ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 4.

УДК 519.101 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-69-85

О равномерно рекуррентных словах, порождаемых перекладыванием отрезков, в том числе с изменением ориентации

А. Я. Белов, А. Л. Чернятьев

Канель-Белов Алексей Яковлевич — доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики, профессор, университет Бар-Илана (г. Рамат-Ган, Израиль), Колледж математики и статистики, Шэньчжэньский университет, (г. Шэньчжэнь, Китай).
e-mail: Kanelster@gmail.com

Чернятьев Александр Леонидович — кандидат физико-математических наук, МФТИ, ВШЭ (г. Москва).
e-mail: chernyatiev@gmail.com

Аннотация

Работа посвящена обзору некоторых задач символическиой динамики. Дается описание равномерно рекуррентных слов связанных с перекладыванием отрезков.

Ответ получен в терминах эволюции *размеченных графов Рози* слова W. k*-граф* Рози слова W – это ориентированный граф, вершины которого взаимнооднозначно соответствуют подсловам длины k слова W, из вершины A в вершину B ведет стрелка, если в W есть подслово длины $k+1$, у которого первые k символов – подслово соответствующее A, последние k символов – подслово, соответствующее B. *Последователем* ориентированного k-графа G называется ориентированный граф $\mathrm{Fol}(G)$ построенный следующим образом: вершины графа G биективно соответствуют ребрам графа G, из вершины A в вершину B ведет стрелка, если в графе G конечная вершина ребра A является начальной вершиной ребра B. $(k+1)$-граф является подграфом последователя k-графа и получается из него удалением некоторых ребер. Вешины, из которых выходит (или в которые входят) более одного ребра, соответсвуют *специальным подсловам* (см. гл.2), вершины, в которые входят и выходят более одного ребра, соответствуют *биспециальным подсловам*. Последовательность k-графов Рози составляет *эволюцию* графов Рози слова W. Граф Рози называется *размеченным*, если его ребра помечены буквами l и r, а некоторые вершины (возможно, ни одна) помечены символом “$-$″.

Последователем размеченного графа Рози назовем ориентированный граф, являющийся его последователем как графа Рози, разметка ребер которого определяется по правилу:

1. Ребра, входящие в развилку должны быть помечены теми же символами, как и ребра, входящие в любого левого потомка этой вершины;
2. Ребра, выходящие из развилки должны быть помечены теми же символами, как и ребра, выходящие из любого правого потомка этой вершины;
3. Если вершина помечена знаком “–”, то все ее правые потомки также должны быть помечены знаком “–”.

В терминах размеченных графов Рози определяется *асимптотически правильная* эволюция графов Рози, то есть определяются правила перехода от k-графов к $(k+1)$-графам. Именно, эволюция называется *правильной*, если для всех $k \geq 1$ выполняются следующие условия при переходе от k-графа G_k к $(k+1)$-графу G_{k+1} :

1. Валентность любой вершины не более 2,то есть в нее входит и выходит не более 2-х ребер.

2. Если в графе нет вершин, соответсвующих биспециальным подсловам, то G_{n+1} совпадает с последователем $D(G_n)$;
3. Если вершина, соответствующая биспециальному слову не помечена знаком “–”, то ребра, соответствующие запрещенным словам выбираются из пар lr и rl
4. Если вершина помечена знаком “–”, то удаляемые ребра должны выбираться из пары ll или rr.

Эволюция называется *асимптотически правильной*, если это условие выполняется для всех k начиная с какого-то $k = K$. *Ориентированная* эволюция графов подразумевает отсутствие вершин, помеченных знаком “–”. Основная теорема данной работы заключается в описании сверхслов, связанных с перекладыванием отрезков:

Теорема. Равномерно-рекуррентное слово W

1. Порождается перекладыванием отрезков, тогда и только тогда, когда слово обеспечивается асимптотически правильной эволюцией размеченных графов Рози.
2. Порождается перекладыванием отрезков с сохранением ориентации тогда и только тогда, когда слово обеспечивается асимптотически правильной ориентированной эволюцией размеченных графов Рози.

Ключевые слова: комбинаторика слов, последовательность Штурма, перекладывание отрезков, морфическая последовательность, Граф Рози

Библиография: 23 названия.

Для цитирования:
А. Я. Белов, А. Л. Чернятьев. О равномерно рекуррентных словах, порождаемыех перекладыванием отрезков, в том числе с изменением ориентации // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4 с. 69 – 85.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 4.

UDC 519.101 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-69-85

On uniformly recurrent words generated by shifting segments, including with a change in orientation

A. Ya. Belov, A. L. Chrnyatyev

Kanel-Belov Alexey Yakovlevich — doctor of physical and mathematical sciences, federal professor, professor, Bar-Ilan University (Ramat Gan, Israel), College of Mathematics and Statistics, Shenzhen University, (Shenzhen, China).
e-mail: Kanelster@gmail.com

Chernyatyev Alexander Leonidovich — Candidate of Physics and Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology, HSE (Moscow).
e-mail: chernyatiev@gmail.com

Abstract

The work is devoted to the review of some problems of symbolic dynamics. The description of uniformly recurrent words associated with the shifting of segments is given. Let W be an infinite word over finite alphabet A. We get combinatorial criteria of existence of interval exchange transformations that generate the word W.

In this paper we study words generated by general piecewise-continuous transformation of the interval. Further we prove equivalence set words generated by piecewise-continuous transformation and words generated by interval exchange transformation. This method get capability of descriptions of the words generated by arbitrary interval exchange transformation.
This work is targeted to the following

Inverse problem: *Which conditions should be imposed on a uniformly recurrent word W in order that it be generated by a dynamical system of the form $(I, T, U_1, \ldots, U_k)$, where I is the unit interval and T is the interval exchange transformation?*

The answer to this question is given in terms of the evolution of the *labeled Rauzy graphs* of the word W. The *Rauzy graph* of order k (the k-graph) of the word W is the directed graph whose vertices biuniquely correspond to the factors of length k of the word W and there exists an arc from vertex A to vertex B if and only if W has a factor of length $k+1$ such that its first k letters make the subword that corresponds to A and the last k symbols make the subword that corresponds to B. By the *follower* of the directed k-graph G we call the directed graph $\mathrm{Fol}(G)$ constructed as follows: the vertices of graph $\mathrm{Fol}(G)$ are in one-to-one correspondence with the arcs of graph G and there exists an arc from vertex A to vertex B if and only if the head of the arc A in the graph G is at the notch end of B. The $(k+1)$-graph is a subgraph of the follower of the k-graph; it results from the latter by removing some arcs. Vertices which are tails of (or heads of) at least two arcs correspond to *special factors* (see Section 2); vertices which are heads and tails of more than one arc correspond to *bispecial factors*. The sequence of the Rauzy k-graphs constitutes the *evolution* of the Rauzy graphs of the word W. The Rauzy graph is said to be *labeled* if its arcs are assigned letters l and r and some of its vertices (perhaps, none of them) are assigned symbol "-".
The *follower* of the labeled Rauzy graph is the directed graph which is the follower of the latter (considered a Rauzy graph with the labeling neglected) and whose arcs are labeled according to the following rule:

1. Arcs that enter a branching vertex should be labeled by the same symbols as the arcs that enter any left successor of this vertex;
2. Arcs that go out of a branching vertex should be labeled by the same symbols as the arcs that go out of any right successor of this vertex;
3. If a vertex is labeled by symbol "–", then all its right successors should also be labeled by symbol "–".

In terms of Rauzy labeled graphs we define the *asymptotically correct* evolution of Rauzy graphs, i.e., we introduce rules of passing from k-graphs to $(k+1)$-graphs. Namely, the evolution is said to be *correct* if, for all $k \geq 1$, the following conditions hold when passing from the k-graph G_k to the $(k+1)$-graph G_{k+1} :

1. The degree of any vertex is at most 2, i.e., it is incident to at most two incoming and outgoing arcs;
2. If the graph contains no vertices corresponding to bispecial factors, then G_{n+1} coincides with the follower $D(G_n)$;
3. If the vertex that corresponds to a bispecial factor is not labeled by symbol "–", then the arcs that correspond to forbidden words are chosen among the pairs lr and rl;
4. If the vertex is labeled by symbol "–", then the arcs to be deleted should be chosen among the pairs ll or rr.

The evolution is said to be *asymptotically correct* if this condition is valid for all k beginning with a certain $k = K$. The *oriented* evolution of the graphs means that there are no vertices labeled by symbol "–". The main result of this work consists in the description of infinite words generated by interval exchange transformations (and answers a Rouzy question [21]):

Main theorem. *A uniformly recurrent word W*

1. *is generated by an interval exchange transformation if and only if the word is provided with the asymptotically correct evolution of the labeled Rauzy graphs;*

2. *is generated by an orientation–preserving interval exchange transformation if and only if the word is provided with the asymptotically correct oriented evolution of the labeled Rauzy graphs.*

Keywords: combinatorics of words, Sturmian sequence, interval exchange transformation, morphic sequence, symbolical dynamics, Rauzy graph.

Bibliography: 23 titles.

For citation:
A. Ya. Belov, A. L. Chrnyatyev "On uniformly recurrent words generated by shifting segments, including with a change in orientation", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 69–85.

1. Введение.

Методы символической динамике играют существенную роль в изучении комбинаторных свойств слов, задачах теории чисел и теории динамических систем. Пусть M – компактное метрическое пространство, $U \subset M$ — его открытое подмножество, $f : M \to M$ – гомеоморфизм компакта в себя и $x \in M$ – начальная точка. По последовательности итераций можно построить бесконечное слово над бинарным алфавитом:

$$w_n = \begin{cases} a, & f^{(n)}(x_0) \in U \\ b, & f^{(n)}(x_0) \notin U \end{cases}$$

которое называется *эволюцией* точки x_0. Символическая динамика исследует взаимосвязь свойств динамической системы (M, f) и комбинаторных свойств слова W_n. Для слов над алфавитом, состоящим из большего числа символов нужно рассмотреть несколько характеристических множеств: $U_1, \ldots, U_n$.

Под *прямой задачей* символической динамики понимается изучение комбинаторных свойств слов, порожденных данной динамической системой, *обратная задача* символической динамики изучает свойства динамической системы, то есть свойства компакта M и преобразования f по комбинаторным свойствам слова W.

Обратные задачи символической динамики, связанные с унипотентным преобразованием тора, изучались в работе [2].

Задачи, прямые и обратные, связанные с преобразованием поворота окружности приводят к классу слов, называемых *словами Штурма*. Слова Штурма – это бесконечные слова над бинарным алфавитом, в которых количество различных подслов длины n ровно $n + 1$ для любого $n \geq 1$. Известна классическая

Теорема 1 (Теорема эквивалентности ([20],[19]).). *Пусть W – бесконечное рекуррентное слово над бинарным алфавитом $A = \{a, b\}$. Следующие условия эквивалентны:*

1. *Слово W является словом Штурма, то есть количество различных подслов длины n слова W равно $T_n(W) = n + 1$ для любого $n \geq 1$..*

2. *Слово не периодично и является* сбалансированным, *то есть для любых двух подслов $u, v \subset W$ одинаковой длины выполняется неравенство $||v|_a - |u|_a| \leq 1$, где $|w|_a$ обозначает количество вхождений символа a в слово w.*

3. *Слово $W = (w_n)$ является механическим словом с иррациональным α, то есть существуют такое иррациональное α, $x_0 \in [0, 1]$ и интервал $U \subset \mathbb{S}^1$, $|U| = \alpha$ такие, что выполняется условие:*

$$w_n = \begin{cases} a, & {T_\alpha}^n(x_0) \in U \\ b, & {T_\alpha}^n(x_0) \notin U \end{cases}$$

Существует несколько различных путей для построения обобщений слов Штурма.

Во-первых, это рассмотрение *сбалансированных* слов над произвольным алфавитом. Сбалансированные непериодические слова над n-буквенным алфавитом изучены в работе [16], а позднее в [17]. В работах [3],[5] получена конструкция динамической системы, порождающей произвольное непериодическое сбалансированное слово.

Во-вторых, обобщение может быть получено посредстом изучения *функции сложности*. Функция сложности $T_W(n)$ – это количество различных подслов длины n слова W. Для слов Штурма выполняется соотошение $T_W(n+1)-T_W(n)=1$ для всех $n\geq 1$. Естественными обобщениями слов Штурма являются слова с минимальным ростом, то есть слова над конечным алфавитом для которых выполняется соотношение $T_W(n+1)-T_W(n)=1$ для всех $n\geq k$, где k – некоторое натуральное число. Описание таких слов в терминах поворота окружности было получено в работе [6]. Отметим также, что слова с функцией роста, удовлетворяющей соотношению $\lim_{n\to\infty} T(n)/n=1$ изучены в работе [7].

Слова с функцией сложности $T_W(n)=2n+1$ изучены в работах P.Arnoux, G.Rauzy ([8, 21]), с функцией роста $T_W(n)=2n+1$ в работе G.Rote [22]. Рассмотрение общего случая слов с линейной функцией сложности приводит к изучению слов, порождаемых перекладыванием отрезков.

Известно, что если перекладывание k отрезков *регулярно*, то есть траектория любого из концов отрезка перекладывания не попадает на конец другого отрезка, то слово, порождаемое данным перекладыванием, имеет функцию сложности $T(n)=n(k-1)+1$.

Изучением свойств слов с линейным ростом числа подслов также производилось школой V. Berthé, S. Ferenczi и Luca Q. Zamboni ([14], [9]).

Целью данной работы является решение следующей *обратной задачи*: при каких условиях на равномерно-рекуррентное слово W существует порождающая его динамическая система вида $(I,T,U_1,\dots,U_k)$, где I – единичный отрезок и T – перекладывание отрезков?

Ответ получен в терминах эволюции *размеченных графов Рози* слова W. *k-граф* Рози слова W – это ориентированный граф, вершины которого взаимнооднозначно соответствуют подсловам длины k слова W, из вершины A в вершину B ведет стрелка, если в W есть подслово длины $k+1$, у которого первые k символов – подслово соответствующее A, последние k символов – подслово, соответствующее B. *Последователем* ориентированного k-графа G называется ориентированный граф $\mathrm{Fol}(G)$ построенный следующим образом: вершины графа G биективно соответствуют ребрам графа G, из вершины A в вершину B ведет стрелка, если в графе G конечная вершина ребра A является начальной вершиной ребра B. $(k+1)$-граф является подграфом последователя k-графа и получается из него удалением некоторых ребер. Вешины, из которых выходит (или в которые входят) более одного ребра, соответсвуют *специальным подсловам* (см. гл.2), вершины, в которые входят и выходят более одного ребра, соответсвуют *биспециальным подсловам*. Последовательность k-графов Рози составляет *эволюцию* графов Рози слова W. Граф Рози называется *размеченным*, если его ребра помечены буквами l и r, а некоторые вершины (возможно, ни одна) помечены символом “$-$″.

Последователем размеченного графа Рози назовем ориентированный граф, являющийся его последователем как графа Рози, разметка ребер которого определяется по правилу:

1. Ребра, входящие в развилку должны быть помечены теми же символами, как и ребра, входящие в любого левого потомка этой вершины;

2. Ребра, выходящие из развилки должны быть помечены теми же символами, как и ребра, выходящие из любого правого потомка этой вершины;

3. Если вершина помечена знаком “–”, то все ее правые потомки также должны быть помечены знаком “–”.

В терминах размеченных графов Рози определяется *асимптотически правильная* эволюция графов Рози, то есть определяются правила перехода от k-графов к $(k+1)$-графам. Именно, эволюция называется *правильной*, если для всех $k \geq 1$ выполняются следующие условия при переходе от k-графа G_k к $(k+1)$-графу G_{k+1} :

1. Валентность любой вершины не более 2,то есть в нее входит и выходит не более 2-х ребер.

2. Если в графе нет вершин, соответсвующих биспециальным подсловам, то G_{n+1} совпадает с последователем $D(G_n)$;

3. Если вершина, соответствующая биспециальному слову не помечена знаком "–", то ребра, соответствующие запрещенным словам выбираются из пар lr и rl

4. Если вершина помечена знаком "–", то удаляемые ребра должны выбираться из пары ll или rr.

Эволюция называется *асимптотически правильной*, если это условие выполняется для всех k начиная с какого-то $k = K$. *Ориентированная* эволюция графов подразумевает отсутствие вершин, помеченных знаком "–". Основная теорема данной работы заключается в описании сверхслов, связанных с перекладыванием отрезков:

Теорема. Равномерно-рекуррентное слово W

1. Порождается перекладыванием отрезков, тогда и только тогда, когда слово обеспечивается асимптотически правильной эволюцией размеченных графов Рози.

2. Порождается перекладыванием отрезков с сохранением ориентации тогда и только тогда, когда слово обеспечивается асимптотически правильной ориентированной эволюцией размеченных графов Рози.

Отметим, что в некоторых частных случаях рядом авторов были получены описания слов, порождаемых перекладываниями отрезков. В работе [15] были описаны слова, порождаемые перекладываниями 3-х отрезков, в работе [14] были описаны слова, порождаемые симметричными перекладываниями отрезков (такие перекладывания тесно связаны с многомерными цепными дробями).

План работы следующий: *во 2-й главе* формулируются основные определения и факты о р.р.словах, графах Рози, а также о словах, порожденных динамическими системами. В 3-*ей главе* доказывается теорема о необходимых условиях на порождаемость слова перекладыванием отрезков. Следующие две главы посвящены доказательству достаточности этих условий. В 4-*ой главе* мы доказываем достаточность этих условий для порождаемости слова кусочно-непрерывным преобразованием отрезка, а в 5-*ой главе* доказывается эквивалентность множества р.р.слов, порожденных кусочно-непрерывными преобразованиями отрезков и преобразованием перекладывания отрезков.

Благодарности. Авторы признательны А.Л.Семенову, В.Н.Латышеву и А.А.Михалеву за полезное обсуждение. Данная работа была проведена с помощью Российского Научного Фонда Грант N 17-11-01377.

2. Основные конструкции и определения.

2.1. Функция сложности, специальные подслова, равномерно-рекуррентные слова.

В этой части мы определим основные понятия комбинаторики слов. В дальнейшем A будет обозначать конечный алфавит, то есть непустое множество элементов (символов). Через A^+

обозначим множество всех конечных последовательностей, символов, или *слов*.

Конечное слово всегда может быть единственным образом представлено в виде

$w = w_1 \cdots w_n$, где $w_i \in A, 1 \leq i \leq n$. Число n называется *длиной* слова w и обозначается $|w|$

Множество A^+ всех конечных слов над A образует простую полугруппу, где полугрупповая операция определяется как конкатенация (приписывание).

Если к множеству слов добавить элемент Λ (пустое слово), то получим свободный моноид A^* над A. Длина $|\Lambda| = 0$ по определению.

Слово u есть *подслово* (или *фактор*) слова w, если существуют слова $p, q \in A^+$ такие, что $w = puq$.

Через $F(W)$ обозначим множество всех подслов (конечных и бесконечных) слова W. Два бесконечных слова W и V над алфавитом A назовем *эквивалентными*, если $F(W) = F(V)$.

Назовем символ $a \in A$ *левым (соотв. правым) расширением* подслова v, если av (соотв. va) принадлежит $F(W)$. Подслово v называется *левым (соотв. правым) специальным подсловом*, если для него существуют два или более левых (правых) расширения. Подслово v называется *биспециальным*, если оно является и левым, и правым специальнм подсловом одновременно. Количество различных левых (правых) расширений подслова назовем левой (правой) *валентностью* этого подслова.

Слово W называется *рекуррентным*, если каждое его подслово встречается в нем бесконечно много раз (в случае двустороннего бесконечного слова, каждое подслово встречается бесконечно много раз в обоих направлениях). Слово W называется *равномерно-рекуррентным* или (*р.р словом*), если оно рекуррентно и для каждого подслова v существует натуральное $N(v)$, такое, что для любого подслова W u длины не менее, чем $N(v)$, v является подсловом u.

Далее мы сфомулируем несколько теорем о р.р. словах, которые нам понадобятся в дальнейшем. Доказательства этих теорем можно найти в монографии [1].

Теорема 2. *Следующие два свойства бесконечного слова W равносильны:*

а) для любого k можно найти $N(k)$ такое, что любой участок W длины k можно найти в любом участке W длины $N(k)$;

б) если все конечные куски слова V являются конечными кусками слова W, то и все конечные куски слова W являются конечными кусками слова V.

Теорема 3. *Пусть W — бесконечное слово. Тогда существует равномерно рекуррентное слово $\widehat{W}$, все подслова которого являются подсловами W.* □

На множестве сверхслов можно рассмотреть действие оператора сдвига τ. *Расстоянием Хемминга* между словами W_1 и W_2 мы назовем величину $d(W_1, W_2) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n 2^{-|n|}$, где $\lambda_n = 0$, если n-е позиции слов совпадают, и $\lambda_n = 1$, если они не совпадают.

Инвариантное подмножество — это подмножество множества всех сверхслов, которое инвариантно относительно действия τ. *Минимальное замкнутое инвариантное множество*, сокращенно м.з.и.м., — это замкнутое (относительно введенной выше метрики Хэмминга) инвариантное подмножество, которое не пусто, не содержит замкнутых инвариантных подмножеств, кроме себя самого и пустого.

Теорема 4 (Свойства замкнутых инвариантных множеств). *Следующие свойства слова W равносильны:*

1. *W — равномерно рекуррентное*

2. *замкнутая орбита W минимальна и представляет собой м.з.и.м.*

Теорема 5. *Пусть W — равномерно-рекуррентное непериодическое сверхслово. Тогда*

1. *Все слова, эквивалентные W, являются р.р. словами, и множество таких слов несчетно.*

2. *Существуют такие различные р.р. слова $W_1 \neq W_2$, эквивалентные данному, что $W_1 = UV_1$, $W_2 = UV_2$, где U– бесконечное влево сверхслово и $U_1 \neq U_2$ – бесконечные вправо сверхслова.*

2.2. Графы Рози.

Удобным инструментом для описания слова W является *графы подслов*, или графы Рози (Rauzy's graphs), введенные Рози [21], которые строятся следующим образом: *k-граф* слова W – ориентированный граф, вершины которого взаимнооднозначно соответствуют подсловам длины k слова W, из вершины A в вершину B ведет стрелка, если в W есть подслово длины $k+1$, у которого первые k символов – подслово соответствующее A, последние k символов – подслово, соответствующее B. таким образом, ребра k-графа биективно соответствуют $(k+1)$-подсловам слова W.

Ясно, в k-графе G слова W правым специальным словам соответствуют вершины, из которых выходит (соотв. в которые входит) больше одной стрелки. Такие вершины мы будем называть развилками. Граф G будем называть *сильно связным*, если из любой вершины в любую вершину можно перейти по стрелкам.

Последователем ориентированного графа G будем называть ориентированный граф $\mathrm{Fol}(G)$ построенный следующим образом: вершины графа G биективно соответствуют ребрам графа G, из вершины A в вершину B ведет стрелка, если в графе G конечная вершина ребра A является начальной вершиной ребра B.

Связность графов Рози и рекуррентность соответсвующего слова связаны естественным образом. Имеет место следующее

Предложение **1.** *Пусть W – бесконечное (в одну сторону) слово. Следующие условия эквивалентны:*

1. *Слово W – рекуррентно.*

2. *Для всех k соответствующий k-граф слова W является сильно связным.*

3. *Каждое подслово W встречается не меньше двух раз.*

4. *Любое подслово является продолжаемым слева.*

Мы вводим понятие *размеченного Графа Рози.* Граф Рози называется *размеченным*, если

1. Ребра каждой развилки помечены символами l (“left”) и r (“right”)

2. Некоторые вершины помечены символом “–”.

Последователем размеченного графа Рози назовем ориентированный граф, являющийся его последователем как графа Рози, разметка ребер которого определяется по правилу:

1. Ребра, входящие в развилку должны быть помечены теми же символами, как и ребра, входящие в любого левого потомка этой вершины;

2. Ребра, выходящие из развилки должны быть помечены теми же символами, как и ребра, выходящие из любого правого потомка этой вершины;

3. Если вершина помечена знаком “–”, то все ее правые потомки также должны быть помечены знаком “–”.

2.3. Слова, порождаемые динамическими системами.

Пусть M – компактное метрическое пространство, $U \subset M$ — его открытое подмножество, $f : M \to M$ – гомеоморфизм компакта в себя и $x \in M$ – начальная точка.

По последовательности итераций можно построить бесконечное слово над бинарным алфавитом:

$$w_n = \begin{cases} a, \ f^{(n)}(x_0) \in U \\ b, \ f^{(n)}(x_0) \notin U \end{cases}$$

которое называется *эволюцией* точки x_0. Символическая динамика исследует взаимосвязь свойств динамической системы (M, f) и комбинаторных свойств слова W_n.

Для слов над алфавитом, состоящим из большего числа символов нужно рассмотреть несколько характеристических множеств: $U_1, \ldots, U_n$.

Заметим, что эволюция точки корректно определена только в случае, когда траектория точки не попадает на границу характеристических множеств $\partial U_1, \partial U_2, \ldots$.

Для того, чтобы рассматривать траекторию произвольной точки, мы введем понятие *существенной эволюции.*

Определение 1. *Конечное слово v^f называется существенной конечной эволюцией точки x^*, если в любой окрестности точки x^* существует открытое множество V, любая точка $x \in V$ из которого обладает эволюцией v^f. Бесконечное слово W называется существенной эволюцией точки x^*, если любое его начальное подслово – существенная конечная эволюция точки x^*.*

Под *эволюцией точки*, когда это не вызывет недоразумений, будем понимать, существенную эволюцию. Отметим, что точка может иметь несколько существенных эволюций.

Предложение 2. *Пусть V – конечное слово. Тогда множество точек с конечной существенной эволюцией V замкнуто. Аналогичное утверждение верно для бесконечного слова W.*

Доказательство. См. [2]

2.4. Соответствие между словами и разбиениями множества.

Теперь посмотрим соответствие между словами и подмножествами M. Из построения следует, что если начальная точка принадлежит множеству U_i, то ее эволюция начинается с символа a_i. Рассмотрим образы множеств U_i при отображениях $f^{(-1)}, f^{(-2)}, \ldots, n \in \mathbb{N}$.

Ясно, что если точка принадлежит множеству

$$f^{(-n)}(U_{i_n}) \cap f^{-(n-1)}(U_{i_{n-1}}) \cap \ldots \cap f^{(-1)}(U_{i_1}) \cap U_{i_0},$$

то эволюция начинается со слова $a_{i_0} a_{i_1} \cdots a_{i_n}$.

Соответственно, количество различных существенных эволюций длины $n+1$ равно количеству разбиений множества M на непустые подмножества границами подмножств ∂U_i и их образами при отображениях $f^{(-1)}, f^{(-2)}, \ldots, f^{(-n)}$.

Замечание. Количество конечных существенных эволюций напрямую связано с топологической размерностью множества M. Ясно, например, что если M гомеоморфно отрезку или окружности, то одна точка может являться граничной только для двух открытых подмножеств M и, соответственно, иметь только две существенные эволюции. Если M гомеоморфно части плоскости $\mathbb{R}^2$ – то существенных эволюций может быть сколь угодно много.

2.5. Перекладывания отрезков.

Перекладывание отрезков является естественным обобщением сдвига окружности – в случае разбиения окружности на дуги длины α и $1-\alpha$ и величины сдвига, равной α, это преобразование совпадает с перекладыванием двух отрезков.

Более того, перекладывание отрезков является очень важным преобразованием в эргодической теории, теории динамических систем и теории чисел.

Рассмотрим общий случай:

Пусть отрезок $[0,1]$ разбит на полуинтервалы длин $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и $\sigma \in S_n$ – перестановка на множестве $\{1,2,\dots,n\}$.

Интервалы разбиения могут быть представлены через длины отрезков следующим образом:

$$X_i = \left[\sum_{i<j} \lambda_j, \sum_{i\leq j} \lambda_j\right)$$

Перекладывание отрезков "переставляет" отрезки $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ разбиения между собой, в результате получается новое разбиение

$$(X_\sigma(1), X_\sigma(2), \dots, X_\sigma(n))$$

.

В сохраняющем ориентацию случае преобразование T ставит в соответствие каждой точке $x \in X_i$:

$$T(x) = x + a_i$$

где

$$a_i = \sum_{k<\sigma^{-1}(i)} \lambda_{\sigma(k)} - \sum_{k<i} \lambda_k$$

Если же преобразование переворачивает некоторый отрезок, то все точки дополнительно симметрично отражаются относительно середины этого отрезка.

Определение 2. *Перекладывание отрезков T называется регулярным, если для любой точки a_i, где $X_i = [a_i, a_{i+1})$, $T^n(a_i) \neq a_j$*

Сформулируем следующую важную теорему (см. [15]):

Теорема 6. *Перекладывание отрезков является регулярным тогда и только тогда, когда траектория любой точки всюду плотна в* $[0,1]$

Изучение свойств слов, порождаемых перекладываниями отрезков осуществляется теми же методами, что и при сдвиге единичной окружности. Основным инструментом здесь является рассмотрение отрицательных орбит концов интервалов перекладывания:

$$0 = a_1 < a_2 < \ldots < a_{k+1} = 1,$$

где
$X_i = [a_i, a_{i+1})$, $(i \in \{1, \dots, k\})$.

Множество концов интервалов перекладывания $\{a_i | 1 \leq i \leq k+1\}$ обозначим X^1. Слово w длины n является подсловом эволюции точки x, то есть бесконечного слова $U(x)$, тогда только тогда, когда существует такой интервал $I_w \subset [0,1]$ и точка $y \in I_w$ такие, что слово w равно конкатенации следующих символов:

$$\mathcal{I}(x)\mathcal{I}(T(x))\cdots\mathcal{I}(T^{n-1}(x))=w,$$

где $\mathcal{I}(x)=a_i\in A$ тогда и только тогда, когда $x\in X_i$

Предложение 3. *Пусть T – регулярное перекладывание k отрезков. Тогда эволюция $U(x)$ произвольной точки x имеет функцию сложности $T_{U(x)}(n)=n(k-1)+1$, для любого $n\in\mathbb{N}$.*

3. Необходимые условия для порождаемости слова перекладыванием отрезков

На первом этапе мы сформулируем необходимые условия, для того чтобы слово порождалось перекладыванием отрезков. Пусть слово W является эволюцией точки $x\in[0,1]$ при перекладывании k отрезков и характеристичеких множествах $U_1,U_2,\dots,U_n$. Каждое характеристическое множество U_i является объединением нескольких непересекающихся интервалов или полуинтервалов.

Как было показано в части 2.4, подслова длины k взаимнооднозначно соответствуют k-разбиениям характеристических множеств. Поскольку точка границы одномерного множества может являться границей только для двух множеств, то k-подслово слова W может иметь максимум два продолжения. Мы получили первое необходимое условие для того, чтобы слово порождалось перекладыванием отрезков:

Предложение 4. *Пусть слово W порождается перекладыванием отрезков. Тогда для некоторого N все специальные слова подслова длины, не меньше N должны иметь валентность, равную* 2.

Это условие аналогично тому, что начиная с какого-то N все k-графы слова W $(k\geq N)$ должны иметь входящие и исходящие развилки степени 2.

Следующие условия мы получим на языке графов Рози. Пусть рекуррентное слово W имеет функцию роста $F_W(n)=Kn+L$ для $n>N$ и порождается перекладыванием отрезка. Рассмотрим эволюцию k-графов Рози слова W, начиная с $k\geq N+1$. Как было показано выше, все входящие и выходящие развилки имеют степень 2, поэтому у всех k-графов есть ровно K входящих и K исходящих развилок.

В минимальном случае, описанном в предыдущей главе, когда $F_W(n)=n+L$, графы Рози имеют ровно одну входящую и одну исходящую развилку. Если входящая и выходящая развилка совпадают, то в этом случае выбор удаляемого ребра в последователе $D(G)$ определяется однозначно из условия сильной связанности графа.

Более интересным случаем являются графы слов, в которых есть более одной развилки. Рассмотрим его подробно. При переходе от графа G_n к G_{n+1} возможны следующие варианты:

1. В графе G_n нет сцепленных циклов (то есть, нет входящих развилок, являющихся одновременно исходящими). В этом случае граф G_{n+1} совпадает с последователем $D(G_n)$.

2. В графе G_n одна развилка является одновременно входящей и выходящей. Граф последователя $D(G_n)$ в этом случае имеет три развилки, так как одна развилка размножилась. Следовательно, граф G_{n+1} получается из последователя $D(G_n)$ путем удаления одного ребра, соответствующего минимальному невстречающемуся слову.

3. В графе есть две развилки или более развилок, являющихся одновременно входящими и выходящими. Граф G_{n+1} получается из $D(G_n)$ удаления двух или более ребер, соответствующих минимальным невстречающимся словам.

Поскольку слово W рекуррентно, то из предложения 1 следует, что при удалении ребер должна сохраняться сильная связность, то есть из любой вершины можно по стрелкам перейти в любую другую.

Рассмотрим подробнее второй случай. Пусть в G_k есть одна двойная развилка. Это означает, что в W есть ровно одно биспециальное подслово w длины k. Значит, существуют такие $a_i, a_j, a_k, a_l \in A$, что a_iw, a_jw, wa_k, wa_l – подслова W. Тогда $(k+1)$-граф G_{k+1} получается из последователя путем удаления какого-то ребра, соответствующего одному из четырех слов: $a_iwa_k, a_iwa_l, a_jwa_k, a_jwa_l$. Рассмотрим интервал, являющийся характеристическим множеством для слова $I_w = [x_w, y_w]$.

Так как w – правое специальное слово, то $I_w \subset T^{-1}(I_{a_k} \cup I_{a_l})$, так как w – левое специальное, то $I_w \subset T(I_{a_i} \cup I_{a_j})$.

Пусть точка $A \in [0,1]$ делит I_w на два интервала, образы которых лежат в I_{a_k} и I_{a_l} соответственно, а точка $B \in [0,1]$ – делит на интервалы, прообразы которых лежат в I_{a_i} и I_{a_j} соответственно.

Выбор минимального невстречающегося слова, а , значит, удаляемого ребра, определяется взаиморасположением точек A и B, а также сохранением или сменой ориентации отображения на этих множествах. Итого, имеется 8 вариантов, которые разбиваются на четыре пары, соответствующие одинаковым наборам слов:

1. $B < A$, $T^{-1}([x_w, B]) \subset I_{a_i}$, $T([x_w, A] \subset I_{a_k})$
2. $B < A$, $T^{-1}([x_w, B]) \subset I_{a_j}$, $T([x_w, A] \subset I_{a_k})$
3. $B < A$, $T^{-1}([x_w, B]) \subset I_{a_i}$, $T([x_w, A] \subset I_{a_l})$
4. $B < A$, $T^{-1}([x_w, B]) \subset I_{a_j}$, $T([x_w, A] \subset I_{a_l})$
5. $B > A$, $T^{-1}([x_w, B]) \subset I_{a_i}$, $T([x_w, A] \subset I_{a_k})$
6. $B > A$, $T^{-1}([x_w, B]) \subset I_{a_j}$, $T([x_w, A] \subset I_{a_k})$
7. $B > A$, $T^{-1}([x_w, B]) \subset I_{a_i}$, $T([x_w, A] \subset I_{a_l})$
8. $B > A$, $T^{-1}([x_w, B]) \subset I_{a_j}$, $T([x_w, A] \subset I_{a_l})$

Варианты 1 и 5 соответствуют запрещенному слову a_iwa_k.

Варианты 2 и 6 соответствуют запрещенному слову a_iwa_l.

Варианты 3 и 7 запрещенному слову соответствуют a_jwa_k.

Варианты 4 и 8 соответствуют запрещенному слову a_jwa_l.

Две пары вариантов соответсвуют одновременной смене или сохранению ориентации отображения на характеристических интервалах, а две пары – различным ориентациям.

В случае, когда перекладывание отрезков сохраняет ориентацию, у нас остается только два возможных варианта для удаляемого ребра.

В случае, когда мы разрешаем отобажению менять ориентацию отрезков при перекладывании, возможны все четыре варианта.

Замечание. Поясним теперь смысл размеченного графа Рози. Пусть ребра входящей развилки соответствуют a_i и a_j, символы l и r соответствуют левому и правому множеству в паре $(T(I_{a_i}), T(I_{a_j}))$. Если символы a_k и a_l соответствуют ребрам исходящей развилки, то символы l и r ставятся в соответствии с порядком “лево-право” в паре (I_{a_k}, I_{a_l}). Знак “–” ставится в вершине, если характеристическое множество, ей соответствующее, принадлежит интервалу перекладывания, на котором меняется ориентация.

Условие для перехода от графа G_n к G_{n+1}:

Предложение 5. *1. Если в графе нет двойных развилок, соответствующих биспециальным подсловам, то при переходе от G_n к G_{n+1} имеем $G_{n+1} = D(G_n)$;*

2. *Если вершина, соответствующая биспециальному слову не помечена знаком "–", то ребра, соответствующие запрещенным словам выбираются из пар lr и rl*

3. *Если вершина помечена знаком "–", то удаляемые ребра должны выбираться из пары ll или rr.*

Назовем эволюцию размеченных графов Рози *правильной*, если **правила 1** и **2** выполняются для всей цепочки эволюции графов, начиная с G_1, назовем эволюцию *асимптотически правильной*, если **правила 1** и **2** выполняются, начиная с некоторого G_n. Будем говорить, что эволюция размеченных графов Рози *ориентированна*, если в k-графах нет вершин, помеченных знаком "–".

Определение асимптотически правильной эволюции графов Рози позволяет сформулировать условия порождаемости слова перекладыванием отрезков.

Предложение 6. *Равномерно-рекуррентное слово W*

1. *Порождается перекладыванием отрезков, тогда, когда слово обеспечивается асимптотически правильной эволюцией размеченных графов Рози.*

2. *Порождается перекладыванием отрезков с сохранением ориентации тогда, когда слово обеспечивается асимптотически правильной ориентированной эволюцией размеченных графов Рози.*

Основная теорема состоит в замене выражения "тогда"на "тогда и только тогда"в вышеизложенном предложении.

3.1. Построение динамической системы.

Покажем, что условия теоремы 6 являются достаточными для того, чтобы слово порождалось перекладыванием отрезков. Сначала мы покажем, что слово W, удовлетворяющее условиям теоремы 6 может являться эволюцией некоторой точки при кусочно-непрерывном преобразовании отрезка $T : I \to I$ следующего вида:

1. $I = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \ldots \cup [x_{n-1}, x_n]$, $x_0 = 0$, $x_n = 1$.

2. $I = [y_0, y_1] \cup [y_1, y_2] \cup \ldots \cup [y_{n-1}, y_n]$, $y_0 = 0$, $y_n = 1$.

3. $\sigma \in S_n$ – некоторая перестановка из n элементов.

4. T отображает (x_i, x_{i+1}) на $(y_{\sigma(i)}, y_{\sigma(i)+1})$ непрерывно и взаимнооднозначно.

Затем будет показано, как случай кусочно-непрерывного преобразования можно свести к перекладыванию отрезков.

Строить кусочно-непрерывное преобразование T мы будем поэтапно. При первой итерации мы разбиваем отрезок произвольным образом на отрезки, которые соответствуют соответствующим символам. Для построение отображения нам достаточно определить траекторию этих точек и затем из соображений рекуррентности продолжить по непрерывности на весь отрезок.

Замечание. Из непрерывности и биективности следует, что отображения на интервалах являются монотонными функциями. Мы рассмотрим два случая:

1. Все отображения интервалов являются одновременно возрастающими функциями. Назовем такое преобразование *сохраняющим ориентацию*.

2. Во втором случае встречаются как возрастающие, так и убывающие отображения интервалов. Этот случай назовем *не сохраняющим ориентацию.*

Разобьем отрезок $I = [0,1]$ на $n = \operatorname{Card} A$ интервалов произвольным образом, которые будут являться характеристическими множествами для символов алфавита A: $[0,1] = I_{a_1} \cup I_{a_2} \cup \ldots \cup I_{a_n}$. Соответствие интервалов символам алфавита будет определено в соответствии с предложением 8.

Будем считать, что отображение T непрерывно на каждом множестве I_{a_i}, то есть точками разрыва отображения T могут быть только конечные точки характеристических множеств. Интервалы характеристических множеств или их образы, имеющие общую граничную точку, будем называть *соседними.*

Замечание. Мы всегда можем расширить алфавит таким образом, чтобы в новом алфавите характеристические множества были устроены ровно так, как описано выше. Графы k-слов для старого алфавита будут соответствовать 1-графам нового алфавита, а эволюции графов, начиная с этого момента, будут совпадать.

Непосредственно проверяется следующее

Предложение 7. *Преобразования T, $T^{(-1)}$ переводит два соседних множества либо в соседние множества, либо их образы не могут целиком покрывать интервал.*

Предложение 8. *Интервалы разбиения могут быть поставлены в соответствие символам алфавита таким образом, что если w – специальное правое 1-слово и wa_i, wa_j – подслова, то I_{a_i} и I_{a_j} – соседние множества. Аналогично, если w – специальное левое 1-слово и $a_k w, a_l w$ – подслова, то I_{a_k} и I_{a_l} – также соседние множества.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную развилку в 1-графе. Пусть из нее стрелки ведут в вершины, соответствующие символам a_i и a_j. Тогда положим $I_{a_i} = [x_0, x_1]$, $I_{a_j} = [x_1, x_2]$,

Так как характеристические множества являются интервалами, то на них можно естественным образом ввести отношение порядка (то есть $I_{a_i} < I_{a_j}$, если $x_i < x_j$), точно также можно ввести отношение порядка и на их образах. Если при преобразовании T для какой-то пары характеристических множеств порядок меняется, будем говорить, что на этой паре преобразование меняет ориентацию.

Рассмотрим образы интервалов при отображении T^{-1}. Ясно, что если символ a_i не является правым специальным 1-словом и за ним однозначно следует символ a_j, то $I_{a_i} \subset T^{-1}(I_{a_j})$, а если не является левым специальным и ему всегда предшествует символ a_k, то $T^{-1}(I_{a_i}) \subset I_{a_k}$.

В случае, если символ a_i является правым специальным 1-словом и за ним могут идти символы a_j и a_k, то $I_{a_i} \subset T^{-1}(I_{a_j} \cup I_{a_k})$, а если левым специальным, то $T^{-1}(I_{a_i}) \subset I_{a_j} \cup I_{a_k}$.

Обозначим через I^n множество образов концов интервалов при отображении T^{-n}, I^0 – множество концов интервалов характеристических множеств, то есть $I^0 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

Как следует из рассуждений в части 2.4, множество, отвечающие слову $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ есть $I_w = I_{w_n} \cap T^{-1}(I_{w_{n-1}}) \cap \ldots \cap T^{(-n+1)}(I_{w_1})$, соответственно, множество граничных точек множеств, соответствующих словам длины n есть в точности $I^0 \cup I^1 \cup \ldots \cup I^{(n-1)}$.

Если правое специальное слово не является биспециальным (то есть не является одновременно и левым специальным), то положение точки, которая делит данное характеристическое множество, несущественно и его можно выбирать произвольно.

Для случая сохраняющего ориентацию преобразования удаления должно соответствовать сохраняющим ориентацию правилам.

В случае не сохраняющего ориентацию преобразования нам просто необходимо, чтобы внутри отображаемых отрезков при эволюции происходило конечное число “переломов”.

Таким образом мы можем определить образы точек на некотором подмножестве $N \subset I$. Из построения следует, что существуют такие интервалы $I_k = (x_k, x_{k+1})$, внутри которых наше преобразование монотонно. Мы всегда можем продолжить его по непрерывности до отображения отрезка в себя. Построенное кусочно-непрерывное преобразование и есть искомое. Обозначим его T. Отметим, что начальная точка, эволюцией которой является искомое слово $W = \{w_n\}$, получается как предельная последовательность множества вложенных отрезков, соответствующих префиксам $w_0, w_0w_1, w_0w_1w_2, \ldots$ и т.д.

Нами доказана

Теорема 7. *Чтобы рекуррентное слово W порождалось кусочно-непрерывным преобразованием с сохранением ориентации, необходимо и достаточно чтобы слово обеспечивалось асимптотически правильной ориентированной эволюцией размеченных графов Рози.*

В случае меняющего ориентацию преобразования получается

Теорема 8. *Чтобы рекуррентное слово W порождалось кусочно-непрерывным преобразованием с сохранением ориентации, необходимо и достаточно чтобы слово обеспечивалось асимптотически правильной эволюцией размеченных графов Рози.*

4. Эквивалентность множества р.р слов, порождаемых кусочно-непрерывным преобразованием, множеству слов, порождаемых перекладыванием отрезков.

Покажем вначале, как можно перейти к динамике, в которой почти все точки (в смысле меры Лебега) имеют различные существенные эволюции. Рассмотрим существенные эволюции точек при преобразовании T.

Отметим, что если точки x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) имеют одинаковую существенную эволюцию при преобразовании T, то и все точки отрезка $[x_1, x_2]$ имеют такую же существенную эволюцию.

Рассмотрим кусочно-непрерыное преобразование отрезков. Из теоремы о существовании инвариантной меры (см. [4]) следует, что любое отображение компакта имеет инвариантную вероятностную меру. Значит, отображение T имеет инвариантную меру μ. Следовательно, на отрезке мы можем ввести новую полуметрику $d(x_1, x_2) = \mu((x_1, x_2))$. Отметим, что из того, что $\mu(x_1, x_2) > 0$ не следует, что точки имеют различную существенную эволюцию, поскольку построенное отображение может быть разрывным.

Предложение 9. *Пусть точки $x_1 < x_2$ имеют одинаковые эволюции и преобразование T непрерывно на интервале (x_1, x_2). Тогда любая точка интервала (x_1, x_2) имеет такую же существенную эволюцию.*

Доказательство. Из того, что x_1, x_2 имеют одинаковую эволюцию следует, что $T(x_1)$, $T(x_2)$ тоже имеют одинаковую эволюцию и образом интервала (x_1, x_2) является интервал $(T(x_1), T(x_2))$.□

Теорема 9. *Пусть слово W порождается кусочно-непрерывным преобразованием отрезка. Тогда существует слово W', эквивалентное данному, которое попрождается перекладыванием отрезков.*

Доказательство. Рассмотрим топологию в смысле построенной полуметрики. На индуцированной метрике (которая склеивает точки с нулевым расстоянием) построим соответствующую фактор-динамику. Соответсвующее фактор-пространство будет представлять собой конечный набор отрезков, а отображение будет сохранять длины, то есть мы пришли к перекладыванию отрезков.

Инвариантная мера μ, вообще говоря, может быть сингулярна. В этом случае целые отрезки нулевой меры окажутся склеенными. Однако таких отрезков не более, чем счетное множество. В то же время, если W – непериодическое равномерно-рекуррентное слово, то количество эквивалентных (то есть имеющих одинаковый набор конечных подслов) равномерно-рекуррентных слов имеет мощность континуума (см. [1]). Это означает, что существует несчетное множество точек вне этой системы отрезков и сингулярность меры на эволюцию этих точек влияние не оказывает. Таким образом, найдется эквивалентное слово $W' \sim W$, отвечающее перекладыванию отрезков. □

Таким образом, существует перекладывание, отвечающее некоторому эквивалентному слову W'.

Замечание. Мы не доказали, что весь интервал нулевой длины состоит из точек с одинаковой существенной эволюцией или разбивается на два интервала точек с одинаковой существенной эволюцией. Обходной маневр состоит в использовании континуума слов, эквивалентных данному р.р. слову.

По теореме 4 в этом перекладывании встретятся *все* слова , эквивалентные W', в том числе и слово W (в смысле существенной эволюции). Доказана

Теорема 10. *Чтобы рекуррентное слово W порождалось кусочно-непрерывным преобразованием с сохранением ориентации, необходимо и достаточно чтобы слово обеспечивалось асимптотически правильной ориентированной эволюцией размеченных графов Рози.*

В случае меняющего ориентацию преобразования доказана

Теорема 11. *Чтобы рекуррентное слово W порождалось кусочно-непрерывным преобразованием с сохранением ориентации, необходимо и достаточно чтобы слово обеспечивалось асимптотически правильной эволюцией размеченных графов Рози.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Я.Белов, В.В.Борисенко, В.Н.Латышев, Мономиальные алгебры // Итоги науки и техники. Совр. Мат. Прил. Тем. Обзоры т. 26 (алг. 4), М. 2002. 35–214.

2. А.Я.Белов, Г.Кондаков, Обратные задачи символической динамики // Фундаментальная и прикладная математика, Т1, +1, 1995

3. А.Я. Белов, А.Л.Чернятьев, Описание слов Штурма над n-буквенным алфавитом.// Мат. метод. и прил. IV, МГСУ, 1999, стр. 122-128.

4. Я.Г. Синай, Введение в эргодическую теорию // М.: ФАЗИС, 1996. 144 с.

5. А.Л. Чернятьев, Сбалансированные слова и динамические системы.//Фунд. и Прикл. Мат, принята в печать.

6. А.Л. Чернятьев, Слова с минимальной функцией роста.// Вестник МГУ, 2007 г., принята в печать.

7. A.Aberkane, Words whose complexity satisfies $\lim p(n)/n = 1$ // Theor. Comp. Sci., 307, (2003), 31–46.

8. P. Arnoux and G. Rauzy [1991], Representation geometrique des suites the complexite $2n+1$ // Bull. Soc. Math. France 119, 199–215.

9. V. Berthé, S. Ferenczi, and Luca Q. Zamboni [2007], Interactions between Dynamics, Arithmetics and Combinatorics: the Good, the Bad, and the Ugly//

10. J. Berstel, P. Séébold, Sturmian words, in: M. Lothaire (Ed.) // Algebraic Combinatorics on Words, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Vol. 90, Cambridge University Press, Cambridge, 2002 (Chap. 2).

11. J.Berstel, Resent results on Sturmian words // Developments in language theory II, 13–24, World Scientific, 1996.

12. X.Droubay, J.Justin, G.Pirillo, Episturmian words and some construction of de Luca and Rauzy // Theoret. Comp. Sci.,2000, to appear.

13. H. Furstenberg. Poincaré reccurence and number theory // Bull. Amer. Math. Soc., 5: 211–234, 1981.

14. S. Ferenczi, Luca Q. Zamboni, Combinatorial structure of symmetric k-interval exchange transformations, in preparation.

15. S. Ferenczi, C. Holton and Luca Q. Zamboni, Structure of three-interval exchange transformations II: a combinatorial description of the trajectories. J. Analyse Math. 89 (2003), p. 239–276.

16. R. L. Graham, Covering the Positive Integers by disjoints sets of the form $\{[n\alpha + \beta] : n = 1, 2, \ldots\}$ // J. Combin. Theory Ser A15 (1973) 354-358.

17. P. Hubert, Well balanced sequences // Theoret. Comput. Sci. 242 (2000) 91–108.

18. A. de Luca, Sturmian words: structure, combinatorics and their arithmetics // Theoret. Comp. Sci., 183, (1997), 45–82.

19. M. Lothaire, Combinatorics on Words // Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison-Wesley, Reading, MA, 1983, Vol. 17.

20. M. Morse and G. A. Hedlund [1940], Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories, // Amer. J. Math. 62, 1–42.

21. G. Rauzy, Mots infnis en arithmetique, in: Automata on Infnite Words // Ecole de Printemps d'Informatique Thfeorique, Le Mont Dore, May 1984, ed. M. Nivat and D. Perrin, Lecture Notes in Computer Science, vol. 192, Springer-Verlag, Berlin etc., pp. 165–171, 1985

22. G.Rote, Sequences with subword complexity $2n$ // J. Number Theory 46 (1994) 196–213.

23. L. Vuillon, Balanced words // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 10 (2003), no. 5, 787–805

Получено 7.08.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.