ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 519.145 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-316-332

# О некоторых 3-примитивных полуполевых плоскостях[1]

О. В. Кравцова, И. В. Шевелева

**Кравцова Ольга Вадимовна** — кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики № 2, Институт математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета (г. Красноярск).
*e-mail: ol71@bk.ru*
**Шевелева Ирина Викторовна** — кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики № 2, Институт математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета (г. Красноярск).
*e-mail: sheveliv@gmail.com*

**Аннотация**

Развивается подход к построению и классификации полуполевых проективных плоскостей с использованием линейного пространства и регулярного множества. Решается задача построения проективной плоскости с фиксированными ограничениями на группу коллинеаций (автоморфизмов).

Проективная плоскость называется полуполевой, если ее координатизирующее множество есть полуполе, или кольцо с делением. Это алгебраическая система с двумя бинарными операциями, удовлетворяющая всем аксиомам тела, за исключением, возможно, ассоциативности умножения. Коллинеация конечной проективной плоскости порядка $p^{2n}$ ($p > 2$ простое) называется бэровской, если она фиксирует поточечно подплоскость порядка $p^n$. Если порядок бэровской коллинеации делит $p^n - 1$, но не делит $p^i - 1$ при $i < n$, то коллинеация называется $p$-примитивной. Полуполевая плоскость, допускающая такую коллинеацию, также называется $p$-примитивной.

М. Кордеро в 1997 г. построила четыре примера 3-примитивных полуполевых плоскостей порядка 81 с ядром порядка 9, используя регулярное множество, образованное $2 \times 2$-матрицами. В статье рассмотрен общий случай 3-примитивных полуполевых плоскостей порядка 81 с ядром порядка $\leq 9$ и регулярным множеством в кольце $4 \times 4$-матриц. Полученные авторами ранее независимо теоретические результаты применены для построения матричного представления регулярного множества и группы автотопизмов. Выделено восемь классов изоморфизма 3-примитивных полуполевых плоскостей порядка 81, включающих примеры М. Кордеро. Разработан алгоритм, оптимизирующий проверку попарной изоморфности полуполевых плоскостей, и его программная реализация. Показана разрешимость полной группы коллинеаций 3-примитивных полуполевых плоскостей порядка 81, вычислены порядки автотопизмов, в том числе бэровских.

Описано строение попарно неизотопных полуполей порядка 81, координатизирующих восемь попарно неизоморфных 3-примитивных полуполевых плоскостей порядка 81. Найдены спектры мультипликативных луп ненулевых элементов, лево- и правосторонние спектры, максимальные подполя и автоморфизмы. Полученные результаты иллюстрируют гипотезу Г. Венэ о лево- или правопримитивности конечного полуполя и демонстрируют некоторые аномальные свойства конечных полуполей.

Методы и алгоритмы, представленные в статье, могут быть использованы для построения и исследования полуполей и полуполевых проективных плоскостей нечетного порядка $p^n$ также для $p \geq 3$ и $n \geq 4$.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-01-00707).

*Ключевые слова:* полуполевая плоскость, коллинеация, автотопизм, бэровская подплоскость.

*Библиография:* 20 названий.

**Для цитирования:**
О. В. Кравцова, И. В. Шевелева. О некоторых 3-примитивных полуполевых плоскостях // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 3, с. 316–332.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 519.145 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-316-332

# On some 3-primitive projective planes[2]

O. V. Kravtsova, I. V. Sheveleva

**Kravtsova Olga Vadimovna** — candidate of physico-mathematical Sciences, associate Professor, Department of mathematics № 2, Institute of mathematics and computer sciences of Siberian Federal University (Krasnoyarsk).
*e-mail: ol71@bk.ru*
**Sheveleva Irina Viktorovna** — candidate of physico-mathematical Sciences, associate Professor, Department of mathematics № 2, Institute of mathematics and computer sciences of Siberian Federal University (Krasnoyarsk).
*e-mail: sheveliv@gmail.com*

**Abstract**

We evolve an approach to construction and classification of semifield projective planes with the use of the linear space and spread set. This approach is applied to the problem of existance for a projective plane with the fixed restrictions on collineation group.

A projective plane is said to be semifield plane if its coordinatizing set is a semifield, or division ring. It is an algebraic structure with two binary operation which satisfies all the axioms for a skewfield except (possibly) associativity of multiplication. A collineation of a projective plane of order $p^{2n}$ ($p > 2$ be prime) is called Baer collineation if it fixes a subplane of order $p^n$ pointwise. If the order of a Baer collineation divides $p^n - 1$ but does not divide $p^i - 1$ for $i < n$ then such a collineation is called $p$-primitive. A semifield plane that admit such collineation is a $p$-primitive plane.

M. Cordero in 1997 construct 4 examples of 3-primitive semifield planes of order 81 with the nucleus of order 9, using a spread set formed by $2 \times 2$-matrices. In the paper we consider the general case of 3-primitive semifield plane of order 81 with the nucleus of order $\leq 9$ and a spread set in the ring of $4 \times 4$-matrices. We use the earlier theoretical results obtained independently to construct the matrix representation of the spread set and autotopism group. We determine 8 isomorphism classes of 3-primitive semifield planes of order 81 including M. Cordero examples.

We obtain the algorithm to optimize the identification of pair-isomorphic semifield planes, and computer realization of this algorithm. It is proved that full collineation group of any semifield plane of order 81 is solvable, the orders of all autotopisms are calculated.

We describe the structure of 8 non-isotopic semifields of order 81 that coordinatize 8 non-isomorphic 3-primitive semifield planes of order 81. The spectra of its multiplicative loops of non-zero elements are calculated, the left-, right-ordered spectra, the maximal subfields and

[2]The study was carried out with a grant from the Russian Foundation for Basic Research (project 16-01-00707).

automorphisms are found. The results obtained illustrate G. Wene hypothesis on left or right primitivity for any finite semifield and demonstrate some anomalous properties.

The methods and algorithsm demonstrated can be used for construction and investigation of semifield planes of odd order $p^n$ for $p \geq 3$ and $n \geq 4$.

*Keywords:* semifield plane, collineation, autotopism, Baer subplane.

*Bibliography:* 20 titles.

**For citation:**
O. V. Kravtsova, I. V. Sheveleva, 2019, "On some 3-primitive projective planes", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 316–332.

## 1. Введение

Геометрические свойства конечной проективной плоскости существенно зависят от свойств алгебраических операций, задаваемых на координатизирующем множестве. Дезарговы плоскости, имеющие наиболее богатую группу коллинеаций, координатизируются полем. Если плоскость координатизируется квазиполем, то она является плоскостью трансляций. Плоскости, координатизируемые полуполем (полуполевые плоскости), являются плоскостями трансляций и дуальные к ним плоскости также – плоскости трансляций.

Связь геометрических свойств плоскости и алгебраических свойств координатизирующего множества настолько тесная, что даже на первый взгляд незначительные различия свойств координатизирующих множеств дают существенные различия геометрических свойств плоскостей. Известно, что группа коллинеаций дезарговой плоскости неразрешима, однако все существующие примеры полуполевых плоскостей имеют разрешимую группу коллинеаций. Более того, существует гипотеза, что группа коллинеаций всякой конечной недезарговой полуполевой плоскости разрешима (см. [1], вопрос 11.76, 1990 г.). В ряде работ (см. [2, 3]) устанавливается справедливость данной гипотезы для отдельных классов плоскостей.

Известен способ построения и исследования полуполевых плоскостей, как и других плоскостей трансляций, с использованием линейного пространства четной размерности и специального семейства линейных преобразований, называемого регулярным множеством. Матричное представление регулярного множества тесно связано с геометрическими свойствами плоскости. Так, в работах [4, 5, 6] изучены полуполевые плоскости ранга 2 над своим ядром, группа автоморфизмов которых содержит бэровские коллинеации определенного порядка. Результаты были обобщены для произвольного ранга авторами настоящей статьи в [7, 8, 9].

Целью представленного исследования является применение полученных теоретических результатов для построения $p$-примитивных полуполевых плоскостей ранга более 2. Пакет разработанных авторами компьютерных программ протестирован на примере 3-примитивных полуполевых плоскостей порядка 81 – минимальном недезарговом примере. Построено матричное представление регулярного множества и группы автотопизмов, выделены все попарно неизоморфные плоскости, описано строение координатизирующих полуполей. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Существует ровно восемь, с точностью до изоморфизма, 3-примитивных недезарговых полуполевых плоскостей порядка 81. Каждая из них имеет 2-ранг группы автотопизмов, равный трем, и разрешимую полную группу коллинеаций.*

## 2. Основные определения и обозначения

Приведем некоторые основные определения и обозначения, в соответствии с [2, 10].

*Полуполем* (semifield) называют множество $S$, на котором определены две бинарные алгебраические операции $+$ и $*$, при выполнении условий:

1) $\langle S,+\rangle$ – абелева группа с нейтральным элементом 0;

2) $\langle S^*,*\rangle$ – лупа ($S^* = S \setminus \{0\}$);

3) выполняются дистрибутивные законы $a*(b+c) = a*b + a*c$, $(b+c)*a = b*a + c*a$ для любых $a,b,c \in S$.

Ослабление двусторонней дистрибутивности до односторонней приводит к понятию квазиполя – правого либо левого.

Полуполе $S$ содержит подмножества $N_r$, $N_m$, $N_l$, называемые *правым, средним и левым ядрами* соответственно:

$$\begin{aligned} N_r &= \{n \in S \mid (a*b)*n = a*(b*n)\ \forall a,b \in S\}, \\ N_m &= \{n \in S \mid (a*n)*b = a*(n*b)\ \forall a,b \in S\}, \\ N_l &= \{n \in S \mid (n*a)*b = n*(a*b)\ \forall a,b \in S\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Пересечение $N = N_l \cap N_m \cap N_r$ назвают *ядром* полуполя, множество

$$Z = \{z \in N \mid z*a = a*z\ \forall a \in S\}$$

– *центром* полуполя. Ядра и центр конечного полуполя являются подполями, и полуполе можно рассматривать как линейное пространство над каждым из них. Следовательно, порядок конечного полуполя равен степени простого числа $p^n$.

Рассмотрим линейное пространство $W$ размерности $n$ над полем $GF(p^s)$ и подмножество линейных преобразований

$$R \subset GL_n(p^s) \cup \{0\},$$

удовлетворяющее условиям:

1) $R$ состоит из $p^{ns}$ квадратных $(n \times n)$-матриц над $GF(p^s)$;

2) $R$ содержит нулевую и единичную матрицы (0 и $E$);

3) для любых двух различных матриц $A, B \in R$, $A \neq B$, разность $A - B$ является невырожденной матрицей.

Такое множество $R$ называют *регулярным множеством* (spread set, [2]).

Из перечисленных условий следует, что матрица регулярного множества однозначно определяется выбором любой своей строки (или столбца). Будем считать, что элементы матрицы определяются выбором, для определенности, последней строки. Введем биективное отображение $\theta$ из $W$ на $R$ и запишем регулярное множество в виде:

$$R = \{\theta(y) \mid y \in W\},$$

тогда последняя строка матрицы $\theta(y)$ совпадает с вектором $y$,

$$\theta(0,0,\ldots 0) = 0, \quad \theta(0,0,\ldots,1) = E.$$

Введем умножение на множестве $W$ правилом

$$x * y = x \cdot \theta(y), \qquad x,y \in W.$$

Тогда $\langle W,+,*\rangle$ – правое квазиполе [10, 3], и при дополнительном условии замкнутости $R$ по сложению – полуполе.

Отметим, что для построения и исследования конечных полуполей в качестве основного поля $GF(p^s)$ используют обычно центр $Z$ полуполя, регулярное множество является тогда $n$-мерным линейным пространством над $Z$. Однако удобнее рассматривать векторное пространство $W$ и матрицы регулярного множества над полем простого порядка $\mathbb{Z}_p$. В этом случае отображение $\theta$ записывается с использованием только линейных функций, что значительно упрощает рассуждения и вычисления (в том числе компьютерные).

Пусть $W$ – линейное пространство размерности $n$ над $\mathbb{Z}_p$,

$$R = \{\theta(y) \mid y \in W\} \subset GL_n(p) \cup \{0\}$$

– регулярное множество, замкнутое по сложению, $\langle W, +, *\rangle$ – полуполе с умножением $x * y = x\theta(y)$. Рассмотрим внешнюю прямую сумму $V = W \oplus W$ и определим проективную плоскость $\pi$ порядка $p^n$ следующим образом:

1) элементы $(x, y)$, $x, y \in W$ пространства $V$ назовем аффинными точками плоскости $\pi$;

2) аффинными прямыми назовем смежные классы по подгруппам

$$V(m) = \{(x, x\theta(m)) \mid x \in W\}, \quad m \in W,$$
$$V(\infty) = \{(0, y) \mid y \in W\};$$

3) множество всех смежных классов по одной подгруппе $V(m)$ или $V(\infty)$ назовем особой точкой $(m)$ или $(\infty)$ соответственно;

4) множество особых точек назовем особой прямой $[\infty]$;

5) инцидентность определим теоретико-множественным способом.

Построенная так проективная плоскость является полуполевой плоскостью, ее полная группа коллинеаций (автоморфизмов) имеет вид $Aut\,\pi = T \leftthreetimes G$, где $T = \{\tau_{a,b} | a, b \in W\}$ – группа трансляций,

$$\tau_{a,b} : (x, y) \to (x + a, y + b), \quad x, y \in W,$$

$G$ – трансляционное дополнение, стабилизатор точки $(0, 0)$. Автоморфизмы из $G$ задаются линейными преобразованиями пространства $V$:

$$\alpha : (x, y) \to (x, y) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Здесь $A, B, C, D$ – матрицы над $\mathbb{Z}_p$ размерности $n \times n$ (можно показать, что для любой полуполевой плоскости $C = 0$). Заметим, что запись коллинеаций из $G$ при помощи только линейных преобразований становится возможной за счет матричного представления регулярного множества над полем простого порядка. Если в качестве основного поля используется ядро полуполя $GF(p^s)$, то такие коллинеации задаются полулинейными преобразованиями, что ведет к усложнению расчетов и рассуждений.

Подгруппа $\Lambda < G$, образованная коллинеациями, фиксирующими треугольник $(0, 0)$, $(0)$, $(\infty)$, $[0, 0]$, $[0]$, $[\infty]$, называется *группой автотопизмов*. Матрицы, соответствующие линейным автотопизмам – блочно-диагональные,

$$\lambda : (x, y) \to (x, y) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Особыми свойствами обладают коллинеации, фиксирующие замкнутую конфигурацию. Так, известно [2], что всякая коллинеация порядка два является либо центральной, либо бэровской коллинеацией.

Коллинеация проективной плоскости называется *центральной*, если она фиксирует поточечно некоторую прямую (*ось*), некоторую точку (*центр*) и все прямые, проходящие через центр (не поточечно). Если центр инцидентен оси, то коллинеация называется *элацией*, в противном случае – *гомологией*.

В частности, трансляции $\tau_{a,b}$ – это элации с осью $[\infty]$. Трансляционное дополнение $G$ представимо как $G = \Omega \leftthreetimes \Lambda$, где $\Omega$ – группа элаций с осью $[0]$ и центром $(\infty)$. Эта группа элементарная абелева, ее порядок равен порядку плоскости. Следовательно, изучение полной группы коллинеаций полуполевой плоскости сводится к описанию ее автотопизмов.

Центральные коллинеации образуют в группе автотопизмов следующие циклические подгруппы [11]:

1) $H_r \simeq N_r^*$ – группа гомологий с осью $[0,0]$ и центром $(\infty)$;

2) $H_l \simeq N_l^*$ – группа гомологий с осью $[\infty]$ и центром $(0,0)$;

3) $H_m \simeq N_m^*$ – группа гомологий с осью $[0]$ и центром $(0)$.

Коллинеация проективной плоскости $\pi$ порядка $m$ называется *бэровской*, если она фиксирует поточечно максимальную подплоскость порядка $\sqrt{|\pi|} = \sqrt{m}$ (*бэровскую подплоскость*).

Пусть $\pi$ — полуполевая плоскость порядка $p^{2n}$ с (левым) ядром $K \simeq GF(p^s)$, где $p$ – простое число. Коллинеация $\beta$ плоскости $\pi$ называется *$p$-примитивной бэровской коллинеацией*, если она фиксирует бэровскую подплоскость поточечно и ее порядок есть $p$-примитивный делитель $p^n - 1$ (то есть $|\beta| \mid (p^n-1)$, но $|\beta| \nmid (p^i - 1)$, $i < n$). Полуполевая плоскость порядка $p^{2n}$ называется *$p$-примитивной полуполевой плоскостью*, если она допускает $p$-примитивную бэровскую коллинеацию.

## 3. Теоретические результаты

Первая работа, посвященная изучению $p$-примитивных полуполевых плоскостей, была опубликована в 1987 году. В этой работе Й. Хирамин, М. Мацумото и Т. Ойама начали изучение плоскостей ранга 2. Они предложили идею построения регулярного множества и получили некоторые свойства группы коллинеаций таких плоскостей [12]. Изучение $p$-примитивных полуполевых плоскостей было продолжено Н. Л. Джонсоном в статьях [13, 14]. В частности, в [14] он доказал, что порядок $p$-примитивной полуполевой плоскости $\pi$ ранга 2 равен $q^4$ $(q = p^r)$ и определил вид регулярного множества плоскости. В работах [15, 16] М. Кордеро изучила и выписала вид всех автотопизмов и доказала разрешимость группы автотопизмов в частном случае при $q = p$. М. Кордеро построила [6] матричное представление регулярного множества $p$-примитивной полуполевой плоскости порядка $p^{2n}$ с ядром порядка $p^n$ и привела примеры четырех попарно неизоморфных 3-примитивных полуполевых плоскостей порядка 81 с ядром $GF(9)$. Если $\pi$ – $p$-примитивная полуполевая плоскость порядка $q^4 = p^{2n}$ с ядром $GF(q^2)$, то базис 4-мерного линейного пространства над $GF(q^2)$ может быть выбран так, что регулярное множество плоскости $\pi$ в $GL_2(q^2) \cup \{0\}$ имеет вид

$$\Sigma_0 = \left\{ \begin{pmatrix} u^q & f(v) \\ v & u \end{pmatrix} \;\middle|\; u, v \in GF(q^2) \right\}. \tag{2}$$

Здесь и далее при ссылках на разные источники выбраны единообразные обозначения.

В работе [8] автором настоящей статьи описан общий случай $p$-примитивной полуполевой плоскости с ядром произвольного порядка $p^s$: построено матричное представление регулярного множества, доказана разрешимость группы коллинеаций, описано ее строение. Перечислим некоторые из результатов.

Теорема 2. *Пусть $\pi$ – полуполевая плоскость порядка $q^4$ с ядром $K \simeq GF(p^s)$ $(q = p^r$, $q^4 = (p^s)^{2n}$, $p > 2$ – простое число), допускающая линейную бэровскую коллинеацию $\sigma$ порядка $q+1$. Тогда $\pi$ может быть представлена $4n$-мерным векторным пространством над $K$ так, что ее регулярное множество $\Sigma \subset GL_{2n}(K) \cup \{0\}$ имеет вид*

$$\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} U^q & f(V) \\ V & U \end{pmatrix} \;\middle|\; U, V \in F \right\}, \tag{3}$$

*где* $F \subset GL_n(K) \cup \{0\}$, $F \simeq GF(q^2)$, $f$ *– аддитивная взаимно однозначная функция из* $F$ *в* $GL_n(K) \cup \{0\}$. *Подгруппа бэровских коллинеаций* $\langle\sigma\rangle$ *в этом случае записывается как*

$$Q = \langle\sigma\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} \;\middle|\; C \in F,\ |C| = q+1,\ m = 1, 2, \ldots, q+1 \right\}. \tag{4}$$

Элементы матриц здесь и всюду далее представляют собой квадратные блоки-подматрицы одинаковой размерности, $E$ – единичная матрица.

Далее, в [9] рассмотрен следующий частный случай.

Пусть $\pi$ – полуполевая плоскость порядка $q^4$ с ядром $K \simeq GF(p^s)$ $(q = p^r,\ q^4 = (p^s)^{2n}$, $p > 2$ – простое число), регулярное множество которой в $GL_{2n}(K) \cup \{0\}$ имеет вид

$$\Sigma_1 = \left\{ \begin{pmatrix} U^q & \tau\varphi(V) \\ V & U \end{pmatrix} \;\middle|\; U, V \in F \right\}, \tag{5}$$

где $\varphi$ – аддитивная взаимно однозначная функция из $F$ в $F$, $\tau \notin F$ нормализует $F$.

Теорема 3. *2-ранг группы линейных автотопизмов* $\Lambda_0$ *плоскости* $\pi$ *с регулярным множеством* $\Sigma_1$ *равен трем или четырем.*

Теорема 4. *Нормализатор подгруппы* $Q$ *(4) в группе линейных автотопизмов* $\Lambda_0$ *содержит ровно 7 инволюций:*

$$h_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad h_3 = \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix},$$

$$h_4 = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}, \quad h_5 = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & -L \end{pmatrix}, \quad h_6 = \begin{pmatrix} -L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}, \quad h_7 = \begin{pmatrix} -L & 0 \\ 0 & -L \end{pmatrix},$$

*где* $L = \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \in GL_{2n}(K)$, *причем* $h_1, h_2, h_3$ *– гомологии,* $h_4, h_5, h_6, h_7$ *– бэровские инволюции.*

Теорема 5. *Пусть* $\pi$ *– полуполевая плоскость порядка* $q^4$ *с регулярным множеством* $\Sigma_1$. *Тогда полная группа коллинеаций плоскости* $\pi$ *разрешима.*

Далее, в [7] автором рассмотрен случай, когда группа автотопизмов полуполевой плоскости нечетного порядка содержит бэровскую инволюцию.

Теорема 6. *Пусть* $\pi$ *– полуполевая плоскость порядка* $p^N$, $p > 2$ *– простое число, допускающая бэровскую инволюцию* $\beta$ *в трансляционном дополнении. Тогда* $N = 2n$ *и плоскость* $\pi$ *может быть задана* $4n$*-мерным векторным пространством над* $\mathbb{Z}_p$ *так, что* $\beta$ *определяется* $(4n \times 4n)$*-матрицей*

$$\beta = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}.$$

*Плоскость* $\pi$ *имеет регулярное множество* $\Sigma_2 \subset GL_{2n}(p) \cup \{0\}$,

$$\Sigma_2 = \left\{ \theta(V, U) = \begin{pmatrix} m(U) & f(V) \\ V & U \end{pmatrix} \;\middle|\; U \in K_1,\ V \in K_2 \right\}, \tag{6}$$

*где* $K_1$ *и* $K_2$ *– регулярные множества в* $GL_n(p) \cup \{0\}$, $K_1$ *– регулярное множество бэровской подплоскости* $\pi_0$, *фиксируемой инволюцией* $\beta$, $m$, $f$ *– инъективные линейные отображения из* $K_1$ *и* $K_2$ *соответственно в* $GL_n(p) \cup \{0\}$, *причем* $m(E) = E$, $f(E) \neq E$.

Заметим, что для плоскости ранга 4 множества матриц $K_1$ и $K_2$ состоят из $p^2$ элементов и, следовательно, являются полями [17]. Кроме того, в этом случае можно считать $K_1 = K_2$.

## 4. Построение попарно неизоморфных полуполевых плоскостей порядка 81

Если полуполевая плоскость является $p$-примитивной, то некоторая степень $p$-примитивной бэровской коллинеации является бэровской инволюцией.

В работе [7] описан алгоритм построения полуполевой плоскости, допускающей бэровскую инволюцию, на примере $|\pi| = 81$. Применим его для построения 3-примитивных полуполевых плоскостей порядка 81.

Применяя теорему 6, зададим плоскость $\pi$ 8-мерным линейным пространством над полем $\mathbb{Z}_3$ и регулярным множеством $\Sigma_2 \subset GL_4(3) \cup \{0\}$. Тогда регулярное множество $F \subset GL_2(3) \cup \{0\}$ бэровской подплоскости $\pi_0$ является 2-мерным линейным пространством,

$$F = \{U = u_1 D + u_2 E \mid u_1, u_2 \in \mathbb{Z}_3\}, \tag{7}$$

$\{D, E\}$ – базис $F$. Очевидно, подплоскость $\pi_0$ – дезаргова, $F$ – поле порядка 9. В качестве $D$ можно выбрать, без потери общности, матрицу $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Линейные функции $m$ и $f$ представимы в виде

$$m(u_1 D + u_2 E) = u_1 M + u_2 E, \qquad f(u_1 D + u_2 E) = u_1 F_1 + u_2 F_2$$

для каждого $U = u_1 D + u_2 E \in F$. Здесь $M, F_1, F_2 \in GL_2(3)$, $m(E) = E$, $F_2 = f(E) \neq E$. Регулярное множество $\Sigma_2$ является 4-мерным линейным пространством над $\mathbb{Z}_3$ с базисом, например,

$$\theta(D,0) = \begin{pmatrix} 0 & F_1 \\ D & 0 \end{pmatrix}, \ \theta(E,0) = \begin{pmatrix} 0 & F_2 \\ E & 0 \end{pmatrix}, \ \theta(0,D) = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \ \theta(0,E) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Если матрицы $M, F_1, F_2$ выбраны так, что для всех $x, y, z, t \in \mathbb{Z}_3$ матрица

$$\theta(xD + yE, zD + tE) = \begin{pmatrix} zM + tE & xF_1 + yF_2 \\ xD + yE & zD + tE \end{pmatrix} = \\ = x\begin{pmatrix} 0 & F_1 \\ D & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & F_2 \\ E & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

является либо нулевой (при $x = y = z = t = 0$), либо невырожденной, то тройка матриц $M, F_1, F_2$ задает полуполевую плоскость $\pi$, удовлетворяющую указанным условиям.

С использованием компьютера получено 106 наборов матриц $M, F_1, F_2$, т.е. построено 106 полуполевых плоскостей порядка 81, допускающих бэровскую инволюцию в трансляционном дополнении. Для каждой из построенных плоскостей были найдены левое, правое и среднее ядра (1) координатизирующих полуполей. Выделены следующие случаи:

1) $|N_l| = |N_m| = 3, \ |N_r| = 9$;
2) $|N_l| = |N_r| = 3, \ |N_m| = 9$;
3) $|N_m| = |N_r| = 3, \ |N_l| = 9$;
4) $|N_l| = |N_m| = |N_r| = 9$;
5) $|N_l| = |N_m| = |N_r| = 81$.

В случае 5, очевидно, построенная плоскость является дезарговой.

Каждому из ядер полуполя соответствует множество матриц [11], определяющее подгруппу гомологий плоскости с регулярным множеством $R$, обозначим эти множества соответственно $R_l$, $R_m$, $R_r$, все они являются подполями в $GL_n(p) \cup \{0\}$:

$$\begin{aligned} R_l &= \{M \in GL_n(p) \cup \{0\} \mid MT = TM \ \forall T \in R\}, \\ R_m &= \{M \in R \mid MT \in R \ \forall T \in R\}, \\ R_r &= \{M \in R \mid TM \in R \ \forall T \in R\}. \end{aligned}$$

Тогда подгруппы гомологий в группе автотопизмов представимы как:

$$\begin{aligned} H_r &= \left\{ \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \;\middle|\; M \in R_r^* \right\} \simeq N_r^*, \\ H_m &= \left\{ \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \;\middle|\; M \in R_m^* \right\} \simeq N_m^*, \\ H_l &= \left\{ \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \;\middle|\; M \in R_l^* \right\} \simeq N_l^*. \end{aligned}$$

Разобьем построенные плоскости на классы изоморфизма, используя замену базиса 8-мерного линейного пространства, сохраняющую бэровскую инволюцию $\beta$. Замена базиса с матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$$

задает изоморфизм полуполевых плоскостей с регулярными множествами $R$ и $R'$ в том и только в том случае, когда для всех матриц $T \in R$ произведение $P_1^{-1} T P_2$ принадлежит множеству $R'$ [18]. Условие сохранения бэровской инволюции приводит к блочно-диагональной структуре матриц $P_1$ и $P_2$. Использование такой матрицы перехода выделило 16 классов попарно изоморфных плоскостей порядка 81, считая дезаргову.

Следующий этап расчетов должен установить наличие изоморфизма между плоскостями из разных выделенных классов, без требования сохранения бэровской инволюции $\beta$. Непосредственный перебор всех возможных матриц перехода требует расчетов для

$$|GL_4(3)|^2 = ((81-1)(81-3)(81-9)(81-27))^2 = 24261120^2$$

вариантов матриц $P_1$ и $P_2$, что нерационально. Количество вариантов легко сократимо до $24261120 \cdot 80$ за счет следующих рассуждений.

Пусть $T = E \in R$, тогда $P_1^{-1} T P_2 = P_1^{-1} P_2 = T' \in R'$, тогда $P_2 = P_1 T'$. Таким образом, достаточно рассматривать все возможные матрицы $P_1 \in GL_4(3)$ и все ненулевые матрицы $T'$ из регулярного множества второй плоскости.

Поскольку количество вариантов все равно представляется малообозримым, продолжим рассуждения. Учитывая нормальность подгрупп гомологий $H_l$, $H_m$, $H_r$ в группе автотопизмов, получаем условия:

$$P_1^{-1} M P_1 \in R'_m \quad \forall M \in R_m^*;$$

$$P_2^{-1} M P_2 \in R'_r \quad \forall M \in R_r^*;$$

$$P_1^{-1} M P_1 = P_2^{-1} M P_2 \in R'_l \quad \forall M \in R_l^*.$$

Рассмотрим, например, плоскости с большим средним ядром (порядка 9). Выберем матрицы $M$ и $M'$ так, что $\langle M \rangle = R_m^*$ и $\langle M' \rangle = R'^*_m$ и перепишем условие $P_1^{-1} M P_1 \in R'_m$ как равенство $XM = M'X$, где $X = P_1^{-1}$ – искомая матрица. Это равенство представляет систему из 16 линейных однородных уравнений на 16 неизвестных. Написана программа для отыскания общего решения такой системы. Ранг основной матрицы равен 8, получаем множество из 5760 вариантов матрицы $X = P_1^{-1}$. Далее вычисляем для каждого варианта матрицы $P_1$ все матрицы $P_2 = P_1T'$ и проверяем основное условие изоморфизма только для базисных элементов регулярного множества $R$:

$$P_1^{-1}\theta(D,0)P_2 \in R', \quad P_1^{-1}\theta(E,0)P_2 \in R', \quad P_1^{-1}\theta(0,D)P_2 \in R', \quad P_1^{-1}\theta(0,E)P_2 \in R'.$$

Таким образом, количество вариантов сокращается с $24261120 \cdot 80$ до $5760 \cdot 80 = 460800$, т.е. в 4212 раз.

Для случаев большого правого либо большого левого ядра рассуждения аналогичные. С помощью компьютерных программ в каждом из случаев найдены все матрицы, задающие изоморфизмы построенных плоскостей, и, для $R' = R$ – автотопизмы каждой плоскости. Окончательно имеем восемь попарно неизоморфных недезарговых плоскостей порядка 81, т.е. восемь классов изоморфизма.

Эти расчеты показали, что группа автотопизмов $\Lambda$ в каждом случае является 2-группой порядка $2^m$, $8 \leqslant m \leqslant 11$, откуда немедленно следует ее разрешимость и, следовательно, разрешимость полной группы коллинеаций.

Матрицы, задающие регулярные множества неизоморфных плоскостей, приведены ниже в Табл. 2. Перечислять элементы групп автотопизмов не представляется целесообразным.

## 5. 3-примитивные плоскости порядка 81

Вычисление порядков автотопизмов для каждой из восьми неизоморфных плоскостей показывает, что каждая плоскость допускает ровно 7 автотопизмов порядка 2, в соответствии со списком теоремы 4. Кроме того, порядок любого автотопизма не превышает 16. Из общего списка выделены бэровские коллинеации, информация об элементах группы $\Lambda$ представлена в табл. 1.

**Таблица 1**

| Плоскость | $\lvert N_l\rvert, \lvert N_m\rvert, \lvert N_r\rvert$ | $\lvert\Lambda\rvert$ | $n_2$ | $B_2$ | $n_4$ | $B_4$ | $n_8$ | $n_{16}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A1 | 3,3,9 | 256 | 7 | 4 | 88 | 4 | 32 | 128 |
| A2 | 3,3,9 | 512 | 7 | 4 | 216 | 4 | 160 | 128 |
| B1 | 3,9,3 | 256 | 7 | 4 | 88 | 4 | 32 | 128 |
| B2 | 3,9,3 | 512 | 7 | 4 | 216 | 4 | 160 | 128 |
| C1 | 9,3,3 | 256 | 7 | 4 | 88 | 4 | 32 | 128 |
| C2 | 9,3,3 | 512 | 7 | 4 | 216 | 4 | 160 | 128 |
| D1 | 9,9,9 | 1024 | 7 | 4 | 56 | 8 | 192 | 768 |
| D2 | 9,9,9 | 2048 | 103 | 100 | 600 | 8 | 576 | 768 |

Здесь $n_k$ – число автотопизмов порядка $k$; $B_k$ – число бэровских коллинеаций порядка $k$, причем $B_k = 0$ для $k > 4$, $n_k = 0$ для $k > 16$. Так как $B_4 \neq 0$ для каждой из восьми плоскостей, то все они являются 3-примитивными, причем случай $N_l \simeq \mathbb{Z}_3$ представляет четыре новых примера, в сравнении с работой [6] М. Кордеро.

Так как плоскости 3-примитивны, перепишем их регулярное множество в виде $\Sigma$. Для этого должно выполняться условие $m(U) = U^3$ для всех $U \in F$, поэтому отберем в каждом классе изоморфизма плоскость с $M = D^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Табл. 2 представляет матрицы $F_1$ и $F_2$, задающие функцию $f(V)$ для выбранных плоскостей.

Выделим далее в общем списке полуполевые плоскости с регулярным множеством вида $\Sigma_1$. Для этого перепишем аддитивную функцию $f(V)$ в другом виде.

Теорема 7. *Пусть $p$ – простое число, $F \simeq GF(p^n)$, $\mathcal{R}$ – ассоциативное кольцо с единицей, содержащее подполе $F$. Произвольную аддитивную функцию $f : F \to \mathcal{R}$ можно представить, причем однозначно, в виде*

$$f(x) = A_0x + A_1x^p + A_2x^{p^2} + \cdots + A_{n-1}x^{p^{n-1}}, \quad x \in F, \tag{8}$$

*где $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1} \in \mathcal{R}$.*

**Доказательство.** Пусть $u$ – порождающий элемент мультипликативной группы поля $F$, тогда минимальный многочлен $u$ над $\mathbb{Z}_p$ является неприводимым многочленом степени $n$. Поэтому $1, u, u^2, \ldots, u^{n-1}$ линейно независимы как элементы $n$-мерного линейного пространства $F$ над $\mathbb{Z}_p$.

Так как функция $f$ аддитивна, то она является линейным отображением из линейного пространства $F$ над $\mathbb{Z}_p$ в $\mathcal{R}$. Следовательно, $f$ однозначно определяется образами базисных элементов $1, u, u^2, \ldots, u^{n-1}$. Используя (8), составим систему линейных уравнений относительно неизвестных $A_i$:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1} = f(1), \\ A_0u + A_1u^p + A_2u^{p^2} + \cdots + A_{n-1}u^{p^{n-1}} = f(u), \\ A_0u^2 + A_1u^{2p} + A_2u^{2p^2} + \cdots + A_{n-1}u^{2p^{n-1}} = f(u^2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_0u^{n-1} + A_1u^{(n-1)p} + A_2u^{(n-1)p^2} + \cdots + A_{n-1}u^{(n-1)p^{n-1}} = f(u^{n-1}). \end{cases} . \tag{9}$$

Основной определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ u & u^p & u^{p^2} & \ldots & u^{p^{n-1}} \\ u^2 & u^{2p} & u^{2p^2} & \ldots & u^{2p^{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u^{n-1} & u^{(n-1)p} & u^{(n-1)p^2} & \ldots & u^{(n-1)p^{n-1}} \end{vmatrix}$$

является определителем Вандермонда и равен $\Delta = \prod\limits_{0 \leqslant j < i \leqslant n-1} (u^{p^i} - u^{p^j})$. По выбору $u$, определитель отличен от нуля, поэтому система имеет единственное решение в $\mathcal{R}$. Теорема доказана.

**Замечание.** В частности, утверждение справедливо для кольца $(n \times n)$-матриц над $\mathbb{Z}_p$ и его подполя $F \subset GL_n(p) \cup \{0\}$.

Запишем для построенных полуполевых плоскостей функцию $f(V)$ в виде (8). Для наших построений

$$f(V) = f(xD + yE) = xF_1 + yF_2 = A_0V + A_1V^3.$$

Система (9) в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = F_2, \\ A_0D + A_1D^3 = F_1, \end{cases}$$

откуда имеем $A_0 = F_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - F_2 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_1 = F_2 - A_0$. Вычисления по этим формулам приводят к результатам, приведенным в табл. 2.

**Таблица 2**

| Плоскость | $F_1$ | $F_2$ | $f(V)$ | Тип |
|---|---|---|---|---|
| A1 | $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2&2\\1&2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2&2\\1&2\end{pmatrix}V^3$ | $\Sigma$ |
| A2 | $\begin{pmatrix}1&0\\2&2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2&2\\2&1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2&2\\2&1\end{pmatrix}V^3$ | $\Sigma_1$ |
| B1 | $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&2\\2&0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2&2\\2&1\end{pmatrix}V+2V^3$ | $\Sigma$ |
| B2 | $\begin{pmatrix}1&0\\2&2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}V$ | $\Sigma_1$ |
| C1 | $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&2\\2&2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2&2\\2&0\end{pmatrix}V+2V^3$ | $\Sigma_0$ |
| C2 | $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}V$ | $\Sigma_0$ |
| D1 | $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2&2\\2&0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}2&2\\2&0\end{pmatrix}V^3$ | $\Sigma_0$ |
| D2 | $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&2\\2&2\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&2\\2&2\end{pmatrix}V^3$ | $\Sigma_0$ |

Если коэффициенты $A_0$, $A_1$ принадлежат полю $F$ (плоскости C1, C2, D1, D2), то плоскость имеет регулярное множество вида $\Sigma_0$ (2), т.е. относится к типу Кордеро. Для плоскостей A2 и B2 ненулевой коэффициент функции $f(V)$ нормализует поле $F$ (7), поэтому плоскости имеют регулярное множество вида $\Sigma_1$ (5). Плоскости A1 и B1 не допускают представления регулярного множества в виде $\Sigma_1$, они относятся к существенно новому типу.

Обозначим $C = D + E$ и выпишем подгруппы бэровских коллинеаций, порожденные 3-примитивными элементами. Каждая из плоскостей A1–D2 допускает подгруппу

$$Q = \left\langle \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} \right\rangle$$

порядка 4 вида (4). Кроме $Q$, плоскости A1 и A2 допускают подгруппу

$$Q_1 = \left\langle \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{pmatrix} \right\rangle,$$

плоскости B1 и B2 – подгруппу

$$Q_2 = \left\langle \begin{pmatrix} C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} \right\rangle,$$

плоскости C1 и C2 – подгруппу

$$Q_3 = \left\langle \begin{pmatrix} C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{pmatrix} \right\rangle,$$

плоскости D1 и D2 – подгруппы $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$.

Таким образом, заключаем, что построены все попарно неизоморфные собственно полуполевые плоскости порядка 81, допускающие бэровскую инволюцию. Все они являются 3-примитивными, только четыре из построенных восьми плоскостей имеют левое ядро порядка 9 и изоморфны примерам М. Кордеро. Из оставшихся четырех новых плоскостей две плоскости обладают регулярным множеством вида $\Sigma_1$, две другие демонстрируют существование $p$-примитивных полуполевых плоскостей другого типа. Отметим, что особенности строения группы автотопизмов согласуются с доказанными в [8, 9, 7, 19] теоретическими результатами. Программное обеспечение, разработанное для построения представленных примеров, несложно адаптировать для другого основного поля $\mathbb{Z}_p$ или другой размерности пространства.

## 6. О строении координатизирующих полуполей

Дополним перечень результатов информацией о строении полуполей $\mathcal{A}1$–$\mathcal{D}2$ порядка 81, координатизирующих плоскости A1–D2.

Напомним, что изоморфные полуполевые плоскости координатизируются изотопными полуполями (теорема Алберта, [20]). Некоторые свойства полуполей (подполя, порядки элементов) не являются инвариантами относительно изотопизмов, поэтому будут упомянуты кратко.

В работе [19] доказаны результаты о строении полуполей нечетного порядка, допускающих автоморфизм порядка 2. Эти свойства являются общими для полуполей $\mathcal{A}1$–$\mathcal{D}2$.

**Свойство 1.** Каждое полуполе содержит подполе порядка 3:

$$K = \{(0,0,0,0),(0,0,0,1),(0,0,0,2)\},$$

подполе порядка 9:

$$S_0 = \{(0,0,x,y) \mid x,y \in \mathbb{Z}_3\}.$$

**Свойство 2.** Мультипликативная лупа каждого полуполя содержит подгруппу порядка 2

$$K^* = \{(0,0,0,1),(0,0,0,2)\},$$

циклическую подгруппу порядка 4:

$$H_0 = \{(0,0,0,1),(0,0,0,2),(0,0,1,1),(0,0,2,2)\},$$

подлупу порядка 16:

$$L_0 = S_0^* \cup \{(x,y,0,0) \mid x,y \in \mathbb{Z}_3,\ (x,y) \neq (0,0)\}.$$

Для дальнейших исследований разработаны компьютерные программы, вычисляющие степени всех ненулевых элементов, в том числе лево- и правоупорядоченные. Напомним, что *$n$-й степенью* элемента $v$ мультипликативной лупы называется произведение $n$ множителей, каждый из которых равен $v$. *Левоупорядоченная $n$-я степень* элемента $v$ определяется индуктивно:

$$v^{(1} = v,\ v^{(i+1} = v \cdot v^{(i},\ i = 1,2,\ldots.$$

*Левым порядком* $|v|_l$ элемента $v \neq 1$ называется наименьшее число $n$ с условием $v^{(n} = 1$, множество всех левых порядков называется *левым спектром* лупы. Правоупорядоченная степень, правый порядок и правый спектр определяются аналогично. Г. Венэ выдвинул в 1992 г. гипотезу: всякое конечное полуполе является левопримитивным либо правопримитивным, т.е. мультипликативная лупа ненулевых элементов является множеством всех левоупорядоченных (правоупорядоченных) степеней одного элемента. Эта гипотеза опровергнута И. Рýа, предложившим два примера непримитивных полуполей порядков 32 и 64, однако все полуполя порядка 81 лево- и правопримитивны (подробнее см. [17]).

**Свойство 3.** Полуполя $\mathcal{A}1$–$\mathcal{D}2$ не являются коммутативными, но для всякого ненулевого элемента левый порядок равен правому порядку.

Табл. 3 содержит информацию о спектре, левом (правом) спектре и группе автоморфизмов. Отметим, что левый спектр содержит число 80, что говорит о левопримитивности полуполя.

**Таблица 3**

| Полуполе | Левый спектр | Спектр | Порядок группы автоморфизмов |
|---|---|---|---|
| $\mathcal{A}1$ | {1,2,4,8,16,40,80} | {1,2,4,5,6,7,8} | 2 |
| $\mathcal{A}2$ | {1,2,4,8,16,40,80} | {1,2,4,6,7,8} | 4 (циклическая) |
| $\mathcal{B}1$ | {1,2,4,8,16,40,80} | {1,2,4,6,7,8} | 4 (циклическая) |
| $\mathcal{B}2$ | {1,2,4,8,16,80} | {1,2,4,5,6,7,8} | 4 (циклическая) |
| $\mathcal{C}1$ | {1,2,4,8,16,40,80} | {1,2,4,5,6,7,8} | 2 |
| $\mathcal{C}2$ | {1,2,4,8,16,80} | {1,2,4,6,7,8} | 4 (циклическая) |
| $\mathcal{D}1$ | {1,2,4,8,16,40,80} | {1,2,4,6,8,9,13} | 4 (циклическая) |
| $\mathcal{D}2$ | {1,2,4,8,16,40,80} | {1,2,4,6,7,8} | 8 (группа кватернионов) |

Полуполе $\mathcal{D}2$, в отличие от остальных семи полуполей, содержит три подполя порядка 9: $S_0$, $S_1$, $S_2$,

$$\begin{aligned} S_1 = \{&(0,0,0,0),(0,0,0,1),(0,0,0,2),(1,1,1,0),(1,1,1,1),\\ &(1,1,1,2),(2,2,2,0),(2,2,2,1),(2,2,2,2)\},\\ S_2 = \{&(0,0,0,0),(0,0,0,1),(0,0,0,2),(1,1,2,0),(1,1,2,1),\\ &(1,1,2,2),(2,2,1,0),(2,2,1,1),(2,2,1,2)\}, \end{aligned}$$

причем левое, правое и среднее ядра полуполя совпадают с $S_0$, мультипликативная лупа этого полуполя содержит три циклических подгруппы порядка 4: $H_0$, $H_1$, $H_2$,

$$\begin{aligned} H_1 &= \{(0,0,0,1),(0,0,0,2),(1,1,1,0),(2,2,2,0)\},\\ H_2 &= \{(0,0,0,1),(0,0,0,2),(1,1,2,0),(2,2,1,0)\}. \end{aligned}$$

Группа автоморфизмов полуполя $\mathcal{D}2$ некоммутативна: группа кватернионов $Q_8$. Отметим, что эти свойства не сохраняются при изотопизме: для одной из плоскостей, изоморфных $\mathcal{D}2$, координатизирующее полуполе имеет только одно подполе порядка 9 и допускает только один нетривиальный автоморфизм порядка 2.

## 7. Заключение

На основе результатов [9] и [7] мы доказали, что существует ровно 8, с точностью до изоморфизма, недезарговых 3-примитивных полуполевых плоскостей порядка 81 (включая примеры М. Кордеро). Вычислены порядки левого, среднего и правого ядер построенных плоскостей, порядок группы автотопизмов, количество 3-примитивных коллинеаций. Для координатизирующих полуполей найдены подполя и спектры мультипликативных луп. Разработан алгоритм проверки изоморфизма двух полуполевых плоскостей и пакет компьютерных программ, реализующий этот алгоритм. Расчетные согласуются с доказанными ранее теоретическими результатами.

Представленные результаты частично анонсированы в докладе на XV Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия», посвященной столетию со дня рождения профессора Н. М. Коробова, проходившей в г. Тула 28-31 мая 2018 г.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Мазуров В. Д., Хухро Е. И. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь // Российская академия наук. Сибирское отделение. Институт математики. Новосибирск. 2006.
2. Hughes D. R., Piper F. C. Projective planes // Springer-Verlag, New-York. 1973.
3. Luneburg H. Translation planes // Springer-Verlag, New-York. 1980.
4. Biliotti M., Jha V., Johnson N. L., Menichetti G. A structure theory for two-dimensional translation planes of order $q^2$ that admit collineation group of order $q^2$ // Geom. Dedicata. 1989. Vol. 29, P. 7–43.
5. Huang H., Johnson N. L. 8 semifield planes of order $8^2$ // Discrete Math. 1990. Vol. 80, № 1, P. 69–79.
6. Cordero M. Matrix spread sets of $p$-primitive semifield planes // Internat. J. Math. & Math. Sci. 1997. Vol. 20, № 2, P. 293–298.
7. Кравцова О. В. Полуполевые плоскости нечетного порядка, допускающие подгруппу автотопизмов, изоморфную $A_4$ // Известия вузов. Математика. 2016. № 9, с. 10–25.
8. Подуфалов Н. Д., Бусаркина И. В. Группа автотопизмов полуполевой $p$-примитивной плоскости порядка $q^4$// Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 3, с. 334–344.
9. Подуфалов Н. Д., Бусаркина И. В., Дураков Б. К. О группе автотопизмов полуполевой $p$-примитивной плоскости // в сб. Материалы межрегиональной научной конференции "Исследования по анализу и алгебре" ТГУ, Томск. 1998. с. 190–195.
10. Podufalov N. D. On spread sets and collineations of projective planes // Contem. Math. 1992. Vol. 131, № 1, P. 697–705.
11. Подуфалов Н. Д., Дураков Б. К., Кравцова О. В., Дураков Е. Б. О полуполевых плоскостях порядка $16^2$ // Сиб. Мат. Журн. 1996. Том 37, № 3, с. 616–623.
12. Hiramine Y., Matsumoto M., Oyama T. On some extension of 1-sread sets // Osaka J. Math. 1987. Vol. 24, P. 123–137.
13. Johnson N. L. Sequences of derivable translation plans // Osaka J. Math. 1988. Vol. 25. P. 519–530.
14. Johnson N. L. Semifield plans of characteristic $p$ admiting $p$-primitive Baer collineation // Osaka J. Math. 1989. Vol. 26. P. 281–285.
15. Cordero M. Semifield plans of order $p^4$ that admit a $p$-primitive Baer collineation // Osaka J. Math. 1991. Vol. 28. P. 305–321.
16. Cordero-Vourtsanis M. The autotopizm group of $p$-primitive semifield plans of order $p^4$ // ARS Combinatoria. 1991. Vol. 32. P. 57–64.
17. Levchuk V. M., Kravtsova O. V. Problems on structure of finite quasifelds and projective translation planes // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. Vol. 38, № 4, P. 688–698.
18. Кравцова О. В., Куршакова П. К. К вопросу об изоморфизме полуполевых плоскостей // Вестник КГТУ. Математические методы и моделирование. 2006. № 42, с. 13–19.

19. Kravtsova O. V. On automorphisms of semifields and semifield planes // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2016. Vol. 13, P. 1300–1313.

20. Albert A. A. Finite division algebras and finite planes // Proc. Sympos. Appl. Math., AMS, Provid. R.I. 1960. Vol. 10, P. 53–70.

## REFERENCES

1. Mazurov V. D. & Khukhro E. I. 2006, *Unsolved problems in group theory: the Kourovka notebook*, Russian Academy of Sciences, Siberian Branch, Institute of Mathematics.

2. Hughes D. R. & Piper F. C. 1973, *Projective planes*, Springer-Verlag, New-York.

3. Luneburg H. 1980, *Translation planes*, Springer-Verlag, New-York.

4. Biliotti M., Jha V., Johnson N. L. & Menichetti G. 1989, ”A structure theory for two-dimensional translation planes of order $q^2$ that admit collineation group of order $q^2$”, *Geom. Dedicata*, vol. 29, pp. 7–43.

5. Huang H. & Johnson N. L. 1990, ”8 semifield planes of order $8^2$”, *Discrete Math.*, vol. 80, no. 1, pp. 69–79.

6. Cordero M. 1997. ”Matrix spread sets of $p$-primitive semifield planes”, *Internat. J. Math. & Math. Sci.*, vol. 20, no 2, pp. 293–298.

7. Kravtsova O. V. 2016. ”Semifield planes of odd order that admit the autotopism subgroup isomorphic to $A_4$”, *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, no. 9, pp.10–25.

8. Podufalov N. D. & Busarkina I. V. 1996. ”The autotopism groups of a $p$-primitive plane of order $q^4$”, *Algebra and Logic*, vol. 35, is. 3, pp. 188–195.

9. Podufalov N. D., Busarkina I. V. & Durakov B. K. 1998, ”On the autotopism group of a semifield $p$-primitive plane”, *Ann. of Interregional scientific conference ”Research on Analysis and Algebra”*, TSU, Tomsk, pp. 190–195.

10. Podufalov N. D. 1992, ”On spread sets and collineations of projective planes”, *Contem. Math.*, vol. 131, no 1, pp. 697–705.

11. Podufalov N. D., Durakov B. K., Kravtsova O. V. & Durakov E. B. 1996, ”On the semifield planes of order $16^2$”, *Siberian Mathematical Journal*, vol. 37, no. 3, pp. 616–623.

12. Hiramine Y., Matsumoto M. & Oyama T. 1987, ”On some extension of 1-sread sets”, *Osaka J. Math.*, vol. 24, pp. 123–137.

13. Johnson N. L. 1988, ”Sequences of derivable translation plans”, *Osaka J. Math.*, vol. 25, pp. 519–530.

14. Johnson N. L. 1989, ”Semifield plans of characteristic $p$ admiting $p$-primitive Baer collineation”, *Osaka J. Math.*, vol. 26, pp. 281–285.

15. Cordero M. 1991, ”Semifield plans of order $p^4$ that admit a $p$-primitive Baer collineation”, *Osaka J. Math.*, vol. 28, pp. 305–321.

16. Cordero-Vourtsanis M. 1991, ”The autotopizm group of $p$-primitive semifield plans of order $p^4$”, *ARS Combinatoria*, vol. 32, pp. 57–64.

17. Levchuk V. M. & Kravtsova O. V. 2017, "Problems on structure of finite quasifelds and projective translation planes", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, vol. 38, no 4, pp. 688–698.

18. Kravtsova O. V. & Kurshakova P. K. 2006, "On the problem of isomorphism of semifield planes", *Vestnik Krasnoyarskogo Gos. Techn. Univ.*, Krasnoyarsk, vol. 42, pp. 13–19.

19. Kravtsova O. V. 2016, "On automorphisms of semifields and semifield planes", *Siberian Electronic Mathematical Reports*, vol. 13, pp. 1300–1313.

20. Albert A. A. 1960, "Finite division algebras and finite planes", *Proc. Sympos. Appl. Math., AMS, Provid. R.I.*, vol. 10, pp. 53–70.

Получено 14.06.2018 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.