur in 1978. For hyperelliptic curves of genus 2 and higher over the field of rational numbers, the above three problems remain open. The theory of functional continued fractions has become a powerful arithmetic tool for studying these problems. In addition, tasks arising in the theory of functional continued fractions have their own interest. Sometimes these tasks have analogues in the numerical case, but tasks that are significantly different from the numerical case are especially interesting. One such problem is the problem of estimating from above the lengths of periods of functional continued fractions of elements of a hyperelliptic field over a field of rational numbers. In this article, we find upper bounds on the period lengths for key elements of a hyperelliptic field over a field of rational numbers. In the case when the hyperelliptic field is defined by an odd degree polynomial, the period length of the elements under consideration is either infinite or does not exceed twice the degree of the fundamental S-unit. A more interesting and complicated case is when a hyperelliptic field is defined by a polynomial of even degree. In 2019, V. P. Platonov and G. V. Fedorov for hyperelliptic fields $L = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$, $\deg f = 2g + 2$, found the exact interval values $s \in \mathbb{Z}$ such that continued fractions of elements of the form $\sqrt{f}/h^s \in L \setminus \mathbb{Q}(x)$ are periodic. Using this result in this article, we find exact upper bounds on the period lengths of functional continued fractions of elements of a hyperelliptic field over a field of rational numbers, depending only on the genus of the hyperelliptic field and the order of the torsion group of the Jacobian of the corresponding hyperelliptic curve.

Keywords: continued fractions, period length, fundamental units, S-units, torsion in the Jacobians, hyperelliptic fields, divisors, divisor class group.

Bibliography: 27 titles.

For citation:
G. V. Fedorov, 2019, "On boundedness of period lengths of continued fractions of key elements hyperelliptic fields over the field of rational numbers" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 357–370.

[2]The work was supported by RSF (grant № 19-71-00029).

1. Введение

Пусть $F(X) \in K[X]$ — свободный от квадратов многочлен над полем K характеристики отличной от 2. В классическом случае рассматривается гиперэллиптическое поле $\mathcal{L} = K(X)(\sqrt{F})$, где у многочлена F степени $2g+2$, $g \geqslant 1$, старший коэффициент является полным квадратом в мультипликативной группе K^* поля K. Вопрос о периодичности непрерывной дроби $\sqrt{F}$, построенной в поле $K((X^{-1}))$, связан с многими математическими проблемами. Одной из первых таких проблем стала проблема интегрируемости в элеметарных функциях псевдоэллиптических интегралов, рассмотренная в работах Абеля [1] и Чебышева [2]. Современные результаты о периодичности непрерывной дроби $\sqrt{F}$ и эквивалентных условиях изложены в [3], [4]. В частности, из этих результатов следует, что в поле $\mathcal{L}$ элемент $\sqrt{F}$ и его разложение в непрерывную дробь играет ключевую роль в вопросах связанных с поиском фундаментальных единиц и рациональных точек кручения в якобиане гиперэллиптической кривой, заданной уравнением $Y^2 = F(X)$.

В отличие от числовых непрерывных дробей, в функциональном случае непрерывная дробь может быть квазипериодической — периодической с точностью до константы из K^*. Для непрерывной дроби элемента $\sqrt{F}$ справедливо утверждение: если длина квазипериода конечна, то длина периода либо равна длине квазипериода, либо равна удвоенной длине квазипериода.

В эллиптическом случае $\deg F = 4$ над полем констант $K = \mathbb{Q}$ в [5]-[6] был поставлен вопрос о возможной длине периода непрерывной дроби $\sqrt{F}$. Согласно теореме Мазура [7] для эллиптических кривых, если класс дивизора $(\infty^- - \infty^+)$ имеет конечный порядок m в группе классов дивизоров $\Delta^\circ(L)$, то $2 \leqslant m \leqslant 10$ или $m = 12$. Используя этот результат и параметризацию Куберта [8], в [9], [10], [11] показано, что длина периода n непрерывной дроби $\sqrt{F}$ принимает одно из значений $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 18, 22\}$, причем для каждого n из этого множества существует бесконечная серия соответствующих примеров неизоморфных эллиптических кривых. Для квадратичного поля констант K и $\deg F = 4$ в [12] доказано, что длина периода n непрерывной дроби $\sqrt{F}$ может принимать одно из значений $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 22, 26, 30, 34\}$.

Для гиперэллиптических полей общего вида $\mathcal{L} = K(X)(\sqrt{F})$, $\deg F = 2g+2$, $g \geqslant 1$, в статье [13] дана оценка сверху на длину квазипериода N непрерывной дроби элемента специального вида $\beta = (B + \sqrt{F})/A \in \mathcal{L}$, где $A, B \in K[X]$, $A \mid F - B^2$, согласно которой $N \leqslant m - p + 1$, где m — порядок класса дивизора $(\infty^- - \infty^+)$ в группе классов дивизоров $\Delta^\circ(L)$, p — порядок полюса элемента β в ∞^+.

Пусть теперь $f \in K[x]$ — свободный от квадратов многочлен произвольной степени. Пусть $h \in K[x]$ и нормирование v_h поля $K(x)$ имеет два продолжения v_h^- и v_h^+ на гиперэллиптическое поле $L = K(x)(\sqrt{f})$. В статье [14] показано, что в случае $\deg h = 1$ теория функциональных непрерывных дробей, связанных с нормированиями v_h^- и v_h^+, находит эффективное применение в поле L. Поэтому далее мы считаем, что $\deg h = 1$, многочлен f задан в кольце $K[h]$ и $L = K(h)(\sqrt{f})$. В этом случае элемент $\alpha \in L$ разлагается в поле формальных степенных рядов $K((h))$ в степенной ряд вида $\alpha = \sum\limits_{j=s}^{\infty} u_j h^j$, где $u_j \in K$. Если $\alpha \in L \setminus K(h)$, то α можно представить в виде формального степенного ряда в $K((h))$ двумя способами, которые соответствуют нормированиям v_h^- и v_h^+. Чтобы каждый элемент поля L имел однозначное разложение в $K((h))$, мы без ограничения общности фиксируем одно из вложений поля L в $K((h))$, соответствующее нормированию v_h^-. Для $\alpha \in L \setminus K(x)$ обозначим $\overline{\alpha}$ — сопряженный элемент к α.

Из теоремы 2 статьи [15] следует оценка снизу на длины квазипериодов непрерывных дробей некоторых специальных элементов гиперэллиптического поля. В статье [16] получены оценки сверху и снизу на длину квазипериода непрерывных дробей элементов $\sqrt{f}/h^g$ и

$\sqrt{f}/h^{g+1}$ в случае, когда $\deg f = 2g+1$. В статье [17] получены оценки, уточняющие результаты статьи [16], зависимости от четности степени фундаментальной S-единицы m, а также приведены примеры непрерывных дробей, на которых указанные оценки становятся точными.

В частности, длина квазипериода $N \leqslant m-2g+1$ для нечетной степени фундаментальной S-единицы m, и оценка $N \leqslant m-2g$ для четной степени фундаментальной S-единицы m.

В статьях [16]-[25] отмечалось, что элементы вида $\sqrt{f}/h^s$ для различных $s \in \mathbb{Z}$ играют особую роль для поиска фундаментальных S_h-единиц и изучения их свойств в гиперэллиптическом поле $L = K(h)(\sqrt{f})$. В статье [24] показано, что из квазипериодичности непрерывной дроби элемента $\sqrt{f}/h^s$ следует квазипериодичность непрерывной дроби $\sqrt{f}/h^{k-s}$, где $k = \deg f$.

В теореме 2 [18] при данном некотором $s \in \mathbb{Z}$ найдены достаточные условия одновременной квазипериодичности непрерывных дробей элементов $\alpha, \alpha \cdot h^s \in L \setminus K(x)$. Для гиперэллиптических полей $L = K(x)(\sqrt{f})$, построенных с помощью свободных от квадратов многочленов $f \in K[x]$ нечетной степени $2g+1$ достаточные условия также являются необходимыми. В случае $\deg f = 2g+2$ найденные достаточные условия не являются необходимыми, что подтверждается примерами 1-3 в статье [18]. Одним из наглядных эффектов случая, когда для элементов α и $\alpha \cdot h^s$ достаточные условия не являются необходимыми, является значительное отличие длин квазипериодов и периодов непрерывных дробей элементов α и $\alpha \cdot h^s$. Так, в примере 4 статьи [18] найден свободный от квадратов многочлен f степени 6, для которого длина периода непрерывной дроби элемента $\alpha = \sqrt{f}/h^3$ равна 2, а длина периода непрерывной дроби элемента $\alpha \cdot h^3 = \sqrt{f}$ равна 18 при том, что поле $L = K(x)(\sqrt{f})$ обладает фундаментальной S_h-единицей степени 4, где $S_h = \{v_h^-, v_h^+\}$.

В статье [26] дано уточнение теоремы 2 статьи [18]. А именно, в теореме 2 [26] для гиперэллиптических полей $L = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$, $\deg f = 2g+2$, найден точный промежуток значений $s \in \mathbb{Z}$ таких, что непрерывные дроби элементов вида $\sqrt{f}/h^s \in L \setminus \mathbb{Q}(x)$ периодические.

В данной статье, опираясь на результаты статьи [26], мы даем оценки сверху на возможные длины периодов непрерывных дробей ключевых элементов поля L над полем рациональных чисел. В теореме 5 доказано, что, если длина периода непрерывной дроби элемента вида $\sqrt{f}/h^s$ конечна, то она не превосходит $12m-4g$, где m есть степень фундаментальной S_h-единицы поля L. При более сильных условиях найдены более точные оценки на возможную длину периода. Приведены новые примеры элементов рассматриваемого вида с периодами, достигающими некоторые из приведенных оценок.

Мы высказываем предположение, что длины периодов непрерывных дробей элементов гиперэллиптического поля над полем алгебраических чисел K ограничены сверху постоянной, зависящей только от рода гиперэллиптического поля, порядка группы кручения якобиана соответствующей гиперэллиптической кривой и степени расширения $[K : \mathbb{Q}]$.

Символом $\operatorname{tc}(R)$ обозначим свободный член многочлена R.

2. О периодичности ключевых элементов

В 2018 году в статье [17] доказано, что для делителя d многочлена f квазипериодическая непрерывная дробь элемента вида $\sqrt{f}/(dh^s)$, $s \in \mathbb{Z}$, является периодической. Приведем альтернативное доказательство этого факта, которое нам будет полезно в дальнейших рассуждениях.

Из теоремы 1 [18] известно, что наличие хотя бы одного квазипериодического элемента в поле $L = K(h)(\sqrt{f})$ влечет ряд эквивалентных условий, среди которых мы выделяем разрешимость норменного уравнения вида

$$\mu_1^2 - \mu_2^2 f = bh^m, \quad \max\bigl(2\deg\mu_1,\ 2\deg\mu_2 + \deg f\bigr) = m. \tag{1}$$

По предложению 2 [18] норменное уравнение (1) можно свести к уравнению вида

$$f_2\mu_4^2 - f_1\mu_3^2 = h^{m_1}, \quad m_1 = \deg(f_2\mu_4^2) \geqslant \deg(f_1\mu_3^2), \quad \deg f_2 > 0, \quad f = b_0^2 f_1 f_2. \tag{2}$$

Как и в доказательстве теоремы 1 [18] запишем, как будет выглядеть уравнение (2) в поле $\mathcal{L} = K(X)(\sqrt{F})$, где $X = h^{-1}$, $F(X) = f \cdot h^{-2g-2}$. Для этого обозначим

$$\Omega_4 = \mu_4 \cdot h^{-\deg \mu_4}, \quad F_2 = f_2 \cdot h^{-\deg f_2}, \quad F_1 = F/F_2, \quad \Omega_3 = \mu_3 \cdot h^{g+1-\deg f_2 - \deg \mu_4},$$

тогда $F_1, F_2, \Omega_3, \Omega_4 \in K[X]$ и

$$F_2\Omega_4^2 - F_1\Omega_3^2 = 1, \quad F_1 \cdot F_2 = F, \quad v_X(F_2) = v_X(\Omega_4) = 0. \tag{3}$$

В статье [27] определено отношение $\approx$ для элементов $\alpha, \beta \in \mathcal{L} \setminus K(X)$, а именно $\alpha \approx \beta$, если найдутся $T, R, U, V \in K[X]$ такие, что

$$\alpha = \frac{T + R\beta}{U + V\beta}, \quad TV - RU \in K^*.$$

В теореме 1 [27] доказано, что $\alpha \approx \beta$ для $\alpha, \beta \in \mathcal{L} \setminus K(X)$ тогда и только тогда, когда $\beta_m = c\alpha_n$ для некоторых $m, n \in \mathbb{Z}$, $c \in K^*$. Отсюда следует, что непрерывные дроби элементов $\alpha \approx \beta$ одновременно квазипериодические (периодические) или не квазипериодические (не периодические).

Лемма 1. *Пусть многочлены $F_1, F_2, \Omega_3, \Omega_4 \in K[X]$ удовлетворяют* (3). *Тогда для любого $s \in \mathbb{Z}$ такого, что $-v_X(\Omega_3) \leqslant s \leqslant v_X(F_1\Omega_3)$, имеем*

$$\frac{\sqrt{F}}{F_2 \cdot X^s} \approx \frac{\sqrt{F}}{X^s} \approx \frac{X^s \cdot \sqrt{F}}{F_1}.$$

Доказательство. Сперва рассмотрим $T = X^{-s}F_1\Omega_3$, $R = \Omega_4$, $U = F_2\Omega_4$, $V = X^s\Omega_3$, тогда из (3) имеем

$$TV - RU = -(F_2\Omega_4^2 - F_1\Omega_3^2) \in K^*, \quad T, R, U, V \in K[X],$$

$$\frac{\sqrt{F}}{X^s} \approx \frac{T + R\sqrt{F}/X^s}{U + V\sqrt{F}/X^s} = \frac{\sqrt{F}}{F_2 \cdot X^s}.$$

Теперь положим $T = F_2\Omega_4$, $R = X^s\Omega_3$, $U = X^{-s}F_1\Omega_3$, $V = \Omega_4$, тогда из (3) получаем

$$TV - RU = F_2\Omega_4^2 - F_1\Omega_3^2 \in K^*, \quad T, R, U, V \in K[X],$$

$$\frac{\sqrt{F}}{X^s} \approx \frac{T + R\sqrt{F}/X^s}{U + V\sqrt{F}/X^s} = \frac{X^s \cdot \sqrt{F}}{F_1}.$$

Лемма 1 доказана. □

Теорема 1. *Пусть для некоторого $s_0 \in \mathbb{Z}$ непрерывная дробь элемента $\alpha = \sqrt{f}/h^{s_0}$ квазипериодическая.*

Тогда непрерывные дроби элементов $\sqrt{f}/h^{s_0}$, $h^{\deg f_2 - s_0}\sqrt{f}/f_2$ и $h^{s_0 - \deg f_2}\sqrt{f}/f_1$ периодические, где многочлены f_1, f_2 определены из (2) *согласно предложению 2 [18].*

Доказательство. Поскольку непрерывная дробь $\alpha = \sqrt{f}/h^{s_0}$ квазипериодическая, то в силу теоремы 1 [18] и предложения 2 [18] справедливо уравнение (2), а, следовательно, и (3), причем за счет условий (2) имеем $\deg_X F_2 > 0$. По предложению 3 [18] для $r = \max(2s_0, \deg f)$ получаем неравенство $v_X(\Omega_3) + g + 1 \geqslant r - s_0$.

Непрерывные дроби элементов $\sqrt{f}/h^{s_0}$ и $\sqrt{F}/X^{g+1-s_0}$, построенные соответственно в полях $K((h))$ и $K((X^{-1}))$, совпадают. В лемме 1 можно взять $s = g + 1 - s_0$, поскольку $|g+1-s_0| = r - s_0 - (g+1) + v_X(F_1) \leqslant v_X(F_1\Omega_3)$. Следовательно, непрерывные дроби $\sqrt{F}/X^s$, $\sqrt{F}/(F_2X^s)$ и $X^s\sqrt{F}/F_1$ квазипериодические. В силу $\deg_X F_2 > 0$ имеем

$$\max\left(-v_\infty\left(\sqrt{F}/X^s\right), -v_\infty\left(\sqrt{F}/(F_2X^s)\right), -v_\infty\left(X^s\sqrt{F}/F_1\right)\right) > 0,$$

значит, по теореме 3 [27] и лемме 1 получаем периодичность непрерывных дробей $\sqrt{F}/X^s$, $\sqrt{F}/(F_2X^s)$ и $X^s\sqrt{F}/F_1$. Отсюда следует периодичность непрерывных дробей

$$\sqrt{f}/h^{s_0}, \quad h^{\deg f_2 - s_0}\sqrt{f}/f_2 \ \text{ и } \ \sqrt{f}/(f_1 h^{\deg f_2 - s_0}).$$

Теорема 1 доказана. □

В частности, в случае s_0 по теореме 1 получаем, что квазипериодичность непрерывной дроби элемента $\sqrt{f}$ влечет ее периодичность. Данный факт для многочленов f нечетной степени впервые был доказан в 2017 году в статье [22].

3. Оценки на длину периода

Пусть элемент $\beta \in \mathcal{L} = K(X)(\sqrt{F})$ является корнем уравнения

$$\Lambda_2\beta^2 + 2\Lambda_1\beta + \Lambda_0 = 0, \tag{4}$$

где $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2 \in K[X]$ взаимно простые многочлены. Обозначим $D = \Lambda_1^2 - \Lambda_0\Lambda_2$. Тогда по теореме 2 [27] квазипериодичность непрерывной дроби $\beta = [a_0; a_1, \ldots]$ в $K((1/X))$ эквивалентна наличию решения $\Omega_1, \Omega_2 \in K[X]$, $\Omega_2 \neq 0$, уравнения

$$\Omega_1^2 - D\Omega_2^2 = a \in K^*. \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть существует решение $\Omega_1, \Omega_2 \in K[X]$, $\Omega_2 \neq 0$, уравнения* (5). *Тогда длина квазипериода непрерывной дроби элемента β не превосходит*

$$\deg\Omega_2 + \max\left(\deg\Lambda_1, \ \frac{1}{2}(\deg\Lambda_0 + \deg\Lambda_2)\right).$$

Доказательство. Обозначим длину квазипериода непрерывной дроби элемента β через N. Так как $\Omega_1^2 = D\Omega_2^2 + a$ — полный квадрат в $K[X]$, то уравнение $R^2 + 2\Omega_2\Lambda_1R + \Lambda_0\Lambda_2\Omega_2^2 - a = 0$ имеет решение $R \in K[X]$:

$$R = -\Omega_2\Lambda_1 + \Omega_1.$$

Определим

$$T = \Omega_2\Lambda_2, \quad U = R + 2\Omega_2\Lambda_1, \quad S = -\Omega_2\Lambda_0,$$

тогда $RU - ST = a$ и $T \neq 0$. С введенными обозначениями уравнение (4) равносильно соотношению

$$\beta = \frac{R\beta + S}{T\beta + U}. \tag{6}$$

Подставим тождество

$$\beta = \frac{P_{n-1}\beta_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}\beta_n + Q_{n-2}}$$

в соотношение (6), тогда

$$\beta = \frac{A\beta_n + B}{C\beta_n + D},$$
$$A = RP_{n-1} - \Omega_2\Lambda_0 Q_{n-1}, \qquad B = RP_{n-2} - \Omega_2\Lambda_0 Q_{n-2},$$
$$C = RQ_{n-1} + \Omega_2\Lambda_2 P_{n-1}, \qquad D = RQ_{n-2} + \Omega_2\Lambda_2 P_{n-1},$$

причем $AD - BC \in K^*$. С некоторого номера справедливо $v_\infty^-(\beta_n) \geqslant 1$, поэтому по лемме 1 [27] найдется номер $t \geqslant n$ такой, что для некоторого $b \in K^*$

$$\beta_{t+1} = b\beta_n, \quad \frac{A}{C} = \frac{P_t}{Q_t}, \quad \frac{B}{D} = \frac{P_{t-1}}{Q_{t-1}}. \tag{7}$$

Тогда для длины квазипериода верна оценка $N \leqslant t + 1 - n$ и справедливы неравенства

$$\deg A \geqslant \deg P_t = \sum_{j=0}^{t} \deg a_j \geqslant \deg P_{n-1} + t + 1 - n \geqslant \deg P_{n-1} + N. \tag{8}$$

Следовательно,

$$N \leqslant \deg A - \deg P_{n-1} \leqslant \max\bigl(\deg R,\ \deg \Omega_2 + \deg \Lambda_0 - \deg a_0\bigr) \leqslant$$
$$\leqslant \max\left(\deg \Omega_2 + \deg \Lambda_1,\ \deg \Omega_1,\ \deg \Omega_2 + \frac{1}{2}\left(\deg \Lambda_0 + \deg \Lambda_2\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \deg \Omega_2 + \max\left(\deg \Lambda_1,\ \frac{1}{2}\left(\deg \Lambda_0 + \deg \Lambda_2\right)\right).$$

Теорема 2 доказана. □

Теорема 3. *Пусть элемент $\beta = \sqrt{F}/X^s \in \mathcal{L}$ для некоторого $s \in \mathbb{Z}$ имеет квазипериодическое разложение в непрерывную дробь. Тогда для некоторого $F_1 \mid F$, $\deg F_1 < \deg F$, длина квазипериода не превосходит $\deg \Omega_1 - \delta$, где*

$$\delta = \max\bigl(0, \deg F_1 - g - s - 2\bigr) + \max\bigl(0, g - s\bigr) + \max\bigl(0, g + s - \deg F_1\bigr).$$

В частности, если многочлен F неприводим и $s \geqslant -g$, то длина квазипериода не превосходит $\deg \Omega_1 - 2g$.

Доказательство. По теореме 1 для некоторого представления $F = F_1 \cdot F_2$, $F_1, F_2 \in K[X]$, $\deg F_2 > 0$, непрерывные дроби элементов

$$\frac{\sqrt{F}}{F_2 \cdot X^s}, \qquad \frac{\sqrt{F}}{X^s}, \qquad \frac{X^s \cdot \sqrt{F}}{F_1}$$

периодичны, причем по лемме 1 их периоды совпадают с точностью до сдвига и домножения на некоторую постоянную. Следовательно, в каждом из трех квазипериодов найдутся неполные частные каждой положительной степени из следующих значений

$$-v_\infty^-\left(\frac{\sqrt{F}}{F_2 \cdot X^s}\right), \qquad -v_\infty^-\left(\frac{\sqrt{F}}{X^s}\right), \qquad -v_\infty^-\left(\frac{X^s \cdot \sqrt{F}}{F_1}\right).$$

Значит, в оценке степеней неполных частных (8) степени некоторых трех неполных частных можно оценить более точно значениями

$$\max\bigl(1, g + 1 - s - \deg F_2\bigr), \qquad \max\bigl(1, g + 1 - s\bigr), \qquad \max\bigl(1, g + 1 + s - \deg F_1\bigr).$$

Обозначим

$$\delta = \max\bigl(0, g - s - \deg F_2\bigr) + \max\bigl(0, g - s\bigr) + \max\bigl(0, g + s - \deg F_1\bigr),$$

тогда

$$\deg A \geqslant \deg P_t = \sum_{j=0}^{t} \deg a_j \geqslant \deg P_{n-1} + N + \delta. \tag{9}$$

Далее, рассуждая как при доказательстве теоремы 2, для элемента $\beta = \sqrt{F}/X^s$ получаем

$$N + \delta \leqslant \deg A - \deg P_{n-1} \leqslant \max\bigl(\deg R,\ \deg \Omega_2 + \deg \Lambda_0 - \deg a_0\bigr) \leqslant$$
$$\leqslant \max\left(\deg \Omega_1,\ \deg \Omega_2 + \frac{1}{2}\left(\deg \Lambda_0 + \deg \Lambda_2\right)\right) = \deg \Omega_1.$$

Теорема 3 доказана. $\square$

В следующей теореме рассматривается базовое поле констант $K = \mathbb{Q}$. Это ограничение существенно для использования теоремы 2 [26].

Теорема 4. *Пусть $s \in \mathbb{Z}$ и гиперэллиптическое поле $\mathcal{L} = \mathbb{Q}(X)(\sqrt{F})$ содержит фундаментальную S_∞-единицу степени m, где $S_\infty = \{v_\infty^-, v_\infty^+\}$. Если длина квазипериода непрерывной дроби $\sqrt{F}/X^s$ конечна, то она не превосходит $6m - 2g$, а длина периода не превосходит $12m - 4g$.*

Доказательство. По теореме 2 [27] квазипериодичность непрерывной дроби элемента $\sqrt{F}/X^s$ эквивалентна наличию решения $\Omega_1, \Omega_2 \in K[X]$, $\Omega_2 \neq 0$, уравнения (5), где $D = FX^{2s}$, $K = \mathbb{Q}$. Пусть непрерывной дробь элемента $\sqrt{F}/X^s$ квазипериодическая, тогда найдутся $\Omega_1, \Omega_2 \in K[X]$ минимальной степени такие, что $\Omega_2 \neq 0$ и справедливо (5). Наличие квазипериодических элементов в поле $\mathcal{L}$ влечет периодичность элемента $\sqrt{F}$, поэтому существуют $\mu_1, \mu_2 \in K[X]$ такие, что $\mu_1^2 - F\mu_2^2 \in K^*$ и $\mu_1 + \mu_2\sqrt{F}$ есть фундаментальная S_∞-единица степени m. Обозначим

$$\mu_1^{(n)} + \mu_2^{(n)}\sqrt{F} = (\mu_1 + \mu_2\sqrt{F})^n.$$

Тогда для квазипериодичности непрерывной дробь элемента $\sqrt{F}/X^s$ необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $n \in \mathbb{N}$ было выполнено $X^s \mid \mu_2^{(n)}$, или, равносильно, $X^s\Omega_2 = c\mu_2^{(n)}$ для некоторой постоянной $c \in K^*$. Из теоремы 2 [26] следует, что, если $X^s \nmid \mu_2$, то справедливо одно из соотношений $X^s \mid \mu_1^{(2)}$ или $X^s \mid \mu_1^{(3)}$ или $X^s \mid \mu_2^{(3)}$, причем, если $X^s \mid \mu_1^{(2)}$, то $X^s \mid \mu_2^{(4)}$, а если $X^s \mid \mu_1^{(3)}$, то $X^s \mid \mu_2^{(6)}$. Итак, $X^s\Omega_2 = c\mu_2^{(n)}$ для некоторого $n \leqslant 6$, следовательно, $\deg \Omega_1 \leqslant 6m$. По теореме 3 заключаем, что длина квазипериода непрерывной дроби $\sqrt{F}/X^s$ не превосходит $6m - 2g$.

Теорема 4 доказана. $\square$

В статье [26] приведен пример эллиптического поля $\mathcal{L} = \mathbb{Q}(X)(\sqrt{F})$, $\deg F = 4$, в котором есть фундаментальная S_∞-единица степени 4, квазипериод непрерывной дроби элемента $\sqrt{F}/X$ совпадает с периодом и равен 20, квазипериод непрерывной дроби элемента $\sqrt{F}/X^2$ равен 19, а период — 38. Таким образом, для многочленов F четной степени длины периодов непрерывных дробей вида $\sqrt{F}/X^s$ могут значительно превышать степень фундаментальной S_∞-единицы.

В следующей теореме найдены оценки длин периодов непрерывных дробей элементов поля L, связанных с конечными линейными нормированиями.

Теорема 5. *Пусть $f \in \mathbb{Q}[x]$ — свободный от квадратов многочлен, и $h \in \mathbb{Q}[x]$ — линейный многочлен. Пусть $u_h = h^{-m}(\mu_1 + \mu_2\sqrt{f})$ — фундаментальная S_h-единица в поле $L = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$.*

Для $\deg f = 2g+1$ *непрерывная дробь* $\sqrt{f}/h^{s_0}$ *квазипериодическая тогда и только тогда, когда* $s_0 \in \mathbb{Z}$ *удовлетворяет неравенству* $|s_0 - g - 1/2| \leqslant \deg \mu_1 - \deg \mu_2 - g$, *причем в случае квазипериодичности непрерывная дробь* $\sqrt{f}/h^{s_0}$ *является периодической, длина квазипериода не превосходит* $m - 2g$, *длина периода не превосходит* $2m - 4g$.

Для $\deg f = 2g+2$ *положим*

$$u_h^n = h^{-nm}(\mu_1^{(n)} + \mu_2^{(n)}\sqrt{f}), \quad r_n = \left|\deg \mu_1^{(n)} - \deg \mu_2^{(n)} - g - 1\right|.$$

1. *Если* $r_1 \neq 0$, *то элементы вида* $\sqrt{f}/h^{s_0}$ *имеют квазипериодическое разложение в непрерывную дробь тогда и только тогда, когда* $g+1-r_1 \leqslant s_0 \leqslant g+1+r_1$, *причем в случае квазипериодичности непрерывная дробь* $\sqrt{f}/h^{s_0}$ *является периодической, длина квазипериода не превосходит* $m-2g$, *длина периода не превосходит* $2m-4g$.

2. *Если* $r_1 = 0$, $r_2 \neq 0$, *то элементы вида* $\sqrt{f}/h^{s_0}$ *имеют квазипериодическое разложение в непрерывную дробь тогда и только тогда, когда* $g+1-r_2 \leqslant s_0 \leqslant g+1+r_2$, *причем в случае квазипериодичности непрерывная дробь* $\sqrt{f}/h^{s_0}$ *является периодической, длина квазипериода не превосходит* $4m-2g$, *длина периода не превосходит* $8m-4g$.

3. *Если* $r_1 = r_2 = 0$, *то элементы вида* $\sqrt{f}/h^{s_0}$ *имеют квазипериодическое разложение в непрерывную дробь тогда и только тогда, когда* $g+1-r_3 \leqslant s_0 \leqslant g+1+r_3$, *причем в случае квазипериодичности непрерывная дробь* $\sqrt{f}/h^{s_0}$ *является периодической, длина квазипериода не превосходит* $6m-2g$. *длина периода не превосходит* $12m-4g$.

Доказательство. Следует из предложения 4 [18], теоремы 2 [26] и теорем 3, 4. □

4. Заключение

Отметим, что теорема 5 уточняет оценку длины квазипериода в статье [13] для элементов вида $\sqrt{F}-M$, $\deg M \leqslant g+1$, $\deg(F-M^2) \leqslant g+1$, $g \geqslant 2$, для непрерывных дробей в $K((1/X))$ или для элементов вида $(\sqrt{f}-V)/h^{g+1}$, где $h^{g+1} \mid f-V^2$, $\deg V \leqslant g+1$, $g \geqslant 2$, для непрерывных дробей в $K((h))$.

Приведем несколько примеров, показывающих эффективность и неулучшаемость найденных в теоремах 3 и 5 оценок.

Пример 1. *Рассмортим* $F = X^4 + 20X^3 + 124X^2 + 144X - 432$. *Непрерывная дробь элемента* $\sqrt{F}$ *в* $\mathbb{Q}((1/X))$ *имеет вид*

$$\sqrt{F} = \Big[X^2+10X+12; \overline{-\frac{X}{48}-\frac{1}{12},\ 4X+16,}$$
$$\overline{-\frac{X^2}{96}-\frac{5X}{48}-\frac{1}{8},\ 4X+16,\ -\frac{X}{48}-\frac{1}{12},\ 2X^2+20X+24}\Big].$$

Длина квазипериода равна 3, коэффициент квазипериода равен $-1/96$, *длина периода равна 6. В поле* $\mathcal{L}$ *существует фундаментальная единица степени* 4, *порядок класса дивизора* $(\infty^- - \infty^+)$ *в группе классов дивизоров* $\Delta^\circ(L)$ *равен* 4. *Заметим, что* $\operatorname{tc}(p_3) \neq 0$, $\operatorname{tc}(q_3) \neq 0$, *поэтому в обозначениях теоремы 2 [26] имеем* $r_1 = 0$, *но* $\operatorname{tc}(p_3)^2 + 3\operatorname{tc}(F)\operatorname{tc}(q_3)^2 = 0$, *поэто-*

му $\mathrm{tc}\left(\mu_1^{(3)}\right) = 0$, *следовательно, непрерывная дробь элемента* $\sqrt{F}/X$ *периодическая*

$$\sqrt{F}/X = \Big[X+10;\ \overline{\frac{X}{12}+\frac{1}{3},\ \frac{X^2}{4}+X-3,\ -\frac{X}{6}-\frac{5}{3},\ -\frac{X}{2}-1,}$$
$$\overline{\frac{X}{2}+4,\ \frac{X}{6}-\frac{1}{3},\ -\frac{X}{2}-5,\ -\frac{X}{12}-\frac{1}{12},\ 4X+28,}$$
$$\overline{\frac{X^3}{384}+\frac{5X^2}{192}+\frac{X}{32}-\frac{1}{8},\ 4X+28,\ -\frac{X}{12}-\frac{1}{12},\ -\frac{X}{2}-5,\ \frac{X}{6}-\frac{1}{3},}$$
$$\overline{\frac{X}{2}+4,\ -\frac{X}{2}-1,\ -\frac{X}{6}-\frac{5}{3},\ \frac{X^2}{4}+X-3,\ \frac{X}{12}+\frac{1}{3},\ 2X+20}\Big].$$

Длина периода совпадает с длиной квазипериода и равна $20 < 6m - 2g$, *как в теореме 3 для неприводимого многочлена* F.

Пример 2. *Рассмортим* $F = X^4 + 36X^3 + 420X^2 + 1472X - 256$. *Непрерывная дробь элемента* $\sqrt{F}$ *в* $\mathbb{Q}((1/X))$ *имеет вид*

$$\sqrt{F} = \Big[X^2+18X+48;\ \overline{-\frac{X}{128}-\frac{1}{16},\ 4X+32,}$$
$$\overline{-\frac{X^2}{256}-\frac{9X}{128}-\frac{3}{16},\ 4X+32,\ -\frac{X}{128}-\frac{1}{16},\ 2X^2+36X+96}\Big].$$

Длина квазипериода равна 3, коэффициент квазипериода равен $-1/256$, *длина периода равна 6. В поле* $\mathcal{L}$ *существует фундаментальная единица степени* 4, *порядок класса дивизора* $(\infty^- - \infty^+)$ *в группе классов дивизоров* $\Delta^\circ(L)$ *равен* 4. *Заметим, что* $\mathrm{tc}\,(p_3) \neq 0$, $\mathrm{tc}\,(q_3) \neq 0$, *поэтому в обозначениях теоремы 2 [26] имеем* $r_1 = 0$, *но* $\mathrm{tc}\,(p_3)^2 + \mathrm{tc}\,(F)\,\mathrm{tc}\,(q_3)^2 = 0$, *поэтому* $\mathrm{tc}\left(\mu_1^{(2)}\right) = 0$, *следовательно, непрерывная дробь элемента* $\sqrt{F}/X$ *периодическая*

$$\sqrt{F}/X = \Big[X+18;\ \overline{\frac{X}{48}+\frac{1}{18},\ -\frac{27X}{8}-\frac{153}{4},\ \frac{2X}{81}+\frac{4}{81},\ \frac{81X}{64}+\frac{729}{32},}$$
$$\overline{\frac{4X}{81}+\frac{16}{81},\ -\frac{81X}{64}-\frac{243}{16},\ -\frac{X^3}{648}-\frac{X^2}{36}-\frac{2X}{27}+\frac{16}{81},\ -\frac{81X}{64}-\frac{243}{16},}$$
$$\overline{\frac{4X}{81}+\frac{16}{81},\ \frac{81X}{64}+\frac{729}{32},\ \frac{2X}{81}+\frac{4}{81},\ -\frac{27X}{8}-\frac{153}{4},\ \frac{X}{48}+\frac{1}{18},\ 2X+36}\Big].$$

Длина периода совпадает с длиной квазипериода и равна $14 = 4m - 2g$, *как в теореме 3 для неприводимого многочлена* F.

Пример 3. *Рассмортим* $F = (X+6)\left(X^3 - 2X^2 + 32X - 32\right)$. *Непрерывная дробь элемента* $\sqrt{F}$ *в* $\mathbb{Q}((1/X))$ *имеет вид*

$$\sqrt{F} = \Big[X^2+2X+8;\ \overline{\frac{X}{64}+\frac{1}{16},\ 4X-16,\ \frac{X}{64}+\frac{1}{16},\ 2X^2+4X+16}\Big].$$

Длина периода совпадает с длиной квазипериода и равна 4. В поле $\mathcal{L}$ *существует фундаментальная единица степени* 5, *порядок класса дивизора* $(\infty^- - \infty^+)$ *в группе классов дивизоров* $\Delta^\circ(L)$ *равен* 5. *Заметим, что* $\mathrm{tc}\,(p_3) \neq 0$, $\mathrm{tc}\,(q_3) \neq 0$, *поэтому в обозначениях теоремы 2*

[26] имеем $r_1 = 0$, но $3\,\mathrm{tc}\,(p_3)^2 + \mathrm{tc}\,(F)\,\mathrm{tc}\,(q_3)^2 = 0$, поэтому $\mathrm{tc}\left(\mu_2^{(3)}\right) = 0$, следовательно, непрерывная дробь элемента $\sqrt{F}/X$ периодическая

$$\sqrt{F}/X = \Big[X+2;\ \overline{\frac{X}{8}-1,\ \frac{X}{12}+\frac{8}{9},\ -\frac{27X}{8}-\frac{45}{4},\ -\frac{2X}{81}+\frac{4}{81},}$$
$$\overline{-\frac{81X}{32}-\frac{81}{16},\ \frac{4X}{81}+\frac{16}{81},\ -\frac{81X^2}{256}+\frac{81X}{64}-\frac{81}{8},\ \frac{4X}{81}+\frac{16}{81},}$$
$$\overline{-\frac{81X}{32}-\frac{81}{16},\ -\frac{2X}{81}+\frac{4}{81},\ -\frac{27X}{8}-\frac{45}{4},\ \frac{X}{12}+\frac{8}{9},\ \frac{X}{8}-1,\ 2X+4}\Big].$$

Длина периода совпадает с длиной квазипериода и равна 14, как в теореме 3.

Пример 4. *Рассмортим $F = (X+6)\left(X^3+30X^2+224X-32\right)$. Непрерывная дробь элемента $\sqrt{F}$ в $\mathbb{Q}((1/X))$ имеет вид*

$$\sqrt{F} = \Big[X^2+18X+40;\ \overline{-\frac{X}{64}-\frac{1}{16},}$$
$$\overline{4X+48,\ -\frac{X}{64}-\frac{1}{16},\ 2X^2+36X+80}\Big].$$

Длина периода совпадает с длиной квазипериода и равна 4. В поле $\mathcal{L}$ существует фундаментальная единица степени 5, порядок класса дивизора $(\infty^- - \infty^+)$ в группе классов дивизоров $\Delta^\circ(L)$ равен 5. Заметим, что $\mathrm{tc}\,(p_4) \neq 0$, $\mathrm{tc}\,(q_4) \neq 0$, поэтому в обозначениях теоремы 2 [26] имеем $r_1 = 0$, но $3\,\mathrm{tc}\,(p_4)^2 + \mathrm{tc}\,(F)\,\mathrm{tc}\,(q_4)^2 = 0$, поэтому $\mathrm{tc}\left(\mu_2^{(3)}\right) = 0$, следовательно, непрерывная дробь элемента $\sqrt{F}/X$ периодическая

$$\sqrt{F}/X = \Big[X+18;\ \overline{\frac{X}{40}+\frac{1}{25},\ -\frac{125X}{12}-\frac{850}{9},\ \frac{27X}{10000}+\frac{9}{400},}$$
$$\overline{-\frac{10000X}{81}-\frac{10000}{81},\ -\frac{81X}{320000}-\frac{729}{160000},\ -\frac{40000X}{81}-\frac{160000}{81},}$$
$$\overline{-\frac{81X^2}{2560000}-\frac{243X}{640000}+\frac{81}{80000},\ -\frac{40000X}{81}-\frac{160000}{81},\ -\frac{81X}{320000}-\frac{729}{160000},}$$
$$\overline{-\frac{10000X}{81}-\frac{10000}{81},\ \frac{27X}{10000}+\frac{9}{400},\ -\frac{125X}{12}-\frac{850}{9},\ \frac{X}{40}+\frac{1}{25},\ 2X+36}\Big].$$

Длина периода совпадает с длиной квазипериода и равна 14, как в теореме 3. Этот пример показывает, что при сравнительно небольших коэффициентах многочлена F коэффициенты неполных частных периодической непрерывной дроби могут быть достаточно велики.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abel N. H. Uber die Integration der Differential-Formel $\rho\ \mathrm{d}x/\sqrt{R}$, wenn R und ρ ganze Functionen sind // J. Reine Angew. Math. 1826. № 1. P. 185–221.

2. Chebychev P. L. Sur l'integration de la differential $\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma}}\mathrm{d}x$ // J. Math. Pures Appl. 1864. Vol. 2, № 9. P. 225–246.

3. Adams W. W., Razar M. J. Multiples of points on elliptic curves and continued fractions // Proc. London Math. Soc. 1980. Vol. 41, № 3. P. 481–498.

4. Платонов В. П. Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел // УМН. 2014. Т. 69, № 1(415). С. 3–38.

5. Schinzel A. On some problems of the arithmetical theory of continued fractions // Acta Arith. 1960/1961. Vol. 6. P. 393–413.

6. Schinzel A. On some problems of the arithmetical theory of continued fractions. II // Acta Arith. 1961/1962. Vol. 7. P. 287–298.

7. Mazur B. Rational isogenies of prime degree // Ivent. Math. 1978. Vol. 44, № 2. P. 129–162.

8. Kubert D. S. Universal bounds on the torsion of elliptic curves // Proc. London Math.Soc. (3). 1976. Vol. 33, № 2. P. 193–237.

9. Van Der Poorten A. J., Tran X. C. Periodic continued fractions in elliptic function fields // International Algorithmic Number Theory Symposium. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2002. P. 390–404.

10. Pappalardi F., Van der Poorten A. J. Pseudo-elliptic integrals, units, and torsion // Journal of the Australian Mathematical Society. 2004. Vol. 79, № 3. P. 69–78.

11. Scherr Z. L. Rational polynomial pell equations // A dissertation submitted in partial fullment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy (Mathematics) in The University of Michigan. 2013.

12. Sadek M. Periodic continued fractions and elliptic curves over quadratic fields // Journal of Symbolic Computation. 2016. Vol. 76. P. 200–218.

13. Berry T. G. On periodicity of continued fractions in hyperelliptic function fields Arch. Math. 1990. Vol. 55. P. 259–266.

14. Беняш-Кривец В. В., Платонов В. П. Группы S-единиц в гиперэллиптических полях и непрерывные дроби // Матем. сб. 2009. Т. 200, № 1. С. 15–44.

15. Платонов В. П., Жгун В. С., Федоров Г. В. Непрерывные дроби в гиперэллиптических полях и многочлены Мамфорда // ДАН. 2016. Т. 471, № 6. С. 640–644.

16. Платонов В. П., Федоров Г. В., S-единицы и периодичность непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // ДАН. 2015. Т. 465, № 5. С. 537–541.

17. Платонов В. П., Петрунин М. М. Группы S-единиц и проблема периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Тр. МИАН. 2018. Т. 302. С. 354–376.

18. Платонов В. П., Федоров Г. В. О проблеме периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Матем. сб. 2018. Т. 209, № 4. С. 54–94.

19. Федоров Г. В. Периодические непрерывные дроби и S-единицы с нормированиями второй степени в гиперэллиптических полях // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, № 3. С. 279–294.

20. Платонов В. П., Федоров Г. В. О периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // ДАН. 2017. Т. 474, № 5. С. 540–544.

21. Платонов В. П., Федоров Г. В. О периодичности непрерывных дробей в эллиптических полях // ДАН. 2017. Т. 475, № 2. С. 133–136.

22. Петрунин М. М., О периодичности квадратных корней в гиперэллиптических полях, ДАН. 2017. Т. 474, № 2. С. 155–158.

23. Платонов В. П., Петрунин М. М. S-единицы и периодичность в квадратичных функциональных полях // УМН. 2016. Т. 71, № 5. С. 181–182.

24. Платонов В. П., Петрунин М. М. S-единицы в гиперэллиптических полях и периодичность непрерывных дробей // ДАН. 2016. Т. 470, № 3. С. 260–265.

25. Жгун В. С., Обобщенные якобианы и непрерывные дроби в гиперэллиптических полях // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, № 4. С. 208–220.

26. Платонов В. П., Федоров Г. В., Критерий периодичности непрерывных дробей ключевых элементов гиперэллиптических полей // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, № 1. С. 246–258.

27. Schmidt W. M. On continued fractions and diophantine approximation in power series fields // Arch. Math. 2000. Vol. 95, № 2. P. 139–166.

REFERENCES

1. Abel N. H. 1826, "Uber die Integration der Differential-Formel $\rho\,\mathrm{d}x/\sqrt{R}$, wenn R und ρ ganze Functionen sind", *J. Reine Angew. Math.*, no. 1, pp. 185–221.

2. Chebychev P. L. 1864, "Sur l'integration de la differential $\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma}}\mathrm{d}x$", *J. Math. Pures Appl.*, vol. 2, no. 9, pp. 225–246.

3. Adams W. W., Razar M. J. 1980, "Multiples of points on elliptic curves and continued fractions", *Proc. London Math. Soc.*, vol. 41, no. 3, pp. 481–498.

4. Platonov, V. P. 2014, "Number-theoretic properties of hyperelliptic fields and the torsion problem in Jacobians of hyperelliptic curves over the rational number field", *Russian Math. Surveys*, vol. 69, no. 1, pp. 1–34.

5. Schinzel A. 1960/1961, "On some problems of the arithmetical theory of continued fractions", *Acta Arith.*, vol. 6, pp. 393–413.

6. Schinzel A. 1961/1962, "On some problems of the arithmetical theory of continued fractions. II", *Acta Arith.*, vol. 7, pp. 287–298.

7. Mazur B. 1978, "Rational isogenies of prime degree", *Ivent. Math.*, vol. 44, no. 2, pp. 129–162.

8. Kubert, D. S. 1976, "Universal bounds on the torsion of elliptic curves" *Proc. London Math.Soc. (3)*, vol. 33, no. 2, pp. 193–237.

9. Van Der Poorten A. J., Tran X. C. 2002, "Periodic continued fractions in elliptic function fields", *International Algorithmic Number Theory Symposium.* – Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 390–404.

10. Pappalardi F., Van der Poorten A. J. 2004, "Pseudo-elliptic integrals, units, and torsion", *Journal of the Australian Mathematical Society*, vol. 79, no.3, pp. 69–78.

11. Scherr Z. L. 2013, "Rational polynomial pell equations", *A dissertation submitted in partial fullment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy (Mathematics) in The University of Michigan.*

12. Sadek M. 2016, “Periodic continued fractions and elliptic curves over quadratic fields”, *Journal of Symbolic Computation*, vol. 76, pp. 200–218.

13. Berry, T. G. 1990, “On periodicity of continued fractions in hyperelliptic function fields”, *Arch. Math.*, vol. 55, pp. 259–266.

14. Benyash-Krivets, V. V., Platonov, V. P. 2009, “Groups of S-units in hyperelliptic fields and continued fractions”, *Sb. Math.*, vol. 200, no. 11, pp. 1587–1615.

15. Platonov, V. P., Zhgoon, V. S., Fedorov, G. V. 2016, “Continued Rational Fractions in Hyperelliptic Fields and the Mumford Representation”, *Dokl. Math.*, vol. 94, no. 3, pp. 692–696.

16. Platonov, V. P., Fedorov, G. V. 2015, “S-Units and Periodicity of Continued Fractions in Hyperelliptic Fields”, *Dokl. Math.*, vol. 92, no. 3, pp. 752–756.

17. Platonov, V. P., Petrunin, M. M. 2018, “Groups of S-units and the problem of periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 302, pp. 336–357.

18. Platonov, V. P., Fedorov, G. V. 2018, “On the problem of periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields”, *Sb. Math.*, vol. 209, no. 4, pp. 519–559.

19. Fedorov, G. V. 2018, “Periodic continued fractions and S-units with second degree valuations in hyperelliptic fields”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, no. 3. (In Russ.)

20. Platonov, V. P., Fedorov, G. V. 2017, “On the periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields”, *Dokl. Math.*, vol. 95, no. 3, pp. 254–258.

21. Platonov, V. P., Fedorov, G. V. 2017, “On the periodicity of continued fractions in elliptic fields”, *Dokl. Math.*, vol. 96, no. 1, pp. 332–335.

22. Petrunin, M. M. 2017, “S-units and periodicity of square root in hyperelliptic fields”, *Dokl. Math.*, vol. 95, no. 3, pp. 222–225.

23. Platonov, V. P., Petrunin, M. M. 2016, “S-Units and periodicity in quadratic function fields”, *Russian Math. Surveys*, vol. 71, no. 5, pp. 973–975.

24. Platonov, V. P., Petrunin, M. M. 2016, “S-units in hyperelliptic fields and periodicity of continued fractions”, *Dokl. Math.*, vol. 94, no. 2, pp. 532–537.

25. Zhgoon V. S. 2017, “On generalized jacobians and rational continued fractions in the hyperelliptic fields”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, no. 4, pp. 208–220. (In Russ.)

26. Platonov, V. P., Fedorov, G. V. 2019, “The criterion of the periodicity of continued fractions of key elements in hyperelliptic fields”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 246–258. (In Russ.)

27. Schmidt W. M. 2000, “On continued fractions and diophantine approximation in power series fields”, *Arch. Math.*, vol. 95, no. 2, pp. 139–166.

Получено 20.10.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.