Doctoral Thesis

Sparse perturbation algorithms for elliptic PDE's with stochastic data

Author(s):
Todor, Radu Alexandru

Publication Date:
2005

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-005151392 →

Diss. ETH No. 16192

Sparse Perturbation Algorithms for Elliptic PDE's with Stochastic Data

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY ZURICH

for the degree of
Doctor of Mathematics

presented by
RADU ALEXANDRU TODOR
Dipl. Math. University of Bucharest
born November 12, 1973
citizen of Romania

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Christoph Schwab, examiner
Prof. Dr. Ralf Hiptmair, co-examiner
Prof. Dr. Reinhold Schneider, co-examiner

2005

Abstract

In this work we investigate elliptic partial differential equations with stochastic data. We develop fully deterministic algorithms using statistics of the data (expectation and/or higher order moments) as input, for the computation of similar statistics of the stochastic solution. We introduce a sparsified higher order moment representation which, in the context of a classical perturbation method enables us to formulate efficient algorithms for the computation of solution moments, using sparse grids and wavelet techniques. Assuming analytic spatial regularity of the data fluctuation, we prove almost linear complexity for these algorithms.

Choosing stationary diffusion in a bounded domain as a model problem, we discuss in Chapter 1 the setting, basic notations and definitions, plus the main results.

We devote Chapter 2 to the case of a stochastic source term and deterministic diffusion coefficient. We derive deterministic moment equations and use sparse grids discretization to preserve almost optimal convergence rates. We propose a new solution algorithm for the resulting linear system given by a well-conditioned (due to the use of a wavelet basis), yet fully populated matrix with a tensor product block structure, to achieve log-linear complexity (in the number of degrees of freedom) despite the high dimensionality of the moment problem.

In Chapter 3 we address the more general case of a stochastic diffusion coefficient and stochastic source term. We show that the expectation of the stochastic solution can be computed starting from the higher order moments of the data. We introduce approximate sparsified representations of these moments and show that using them as input in the computation of the solution expectation results in an algorithm of almost linear complexity, under the analyticity assumption mentioned above. We finally combine this algorithm with the one developed in Chapter 2 to obtain similar, efficient algorithms for the computation of higher order moments of the stochastic solution.

We conclude by discussing in Chapter 4 possible further theoretical developments and extensions of the results presented in this thesis.

Kurzfassung

Gegenstand dieser Arbeit ist die Untersuchung elliptischer partieller Differentialgleichungen mit stochastischen Daten. Basierend auf Datenstatistiken (Erwartungswert, höhere Momente) werden rein deterministische Algorithmen zur Berechnung von ähnlichen Statistiken der stochastischen Lösung entwickelt. Effiziente Darstellungen der höheren Momente eines Zufallsfeldes werden eingeführt, und zusammen mit dünnen Gittern und wavelet Techniken im Rahmen einer Störungsmethode verwendet, um schnelle Verfahren zur Berechnung der Lösungsmomente zu erhalten. Im Falle der im Ort analytischen Datenfluktuationen wird fast lineare Gesamtkomplexität gezeigt.

In Kapitel 1 wird das Modelproblems (stationäre Diffusion im beschränkten physikalischen Gebiet), die grundlegenden Konzepte und Definitionen eingeführt, sowie die Hauptresultate erläutert.

Der Fall einer stochastischen Quelle mit deterministischem Diffusionskoeffizient wird in Kapitel 2 behandelt. Hoch dimensionale, deterministische Momentgleichungen werden hergeleitet, mit Hilfe von dünnen Gittern und Waveletbasen diskretisiert, was zu gut konditionierten, allerdings voll besetzten linearen Systemen führt. Ein Lösungsverfahren wird entwickelt, das die Tensorproduktstruktur des ursprünglichen Momentproblems ausnutzt, um log-lineare Gesamtkomplexität zu erreichen.

Für das vollständig stochastische Diffusionsproblem (sowohl Quelle als auch Diffusionskoeffizient werden als Zufallsfelder modelliert) wird in Kapitel 3 ein Algorithmus zur Berechnung des Erwartungswertes entwickelt. Höhere Momente der stochastischen Daten werden algorithmisch in eine Approximation des Erwartungswertes der stochastischen Lösung umgesetzt. Im Falle einer im Ort regulären Fluktuation der Daten und unter Verwendung der effizienten Darstellungen der Momente als Eingabe wird erneut fast lineare Gesamtkomplexität bewiesen. Ferner wird dieser Algorithmus mit dem in Kapitel 2 beschriebenen Verfahren kombiniert, was auch eine effiziente Berechnung der höheren Momente ermöglicht.

Im letzten Kapitel werden Möglichkeiten zur Verallgemeinerung der zuvor entwickelten Theorie aufgezeigt.