ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 2.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-403-416

# Теорема о среднем значении тригонометрических сумм на последовательности многочленов биномиального типа

В. Н. Чубариков

**Чубариков Владимир Николаевич** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, президент механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

*e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su*

**Аннотация**

Доказана теорема о среднем для тригонометрических сумм на последовательности многочленов биномиального типа. Как известно, классическая теорема И. М. Виноградова о среднем [10] относится к последовательности многочленов вида $\{x^n, n \geq 0\}$. Важным приложением найденной теоремы о среднем являются оценки сумм вида

$$\sum_{m \leq P} e^{2\pi i f(m)}, f(m) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k p_k(m),$$

где $p_k(x)$ — последовательность целозначных многочленов биномиального типа, а набор чисел $(\alpha_1\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ представляет собой точку $n$-мерного единичного куба $\Omega : 0 \leq \alpha_1, \ldots, \alpha_n < 1$.

*Ключевые слова:* теорема И. М. Виноградова о среднем, последовательность многочленов биномиального типа, многочлены Абеля, Лагерра, нижние и верхние факториалы, экспоненциальные многочлены.

*Библиография:* 17 названий.

**Для цитирования:**

В. Н. Чубариков. Теорема о среднем значении тригонометрических сумм на последовательности многочленов биномиального типа // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 403–416.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 2.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-403-416

# The mean-value theorem for trigonometric sums on the sequence of binomial type polynomials

V. N. Chubarikov

**Chubarikov Vladimir Nikolaevich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of mathematical and computer methods of analysis, president of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
*e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su*

**Abstract**

The mean-value theorem for trigonometric sums on the sequence of binomial type polynomials was proved. As known, the classical I. M. Vinogradov mean-value theorem belong to the sequence of polynomials of the form $\{x^n, n \geq 0\}$. Estimates of sums of the kind

$$\sum_{m \leq P} e^{2\pi i f(m)}, f(m) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k p_k(m),$$

are the important application of the finding mean-value theorem. Here $p_k(x)$ is the sequence integer-valued polynomials of the binomial type, but a set of numbers $(\alpha_1\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ represents a point of the $n$-fold unit cube $\Omega : 0 \leq \alpha_1, \ldots, \alpha_n < 1$.

*Keywords:* the mean-value I. M. Vinogradov theorem, the sequence of polynomials of the binomial type, polynomials of Abel, Laguerre, lowers and upper factorials, exponential polynomials.

*Bibliography:* 17 titles.

**For citation:**
V. N. Chubarikov, 2020, "On a mean-value theorem for multiple trigonometric sums" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 403–416.

## 1. Введение

Предметом настоящей статьи, с одной стороны, являются последовательности многочленов, возникающих из перечислительных задач комбинаторики и классического исчисления конечных разностей в численном анализе (интерполяция, квадратурные формулы) [6, 9]. С другой стороны, в основе статьи лежат аддитивные задачи теории чисел, в современном изложении которых выдающуюся роль играет “круговой метод Г. Харди — Дж. Литтлвуда — С. Рамануджана в форме тригонометрических сумм И. М. Виноградова”. В центре метода тригонометрических сумм находится теорема И. М. Виноградова о среднем [10].

Пусть задана последовательность многочленов $\{p_n(x)\}$, удовлетворяющая при $n \geq 0$ равенствам

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y),$$

причём точная степень $p_n(x)$ равна $n$, а коэффициент при старшей степени равен 1. Такую последовательность $\{p_n(x)\}$ называют последовательностью многочленов биномиального типа [9, 1, 3, 4, 7].

Приведём примеры. Последовательности точных степеней

$$p_n(x) = x^n, n \geq 0,$$

имеем бином Ньютона (см., например, [14], теорема 1, с. 33)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k};$$

нижних факториалов

$$p_n(x) = (x)_n = x(x-1)\dots(x-n+1), n \geq 1, p_0(x) = 1,$$

по индукции находим формулу Вандермонда (см., например, [6], с. 18)

$$p_{n+1}(x+y) = (x+y-n)p_n(x+y) = (x+y-n)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x)p_{n-k}(y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-k)p_k(x)p_{n-k}(y) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x)(y-n+k)p_{n-k}(y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_{k+1}(x)p_{n-k}(y) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x)p_{n-k+1}(y) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} p_k(x)p_{n-k+1}(y) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x)p_{n-k+1}(y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} p_k(x)p_{n-k+1}(y);$$

верхних факториалов

$$p_n(x) = (x)^n = x(x+1)\dots(x+n-1), n \geq 1, p_0(x) = 1,$$

аналогично предыдущему доказывается, что эта последовательность многочленов относится к биномиальному типу;

многочленов Абеля [2, 7]

$$p_n(x) = x(x-an)^{n-1}, n \geq 1, a \in \mathbf{R}, p_0(x) = 1;$$

экспоненциальных многочленов [5]

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k, n \geq 1, p_0(x) = 1,$$

где $s(n,k)$ — числа Стирлинга второго рода, определяемые соотношением

$$(t)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)t^k, n \geq 1, (t)_0 = t^0 = s(0,0) = 1;$$

многочленов Лагерра

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1} (-x)^k, n \geq 0;$$

являются последовательностями многочленов биномиального типа.

Теорема. *Пусть $p_n(x)$ — последовательность многочленов биномиального типа, пусть $J = J(P; n, k, \Lambda)$ — число решений системы диофантовых уравнений вида*

$$\sum_{j=1}^{2k} (-1)^j p_k(x_j) = \lambda_k, 1 \leq k \leq n, \tag{1}$$

*где неизвестные $x_j, 1 \leq j \leq 2k$, пробегают целые значения в пределах от 1 до $P$, а правые части уравнений $\lambda(k)$ являются постоянными и могут принимать любые целые значения.*

*Тогда при $k \geq n\tau, \tau \geq 0$, справедлива оценка*

$$J \leq D(\tau) P^{2k - \Delta(\tau)}, \Delta(\tau) = \frac{n(n+1)}{2} \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{\tau} \right).$$

## 2. Общие леммы

Лемма 1. *Имеем*

$$1) J(P; n, k, \Lambda) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 |S(A)|^{2k} \, e^{-2\pi i (\alpha_1 \lambda_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n)} \, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n,$$

*где*

$$S(A) = \sum_{x \leq P} e^{2\pi i f(x)}, f(x) = \alpha_1 p_1(x) + \cdots + \alpha_n p_n(x);$$

$$2) J(P; n, k, \Lambda) \leq J(P; n, k, \mathbf{0}) = J; \quad J \leq P^{2k_1} J(P; n, k - k_1, \mathbf{0});$$

$$3) \sum_{\Lambda} J(P; n, k, \Lambda) = P^{2k}; |\lambda_1| \leq kP(1 + o(1)), \ldots, |\lambda_n| \leq kP^n (1 + o(1));$$

$$4) |S(A)|^{2k} = \sum_{\Lambda} J(P; n, k, \Lambda) e^{2\pi i (\alpha_1 \lambda_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n)};$$

$$5) J(P; n, k, \mathbf{0}) \geq (2k)^{-n} P^{2k - 0{,}5n(n+1)} (1 + o(1)).$$

Доказательство [15], с. 139-140.

Далее набор чисел $x_1, x_3, \ldots, x_{2k-1}$ называют регулярным по модулю $q$, если ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} p_1(x_1) & \ldots & p_1(x_{2k-1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_n(x_1) & \ldots & p_n(x_{2k-1}) \end{pmatrix},$$

рассматриваемой по модулю $q$, является максимальным. В противном случае набор называют сингулярным.

Лемма 2. а) *Пусть $x_1, \ldots, x_{2k}$ — решение системы уравнений (1). Тогда для любого целого числа $a$ набор чисел $x_1 + a, \ldots, x_{2k} + a$, также является решением системы уравнений (1).*

*б) Пусть набор чисел $x_1, x_3, \ldots, x_{2k-1}$ является регулярным (сингулярным) по простому модулю $q$. Тогда для любого целого числа $a$ набор чисел $x_1 + a, x_3 + a \ldots, x_{2k-1} + a$, также является регулярным (сингулярным) по модулю $q$.*

Доказательство. Имеем

$$\sum_{j=1}^{2k}(-1)^j p_l(x_j+a)=\sum_{j=1}^{2k}(-1)^j\sum_{s=0}^{l}\binom{l}{s}p_s(x_j)p_s(a)=\sum_{s=0}^{l}\binom{l}{s}p_s(a)\sum_{j=1}^{2k}(-1)^j p_s(x_j)=0.$$

Тем самым доказано утверждение а).

Утверждение б) следует из того, что после вычитания линейной комбинации строк матрица

$$\begin{pmatrix} p_1(x_1) & \dots & p_1(x_{2k-1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ p_n(x_1) & \dots & p_n(x_{2k-1}) \end{pmatrix}$$

приводится к матрице Вандермонда.

## 3. Лемма о числе решений полной системы сравнений

Лемма 3. *Пусть $p$ — простое число, $\{p_n(x)\}$ — последовательность многочленов биномиального типа, $T$ — число решений системы сравнений вида*

$$\begin{cases} p_1(x_1)+\dots+p_(x_n)\equiv p_1(y_1)+\dots+p_1(y_n) \pmod p, \\ \dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots \\ p_1(x_1)+\dots+p_(x_n)\equiv p_n(y_1)+\dots+p_n(y_n) \pmod{p^n}, \end{cases} \tag{2}$$

*где неизвестные $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$ пробегают полную систему вычетов по модулю $p^n$ и набор чисел $x_1,\dots,x_n$ удовлетворяет условию регулярности по модулю $p$. Тогда имеет место следующее неравенство*

$$T\le n!p^{2n^2-0{,}5n(n+1)}.$$

*В частности, та же оценка справедлива для последовательности многочленов $p_n(x)=x^n, n\ge 0$, биномиального типа. Доказательство.* Будем считать, что $p>n$, так как в противном случае нет наборов $x_1,\dots,x_n$, удовлетворяющих условию регулярности по модулю $p$. Рассмотрим $0\le x_s,y_s<p^n, 1\le s\le n$. Запишем каждое неизвестное в $p$-адической форме

$$x_s=\sum_{\mu=0}^{n-1}x_{s,\mu}p^{\mu}, y_s=\sum_{\mu=0}^{n-1}y_{s,\mu}p^{\mu}, 0\le x_{s,\mu},y_{s,\mu}<p, s=1,\dots,n.$$

Оценим сверху число решений $T_0$ системы сравнений

$$\begin{cases} p_1(x_{1,0})+\dots+p_1(x_{n,0})\equiv p_1(y_{1,0})+\dots+p_1(y_{n,0}) \pmod p, \\ \dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots \\ p_n(x_{1,0})+\dots+p_n(x_{n,0})\equiv p_n(y_{1,0})+\dots+p_n(y_{n,0}) \pmod p, \end{cases}$$

для чего опустим условие регулярности по модулю $p$ на переменные $x_s, 1\le s\le n$.

Имеем $T_0\le n!p^n$. Действительно, зафиксируем любой набор $0\le y_{1,0},\dots,y_{n,0}<p$. Тогда при некоторых $\lambda_s, 1\le s\le n$ набор $0\le x_1,\dots,x_n<p$ является решением системы сравнений

$$\begin{cases} p_1(x_{1,0})+\dots+p_1(x_{n,0})\equiv \lambda_1 \pmod p, \\ \dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots \\ p_n(x_{1,0})+\dots+p_n(x_{n,0})\equiv \lambda_n \pmod p, \\ . \end{cases}$$

Число решений этой системы не превосходит $n!$.

Далее при $n-1\geq\nu\geq 1$ положим

$$u_{s,\nu}=\sum_{\mu=0}^{\nu}p^{\mu}x_{s,\mu}=u_{s,\nu-1}+p^{\nu}x_{s,\nu},1\leq s\leq n.$$

Из системы сравнений (2) следует, что любое её решение $x_s, 1\leq s\leq n$, с условием регулярности по модулю $p$ при любых фиксированных $y_s, 1\leq s\leq n$, и при некоторых $\lambda_s, 1\leq s\leq n$, удовлетворяет следующей системе сравнений $W_\nu$ вида

$$\begin{cases}p_\nu(u_{1,\nu})+\dots+p_\nu(u_{n,\nu})\equiv\lambda_\nu \pmod{p^{\nu+1}},\\ \dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\\ p_n(u_{1,\nu})+\dots+p_n(u_{n,\nu})\equiv\lambda_n \pmod{p^{\nu+1}},\\ .\end{cases}$$

Обозначим число её решений символом $T(W_\nu)$.

Зафиксируем любое решение $u_{s,\nu-1}, 1\leq s\leq n$ системы сравнений $W_{\nu-1}$. Получим условия, которым должны удовлетворять $p$-адические координаты $x_{s,\nu}, 1\leq s\leq n$. Находим

$$p_t(u_{s,\nu})\equiv p_t(u_{s,\nu-1})+p^{\nu}p'_t(u_{s,\nu-1})x_{s,\nu} \pmod{p^{\nu+1}}, \nu+1\leq s\leq n.$$

Таким образом при некоторых $\lambda'_t, \nu+1\leq t\leq n$, приходим к системе сравнений

$$\sum_{s=1}^{n}p'_t(u_{s,\nu-1})x_{s,\nu}\equiv\lambda'_t, \nu+1\leq t\leq n, \tag{3}$$

при условии, что $u_{s,\nu-1}, 1\leq s\leq n$, удовлетворяют условию регулярности по модулю $p$.

Пусть $T_\nu$ обозначает число её решений. Тогда $T(W_\nu)\leq T_\nu T(W_{\nu-1})$. Система сравнений (3) эквивалентна следующей системе сравнений

$$\sum_{s=1}^{n}p'_t(x_{s,0})x_{s,\nu}\equiv\lambda'_t \pmod{p}, \nu+1\leq t\leq n, \qquad (3).$$

Поскольку строки матрицы

$$\begin{pmatrix} p'_{\nu+1}(x_{1,0}) & \dots & p'_{\nu+1}(x_{n,0})\\ \dots & \dots & \dots\\ p'_n(x_{1,0)} & \dots & p'_n(x_{n,0})\end{pmatrix}$$

линейно независимы по модулю $p$ (условие регулярности), имеем следующую оценку $T_\nu\leq p^\nu$.

Следовательно,

$$T\leq p^{n^2}T_0\dots T_{n-1}\leq n!\prod_{\nu=0}^{n-1}p^{\nu}=n!p^{2n^2-0,5n(n+1)}.$$

Лемма доказана.

## 4. Рекуррентное неравенство

Лемма 4. *Пусть $n\geq 2, k\geq 2n, P\geq 1, J(P;n,k)$ — число решений системы диофантовых уравнений (1). Тогда существует число $p$ такое, что $P^{1/n}\leq p\leq 2P^{1/n}$, и справедливо неравенство*

$$J(P;n,k)\leq 2k^{2n}p^{2(k-n)+2n^2-0,5n(n+1)}J(P_1;n,k-n)+2^{2n^2+1}n^{2k}P^{2(n-1)},$$

где $P_1 = Pp^{-1} + 1$.

Доказательство. Теорема очевидно справедлива при $P \le 2^n n^{2n}$, поскольку второе слагаемое в неравенстве утверждения леммы превосходит $P^{2k}$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $P > 2^n n^2$. Тогда на отрезке $[P^{1/n}, 2P^{1/n}]$ будет находиться не менее $n$ различных простых чисел: $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$.

Запишем величину $J(P; n, k)$ в следующем виде

$$J(P;n,k) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{x \le P} e^{2\pi i \alpha_1 p_1(x) + \cdots + \alpha_n p_n(x)} \right|^{2k} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n =$$

$$= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{x_1 \le P} \sum_{x_3 \le P} \cdots \sum_{x_{2k-1} \le P} e^{2\pi i (F(x_1) + F(x_3) \cdots + F(x_{2k-1}))} \right|^2 d\alpha_1 \ldots d\alpha_n,$$

где

$$F(x) = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s p_s(x).$$

Все наборы $x_1, x_3, \ldots, x_{2k-1}$ разобьём на две совокупности $A$ и $B$. В первую совокупность $A$ отнесём те из них, которые хотя бы при одном $p_s, 1 \le s \le n$, удовлетворяют условию регулярности по модулю $p_s = p$. Остальные наборы отнесём ко второй совокупности $B$. Тогда в понятной символической записи имеем

$$J(P;n,k) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_A + \sum_B \right|^2 d\alpha_1 \ldots d\alpha_n \le 2J_1 + 2J_2,$$

где

$$J_1 = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_A \right|^2 d\alpha_1 \ldots d\alpha_n, \quad J_2 = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_B \right|^2 d\alpha_1 \ldots d\alpha_n.$$

Перейдём к оценке $J_1$. Совокупность $A$ наборов $x_1, x_3, \ldots, x_{2k-1}$ разобьём на $n$ непересекающихся подсовокупностей $A_1, \ldots, A_n$ в соответствии с числом $p_s, 1 \le s \le n$, по которому набор $x_1, x_3, \ldots, x_{2k-1}$ является регулярным по модулю $p_s$. Если набор является регулярным для нескольких $p_s$, то отнесём его в подсовокупность с наименьшим из таких $s$. Имеем

$$J_1 = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{s=1}^{n} \sum_{A_s} \right|^2 d\alpha_1 \ldots d\alpha_n \le n \sum_{s=1}^{n} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{A_s} \right|^2 d\alpha_1 \ldots d\alpha_n \le n^2 J_0,$$

где $J_0$ обозначает наибольшее из значений интегралов

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{A_s} \right|^2 d\alpha_1 \ldots d\alpha_n, p = p_s, A_s = A_0.$$

Поскольку набор $x_1, x_3, \ldots, x_{2k-1}$ является регулярным по модулю $p$, найдутся в этом наборе $n$ чисел $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_n}$, таких, что определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} p_1(x_{j_1}) & p_1(x_{j_2}) & \ldots & p_1(x_{j_n}) \\ p_2(x_{j_1}) & p_2(x_{j_2}) & \ldots & p_2(x_{j_n}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_n(x_{j_1}) & p_n(x_{j_2}) & \ldots & p_n(x_{j_n}) \end{pmatrix}$$

отличен от нуля по модулю $p$. Без ограничения общности можно считать, что $j_1 = 1, j_2 = 3, \ldots, j_n = 2n-1$, так как перестановка столбцов матрицы не влияет на справедливость условия регулярности по модулю $p$. Следовательно,

$$J_0 \le \binom{k}{n}^2 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \{\sum_{x_1}\sum_{x_3}\cdots\sum_{x_{2n-1}}\}' \sum_{x_{2n+1}}\cdots\sum_{x_{2k-1}} \right|^2 d\alpha_1 \ldots d\alpha_n,$$

где штрих в знаке суммы означает, что суммирование по соответствующим переменным отвечает условию регулярности по модулю $p$, а суммирование по переменным $x_{2n+1}, \ldots, x_{2k-1}$ ведётся по сплошным промежуткам от 1 до $P$.

Представим $x_j, j = 2n+1, \ldots, 2k-1$, в виде

$$x_j = y_j + pz_j, 1 \le y_j \le p, 0 \le z_j \le Pp^{-1}.$$

Тогда

$$\left|\sum_{A_0}{}'\right|^2 = \left| \{\sum_{x_1}\sum_{x_3}\cdots\sum_{x_{2n-1}}\}' \sum_{x_{2n+1}}\cdots\sum_{x_{2k-1}} \right|^2 = \left| \{\sum_{x_1}\sum_{x_3}\cdots\sum_{x_{2n-1}}\}' \right|^2 \left| \sum_{y=1}^{p}\sum_{z\le Pp^{-1}} \right|^{2(k-n)}.$$

Воспользуемся неравенством Гёльдера. Находим

$$\left|\sum_{A_0}{}'\right|^2 \le p^{2(k-m)-1} \sum_{y=1}^{p} \left| \{\sum_{x_1}\sum_{x_3}\cdots\sum_{x_{2n-1}}\}' \right|^2 \left| \sum_{z\le Pp^{-1}} \right|^{2(k-n)}.$$

Отсюда имеем

$$J_0 \le \binom{k}{n}^2 p^{2(k-n)} \max_y J_{00}, J_{00} = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \{\sum_{x_1}\sum_{x_3}\cdots\sum_{x_{2n-1}}\}' \right|^2 \left| \sum_{z} \right|^{2(k-n)} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n.$$

Величина интеграла $J_{00}$ равна при некотором $y = y_0$ числу решений следующей системы диофантовых уравнений

$$\sum_{j=1}^{2n} (-1)^j p_t(x_j) = \sum_{j=2n+1}^{2k} (-1)^j p_t(y_0 + pz_j), \quad 0 \le t \le n,$$

где неизвестные $x_1, x_3, \ldots, x_{2n-1}$ удовлетворяют условию регулярности по модулю $p$, а неизвестные $z_j, 2n+1 \le j \le 2k$ пробегают сплошные промежутки целых чисел от нуля до $Pp^{-1}$. По лемме 2 с сохранением условия регулярности решения предыдущей системы уравнений являются решениями следующей системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{2n} (-1)^j p_t(x_j - y_0) = \sum_{j=2n+1}^{2k} (-1)^j p_t(pz_j), \quad 0 \le t \le n,$$

Отсюда имеем эквивалентную систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{2n} (-1)^j (x_j - y_0)^t = p^t \sum_{j=2n+1}^{2k} (-1)^j z_j^t, \quad 0 \le t \le n, \tag{4}$$

Пусть $J^*(Pp^{-1}; n, k-m, \Lambda)$ обозначает число решений системы уравнений вида

$$\sum_{j=2n+1}^{2k} (-1)^j z_j^t = \lambda_t, \quad 0 \le t \le n,$$

где $\Lambda$ — набор фиксированных целых чисел $\lambda_t, 0 \le t \le n$, а неизвестные $z_j$ изменяются в пределах $0 \le z_j \le Pp^{-1}, 2n+1 \le j \le 2k$. Тогда из леммы 1 получим

$$J^*(Pp^{-1}; n, k-m, \Lambda) \le J^*(Pp^{-1}; n, k-m, \mathbf{0}) = J_1^*(P_1; n, k-m, \mathbf{0}) =$$

$$= J(P_1; n, k-m, \mathbf{0}) = J(P_1; n, k-m),$$

где $J_1^*(P_1; n, k-m, \mathbf{0})$ — число решений предыдущей системы уравнений, но неизвестные $z_j$ в ней пробегают целые значения от 1 до $P_1$.

Следовательно, из системы уравнений (4) имеем

$$J_{00} \le TJ(P_1; n, k-m).$$

Далее, поскольку

$$T \le n! p^{2n^2 - 0{,}5n(n+1)},$$

находим

$$J_1 \le n^2 n! \binom{k}{n}^2 p^{2(k-n)+2n^2-0{,}5n(n+1)} J(P_1; n, k-n) \le k^{2n} p^{2(k-n)+2n^2-0{,}5n(n+1)} J(P_1; n, k-n).$$

Перейдём к оценке $J_2$. Оценим число $U$ элементов в совокупности $B$. Набор чисел $x_1, x_3, \dots, x_{2k-1}$ относится к совокупности $B$, если при $k \ge n$ матрица

$$\begin{pmatrix} p_1(x_1) & p_1(x_3) & \dots & p_1(x_{2k-1}) \\ p_2(x_1) & p_2(x_3) & \dots & p_2(x_{2k-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_n(x_1) & p_n(x_3) & \dots & p_n(x_{2k-1}) \end{pmatrix}$$

имеет для всякого $s, 1 \le s \le n$, ранг по модулю $p_s$ меньший, чем $n$. Другими словами, для всякого $s$ найдётся свой набор чисел $c_1^{(s)}, \dots, c_n^{(s)}$ из полной системы вычетов по модулю $p_s$ такой, что имеют место сравнения

$$\sum_{t=1}^{n} c_t^{(s)} p_t(x_j) \equiv 0 \pmod{p_s}, x_j \equiv x_j(p_s) \pmod{p_s}, j = 1, 3, \dots, 2k-1,$$

причём не все $c_t^{(s)}$ сравнимы с 0 по модулю $p_s, c_1^{(s)} = 0$ или 1. При фиксированных наборах $c_t^{(s)}, 1 \le t \le n$, каждое из сравнений имеет не более $n$ решений. Отсюда, используя китайскую теорему об остатках, находим

$$U \le \prod_{s=1}^{n} \left(2p_s^{n-1} n^k\right) \le 2^{n^2} n^k P^{n-1}, \quad J_2 \le U^2 \le 2^{2n^2} n^{2k} P^{2(n-1)}.$$

Лемма 4 доказана.

## 5. Доказательство теоремы 1

Проведём ндукцию по параметру $\tau$. Очевидно, что утверждение справедливо при $\tau = 0$. Предположим, что утверждение теоремы имеет место при $\tau = m$. Докажем его при $\tau = m+1$. Так как $k \geq n(m+1)$, то из леммы 1 находим

$$J(P; n, k) \leq P^{2(k-n(m+1))} J(P; n, n(m+1)).$$

Воспользуемся рекуррентным неравенством из леммы 4. Получим

$$J(P; n, n(m+1)) \leq 2(n(m+1))^{2n} p^{2nm+2n^2-0,5n(n+1)} J(P_1; n, nm) + 2^{2n^2+1} n^{2n(m+1)} P^{2(n-1)},$$

где $P_1 = Pp^{-1} + 1$.

По предположению индукции имеем

$$J(P_1; n, nm) \leq D(m) P_1^{2nm-0,5n(n+1)+0,5n(n+1)(1-1/n)^m}.$$

Следовательно,

$$J(P; n, n(m+1)) \leq I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = 2(n(m+1))^{2n} D(m) p^{2nm+2n^2-0,5n(n+1)} P_1^{2nm-0,5n(n+1)+\delta(m)}, \delta(m) = 0,5n(n+1)(1-1/n)^m,$$

$$I_2 = 2^{2n^2+1} n^{2n(m+1)} P^{2(n-1)}.$$

Оценим $I_1$. Считаем, что $P \geq (2nm)^2$, так как в противном случае утверждение теоремы тривиально. Преобразуя $I_1$, находим

$$I_1 = 2(n(m+1))^{2n} D(m) p^{2nm+2n^2-0,5n(n+1)-2nm+0,5n(n+1)-\delta(m)} \times$$

$$\times P^{2nm-0,5n(n+1)+0,5n(n+1)(1-1/n)^m} (1 + pP^{-1})^{2nm-0,5n(n+1)+0,5n(n+1)(1-1/n)^m}.$$

Поскольку

$$(1 + pP^{-1})^{2nm-0,5n(n+1)+0,5n(n+1)(1-1/n)^m} < e < 3,$$

получим

$$I_1 \leq 6(n(m+1))^{2n} D(m) p^{2n^2-\delta(m)} P^{2nm-0,5n(n+1)+0,5n(n+1)(1-1/n)^m} \leq$$

$$\leq 8(n(m+1))^{2n} 2^{2n^2} D(m) P^{2n(m+1)-0,5n(n+1)+0,5n(n+1)(1-1/n)^{m+1}} \leq 0,5D(m+1) P^{2n(m+1)-\Delta(m+1)}.$$

Оценим $I_2$. Имеем

$$I_2 = 2^{2n^2+1} n^{2n(m+1)} P^{2(n-1)} \leq 0,5D(m+1) P^{2n(m+1)-\Delta(m+1)}.$$

Теорема доказана.

## 6. Вывод оценки суммы по последовательности многочленов биномиального типа

Пусть $\alpha_s, 1 \leq s \leq n,$ — произвольные действительные числа, $p_s(x), s \geq 0,$ — последовательность многочленов биномиального типа, $P > 1$. Рассмотрим тригонометрическую сумму вида

$$S = \sum_{x \leq P} e^{2\pi i f(x)}, f(x) = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s p_s(x).$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $n, k_1, k_2$ — натуральные числа, $P > 1, Y > 1$ — действительные числа, $\Lambda, M$ — целочисленные наборы вида $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ и $(\mu_1, \dots, \mu_n)$, причём $|\lambda_r| \le k_1 P^r$, $|\mu_r| \le k_2 Y^r$, $1 \le r \le n$. Тогда*

$$|S|^{4k_1k_2} \le 2^{4k_1k_2} P^{2k_1(2k_2-1)} Y^{2k_1(2k_2-1)} J(P; n, k_1) J(Y; n, k_2) W_0 + (2Y)^{4k_1k_2},$$

*где*

$$W_0 = \sum_M \left| \sum_\Lambda e^{2\pi i g(M,\Lambda)} \right|, g(M, \Lambda) = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s \sum_{t=0}^{s} \binom{s}{t} \lambda_{s-t} \mu_t.$$

Доказательство. В сумме $S$ произведём сдвиг промежутка суммирования. Получим

$$S = Y^{-1} W + 2\theta Y, W = \sum_{y=1}^{Y} \sum_{x \le P} e^{2\pi i f(x+y)}, |\theta| \le 1.$$

Далее, используя неравенство Гёльдера, находим

$$|W|^{2k_1} \le Y^{2k_1-1} \sum_{y=1}^{Y} \left| \sum_{x \le P} e^{2\pi i f(x+y)} \right|^{2k_1} = Y^{2k_1-1} W_1.$$

$$f(x+y) = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s \sum_{t=0}^{s} \binom{s}{t} p_t(y) p_{s-t}(x).$$

Преобразуем сумму $W_1$. Имеем

$$W_1 \le \sum_{y=1}^{Y} \sum_{x_1, \dots, x_{2k_1} \le P} e^{2\pi i g(y,\Lambda)} = \sum_\Lambda J(p; n, k_1) \left| \sum_{y=1}^{Y} e^{2\pi i g(y,\Lambda)} \right| = W_2,$$

$$g(y, \Lambda) = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s \sum_{t=0}^{s} \binom{s}{t} p_t(y) \lambda_{s-t},$$

$$\lambda_r = \sum_{j=1}^{2k} (-1)^j p_r(x_j), 0 \le r \le n.$$

Вновь, используя неравенство Гёльдера, приходим к оценке

$$|W_2|^{2k_2} \le \left( \sum_\Lambda J(P; n, k_1, \Lambda) \right)^{2k_2-1} \sum_\Lambda J(P; n, k_1, \Lambda) \left| \sum_{y=1}^{Y} e^{2\pi i g(y,\Lambda)} \right|^{2k_2} \le$$

$$\le P^{2k_1(2k_2-1)} J(P; n, k_1) \sum_\Lambda \left| \sum_{y=1}^{Y} e^{2\pi i g(y,\Lambda)} \right|^{2k_2} = W_3,$$

Собирая вместе соответствующие слагаемые в $W_3$, окончательно получим

$$W_3 \le J(Y; n, k_2) \sum_M \left| \sum_\Lambda e^{2\pi i g(M,\Lambda)} \right|,$$

$$g(M,\Lambda)=\sum_{s=1}^{n}\alpha_s\sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}\lambda_{s-t}\mu_t.$$

Теорема 2 доказана.

В частности, если положить $\alpha_1=\dots=\alpha_{n-1}=0,\alpha_n=\alpha$, в теореме 2 будем иметь

$$W_0\leq\sum_{\mu_1,\dots,\mu_n}\prod_{t=0}^{n}\min\left(2k_1P^t,\frac{1}{2\|\binom{n}{t}\alpha\mu_{n-t}\|}\right),$$

где функция $\|x\|$ обозначает расстояние до ближайшего целого числа $x$.

Применение теоремы 1 в этом случае приводит к оценке

$$|S|\ll P^{1-\rho},\rho=\frac{\gamma}{n^2\ln n},$$

где $\gamma>0$ — некоторая постоянная.

## 7. Заключение

В настоящей работе дано обобщение теоремы И.М.Виноградова о среднем на последовательность многочленов $p_n(x),n\geq 0$, биномиального типа, т.е. многочлены имеют представление в виде

$$p_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p_k(x)p_{n-k}(y),$$

Заметим, что теорема И.М.Виноградова имеет дело с последовательностью $x^n,n\geq 0$, биномиального типа. Представляется интересным получение нетривиальных оценок тригонометрических сумм вида

$$S=\sum_{x\leq P}e^{2\pi i(\alpha_1F_1(x)+\dots+\alpha_nF_n(x))},$$

где $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ — произвольные действительные числа, а $F_n(x)$ — последовательность целозначных многочленов.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pincherle S., Amaldi. Le Operazioni Distributive // Zanichelli, Bologna, 1900.

2. Hurwitz A. Über Abel's Verallgemeinerung der binomischen Formel // Acta Math., 1902, **26,** 199–203.

3. Sheffer I. M. Some properties of polynomials of type zero // Duke Math., 1939, **5,** 590–622.

4. Stefensen J. F. The Poweroid, an Extension of the Mathematical of Power // Acta Math., 1941, **73,** 333–366.

5. Touchard J. Nombres Exponentiels et Nombres de Bernuolli // Canad.J.Math., 1956, **8** 305–320.

6. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. — М: Изд-во ин. лит., 1963.

7. Riordan J. Inverse Relations and Combinatorial Identities // Amer.Math.Monthly, 1964, **71** 485–498.

8. Riordan J. Combinatorial Identities. — New York: Wiley, 1968.

9. Mullin R., Rota G.-C. On the Foundations of Combinatorial Theory: III. Theory of Binomial Enumeration // Graph Theory and its Applications, 1970, 168–213.

10. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. 2-е изд., исправленное и дополненное — М.: Физматлит. 1980, 144 с.

11. Карацуба А. А., Коробов Н. М. О теореме о среднем // Докл. АН СССР, 1963, **149,** № 2.

12. Карацуба А. А. Теоремы о среднем и полные тригонометрические суммы // Изв. АН СССР, сер.матем., 1966, **30,** № 1.

13. Архипов Г. И. Избранные труды. — Орёл: Изд-во Орловского ун-та, 2013, 464 с.

14. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. 4-е изд., испр. — М.: Дрофа. 2004, 640 с.

15. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. — М.: Наука. Гл. ред.физ.-мат. лит. 1987, 368 с.

16. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. Trigonometric sums in number theory and analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39 — Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2004, pp. 554.

17. Чубариков В. Н. Кратные тригонометрические суммы с простыми числами // Докл. АН СССР, 1984, **278,** № 2, 302–304.

18. Чубариков В. Н. Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами // Изв. АН СССР, сер.матем., 1985, **49,** № 5, 1031–1067.

## REFERENCES

1. Pincherle S., Amaldi. 1900. Le Operazioni Distributive // Zanichelli, Bologna.

2. Hurwitz A. 1902. Über Abel's Verallgemeinerung der binomischen Formel // Acta Math., **26,** 199–203.

3. Sheffer I. M. 1939. Some properties of polynomials of type zero // Duke Math., **5,** 590–622.

4. Stefensen J. F. 1941. The Poweroid, an Extension of the Mathematical of Power // Acta Math., 1941, **73,** 333–366.

5. Touchard J. 1956. Nombres Exponentiels et Nombres de Bernuolli // Canad.J.Math., **8** 305–320.

6. Riordan J. 1963. An introduction to combinatorial analysis. — Moscow: Publ.House of a foreign literature.

7. Riordan J. 1964. Inverse Relations and Combinatorial Identities // Amer.Math.Monthly, **71** 485–498.

8. Riordan J. 1968. Combinatorial Identities. — New York: Wiley.

9. Mullin R., Rota G.-C. 1970. On the Foundations of Combinatorial Theory: III. Theory of Binomial Enumeration // Graph Theory and its Applications, 168–213.

10. Vinogradov I. M. 1980. The method of trigonometric sums in the theory of numbers. 2nd Edition., correct.and supplement. — Moscow.: Fizmatlit. pp. 144.

11. Karatsuba A. A., Korobov N. M. 1963. On the mean-value theorem // Doklady AN SSSR„ **149,** № 2.

12. Karatsuba A. A. 1966. Mean-value theorem and complete trigonometric sums // Izvestija. AN SSSR, Ser.Mathem., **30,** № 1.

13. Arkhipov G. I., 1974. Multiple trigonometric sums // Doklady AN SSSR„ **219,** № 5.

14. Arkhipov G. I., 2013. Selected papers. — Orjol: Publ.House of the Orjol University, pp. 464.

15. Arkhipov G. I.„ Karatsuba A. A., Chubarikov V. N. 1987. The theory of multiple trigonometric sums. — Moscow.: Nauka. Fizmatlit. 368 c.

16. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. 2004. Trigonometric sums in number theory and analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39 — Berlin, New York: Walter de Gruyter, pp. 554.

17. Chubarikov V. N. 1984. Multiple trigonometric sums with primes // Doklady AN SSSR„ **278,** № 2, 302–304.

18. Chubarikov V. N. 1985. Estimates of multiple trigonometric sums with primes // Izvestija. AN SSSR, Ser.Matem., **49,** № 5, 1031–1067.

Получено 11.01.2019 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.