ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 2.

УДК 515.126.4 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-301-319

О топологических характеристиках для некоторых классов многозначных отображений

В. В. Обуховский, С. В. Корнев, Е. Н. Гетманова

Обуховский Валерий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет (г. Воронеж).
e-mail: valerio-ob2000@mail.ru
Корнев Сергей Викторович — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет (г. Воронеж).
e-mail: kornev_vrn@rambler.ru
Гетманова Екатерина Николаевна — аспирант, кафедра высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет (г. Воронеж).
e-mail: ekaterina_getmanova@bk.ru

Аннотация

В работе рассматриваются топологические характеристики многозначных отображений, которые могут быть представлены в виде конечной композиции отображений с асферичными значениями. Для такого рода случайных отображений, уплотняющих относительно некоторой абстрактной меры некомпактности, вводится случайный индекс неподвижных точек, описываются его свойства и даются применения к теоремам о неподвижной точке. Определяется топологическая степень совпадения для уплотняющей пары, состоящей из линейного фредгольмова оператора нулевого индекса и многозначного отображения указанного выше класса. В последнем разделе указаны возможности распространения этой теории на случайные уплотняющие пары.

Ключевые слова: топологическая степень, многозначное отображение, случайное отображение, случайная неподвижная точка, случайная точка совпадения, случайный индекс неподвижных точек, степень совпадения, мера некомпактности, уплотняющий оператор.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
В. В. Обуховский, С. В. Корнев, Е. Н. Гетманова. О топологических характеристиках для некоторых классов многозначных отображений // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 301–319.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 2.

UDC 515.126.4 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-301-319

On topological characteristics for some classes of multivalued mappings

V. V. Obukhovskii, S. V. Kornev, E. N. Getmanova

Obukhovskii Valeri Vladimirovich — Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University (Voronezh).
e-mail: valerio-ob2000@mail.ru
Kornev Sergey Viktorovich — Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University (Voronezh).
e-mail: kornev_vrn@rambler.ru
Getmanova Ekaterina Nikolaevna — postgraduate student, Department of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University (Voronezh).
e-mail: ekaterina_getmanova@bk.ru

Abstract

In the paper the topological characteristics of multivalued mappings that can be represented as a finite composition of mappings with aspherical values are considered. For such random mappings, condensing with respect to some abstract measure of noncompactness, a random index of fixed points is introduced, its properties are described and applications to fixed-point theorems are given. The topological coincidence degree is defined for a condensing pair consisting of a linear Fredholm operator of zero index and a multivalued mapping of the above class. In the last section possibilities of extending this theory to random condensing pairs are shown.

Keywords: topological degree, multivalued mapping, random mapping, random fixed point, random coincidence point, random index of fixed points, degree of coincidence, measure of noncompactness, condensing operator.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
V. V. Obukhovskii, S. V. Kornev, E. N. Getmanova, 2020, "On topological characteristics for some classes of multivalued mappings", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 301–319.

Посвящается юбилею академика Анатолия Тимофеевича Фоменко

1. Введение

Характеристики типа топологической степени для многозначных отображений находят широкие применения не только внутри многозначного анализа и теории неподвижных точек, но и в теории дифференциальных включений, теории колебаний, устойчивости и ветвления траекторий обобщенных динамических систем, теории игр, математической экономике и других разделах современной математики. За последние десятилетия такие характеристики были описаны и изучены для различных классов многозначных отображений, включая отображения с выпуклыми и невыпуклыми значениями, компактные и удовлетворяющие различным условиям типа уплотняемости, а также случайные многозначные отображения (см, например, [1] - [3], [5], [8], [10] - [11], [13] - [16] и имеющуюся там библиографию).

Настоящая работа продолжает исследования в этом направлении. В ней рассматриваются многозначные отображения, которые могут быть представлены в виде конечной композиции отображений с асферичными значениями. Для такого рода случайных отображений, уплотняющих относительно некоторой абстрактной меры некомпактности, вводится случайный индекс неподвижных точек, описываются его свойства и даются применения к теоремам о неподвижной точке. На этой основе далее определяется топологическая степень совпадения для уплотняющей пары, состоящей из линейного фредгольмова оператора нулевого индекса и многозначного отображения указанного выше класса. В последнем разделе указано как эта теория может быть распространена на случайные уплотняющие пары.

2. Предварительные сведения

2.1. Многозначные отображения

Напомним некоторые понятия теории многозначных отображений, используемые в дальнейшем (см., например, [1], [3], [10], [11], [13]).

Пусть X и Y — метрические пространства. Символами $C(Y)$ $[K(Y)]$ мы будем обозначать совокупности всех непустых замкнутых [соответственно, компактных] подмножеств Y.

Определение 1. *Многозначное отображение (мультиотображение) $\mathcal{F}: X \to C(Y)$ называется полунепрерывным сверху (п.н.св.) [полунепрерывным снизу (п.н.сн.)] , если для любого открытого [соответственно, замкнутого] множества $W \subset Y$*

$$\mathcal{F}^{-1}(W) = \{x \in X : \mathcal{F}(x) \subset W\}$$

- открытое [соответственно, замкнутое] подмножество X. Если мультиотображение $\mathcal{F}$ полунепрерывно и сверху и снизу, то оно называется непрерывным.

Отметим следующие свойства.

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{F}: X \to K(Y)$ — п.н.св. мультиотображение. Если $A \subset X$ — компактное множество, то его образ $\mathcal{F}(A)$ — компактное подмножество Y.*

Предложение 2. *Пусть X, Y и Z — метрические пространства; $\mathcal{F}_0 : X \to K(Y)$ и $\mathcal{F}_1 : Y \to K(Z)$ — п.н.св. [п.н.сн.] мультиотображения. Тогда композиция $\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_0 : X \to K(Z)$ — п.н.св. [соответственно, п.н.сн.] мультиотображение.*

Определение 2. *Мультиотображение $\mathcal{F}: X \to K(Y)$ называется компактным, если его область значений $\mathcal{F}(X)$ — относительно компактное подмножество Y.*

Пусть (Ω, Σ) — полное измеримое пространство.

Определение 3. *Мультиотображение $\mathcal{F}: \Omega \to C(Y)$ называется измеримым, если $\mathcal{F}^{-1}(V) \in \Sigma$ для любого открытого множества $V \subset Y$.*

Пусть X, Y — сепарабельные метрические пространства.

Определение 4. *Мультиотображение $\mathcal{F}: \Omega \times X \to C(Y)$ называется случайным и-мультиотображением, если*

(i) $\mathcal{F}$ измеримо относительно минимальной σ-алгебры, порожденной $\Sigma \times B(X)$, где $B(X)$ — совокупность всех борелевских подмножеств X;

(ii) для любого $\omega \in \Omega$ мультиотображение $\mathcal{F}(\omega, \cdot) : X \to C(Y)$ п.н.св.

Определение 5. *Мультиотображение $\mathcal{F}:\Omega\times X\to C(Y)$ называется мультиотображением Каратеодори, если*

(*i*) *для любого $x\in X$ мультиотображение $\mathcal{F}(\cdot,x)\colon\Omega\to C(Y)$ измеримо;*

(*ii*) *для любого $\omega\in\Omega$ мультиотображение $\mathcal{F}(\omega,\cdot):X\to C(Y)$ непрерывно.*

Справедливо следующее утверждение (см. [11], Proposition 7.9).

Предложение 3. *Если $\mathcal{F}:\Omega\times X\to C(Y)$ — мультиотображение Каратеодори, то оно измеримо.*

Это утверждение означает, в частности, что всякое мультиотображение Каратеодори является случайным u-мультиотображением.

Определение 6. *Пусть $A\subseteq X$ — замкнутое множество. Измеримое отображение $\xi\colon\Omega\to A$ называется случайной неподвижной точкой мультиотображения $\mathcal{F}\colon\Omega\times A\to$ $\to C(X)$, если*

$$\xi(\omega)\in\mathcal{F}(\omega,\xi(\omega))$$

для всех $\omega\in\Omega$.

Предложение 4. *([10], Proposition 31.3). Пусть $\mathcal{F}\colon\Omega\times A\to C(X)$ — случайное u-мультиотображение такое, что для каждого $\omega\in\Omega$ множество неподвижных точек*

$$Fix\mathcal{F}(\omega,\cdot)=\{x\in X:x\in\mathcal{F}(\omega,x)\}$$

непусто. Тогда $\mathcal{F}$ имеет случайную неподвижную точку.

2.2. J^c-мультиотображения

Для описания класса мультиотображений, который мы будем рассматривать, напомним некоторые понятия.

Для заданного подмножества A метрического пространства Y и $\varepsilon>0$ символом $O_\varepsilon(A)$ обозначим ε-окрестность A.

Определение 7. *(см., например [6], [1], [10]) Непустое компактное подмножество A метрического пространства Y называется асферичным (или UV^∞-множеством), если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta, 0<\delta<\varepsilon$ такое, что для всякого $n=0,1,2,\dots$ каждое непрерывное отображение $g:S^n\to O_\delta(A)$ может быть продолжено до непрерывного отображения $\widetilde{g}:B^{n+1}\to O_\varepsilon(A)$, где $S^n=\left\{x\in\mathbb{R}^{n+1}:\|x\|=1\right\}$ и $B^{n+1}=\left\{x\in\mathbb{R}^{n+1}:\|x\|\le 1\right\}$.*

Определение 8. *(см. [12]) Непустое компактное пространство A называется R_δ-множеством, если оно может быть представлено как пересечение убывающей последовательности компактных стягиваемых пространств.*

Определение 9. *П.н.св. мультиотображение $\mathcal{F}:X\to K(Y)$ называется J-мультиотображением ($\mathcal{F}\in J(X,Y)$), если каждое значение $\mathcal{F}(x)$, $x\in X$ является асферичным множеством.*

Напомним (см., например, [4], [10]), что метрическое пространство Z называается абсолютным ретрактом (AR-пространством) [соответственно, абсолютным окрестностным ретрактом (ANR-пространством)], если для каждого гомеоморфизма h, отображающего его на замкнутое подмножество метрического пространства Z', множество $h(Z)$ является ретрактом Z' [соответственно, некоторой своей открытой окрестности в Z']. Отметим, что класс ANR-пространств достаточно широк: в частности, компактное подмножество конечномерного пространства является ANR-пространством тогда и только тогда, когда оно локально стягиваемо. В свою очередь, это означает, что компактные полиэдры и компактные конечномерные многообразия являются ANR-пространствами. Объединение конечного числа выпуклых замкнутых подмножеств нормированного пространства также является ANR-пространством.

Предложение 5. *(см. [10]) Пусть Z — ANR-пространство. В каждом из следующих случаев п.н.св. мультиотображение $\mathcal{F} : X \to K(Z)$ является J-мультиотображением: для каждого $x \in X$ значение $\mathcal{F}(x)$ является*
a) выпуклым множеством;
b) стягиваемым множеством;
c)R_δ-множеством;
d)AR-пространством.
В частности, каждое непрерывное отображение $\sigma : X \to Z$ является J-мультиотображением.

Определение 10. *Символом $J^c(X,Y)$ мы будем обозначать совокупность всех мультиотображений $\mathcal{F} : X \to K(Y)$, которые могут быть представлены в виде композиции $\mathcal{F} = \mathcal{F}_n \circ ... \circ \mathcal{F}_1$, $n \geq 1$, где $\mathcal{F}_i \in J(X_{i-1}, X_i)$, $i = 1, ..., n$, $X_0 = X$, $X_n = Y$, и X_i для $0 < i < n$ являются открытыми подмножествами нормированных пространств. Композиция $\mathcal{F}_n \circ ... \circ \mathcal{F}_1$ называется разложением $\mathcal{F}$. Мы будем обозначать $D_\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n \circ ... \circ \mathcal{F}_1)$ и называть $\mathcal{F}$ J^c-мультиотображением.*

Следует отметить, что мультиотображение может допускать различные разложения (см. [10]).

Пусть теперь U — открытое подмножество нормированного пространства E и $\mathcal{F} : \overline{U} \to K(E)$ — компактное мультиотображение класса $J^c\left(\overline{U}, E\right)$, допускающее разложение

$$D_\mathcal{F} : \overline{U} = X_0 \overset{\mathcal{F}_1}{\multimap} X_1 \overset{\mathcal{F}_2}{\multimap} ... \overset{\mathcal{F}_n}{\multimap} X_n = E$$

и такое, что $x \notin \mathcal{F}(x)$ для всех $x \in \partial U$. При этих условиях определена топологическая характеристика — индекс неподвижных точек $ind(D_\mathcal{F}, \overline{U})$ разложения $D_\mathcal{F}$ на $\overline{U}$ (см. [8]).

Отметим некоторые свойства индекса неподвижных точек.

Предложение 6. *(Свойство неподвижной точки) Если $ind(D_\mathcal{F}, \overline{U}) \neq 0$, то $\emptyset \neq Fix\mathcal{F} \subset U$.*

Для описания свойства гомотопической инвариантности нам нужно следующее понятие.

Определение 11. *Пусть $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in J^c\left(\overline{U}, E\right)$ — два компактных мультиотображения с разложениями*

$$D_\mathcal{F} : \overline{U} = X_0 \overset{\mathcal{F}_1}{\multimap} X_1 \overset{\mathcal{F}_2}{\multimap} ... \overset{\mathcal{F}_n}{\multimap} X_n = E,$$

$$D_\mathcal{G} : \overline{U} = X_0 \overset{\mathcal{G}_1}{\multimap} X_1 \overset{\mathcal{G}_2}{\multimap} ... \overset{\mathcal{G}_n}{\multimap} X_n = E,$$

такие, что $x \notin \mathcal{F}(x)$ и $x \notin \mathcal{G}(x)$ для всех $x \in \partial U$. Будем говорить, что разложения $D_\mathcal{F}$ и $D_\mathcal{G}$ гомотопны,

$$D_\mathcal{F} \sim D_\mathcal{G},$$

если существуют мультиотображения

$$\mathcal{H}_i \in J(X_{i-1} \times [0,1], X_i), \quad i = 1, ...n$$

такие, что $\mathcal{H}_i(\cdot,0)=\mathcal{F}_i$, $\mathcal{H}_i(\cdot,1)=\mathcal{G}_i$, $i=1,...,n$ *и мультиотображение* $\mathcal{H}\colon \overline{U}\times[0,1]\multimap E$, *допускающее разложение*

$$\overline{U}\times[0,1]=X_0\times[0,1]\overset{\widetilde{\mathcal{H}}_1}{\multimap}X_1\times[0,1]\overset{\widetilde{\mathcal{H}}_2}{\multimap}...\overset{\widetilde{\mathcal{H}}_{n-1}}{\multimap}X_{n-1}\times[0,1]\overset{\mathcal{H}_n}{\multimap}X_n=E$$

где $\widetilde{\mathcal{H}}_i(x,\lambda)=\mathcal{H}_i(x,\lambda)\times\{\lambda\}$ *для* $x\in X_{i-1}$, $\lambda\in[0,1]$, $i=1,...,n-1$ *компактно и не имеет неподвижных точек на* $\partial U\times[0,1]$, *т.е.* $x\notin\mathcal{H}(x,\lambda)$ *для* $x\in\partial U$, $\lambda\in[0,1]$.

Отметим, что $\mathcal{H}(\cdot,0)=\mathcal{F}$, $\mathcal{H}(\cdot,1)=\mathcal{G}$.

Предложение 7. *(Гомотопическая инвариантность) Если разложения* $D_{\mathcal{F}}$ *и* $D_{\mathcal{G}}$ *гомотопны,* $D_{\mathcal{F}}\sim D_{\mathcal{G}}$, *то*

$$ind(D_{\mathcal{F}},\overline{U})=ind(D_{\mathcal{G}},\overline{U}).$$

Предложение 8. *(Аддитивное свойство) Если* $Fix\mathcal{F}\cap U\subset\bigcup_{j=1}^{k}U_j$, *где* U_j, $j=1,...,k$ *— открытые попарно не пересекающиеся подмножества* U, *то*

$$ind(D_{\mathcal{F}},\overline{U})=\sum_{j=1}^{k}ind(D_{\mathcal{F}},\overline{U}_j).$$

Отметим, что, вообще говоря, указанная характеристика зависит не только от $\mathcal{F}$, но также и от используемого разложения $D_{\mathcal{F}}$.

2.3. Уплотняющие мультиотображения

Напомним некоторые понятия (см., например, [1], [13]). Пусть E — банахово пространство. Обозначим $P(E)$ совокупность всех непустых подмножеств E. Пусть $(\mathcal{A},\geq)$ — частично упорядоченное множество.

Определение 12. *Отображение* $\beta: P(E)\to\mathcal{A}$ *называется мерой некомпактности (МНК) в* E, *если*

$$\beta(\overline{co}\,\mathcal{D})=\beta(\mathcal{D})\quad \text{для любого } \mathcal{D}\in P(E).$$

МНК β *называется:*

(i) монотонной, если $\mathcal{D}_0,\mathcal{D}_1\in P(E)$, $\mathcal{D}_0\subseteq\mathcal{D}_1$ *влечет* $\beta(\mathcal{D}_0)\leq\beta(\mathcal{D}_1)$;

(ii) несингулярной, если $\beta(\{a\}\cup\mathcal{D})=\beta(\mathcal{D})$ *для любых* $a\in E$, $\mathcal{D}\in P(E)$;

(iii) вещественной, если $\mathcal{A}=\overline{\mathbb{R}_+}=[0,+\infty]$ *с естественным упорядочением и* $\beta(\mathcal{D})<+\infty$ *для любого ограниченного множества* $\mathcal{D}\in P(E)$.

Среди известных примеров МНК, удовлетворяющих указанным выше свойствам, отметим *МНК Хаусдорфа*

$$\chi(\mathcal{D})=\inf\{\varepsilon>0:\mathcal{D}\text{ имеет конечную }\varepsilon\text{-сеть}\}.$$

и *МНК Куратовского*

$$\alpha(\mathcal{D})=\inf\{\delta>0:\ \mathcal{D}\text{ допускает конечное разбиение на множества диаметра меньше }\delta\}.$$

Мы можем рассмотреть также пример МНК, заданной на ограниченных подмножествах пространства непрерывных функций $C([a,b];\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ — банахово пространство. Для ограниченного $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ положим

$$\nu(\mathcal{D}) = \max_{\mathcal{D}' \in \Delta(\mathcal{D})} \Big(\sup_{t\in[a,b]} \chi(\mathcal{D}'(t)), mod_C(\mathcal{D}') \Big),$$

где $\Delta(\mathcal{D})$ обозначает набор всех счетных подмножеств $\mathcal{D}$, χ — МНК Хаусдорфа в $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}'(t) = \{d(t) \colon d \in \mathcal{D}'\}$ и

$$mod_C(\mathcal{D}') = \lim_{\delta\to 0} \sup_{d\in\mathcal{D}'} \max_{|t_1-t_2|\le\delta} \|d(t_1) - d(t_2)\|$$

— модуль равностепенной непрерывности множества $\mathcal{D}'$ (см. [13]). Областью значений МНК ν является конус $\mathbb{R}^2_+$ и max берется в смысле упорядоченности, индуцируемой конусом.

Пусть теперь U — открытое подмножество E, β — МНК в E.

Определение 13. *П.н.св. мультиотображение $\mathcal{F}\colon \overline{U} \to K(E)$ или п.н.св. семейство мультиотображений $\mathcal{H}\colon \overline{U}\times[0,1] \to K(E)$ называется β-уплотняющим, если для любого $\mathcal{D} \subseteq \overline{U}$, не являющегося относительно компактным, мы имеем, соответственно,*

$$\beta\left(\mathcal{F}\left(\mathcal{D}\right)\right) \ngeq \beta\left(\mathcal{D}\right)$$

или

$$\beta\left(\mathcal{H}\left(\mathcal{D}\times[0,1]\right)\right) \ngeq \beta\left(\mathcal{D}\right).$$

Определение 14. *Замкнутое выпуклое подмножество $T \subset E$ называется фундаментальным для мультиотображения $\mathcal{F}\colon \overline{U} \to K(E)$, если*

(1) *$\mathcal{F}(\overline{U}\cap T) \subseteq T$;*

(2) *$x \in \overline{co}\left(\mathcal{F}\left(x\right)\cup T\right)$ влечет $x \in T$.*

Отметим следующие свойства фундаментальных множеств (см. [1], [13]).

Предложение 9. (i) *Множество неподвижных точек $Fix\mathcal{F}$ содержится в каждом фундаментальном множестве мультиотображения $\mathcal{F}$.*

(ii) *Если $\{T_\alpha\}$ — некоторый набор фундаментальных множеств мультиотображения $\mathcal{F}$, то множество $\cap_\alpha T_\alpha$ также фундаментально.*

Предложение 10. *Каждое β-уплотняющее мультиотображение $\mathcal{F}\colon \overline{U} \to K(E)$, где β — монотонная несингулярная МНК, обладает непустым компактным фундаментальным множеством.*

2.4. Линейные фредгольмовы опрераторы

Пусть E_1 и E_2 — линейные пространства; $L : Dom\, L \subseteq E_1 \to E_2$ — линейный оператор. Напомним следующие факты (см., например, [9]).

Предложение 11. *Пусть $P : E_1 \to E_1$ — линейный оператор проектирования такой, что $Im\, P = Ker\, L$. Тогда*

(i) *оператор $L_P : Dom\, L \cap Ker\, P \to Im\, L$ заданный как сужение*

$$L_P(x) = L(x) \quad \text{для всех } x \in Dom\, L \cap Ker\, P$$

является линейным изоморфизмом;

(*ii*) *Оператор* $K_P : Im\, L \to Dom\, L \cap Ker\, P$ *заданный как*

$$K_P = L_P^{-1},$$

удовлетворяет соотношению

$$K_P \circ Lx = x - Px \quad \text{для всех } x \in Dom\, L.$$

Пусть теперь E_1 — банахово пространство, E_2 — нормированное пространство.

Определение 15. *Линейный оператор* $L : Dom\, L \subset E_1 \to E_2$ *называется линейным фредгольмовым оператором нулевого индекса, если пространство* $Im\, L$ *замкнуто, пространства* $Ker\, L$ *и* $Coker\, L = E_2/Im\, L$ *конечномерны и*

$$dim\, Ker\, L = dim\, Coker\, L.$$

Предложение 12. *Пусть* $L : Dom\, L \subset E_1 \to E_2$ *— линейный фредгольмов оператор нулевого индекса. Тогда*

(*i*) *существуют линейные непрерывные проекционные операторы* $P : E_1 \to E_1$ *и* $Q : E_2 \to E_2$ *такие, что* $Im\, P = Ker\, L$ *и* $Im\, L = Ker\, Q$;

(*ii*) *каноническая проекция* $\Pi : E_2 \to Coker\, L$, *заданная как*

$$\Pi y = y + Im\, L,$$

является непрерывным линейным оператором;

(*iii*) *существует непрерывный линейный изоморфизм* $\Lambda : Coker\, L \to Ker\, L$;

(*iv*) *уравнение*

$$Lx = y, \quad y \in E_2$$

равносильно уравнению

$$(I - P)x = (\Lambda\Pi + K_{P,Q})(y),$$

где I *— тождественный оператор в* E_1 *и оператор* $K_{P,Q} : E_2 \to E_1$ *задан как*

$$K_{P,Q} = K_P(I - Q).$$

Пара проекций (P, Q) называется *точной* относительно L.

3. Случайный индекс неподвижных точек для уплотняющих мультиотображений

Пусть E — банахово пространство, U — открытое подмножество E, β — монотонная несингулярная МНК в E и Ω — полное измеримое пространство. Нашей целью является определение индекса неподвижных точек для мультиотображения $\mathcal{F} : \Omega \times \overline{U} \to K(E)$, удовлетворяющего следующим условиям:

($\mathcal{F}1$) $\mathcal{F}$ — случайное u-мультиотображение;

($\mathcal{F}2$) для каждого $\omega \in \Omega$, $\mathcal{F}(\omega, \cdot) : \overline{U} \to K(E)$ — β-уплотняющее J^c-мультиотображение;

($\mathcal{F}3$) $x \notin \mathcal{F}(\omega, x)$ для всех $(\omega, x) \in \Omega \times \partial U$.

В дальнейшем класс мультиотображений $\mathcal{F}$, удовлетворяющих условиям $(\mathcal{F}1)$ – $(\mathcal{F}3)$ будет обозначаться $J^c_\beta(\Omega,\overline{U};E)$. Соответственно, символом $\widetilde{J}^c_\beta(\Omega,\overline{U};E)$ будет обозначаться совокупность мультиотображений, удовлетворяющих $(\mathcal{F}1)$ – $(\mathcal{F}2)$.

Пусть $\mathcal{F}\in J^c_\beta(\Omega,\overline{U};E)$. Для фиксированного $\omega\in\Omega$, пусть T^ω — непустое компактное фундаментальное множество мультиотображения $\mathcal{F}(\omega,\cdot)$ с разложением $D_{\mathcal{F}(\omega,\cdot)}=(\mathcal{F}_n\circ\ldots\circ\mathcal{F}_1)$. Выберем ретракцию $\varrho\colon E\to T^\omega$ и рассмотрим мультиотображение

$$\varrho\circ\mathcal{F}(\omega,\cdot)\colon \overline{U}\to K(E).$$

Ясно, что $\varrho\circ\mathcal{F}(\omega,\cdot)$ является компактным J^c-мультиотображением с разложением

$$D_{\varrho\circ\mathcal{F}(\omega,\cdot)}=(\varrho\circ\mathcal{F}_n\circ\ldots\circ\mathcal{F}_1).$$

Более того, из Предложения 9 (i) следует, что

$$Fix(\varrho\circ\mathcal{F}(\omega,\cdot))=Fix\mathcal{F}(\omega,\cdot)$$

и, таким образом, определен индекс неподвижных точек $ind(D_{\varrho\circ\mathcal{F}(\omega,\cdot)},\overline{U})$.

Лемма 1. *Индекс неподвижных точек $ind(D_{\varrho\circ\mathcal{F}(\omega,\cdot)},\overline{U})$ не зависит от выбора фундаментального множества T^ω и ретракции ϱ.*

Доказательство. Рассмотрим два непустых компактных фундаментальных множества T^ω_0 и T^ω_1 для $\mathcal{F}(\omega,\cdot)$ с ретракциями $\varrho_0\colon E\to T^\omega_0$ и $\varrho_1\colon E\to T^\omega_1$ соответственно.

Если $T^\omega_0\cap T^\omega_1=\emptyset$, то

$$Fix(\varrho_0\circ\mathcal{F}(\omega,\cdot))=Fix(\varrho_1\circ\mathcal{F}(\omega,\cdot))=Fix\mathcal{F}(\omega,\cdot)=\emptyset$$

и тогда, согласно Предложению 6

$$ind(D_{\varrho_0\circ\mathcal{F}(\omega,\cdot)},\overline{U})=ind(D_{\varrho_1\circ\mathcal{F}(\omega,\cdot)},\overline{U})=0.$$

Пусть теперь $T^\omega_0\cap T^\omega_1\neq\emptyset$, тогда, согласно Предложению 9 (ii) мы можем предположить, без ущерба для общности, что $T^\omega_0\subseteq T^\omega_1$.

Определим отображение $h\colon E\times[0,1]\to E$,

$$h(y,\lambda)=\varrho_1(\lambda y+(1-\lambda)\varrho_0 y)$$

и рассмотрим мультиотображение $\mathcal{H}\colon\overline{U}\times[0,1]\to K(E)$ заданное как

$$\mathcal{H}(x,\lambda)=h(\mathcal{F}(\omega,x),\lambda).$$

Нетрудно видеть, что компактное мультиотображение $\mathcal{H}$ принадлежит классу $J^c(\overline{U}\times[0,1],E)$ и, более того, оно задает гомотопию разложений $D_{\varrho_0\circ\mathcal{F}(\omega,\cdot)}$ и $D_{\varrho_1\circ\mathcal{F}(\omega,\cdot)}$. Действительно, необходимо проверить только, что

$$x\notin\mathcal{H}(x,\lambda),\quad\forall(x,\lambda)\in\partial U\times[0,1].$$

В предположении противного, пусть найдется $(x,\lambda)\in\partial U\times[0,1]$ такое, что

$$x=\varrho_1(\lambda y+(1-\lambda)\varrho_0 y)$$

для некоторого $y\in\mathcal{F}(\omega,x)$.

Тогда $x\in T^\omega_1$ и следовательно $y\in T^\omega_1$. Поскольку также $\varrho_0 y\in T^\omega_1$, мы получаем

$$x=\lambda y+(1-\lambda)\varrho_0 y,$$

откуда вытекает, что $x\in\overline{co}\,(\mathcal{F}(\omega,x)\cup T^\omega_0)$ и таким образом $x\in T^\omega_0$, $y\in T^\omega_0$ и $x=y$ в противоречие с условием $(\mathcal{F}3)$.

Теперь утверждение вытекает из Предложения 7.

□

Доказанная лемма дает возможность обосновать следующие понятия.

Определение 16. *Для данного $\omega \in \Omega$, индекс неподвижных точек разложения $\mathcal{F}(\omega,\cdot)$ определяется следующим образом:*

$$ind(D_{\mathcal{F}(\omega,\cdot)},\overline{U}) := ind(D_{\varrho\circ\mathcal{F}(\omega,\cdot)},\overline{U}),$$

где ϱ — ретракция на произвольное непустое компактное фундаментальное множество мультиотображения $\mathcal{F}(\omega,\cdot)$.

Определение 17. *Для данного $\mathcal{F} \in J^c_\beta(\Omega,\overline{U};E)$, индекс неподвижных точек определяется как следующий набор чисел:*

$$Ind(\mathcal{F},\overline{U}) = \{ind(D_{\mathcal{F}(\omega,\cdot)},\overline{U}) :\ \omega \in \Omega\}.$$

По определению полагаем $Ind(\mathcal{F},\overline{U})\neq 0$ при условии, что $ind(D_{\mathcal{F}(\omega,\cdot)},\overline{U})\neq 0$ для всех $\omega \in \Omega$.

Опишем основные свойства введенной характеристики. Из Предложений 4 и 6 вытекают следующие утверждения.

Предложение 13. *(Свойство неподвижной точки) Если $Ind(\mathcal{F},\overline{U}) \neq 0$, то $\mathcal{F}$ имеет случайную неподвижную точку.*

Определение 18. *Два мультиотображения $\mathcal{F},\mathcal{G} \in J^c_\beta(\Omega,\overline{U};E)$ называются гомотопными,*

$$\mathcal{F} \sim \mathcal{G}$$

если существует семейство $\mathcal{H}\colon \Omega \times \overline{U} \times [0,1] \to K(E)$ такое, что:

($\mathcal{H}1$) *для каждого $\lambda \in [0,1]$, $\mathcal{H}(\cdot,\cdot,\lambda)\colon \Omega \times \overline{U} \to K(E)$ — случайное и-мультиотображение;*

($\mathcal{H}2$) *для каждого $\omega \in \Omega$, семейство $\mathcal{H}(\omega,\cdot,\cdot) : \overline{U} \times [0,1] \to K(E)$ является β-уплотняющим;*

($\mathcal{H}3$) *для каждого $\omega \in \Omega$, разложения $D_{\mathcal{H}(\omega,\cdot,0)} = D_{\mathcal{F}(\omega,\cdot)}$ и $D_{\mathcal{H}(\omega,\cdot,1)} = D_{\mathcal{G}(\omega,\cdot)}$ гомотопны в смысле Определения 11.*

Предложение 14. *(Гомотопическая инвариантность) Если $\mathcal{F} \sim \mathcal{G}$ то*

$$Ind(\mathcal{F},\overline{U}) = Ind(\mathcal{G},\overline{U}).$$

Доказательство. Для данного $\omega \in \Omega$, существует непустое компактное выпуклое множество $T \subset E$, которое является фундаментальным для каждого мультиотображения $\mathcal{H}(\omega,\cdot,\lambda)$, $\lambda \in [0,1]$ ([13], Теорема 2.2.1). Пусть $\varrho\colon E \to T$ — некоторая ретракция. Тогда нетрудно видеть, что компактные разложения $D_{\varrho\circ\mathcal{H}(\omega,\cdot,0)} = D_{\varrho\circ\mathcal{F}(\omega,\cdot)}$ и $D_{\varrho\circ\mathcal{H}(\omega,\cdot,1)} = D_{\varrho\circ\mathcal{G}(\omega,\cdot)}$ гомотопны и следовательно, согласно Предложению 7,

$$ind(D_{\mathcal{F}(\omega,\cdot)},\overline{U}) = ind(D_{\mathcal{G}(\omega,\cdot)},\overline{U}),$$

завершая доказательство. □

Следующее свойство вытекает из Предложения 8.

Предложение 15. *(Аддитивное свойство) Для данного $\mathcal{F} \in J^c_\beta(\Omega,\overline{U};E)$, пусть для каждого $\omega \in \Omega$*

$$Fix\mathcal{F}(\omega,\cdot) \cap U \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_j,$$

где U_j, $j = 1,...,k$ — открытые попарно непрерсекающиеся подмножества U, тогда

$$Ind(\mathcal{F},\overline{U}) = \Big\{ \sum_{j=1}^{k} ind(D_{\mathcal{F}(\omega,\cdot)},\overline{U}_j) :\ \omega \in \Omega\Big\}$$

В качестве приложения свойства неподвижной точки рассмотрим следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\mathcal{F} \in J^c_\beta(\Omega, \overline{U}; E)$, *где* U — *выпуклая окрестность нуля и*

$$x \notin \lambda F(\omega, x), \quad \forall \omega \in \Omega,\ x \in \partial U,\ 0 \le \lambda < 1.$$

тогда $\mathcal{F}$ *имеет случайную неподвижную точку.*

Доказательство. Зададим семейство $\mathcal{H}\colon \Omega \times \overline{U} \times [0,1] \to K(E)$ следующим образом. Для данного $\omega \in \Omega$, пусть $D_{\mathcal{F}(\omega,\cdot)} = (\mathcal{F}_n \circ \ldots \circ \mathcal{F}_1)$ — некоторое разложение $\mathcal{F}(\omega,\cdot)$. Определим

$$\mathcal{H}(\omega, x, \lambda) = (\psi \circ \mathcal{F}^\star_n \circ \ldots \circ \mathcal{F}^\star_1),$$

где для $1 \le i \le n$,

$$\mathcal{F}^\star_i(\cdot, \lambda) = \mathcal{F}_i \times \{\lambda\}, \quad \lambda \in [0,1]$$

и

$$\psi(z, \lambda) = \lambda x, \quad \lambda \in [0,1].$$

Ясно, что семейство $\mathcal{H}$ удовлетворяет условиям ($\mathcal{H}1$) и ($\mathcal{H}3$) Определения 18.

Для проверки условия ($\mathcal{H}2$) обозначим. для $\omega \in \Omega$, $\mathcal{H}_\omega = \mathcal{H}(\omega,\cdot,\cdot)$ и предположим, что

$$\beta(\mathcal{H}_\omega(\mathcal{D} \times [0,1]))) \ge \beta(\mathcal{D})$$

для некоторого $\mathcal{D} \subset \overline{U}$.

Поскольку

$$\mathcal{H}_\omega(\mathcal{D} \times [0,1])) = \overline{co}\,(\mathcal{F}(\omega, \mathcal{D}) \cup \{0\}),$$

получаем

$$\beta(\mathcal{F}(\omega, \mathcal{D})) \ge \beta(\mathcal{D})$$

откуда вытекает, что $\mathcal{D}$ относительно компактно.

Таким образом, семейство $\mathcal{H}$ задает гомотопию, связывающую исходное мультиотображение $\mathcal{F}$ и нулевое отображение. Это означает, согласно свойству нормализации топологической степени, что $ind(D_{\mathcal{F}(\omega,\cdot)}, \overline{U}) = 1$ для всех $\omega \in \Omega$ и следовательно

$$Ind(\mathcal{F}, \overline{U}) \neq 0,$$

и мы можем применить Предложение 13. □

Аналогичными методами можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\mathcal{F} \in \widetilde{J}^c_\beta(\Omega, \overline{U}; E)$, *где открытое множество* U *выпукло и*

$$\mathcal{F}(\Omega \times \partial U) \subset \overline{U}.$$

Тогда $\mathcal{F}$ *имеет случайную неподвижную точку.*

4. Степень совпадения для уплотняющего возмущения линейного фредгольмова оператора

Нашей целью теперь является описать топологическую характеристику — степень совпадения для пары, состоящей из линейного фредгольмова оператора нулевого индекса и J^c-мультиотображения уплотняющего типа.

Пусть E_1 — банахово пространство; E_2 — нормированное пространство; $U \subset E_1$ — открытое ограниченное множество. Пусть, далее, $L\colon Dom\ L \subset E_1 \to E_2$ -линейный фредгольмов оператор нулевого индекса; $\mathcal{F}$ — мультиотображение класса $J^c(\overline{U}, E_2)$.

Пусть β — монотонная, несингулярная, алгебраически полуаддитивная и правильная МНК в E_1.

Скажем, что точная пара проекций (P, Q) относительно L допустима, если оператор K_P непрерывен.

Определение 19. *Будем говорить, что $(L, \mathcal{F})$ является β-уплотняющей парой, если выполнены следующие условия:*

($L\mathcal{F}1$) *Множество $\mathcal{F}(\overline{U})$ ограничено в E_2;*

($L\mathcal{F}2$) *Существует допустимая пара проекций (P, Q) относительно L такая, что мультиотображение $K_{P,Q}\mathcal{F}\colon \overline{U} \to K(E_1)$ является β-уплотняющим.*

Лемма 2. *Определение β-уплотняющей пары $(L, \mathcal{F})$ не зависит от выбора допустимой пары проекций (P, Q).*

Доказательство. Прежде всего отметим, что если точная пара проекций (P, Q) относительно L допустима, то и любая другая точная пара (P', Q') относительно L будет допустимой. Это вытекает из равенства $K_{P'} = (I - P')K_P$ (см. [9]).

Далее, пусть множество $\mathcal{D} \subset \overline{U}$ таково, что для некоторой точной пары (P', Q') имеем

$$\beta(K_{P',Q'}\mathcal{F}(\mathcal{D})) \geq \beta(\mathcal{D}). \tag{1}$$

Используя операторное равенство

$$K_{P',Q'} = (I - P')K_{P,Q} + (I - P')K_P(Q - Q')$$

(см. [9]), свойства МНК β, а также тот факт, что $P'K_{P,Q}\mathcal{F}(\mathcal{D})$ и $(Q - Q')\mathcal{F}(\mathcal{D})$ являются ограниченными подмножествами конечномерных подпространств $Ker\, L$ и $(Q - Q')E_2$ соответственно, получаем

$$\beta(K_{P',Q'}\mathcal{F}(\mathcal{D})) = \beta(K_{P,Q}\mathcal{F}(\mathcal{D})) \geq \beta(\mathcal{D}),$$

откуда вытекает относительная компактность множества $\mathcal{D}$, что и доказывает утверждение. □

Множество всех β-уплотняющих пар $(L, \mathcal{F})$ будем обозначать $\mathcal{J}^\beta(\overline{U}, E_2)$.

Определение 20. *Точка $x \in Dom\, L \cap \overline{U}$ называется точкой совпадения оператора L и мультиотображения $\mathcal{F}$, если*

$$Lx \in \mathcal{F}(x).$$

Множество всех точек совпадения L и $\mathcal{F}$ будем обозначать $Coin\,(L, \mathcal{F})$.

Будем теперь предполагать выполненным следующее условие.

($L\mathcal{F}3$) Пусть

$$Coin\,(L, \mathcal{F}) \cap \partial U = \emptyset,$$

то есть $Lx \notin \mathcal{F}(x)$ для всех $x \in Dom\, L \cap \partial U$.

Множество всех β-уплотняющих пар $(L, \mathcal{F})$, удовлетворяющих условию $(L\mathcal{F}3)$ будем обозначать $\mathcal{J}^{\beta}_{\partial U}(\overline{U}, E_2)$.

Для пары $(L, \mathcal{F}) \in \mathcal{J}^{\beta}_{\partial U}(\overline{U}, E_2)$, и произвольной допустимой пары (P, Q) оператора L рассмотрим мультиотображение $\mathcal{G} \colon \overline{U} \to K(E_1)$ вида

$$\mathcal{G}(x) = Px + (\Lambda\Pi + K_{P,Q})\mathcal{F}(x), \quad x \in \overline{U}. \tag{2}$$

Из Предложения 12 (iv) вытекает, что $Fix\,\mathcal{G}$ совпадает с $Coin\,(L, \mathcal{F})$ и таким образом, согласно условию $(L\mathcal{F}3)$

$$Fix\,\mathcal{G} \cap \partial U = \emptyset.$$

Лемма 3. *Мультиотображение $\mathcal{G}$, определенное формулой* (2)*, является β-уплотняющим J^c-мультиотображением.*

Доказательство. Тот факт, что мультиотображение $\mathcal{G}$ является β-уплотняющим вытекает из свойств МНК β, условий $(L\mathcal{F}1)$ - $(L\mathcal{F}2)$ и конечномерности операторов P и Λ.

Пусть теперь

$$D_{\mathcal{F}} : \overline{U} = X_0 \overset{\mathcal{F}_1}{\multimap} X_1 \overset{\mathcal{F}_2}{\multimap} \ldots \overset{\mathcal{F}_n}{\multimap} X_n = E_2 \tag{3}$$

— некоторое разложение мультиотображения $\mathcal{F}$. Рассмотрим мультиотображения $\widetilde{\mathcal{F}}_1 \colon \overline{U} \multimap E_1 \times X_1$ и $\widetilde{\mathcal{F}}_i \colon E_1 \times X_{i-1} \multimap E_1 \times X_i$, $i = 2, ..., n$, заданные следующим образом:

$$\widetilde{\mathcal{F}}_1(x) = \{x\} \times \mathcal{F}_1(x),$$

$$\widetilde{\mathcal{F}}_i(x, z) = \{x\} \times \mathcal{F}_i(z)$$

и непрерывное отображение $\Psi \colon E_1 \times X_n \to E_1$,

$$\Psi(x, z) = Px + (\Lambda\Pi + K_{P,Q})(z).$$

Ясно, что тогда

$$D_{\mathcal{G}} = (\Psi \circ \widetilde{\mathcal{F}}_n \circ \ldots \circ \widetilde{\mathcal{F}}_1) \tag{4}$$

— разложение $\mathcal{G}$. $\square$

Доказанное утверждение дает возможность ввести следующее понятие.

Определение 21. *Степенью совпадения* $\deg(L, \mathcal{F}, \overline{U})$ *пары* $(L, \mathcal{F}) \in \mathcal{J}^{\beta}_{\partial U}(\overline{U}, E_2)$ *называется индекс неподвижных точек разложения* (4)*:*

$$\deg(L, \mathcal{F}, \overline{U}) := ind(D_{\mathcal{G}}, \overline{U}).$$

Известно (см., например, [9]), что множество всех непрерывных линейных изоморфизмов $\Lambda \colon Coker\ L \to Ker\ L$ разбивается на два гомотопических класса (если $Coker\ L$ и $Ker\ L$ ориентированы, то два изоморфизма принадлежат одному классу, если они задают одинаковую ориентацию образа $Coker\ L$).

Корректность Определения 21 обосновывает следующее утверждение.

Лемма 4. *При заданном разложении* (3) *степень совпадения* $\deg(L, \mathcal{F}, \overline{U})$ *зависит только от гомотопического класса* Λ.

Доказательство. Пусть (P, Q) и (P', Q') — две допустимых пары относительно L и Λ, Λ' — два изоморфизма между $Coker\ L$ и $Ker\ L$, которые принадлежат к одному гомотопическому классу. Пусть $\widetilde{\Lambda} \colon Coker\ L \times [0, 1] \to Ker\ L$ — связывающая их гомотопия. Известно (см., [9]), что для каждого $\lambda \in [0,1]$ операторы $P(\lambda) = (1-\lambda)P + \lambda P'$ и $Q(\lambda) = (1-\lambda)Q + \lambda Q'$ образуют допустимую пару относительно L и, более того,

$$K_{P(\lambda)} = (1-\lambda)K_P + \lambda K_{P'}.$$

Далее, обозначив $\widetilde{\Lambda}_\lambda = \widetilde{\Lambda}(\cdot,\lambda)$, рассмотрим семейство $\widetilde{\mathcal{G}}\colon \overline{U} \times [0,1] \to K(E_1)$ вида

$$\widetilde{\mathcal{G}}(x,\lambda) = P(\lambda)x + (\widetilde{\Lambda}_\lambda \Pi + K_{P(\lambda),Q(\lambda)})\mathcal{F}(x). \tag{5}$$

Ясно, что при любом $\lambda \in [0,1]$ множество неподвижных точек $Fix\ \widetilde{\mathcal{G}}(\cdot,\lambda)$ совпадает с $Coin\,(L,\mathcal{F})$ и, таким образом,

$$Fix\ \widetilde{\mathcal{G}}(\cdot,\lambda) \cap \partial U = \emptyset, \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

Следовательно, для того, чтобы убедиться, что семейство $\widetilde{\mathcal{G}}$ порождает гомотопию мультиотображений $\mathcal{G}_0 = Px + (\Lambda\Pi + K_{P,Q})\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}_1 = P'x + (\Lambda'\Pi + K_{P',Q'})\mathcal{F}$ нужно проверить только, что семейство $\widetilde{\mathcal{G}}$ является β-уплотняющим.

Пусть множество $\mathcal{D} \subset \overline{U}$ таково, что

$$\beta(\widetilde{\mathcal{G}}(\mathcal{D} \times [0,1])) \geq \beta(\mathcal{D}).$$

Из представления (5) вытекает

$$\widetilde{\mathcal{G}}(x,\lambda) \subset (1-\lambda)Px + \lambda P'x + \widetilde{\Lambda}_\lambda \Pi \mathcal{F}(x) + [(1-\lambda)K_P + \lambda K_{P'}]\,[I - (1-\lambda)Q - \lambda Q']\mathcal{F}(x) =$$

$$= (1-\lambda)Px + \lambda P'x + \widetilde{\Lambda}_\lambda \Pi \mathcal{F}(x) + [(I-\lambda P')K_{P,Q} + \lambda(I-\lambda P')K_P(Q-Q')]\mathcal{F}(x).$$

Первые три слагаемых в последней сумме конечномерны, множество $\cup_{\lambda\in[0,1]}\lambda P' K_{P.Q}\mathcal{F}(\mathcal{D})$ — ограниченное подмножество конечномерного пространства $Ker\ L$, множество $(Q-Q')\mathcal{F}(\mathcal{D})$ — ограниченное подмножество конечномерного пространства $(Q-Q')E_2$, в силу чего $\cup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(I-\lambda P')K_P(Q-Q')\mathcal{F}(\mathcal{D})$ — относительно компактное подмножество E_1. В силу свойств МНК β это означает, что

$$\beta(\widetilde{\mathcal{G}}(\mathcal{D} \times [0,1])) \leq \beta(K_{P,Q}\mathcal{F}(\mathcal{D})),$$

откуда и следует относительная компактность множества $\mathcal{D}$.

Применяя теперь (при фиксированном ω) свойство гомотопической инвариантности (см. Предложение 14), получаем

$$ind(D_{\mathcal{G}_0}, \overline{U}) = ind(D_{\mathcal{G}_1}, \overline{U}),$$

что и доказывает утверждение. □

Непосредственно из Определения 21 и соответствующих свойств индекса неподвижной точки, описанных в Разделе 3, вытекают следующие утверждения.

Предложение 16. *(Свойство точки совпадения) Пусть* $(L,\mathcal{F}) \in \mathcal{J}^\beta_{\partial U}(\overline{U}, E_2)$ *и*

$$\deg(L,\mathcal{F},\overline{U}) \neq 0.$$

Тогда $\emptyset \neq Coin(L,\mathcal{F},\overline{U}) \subset (U \cap Dom\,L)$.

Определение 22. *Пусть* $(L,\mathcal{F}), (L,\mathcal{G}) \in \mathcal{J}^\beta_{\partial U}(\overline{U}, E_2)$, *и мультиотображения* $\mathcal{F}$ *и* $\mathcal{G}$ *допускают разложения*

$$D_{\mathcal{F}} : \overline{U} = X_0 \overset{\mathcal{F}_1}{\multimap} X_1 \overset{\mathcal{F}_2}{\multimap} \ldots \overset{\mathcal{F}_n}{\multimap} X_n = E_2,$$

$$D_{\mathcal{G}} : \overline{U} = X_0 \overset{\mathcal{G}_1}{\multimap} X_1 \overset{\mathcal{G}_2}{\multimap} \ldots \overset{\mathcal{G}_n}{\multimap} X_n = E_2,$$

Будем говорить, что разложения $D_{\mathcal{F}}$ и $D_{\mathcal{G}}$ L-гомотопны,

$$D_{\mathcal{F}} \overset{L}{\sim} D_{\mathcal{G}},$$

если существуют мультиотображения

$$\mathcal{H}_i \in J(X_{i-1} \times [0,1], X_i), \quad i = 1, ...n$$

такие, что $\mathcal{H}_i(\cdot, 0) = \mathcal{F}_i$, $\mathcal{H}_i(\cdot, 1) = \mathcal{G}_i$, $i = 1, ..., n$ и мультиотображение $\mathcal{H}\colon \overline{U} \times [0,1] \multimap E_2$, допускающее разложение

$$\overline{U} \times [0,1] = X_0 \times [0,1] \overset{\widetilde{\mathcal{H}}_1}{\multimap} X_1 \times [0,1] \overset{\widetilde{\mathcal{H}}_2}{\multimap} ... \overset{\widetilde{\mathcal{H}}_{n-1}}{\multimap} X_{n-1} \times [0,1] \overset{\mathcal{H}_n}{\multimap} X_n = E_2$$

где $\widetilde{\mathcal{H}}_i(x, \lambda) = \mathcal{H}_i(x, \lambda) \times \{\lambda\}$ для $x \in X_{i-1}$, $\lambda \in [0,1]$, $i = 1, ..., n-1$ таково, что

(*i*) *множество $\mathcal{H}(\overline{U} \times [0,1])$ ограничено в E_2;*

(*ii*) *семейство $K_{P,Q}\mathcal{H}(x, \lambda)$ является β-уплотняющим для некоторой допустимой пары (P, Q) оператора L ;*

(*iii*) *$Lx \notin \mathcal{H}(x, \lambda)$ для $x \in Dom\ L \cap \partial U$, $\lambda \in [0,1]$.*

Предложение 17. *(Гомотопическая инвариантность) Если $(L, \mathcal{F})$, $(L, \mathcal{G}) \in \mathcal{J}^{\beta}_{\partial U}(\overline{U}, E_2)$ и*

$$D_{\mathcal{F}} \overset{L}{\sim} D_{\mathcal{G}},$$

то

$$\deg(L, \mathcal{F}, \overline{U}) = \deg(L, \mathcal{G}, \overline{U}).$$

Предложение 18. *(Аддитивное свойство) Пусть $\{U_j\}_{j=1}^{k}$ — семейство открытых попарно непересекающихся подмножеств U и пара $(L, \mathcal{F})$, $(L, \mathcal{G}) \in \mathcal{J}^{\beta}_{\partial U}(\overline{U}, E_2)$ такова, что*

$$Coin(L, \mathcal{F}) \bigcap \big((\overline{U} \setminus \bigcup_{j=1}^{k} U_j) \cap Dom\, L\big) = \emptyset.$$

Тогда

$$\deg(L, \mathcal{F}, \overline{U}) = \sum_{j=1}^{k} \deg(L, \mathcal{F}, \overline{U}_j).$$

В качестве примера приложения общего принципа существования точки совпадения рассмотрим следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть для пары $(L, \mathcal{F}) \in \mathcal{J}^{\beta}_{\partial U}(\overline{U}, E_2)$ выполнены следующие условия:*

(i) *$Lx \notin \lambda\mathcal{F}(x)$ для всех $\lambda \in (0,1]$, $x \in Dom\, L \cap \partial U$;*

(ii) *$0 \notin \Pi\mathcal{F}(x)$ для всех $x \in Ker\, L \cap \partial U$;*

(iii)

$$ind_{Ker\, L}(\Lambda\Pi\mathcal{F}|_{\overline{U}_{Ker\, L}}, \overline{U}_{Ker\, L}) \neq 0,$$

где символ $ind_{Ker\, L}$ обозначает индекс неподвижных точек, вычисляемый в пространстве $Ker\, L$, и $\overline{U}_{Ker\, L} = \overline{U} \cap Ker\, L$.

Тогда $\emptyset \neq Coin(L, \mathcal{F}, \overline{U}) \subset (U \cap Dom\, L)$.

Доказательство. Рассмотрим деформацию $\Psi : \overline{U} \times [0,1] \to K(E_1)$, заданную следующим образом:

$$\Psi(x,\lambda) = Px + (\Lambda\Pi + \lambda K_{P,Q})\mathcal{F}(x), \quad (x,\lambda) \in \overline{U} \times [0,1].$$

Для $\lambda \in (0,1]$ и $x \in Dom\, L \cap \partial U$, из условия (i) вытекает

$$x \notin \Psi(x,\lambda).$$

С другой стороны, условие (ii) влечет

$$x \notin \Psi(x,0)$$

для всех $x \in Dom\, L \cap \partial U$.

Кроме того, семейство Ψ является β-уплотняющим. Действительно, если $\mathcal{D} \subset \overline{U}$ — некоторое подмножество такое, что

$$\beta\left(\cup_{\lambda\in[0,1]}\lambda K_{P,Q}\mathcal{F}(\mathcal{D})\right) \geq \beta(\mathcal{D}),$$

то

$$\beta\left(\cup_{\lambda\in[0,1]}\lambda K_{P,Q}\mathcal{F}(\mathcal{D})\right) = \beta\left(\overline{co}(\{0\} \cup K_{P,Q}\mathcal{F}(\mathcal{D})\right) = \beta\left(K_{P,Q}\mathcal{F}(\mathcal{D})\right),$$

откуда вытекает относительная компактность $\mathcal{D}$.

Таким образом, Ψ порождает гомотопию, откуда следует

$$\deg(L,\mathcal{F},\overline{U}) = ind(P + \Lambda\Pi\mathcal{F},\overline{U}).$$

Мультиотображение $P + \Lambda\Pi\mathcal{F}$ принимает значения в конечномерном пространстве $Ker\ L$. Применяя принцип сужения отображения (см., например, [8]), получаем

$$ind(P + \Lambda\Pi\mathcal{F},\overline{U}) = ind_{Ker\,L}(\Lambda\Pi\mathcal{F}|_{\overline{U}_{Ker\,L}},\overline{U}_{Ker\,L}).$$

Остается использовать условие (iii) и Предложение 16. □

5. О случайной степени совпадения

Пусть, как ранее, E_1 — банахово пространство; E_2 — нормированное пространство; $U \subset E_1$ — открытое ограниченное множество; $L\colon Dom\ L \subset E_1 \to E_2$ -линейный фредгольмов оператор нулевого индекса и β — монотонная, несингулярная, алгебраически полуаддитивная и правильная МНК в E_1.

Для полного измеримого пространства Ω, пусть мультиотображение $\mathcal{F}\colon \Omega \times \overline{U} \to K(E_2)$ удовлетворяет условиям:

($\mathcal{F}\omega 1$) $\mathcal{F}$ — мультиотображение Каратеодори;

($\mathcal{F}\omega 2$) для каждого $\omega \in \Omega$, $\mathcal{F}(\omega,\cdot)$ - J^c-мультиотображение;

($\mathcal{F}\omega 3$) для каждого $\omega \in \Omega$, $(L,\mathcal{F}(\omega,\cdot))$ является β-уплотняющей парой.

Если теперь выполнено условие

($\mathcal{F}\omega 4$) для каждого $\omega \in \Omega$,

$$Lx \notin \mathcal{F}(\omega,x) \quad \text{для всех} \quad x \in Dom\ L \cap \partial U,$$

то случайная степень совпадения пары $(L, \mathcal{F})$ может быть определена как

$$Deg(L, \mathcal{F}, \overline{U}) = \{deg(L, \mathcal{F}(\omega, \cdot), \overline{U}) \colon \omega \in \Omega\}.$$

По определению полагаем, что $Deg(L, \mathcal{F}, \overline{U}) \neq 0$, если $deg(L, \mathcal{F}(\omega, \cdot), \overline{U}) \neq 0$ для всех $\omega \in \Omega$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Если $Deg(L, \mathcal{F}, \overline{U}) \neq 0$, то пара $(L, \mathcal{F})$ имеет случайную точку совпадения, то есть существует такое измеримое отображение $\xi \colon \Omega \to U$, что*

$$L\xi(\omega) \in \mathcal{F}(\omega, \xi(\omega)) \quad \textit{для всех } \omega \in \Omega.$$

Доказательство. Согласно Предложению 16 при каждом $\omega \in \Omega$ множество точек совпадения пары $(L, \mathcal{F}(\omega, \cdot))$ непусто, а следовательно непусто и множество неподвижных точек мультиотображения $\mathcal{G} \colon \Omega \times \overline{U} \to K(E_1)$ вида

$$\mathcal{G}(\omega, x) = Px + (\Lambda\Pi + K_{P,Q})\mathcal{F}(\omega, x), \quad x \in \overline{U},$$

где (P, Q) — некоторая допустимая пара оператора L. Нетрудно видеть, что $\mathcal{G}(\omega, x)$ является мультиотображением Каратеодори, а значит, согласно Предложению 3, оно измеримо и таким образом, в частности, является случайным u-мультиотображением. Согласно Предложению 4 $\mathcal{G}(\omega, x)$ имеет случайную неподвижную точку, которая и является искомой случайной точкой совпадения. □

Благодарности

Работа В. В. Обуховского и С. В. Корнева поддержана Министерством образования и науки РФ в рамках проектной части госзадания (Проект № 1.3464.2017/4.6) и грантом РФФИ — MOST 17-51-52022.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений, Успехи мат. наук 35(1980), № 1, 59-126.

2. Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, Многозначные отображения. Итоги науки и техники. Матем. анализ Т. 19, ВИНИТИ, М., 1982, 127-231.

3. Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений, ЛИБРОКОМ, М., 2016.

4. К. Борсук, Теория ретрактов, Мир, М., 1971.

5. С. В. Корнев, В. В. Обуховский, О некоторых вариантах теории топологической степени для невыпуклозначных мультиотображений, Труды матем. ф-та (новая серия), Воронеж, ВГУ, 8 (2004), 56-74.

6. А. Д. Мышкис, Обобщения теоремы о точке покоя динамической системы внутри замкнутой траектории, Матем. сборник 34 (1954), № 3, 525-540.

7. J. Andres, L. Górniewicz, Random topological degree and random differential inclusions, Topol. Methods Nonlin. Anal. 40 (2012), 337-358

8. R. Bader, W. Kryszewski, Fixed-point index for compositions of set-valued maps with proximally ∞-connected values on arbitrary ANR's, Set-Valued Anal. 2 (1994), 459-480.

9. R. E. Gaines, J. L. Mawhin, Coincidence degree and and nonlinear differential equations, Lect. Notes Math. 568, Springer, Berlin, 1977.

10. L. Górniewicz, Topological fixed point theory of multivalued mappings, 2nd ed., Springer, Dordrecht, 2006.

11. S. Hu, N. Papageorgiou, Handbook of multivalued analysis, Vol. I, Theory, Kluwer, Dordrecht, 1997.

12. D. M. Hyman, On decreasing sequences of compact absolute retracts, Fund Math. 64 (1969), 91-97.

13. M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca, Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces, Walter de Gruyter, Berlin — New York, 2001.

14. V. Obukhovskii, P. Zecca, N. V. Loi, S. Kornev, Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis, Lect. Notes Math. 2076, Springer, Berlin — Heidelberg, 2013.

15. E. Tarafdar, S. K. Teo, On the existence of solutions of the equation $Lx \in Nx$ and a coincidence degree theory, J. Austral. Math. Soc. (Ser. A) 28(1979), 139-173.

16. E. Tarafdar, P. Watson, X.-Z. Yuan, Random coincidence degree theory with applications to random differential inclusions, Comment. Math. Univ. Carolinae 37 (1996), 725-748.

REFERENCES

1. Yu. G. Borisovich, B. D. Gel'man, A. D. Myshkis, V. V. Obukhovskii, "Topological methods in the fixed-point theory of multi-valued maps", Russian Math. Surveys, 35:1 (1980), 65–143.

2. Yu. G. Borisovich, B. D. Gel'man, A. D. Myshkis, V. V. Obukhovskii, "Multivalued mappings", J. Soviet Math., 24:6 (1984), 719–791

3. Yu. G. Borisovich, B. D. Gel'man, A. D. Myshkis, V. V. Obukhovskii, "Introduction to the theory of multivalued mappings and differential inclusions", LIBROKOM, Moscow 2011.

4. K. Borsuk, Theory of retracts, PWN, Warsaw, 1967.

5. S. V.Kornev, V. V. Obukhovskii, "On some versions of the topological degree theory for nonconvex-valued multimaps", Trudy Mat. Fac. Voronezh Univ. (N.S.), Voronezh, VGU, 8 (2004), 56-74.

6. A. D. Myshkis, "Generalizations of the theorem on a fixed point of a dynamical system inside of a closed trajectory", Mat. Sb. (N.S.), 34(76):3 (1954), 525–540

7. J. Andres, L. Górniewicz, "Random topological degree and random differential inclusions", Topol. Methods Nonlin. Anal. 40 (2012), 337-358

8. R. Bader, W. Kryszewski, "Fixed-point index for compositions of set-valued maps with proximally ∞-connected values on arbitrary ANR's", Set-Valued Anal. 2 (1994), 459-480.

9. R.E. Gaines, J. L. Mawhin, "Coincidence degree and and nonlinear differential equations", Lect. Notes Math. 568, Springer, Berlin, 1977.

10. L. Górniewicz, “Topological fixed point theory of multivalued mappings”, 2nd ed., Springer, Dordrecht, 2006.

11. S. Hu, N. Papageorgiou, “Handbook of multivalued analysis Vol. I”, Theory, Kluwer, Dordrecht, 1997.

12. D. M. Hyman, “On decreasing sequences of compact absolute retracts”, Fund Math. 64 (1969), 91-97.

13. M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca, “Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces”, Walter de Gruyter, Berlin — New York, 2001.

14. V. Obukhovskii, P. Zecca, N. V. Loi, S. Kornev, “Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis”, Lect. Notes Math. 2076, Springer, Berlin — Heidelberg, 2013.

15. E. Tarafdar, S. K. Teo, “On the existence of solutions of the equation $Lx \in Nx$ and a coincidence degree theory”, J. Austral. Math. Soc. (Ser. A) 28(1979), 139-173.

16. E. Tarafdar, P. Watson, X.-Z. Yuan, “Random coincidence degree theory with applications to random differential inclusions”, Comment. Math. Univ. Carolinae 37 (1996), 725-748.

Получено 22.12.2019 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.