

Filipe Fontanela

**Análise robusta de modelos estruturais  
utilizando métodos probabilísticos**

**Florianópolis  
2015**



Filipe Fontanela

**Análise robusta de modelos estruturais utilizando  
métodos probabilísticos**

Dissertação submetida ao programa  
de Pós-Graduação em Engenharia  
Mecânica para a obtenção do grau  
de Mestre em Engenharia Mecânica.

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Arcanjo Lenzi, PhD.

Florianópolis  
2015

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Fontanela, Filipe

Análise robusta de modelos estruturais utilizando  
métodos probabilísticos / Filipe Fontanela ; orientador,  
Arcanjo Lenzi - Florianópolis, SC, 2015.  
150 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Mecânica.

Inclui referências

1. Engenharia Mecânica. 2. Dinâmica de estruturas. 3.  
Modelagem probabilística. 4. Síntese modal de componentes.  
I. Lenzi, Arcanjo. II. Universidade Federal de Santa  
Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.  
III. Título.



Filipe Fontanela

**Análise robusta de modelos estruturais utilizando  
métodos probabilísticos**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA** na área de concentração de **Vibrações e Acústica** e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

---

**Prof. Dr. Armando Albertazzi Gonçalves Jr.**  
Coordenador do curso

---

**Prof. Arcaño Lenzi, PhD.**  
Orientador

**BANCA EXAMINADORA:**

---

**Prof. Dr. Thiago Gamboa Ritto**  
Membro externo - COPPE/UFRJ

---

**Prof. Dr. Júlio Apolinário Cordioli**  
Membro titular - EMC/UFSC

---

**Prof. Dr. Roberto Jordan**  
Membro titular - EMC/UFSC

Florianópolis  
2015



*À minha mãe, por ter deixado de viver os próprios sonhos para que eu  
pudesse viver os meus.*



# Agradecimentos

Embora as contribuições deste trabalho sejam bastante modestas, este documento possui um elevado valor para a minha formação profissional e pessoal. Eu agradeço especialmente à minha mãe pelo carinho, incentivo e por se privar de tantas coisas para que eu pudesse chegar até aqui. Aos meus tios João e Celestino e ao meu avô, por sempre se mostrarem muito preocupados comigo, e ao meu quase irmão Jackson e primo William pela amizade e pelo carinho de longas datas.

Ao Prof. Arcanjo, pela amizade, ensinamentos e confiança no meu trabalho. Muito obrigado, Chefe!

Aos amigos Aldren, Engenheiro e Fernandinho, membros da já finada *Xurupita's house*, pela amizade e pelas histórias que vivemos juntos.

Aos amigos do Laboratório de Vibrações e Acústica (LVA) pelas discussões científicas, momentos de descontração e por fazerem parte deste período que, até o momento, é o mais feliz da minha vida. Gostaria de agradecer, em especial, à Giordana pelo auxílio durante os experimentos e ao grande guru Olavo pela participação direta neste trabalho e por toda a *zueira* do dia a dia.

Aos professores do curso de graduação em Física da UFSC, em especial ao Prof. Raymundo Baptista, por me iniciarem na carreira científica. Aos docentes do LVA por me oferecerem a oportunidade ímpar de adquirir uma sólida formação na área de vibrações e acústica. Aos professores externos Dr. T. Ritto, Dr. R. Sampaio, Dr. R. H. Lopez e Dr. C. Soize pela atenção durante o desenvolvimento deste trabalho, uma vez que sem o auxílio deles este caminho seria muito mais difícil.

Gostaria de agradecer, muito respeitosamente, o financiamento dos meus estudos pela população brasileira. Eu espero, em um futuro próximo, poder retribuir esse investimento. Agradeço, ainda, à empresa Embraco pelo apoio técnico oferecido a esta pesquisa e pelo incentivo durante o período em que passei por lá.

À Camila, pelo carinho comigo e pelo companhia nesses últimos quatro anos. Tenho certeza de que o futuro nos reserva boas surpresas!

Por fim, gostaria de agradecer a Deus por colocar tantas pessoas boas na minha vida. Muito obrigado!



*“A ciência não pode prever o que vai acontecer.  
Só pode prever a probabilidade de algo acontecer.”*  
*César Lattes*





# Resumo

Na modelagem da dinâmica de estruturas, um modelo mecânico-matemático é construído com a finalidade de determinar o comportamento de estruturas reais. Nesse processo, duas fontes de incertezas podem ser destacadas: as limitações dos processos de manufatura que, por mais complexos e modernos, não podem eliminar as variabilidades de produção, e a incapacidade de representar matematicamente processos físicos complexos de maneira exata. Esta dissertação tem como principal objetivo a determinação numérica do comportamento dinâmico de um tubo de descarga acoplado à carcaça de um compressor hermético considerando as incertezas do modelo. Inicialmente, é construído um modelo linear determinístico para cada componente estrutural e, a partir desse modelo médio, desenvolve-se um modelo probabilístico não paramétrico. Essa abordagem estocástica, bastante recente, encontra-se amparada no princípio de máxima entropia, levando em conta as restrições físicas de um sistema dinâmico como vínculos em um problema de otimização. Em uma primeira análise, a resposta dinâmica de cada componente é avaliada separadamente, enquanto a dispersão do modelo de cada estrutura, controlada por três parâmetros, é determinada utilizando resultados experimentais. Por fim, a determinação do comportamento dinâmico do tubo de descarga acoplado à carcaça é calculada através de um método de síntese modal de componentes. Essa metodologia permite acessar a resposta robusta do sistema quando as incertezas não estão distribuídas de maneira homogênea no modelo. Os resultados mostram que a determinação da velocidade quadrática média na superfície da carcaça do compressor, quando excitada através de uma extremidade do tubo de descarga, é bastante sensível às incertezas no modelo numérico do tubo. Esse resultado sugere que a construção de modelos mais representativos para o tubo de descarga é fundamental para a obtenção de modelos mais fiéis às respostas reais do sistema. Além disso, a aplicação da abordagem probabilística não paramétrica juntamente com o método de síntese modal de componentes mostrou-se uma ferramenta interessante para o projeto de novos tubos de descarga, uma vez que tal metodologia é capaz de considerar as variabilidades do processo de manufatura e, de maneira conjunta, as limitações do modelo numérico utilizado.

**Palavras-chave:** Compressores domésticos, dinâmica linear, modelos probabilísticos, síntese modal de componentes.



# Abstract

During structural modeling process, a mathematical-mechanical model is constructed to determine the dynamical behavior of physical structures. In this process, two sources of uncertainties should be highlighted: the limitations of the manufacturing processes, even complex and modern ones, which cannot eliminate production variabilities, and the incapability to represent, mathematically, complex physical processes accurately. The main purpose of this master thesis is to evaluate the dynamical behavior of a discharge pipe coupled with an hermetic compressor shell considering the uncertainties of the numerical model. Firstly, a linear deterministic model is constructed for each compressor's component and, from this mean model, a nonparametric probabilistic model is implemented. This recent stochastic approach is derived from the maximum entropy principle, which considers the physical properties of the dynamical system as constraints in an optimization problem. In a first analysis, the dynamical responses from the compressor components are individually analyzed, while the dispersion of each numerical model, controlled by three parameters, are fitted by using experimental results. Finally, the dynamical responses of the discharge pipe coupled with the compressor's shell are calculated according to a component mode synthesis method, which is able to represent nonhomogeneous uncertainties in the numerical model. The obtained result shows that the averaged square velocity on the housing surface, due to an excitation on the discharge pipe, is very sensitive with respect to the tube model uncertainties. This result suggests that a more representative discharge pipe model is very important to achieve a better model for the coupled system. Moreover, the nonparametric probabilistic approach, together with the component mode synthesis method, seems to be an interesting tool to design new discharge pipes considering the limitations of the numerical model as well as the variability of the manufacturing processes.

**Keywords:** Household compressors, linear dynamics, probabilistic models, component mode synthesis.



# Lista de ilustrações

Figura 1	– Respostas de latas de cerveja a uma excitação acústica (FAHY, 2000). A parte superior da imagem indica a amplitude das respostas, enquanto a parte inferior apresenta os espectros de fase. . . . .	36
Figura 2	– Respostas de 99 carros nominalmente idênticos, à direita, comparadas a um ensaio de repetitividade, à esquerda (KOMPELLA; BERNHARD, 1993). . . . .	37
Figura 3	– Aceleração de 20 carcaças de compressores, nominalmente idênticas, sujeitas aos mesmos testes (DOI, 2011). . . . .	38
Figura 4	– Sistemas projetado, real e modelado (SOIZE, 2005a; SOIZE, 2008; SOIZE, 2012). . . . .	39
Figura 5	– Variável real aleatória como uma função $X: W \rightarrow \mathbb{R}$ (LIMA, 2011; SAMPAIO; LIMA, 2012). . . . .	41
Figura 6	– Representação de um processo estocástico. . . . .	44
Figura 7	– Mapeamento de respostas, dependente de variáveis aleatórias, através do método de Monte Carlo (SCHUËLLER, 2007). . . . .	45
Figura 8	– Malha do sistema propulsor, à esquerda, juntamente com a malha do satélite, à direita (SCHUËLLER, 2007). . . . .	49
Figura 9	– Malha da estrutura veicular, à esquerda, sem a cavidade acústica. À direita, são apresentadas as respostas dos 20 veículos medidos (linhas cinzas), a respectiva resposta obtida com o modelo médio (linha preta tracejada), a resposta média (linha preta fina) e os limites de confiança de 96% (linhas pretas) obtidos com o modelo probabilístico não paramétrico (DURAND; SOIZE; GAGLIARDINI, 2008). . . . .	50
Figura 10	– Geometria da viga, à esquerda, juntamente com seu respectivo elemento, à direita. . . . .	51
Figura 11	– Espectro de aceleração $\{a_L^v(\omega)\}$ calculado utilizando-se o modelo médio. . . . .	59

Figura 12 – À esquerda, Eq. 3.22 calculada variando-se $s_v$ para $m_v=42$ e, à direita, a mesma função calculada alterando-se $m_v$ para $s_v=1200$ . Nos dois gráficos os resultados em preto ilustram os valores calculados utilizando-se o modelo paramétrico e em cinza o não paramétrico.	60
Figura 13 – Função densidade de probabilidade gama (linha preta) comparada à gaussiana (linha cinza) para $\delta_H^v=0,01$ , à esquerda, e $\delta_H^v=0,20$ , à direita.	61
Figura 14 – Espectro de aceleração do modelo médio, em preto, juntamente com as respectivas regiões de 99% de confiança, em cinza, calculadas utilizando-se $\delta_H^v$ iguais a 0,01, 0,02, 0,05 e 0,10.	62
Figura 15 – Função densidade de probabilidade discreta da primeira ( $f_1^v$ ) e sexta ( $f_6^v$ ) frequências naturais (preto), estimadas utilizando-se os resultados obtidos com a simulação de Monte Carlo, comparada às funções contínuas exatas (cinza), calculadas utilizando-se o método da transformação de funções densidade de probabilidades.	63
Figura 16 – Espectro de aceleração do modelo médio, em preto, juntamente com as respectivas regiões de 99% de confiança, em cinza, calculadas utilizando-se $\delta_M^v = \delta_C^v = \delta_K^v$ iguais a 0,10, 0,20, 0,30 e 0,40.	64
Figura 17 – Resposta do modelo determinístico, à esquerda, confrontada com as respostas do modelo probabilístico paramétrico (cinza escuro) e não paramétrico (cinza claro), à direita.	65
Figura 18 – Malha da viga analisada utilizando-se a teoria dos sólidos.	67
Figura 19 – Acelerâncias calculadas utilizando-se o modelo médio Euler-Bernoulli, em preto, e as 100 respostas utilizando a teoria elástica dos sólidos, em cinza. Os quatro espectros distintos representam as posições $3L^v/21$ (acima, esquerda), $10L^v/21$ (acima, direita), $16L^v/21$ (abaixo, esquerda) e a resposta pontual em $L^v$ (abaixo, direita).	68

Figura 20 – Respostas calculadas com base no modelo Euler-Bernoulli, em preto tracejado, juntamente com 100 respostas utilizando-se a teoria tridimensional, em cinza. A região em cinza claro delimitada pelas linhas pretas indica o envelope de 99% de confiança obtido com o modelo probabilístico não paramétrico utilizando-se os valores ótimos $\delta_M^v$ , $\delta_C^v$ e $\delta_K^v$ . . . . .	71
Figura 21 – Vista isométrica do tubo de descarga analisado. . . . .	74
Figura 22 – Vista isométrica de duas malhas obtidas com o modelo paramétrico. Os pontos ilustram a localização dos nós das malhas, enquanto o quadrado e as cruces indicam as posições do conector e dos engastes, respectivamente. . . . .	76
Figura 23 – Espectro de aceleração $\{a_{(b)}^t(\omega)\}$ calculado utilizando-se o modelo médio. . . . .	77
Figura 24 – À esquerda, Eq. 4.2 calculada variando-se $s_t$ para $m_t=100$ e, à direita, a mesma função calculada alterando-se $m_t$ para $s_t=1200$ . Os resultados em preto ilustram os valores calculados utilizando-se o modelo paramétrico e em cinza o não paramétrico. . . . .	78
Figura 25 – Espectro de aceleração do modelo médio, em preto, juntamente com as respectivas regiões de 99% de confiança, em cinza, calculadas utilizando-se os valores de $\delta_k^t$ iguais a 0,005, 0,01, 0,015 e 0,02 e $\sigma_k^t$ iguais a 0,5°, 1,0°, 1,5° e 2,0°. . . . .	80
Figura 26 – Mapa de correlação entre os parâmetros do modelo estocástico e as frequências naturais da estrutura. . . . .	81
Figura 27 – Espectro de aceleração do modelo médio, em preto, juntamente com as respectivas regiões de 99% de confiança, em cinza, calculadas utilizando-se $\delta_M^t = \delta_C^t = \delta_K^t$ e iguais a 0,05, 0,10, 0,15 e 0,20. . . . .	82
Figura 28 – Configuração adotada durante os ensaios experimentais. As cruces pretas indicam a região de engaste, enquanto as cruces cinzas 1 e 2 identificam, respectivamente, as posições de excitação e medição da resposta. . . . .	83
Figura 29 – À esquerda, gabarito utilizado para a fixação do tubo de descarga e, à direita, gabarito fixado ao bloco de concreto. . . . .	84

Figura 30 – Na parte de cima, em cinza, identificam-se as respostas do ensaio de repetitividade e, em preto tracejado, resposta do modelo médio. Na parte de baixo apresentam-se as 15 funções coerência obtidas nos testes. . . . . 85

Figura 31 – Na parte de cima, em cinza, identificam-se as respostas das 41 estruturas ensaiadas e, em preto tracejado, resposta do modelo médio. Na parte de baixo apresentam-se as 41 funções coerência obtidas nos testes. . . . . 86

Figura 32 – Áreas a serem minimizadas durante o processo de ajuste de modelo. . . . . 88

Figura 33 – Modelo estocástico otimizado com  $C_2 = 0$  e  $C_1 \neq 0$ . A linha preta tracejada identifica o resultado do modelo médio, as linhas em cinza escuro apresentam as respostas experimentais, enquanto o envelope delimitado pelas linhas pretas contínuas mostra a região de 99% de confiança. A parte de baixo do gráfico apresenta as funções coerência obtidas nos experimentos. 89

Figura 34 – Modelo estocástico otimizado com  $C_1 = C_2 \neq 0$ . As configurações utilizadas para a plotagem são as mesmas da Fig. 33. . . . . 90

Figura 35 – Modelo estocástico otimizado com  $C_1 = 2C_2 \neq 0$ . As configurações utilizadas para a plotagem são as mesmas da Fig. 33. . . . . 91

Figura 36 – Geometria da carcaça analisada. . . . . 93

Figura 37 – Malha da carcaça em elementos de placa juntamente com a malha do passador em elementos de viga. . . 94

Figura 38 – Respostas estruturais  $\{a_1^c(\omega)\}$  e  $\{a_2^c(\omega)\}$ , respectivamente nos Pontos 1 e 2, calculadas com o modelo médio. . . . . 97

Figura 39 – À esquerda, Eq. 5.4 calculada variando-se  $s_c$  para  $m_c=500$  e, à direita, a mesma função calculada alterando-se  $m_c$  para  $s_c=1000$ . . . . . 98

Figura 40 – Espectros de aceleração do modelo médio, em preto, juntamente com as regiões de 99% de confiança, em cinza, obtidas com o modelo não paramétrico admitindo-se  $\delta_M^c=\delta_C^c=\delta_K^c=0,05$  e  $\delta_M^c=\delta_C^c=\delta_K^c=0,20$ . 99

Figura 41 – Fotos de uma configuração típica de montagem dos experimentos durante o ensaio de impactação das carcaças analisadas. . . . . 100



Figura 42 – Espectros de aceleração obtidos em um ensaio de repetitividade, em cinza, juntamente com as respectivas respostas do modelo médio, em preto, respectivamente para os Pontos 1 e 2. As curvas abaixo de cada gráfico, em cinza, apresentam as funções coerência obtidas durante os experimentos. . . . .	101
Figura 43 – Espectros de aceleração de 12 carcaças distintas, em cinza, juntamente com as respectivas respostas do modelo médio, em preto, respectivamente para os Pontos 1 e 2. As curvas abaixo de cada gráfico, em cinza, apresentam as respostas obtidas para as funções coerência durante os experimentos. . . . .	102
Figura 44 – Espectros de aceleração obtidos com o modelo médio, em preto tracejado, juntamente com as respostas experimentais, em cinza escuro. A região em cinza claro delimitada pelas linhas pretas indicam os envelopes de 99% de confiança obtidos com o modelo probabilístico não paramétrico. . . . .	104
Figura 45 – Subestrutura $S^1$ acoplada à subestrutura $S^2$ através da interface $\Sigma$ . . . . .	107
Figura 46 – Base da carcaça acoplada ao tubo de descarga através do tubo passador. . . . .	114
Figura 47 – Resposta obtida com o método de Craig-Bampton, em cinza, comparada ao espectro do modelo completo, em preto. . . . .	115
Figura 48 – Gráfico da Eq. 6.19 avaliada para diferentes valores de $s_{CB}$ . . . . .	117
Figura 49 – Espectro de aceleração na extremidade do tubo de descarga ( $\{a_1^t(\omega)\}$ ), na interface ( $\{a_2^\Sigma(\omega)\}$ ) e na carcaça ( $\{a_3^c(\omega)\}$ ). As linhas pretas indicam a resposta do modelo médio e o envelope cinza identifica a região de 99% de confiança do modelo estocástico calculadas utilizando uma abordagem incerta para o tubo e uma determinística para a carcaça. . . . .	118
Figura 50 – Espectro de aceleração na extremidade do tubo de descarga ( $\{a_1^t(\omega)\}$ ), na interface ( $\{a_2^\Sigma(\omega)\}$ ) e na carcaça ( $\{a_3^c(\omega)\}$ ). As linhas pretas indicam a resposta do modelo médio e o envelope cinza identifica a região de 99% de confiança do modelo estocástico calculadas utilizando uma abordagem determinística para o tubo e uma incerta para a carcaça. . . . .	119

Figura 51 – Envelope de 99% de confiança referente à velocidade quadrática média da carcaça, em cinza, comparada à respectiva resposta do modelo médio, em preto. Os resultados foram calculados admitindo-se  $\delta_M^t = \delta_C^t = \delta_K^t = 0,1$  e um modelo determinístico para a carcaça do compressor. . . . . 120

Figura 52 – Envelope de 99% de confiança referente à velocidade quadrática média da carcaça, em cinza, comparada à respectiva resposta do modelo médio, em preto. Os resultados foram calculados admitindo-se  $\delta_M^c = \delta_C^c = \delta_K^c = 0,1$  e um modelo determinístico para o tubo de descarga do compressor. . . . . 121

Figura 53 – Envelope de 99% de confiança referente à velocidade quadrática média da carcaça, em cinza, comparada à respectiva resposta do modelo médio, em preto. Os resultados foram calculados admitindo-se  $\delta_M^t = 0,17, \delta_C^t = 0,31, \delta_K^t = 0,09, \delta_M^c = 0,05, \delta_C^c = 0,46$  e  $\delta_K^c = 0,08$ . . . . . 122

Figura 54 – Configuração estrutural sugerida para a investigação do tubo de descarga acoplado à carcaça. . . . . 127

Figura 55 – Sistema massa-mola. . . . . 141

Figura 56 – Função distribuição de probabilidade. . . . . 143

Figura 57 – Sistema massa-mola com cinco graus de liberdade. Na parte de baixo identificam-se as duas subestruturas  $S^1$  e  $S^2$ , admitindo-se que o acoplamento dos dois componentes é feito através da massa  $m_3$ . . . . . 147

Figura 58 – Resposta do sistema em  $m_5$  devido à aplicação de uma força unitária em  $m_1$ . A linha preta indica o espectro calculado utilizando o método de Craig-Bampton, enquanto a linha tracejada cinza identifica a solução direta aplicando-se as leis de Newton. . . . . 150

# Nomenclatura

## Abreviações

ABCM Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas

ASME Associação Americana de Engenheiros Mecânicos

FRF Função resposta em frequência

GOE Matrizes gaussianas ortogonais

LVA Laboratório de Vibrações e Acústica

NPS Nível de pressão sonora

NWS Nível de potência sonora

PME Princípio de máxima entropia

## Escalares

$2a$  Comprimento do elemento, [m]

$\bar{x}$  Valor médio de  $x$

$A$  Área da seção retangular, [m<sup>2</sup>]

$b$  Dimensão da base, [m]

$C$  Constante de normalização

$c$  Ponto de massa, [kg]

$d$  Diâmetro externo, [m]

$E$  Módulo de elasticidade, [Pa]

$h$  Dimensão da altura, [m]

$I$  Momento de inércia de segunda ordem, [m<sup>4</sup>]

$k$  Índice da realização gerada com o método de Monte Carlo

$L$  Comprimento, [m]

$m$	Dimensão do modelo reduzido
$n$	Dimensão de uma matriz qualquer
$p$	Número de estruturas ensaiadas
$p$	Parâmetro determinístico de um modelo
$S$	Entropia de Shannon
$s$	Número de simulações de Monte Carlo
$t$	Espessura, [m]
$t$	Parâmetro temporal, [s]
$x$	Valor real qualquer

### **Letras Gregas**

$\delta$	Parâmetro de dispersão
$\Gamma$	Função gama
$\gamma^2$	Função coerência
$\lambda$	Multiplicador de Lagrange
$\mu$	Média
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\omega$	Frequência angular, [rad/s]
$\rho$	Densidade, [kg/m <sup>3</sup> ]
$\Sigma$	Interface entre duas subestruturas
$\sigma$	Desvio padrão
$\xi$	Amortecimento modal

### **Matrizes**

$[\hat{A}]$	Matriz $[A]$ na base modal experimental
$[C]$	Matriz de amortecimento aleatória, [N.s/m, N.s.m]
$[G]$	Matriz aleatória normalizada

$[K]$	Matriz de rigidez aleatória, [N/m,N.m]
$[M]$	Matriz de massa aleatória, [kg, kg.m <sup>2</sup> ]
$[S]$	Matriz obtida em uma decomposição por valor singular
$[V]$	Matriz obtida em uma decomposição por valor singular
$[\Phi]$	Matriz de formas modais passíveis de medição
$[\Psi]$	Matriz de formas modais
$[A]$	Qualquer matriz determinística $[M]$ , $[C]$ ou $[K]$
$[C]$	Matriz de amortecimento determinística, [N.s/m, N.s.m]
$[I]$	Matriz identidade
$[K]$	Matriz de rigidez determinística, [N/m, N.m]
$[L]$	Matriz obtida de uma fatorização
$[M]$	Matriz de massa determinística, [kg, kg.m]
$[S]$	Matriz cujas colunas identificam os modos estáticos da estrutura, [m,rad]
$[T]$	Matriz mudança de base vetorial
$[A]$	Qualquer matriz aleatória $[M]$ , $[C]$ ou $[K]$
$[X]$	Matriz aleatória qualquer

### Outras Definições

$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$\mathbb{1}$	Função degrau de Heaviside
$B$	Faixa de frequência de análise, [Hz]
$\mathbb{M}$	Conjunto das matrizes reais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathcal{C}$	Conjunto suporte de uma função
$\mathcal{L}$	Lagrangiana de uma função
$P\{X \leq x\}$	Probabilidade de $X \leq x$

## Letras Romanas

$F$	Função distribuição de probabilidades
$f$	Excitações externas
$g$	Conjunto de parâmetros de um modelo
$H$	Variável aleatória para a altura, [m]
$j$	Unidade imaginária
$P$	Variável aleatória de p
$p_X$	Função densidade de probabilidades
$S$	Subestruturas de um modelo
$U$	Variáveis gaussianas com média nula e variância unitária
$u$	Respostas do sistema
$V$	Variáveis aleatórias com densidade de probabilidade gama
$W$	Espaço amostral
$w$	Ponto de um espaço amostral
$X$	Variável real aleatória
Conv	Função convergência

## Subscrito

$\mathbb{M}^+$	Matrizes reais, simétricas e positivo definidas
(b)	Ponto (b)
np	Modelo não paramétrico
$\mathbf{X}$	Matriz aleatória [ $\mathbf{X}$ ]
$A$	Matriz [ $A$ ]
$C$	Matriz de amortecimento
$c$	Coordenadas na interface
$CB$	Modelo de Craig-Bampton

$cc$	Termos referentes às coordenadas de interface do sistema
$e$	Elementar
$G$	Matriz [G]
$H^v$	Altura da viga
$i$	Coordenadas internas
$ic$	Termos referentes às coordenadas internas e de interface do sistema
$ii$	Termos referentes às coordenadas internas do sistema
$K$	Matriz de rigidez
$k$	$k$ -ésimo valor
$L$	Posição $L$
$M$	Matriz de massa
$m_t$	Dimensão das coordenadas modais do modelo do tubo
$m_v$	Dimensão das coordenadas modais do modelo da viga
$n_c$	Dimensão das coordenadas globais do modelo da carcaça
$n_t$	Dimensão das coordenadas globais do modelo do tubo
$n_v$	Dimensão das coordenadas globais do modelo da viga
$P$	Parâmetro do modelo
$q$	$q$ -ésimo termo
$v$	Viga
$X$	Variável aleatória $X$
$\mathbf{p}$	Modelo paramétrico

### **Sobrescrito**

+	Limite superior do envelope de confiança
-	Limite inferior do envelope de confiança
$approx$	Aproximado

$c$	Carcaça
$exp$	Experimental
$mod$	Modelado
$r$	Termo referente à subestrutura 1 ou 2
$t$	Tubo de descarga
$v$	Viga
GOE	Matrizes gaussianas ortogonais

### **Vetores**

$\{\mathbf{u}\}$	Processo estocástico associada à resposta do sistema, [m, rad]
$\{\phi\}$	Vetor de forma modal
$\{a\}$	Vetor de acelerações do modelo, [m/s <sup>2</sup> ,rad/s <sup>2</sup> ]
$\{f\}$	Vetor de excitações externas, [N, N.m]
$\{P\}$	Vetor de parâmetros aleatórios
$\{p\}$	Vetor de parâmetros
$\{q\}$	Vetor de coordenadas modais
$\{r\}$	Vetor com os parâmetros de dispersão das matrizes aleatórias
$\{u\}$	Vetor de deslocamentos de liberdade do modelo, [m, rad]

### **Operadores**

$\mathcal{E}\{X\}$	Esperança matemática de X
$\text{tr}\{\{X\}\}$	Traço da matriz $\{\{X\}\}$



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>31</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b>	<b>32</b>
1.1.1	Objetivo geral	32
1.1.2	Objetivos específicos	32
<b>1.2</b>	<b>Estrutura da dissertação</b>	<b>32</b>
<b>2</b>	<b>INCERTEZAS EM VIBRAÇÕES E ACÚSTICA</b>	<b>35</b>
<b>2.1</b>	<b>Variabilidade em resultados experimentais</b>	<b>35</b>
<b>2.2</b>	<b>Erros e incertezas em um modelo médio</b>	<b>38</b>
<b>2.3</b>	<b>Conceitos matemáticos básicos</b>	<b>41</b>
2.3.1	Variáveis aleatórias reais e contínuas	41
2.3.2	Matrizes aleatórias reais e contínuas	42
2.3.3	Processos estocásticos	43
2.3.4	Método de Monte Carlo	44
2.3.5	Princípio de máxima entropia (PME)	45
<b>2.4</b>	<b>Abordagem via métodos probabilísticos</b>	<b>47</b>
2.4.1	Abordagem probabilística paramétrica	47
2.4.2	Abordagem probabilística não paramétrica	47
2.4.3	Resultados publicados	48
<b>3</b>	<b>VIGA EULER-BERNOULLI</b>	<b>51</b>
<b>3.1</b>	<b>Modelo médio</b>	<b>51</b>
3.1.1	Modelo reduzido	53
<b>3.2</b>	<b>Modelos estocásticos</b>	<b>53</b>
3.2.1	Modelo probabilístico paramétrico	54
3.2.2	Modelo probabilístico não paramétrico	55
<b>3.3</b>	<b>Resultados simulados</b>	<b>58</b>
3.3.1	Resultado do modelo médio	58
3.3.2	Convergência quadrática média	59
3.3.3	Resultados obtidos com o modelo paramétrico	61
3.3.4	Resultados obtidos com o modelo não paramétrico	63
<b>3.4</b>	<b>Diferenças entre as duas abordagens</b>	<b>65</b>
<b>3.5</b>	<b>Determinação dos parâmetros <math>\delta_M^v</math>, <math>\delta_C^v</math> e <math>\delta_K^v</math> através de análise modal experimental</b>	<b>66</b>
3.5.1	Definição do problema	67
3.5.2	Cálculo dos parâmetros	69

3.5.3	Resultados simulados . . . . .	70
<b>3.6</b>	<b>Síntese do capítulo . . . . .</b>	<b>71</b>
<b>4</b>	<b>TUBO DE DESCARGA . . . . .</b>	<b>73</b>
<b>4.1</b>	<b>Modelo médio . . . . .</b>	<b>73</b>
4.1.1	Modelo reduzido . . . . .	74
<b>4.2</b>	<b>Modelos estocásticos . . . . .</b>	<b>75</b>
4.2.1	Modelo probabilístico paramétrico . . . . .	75
4.2.2	Modelo probabilístico não paramétrico . . . . .	76
<b>4.3</b>	<b>Resultados simulados . . . . .</b>	<b>77</b>
4.3.1	Resultados do modelo médio . . . . .	77
4.3.2	Convergência quadrática média . . . . .	78
4.3.3	Resultados obtidos com o modelo paramétrico . . . . .	79
4.3.4	Resultados obtidos com o modelo não paramétrico . . . . .	81
<b>4.4</b>	<b>Resultados experimentais . . . . .</b>	<b>83</b>
<b>4.5</b>	<b>Ajuste do modelo não paramétrico . . . . .</b>	<b>86</b>
<b>4.6</b>	<b>Síntese do capítulo . . . . .</b>	<b>91</b>
<b>5</b>	<b>CARÇAÇA . . . . .</b>	<b>93</b>
<b>5.1</b>	<b>Modelo médio . . . . .</b>	<b>93</b>
5.1.1	Modelo reduzido . . . . .	95
<b>5.2</b>	<b>Modelo estocástico . . . . .</b>	<b>95</b>
5.2.1	Modelo probabilístico não paramétrico . . . . .	95
<b>5.3</b>	<b>Resultados simulados . . . . .</b>	<b>96</b>
5.3.1	Resultados do modelo médio . . . . .	96
5.3.2	Análise de convergência . . . . .	97
5.3.3	Resultados obtidos com o modelo não paramétrico . . . . .	98
<b>5.4</b>	<b>Resultados experimentais . . . . .</b>	<b>100</b>
<b>5.5</b>	<b>Ajuste do modelo não paramétrico . . . . .</b>	<b>102</b>
<b>5.6</b>	<b>Síntese do capítulo . . . . .</b>	<b>104</b>
<b>6</b>	<b>ACOPLAMENTO ATRAVÉS DE SÍNTESE MODAL DE COMPONENTES . . . . .</b>	<b>107</b>
<b>6.1</b>	<b>Método de Craig-Bampton . . . . .</b>	<b>107</b>
6.1.1	Método de Craig-Bampton probabilístico não paramétrico	111
<b>6.2</b>	<b>Modelo numérico para o tubo de descarga acoplado à carcaça . . . . .</b>	<b>114</b>
6.2.1	Resultado do modelo médio . . . . .	115
6.2.2	Convergência quadrática média . . . . .	116
6.2.3	Resultados do modelo estocástico . . . . .	116
<b>6.3</b>	<b>Síntese do capítulo . . . . .</b>	<b>122</b>

7	<b>CONCLUSÕES</b> . . . . .	125
7.1	Sugestões para trabalhos futuros . . . . .	126
	Referências . . . . .	129
	<b>APÊNDICES</b>	<b>137</b>
	APÊNDICE A – EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO PRINCÍPIO DE MÁXIMA ENTRO- PIA . . . . .	139
	APÊNDICE B – RESTRIÇÕES FÍSICAS EM UM SISTEMA DINÂMICO SIMPLES	141
	APÊNDICE C – REGIÕES DE CONFIANÇA VIA MÉTODO DOS QUANTIS . . . . .	143
	APÊNDICE D – TRANSFORMAÇÃO DE FUNÇÕES DENSIDADE DE PROBABILIDA- DES . . . . .	145
	APÊNDICE E – EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO MÉTODO DE CRAIG-BAMPTON	147
E.1	Subsistema 1 . . . . .	147
E.2	Subsistema 2 . . . . .	149
E.3	Resposta do sistema acoplado . . . . .	149



# 1 Introdução

Este documento tem como principal objetivo a quantificação de incertezas em modelos numéricos de componentes estruturais utilizados em compressores herméticos. Atualmente, os projetos de muitos produtos na indústria de refrigeração são baseados em modelos numéricos e muitas decisões são tomadas levando em conta resultados obtidos em simulações. Porém, tais investigações costumam ser feitas utilizando modelos determinísticos que, por sua vez, não são capazes de considerar as variabilidades dos processos de manufatura e as limitações do modelo físico adotado. Desse modo, vista a complexidade do assunto, este trabalho deve ser interpretado como o primeiro passo de um projeto que, para se obter resultados mais próximos às aplicações industriais, deve ser estendido por um período mais longo. Esse é a realidade sugerida por GAGLIARDINI (2014), quando o autor afirma que, para obter modelos probabilísticos para os produtos da montadora de automóveis *Peugeot-Citröen*, a empresa necessitou de uma parceria de mais de dez anos com os pesquisadores de uma universidade francesa.

Os estudos a respeito da quantificação de incertezas em modelos numéricos se intensificaram nos últimos anos. O resultado disso é que, atualmente, muitas metodologias encontram-se disponíveis a respeito do problema e várias revistas passaram a dedicar um espaço restrito ao tema. No entanto, tais avanços encontram sérias dificuldades de inserção em ambientes industriais por diversos motivos, dentre os quais pode ser destacada a má formação dos engenheiros e cientistas a respeito do tema. Essa realidade fez com que a Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas (ABCM) criasse, no ano de 2008, um comitê exclusivo para o assunto visando, principalmente, a capacitação dos profissionais brasileiros nesta área de atuação (ABCM, 2015). De fato, a quantificação de incertezas em modelos numéricos vem chamando a atenção de organizações de outros países, como é o caso da associação americana de engenheiros mecânicos (*American Association of Mechanical Engineers – ASME*) que criou um comitê similar ao da ABCM para o estudo de incertezas (ASME, 2015).

## 1.1 Objetivos

### 1.1.1 Objetivo geral

O principal objetivo desta dissertação é a construção de um modelo numérico para o tubo de descarga acoplado à carcaça de um compressor hermético típico levando em conta a variabilidade do processo de manufatura e as incertezas do modelo proposto.

### 1.1.2 Objetivos específicos

- Investigar as principais propostas de modelagens probabilísticas para baixa e média frequências disponíveis na literatura.
- Avaliar duas abordagens probabilísticas distintas para a aplicação em um problema de flexão de vigas com incertezas no modelo.
- Construir um modelo numérico para um tubo de descarga de um compressor hermético levando em conta as limitações do modelo e as variabilidades observadas em ensaios dinâmicos.
- Construir um modelo numérico similar ao anterior para a carcaça de um compressor hermético típico.
- Prever a resposta dos dois componentes, quando acoplados, utilizando os modelos incertos construídos anteriormente.

## 1.2 Estrutura da dissertação

Esse documento encontra-se dividido nos seguintes capítulos:

- Capítulo 2: Revisão bibliográfica dos principais trabalhos envolvendo quantificação de incertezas em modelos vibroacústicos. Além disso, apresentam-se algumas ferramentas matemáticas necessárias para o desenvolvimento de modelos numéricos robustos e discutem-se duas metodologias distintas de modelagem computacional.
- Capítulo 3: Desenvolvem-se dois modelos probabilísticos aplicados a um problema de flexão de viga. Nesse capítulo discutem-se as principais diferenças entre os dois modelos propostos e, por fim, apresenta-se uma metodologia para a solução de problemas inversos utilizando resultados obtidos em ensaios de análise modal experimental.

- Capítulo 4: Desenvolvem-se dois modelos probabilísticos para o tubo de descarga de um compressor típico. Desse modo, discutem-se os objetivos de cada modelo e, por fim, ajusta-se um dos modelos probabilísticos definindo-se um problema de mínimos quadrados com base em resultados experimentais.
- Capítulo 5: Aplicam-se os procedimentos da seção anterior visando a construção de um modelo robusto para a carcaça de um compressor hermético típico. Além disso, esse capítulo testa o procedimento de ajuste do modelo probabilístico descrito anteriormente em um problema dinâmico distinto.
- Capítulo 6: Por fim, esta seção destina-se à determinação do comportamento dinâmico do tubo de descarga acoplado à carcaça de um compressor hermético típico levando em conta as incertezas do modelo. Desse modo, apresentam-se as fundamentações teóricas necessárias e, então, avalia-se a resposta dinâmica do sistema para diferentes configurações.
- Capítulo 7: Nessa seção apresentam-se os principais resultados obtidos nesta dissertação e, ainda, discutem-se algumas sugestões para trabalhos futuros.





## 2 Incertezas em vibrações e acústica

A fabricação de qualquer produto apresenta variabilidade em relação às condições nominais de projeto. Espera-se que essa variabilidade não seja grande o suficiente para alterar, de maneira significativa, a funcionalidade do produto. Porém, à medida que o comprimento de onda de vibração diminui, a resposta dinâmica de uma estrutura pode se tornar bastante sensível aos pequenos detalhes (MANOHAR; KEANE, 1994), chegando ao limite em que pequenas diferenças na configuração original levam a respostas estruturais completamente distintas (LEGAULT; LANGLEY; WOODHOUSE, 2012). Desse modo, a limitação de um processo de manufatura pode ser considerada a primeira fonte de incertezas durante a construção de um modelo mecânico-matemático preditivo. Outra fonte de incerteza, bastante significativa em estruturas complexas, deve-se à incapacidade de se representarem processos físicos complexos de maneira exata. Em decorrência disso, os estudos sobre modelagem e quantificação de incertezas foram intensificados nos últimos anos e periódicos inteiros foram dedicados ao assunto (MACE; WORDEN; MANSON, 2005; SCHUËLLER; JENSEN, 2008; BECK; TRINDADE, 2012; BECK; TRINDADE, 2013).

### 2.1 Variabilidade em resultados experimentais

Atualmente, a grande maioria dos resultados envolvendo quantificação de incertezas é baseada em modelos analíticos e simulações. De acordo com ADHIKARI et al. (2009), o número de resultados envolvendo análises experimentais ainda é baixo devido às dificuldades em: (1) obter um grande número de amostras de determinados produtos, (2) garantir os recursos necessários para o elevado número de testes, (3) a natureza repetitiva dos procedimentos experimentais necessários e (4) garantir que a dispersão observada nos resultados é exclusiva da variabilidade dos produtos. Porém, estas dificuldades não impossibilitaram os estudos a respeito de modelagem de incertezas, uma vez que algumas metodologias mais recentes (SOIZE, 2013) diferem bastante em relação às técnicas mais antigas (IBRAHIM, 1987).

Dentre os resultados experimentais disponíveis na literatura, apresenta-se o resultado de Fahy (FAHY, 2000), cujo objetivo era determinar experimentalmente a variabilidade no desempenho dinâmico de estru-

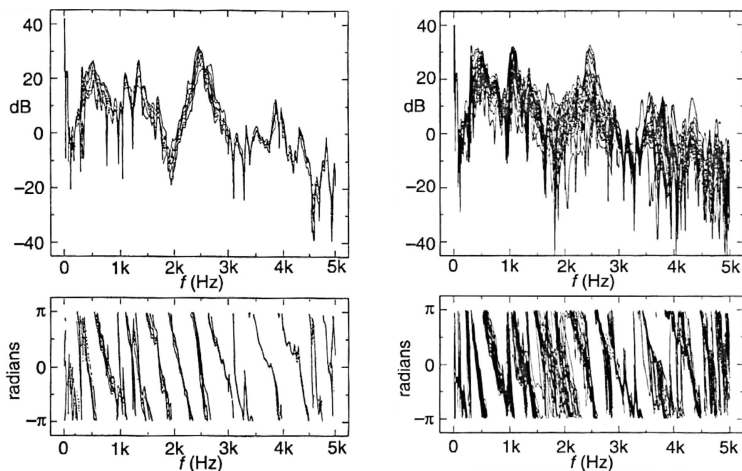


Figura 1 – Respostas de latas de cerveja a uma excitação acústica (FAHY, 2000). A parte superior da imagem indica a amplitude das respostas, enquanto a parte inferior apresenta os espectros de fase.

turas simples. Desse modo, mediram-se as respostas estruturais de 41 latas de cerveja, nominalmente idênticas, sujeitas à mesma excitação acústica. A Fig. 1 apresenta os resultados das funções resposta em frequência (FRFs) da população medida, à direita, e também um ensaio de repetitividade, à esquerda. A partir da Fig. 1 se comprova que a dispersão nas FRFs das 41 latas é maior comparada ao ensaio de repetitividade. Esse resultado confirma que mesmo estruturas, do ponto de vista constitutivo, bastante simples, podem apresentar variabilidade significativa no comportamento dinâmico.

Para avaliar as variações no desempenho dinâmico de estruturas mais complexas, KOMPELLA; BERNHARD (1993) realizaram uma série de medições em veículos, nominalmente idênticos, sujeitos às mesmas excitações estruturais e acústicas.

A Fig. 2 ilustra um dos resultados obtidos, onde apresentam-se as FRFs calculadas a partir das medições de força, aplicada por um martelo instrumentado, e do nível de pressão sonora (NPS) no interior de cada veículo. Os resultados à esquerda da imagem indicam os espectros medidos em um ensaio de repetitividade, enquanto o gráfico da direita ilustra as respostas medidas em 99 veículos distintos. As variações

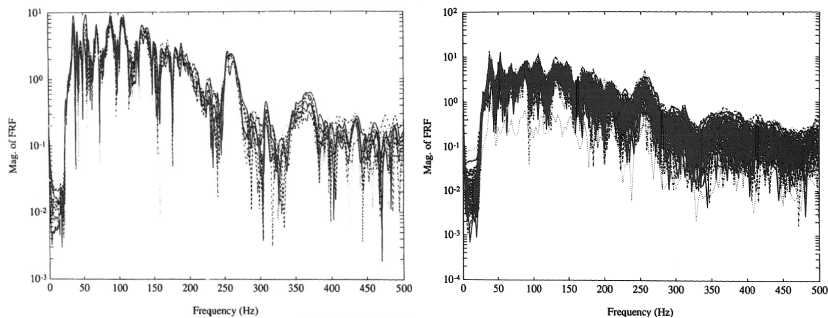


Figura 2 – Respostas de 99 carros nominalmente idênticos, à direita, comparadas a um ensaio de repetitividade, à esquerda (KOMPELLA; BERNHARD, 1993).

observadas podem, em algumas faixas de frequência, ultrapassar os 10 dB. Os resultados sugerem ainda que, em frequências mais elevadas, essa diferença deve ser ainda maior, visto o aumento da sensibilidade das estruturas à medida que seu comprimento de onda de vibração diminui. Uma série de experimentos mais recentes (DURAND; SOIZE; GAGLIARDINI, 2008) indicam que a variabilidade no desempenho estrutural e acústico de automóveis de um mesmo modelo pode ser ainda maior quando acrescentam-se opcionais extras, como ar-condicionado, direção hidráulica, etc. Alguns resultados estruturais, conduzidos pela indústria automotiva utilizando aros de liga leve (HINKE et al., 2009), mostram que pode ser complexa a identificação das diferenças estruturais que levam às variabilidades observadas.

De maneira similar aos dois casos anteriores, DOI (2011) realizou medições de um conjunto de componentes de compressores herméticos utilizados em refrigeradores. A Fig. 3 apresenta, como exemplo, as respostas de aceleração de 20 carcaças de compressores, nominalmente idênticas, obtidas de lotes de fabricação e matrizes de estampagem distintas. As FRFs são determinadas a partir da aplicação de uma força impulsiva, obtida por um martelo instrumentado, e da medição da respectiva aceleração por um acelerômetro. Outro teste conduzido pela indústria de refrigeração (FABRO, 2010) visando avaliar as variações no desempenho acústico de refrigeradores domésticos, nominalmente idênticos, comparou os resultados das medições dos espectros de nível de potência sonora (NWS) de três refrigeradores distintos. As diferenças,

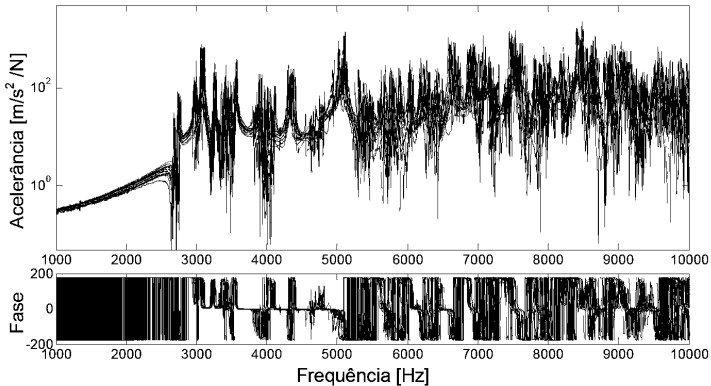


Figura 3 – Acelerância de 20 carcaças de compressores, nominalmente idênticas, sujeitas aos mesmos testes (DOI, 2011).

em faixa de terço de oitava, podem ultrapassar os 5 dB, valor bastante elevado comparado aos níveis de redução desejados atualmente. Os resultados obtidos, bastante similares aos apresentados anteriormente, corroboram a ideia de que as estruturas podem se tornar muito sensíveis em frequências mais elevadas.

Ao se observar o nível de dispersão dos resultados anteriores, identifica-se a dificuldade de se definir uma única FRF que represente o comportamento dinâmico de cada sistema. Em alguns casos, a variabilidade é grande o suficiente para perder, por exemplo, a capacidade de determinação das frequências naturais de cada componente estrutural. Essa variabilidade faz com que a aplicação de métodos determinísticos de modelagem matemática percam significativamente a sua capacidade de predição. Uma forma de considerar as variabilidades observadas consiste no cálculo de regiões de confiança, obtidas a partir da aplicação de métodos de modelagem estocástica, conforme será descrito neste trabalho.

## 2.2 Erros e incertezas em um modelo médio

As definições de erros e incertezas em um modelo, presentes na literatura, podem apresentar pequenas divergências de acordo com as referências (IBRAHIM, 1987; SOIZE, 2005a; VOSE, 2008; LEGAULT; LANGLEY; WOODHOUSE, 2012). As definições utilizadas neste do-

cumento estão de acordo com as definições propostas por Soize em suas publicações mais recentes (SOIZE, 2005a; SOIZE, 2008; SOIZE, 2012). Define-se, primeiramente, um sistema mecânico projetado, como mostrado na Fig. 4. Esse é um sistema mecânico idealizado, definido pela sua geometria, materiais constituintes e condições de operação. A partir do sistema projetado, constroem-se os sistemas reais, oriundos de um processo de manufatura. Conseqüentemente, os sistemas reais diferem do projetado, apresentando variações em suas propriedades mecânicas, geométricas, condições de contorno e operação. Desse modo, todos os sistemas reais podem ser considerados incertos em relação ao sistema projetado.

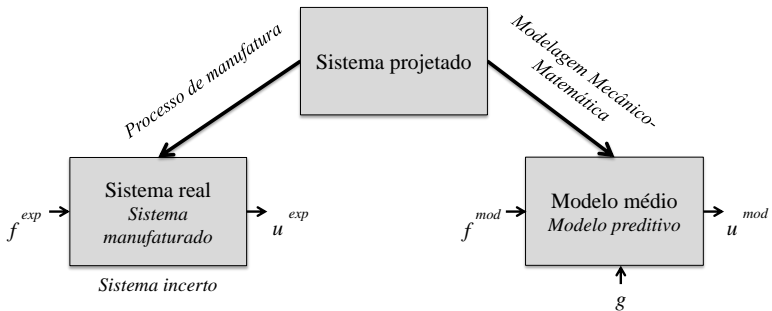


Figura 4 – Sistemas projetado, real e modelado (SOIZE, 2005a; SOIZE, 2008; SOIZE, 2012).

A partir do sistema projetado, descrito anteriormente, constrói-se um modelo médio. A principal finalidade do modelo médio é prever as respostas  $u^{exp}$  dos sistemas reais mediante excitações  $f^{exp}$  dos sistemas reais. Conseqüentemente, esse modelo possui um conjunto de entradas  $f^{mod}$ , representando  $f^{exp}$ , e saídas  $u^{mod}$  representando  $u^{exp}$  (Fig. 4). Além disso, o modelo médio possui um conjunto de parâmetros de entrada  $g$  que representa os dados do problema, como condições de contorno, propriedades geométricas e mecânicas. A partir desse processo de modelagem descrito anteriormente, definem-se como (SOIZE, 2005a):

1. *erros de numéricos*: Os erros de numéricos surgem devido à aproximação de  $u^{mod}$  por uma outra resposta  $u^{aprox}$ . Como exemplo, define-se um problema de valor no contorno, como uma viga engastada sendo excitada por uma força impulsiva concentrada. A

rigor, este é um problema de valor no contorno de dimensão infinita, mas que pode ser aproximado por um problema de dimensão finita utilizando-se o método dos elementos finitos (MEF). Nesse problema, os erros numéricos podem surgir devido à construção de uma malha pouco refinada ou, ainda, à superposição de poucos modos em uma expansão modal. Dessa forma, os erros numéricos podem ser controlados e devem ser reduzidos, chegando ao limite em que  $u^{mod} \simeq u^{approx}$  e, conseqüentemente, os erros sejam pequenos ao ponto de poderem ser negligenciados;

2. *incertezas nos dados* : Definem-se como incertezas nos dados (ou paramétricas) a incapacidade de se representar, de maneira exata, a entrada  $f^{mod}$  e o conjunto de parâmetros  $g$  de um modelo médio. Como exemplo, podem ser consideradas incertas uma excitação pontual, modelando a força provocada por um martelo durante um teste de impactação, as propriedades mecânicas dos materiais constituintes da estrutura, como densidade, módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson;
3. *incertezas no modelo*: As incertezas (ou erros) de modelo são geradas durante o processo de modelagem mecânico-matemático que define o modelo médio. Essas incertezas surgem, geralmente, devido às simplificações adotadas ou ainda por conta da incapacidade de se representar determinados processos físicos de maneira exata. Como exemplo, um cilindro feito de material compósito pode ser modelado como uma viga Euler-Bernoulli, uma viga de Timoshenko, ou ainda utilizando-se a teoria de elasticidade dos sólidos. Outro exemplo de incerteza de modelo está relacionado à definição matemática de junções entre duas estruturas unidas, por exemplo, por parafusos ou rebites;
4. *iredicabilidade do modelo médio*: A predicabilidade do modelo médio pode ser definida como a capacidade de representar as respostas das estruturas reais. Pode-se definir, matematicamente, a predicabilidade do modelo como o inverso da norma  $\| u^{mod} - u^{exp} \|$ . Nesse caso, o modelo médio pode ser considerado um modelo preditivo se, e somente se, a norma anterior for suficientemente pequena. Porém, em casos reais, devido às incertezas nos dados e no modelo, o resultado dessa operação pode ser suficientemente grande, tornando-se necessária a aplicação de alguma metodologia de modelagem de incertezas.

## 2.3 Conceitos matemáticos básicos

Antes de iniciar o processo de modelagem estocástica de sistemas mecânicos, esta seção tem o objetivo de discutir alguns conceitos matemáticos que serão utilizados no decorrer deste trabalho. Desse modo, apresenta-se o conceito de variáveis aleatórias, matrizes aleatórias e processos estocásticos. Além disso, define-se o método de Monte Carlo, uma ferramenta muito utilizada durante a solução de processos estocásticos. Por fim, discute-se o princípio de máxima entropia, uma metodologia capaz de construir o melhor modelo probabilístico com base apenas nas informações disponíveis para o problema.

### 2.3.1 Variáveis aleatórias reais e contínuas

Uma variável aleatória real e contínua é definida, matematicamente, como uma função  $X$  que associa a cada ponto  $w_k$  de um espaço amostral  $W$  uma única variável real  $X(w_k)$  (PAPOULIS, 1991; LIMA, 2011; SAMPAIO; LIMA, 2012). A função  $X$  pode ser vista como a transformação apresentada na Fig. 5, onde  $W$  é o domínio de  $X$  e  $\mathbb{R}$  é o seu contradomínio. Essa definição matemática pode ser interpretada, fisicamente, como um experimento, passível de representação em forma numérica que, após várias realizações idênticas, não é capaz de ser representado por um único número real (SCHERER, 2005).

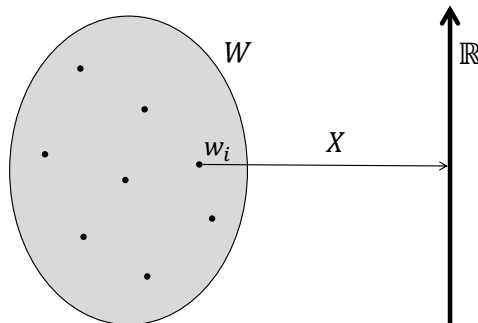


Figura 5 – Variável real aleatória como uma função  $X: W \rightarrow \mathbb{R}$  (LIMA, 2011; SAMPAIO; LIMA, 2012).

Uma variável aleatória  $X$  possui função distribuição de probabili-

dades  $F_X(x)$  definida como

$$F_X(x) = P\{X \leq x\}, \quad (2.1)$$

onde  $P\{X \leq x\}$  representa a probabilidade de  $X$  receber um valor menor ou igual a um valor  $x$  qualquer. Ao seguir a definição anterior, é possível concluir que  $F_X(x)$  é uma função monotonicamente crescente e que possui imagem entre 0 e 1, ou seja,  $F_X(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ . A função  $p_X(x)$ , obtida da derivação

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}, \quad (2.2)$$

é chamada de função densidade de probabilidade. O fato de  $F_X(x)$  ser monotonicamente crescente leva, obrigatoriamente, a  $p_X(x)$  ser uma função estritamente positiva, ou seja,  $p_X(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ .

De posse de  $p_X(x)$  e  $F_X(x)$ , é possível gerar amostras de  $X$ . Antes da popularização dos computadores, a grande maioria dos geradores de variáveis aleatórias eram baseados em circuitos elétricos. Porém, à medida em que as ferramentas computacionais tornaram-se mais acessíveis, gradativamente estes circuitos foram sendo substituídos por ferramentas computacionais. Os algoritmos utilizados atualmente para a geração de variáveis aleatórias podem ser bastante simples, como os baseados em congruência linear para geração de  $p_X(x)$  uniforme, ou mais complexos, como o algoritmo Metropolis-Hastings baseado em cadeias de Markov para a geração de funções  $p_X(x)$  mais complexas (LIMA, 2011; SAMPAIO; LIMA, 2012).

### 2.3.2 Matrizes aleatórias reais e contínuas

Uma matriz aleatória real e contínua é definida, matematicamente, como uma matriz cujos elementos que a compõe são variáveis aleatórias reais e contínuas (MEHTA, 2004). De acordo com ADHIKARI; SARKAR (2009), essa definição pode ser interpretada, fisicamente, como um fenômeno observável, passível de representação em forma matricial e que, após repetidas observações, não é capaz de ser definida através de uma única matriz. O estudo sobre matrizes aleatórias começou no início do século passado, com Wishart, em meados de 1930. Porém, somente a partir de 1950, no contexto da física nuclear, esses estudos foram intensificados (MEHTA, 2004).

De maneira análoga às variáveis aleatórias, uma matriz aleatória  $[\mathbf{X}]$  possui função densidade de probabilidade  $p_{\mathbf{X}}([\mathbf{X}]) : \mathbb{M} \rightarrow [0, \infty)$ , onde  $\mathbb{M}$  representa o conjunto de todas as matrizes reais. De acordo



com SOIZE (2003), as matrizes mais importantes para aplicações físicas são as matrizes gaussianas ortogonais (GOE), cuja função densidade de probabilidade  $p_{\mathbf{X}}^{GOE}$  pode ser escrita, com respeito ao elemento de volume de Lebesgue  $\tilde{d}[X] = 2^{2(n-1)/4} \prod_{1 \leq i < j \leq n} d[X]_{ij}$ , como (SOIZE, 2012)

$$p_{\mathbf{X}}^{GOE}([M]) = C_n^{GOE} \times \exp \left\{ -\frac{(n^{GOE} + 1)}{4\delta^{GOE}} \text{tr}\{[X]^2\} \right\}, \quad (2.3)$$

onde  $C_n^{GOE}$  é uma constante de normalização,  $\text{tr}\{[X]\}$  representa o traço de  $[X]$ ,  $n^{GOE}$  é a ordem da matriz e  $\delta^{GOE}$  é o parâmetro que controla a dispersão das matrizes geradas. De posse de  $p_{\mathbf{X}}^{GOE}$ , é possível demonstrar, matematicamente, que os elementos constituintes das GOEs são variáveis aleatórias gaussianas independentes (SOIZE, 2003), fato que facilita a geração das amostras dessas matrizes. O fato mais importante é que existe uma série de trabalhos que mostram que muitos processos físicos observados podem ser modelados utilizando-se GOEs. Como exemplo, para o caso particular de vibrações, Weaver (WEAVER, 1989; BOHIGAS et al., 1991) demonstrou que as frequências naturais de blocos de alumínio, em frequências próximas a 135 kHz, podem ser representadas pelos autovalores das GOEs. Porém, a grande maioria dos resultados foram validados para faixas de frequência com alta densidade modal, regiões cujas respostas das estruturas são mais sensíveis às incertezas dos dados e do modelo adotado.

### 2.3.3 Processos estocásticos

Um processo estocástico é definido, matematicamente, como uma função que associa a cada elemento  $w_k$  do espaço amostral  $W$  uma função real  $\mathbf{X}$  dependente de um parâmetro temporal  $t$ , ou seja  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(w, t)$  (PAPOULIS, 1991; LIMA, 2011; CATALDO, 2012). Desse modo, um processo estocástico nada mais é do que uma família de variáveis aleatórias dependentes do tempo. A Fig. 6 ilustra a representação de um processo estocástico, onde para cada evento  $w_k$  de  $W$  define-se uma função  $\mathbf{X}(w_k, t)$ . Muitos processos físicos podem ser interpretados como um processo estocástico. Esta visão estatística da física começou a ser construída, aos poucos, com o desenvolvimento da termodinâmica (SAMPAIO; CURSI, 2012). Porém, somente com a consolidação da mecânica quântica, chegou-se à conclusão de que os processos físicos são, em sua essência, estatísticos. De acordo com FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS (1963), a maneira mais precisa de a ciência descrever a natureza deve ser feita em termos de probabilidades. A título de exemplo, o

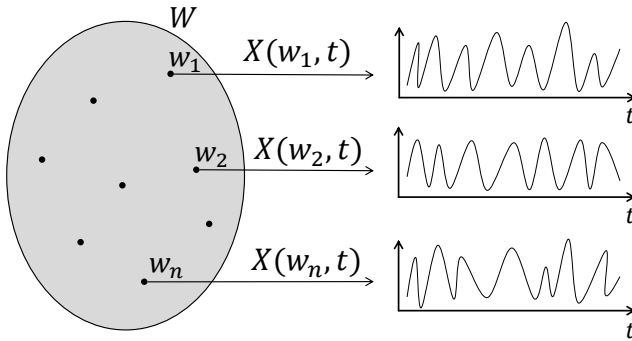


Figura 6 – Representação de um processo estocástico.

movimento de uma partícula em um fluido (movimento browniano) e seu respectivo campo de velocidades são processos estocásticos. Para o caso particular de vibração, as respostas dinâmicas de uma turbina eólica sujeita ao carregamento exercido pelas forças do vento também são processos estocásticos.

### 2.3.4 Método de Monte Carlo

A solução numérica de um processo estocástico pode ser dividida em três partes. Primeiramente, projeta-se um modelo determinístico para o sistema de acordo com os parâmetros e fenômenos físicos envolvidos no processo. Depois disso, cria-se um modelo probabilístico para variáveis do sistema, atribuindo a cada variável incerta uma respectiva função densidade de probabilidade. Por fim, geram-se amostras das variáveis incertas e, para cada amostra, calcula-se uma resposta determinística. A união destas três partes caracteriza o método de Monte Carlo direto. Quando o modelo determinístico é solucionado utilizando-se o método dos elementos finitos este processo também é conhecido como método dos elementos finitos estocásticos (SAMPAIO; RITTO, 2008). A Fig. 7 ilustra a resposta de um sistema, dependente de duas variáveis aleatórias, utilizando-se o Método de Monte Carlo. Nessa imagem, à esquerda, identificam-se as variáveis aleatórias de entrada com suas respectivas funções densidade de probabilidades, enquanto à direita identificam-se as respostas calculadas utilizando-se um modelo determinístico.

Vale a pena ressaltar que um método de solução de processos estocásticos não deve ser confundido com um método de modelagem

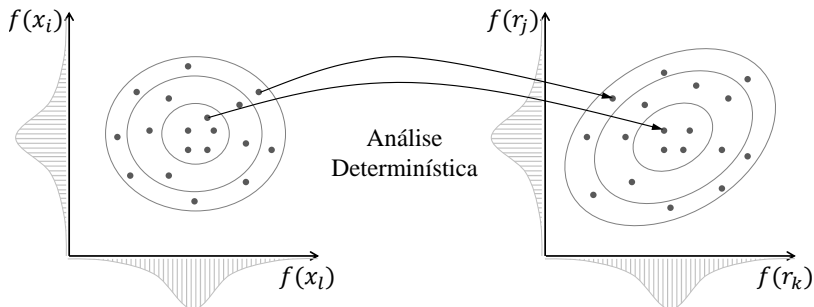


Figura 7 – Mapeamento de respostas, dependente de variáveis aleatórias, através do método de Monte Carlo (SCHUÉLLER, 2007).

estocástica. O método de Monte Carlo é, apenas, uma ferramenta voltada à aproximação de processos estocásticos. O método de modelagem estocástica é definido pela estratégia adotada na representação das funções densidade de probabilidades das entradas do modelo. Desse modo, a determinação dessas funções é a parte fundamental na construção de um modelo probabilístico. Existem, basicamente, três maneiras de determinar as funções densidade de probabilidade das entradas. A primeira, baseada na existência de muitos resultados experimentais, consiste na aplicação de testes de hipóteses, como os testes Qui-Quadrado ou Kolmogorov-Smirnov (SAMPAIO; RITTO, 2008). Na maioria dos casos práticos os resultados experimentais a respeito dos parâmetros incertos do modelo são escassos e pouco precisos, tornando essa análise proibitiva. A segunda estratégia para a determinação das funções densidade de probabilidades das entradas consiste na aplicação do princípio de máxima entropia. Essa estratégia, como será visto na próxima subseção, possibilita a determinação das funções densidade de probabilidades com base apenas nas informações disponíveis no problema. Existe ainda uma terceira metodologia, amparada no teorema de Bayes (RITTO, 2014), que permite acessar as propriedades estatísticas dos parâmetros de entrada com base nas respostas do sistema.

### 2.3.5 Princípio de máxima entropia (PME)

O conceito de entropia em teoria de informação foi proposto por Shannon (SHANNON, 1948), enquanto a ideia de maximizar essa grandeza foi sugerida por Jaynes (JAYNES, 1957), no contexto da

mecânica estatística. Desde então, o PME mostrou-se uma ferramenta eficaz para a construção de modelos probabilísticos.

Para uma variável aleatória real e contínua, a entropia de Shannon  $S$  associada à função densidade de probabilidade  $p_X$  pode ser escrita como

$$S(p_X) = - \int_{\mathcal{C}} p_X(x) \ln p_X(x) dx = -\mathcal{E}\{\ln p_X(x)\}, \quad (2.4)$$

onde  $\mathcal{C}$  é o conjunto suporte de  $p_X$  e o operador  $\mathcal{E}\{x\}$  representa o valor esperado de uma grandeza  $x$  qualquer. Em teoria de informações, a entropia está fortemente relacionada ao nível de incerteza que uma função densidade de probabilidade carrega. O PME estabelece, então, um problema de otimização, que consiste em encontrar, dentre todas as funções definidas no conjunto  $\mathcal{C}$  e compatíveis com as restrições propostas, aquela que maximiza a entropia (incerteza)  $S$ , ou seja,

$$p_X = \arg \max S(p_X). \quad (2.5)$$

Para restrições simples, como momentos de primeira ( $\mathcal{E}\{X\}$ ) e segunda ( $\mathcal{E}\{X^2\}$ ) ordens,  $p_X$  pode ser encontrada, analiticamente, utilizando-se o método dos multiplicadores de Lagrange. O Apêndice A apresenta a demonstração matemática do caso mais simples possível, onde apenas o conjunto suporte  $\mathcal{C}$  é conhecido. O fato mais importante a respeito do PME é que ele fornece uma alternativa para se determinar  $p_X$  admitindo-se a existência de poucos resultados experimentais. Além disso, um fato curioso é que praticamente todas as funções  $p_X$  conhecidas na literatura podem ser recuperadas a partir da aplicação deste método (KAPUR, 2009).

De maneira análoga às variáveis aleatórias, o PME também pode ser estendido ao estudo de matrizes aleatórias. Desse modo, para uma matriz aleatória real e contínua, a entropia de Shannon associada à função densidade de probabilidade  $p_{\mathbf{M}}$  pode ser definida como (SOIZE, 2000; SAMPAIO; CURSI, 2012)

$$S(p_{\mathbf{M}}) = - \int_{\mathfrak{M}} p_{\mathbf{M}}([M]) \ln p_{\mathbf{M}}([M]) \tilde{d}[M]. \quad (2.6)$$

O PME estabelece, novamente, um problema de otimização, que consiste em encontrar, dentre todas as funções  $p_{\mathbf{M}}$  definidas em  $\mathfrak{M}$  e compatíveis com as restrições propostas, aquela que maximiza a entropia (incerteza)  $S$ , ou seja,

$$p_{\mathbf{M}} = \arg \max S(p_{\mathbf{M}}). \quad (2.7)$$

Essa abordagem permite construir a melhor função densidade de probabilidade matricial condizente com as informações disponíveis. No

entanto, resolver esse problema de otimização, do ponto de vista matemático, pode ser bastante complexo, fato que leva à existência de poucos resultados de  $p_M$  obtidos a partir da aplicação dessa metodologia.

## 2.4 Abordagem via métodos probabilísticos

A seguir, serão apresentadas duas maneiras distintas de modelagens probabilísticas. A primeira abordagem, chamada de probabilística paramétrica, consiste em construir um modelo probabilístico para os parâmetros incertos do sistema, enquanto a segunda abordagem, chamada não paramétrica, é capaz de construir um modelo probabilístico ao nível dos operadores.

### 2.4.1 Abordagem probabilística paramétrica

Ao se modelarem as incertezas de um sistema através da abordagem probabilística paramétrica, consideram-se como incertos os parâmetros constitutivos do modelo, atribuindo-se a cada parâmetro uma variável aleatória. Desse modo, a definição do modelo probabilístico de cada parâmetro é parte fundamental durante a etapa de modelagem. A construção desse modelo pode ser baseada, como mencionado anteriormente, em um teste de hipótese ou na aplicação do PME. A abordagem probabilística paramétrica é a melhor estratégia para a modelagem de incertezas em sistemas dinâmicos se, e somente se, as incertezas do modelo encontram-se apenas ao nível de seus parâmetros constituintes (SOIZE, 2005a; SAMPAIO; RITTO, 2008; SAMPAIO; CATALDO, 2010), ou seja, quando as erros de modelo podem ser desprezados.

### 2.4.2 Abordagem probabilística não paramétrica

Durante a abordagem probabilística não paramétrica, consideram-se as incertezas do modelo ao nível dos operadores. Desse modo, atribui-se a cada operador do modelo médio uma respectiva matriz aleatória. De maneira similar à abordagem probabilística paramétrica, a definição do modelo probabilístico é parte fundamental durante a modelagem probabilística não paramétrica. Uma das alternativas para a construção dos modelos probabilísticos para as matrizes do sistema consiste, como visto anteriormente, na aplicação do PME às funções densidade de probabilidades matriciais. É possível demonstrar, matematicamente, que a abordagem probabilística não paramétrica, além de mais ampla, engloba os resultados gerados pela modelagem paramétrica.

Esse comportamento faz com que essa formulação seja eficiente para quantificar as incertezas geradas pelos parâmetros do modelo e também pelo modelo mecânico-matemático, de maneira conjunta (SOIZE, 2000; SOIZE, 2005a; SAMPAIO; CATALDO, 2010). Uma abordagem mais recente, chamada de probabilística generalizada, permite a construção de um modelo probabilístico para os parâmetros do sistema e outro para o próprio modelo proposto, possibilitando assim a identificação e quantificação de cada componente (SOIZE, 2010). Essa abordagem também utiliza a teoria de matrizes aleatórias mas, por simplicidade, ela não será discutida e aplicada neste trabalho.

### 2.4.3 Resultados publicados

Atualmente, muitos trabalhos envolvendo modelagem e quantificação de incertezas podem ser encontrados na literatura. Esta subseção traz dois resultados disponíveis, como exemplos, envolvendo as abordagens probabilísticas paramétrica e não paramétrica aplicadas a estruturas dinâmicas complexas e distintas.

Com o objetivo de identificar as incertezas em algumas respostas dinâmicas de uma estrutura bastante complexa, SCHUËLLER (2007) aplicou o método de modelagem probabilística paramétrica ao modelo matemático, discretizado através do MEF, de um satélite acoplado a um sistema de propulsão. A Figura 8 mostra, à esquerda, a malha da estrutura propulsora e, à direita, a malha do satélite isolada. Para o modelo do satélite, elegeram-se, aproximadamente, 1300 parâmetros incertos, modelando-os como variáveis aleatórias independentes. Esses parâmetros se referem, basicamente, às propriedades mecânicas dos materiais constituintes da estrutura e também às suas respectivas geometrias. Nesse caso, a grande maioria das variáveis aleatórias foram modeladas utilizando-se funções densidade de probabilidades gaussianas, enquanto as suas respectivas dispersões foram determinadas a partir de resultados experimentais ou baseadas no conhecimento prévio de estruturas similares. A partir dessa análise, SCHUËLLER (2007) foi capaz de determinar as forças, juntamente com suas respectivas regiões de confiança, na interface entre cada componente do sistema propulsor. Esse mesmo modelo probabilístico foi capaz de identificar os níveis de tensão de von Mises possíveis no mecanismo que conecta o satélite ao seu painel solar, parâmetro crítico para se determinar até que ponto a estrutura é robusta à falha perante incertezas nos parâmetros do modelo proposto (SCHUËLLER, 2007). Uma análise distinta (CAPIEZ-LERNOUT et al., 2006) mostrou que, embora as incertezas nos parâmetros sejam

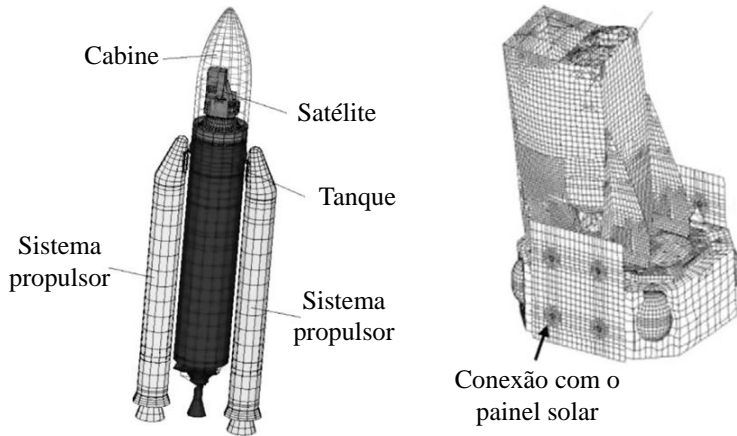


Figura 8 – Malha do sistema propulsor, à esquerda, juntamente com a malha do satélite, à direita (SCHUËLLER, 2007).

importantes em frequências superiores a 30 Hz, esta parcela é muito menor comparada à sensibilidade do próprio modelo utilizado.

Com a finalidade de construir um modelo robusto às incertezas, DURAND; SOIZE; GAGLIARDINI (2008) construíram um modelo probabilístico não paramétrico de um veículo comercial. Trata-se de uma estrutura acoplada a uma cavidade acústica, ambos discretizados utilizando-se o método dos elementos finitos, com a interface entre a estrutura e a cavidade modelada utilizando-se um modelo de dissipação acústica simplificado (DURAND; SOIZE; GAGLIARDINI, 2008). A Fig. 9 ilustra, à esquerda, o modelo estrutural utilizado e, à direita, uma resposta impulsiva obtida excitando-se a estrutura próximo ao bloco do motor e medindo-se a aceleração na parte traseira do veículo. No caso probabilístico não paramétrico, tratam-se as incertezas ao nível dos operadores, construindo-se um modelo probabilístico para cada matriz do modelo. Nesse caso, as funções densidade de probabilidades das matrizes do modelo são construídas utilizando-se o PME, como será detalhado na Subseção 3.2.2, enquanto os parâmetros de dispersão de cada operador foi calculado resolvendo-se um problema de otimização com base em resultados experimentais (DURAND; SOIZE; GAGLIARDINI, 2008). O fato mais importante que pode ser observado na Fig. 9 é que existem grandes diferenças entre os resultados experimentais e o resultado obtido com o modelo médio simulado. Esse comportamento ocorre devido às

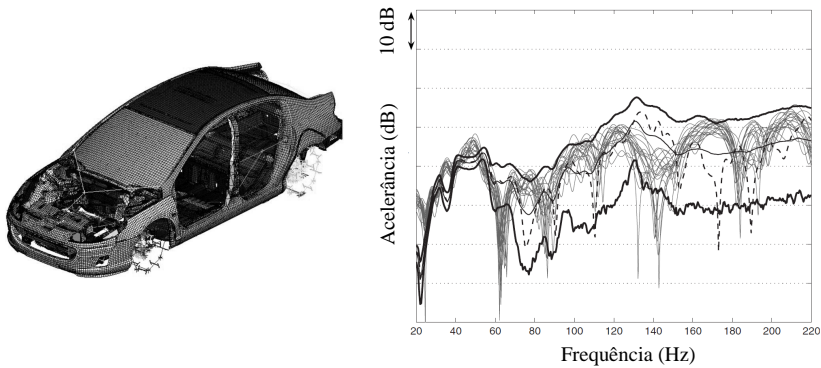


Figura 9 – Malha da estrutura veicular, à esquerda, sem a cavidade acústica. À direita, são apresentadas as respostas dos 20 veículos medidos (linhas cinzas), a respectiva resposta obtida com o modelo médio (linha preta tracejada), a resposta média (linha preta fina) e os limites de confiança de 96% (linhas pretas) obtidos com o modelo probabilístico não paramétrico (DURAND; SOIZE; GAGLIARDINI, 2008).

incertezas nos dados e no modelo, vide a complexidade e a dificuldade de se construir um modelo fiel à estrutura real. Ao se observar a região de 96% de confiança, calculada utilizando-se a modelagem probabilística não paramétrica, é possível observar que esses resultados aumentam consideravelmente a predicabilidade do modelo, uma vez que a grande maioria dos resultados experimentais encontram-se dentro da região calculada (Fig. 9).



## 3 Viga Euler-Bernoulli

Como visto no capítulo anterior, o processo de modelagem estocástica pode ser mais complexo quando comparado ao processo de modelagem determinística. A título de exemplo, durante a abordagem probabilística paramétrica, atribui-se a cada parâmetro incerto do modelo uma variável aleatória, que por sua vez é definida, matematicamente, como uma função. Desse modo, enquanto uma abordagem determinística opera utilizando como parâmetros de entrada do problema apenas valores constantes, objetos de dimensão unitária, uma modelagem estocástica utiliza como dados de entrada funções, objetos matemáticos de dimensão infinita (SAMPAIO; CURSI, 2012). Devido a essa complexidade, este capítulo destina-se, basicamente, à aplicação e à discussão dos métodos de modelagem probabilísticos paramétrico e não paramétrico de quantificação de incertezas em um problema de flexão de vigas sujeito à variabilidade na altura de sua seção retangular e também, mais adiante, incerteza no seu modelo constitutivo. Essa aplicação foi escolhida, como primeiro exemplo, devido à sua simplicidade e também ao baixo custo computacional necessário para a sua reprodução.

### 3.1 Modelo médio

A Fig. 10 apresenta a geometria da viga modelada, à esquerda, juntamente com o seu respectivo elemento, à direita, obtido durante o processo de discretização da estrutura em elementos finitos. Trata-se de uma viga de comprimento  $L^v$ , densidade  $\rho^v$ , módulo de elasticidade  $E^v$ ,

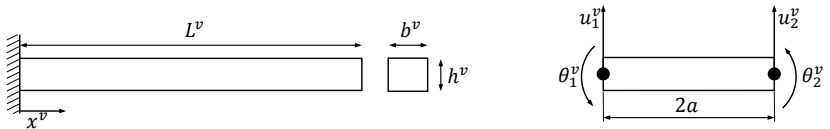


Figura 10 – Geometria da viga, à esquerda, juntamente com seu respectivo elemento, à direita.

base  $b^v$  e altura  $h^v$ . Cada elemento de viga é modelado de acordo com a teoria de viga de Euler-Bernoulli, admitindo-se para cada nó do modelo um grau de liberdade de deslocamento e um de rotação (Fig. 10).

Após discretizar a estrutura, é possível demonstrar, matematicamente, que as matrizes de massa  $[M_e^v]$  e rigidez  $[K_e^v]$  elementares são (FAHY; GARDONIO, 2007)

$$[M_e^v] = \frac{\rho^v A^v a}{105} \begin{bmatrix} 78 & 22a & 27 & -13a \\ 22a & 8a^2 & 13a & -6a^2 \\ 27 & 13a & 78 & -22a \\ -13a & -6a^2 & -22a & 8a^2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (3.1)$$

$$[K_e^v] = \frac{E^v I^v}{2a^3} \begin{bmatrix} 3 & 3a & -3 & 3a \\ 3a & 4a^2 & -3a & 2a^2 \\ -3 & -3a & 3 & -3a \\ 3a & 2a^2 & -3a & 4a^2 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

onde  $A^v = b^v h^v$  é a área da seção retangular,  $I^v = b^v (h^v)^3 / 12$  é o momento de inércia de segunda ordem, enquanto  $2a$  representa o comprimento do elemento. O modelo de amortecimento da estrutura será introduzido, na Subseção 3.1.1, através do formalismo de amortecimento modal. Dessa forma, após se realizar o processo de montagem das matrizes globais e se identificarem as condições de contorno da estrutura, a equação de movimento do sistema pode ser escrita, admitindo-se uma excitação harmônica no domínio da frequência, como

$$(-\omega^2 [M_{n_v}^v] + j\omega [C_{n_v}^v] + [K_{n_v}^v]) \{u_{n_v}^v(\omega)\} = \{f^v(\omega)\}, \quad (3.3)$$

onde  $[M_{n_v}^v]$ ,  $[C_{n_v}^v]$  e  $[K_{n_v}^v]$  são as matrizes globais de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente,  $\{u_{n_v}^v(\omega)\}$  e  $\{f^v(\omega)\}$  são os vetores com os graus de liberdade (deslocamentos e rotações) e excitações externas (forças e torques) do modelo, enquanto  $\omega$  representa a frequência angular de análise e  $j$  é a unidade imaginária. Todas as matrizes do sistema são reais, simétricas, positivo definidas e possuem dimensão  $n_v$ . Para todo  $\omega \in \mathbb{B}^v$ , onde  $\mathbb{B}^v$  é a banda de frequência de análise, a Eq. 3.3 possui solução única e na forma

$$\{u_{n_v}^v(\omega)\} = (-\omega^2 [M_{n_v}^v] + j\omega [C_{n_v}^v] + [K_{n_v}^v])^{-1} \{f^v(\omega)\}. \quad (3.4)$$

De posse de  $\{u_{n_v}^v(\omega)\}$ , o vetor de acelerações  $\{a_{n_v}^v(\omega)\}$  do sistema pode ser obtido, diretamente, como

$$\{a_{n_v}^v(\omega)\} = -\omega^2 \{u_{n_v}^v(\omega)\}. \quad (3.5)$$

### 3.1.1 Modelo reduzido

Com o objetivo de reduzir o número de operações com as matrizes  $[M_{n_v}^v]$ ,  $[C_{n_v}^v]$  e  $[K_{n_v}^v]$  e, conseqüentemente, reduzir o custo computacional, a resposta  $\{u_{n_v}^v(\omega)\}$  pode ser aproximada através de uma expansão modal. Desta forma, as  $i$ -ésimas frequência natural  $\omega_i^v$  e forma modal  $\{\phi_i^v\}$  da estrutura podem ser obtidas resolvendo-se o problema de autovalores e autovetores generalizados

$$[K_{n_v}^v]\{\phi_i^v\} = (\omega_i^v)^2[M_{n_v}^v]\{\phi_i^v\}. \quad (3.6)$$

Ao se definir a matriz de formas modais  $[\Psi^v] = [\{\phi_1^v\} \{\phi_2^v\} \dots \{\phi_{m_v}^v\}]$ , com  $m_v \ll n_v$ , a resposta  $\{u_{n_v}^v(\omega)\}$  pode ser aproximada por  $\{u_{m_v}^v(\omega)\}$  na forma

$$\{u_{m_v}^v(\omega)\} = [\Psi^v]\{q_{m_v}^v(\omega)\}, \quad (3.7)$$

onde  $\{q_{m_v}^v(\omega)\}$  é o vetor solução da equação matricial

$$(-\omega^2[M_{m_v}^v] + j\omega[C_{m_v}^v] + [K_{m_v}^v])\{q_{m_v}^v(\omega)\} = [\Psi^v]^T\{f^v(\omega)\}. \quad (3.8)$$

Ao se admitir a normalização  $[\Psi^v]^T[M_{m_v}^v][\Psi^v] = [I_{m_v}]$ , onde  $[I_{m_v}]$  é a matriz identidade de dimensão  $m_v$ , as matrizes de massa  $[M_{m_v}^v]$ , amortecimento  $[C_{m_v}^v]$  e rigidez  $[K_{m_v}^v]$  reduzidas da Eq. 3.8 são matrizes reais, diagonais, positivo definidas e que são construídas na forma

$$[M_{m_v}^v] = \delta_{ij}, \quad [C_{m_v}^v] = 2\xi_i^v\omega_k^v\delta_{ij}, \quad [K_{m_v}^v] = (\omega_k^v)^2\delta_{ij}, \quad (3.9)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker,  $\omega_1^v < \omega_2^v < \dots < \omega_{m_v}^v$  são as frequências naturais do sistema e  $\xi_1^v, \xi_2^v, \dots, \xi_{m_v}^v$  são os respectivos amortecimentos modais. Vale destacar que o erro devido à aproximação de  $\{u_{n_v}^v(\omega)\}$  por  $\{u_{m_v}^v(\omega)\}$  pode ser controlado, tornando-se necessário definir um valor de  $m_v$  suficientemente grande para que  $\|\{u_{n_v}^v(\omega)\} - \{u_{m_v}^v(\omega)\}\|$  possa ser negligenciado. De posse do vetor  $\{u_{m_v}^v(\omega)\}$ , o vetor de acelerações  $\{a_{m_v}^v(\omega)\}$  do sistema pode ser determinado, diretamente, como

$$\{a_{m_v}^v(\omega)\} = -\omega^2\{u_{m_v}^v(\omega)\}. \quad (3.10)$$

## 3.2 Modelos estocásticos

Com a finalidade de determinar as respostas do sistema na presença de incertezas na altura  $h^v$ , duas metodologias distintas de modelagem estocástica são abordadas. Na primeira estratégia, substitui-se a matriz determinística do modelo médio por uma matriz aleatória, cuja

representação algébrica encontra-se amparada no modelo probabilístico do parâmetro incerto  $h^v$  do sistema. Para a aplicação da segunda estratégia de modelagem, constrói-se o modelo probabilístico ao nível dos operadores, modelando-se cada matriz reduzida do sistema, diretamente, como uma matriz aleatória.

### 3.2.1 Modelo probabilístico paramétrico

Para a modelagem probabilística paramétrica, atribui-se ao parâmetro incerto  $h^v$  do modelo uma respectiva variável aleatória  $H^v$ . Desse modo, a definição do modelo probabilístico de  $H^v$  torna-se parte fundamental para a determinação das respostas do modelo estocástico. Na ausência de muitos resultados experimentais a respeito de  $H^v$ , a melhor maneira de construir o seu modelo probabilístico consiste na aplicação do PME, utilizando-se como vínculos para o problema de otimização algumas restrições físicas do problema. No que segue, as informações disponíveis a respeito da variável aleatória  $H^v$  são:

1. a altura da viga é um número estritamente positivo e finito, ou seja, o conjunto suporte de  $H^v$  é  $(0, \infty)$ ;
2. o valor esperado de  $H^v$  é conhecido e dado por  $\mathcal{E}\{H^v\} = \underline{h}^v$  ;
3. a variável aleatória  $H^v$  possui variância finita, ou seja,  $\mathcal{E}\{(H^v)^2\} < \infty$ ;
4. o deslocamento de cada grau de liberdade do modelo possui variância finita, ou seja,  $\mathcal{E}\{(H^v)^{-2}\} < \infty$ . Essa restrição pode ser considerada na solução do problema de otimização admitindo-se que  $\mathcal{E}\{\ln H^v\} < \infty$  (SAMPAIO; CATALDO, 2010).

As quatro restrições descritas acima estão demonstradas, matematicamente, para um sistema com um grau de liberdade e estático no Apêndice B. Aplicando-se o PME à função densidade de probabilidade  $p_H(h^v)$ , conclui-se que o melhor modelo probabilístico para a variável aleatória  $H^v$  é uma função densidade de probabilidades gama (KAPUR, 2009)

$$p_H(h^v) = \mathbb{1}(h^v) \frac{1}{\underline{h}^v} \left( \frac{1}{h^v} \right)^{\frac{1}{(\delta_H^v)^2}} \frac{1}{\Gamma(1/(\delta_H^v)^2)} \left( \frac{h^v}{\underline{h}^v} \right)^{\frac{1}{(\delta_H^v)^2} - 1} \exp \left\{ -\frac{h^v}{(\delta_H^v)^2 \underline{h}^v} \right\}, \quad (3.11)$$

onde  $\mathbb{1}(h^v)$  é a função degrau de Heaviside,  $\Gamma$  é a função gama  $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ , enquanto  $\delta_{H^v}$  é o coeficiente de variação de  $H^v$  definido como a razão entre os seus respectivos desvio padrão e média ( $\delta_{H^v}^2 = \sigma_{H^v}^2 / \mu_{H^v}^2$ ). Ao observar as restrições acima, é possível concluir que  $H^v$  não deve ser modelada utilizando-se uma função densidade de probabilidade gaussiana, uma vez que tal função não obedece as restrições 1 e 4 (ver Apêndice B). Além disso, vale ressaltar que a função densidade de probabilidade gama da Eq. 3.11 só obedece a restrição 4 para valores  $0 \leq \delta_{H^v}^2 \leq 1/\sqrt{3}$  (RITTO; SAMPAIO; CATALDO, 2008; SAMPAIO; CATALDO, 2010).

Após definir um modelo probabilístico para  $H^v$ , constroem-se as matrizes elementares da estrutura seguindo-se este modelo. Uma vez que tanto a matriz de massa quanto a de rigidez elementares são funções de  $h^v$  (ver Eqs. 3.1 e 3.2), ambas tornam-se matrizes aleatórias. De maneira análoga, as matrizes globais da Eq. 3.3 são funções dos operadores elementares e, conseqüentemente, também passam a ser matrizes aleatórias. A seguir, a Eq. 3.3 é substituída por

$$(-\omega^2[\mathbf{M}_p^v] + j\omega[\mathbf{C}_p^v] + [\mathbf{K}_p^v]) \{\mathbf{u}_p^v(\omega)\} = \{f^v(\omega)\}, \quad (3.12)$$

onde  $[\mathbf{M}_p^v]$ ,  $[\mathbf{C}_p^v]$  e  $[\mathbf{K}_p^v]$  são as matrizes aleatórias construídas a partir do modelo probabilístico de  $H^v$  e  $\{\mathbf{u}_p^v(\omega)\}$  é o processo estocástico correspondente à resposta do sistema. A Eq. 3.12 pode ser resolvida aplicando-se o método de Monte Carlo, apresentado na Subseção 2.3.4, juntamente com o processo de redução de modelo apresentado na Subseção 3.1.1.

### 3.2.2 Modelo probabilístico não paramétrico

Como visto na Subseção 2.4.2, ao modelar o sistema utilizando a abordagem não paramétrica, tratam-se as incertezas ao nível dos operadores do modelo. Ao analisar os operadores da Eq. 3.3 conclui-se que, devido à construção utilizando-se o método dos elementos finitos, as matrizes  $[M_{n_v}^v]$ ,  $[C_{n_v}^v]$  e  $[K_{n_v}^v]$  apresentam muitos zeros topológicos, tornando-se uma melhor alternativa a construção de um modelo probabilístico para as matrizes reduzidas  $[M_{m_v}^v]$ ,  $[C_{m_v}^v]$  e  $[K_{m_v}^v]$  da Eq. 3.8 (SOIZE, 2000). O modelo probabilístico desses operadores pode ser construído utilizando-se a teoria de matrizes aleatórias juntamente com o PME.

Seja  $[A_{m_v}^v]$  qualquer matriz diagonal  $[M_{m_v}^v]$ ,  $[C_{m_v}^v]$  ou  $[K_{m_v}^v]$ . Como a estrutura encontra-se presa em uma das extremidades (Fig. 10), o operador  $[A_{m_v}^v]$  é, necessariamente, positivo definido. Ao se identificarem as restrições físicas de  $[A_{m_v}^v]$ , é possível determinar diretamente,

utilizando-se o PME, o melhor modelo probabilístico para esse operador. Porém, o resultado encontrado mostra que os elementos  $[\mathbf{A}_{\mathbf{m}_v}^{\mathbf{v}}]_{ij}$  são dependentes entre si, fato que dificulta a representação algébrica desse operador (SOIZE, 2005b). Para contornar essa dificuldade, uma vez que  $[A_{m_v}^v]$  é positivo definida, escreve-se este operador utilizando-se a decomposição de Cholesky

$$[A_{m_v}^v] = [L_{m_v}^v]^T [L_{m_v}^v], \quad (3.13)$$

onde  $[L_{m_v}^v]$  é uma matriz diagonal. As incertezas são, então, introduzidas no modelo, sem perda de generalidade, a partir da matriz aleatória  $[\mathbf{G}_{\mathbf{m}_v}^{\mathbf{v}}]$ , tal que

$$[\mathbf{A}_{\mathbf{m}_v}^{\mathbf{v}}] = [L_{m_v}^v]^T [\mathbf{G}_{\mathbf{m}_v}^{\mathbf{v}}] [L_{m_v}^v] \quad (3.14)$$

As restrições físicas para a construção da função densidade de probabilidade  $p_{G^v}([G_{m_v}^v])$  de  $[\mathbf{G}_{\mathbf{m}_v}^{\mathbf{v}}]$  são (SOIZE, 2005a; SAMPAIO; CATALDO, 2010):

1. todas as realizações de  $[\mathbf{G}_{\mathbf{m}_v}^{\mathbf{v}}]$  devem ser simétricas e positivo definidas para que o operador  $[\mathbf{A}_{\mathbf{m}_v}^{\mathbf{v}}]$  seja sempre simétrico e positivo definido; Essa afirmação pode ser escrita, matematicamente, admitindo-se que  $[\mathbf{G}_{\mathbf{m}_v}^{\mathbf{v}}] \in \mathbb{M}^+$ , onde  $\mathbb{M}^+$  representa o conjunto de todas as matrizes reais, simétricas e positivo definidas.
2. o valor esperado de  $[\mathbf{G}_{\mathbf{m}_v}^{\mathbf{v}}]$  é conhecido e igual à matriz identidade, ou seja,  $\mathcal{E}\{[\mathbf{G}_{\mathbf{m}_v}^{\mathbf{v}}]\} = [I_{m_v}]$ . Essa condição é necessária para que o valor esperado de  $[\mathbf{A}_{\mathbf{m}_v}^{\mathbf{v}}]$  seja igual ao valor utilizado no modelo médio, ou seja,  $\mathcal{E}\{[\mathbf{A}_{\mathbf{m}_v}^{\mathbf{v}}]\} = [A_{m_v}^v]$ . Essa restrição pode ser escrita, matematicamente, como

$$\mathcal{E}\{[\mathbf{G}_{\mathbf{m}_v}^{\mathbf{v}}]\} = \int_{\mathbb{M}^+} [G_{m_v}^v] \times p_{G^v}([G_{m_v}^v]) \times \tilde{\mathbf{d}}[G_{m_v}^v] = [I_{m_v}]; \quad (3.15)$$

3. a última restrição surge devido à necessidade de que a resposta do sistema seja um processo estocástico de segunda ordem, ou seja, para que as variáveis aleatórias que representam a resposta do sistema possuam variância finita. Pode-se demonstrar, matematicamente, que a resposta do sistema será estável sempre que a matriz de rigidez dinâmica do modelo reduzido possuir variância finita. Porém, resolver o problema de otimização definido pelo PME levando-se em conta essa restrição torna, do ponto de vista analítico, um problema impossível de ser resolvido utilizando-se a teoria de matrizes aleatórias desenvolvida até o momento (ADHIKARI,

2007). Para contornar esse problema, admite-se que, individualmente, cada matriz do sistema possui variância finita, ou seja,  $\mathcal{E}\{\|[\mathbf{A}_{\mathbf{m}_v}^v]^{-1}\|_F^2\} < \infty$ . Essa é uma condição suficiente para que o problema possa ser tratado analiticamente mas não expressa uma condição necessária para o modelo (ADHIKARI, 2008). No que segue, para satisfazer a condição de  $[\mathbf{A}_{\mathbf{m}_v}^v]$ , o operador  $[\mathbf{G}_{\mathbf{m}_v}^v]$  deve satisfazer a desigualdade  $\mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}_{\mathbf{m}_v}^v]^{-1}\|_F^2\} < \infty$ . Essa restrição pode ser inserida junto ao problema de otimização admitindo-se que  $\mathcal{E}\{\ln(\det[\mathbf{G}_{\mathbf{m}_v}^v])\} < \infty$  (SOIZE, 2000; ADHIKARI, 2007);

A função  $p_G([\mathbf{G}_{\mathbf{m}_v}^v])$  associada à matriz  $[\mathbf{G}_{\mathbf{m}_v}^v]$  seguindo as restrições anteriores e construída utilizando o PME é (SOIZE, 2000)

$$p_G([\mathbf{G}_{\mathbf{m}_v}^v]) = \mathbb{1}_{\mathbb{M}^+}([\mathbf{G}_{\mathbf{m}_v}^v]) \times C_{G^v} \times \det([\mathbf{G}_{\mathbf{m}_v}^v])^{(m_v+1)\frac{1-\delta_A^v}{2\delta_A^v}} \times \exp\left\{-\frac{m_v+1}{2(\delta_A^v)^2} \text{tr}([\mathbf{G}_{\mathbf{m}_v}^v])\right\}, \quad (3.16)$$

onde  $\mathbb{1}_{\mathbb{M}^+}([\mathbf{G}_{\mathbf{m}_v}^v])$  é igual a 1 se  $[\mathbf{G}_{\mathbf{m}_v}^v] \in \mathbb{M}^+$  e 0 se  $[\mathbf{G}_{\mathbf{m}_v}^v] \notin \mathbb{M}^+$ , enquanto  $C_{G^v}$  representa a constante

$$C_{G^v} = \frac{(2\pi)^{-m_v(m_v-1)/4} \{(m_v+1)(\sqrt{2}\delta_A^v)^{-2}\}^{m_v(m_v+1)/2(\delta_A^v)^2}}{\prod_{j=1}^{m_v} \Gamma\left(\frac{m_v+1}{2(\delta_A^v)^2} + \frac{1-j}{2}\right)}. \quad (3.17)$$

Na Eq. 3.16, o parâmetro  $\delta_A^v$  representa o coeficiente de dispersão

$$\delta_A^v = \sqrt{\frac{1}{m_v} \mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}_{\mathbf{m}_v}^v] - [I_{m_v}]\|_F^2\}}, \quad (3.18)$$

que quantifica a distância quadrática média entre  $[\mathbf{G}_{\mathbf{m}_v}^v]$  e seu valor médio  $[I_{m_v}]$  (LEGAULT; LANGLEY; WOODHOUSE, 2012). Para que  $[\mathbf{G}_{\mathbf{m}_v}^v]$  obedeça a restrição 3, o coeficiente de dispersão deve, obrigatoriamente, admitir valores entre  $0 < \delta_A^v < \sqrt{(m_v+1)/(m_v+5)}$ . A representação algébrica de  $[\mathbf{G}_{\mathbf{m}_v}^v]$  pode ser construída utilizando-se a decomposição de Cholesky

$$[\mathbf{G}_{\mathbf{m}_v}^v] = [\mathbf{L}_{\mathbf{G}}^v]^T [\mathbf{L}_{\mathbf{G}}^v], \quad (3.19)$$

onde  $[\mathbf{L}_{\mathbf{G}}^v]$  é uma matriz triangular superior tal que (SOIZE, 2000; SOIZE, 2005a):

- os elementos  $[\mathbf{L}_{\mathbf{G}}^v]_{ij}$  são variáveis aleatórias independentes;

- para  $i < j$  as variáveis aleatórias  $[\mathbf{L}_{\mathbf{G}_m}]_{ij}$  podem ser escritas como  $[\mathbf{L}_{\mathbf{G}_m}]_{ij} = \sigma_G U_{ij}$ , onde  $\sigma_G^v = \delta_A^v / \sqrt{(m_v + 1)}$  e  $U_{ij}$  são variáveis aleatórias gaussianas com média nula e variância unitária;
- para a diagonal  $i = j$  as variáveis aleatórias estritamente positivas  $[\mathbf{L}_{\mathbf{G}_m}]_{jj}$  podem ser escritas como  $[\mathbf{L}_{\mathbf{G}_m}]_{jj} = \sigma_G^v \sqrt{2V_j}$ , onde  $V_j$  são variáveis aleatórias com função densidade de probabilidade gama

$$p_{V_j}(v) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m_v+1}{2(\delta_A^v)^2} + \frac{1-j}{2}\right)} v^{(m_v+1)/2(\delta_A^v)^2 - (1+j)/2} e^{-v}. \quad (3.20)$$

De posse de uma metodologia para a geração da matriz aleatória  $[\mathbf{A}_{m_v}^v]$ , é possível substituir a Eq. 3.8 por

$$(-\omega^2[\mathbf{M}_{np}^v] + j\omega[\mathbf{C}_{np}^v] + [\mathbf{K}_{np}^v])\{\mathbf{q}_{np}^v(\omega)\} = [\Psi^v]^T\{f^v(\omega)\}, \quad (3.21)$$

onde  $[\mathbf{M}_{np}^v]$ ,  $[\mathbf{C}_{np}^v]$  e  $[\mathbf{K}_{np}^v]$  são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez randômicas obtidas utilizando-se a abordagem não paramétrica e  $\{\mathbf{q}_{np}^v(\omega)\}$  é o respectivo processo estocástico associado. A Eq. 3.21 pode ser resolvida através do método de Monte Carlo, admitindo-se que a solução do sistema pode ser representada como a superposição das formas modais obtidas com o modelo médio.

### 3.3 Resultados simulados

Nesta seção, alguns resultados numéricos obtidos ao simular o comportamento dinâmico do sistema ilustrado na Fig. 10 são apresentados e discutidos. Para os cálculos, admitiu-se que a viga é constituída de aço, com valores médios de módulo de elasticidade  $\underline{E}^v = 210$  GPa, densidade  $\underline{\rho}^v = 7800$  kg/m<sup>3</sup>, comprimento  $\underline{L}^v = 0,5$  m, base  $\underline{b}^v = 0,05$  m e altura  $\underline{h}^v = 0,025$  m. Devido à incerteza na altura da seção transversal, dois modelos probabilísticos distintos são construídos com base nas Subseções 3.2.1 e 3.2.2. No que segue, analisam-se os resultados obtidos utilizando-se as duas abordagens probabilísticas, discutindo-se como as incertezas na altura se propagam no modelo através da abordagem paramétrica e como esta incerteza pode ser recuperada através de uma abordagem não paramétrica.

#### 3.3.1 Resultado do modelo médio

Com a finalidade de reduzir os erros devido à discretização do sistema em elementos finitos, torna-se necessária uma análise de convergência da malha utilizada. Para o presente trabalho, utilizou-se como



métrica de convergência as frequências naturais da estrutura em função do número de elementos discretizados. Desse modo, após resolver o problema de autovalores e autovetores aumentando, gradativamente, o número de elementos da malha é possível afirmar que, para uma precisão superior a 99,75% na décima frequência natural, torna-se necessário dividir a estrutura em 21 elementos. A Fig. 11 mostra o espectro de aceleração  $\{a_L^v(\omega)\}$  na extremidade  $L^v$  da estrutura devido à aplicação de uma força pontual e unitária no mesmo local. Os valores de  $\{a_L^v(\omega)\}$  foram calculados a partir do processo de redução modal, descrito na Subseção 3.1.1, utilizando-se a superposição de 42 modos. Além disso, o amortecimento do modelo foi imposto a partir do formalismo modal, admitindo-se um modelo  $\xi_1^v = \xi_2^v = \dots = \xi_{42}^v = 1\%$  constante. Vale a pena ressaltar que os mesmos resultados obtidos na Fig. 11 podem ser recuperados utilizando-se um modelo muito mais reduzido, necessitando-se definir um valor ótimo em que os erros atribuídos à aproximação modal possam ser negligenciados.

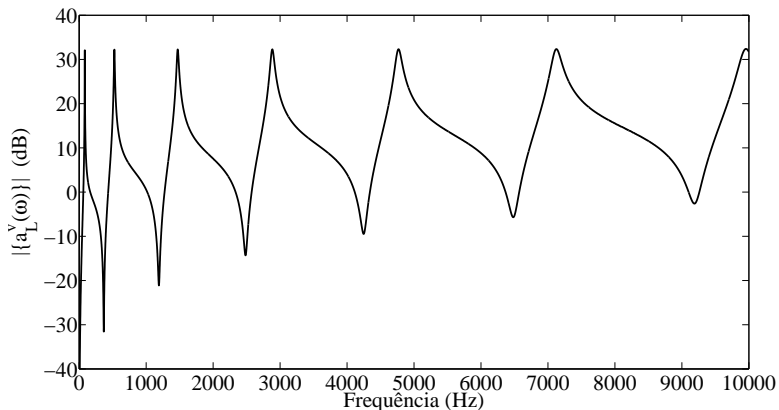


Figura 11 – Espectro de aceleração  $\{a_L^v(\omega)\}$  calculado utilizando-se o modelo médio.

### 3.3.2 Convergência quadrática média

Para garantir que os resultados obtidos com os modelos probabilísticos são estatisticamente representativos, torna-se necessário realizar uma análise de convergência das respostas do modelo. Essa análise deve ser capaz de estimar o número de simulações de Monte Carlo  $s_v$ , neces-

sárias durante a solução das Eq. 3.12 e 3.21 e, também, as dimensões  $m_v$  dos modelos reduzidos. Desse modo, define-se a função convergência quadrática média como

$$\text{Conv}(s_v, m_v) = \left\{ \frac{1}{s_v} \sum_{k=1}^{s_v} \int_{\mathbb{B}^v} |a_L^v(\omega, k)|^2 d\omega \right\}^{1/2}, \quad (3.22)$$

onde  $k$  indica o índice da realização gerada e  $\mathbb{B}^v = (0, 10000]$  Hz identifica a banda de frequência de análise. A Fig. 12 mostra, à esquerda, os gráficos de  $20 \times \log_{10}(\text{Conv}(s_v, m_v))$  em função de  $s_v$  para  $m_v = 42$  modos, de onde é possível concluir que o modelo converge, nas duas abordagens, para  $s_v = 1200$  simulações. A mesma figura, à direita, apresenta  $20 \times \log_{10}(\text{Conv}(s_v, m_v))$  em função de  $m_v$ , calculados utilizando-se  $s_v = 1200$  realizações. Ao se analisarem os resultados é possível afirmar que, para ambas as abordagens, o modelo converge utilizando a superposição de  $m_v = 12$  modos. Nos dois gráficos os resultados foram calculados admitindo-se  $\delta_{H^v} = 0,02$  para o modelo paramétrico e  $\delta_M^v = \delta_D^v = \delta_K^v = 0,1$  para o modelo não paramétrico.

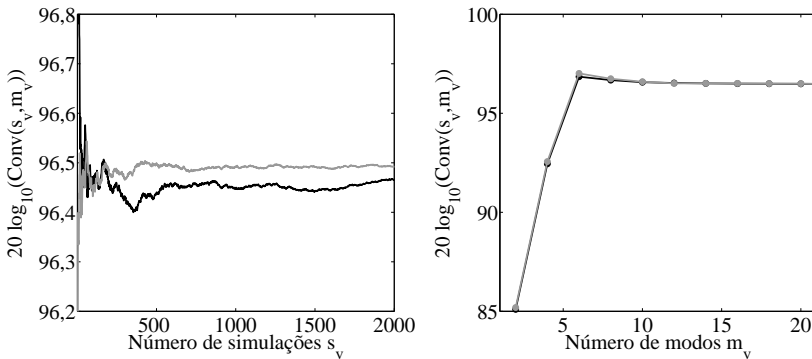


Figura 12 – À esquerda, Eq. 3.22 calculada variando-se  $s_v$  para  $m_v = 42$  e, à direita, a mesma função calculada alterando-se  $m_v$  para  $s_v = 1200$ . Nos dois gráficos os resultados em preto ilustram os valores calculados utilizando-se o modelo paramétrico e em cinza o não paramétrico.

### 3.3.3 Resultados obtidos com o modelo paramétrico

A Fig. 13 mostra as funções densidade de probabilidade gama de  $H^v$ , definidas utilizando o PME, comparadas às funções densidade de probabilidade gaussiana, para dois coeficientes de variação  $\delta_H^v$  distintos. Os resultados mostram que, para baixos valores de  $\delta_H^v$ , as diferenças entre as duas funções são negligenciáveis. Porém, à medida que  $\delta_H^v$  aumenta, as diferenças entre os modelos probabilísticos podem se tornar significativas, corroborando a ideia de que admitir uma função densidade de probabilidade normal para os parâmetros incertos de um modelo numérico pode não ser a melhor estratégia.

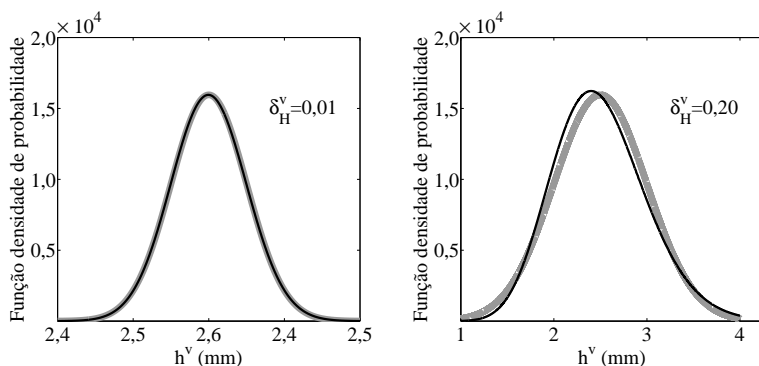


Figura 13 – Função densidade de probabilidade gama (linha preta) comparada à gaussiana (linha cinza) para  $\delta_H^v=0,01$ , à esquerda, e  $\delta_H^v=0,20$ , à direita.

A Fig. 14 apresenta a resposta  $\{a_L^v(\omega)\}$  obtida com o modelo médio, em preto, juntamente com a região de 99% de confiança, em cinza, calculada utilizando-se a abordagem paramétrica para diferentes valores de  $\delta_H^v$ . A região de confiança foi estimada utilizando-se o método dos quantis, cuja demonstração matemática encontra-se disponível no Apêndice C. A partir dos gráficos é possível concluir que as incertezas na resposta do modelo aumentam com a frequência, confirmando a ideia de que as estruturas tornam-se bastante sensíveis às pequenas variações em sua configuração original em frequências mais elevadas. Para o caso particular em que  $\delta_H^v=0,10$ , observa-se que, para frequências naturais superiores ao terceiro modo, as faixas de valores admissíveis para a respectiva frequência natural se sobrepõem às faixas vizinhas. Embora o valor de  $\delta_H^v=0,10$  seja elevado, alguns resultados experimentais mostram

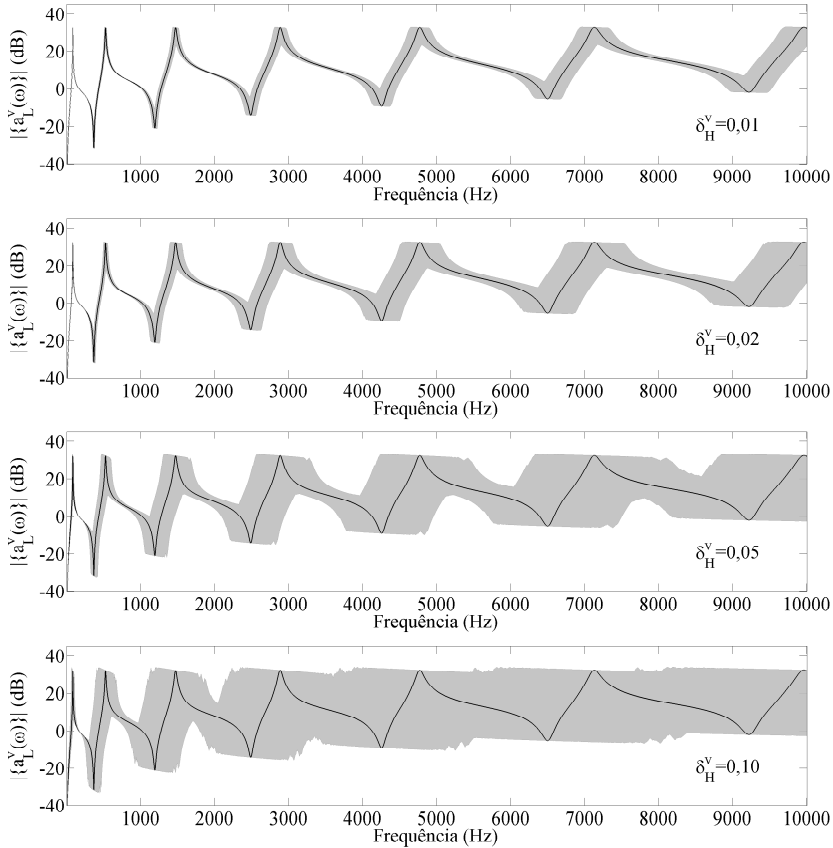


Figura 14 – Espectro de aceleração do modelo médio, em preto, juntamente com as respectivas regiões de 99% de confiança, em cinza, calculadas utilizando-se  $\delta_H^v$  iguais a 0,01, 0,02, 0,05 e 0,10.

que determinadas estruturas apresentam variações em suas propriedades mecânicas e geométricas superiores a este valor (CAPIEZ-LERNOUT et al., 2006; SCHUËLLER, 2007).

Por fim, a Fig. 15 mostra a função densidade de probabilidade discreta da primeira e sexta frequências naturais da estrutura, calculadas a partir dos resultados obtidos com a simulação de Monte Carlo, com-

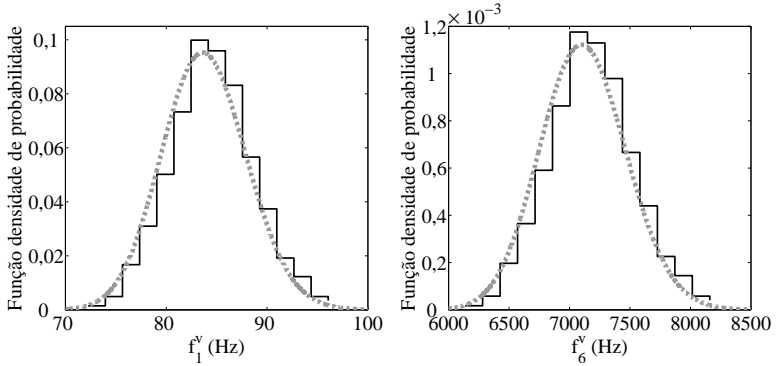


Figura 15 – Função densidade de probabilidade discreta da primeira ( $f_1^v$ ) e sexta ( $f_6^v$ ) frequências naturais (preto), estimadas utilizando-se os resultados obtidos com a simulação de Monte Carlo, comparada às funções contínuas exatas (cinza), calculadas utilizando-se o método da transformação de funções densidade de probabilidades.

paradas às funções contínuas e exatas, calculadas utilizando-se o procedimento descrito no Apêndice D. Os resultados ilustrados na Fig. 15 foram calculados considerando  $\delta_{H^v}=0,05$ . Ao aplicar o teste de hipóteses qui-quadrado às curvas é possível afirmar, com nível de significância superior a 99,99%, que os resultados obtidos através da simulação de Monte Carlo concordam com os valores analíticos esperados. Esse resultado comprova que o método de Monte Carlo é uma ferramenta bastante eficiente quando aplicada à solução de processos estocásticos.

### 3.3.4 Resultados obtidos com o modelo não paramétrico

A Fig. 16 apresenta a resposta  $\{a_L^v(\omega)\}$  obtida com o modelo médio, em preto, juntamente com a região de 99% de confiança, em cinza, calculada utilizando-se o modelo não paramétrico para diferentes valores de  $\delta_M^v$ ,  $\delta_C^v$  e  $\delta_K^v$ . De maneira análoga ao caso paramétrico, as incertezas na resposta do modelo aumentam à medida em que os valores de  $\delta_M^v$ ,  $\delta_C^v$  e  $\delta_K^v$  aumentam. Esse comportamento ocorre pelo fato de a dispersão do  $i$ -ésimo autovalor das matrizes aleatórias obtidas com a modelagem não paramétrica sempre aumentar com o seu respectivo posto  $i$  (SOIZE, 2005b). A maior dificuldade envolvendo a modelagem não paramétrica

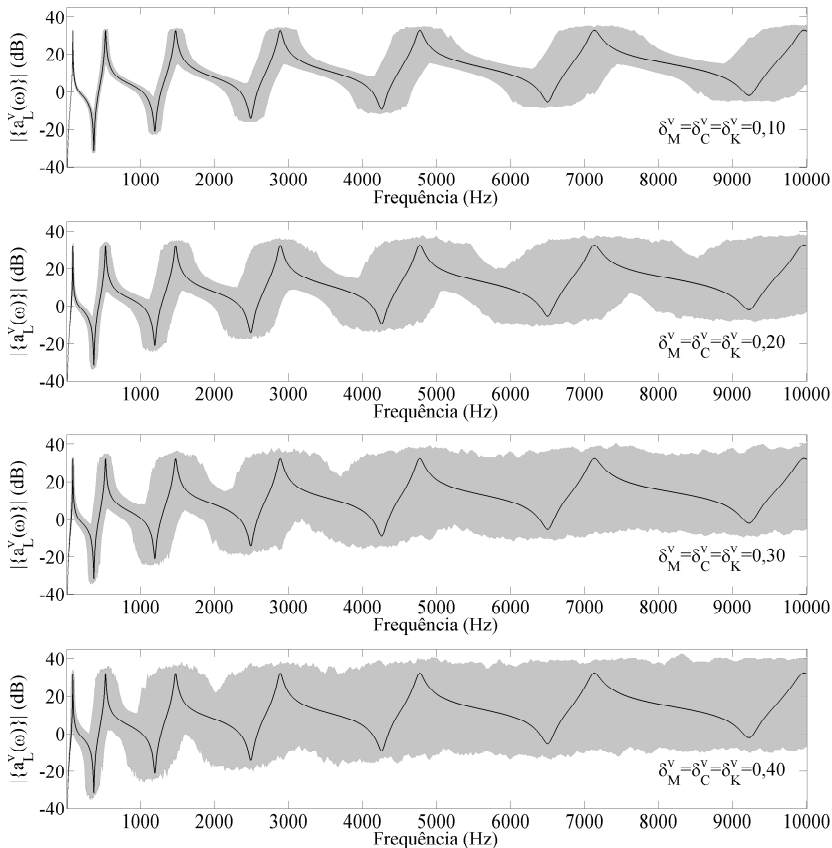


Figura 16 – Espectro de aceleração do modelo médio, em preto, juntamente com as respectivas regiões de 99% de confiança, em cinza, calculadas utilizando-se  $\delta_M^v = \delta_C^v = \delta_K^v$  iguais a 0,10, 0,20, 0,30 e 0,40.

encontra-se na determinação dos valores de  $\delta_M^v$ ,  $\delta_C^v$  e  $\delta_K^v$ . Enquanto no modelo paramétrico a dispersão dos resultados é controlada por  $\delta_H^v$ , valor que pode ser obtido diretamente a partir da medição da altura de um determinado número de estruturas, os valores de  $\delta_M^v$ ,  $\delta_C^v$  e  $\delta_K^v$  representam distâncias entre matrizes e, conseqüentemente, não podem ser obtidos de maneira direta. Algumas metodologias para estimar os

valores  $\delta_M^v$ ,  $\delta_C^v$  e  $\delta_K^v$  serão discutidas neste trabalho, enquanto outras estratégias podem ser acessadas em algumas referências disponíveis na literatura (SOIZE, 2005a; CAPIEZ-LERNOUT et al., 2006; SOIZE et al., 2008; RITTO; SAMPAIO; ROCHINHA, 2011).

### 3.4 Diferenças entre as duas abordagens

Como visto na última seção, as abordagens paramétrica e não paramétrica podem ser utilizadas para a modelagem de sistemas incertos. Porém, os objetivos das duas abordagens probabilísticas são um pouco distintos. Na Fig. 17, à esquerda, está representada a operação de um modelo determinístico dependente de um conjunto de parâmetros  $g$ . Esse modelo determinístico pode ser interpretado, graficamente, como

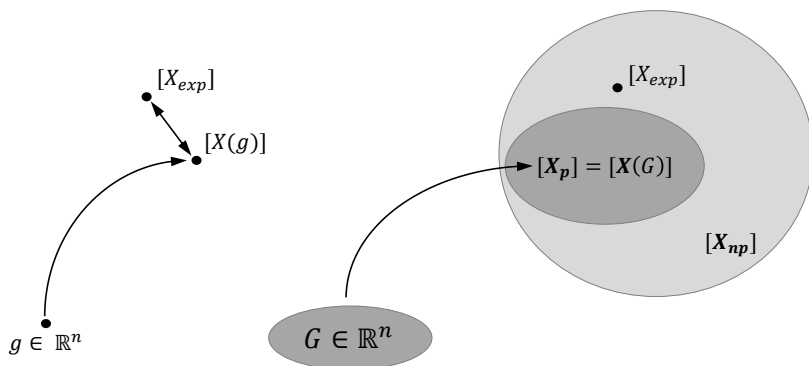


Figura 17 – Resposta do modelo determinístico, à esquerda, confrontada com as respostas do modelo probabilístico paramétrico (cinza escuro) e não paramétrico (cinza claro), à direita.

uma transformação que leva  $g$  aos operadores do modelo médio  $[X(g)]$ . Devido às incertezas associadas ao processo de modelagem, observa-se que os operadores construídos com o modelo médio diferem das matrizes  $[X_{exp}]$  que representam as respostas dos sistemas reais. Esse comportamento justifica a aplicação de algum método de modelagem de incertezas para o sistema da Fig. 10.

Com a finalidade de descrever o sistema real  $[X_{exp}]$ , admite-se a aplicação de uma abordagem probabilística paramétrica para o modelo. Desse modo, os parâmetros  $g$  deixam de ser constantes e passam a ser

variáveis aleatórias  $G$  compatíveis com as restrições do problema físico. De posse de um modelo probabilístico para  $G$ , o conjunto de operadores gerados por esse modelo refletem as respostas admissíveis  $[\mathbf{X}_p]$  de uma modelagem paramétrica obtida pelo mapeamento  $[\mathbf{X}(G)]$ . Para o caso em que as incertezas do modelo estão ao nível dos parâmetros, necessariamente o conjunto de operadores gerados por essa abordagem engloba a resposta experimental  $[X_{exp}]$ . Porém, para o caso em que as incertezas estão presentes ao nível da formulação do modelo físico, a resposta  $[X_{exp}]$  poderá estar fora do conjunto de operadores gerados pela abordagem paramétrica. A título de exemplo, a construção de um modelo incerto para a altura de uma viga, como aquele descrito na Subseção 3.2.1, não é capaz de levar em conta as limitações do modelo de vigas de Euler-Bernoulli. O comportamento de uma abordagem probabilística paramétrica pode ser acessado, através de um diagrama de Venn, na Fig. 17 à direita, onde as regiões em cinza escuro identificam os conjuntos admissíveis de  $G$  e  $[X_p]$ .

Para contornar a limitação da abordagem probabilística paramétrica, admite-se a construção de um modelo probabilístico ao nível dos operadores. Essa abordagem não paramétrica (SOIZE, 2000) modela, diretamente, os operadores do sistema como matrizes aleatórias  $[\mathbf{X}_{np}]$  e, além disso, obriga esse conjunto gerado a conter as respostas dos sistemas físicos  $[X_{exp}]$ . Essa característica faz com que a abordagem não paramétrica consiga levar em conta, de maneira conjunta, as incertezas dos parâmetros e do próprio modelo físico proposto. Essa característica pode ser acessada na Fig. 17, à direita, onde a região em cinza claro indica o conjunto de operados admissíveis em uma abordagem não paramétrica. Vale ressaltar que a geração do conjunto  $[\mathbf{X}_{np}]$  deve respeitar as restrições físicas do problema, como aquelas descritas na Subseção 3.2.2. Para um exemplo em que a abordagem probabilística não paramétrica é comparada à paramétrica quando aplicadas a um sistema dinâmico simples, sugere-se a leitura da Referência (SAMPAIO; CATALDO, 2010), enquanto algumas consequências físicas da abordagem não paramétrica podem ser acessadas nas Referências (LEGAULT; LANGLEY; WOODHOUSE, 2012; LEGAULT; WOODHOUSE; LANGLEY, 2012).

### 3.5 Determinação dos parâmetros $\delta_M^v$ , $\delta_C^v$ e $\delta_K^v$ através de análise modal experimental

Como visto na Subseção 3.2.2, as dispersões das matrizes  $[\mathbf{M}_{np}^v]$ ,  $[\mathbf{C}_{np}^v]$  e  $[\mathbf{K}_{np}^v]$ , geradas através da abordagem não paramétrica, são controladas pelos respectivos coeficientes de dispersão  $\delta_M^v$ ,  $\delta_C^v$  e  $\delta_K^v$ .



Desse modo, a determinação desses parâmetros é parte decisiva do modelo, sendo que esta seção apresenta uma estratégia para o cálculo desse valores baseados em resultados de análise modal experimental. Essa abordagem encontra-se discutida e validada experimentalmente em alguns trabalhos na literatura (SOIZE, 2005a; SOIZE, 2005b; CHEN; DUHAMEL; SOIZE, 2006). Por conta disso, essa estratégia será utilizada em um exemplo numérico envolvendo o modelo estocástico construído para a viga Euler-Bernoulli na Subseção 3.2.2, buscando aproximar a aplicação numérica de aplicações envolvendo ensaios experimentais.

### 3.5.1 Definição do problema

Durante a modelagem de um sistema, tanto a variabilidade dos parâmetros quanto as incertezas no modelo costumam estar presentes. Para exemplificar esta situação, considere o sistema da Fig. 18, que

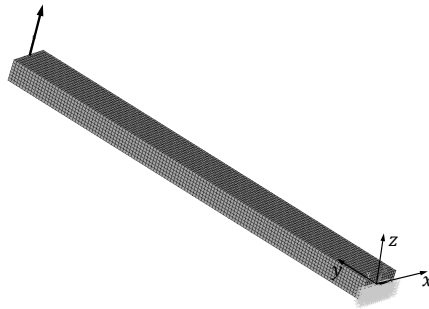


Figura 18 – Malha da viga analisada utilizando-se a teoria dos sólidos.

consiste em uma viga modelada utilizando-se a teoria elástica dos sólidos. Esta estrutura possui exatamente as mesmas propriedades mecânicas e geométricas da viga Euler-Bernoulli da seção anterior e encontra-se engastada, apenas, em parte de um extremo, como indicado na mesma imagem. Além disso, considere que, devido às limitações de um determinado processo de manufatura, ao se construir uma família de estruturas similar à viga da Fig. 18, esse componente apresente variabilidade na sua altura e, ainda, que este comportamento possa ser perfeitamente descrito por uma função densidade de probabilidade gama com coeficiente de variação de 1%. De posse dessa lei de probabilidades, torna-se possível gerar um conjunto de valores admissíveis para a altura

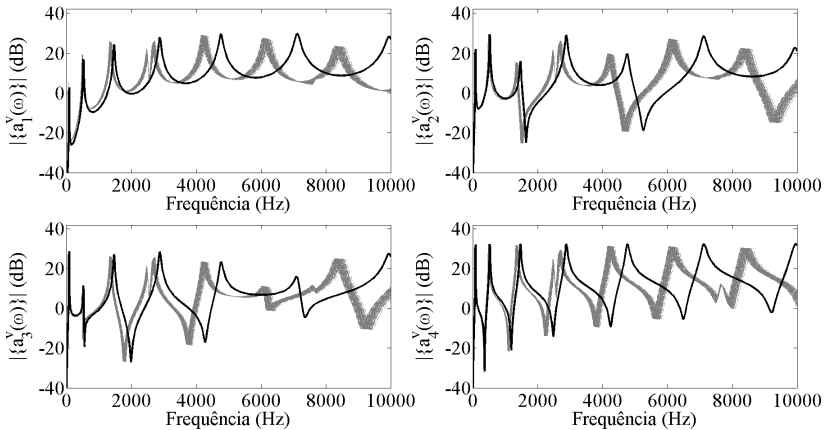


Figura 19 – Acelerâncias calculadas utilizando-se o modelo médio Euler-Bernoulli, em preto, e as 100 respostas utilizando a teoria elástica dos sólidos, em cinza. Os quatro espectros distintos representam as posições  $3L^v/21$  (acima, esquerda),  $10L^v/21$  (acima, direita),  $16L^v/21$  (abaixo, esquerda) e a resposta pontual em  $L^v$  (abaixo, direita).

da viga e, então, calcular a resposta de cada indivíduo do conjunto seguindo o modelo de elasticidade tridimensional. A Fig. 19 ilustra as FRFs simuladas para 100 vigas obtidas comparadas às respectivas respostas do modelo Euler-Bernoulli médio, construído na Subseção 3.1.1. Essas FRFs foram obtidas excitando-se a viga na extremidade, como mostra a flecha da Fig. 18, e medindo-se as respostas em pontos distintos ( $3L^v/21$ ,  $10L^v/21$ ,  $16L^v/21$  e  $L^v$ ) da linha média da mesma face. Essa configuração foi adotada visando-se simular os resultados obtidos em um ensaio harmônico, onde impacta-se a estrutura em uma das extremidades e coleta-se as respectivas acelerações através de acelerômetros. A partir dos espectros da Fig. 19, é possível identificar a variabilidade nas respostas, devido à variabilidade na altura das estruturas, e também às limitações do modelo médio. O modelo Euler-Bernoulli não é capaz de representar, por exemplo, a região limitada de engaste da estrutura sólida. Além disso, o modelo médio Euler-Bernoulli não prevê os modos de torção da estrutura, cujas respectivas respostas podem ser identificadas nos espectros da Fig. 19. Admitindo-se que as

respostas obtidas utilizando-se a teoria elástica tridimensional tenham sido obtidas, por exemplo, através de um ensaio experimental, este é um caso bastante evidente em que as incertezas no modelo mecânico-matemático proposto (viga Euler-Bernoulli) encontram-se presentes ao nível dos dados e também da própria formulação do modelo.

### 3.5.2 Cálculo dos parâmetros

Com a finalidade de determinar os valores ótimos de  $\delta_M^v$ ,  $\delta_C^v$  e  $\delta_K^v$ , apresenta-se uma estratégia para o cálculo destes parâmetros a partir de resultados de análise modal experimental (SOIZE, 2005a). Deste modo, seja  $[\Phi^{exp}(k)]$  a  $k$ -ésima matriz, de dimensão  $n_{exp} \times m_{exp}$ , cujas colunas representam as formas modais associadas às  $m_{exp}$  frequências naturais estimadas a partir dos  $n_{exp}$  graus de liberdade de medição. De maneira análoga, define-se  $[\Psi^{num}]$  como uma matriz, de dimensão  $n_{exp} \times m_{exp}$ , obtida com o modelo mecânico-matemático médio, cujas colunas e linhas representam os mesmos modos e graus de liberdade medidos em  $[\Phi^{exp}(k)]$ . De posse das massas  $\mu_q^{exp}(k)$  e dos amortecimentos  $\xi_q^{exp}(k)$  dos  $q$ -ésimos modos naturais de vibração da  $k$ -ésima estrutura, obtidos experimentalmente, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez experimentais podem ser construídas, respectivamente, como os operadores diagonais  $[\hat{M}^{exp}(k)] = \mu_i^{exp}(k) \delta_{ij}$ ,  $[\hat{C}^{exp}(k)] = 2\xi_q^{exp}(k) \mu_q^{exp}(k) \omega_q^{exp}(k) \delta_{ij}$  e  $[\hat{K}^{exp}(k)] = \mu_q^{exp}(k) (\omega_q^{exp}(k))^2 \delta_{ij}$ . Devido à presença de incertezas nos parâmetros e no próprio modelo médio proposto, as matrizes  $[\Phi^{exp}(k)]$  diferem de  $[\Psi^{num}]$  e, conseqüentemente, as matrizes reduzidas  $[\hat{M}^{exp}(k)]$ ,  $[\hat{C}^{exp}(k)]$  e  $[\hat{K}^{exp}(k)]$  estão definidas em um subespaço vetorial diferente das matrizes  $[M_{m_v}^v]$ ,  $[C_{m_v}^v]$  ou  $[K_{m_v}^v]$  do modelo médio reduzido. Essa característica faz com que as matrizes não possam ser comparadas diretamente (SOIZE, 2005a). Porém, é conhecido que o processo estocástico do sistema  $\{\mathbf{u}^{exp}(k, \omega)\}$  independe do espaço vetorial utilizado para representá-lo e, conseqüentemente,

$$\{\mathbf{u}^{exp}(k, \omega)\} = [\Phi^{exp}(k)] \{\hat{\mathbf{q}}^{exp}(k, \omega)\} \simeq [\Psi^{num}] \{\mathbf{q}^{num}(\omega)\}, \quad (3.23)$$

onde  $\{\hat{\mathbf{q}}^{exp}(k)\}$  representa as coordenadas generalizadas experimentais e  $\{\mathbf{q}^{num}(k)\}$  as respectivas coordenadas generalizadas do modelo médio. De posse da igualdade anterior é possível, após algumas operações algébricas, afirmar que

$$\{\hat{\mathbf{q}}^{exp}(k, \omega)\} = [T^{exp}(k)] \{\mathbf{q}^{num}(k, \omega)\}, \quad (3.24)$$

onde  $[T^{exp}(k)] = ([\Phi^{exp}(k)]^T [\Phi^{exp}(k)])^{-1} [\Phi^{exp}(k)]^T [\Psi^{num}]$  é a matriz mudança de base que leva  $\{\mathbf{q}^{num}(\omega)\}$  à  $\{\hat{\mathbf{q}}^{exp}(k, \omega)\}$ . De posse do opera-

dor  $[T^{exp}(k)]$  é possível reescrever as matrizes  $[\hat{M}^{exp}(k)]$ ,  $[\hat{C}^{exp}(k)]$  e  $[\hat{K}^{exp}(k)]$  na mesma base vetorial de  $[M_{m_v}^v]$ ,  $[C_{m_v}^v]$  e  $[K_{m_v}^v]$  tal que

$$[M^{exp}(k)] = [T^{exp}(k)]^T [\hat{M}^{exp}(k)] [T^{exp}(k)], \quad (3.25)$$

$$[C^{exp}(k)] = [T^{exp}(k)]^T [\hat{C}^{exp}(k)] [T^{exp}(k)], \quad (3.26)$$

$$[K^{exp}(k)] = [T^{exp}(k)]^T [\hat{K}^{exp}(k)] [T^{exp}(k)], \quad (3.27)$$

onde  $[M^{exp}(k)]$ ,  $[C^{exp}(k)]$  e  $[K^{exp}(k)]$  são as matrizes de massa, rigidez e amortecimento escritas no mesmo espaço vetorial do modelo médio. Estas matrizes podem ser, então, comparadas aos operadores do modelo médio visando a determinação dos parâmetros  $\delta_M^v$ ,  $\delta_C^v$  e  $\delta_K^v$ . Ao se introduzir a nova notação  $[A^{exp}(k)]$  relativa a qualquer operador  $[M^{exp}(k)]$ ,  $[C^{exp}(k)]$  ou  $[K^{exp}(k)]$  e, lembrando, que  $[A_{m_v}^v] = [L_{m_v}^v]^T [L_{m_v}^v]$  identificada qualquer matriz reduzida  $[M_{m_v}^v]$ ,  $[C_{m_v}^v]$  ou  $[K_{m_v}^v]$  do modelo médio, torna-se possível definir um novo operador  $[G^{exp}(k)]$  tal que  $[A^{exp}(k)] = [L_{m_v}^v]^T [G^{exp}(k)] [L_{m_v}^v]$ , obtendo-se a igualdade

$$[G^{exp}(k)] = [L_{m_v}^v]^{-T} [A^{exp}(k)] [L_{m_v}^v]^{-1}. \quad (3.28)$$

Admitindo-se que tenham sido ensaiadas  $p_{exp}$  estruturas e recorrendo-se à definição do coeficiente de dispersão  $\delta_A^v$  na Eq. 3.18, tem-se que

$$\delta_A^v = \left\{ \frac{1}{p_{exp} m_{exp}} \sum_{k=1}^{s_{exp}} \| [G^{exp}(k)] - [I_{m_{exp}}] \|_F^2 \right\}^{1/2}, \quad (3.29)$$

onde  $[I_{m_{exp}}]$  representa a matriz identidade de ordem  $m_{exp}$ . Desse modo, a equação anterior oferece uma alternativa, amparada na definição do coeficiente de dispersão de uma matriz aleatória, para estimar os valores de  $\delta_M^v$ ,  $\delta_C^v$  e  $\delta_K^v$  com base em resultados obtidos do ensaio de análise modal experimental.

### 3.5.3 Resultados simulados

A metodologia descrita na subseção anterior foi aplicada aos resultados numéricos das 100 vigas obtidos utilizando-se a teoria elástica dos sólidos. Desse modo, os dados utilizados para o cálculo de  $\delta_M^v$ ,  $\delta_C^v$  e  $\delta_K^v$  são gerados a partir de um modelo numérico que simula os resultados passíveis de medição em uma análise modal experimental.

Após analisar as respostas dinâmicas de  $m_{exp} = 7$  modos das  $p_{exp} = 100$  estruturas a partir dos deslocamentos lineares nos 22 nós cujas localizações coincidem com a posição dos nós do modelo médio, torna-se possível estimar os valores de  $\delta_M^v = 0,22$ ,  $\delta_C^v = 0,19$  e  $\delta_K^v =$

0, 26. Os resultados obtidos com o modelo probabilístico não paramétrico, calculados utilizando-se os coeficientes anteriores, estão apresentados na Fig. 20. A partir dos resultados obtidos é possível identificar que

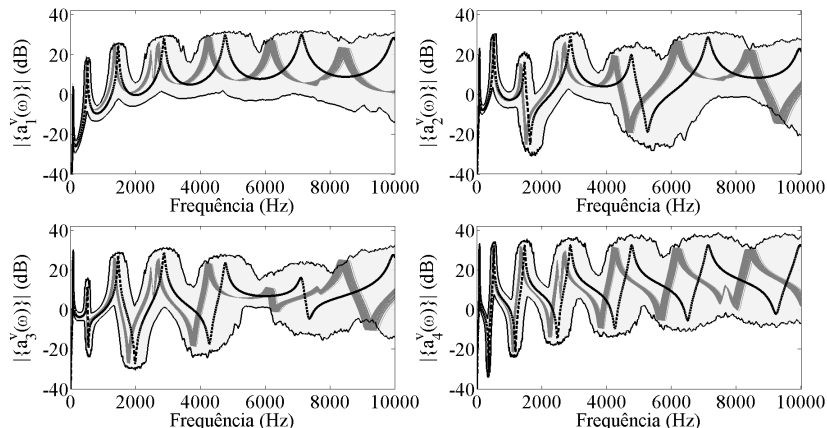


Figura 20 – Respostas calculadas com base no modelo Euler-Bernoulli, em preto tracejado, juntamente com 100 respostas utilizando-se a teoria tridimensional, em cinza. A região em cinza claro delimitada pelas linhas pretas indica o envelope de 99% de confiança obtido com o modelo probabilístico não paramétrico utilizando-se os valores ótimos  $\delta_M^v$ ,  $\delta_C^v$  e  $\delta_K^v$ .

a grande maioria das FRFs obtidas com o modelo de elasticidade dos sólidos encontra-se dentro da região de confiança calculada, fato que valida o modelo estocástico. Algumas regiões estão fora do envelope de confiança pelo fato de que esta região foi calculada para um nível de 99% de confiança, e não de 100%, como considera a esta metodologia (CHEN; DUHAMEL; SOIZE, 2006).

### 3.6 Síntese do capítulo

Essa seção apresentou os procedimentos necessários para a construção de dois modelos probabilísticos distintos aplicados a problemas de dinâmica linear de estruturas. Desse modo, os principais desenvolvimentos desse capítulo são:

1. construiu-se um modelo determinístico, com base na teoria de Euler–Bernoulli, para o problema de flexão de viga apresentado;
2. identificaram-se as restrições físicas admissíveis para a altura de uma viga  $e$ , a partir dessas informações, determinou-se o melhor modelo probabilístico para o problema segundo o PME;
3. identificaram-se as restrições para as matrizes do modelo numérico construído  $e$ , a partir desses resultados, construiu-se um modelo probabilístico não paramétrico para o problema utilizando o PME;
4. discutiram-se as principais diferenças nas duas abordagens probabilísticas apresentadas;
5. apresentou-se uma metodologia para a solução de problemas inversos em modelos não paramétricos considerando-se resultados obtidos em ensaios de análise modal experimental.

## 4 Tubo de descarga

Este capítulo tem como principal objetivo a caracterização e a quantificação de incertezas no modelo estrutural do tubo de descarga de um compressor hermético. Esse componente é o responsável pela conexão do cabeçote do cilindro de compressão à carcaça do compressor, levando o fluido refrigerante ao sistema de refrigeração. Com a finalidade de reduzir os níveis de vibração dos mecanismos de compressão à carcaça, a geometria do tubo de descarga apresenta um conjunto de curvaturas e segmentos de reta bastante particulares. Além disso, devido à baixa rigidez dinâmica, as primeiras frequências naturais do tubo tornam-se muito baixas, próximas às frequências de operação de 50 ou 60 Hz do compressor (GAERTNER, 2008; BORTOLI; SILVA, 2012). Assim, pequenas variações na configuração original da estrutura podem levar o sistema a excitar as ressonâncias do tubo.

Para avaliar as incertezas nas respostas do modelo proposto, duas abordagens probabilísticas distintas são empregadas. O primeiro modelo estocástico, construído a partir do modelo probabilístico dos parâmetros da estrutura, é utilizado para determinar a sensibilidade do tubo de descarga mediante pequenas variações em sua configuração original, enquanto o segundo modelo estocástico, construído ao nível dos operadores, é utilizado para descrever o comportamento dinâmico da estrutura mediante incertezas nos dados e também no próprio modelo mecânico-matemático proposto.

### 4.1 Modelo médio

A Fig. 21 ilustra a geometria típica do tubo de descarga de um compressor hermético. Trata-se de uma estrutura tubular de aço cobreado, com módulo de elasticidade  $\underline{E}^t=200$  GPa, coeficiente de Poisson  $\underline{\nu}^t=0,3$ , densidade  $\underline{\rho}^t=7870$  kg/m<sup>3</sup>, diâmetro externo  $\underline{d}^t=3,2$  mm e espessura  $\underline{t}^t=0,5$  mm. Para determinar, matematicamente, a resposta dinâmica da estrutura quando excitada por esforços externos, a sua geometria foi discretizada utilizando-se o método dos elementos finitos. Essa modelagem foi realizada com o auxílio do código comercial ANSYS® (ANSYS, 1999), descrevendo-se cada elemento como uma viga Euler-Bernoulli com dois nós por elemento e seis graus de liberdade por nó. O conector acoplado à viga é modelado, de maneira simplificada,

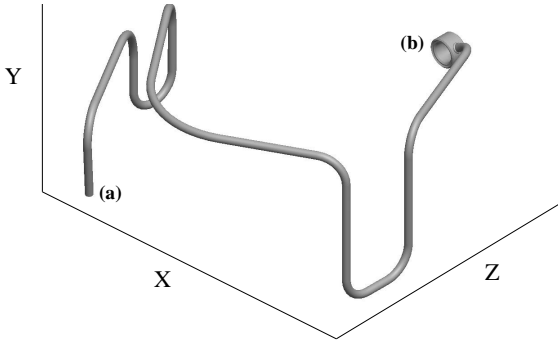


Figura 21 – Vista isométrica do tubo de descarga analisado.

como um ponto de massa de  $c^t = 4,25$  g. Levar em conta o conector durante o processo de modelagem é muito importante, uma vez que a sua massa é, aproximadamente, 20% da massa total do tubo. A estrutura encontra-se engastada em **(a)** e livre em **(b)** (ver Fig. 21), onde é excitada por uma força externa pontual e unitária na direção  $Z$ .

O sistema linear amortecido, modelado utilizando-se o método dos elementos finitos, pode ser representado, no domínio da frequência, como

$$(-\omega^2[M_{n_t}^t] + j\omega[C_{n_t}^t] + [K_{n_t}^t]) \{u_{n_t}^t(\omega)\} = \{f^t(\omega)\}, \quad (4.1)$$

onde  $[M_{n_t}^t]$ ,  $[C_{n_t}^t]$  e  $[K_{n_t}^t]$  são, respectivamente, as matrizes de massa, rigidez e amortecimento da estrutura, enquanto  $\{f^t(\omega)\}$  e  $\{u_{n_t}^t(\omega)\}$  são os vetores dos graus de liberdade (deslocamentos e rotações) e excitações externas (forças e torques) do modelo. Os vetores de deslocamentos  $\{u_{n_t}^t(\omega)\}$  e de acelerações  $\{a_{n_t}^t(\omega)\}$  podem ser calculados, como visto no capítulo anterior, invertendo-se a matriz de rigidez dinâmica do modelo.

#### 4.1.1 Modelo reduzido

Com a finalidade de se diminuir o número de operações algébricas utilizando as matrizes  $[M_{n_t}^t]$ ,  $[C_{n_t}^t]$  e  $[K_{n_t}^t]$  e, conseqüentemente, reduzir o custo computacional, o vetor de respostas  $\{u_{n_t}^t(\omega)\}$  pode ser aproximado por  $\{u_{m_t}^t(\omega)\}$  através do processo de expansão modal descrito na Subseção 3.1.1. Desse modo, resolve-se o problema de autovalores e autovetores generalizados similar ao descrito na Eq. 3.6 e constroem-se as matrizes de massa  $[M_{m_t}^t]$ , amortecimento  $[C_{m_t}^t]$  e rigidez  $[K_{m_t}^t]$  reduzi-



das com base na Eq. 3.9. No que segue, os vetores de respostas  $\{u_{m_t}^t(\omega)\}$  e as respectivas acelerações  $\{a_{m_t}^t(\omega)\}$  aproximadas podem ser calculadas através das relações descritas nas Eqs. 3.7 e 3.8. Para a construção da matriz de amortecimento  $[C_{m_t}^t]$  do modelo reduzido, admite-se a hipótese de amortecimento modal  $\xi_1^t = \xi_2^t = \dots = \xi_{m_t}^t = 0.001\%$  constante, onde o fator de amortecimento pode ser estimado a partir de resultados experimentais.

## 4.2 Modelos estocásticos

Para avaliar as incertezas na resposta estrutural do tubo de descarga, um modelo probabilístico paramétrico e outro não paramétrico são construídos e analisados separadamente. Desse modo, o modelo paramétrico identifica os parâmetros mais relevantes com respeito à variabilidade na resposta da estrutura, enquanto o não paramétrico constrói um modelo capaz de representar a resposta dinâmica do tubo de descarga levando-se em conta as incertezas nos parâmetros e as limitações do modelo mecânico-matemático proposto.

### 4.2.1 Modelo probabilístico paramétrico

Seja  $\{p^t\} = \{p_1^t, p_2^t, \dots, p_{46}^t\}$  um vetor contendo 46 parâmetros do tubo de descarga, como o comprimento de alguns segmentos da estrutura, raios de curvatura, ângulos de inclinação, módulo de elasticidade, amortecimento modal, massa do conector, etc. Desse modo, as matrizes  $[M_{n_t}^t]$ ,  $[C_{n_t}^t]$  e  $[K_{n_t}^t]$  e, conseqüentemente, o vetor dos graus de liberdade  $\{u_{n_t}^t\}$  do modelo, construído em elementos finitos, são funções dos componentes de  $\{p^t\}$ . Durante a modelagem probabilística paramétrica, o vetor  $\{p^t\}$  é modelado como um vetor aleatório  $\{P^t\}$  cujos  $k$ -ésimos elementos  $P_k^t$  são variáveis gaussianas independentes e caracterizadas pelas suas respectivas médias  $\mu_k^t$  e desvios padrão  $\sigma_k^t$ . De fato, a aplicação do PME aos parâmetros incertos do modelo deve levar a outras leis de probabilidades para algumas variáveis aleatórias do problema. Porém, tem-se o interesse em estudar o sistema quando sujeito a baixos níveis de incerteza, levando as diferenças entre as funções de máxima entropia e as gaussianas a serem pequenas a ponto de serem negligenciadas. Uma outra simplificação importante admitida para o modelo probabilístico adotado é a independência das variáveis aleatórias. De fato, o processo de manufatura do tubo de descarga deve correlacionar alguns parâmetros do modelo probabilístico. Porém, na ausência de informação a respeito dessa correlação, o PME estabelece que o melhor modelo é

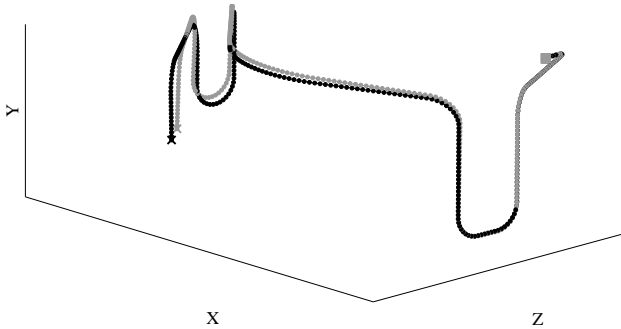


Figura 22 – Vista isométrica de duas malhas obtidas com o modelo paramétrico. Os pontos ilustram a localização dos nós das malhas, enquanto o quadrado e as cruzeiras indicam as posições do conector e dos engastes, respectivamente.

aquele que considera os parâmetros incertos como variáveis aleatórias independentes. Desse modo, as matrizes determinísticas  $[M_{n_t}^t]$ ,  $[C_{n_t}^t]$  e  $[K_{n_t}^t]$  são substituídas pelas matrizes aleatórias  $[M_{\mathbf{p}}^t]$ ,  $[C_{\mathbf{p}}^t]$  e  $[K_{\mathbf{p}}^t]$ , cuja construção algébrica encontra-se amparada no modelo probabilístico de  $\{P^t\}$ . A Fig. 22 ilustra duas malhas distintas, obtidas de maneira aleatória com o modelo probabilístico paramétrico, admitindo-se que todos os coeficientes de variação  $\delta_k^t = \sigma_k^t / \mu_k^t$  dos parâmetros geométricos da estrutura são iguais a 1% ( $\delta_k^t = 0,01$ ), exceto para os parâmetros angulares, cujo desvio padrão é admitido como  $1^\circ$ . O processo estocástico  $\{\mathbf{u}_{\mathbf{p}}^t(\omega)\}$ , associado à resposta do sistema (similar à Eq. 3.12), pode ser resolvido utilizando-se o método de Monte Carlo direto juntamente com o processo de superposição modal da Subseção 4.1.1.

#### 4.2.2 Modelo probabilístico não paramétrico

Durante o processo de modelagem probabilística não paramétrica, as matrizes reduzidas  $[M_{m_t}^t]$ ,  $[C_{m_t}^t]$  e  $[K_{m_t}^t]$  do sistema são modeladas, diretamente, como matrizes aleatórias  $[M_{\mathbf{np}}^t]$ ,  $[C_{\mathbf{np}}^t]$  e  $[K_{\mathbf{np}}^t]$ . Seja  $[\mathbf{A}_{\mathbf{np}}^t]$  qualquer matriz aleatória  $[M_{\mathbf{np}}^t]$ ,  $[C_{\mathbf{np}}^t]$  ou  $[K_{\mathbf{np}}^t]$ . O modelo probabilístico de  $[\mathbf{A}_{\mathbf{np}}^t]$  pode ser construído utilizando-se a teoria de matrizes aleatórias juntamente com o PME (SOIZE, 2000; ADHIKARI, 2007). Ao se observarem as restrições físicas da matriz  $[\mathbf{A}_{\mathbf{np}}^t]$ , é possível concluir que este operador apresenta exatamente as mesmas restrições de  $[\mathbf{A}_{\mathbf{np}}^v]$ , cujo modelo probabilístico foi construído e discutido no capítulo

anterior. Desse modo, a construção algébrica de  $[\mathbf{A}_{\text{np}}^t]$  segue o procedimento descrito na Subseção 3.2.2 e a resposta do sistema pode ser determinada a partir da superposição das formas modais obtidas com o modelo médio. O processo estocástico  $\{\mathbf{u}_{\text{np}}^t(\omega)\}$ , obtido utilizando-se a modelagem não paramétrica (similar à Eq. 3.21), pode ser resolvido utilizando-se o método de Monte Carlo direto, de maneira similar aos modelos estocásticos anteriores.

### 4.3 Resultados simulados

Nesta seção são apresentados e discutidos alguns resultados numéricos obtidos ao se simular, de maneira determinística e estocástica, o sistema da Fig. 21.

#### 4.3.1 Resultados do modelo médio

Com a finalidade de reduzir os erros devido à discretização do problema em elementos finitos, uma análise de convergência da malha do modelo médio foi feita avaliando-se as frequências naturais do tubo de descarga, de maneira similar à Subseção 3.3.1. Desse modo, após calcular as frequências naturais da estrutura aumentando-se gradativamente o número de elementos utilizados na malha, é possível afirmar que, para uma precisão superior a 99,75% na centésima frequência natural de vibração, torna-se necessário dividir a estrutura em 300 elementos. A

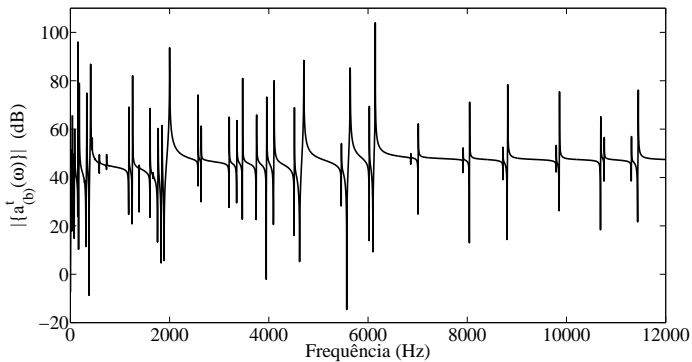


Figura 23 – Espectro de aceleração  $\{a_{(b)}^t(\omega)\}$  calculado utilizando-se o modelo médio.

Fig. 23 mostra o espectro da aceleração,  $\{a_{(b)}^t(\omega)\}$  no ponto (b) e direção Z devido à excitação unitária no mesmo local e direção.

### 4.3.2 Convergência quadrática média

Para garantir que os resultados obtidos com os modelos estocásticos são estatisticamente significativos, torna-se necessário analisar a convergência das respostas do modelo. Com a finalidade de determinar o número mínimo de simulações de Monte Carlo  $s_t$  e a dimensão do modelo reduzido  $m_t$  dos modelos estocásticos, avaliou-se, de maneira similar à Subseção 3.3.2, a função convergência quadrática média

$$\text{Conv}(s_t, m_t) = \left\{ \frac{1}{s_t} \sum_{k=1}^{s_t} \int_{\mathbb{B}^t} |\{a_{(b)}^t(\omega, k)\}|^2 d\omega \right\}^{1/2} \quad (4.2)$$

na faixa  $\mathbb{B}^t = (0, 12000]$  Hz de análise. A Fig. 24 mostra, à esquerda, os gráficos de  $20 \log_{10}(\text{Conv}(s_t, m_t))$  em função de  $s_t$  para  $m_t = 100$  modos, de onde é possível concluir que os modelos convergem com  $s_t = 1200$  simulações. A mesma figura, à direita, apresenta  $20 \log_{10}(\text{Conv}(s_t, m_t))$

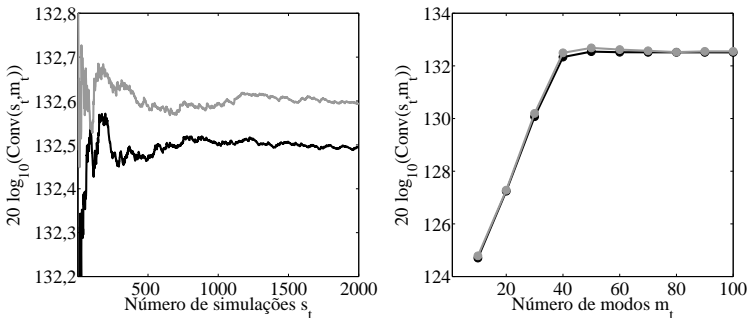


Figura 24 – À esquerda, Eq. 4.2 calculada variando-se  $s_t$  para  $m_t = 100$  e, à direita, a mesma função calculada alterando-se  $m_t$  para  $s_t = 1200$ . Os resultados em preto ilustram os valores calculados utilizando-se o modelo paramétrico e em cinza o não paramétrico.

em função de  $m_t$ , calculados utilizando-se  $s_t = 1200$  realizações. Ao analisar os resultados é possível afirmar que os modelos convergem a partir da superposição de  $m_t = 70$  modos. Para o modelo paramétrico os resultados foram calculados considerando  $\delta_k^t = 0,01$  para todos os

$k$ -ésimos parâmetros, exceto para as variáveis angulares cujo  $k$ -ésimo desvio padrão  $\sigma_k^t$  foi admitido como  $1^\circ$ . Para o modelo não paramétrico os mesmos cálculos foram realizados considerando  $\delta_M^t = \delta_D^t = \delta_K^t = 0,1$ .

### 4.3.3 Resultados obtidos com o modelo paramétrico

A Fig. 25 apresenta a resposta  $\{a_{(b)}^t(\omega)\}$  obtida com o modelo médio, em preto, juntamente com as regiões de 99% de confiança calculadas com o modelo probabilístico paramétrico, em cinza. Os resultados estocásticos foram calculados controlando a variabilidade das estruturas a partir dos valores de  $\delta_k^t$  dos parâmetros do modelo, exceto para as variáveis angulares cuja variação é controlada por  $\sigma_k^t$ . A partir da Fig. 25 é possível identificar que a variabilidade das respostas aumenta com o incremento de  $\delta_k^t$  e  $\sigma_k^t$ , tornando as FRFs bastante sensíveis quando analisadas próximo às regiões de ressonância e anti-ressonância da estrutura.

Por fim, a Fig. 26 apresenta um mapa, em escala de cores, com os coeficientes de correlação de Spearman (GIBBONS; CHAKRABORTI, 2003) entre os parâmetros do modelo estocástico e os valores das frequências naturais da estrutura. Esses valores quantificam a associação entre os parâmetros do modelo e as respectivas frequências naturais, de modo que coeficientes próximos à unidade indicam alta correlação, valores próximos a zero refletem ausência de associação e coeficientes em torno da unidade negativa estabelecem uma anti-correlação. As 6 primeiras colunas da Fig. 26 identificam os parâmetros  $\rho^t$ ,  $E^t$ ,  $d^t$ ,  $t^t$ ,  $c^t$  e  $\nu^t$ , as colunas 7 a 16 representam os comprimentos de alguns segmentos da estrutura, as colunas 17 a 26 ilustram os resultados para os raios de curvatura do modelo, a faixa entre as colunas 27 e 45 identifica os parâmetros referentes aos ângulos de inclinação da geometria analisada, enquanto a última coluna indica os resultados obtidos para o comprimento total do tubo de descarga. Como as frequências naturais não são funções do amortecimento da estrutura, o coeficiente de correlação deste parâmetro do modelo estocástico não foi analisado. A partir dos resultados obtidos, é possível identificar que os parâmetros globais ( $\rho^t$ ,  $E^t$ ,  $d^t$ ,  $t^t$ ,  $c^t$ ,  $\nu^t$  e  $L_{tot}^t$ ) apresentam maior importância ao se observar toda a faixa de frequência da resposta estrutural do tubo de descarga. Porém, em modos particulares, alguns outros parâmetros podem ser importantes devido ao padrão geométrico das respectivas formas modais. Para o caso particular do modo fundamental de vibração é possível identificar que, além dos parâmetros globais, existem alguns parâmetros referentes às inclinações que são relativamente sensíveis nessa faixa

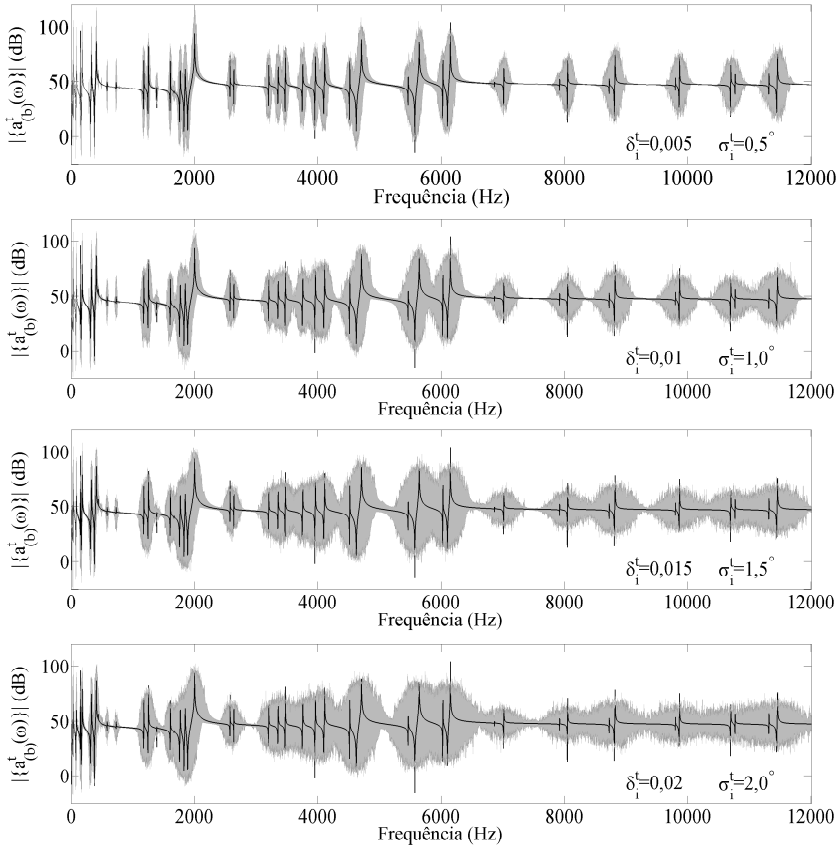


Figura 25 – Espectro de aceleração do modelo médio, em preto, juntamente com as respectivas regiões de 99% de confiança, em cinza, calculadas utilizando-se os valores de  $\delta_k^t$  iguais a 0,005, 0,01, 0,015 e 0,02 e  $\sigma_k^t$  iguais a  $0,5^\circ$ ,  $1,0^\circ$ ,  $1,5^\circ$  e  $2,0^\circ$ .

de frequência. À medida que a frequência aumenta, mais parâmetros geométricos locais começam a se tornar importantes devido à sensibilidade estrutural em altas frequências. Porém, nenhum padrão para os parâmetros locais pode ser identificado quando analisa-se toda a faixa de frequência calculada.

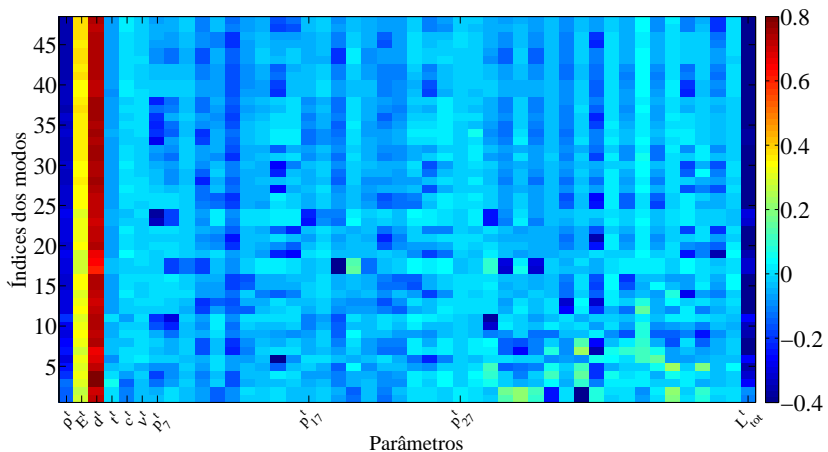


Figura 26 – Mapa de correlação entre os parâmetros do modelo estocástico e as frequências naturais da estrutura.

#### 4.3.4 Resultados obtidos com o modelo não paramétrico

A Fig. 27 mostra os resultados de  $\{a_{(b)}^t(\omega)\}$  obtidos com o modelo médio, em preto, juntamente com as regiões de 99% de confiança calculadas utilizando-se o modelo não paramétrico. A partir dos resultados é possível observar que a dispersão das FRFs aumenta com o incremento de  $\delta_M^t$ ,  $\delta_C^t$  e  $\delta_K^t$ . De maneira similar ao caso paramétrico, é possível identificar que, mesmo para baixos valores de  $\delta_M^t$ ,  $\delta_C^t$  e  $\delta_K^t$ , o espectro da resposta dinâmica do tubo de descarga se torna bastante sensível próximo às regiões de ressonância da estrutura.

Embora os modelos probabilísticos paramétrico e não paramétrico operem de maneiras distintas, quando analisados de maneira conjunta oferecem uma possibilidade de estimar, separadamente, a sensibilidade das respostas às incertezas nos parâmetros e no próprio modelo mecânico-matemático proposto. Essa análise foi proposta por CAPIEZ-LERNOUT et al. (2006) e aplicada ao tubo de descarga analisado (FONTANELA; LENZI; SILVA, 2014). Os resultados mostram que o modelo estrutural é robusto às incertezas nos parâmetros e no modelo em frequências inferiores a 500 Hz, passa a ser sensível mediante incertezas nos parâmetros e também no modelo entre 500 Hz e 5 kHz e, para frequências superiores a esse valor, a sensibilidade do próprio modelo é mandatória. Essa me-

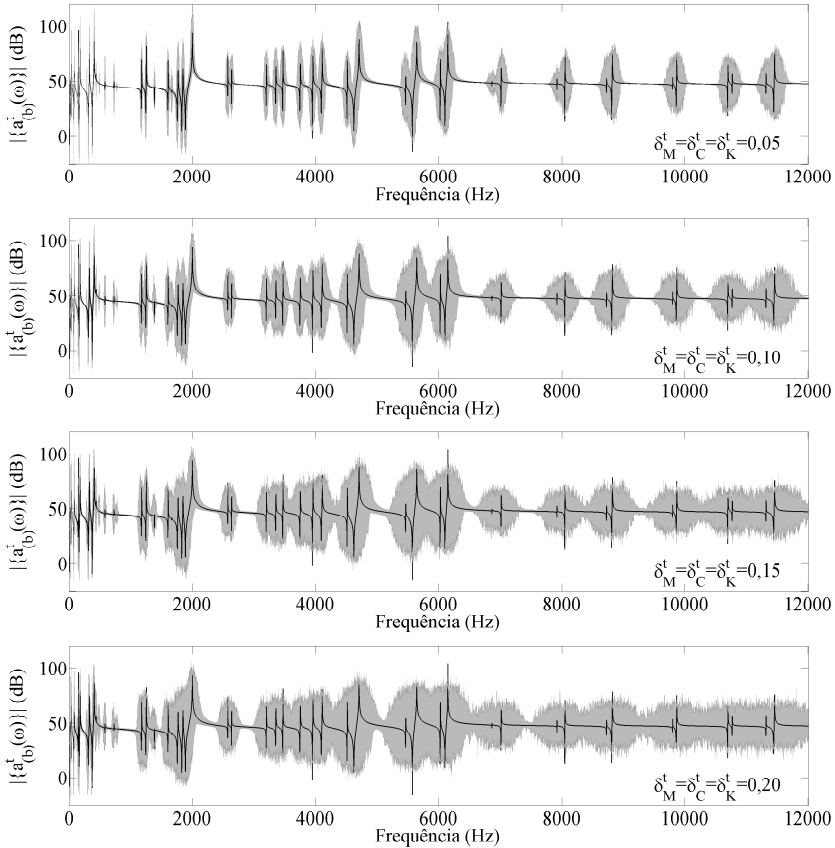


Figura 27 – Espectro de aceleração do modelo médio, em preto, juntamente com as respectivas regiões de 99% de confiança, em cinza, calculadas utilizando-se  $\delta_M^t = \delta_C^t = \delta_K^t$  e iguais a 0,05, 0,10, 0,15 e 0,20.

todo a metodologia de análise opera com a construção dos modelos paramétrico e não paramétrico separadamente e, conseqüentemente, não é capaz de criar um único modelo que distingue, de fato, a contribuição das incertezas nos parâmetros e no modelo. Quando os modelos probabilísticos paramétrico e não paramétrico são construídos de maneira conjunta, a partir da abordagem probabilística paramétrica generalizada (SOIZE,



2010), essas contribuições podem ser quantificadas e, conseqüentemente, utilizadas em critérios de projeto. Um exemplo que envolve a abordagem probabilística generalizada quando aplicada a uma estrutura complexa pode ser acessado na literatura (BATOU; SOIZE; AUDEBERT, 2014).

#### 4.4 Resultados experimentais

Esta seção apresenta o procedimento experimental e os respectivos resultados obtidos a partir de um ensaio dinâmico com um conjunto de tubos de descarga, nominalmente idênticos, utilizados em compressores herméticos. Esses tubos foram retirados, aleatoriamente, do processo de manufatura em tempos distintos, além de terem sido obtidos de três diferentes lotes de fabricação. A Fig. 28 ilustra a configuração estrutural adotada durante os testes.

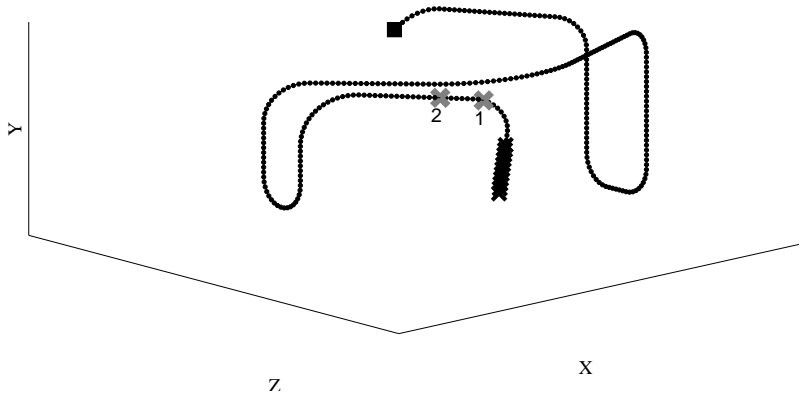


Figura 28 – Configuração adotada durante os ensaios experimentais. As cruzes pretas indicam a região de engaste, enquanto as cruzes cinzas 1 e 2 identificam, respectivamente, as posições de excitação e medição da resposta.

Devido à dificuldade de engastar a estrutura em um único ponto, optou-se por fixar uma região do tubo de descarga, como mostram as cruzes pretas da Fig. 28. Para garantir que a estrutura encontra-se suficientemente presa, construiu-se um gabarito de aço, com massa muito superior à massa do tubo de descarga, como mostrado na Fig 29, à esquerda. O gabarito foi, então, fixado a um bloco de concreto com o

auxílio de uma morsa de bancada, como apresentado na Fig 29, à direita. Na Fig. 28, a cruz cinza identificada com o número 1 indica a posição



Figura 29 – À esquerda, gabarito utilizado para a fixação do tubo de descarga e, à direita, gabarito fixado ao bloco de concreto.

da excitação aplicada com um martelo instrumentado, com ponteira de aço, enquanto a cruz cinza identificada com o número 2 mostra o ponto de medição da velocidade da estrutura a partir da utilização de um vibrômetro a laser. Tanto a força provida pelo martelo quanto a velocidade obtida pelo vibrômetro foram medidas na direção Y da Fig. 28.

Com a finalidade de avaliar a precisão do procedimento experimental adotado, um único tubo de descarga foi sujeito ao mesmo teste por 15 vezes. Esse teste de repetitividade é capaz de estimar qual fração da dispersão observada nos resultados ensaiados tem origem na incapacidade de se representar uma única estrutura às mesmas condições de teste durante repetidos ensaios. A Fig. 30 mostra os resultados encontrados, onde as linhas cinzas indicam as 15 FRFs de aceleração medidas, enquanto a linha preta tracejada mostra a respectiva resposta do modelo médio. Além disso, na parte de baixo da mesma imagem, estão mostradas as 15 funções coerência  $\gamma^2$  obtidas durante os testes. Os resultados mostram uma dispersão baixa para as respostas estruturais observadas, exceto nas regiões entre 4,5-5,0 kHz e 5,5-6,0 kHz. Devido à incapacidade de se excitar a estrutura em frequências superiores a 8,0 kHz, as análises experimentais foram limitadas até este valor de frequência. Ao se compararem os resultados experimentais com os do modelo médio é possível observar que as respostas apresentam boa

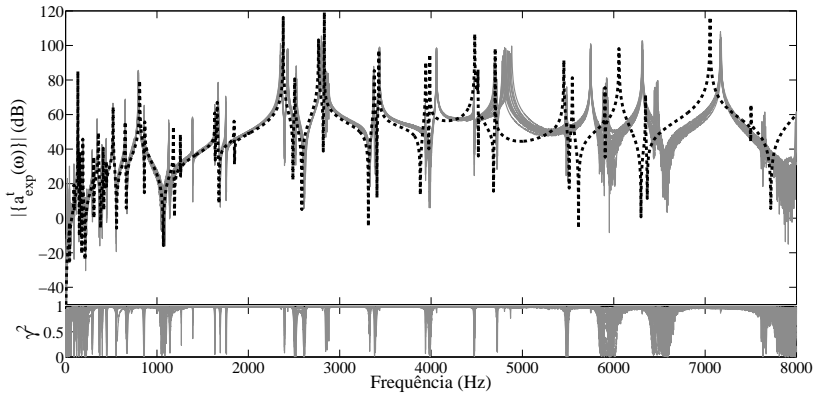


Figura 30 – Na parte de cima, em cinza, identificam-se as respostas do ensaio de repetitividade e, em preto tracejado, resposta do modelo médio. Na parte de baixo apresentam-se as 15 funções coerência obtidas nos testes.

concordância para frequências inferiores a, aproximadamente, 4,5 kHz. Para frequências superiores a 4,5 kHz os resultados divergem devido às incertezas nos dados do modelo e também por conta das limitações do modelo mecânico-matemático proposto, justificando a aplicação de algum método de modelagem de incertezas para o sistema.

Com o objetivo de quantificar a dispersão ao analisar um conjunto de tubos de descarga, o mesmo teste de impactação descrito anteriormente foi aplicado a 41 estruturas distintas. A Fig. 31 mostra, em cinza, as 41 FRFs de aceleração medidas e, em preto tracejado, a respectiva resposta do modelo médio. Apresentam-se ainda, na parte de baixo da mesma imagem, as 41 funções coerência obtidas durante os testes. Ao se compararem os resultados obtidos nas Figs. 30 e 31, identifica-se uma maior dispersão quando são ensaiadas estruturas distintas, corroborando a ideia de que existem diferenças estruturais significativas entre os componentes ensaiados. Essas diferenças devem surgir, principalmente, durante o processo de manufatura, no qual o tubo de descarga chega, no início da linha de montagem, reto, e passa por um processo de dobragem até atingir a geometria final. Além disso, as dispersões medidas aumentam drasticamente em frequências superiores a 4,5 kHz, mostrando que a estrutura é bastante sensível em frequências superio-

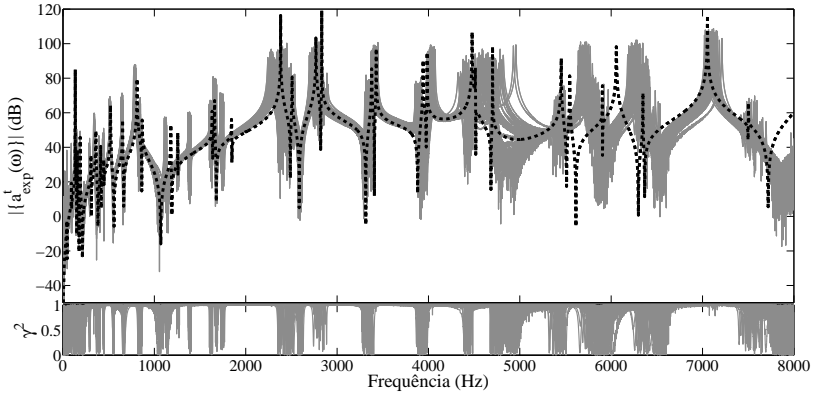


Figura 31 – Na parte de cima, em cinza, identificam-se as respostas das 41 estruturas ensaiadas e, em preto tracejado, resposta do modelo médio. Na parte de baixo apresentam-se as 41 funções coerência obtidas nos testes.

res a este valor. As dispersões observadas e a incapacidade, em altas frequências, de o modelo mecânico-matemático representar os resultados experimentais sugerem a aplicação de algum método de quantificação de incertezas com a finalidade de aumentar a predicabilidade do modelo mecânico-matemático proposto.

#### 4.5 Ajuste do modelo não paramétrico

Como visto anteriormente, o comportamento dinâmico dos 41 tubos de descarga ensaiados apresentam algumas diferenças ao longo dos espectros medidos. Uma vez que o modelo paramétrico construído nesse capítulo envolve 46 parâmetros, torna-se inviável identificar, experimentalmente, a dispersão de cada parâmetro do modelo. Além disso, por definição, a caracterização estatística de cada parâmetro do modelo não seria capaz de levar em conta as incertezas do próprio modelo adotado, como as limitações da teoria de Euler-Bernoulli, a hipótese de amortecimento modal constante, entre outros. Desse modo, o ajuste dessa subseção leva em conta apenas o modelo não paramétrico construído para o tubo de descarga. Essa tarefa se resume, basicamente, em definir os valores de  $\delta_M^t$ ,  $\delta_C^t$  e  $\delta_K^t$  que melhor descrevem os resultados

experimentais obtidos.

Na Subseção 3.5 foi apresentada uma maneira bastante direta de determinar os coeficientes de dispersão das matrizes reduzidas do modelo com base em resultados obtidos através de um conjunto de análises modais experimentais. Essa é uma maneira, do ponto de vista computacional, pouco custosa para a determinação dos coeficientes do modelo estocástico, uma vez que necessita de um baixo número de operações com as matrizes do modelo. Além disso, essa metodologia calcula de maneira bastante eficiente os parâmetros  $\delta_M^t$ ,  $\delta_C^t$  e  $\delta_K^t$ , uma vez que esses valores são estimados utilizando-se a própria definição matemática dos coeficientes (ver Eq. 3.18). Porém, do ponto de vista experimental, essa abordagem pode ser inviável, uma vez que o processo repetitivo agregado à realização de várias análises modais experimentais dificulta a aplicação dessa metodologia.

Com a finalidade de estimar os valores de  $\delta_M^t$ ,  $\delta_C^t$  e  $\delta_K^t$  de maneira mais simples, define-se uma metodologia baseada em um ajuste de modelo. Essa abordagem se resume, basicamente, em minimizar os resultados experimentais que não são descritos pelo modelo probabilístico não paramétrico. Seja  $\{r^t\} = \{\delta_K^t, \delta_C^t, \delta_M^t\}$  um vetor cujos componentes representam o coeficiente de dispersão das matrizes do modelo não paramétrico previamente construído. Desse modo, definem-se  $\{a_{num}^+(r^t, \omega)\}$  e  $\{a_{num}^-(r^t, \omega)\}$  como os vetores cujas componentes representam os valores das regiões superior e inferior do envelope de 99% de confiança obtidos com o modelo probabilístico não paramétrico. De maneira similar,  $\{a_{exp}^+(\omega)\}$  e  $\{a_{exp}^-(\omega)\}$  identificam os vetores cujas componentes apresentam os valores máximos e mínimos obtidos nos ensaios experimentais. A seguir, são definidos os vetores

$$\{z^+(r^t, \omega)\} = (\{a_{num}^+(r^t, \omega)\} - \{a_{exp}^+(\omega)\}) \times \left\{ C_1 \times \mathbb{1}(\{a_{exp}^+(\omega)\}) - \{a_{num}^+(r^t, \omega)\} \right\} + C_2 \times \mathbb{1}(\{a_{num}^+(r^t, \omega)\} - \{a_{exp}^+(\omega)\}) \quad (4.3)$$

$$\{z^-(r^t, \omega)\} = (\{a_{num}^-(r^t, \omega)\} - \{a_{exp}^-(\omega)\}) \times \left\{ C_1 \times \mathbb{1}(\{a_{num}^-(r^t, \omega)\}) - \{a_{exp}^-(\omega)\} \right\} + C_2 \times \mathbb{1}(\{a_{exp}^-(\omega)\} - \{a_{num}^-(r^t, \omega)\}) \quad (4.4)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  representam duas constantes cujos valores serão discutidos posteriormente. Esses vetores podem ser interpretados, graficamente, com o auxílio da Fig. 32. A partir das Eqs. 4.3 e 4.4 é possível identificar que os termos que multiplicam  $C_1$  representam as áreas em cinza claro na Fig. 32, ou seja, as regiões cujos valores experimentais estão fora

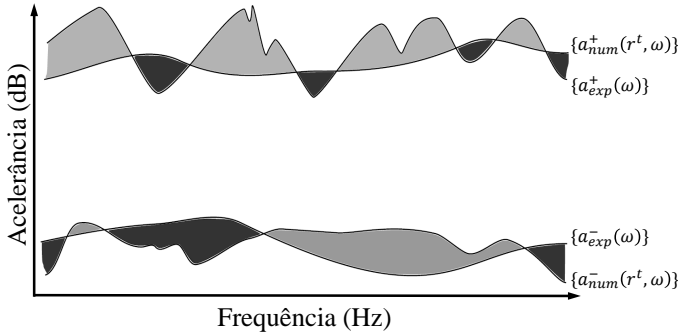


Figura 32 – Áreas a serem minimizadas durante o processo de ajuste de modelo.

do envelope de confiança predito pelo modelo estocástico. De maneira análoga, os termos que multiplicam  $C_2$  nas Eqs. 4.3 e 4.4 representam as áreas em cinza escuro na Fig. 32, regiões cujos valores experimentais estão dentro do envelope de confiança predito pelo modelo estocástico.

Com a finalidade de maximizar a predicabilidade do modelo estocástico não paramétrico, define-se a função objetivo

$$J^t(r^t) = \|\{z^+(r^t)\}\|_{\mathbb{B}^t}^2 + \|\{z^-(r^t)\}\|_{\mathbb{B}^t}^2, \quad (4.5)$$

cujas solução pode ser encontrada resolvendo-se, numericamente, o problema de otimização

$$r^t = \arg \min J^t(r^t). \quad (4.6)$$

De acordo com SOIZE et al. (2008), o problema de otimização definido pela Eq. 4.6 não é diferenciável com respeito aos parâmetros  $\delta_M^t$ ,  $\delta_C^t$  e  $\delta_K^t$  e, conseqüentemente, não pode ser resolvido utilizando-se métodos de otimização baseados no gradiente da função objetivo. Porém, existem outros métodos usuais de otimização que podem ser aplicados com vistas à solução da Eq. 4.6, como os métodos heurísticos de otimização (SOIZE et al., 2008).

De posse dessa nova metodologia para determinar os valores ótimos de  $\delta_M^t$ ,  $\delta_C^t$  e  $\delta_K^t$ , o ajuste de modelo enunciado anteriormente foi resolvido admitindo-se três configurações de constantes  $C_1$  e  $C_2$  distintas. Na primeira configuração, admite-se que o parâmetro  $C_2$  é nulo ( $C_2 = 0$ ) e que  $C_1$  é diferente de zero ( $C_1 \neq 0$ ). Essa configuração implica em minimizar a área em cinza claro da Fig. 32, ou seja,

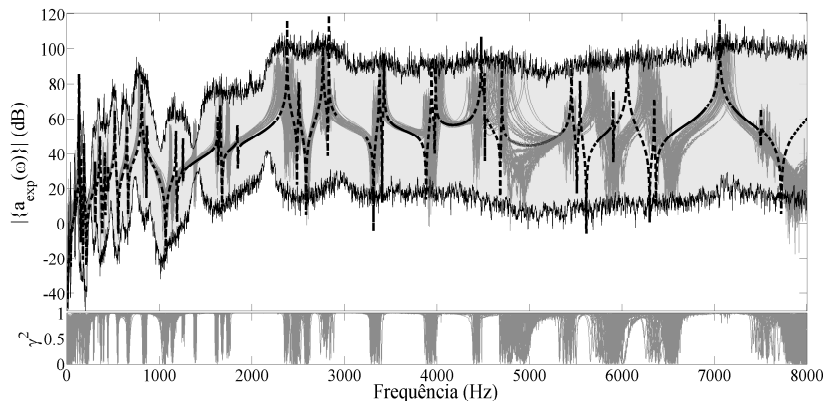


Figura 33 – Modelo estocástico otimizado com  $C_2 = 0$  e  $C_1 \neq 0$ . A linha preta tracejada identifica o resultado do modelo médio, as linhas em cinza escuro apresentam as respostas experimentais, enquanto o envelope delimitado pelas linhas pretas contínuas mostra a região de 99% de confiança. A parte de baixo do gráfico apresenta as funções coerência obtidas nos experimentos.

os valores experimentais fora da região de confiança calculada com o modelo estocástico. Essa configuração foi originalmente proposta por SOIZE et al. (2008). A Fig. 33 ilustra os resultados obtidos resolvendo-se o problema de otimização utilizando-se algoritmos genéticos (GOLDBERG, 1989), cuja solução leva a  $\delta_M^t = 0,16$ ,  $\delta_C^t = 0,89$  e  $\delta_K^t = 0,05$ . A partir dessa imagem é possível identificar que praticamente todos os resultados experimentais encontram-se dentro do envelope de confiança, como proposto pela função objetivo. Porém, é possível concluir, ainda, que muitas regiões do espectro encontram-se superestimadas, ou seja, que o envelope de confiança predito pelo modelo estocástico é muito maior que os respectivos resultados experimentais obtidos. Isso ocorre devido à escolha de  $C_2$  nula, que implica na não avaliação da região em cinza escuro da Fig. 32.

Para contornar a limitação observada na configuração em que  $C_2 = 0$  e  $C_1 \neq 0$ , resolve-se o mesmo problema de otimização utilizando  $C_1 = C_2 \neq 0$ . Essa configuração implica em minimizar, simultane-

amente, as duas regiões da Fig. 32. A Fig. 34 mostra os resultados obtidos resolvendo o problema de otimização via algoritmos genéticos, cuja solução leva a  $\delta_M^t = 0,07$ ,  $\delta_C^t = 0,73$  e  $\delta_K^t = 0,09$ . A partir dessa imagem é possível identificar que a região de confiança obtida é muito menor comparada à configuração anterior e que boa parte dos resultados experimentais encontram-se dentro da região de confiança predita pelo modelo probabilístico não paramétrico. Essa configuração busca

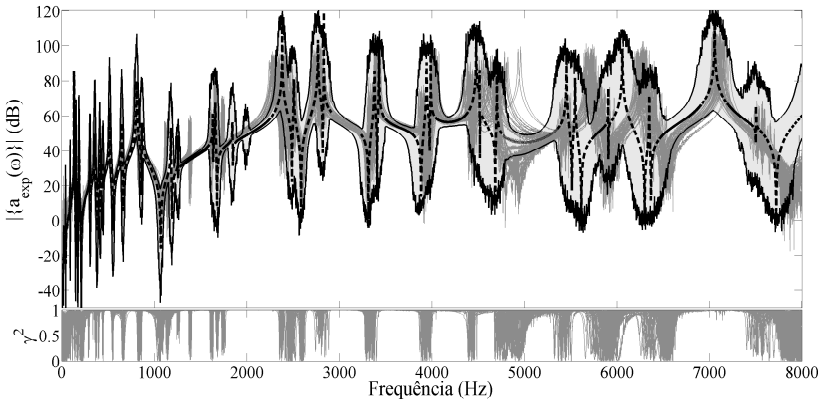


Figura 34 – Modelo estocástico otimizado com  $C_1 = C_2 \neq 0$ . As configurações utilizadas para a plotagem são as mesmas da Fig. 33.

aproximar as curvas de máximo e mínimo experimentais dos respectivos valores numéricos, mas não avalia se os resultados experimentais estão dentro ou fora da região de confiança. Essa é uma limitação importante dessa configuração, uma vez que o principal objetivo do modelo estocástico é prever que os resultados experimentais estão dentro do envelope de confiança.

Para contornar a limitação quando são utilizados os valores de  $C_1 = C_2 \neq 0$ , resolve-se o mesmo problema de otimização agora com  $C_1 = 2C_2 \neq 0$ . Essa configuração busca minimizar as duas regiões da Fig. 32, mas pondera com maior peso a região em que os resultados experimentais estão fora do envelope de confiança obtido com o modelo estocástico. A Fig. 35 apresenta os resultados obtidos resolvendo-se o problema de otimização utilizando-se algoritmos genéticos, cuja solução



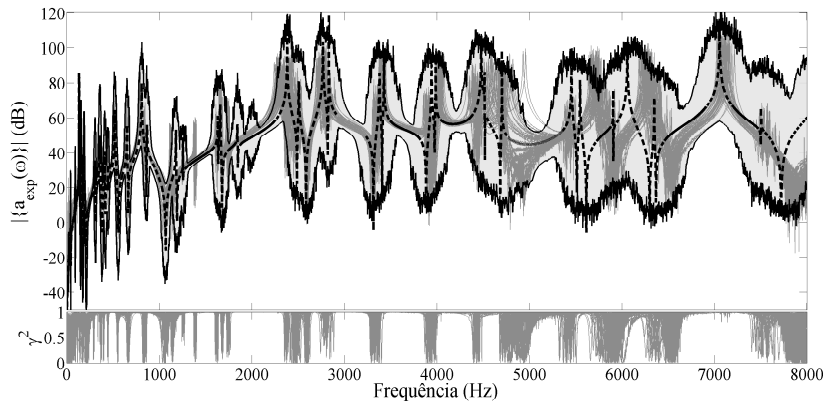


Figura 35 – Modelo estocástico otimizado com  $C_1 = 2C_2 \neq 0$ . As configurações utilizadas para a plotagem são as mesmas da Fig. 33.

leva a  $\delta_M^t = 0,17$ ,  $\delta_C^t = 0,31$  e  $\delta_K^t = 0,09$ . Ao se compararem os resultados obtidos utilizando essa configuração, é possível afirmar que a Fig. 35 apresenta os melhores resultados comparados às duas configurações anteriores, uma vez que os resultados experimentais estão, quase que na totalidade, dentro da região de confiança predita pelo modelo. Além disso, as distâncias entre os limites experimentais e numéricos encontram-se muito próximas, garantindo que o modelo numérico seja bastante representativo dentro da faixa de frequência analisada.

## 4.6 Síntese do capítulo

Essa seção apresentou os procedimentos necessários para a construção de dois modelos probabilísticos distintos para o tubo de descarga de um compressor hermético típico. Desse modo, os principais desenvolvimentos desse capítulo são:

1. construiu-se um modelo determinístico, com base na teoria de Euler–Bernoulli, para o tubo de descarga apresentado;
2. construiu-se um modelo probabilístico paramétrico para o sistema e, a partir dos seus resultados, determinaram-se os parâmetros

- mais sensíveis com respeito às frequências naturais do problema;
3. um modelo probabilístico não paramétrico para as matrizes do problema foi discutido e, por fim, apresentou-se o processo estocástico obtido na solução do sistema considerando níveis de incertezas distintos;
  4. apresentou-se o procedimento experimental adotado para avaliar as variabilidades na resposta dinâmica da estrutura devido às limitações do processo de manufatura e transporte dos tubos de descarga;
  5. apresentou-se um novo procedimento para a solução de problemas inversos em modelos não paramétricos e, a partir dessa metodologia, construiu-se um modelo robusto às incertezas para o tubo de descarga avaliado.

## 5 Carcaça

Este capítulo tem como principal objetivo a caracterização e a quantificação de incertezas no modelo estrutural da carcaça de um compressor hermético. Este componente é o responsável por enclausurar, hermeticamente, o kit de compressão do sistema e, conseqüentemente, torna-se a principal fonte de ruído em um refrigerador. Devido à importância da carcaça no comportamento vibroacústico final do compressor, torna-se interessante obter um modelo mecânico-matemático robusto para esta estrutura, visto que, devido ao processo de manufatura, o componente pode apresentar variabilidade significativa em seu comportamento dinâmico (ver Fig. 3).

### 5.1 Modelo médio

A Fig. 36 apresenta a geometria típica de uma carcaça. Trata-se de uma estrutura de aço, com módulo de elasticidade  $E^c = 205$  GPa, coeficiente de Poisson  $\nu^c = 0,3$  e densidade  $\rho^c = 7870$  kg/m<sup>3</sup>. Devido ao processo de construção da carcaça, as espessuras da estrutura apresentam variabilidade significativa ao longo de sua distribuição espacial. Porém, para a construção do modelo médio da estrutura, admitem-se apenas três espessuras distintas, sendo 2,02 mm para a tampa, 2,37 mm para o fundo e 4,03 mm para a região de conexão e solda. Para se

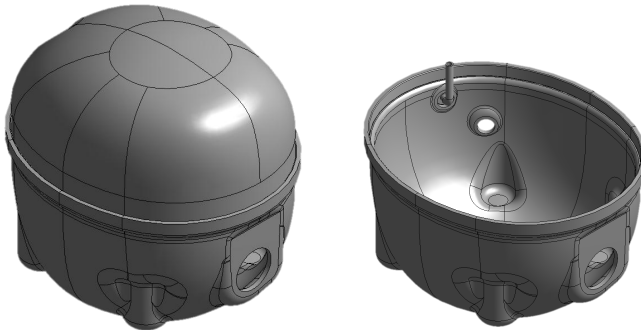


Figura 36 – Geometria da carcaça analisada.

determinar, matematicamente, a resposta dinâmica da carcaça quando excitada externamente, a sua geometria foi discretizada utilizando-se o método dos elementos finitos a partir do código comercial ANSYS<sup>®</sup> (ANSYS, 1999). Desse modo, modela-se cada elemento utilizando uma teoria de placas finas, sendo que cada nó do modelo apresenta seis graus de liberdade (três de translação e três de rotação). Além disso, o tubo passador, estrutura responsável por conectar o tubo de descarga à carcaça, é modelado como uma viga Euler-Bernoulli. As propriedades mecânicas do passador são admitidas iguais às do tubo de descarga, descrito no capítulo anterior, diferindo-se apenas pelo diâmetro externo de 6,85 mm e pela espessura de 1,10 mm. Os elementos de placa possuem, aproximadamente, 3 mm, enquanto a malha completa possui 11983 nós, totalizando 71898 graus de liberdade no modelo. A Fig. 37 apresenta a malha utilizada durante os cálculos, sendo que os resultados a seguir admitem a condição de contorno livre para a estrutura.

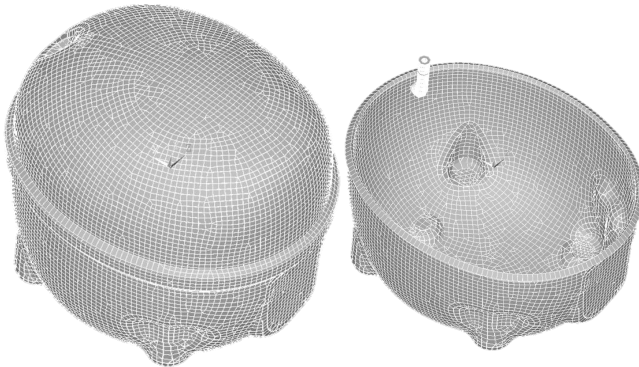


Figura 37 – Malha da carcaça em elementos de placa juntamente com a malha do passador em elementos de viga.

De posse do modelo matemático, discretizado em elementos finitos, a resposta da estrutura pode ser calculada, no domínio da frequência, através da equação

$$(-\omega^2[M_{n_c}^c] + j\omega[C_{n_c}^c] + [K_{n_c}^c]) \{u_{n_c}^c(\omega)\} = \{f_{n_c}^c(\omega)\}, \quad (5.1)$$

onde  $[M_{n_c}^c]$ ,  $[C_{n_c}^c]$  e  $[K_{n_c}^c]$  são, respectivamente, as matrizes de massa, rigidez e amortecimento da estrutura, enquanto  $\{f_{n_c}^c(\omega)\}$  e  $\{u_{n_c}^c(\omega)\}$  são os vetores dos graus de liberdade do modelo (deslocamentos e rotações) e excitações externas (forças e torques). Os vetores de deslocamentos

$\{u_{n_c}^c(\omega)\}$  e de acelerações  $\{a_{n_c}^c(\omega)\}$  podem ser calculados, como visto anteriormente, seguindo as mesmas operações descritas nas Eqs. 3.4 e 3.5.

### 5.1.1 Modelo reduzido

De maneira similar às Subseções 3.1.1 e 4.1.1, o modelo médio da Eq. 5.1 pode ser reduzido expandindo-se a resposta do sistema através de uma análise modal. Desse modo, resolve-se o problema de autovalores e autovetores generalizados e constroem-se as matrizes de massa  $[M_{m_c}^c]$ , amortecimento  $[C_{m_c}^c]$  e rigidez  $[K_{m_c}^c]$  reduzidas. A resposta aproximada  $\{u_{m_c}^c(\omega)\}$  e as respectivas acelerações  $\{a_{m_c}^c(\omega)\}$  podem ser calculadas através das relações descritas nas Eqs. 3.7 e 3.8. Para a construção da matriz de amortecimento  $[C_{m_c}^c]$  do modelo reduzido considera-se um valor de amortecimento modal  $\xi_1^c = \xi_2^c = \dots = \xi_{m_c}^c = 0,05\%$  constante.

## 5.2 Modelo estocástico

Com a finalidade de aumentar a predicabilidade do modelo médio, esta seção descreve o procedimento necessário para a construção de um modelo não paramétrico para o componente estrutural analisado. Uma vez que a carcaça encontra-se em condição de contorno livre, as matrizes reduzidas de amortecimento  $[C_{m_c}^c]$  e rigidez  $[K_{m_c}^c]$  são positivo semi-definidas e, conseqüentemente, não podem ser escritas utilizando uma decomposição de Cholesky. Desse modo, o processo de construção dos operadores aleatórios associados às matrizes  $[C_{m_c}^c]$  e  $[K_{m_c}^c]$  é um pouco diferente dos processos anteriores, como será discutido no decorrer desta seção.

### 5.2.1 Modelo probabilístico não paramétrico

Durante a modelagem probabilística não paramétrica, substituem-se as matrizes de massa  $[M_{m_c}^c]$ , amortecimento  $[C_{m_c}^c]$  e rigidez  $[K_{m_c}^c]$  reduzidas pelas matrizes aleatórias  $[M_{np}^c]$ ,  $[C_{np}^c]$  e  $[K_{np}^c]$ . Uma vez que a matriz de massa  $[M_{m_c}^c]$  é positivo definida, é possível decompô-la utilizando a fatorização de Cholesky e sua construção algébrica segue o processo descrito na Subseção 3.2.2. Porém, devido à condição de contorno livre, as matrizes de amortecimento  $[C_{m_c}^c]$  e rigidez  $[K_{m_c}^c]$  reduzidas são positivo semi-definidas e, conseqüentemente, não admitem a mesma decomposição.

Seja  $[A_{m_c}^c]$  qualquer operador  $[C_{m_c}^c]$  ou  $[K_{m_c}^c]$ . A matriz  $[A_{m_c}^c]$  é um operador diagonal, real, positivo semi-definido e, conseqüentemente, pode ser escrita como

$$[A_{m_c}^c] = [A_{m_c}^c]^{1/2} [A_{m_c}^c]^{1/2}, \quad (5.2)$$

onde  $[A_{m_c}^c]^{1/2}$  é a raiz quadrada da matriz  $[A_{m_c}^c]$ . Devido às propriedades algébricas de  $[A_{m_c}^c]$ ,  $[A_{m_c}^c]^{1/2}$  é uma matriz real, diagonal e positivo semi-definida cujos elementos  $[A_{m_c}^c]_{jj}^{1/2}$  podem ser obtidos a partir da raiz quadrada dos elementos da diagonal  $[A_{m_c}^c]_{jj}$ . Devido as propriedades anteriores, a matriz aleatória  $[\mathbf{A}_{np}^c]$  pode ser construída como

$$[\mathbf{A}_{np}^c] = [L_{m_c}^c]^T [\mathbf{G}_{m_c}^c] [L_{m_c}^c], \quad (5.3)$$

onde  $[L_{m_c}^c] = [A_{m_c}^c]^{1/2}$  e  $[\mathbf{G}_{m_c}^c]$  é o operador que adiciona as incertezas ao modelo. Ao analisar a Eq. 5.3, é possível identificar que as propriedades estatísticas de  $[\mathbf{G}_{m_c}^c]$  seguem as mesmas propriedades das matrizes não paramétricas discutidas anteriormente e, conseqüentemente, o operador admite a mesma construção algébrica das matrizes descritas na Subseção 3.2.2. Por fim, o processo estocástico  $\{\mathbf{u}_{np}^c(\omega)\}$  associado às respostas do sistema pode ser resolvido utilizando-se o método de Monte Carlo direto juntamente com o processo de redução modal, de maneira similar aos modelos estocásticos não paramétricos apresentados anteriormente.

## 5.3 Resultados simulados

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos ao simularem-se algumas respostas dinâmicas da carcaça a partir dos modelos construídos na seção anterior. Primeiramente, apresentam-se algumas respostas obtidas com o modelo médio e, posteriormente, mostram-se as mesmas respostas quando calculadas com o modelo estocástico.

### 5.3.1 Resultados do modelo médio

A Fig. 38 apresenta dois espectros de aceleração calculados com o modelo médio. Esses valores são obtidos excitando-se a estrutura com uma força pontual, unitária e normal à superfície da estrutura no Ponto 3, como identificado na parte direita da mesma figura, enquanto as acelerações, também normais à superfície, são calculadas nos outros dois pontos identificados na figura. Uma vez que o primeiro modo de deformação estrutural obtido com o modelo médio da carcaça encontra-se em, aproximadamente, 3,15 kHz, as respostas de acelerações estão

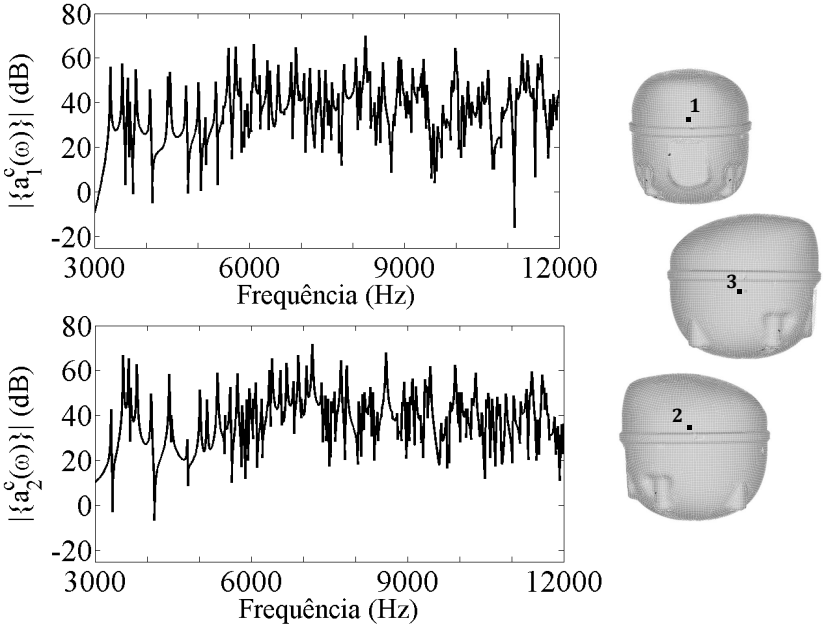


Figura 38 – Respostas estruturais  $\{a_1^c(\omega)\}$  e  $\{a_2^c(\omega)\}$ , respectivamente nos Pontos 1 e 2, calculadas com o modelo médio.

apresentadas na faixa entre 3,0 e 12,0 kHz. Os resultados da Fig. 38 foram calculados utilizando-se o processo de redução de modelo da Subseção 5.1.1 juntamente com superposição de 500 formas modais do modelo médio.

### 5.3.2 Análise de convergência

Com a finalidade de avaliar se os resultados obtidos com o modelo estocástico são estatisticamente significativos, define-se a função convergência quadrática média

$$\text{Conv}(s_c, m_c) = \left\{ \frac{1}{s_c} \sum_{k=1}^{s_c} \int_{\mathbb{B}^c} |\{a_2^c(\omega, k)\}|^2 d\omega \right\}^{1/2}, \quad (5.4)$$

onde  $s_c$  indica o número de simulações de Monte Carlo realizadas e  $m_c$  a dimensão do modelo reduzido. A Fig. 39 mostra, à esquerda, o gráfico de

$20 \times \log_{10}(\text{Conv}(s_c, m_c))$  em função de  $s_c$  para  $m_c=500$  modos, de onde é possível concluir que o modelo converge com  $s_c=1000$  simulações. A

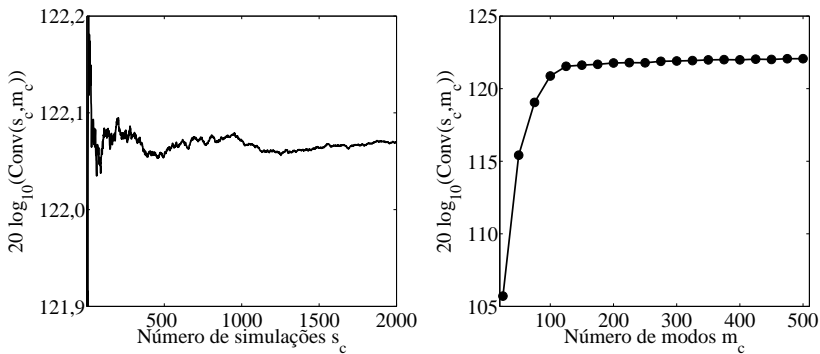


Figura 39 – À esquerda, Eq. 5.4 calculada variando-se  $s_c$  para  $m_c=500$  e, à direita, a mesma função calculada alterando-se  $m_c$  para  $s_c=1000$ .

mesma figura, à direita, apresenta  $20 \times \log_{10}(\text{Conv}(s_c, m_c))$  em função de  $m_c$ , calculado utilizando-se  $s_t=1000$  realizações. A partir desse resultado é possível afirmar que o modelo não paramétrico converge a partir da superposição de  $m_c=350$  modos. Os resultados mostrados foram calculados admitindo-se que o coeficiente de dispersão das matrizes aleatórias valem  $\delta_M^c = \delta_C^c = \delta_K^c = 0, 1$ .

### 5.3.3 Resultados obtidos com o modelo não paramétrico

Com a finalidade de avaliar as respostas do modelo estrutural na presença de incertezas, foram calculados dois espectros de aceleração, utilizando o modelo probabilístico não paramétrico, admitindo-se níveis de incertezas distintos. As respostas do modelo estocástico para  $\delta_M^c = \delta_C^c = \delta_K^c = 0,05$  e  $\delta_M^c = \delta_C^c = \delta_K^c = 0,20$  encontram-se na Fig. 40, onde a linha preta indica a resposta do modelo médio e a área em cinza identifica a região de 99% de confiança das respostas. Ao confrontar as respostas aumentando-se o nível de incerteza, torna-se possível identificar um aumento no envelope de confiança. Esse comportamento faz com que o modelo, para os níveis de incerteza calculados, perca significativamente a exatidão em frequências mais elevadas.

Outra característica bastante importante na estrutura é a sua sensibilidade às incertezas. Mesmo para um baixo valor de incerteza,



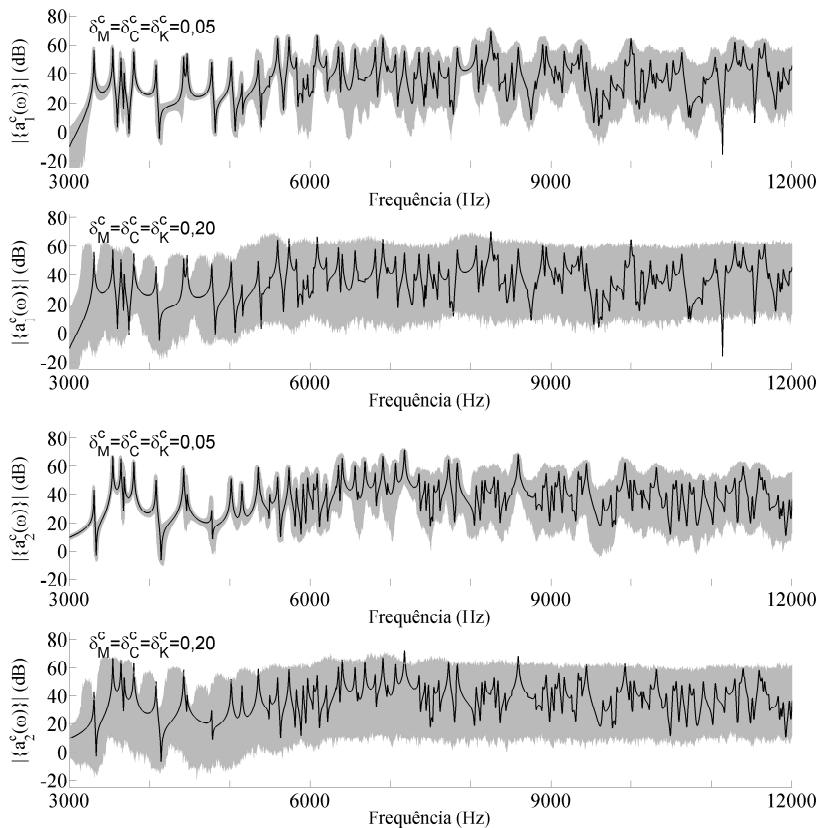


Figura 40 – Espectros de aceleração do modelo médio, em preto, juntamente com as regiões de 99% de confiança, em cinza, obtidas com o modelo não paramétrico admitindo-se  $\delta_M^c = \delta_C^c = \delta_K^c = 0,05$  e  $\delta_M^c = \delta_C^c = \delta_K^c = 0,20$ .

como  $\delta_M^c = \delta_C^c = \delta_K^c = 0,05$ , os espectros de aceleração da estrutura já se mostram bastante sensíveis. Este comportamento deve ocorrer devido à alta densidade modal da estrutura, quando comparada aos outros modelos analisados neste documento, dentro da região de frequência analisada. Vale ressaltar que, para frequências superiores a 6,0 kHz, o envelope de confiança, mesmo para baixos níveis de incerteza, perde

quase que por completo a capacidade de prever regiões de ressonâncias. Essa característica encontra-se presente em estruturas com alta densidade modal pelo fato de que as incertezas fazem com que, em cada iteração do método de Monte Carlo, as frequências naturais do modelo mudem e que estas alterações sejam grandes o suficiente para que uma frequência natural em uma dada iteração se sobreponha às frequências naturais dos modos vizinhos em simulações futuras.

## 5.4 Resultados experimentais

Esta seção apresenta o procedimento experimental adotado e os respectivos resultados obtidos durante o ensaio de impactação de um conjunto de carcaças de compressores herméticos. A Fig. 41 mostra uma



Figura 41 – Fotos de uma configuração típica de montagem dos experimentos durante o ensaio de impactação das carcaças analisadas.

configuração típica utilizada no experimento, onde a carcaça encontra-se suspensa por três fios finos com a finalidade de aproximar a condição de contorno da estrutura à condição livre. A carcaça foi excitada, utilizando-se um martelo com ponteira de aço e instrumentado, no Ponto 3 (ver

Fig. 38), enquanto as respectivas acelerações são medidas utilizando-se dois acelerômetros nos Pontos 1 e 2 (ver Fig. 38).

Com a finalidade de avaliar a precisão do procedimento experimental utilizado, mede-se uma mesma estrutura por 10 vezes, repetindo-se o procedimento de montagem e desmontagem do experimento. Esse teste deve ser capaz de determinar a fração da dispersão observada nos resultados decorrente, apenas, da incapacidade de se representar uma única estrutura às mesmas condições de ensaio por repetidas vezes. A Fig. 42 mostra as FRFs de aceleração medidas no ensaio de repetiti-

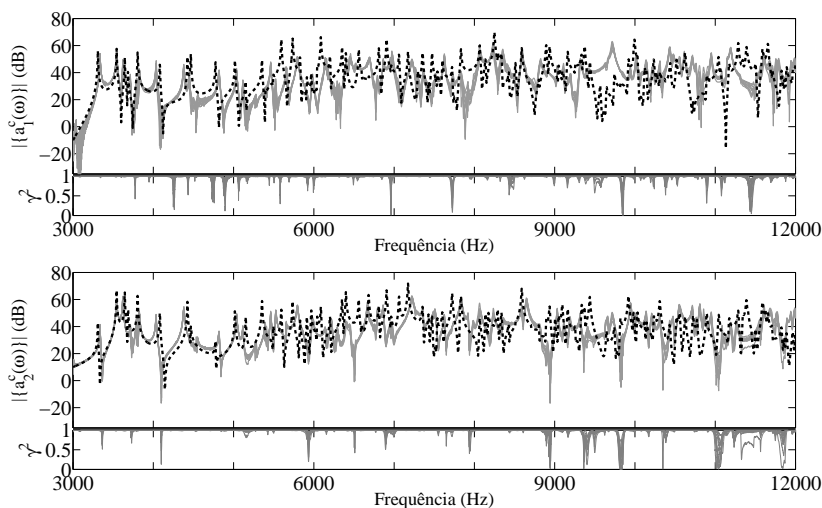


Figura 42 – Espectros de aceleração obtidos em um ensaio de repetitividade, em cinza, juntamente com as respectivas respostas do modelo médio, em preto, respectivamente para os Pontos 1 e 2. As curvas abaixo de cada gráfico, em cinza, apresentam as funções coerência obtidas durante os experimentos.

vidade, em cinza, juntamente com as respostas do modelo médio, em preto tracejado. As curvas abaixo de cada gráfico, em cinza, apresentam os valores obtidos para a função coerência durante os experimentos.

Com o objetivo de quantificar a dispersão nas mesmas respostas apresentadas na Fig. 42 devido ao processo de manufatura da carcaça do compressor, submeteram-se 12 estruturas distintas ao mesmo ensaio dinâmico. As respostas estão apresentadas na Fig. 43, onde, em

cinza, identificam-se as respostas das diferentes estruturas e, em preto tracejado, as respectivas respostas do modelo médio. A partir das Figs. 42 e 43, é possível identificar que as dispersões do ensaio de repetitividade são menores quando comparadas às dispersões das medições com diferentes estruturas, corroborando a ideia de que existem diferenças significativas no comportamento dinâmico das carcaças devido ao processo de manufatura. Além disso, para algumas faixas de frequência, os

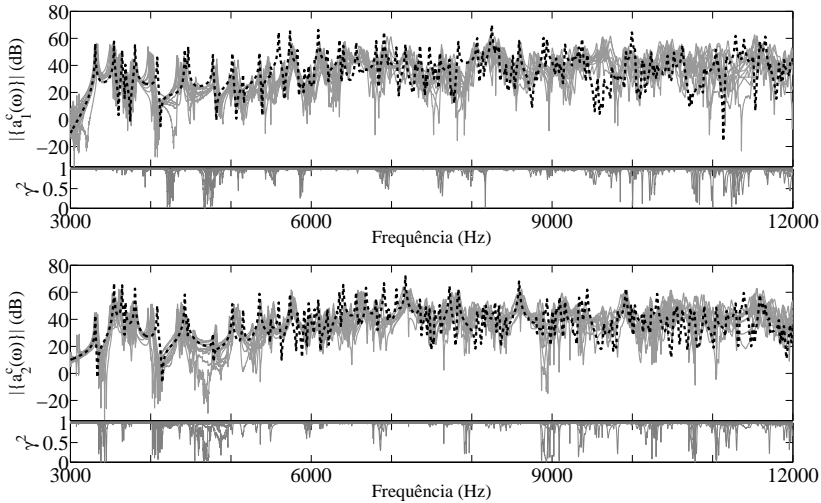


Figura 43 – Espectros de aceleração de 12 carcaças distintas, em cinza, juntamente com as respectivas respostas do modelo médio, em preto, respectivamente para os Pontos 1 e 2. As curvas abaixo de cada gráfico, em cinza, apresentam as respostas obtidas para as funções coerência durante os experimentos.

valores obtidos para o espectro do modelo médio encontram-se fora dos limites observados experimentalmente, fato que sugere a existência de incertezas no modelo mecânico-matemático proposto.

## 5.5 Ajuste do modelo não paramétrico

Com a finalidade de determinar os valores de  $\delta_M^c$ ,  $\delta_C^c$  e  $\delta_K^c$  que melhor representem os resultados obtidos para a carcaça, aplica-se o

ajuste de modelo da Subseção 4.5 com base na última configuração ( $C_1 = 2C_2 \neq 0$ ) apresentada na mesma subseção. Visto que o nível de vibração da carcaça, obtido experimentalmente, é muito baixo em frequências inferiores a 3 kHz, fato que torna o sinal prejudicado pelo ruído de fundo dos transdutores, o ajuste de modelo se restringiu à faixa entre 3 e 12 kHz. Uma vez que as FRFs de transferência são mais sensíveis às incertezas, utilizou-se a resposta  $\{a_2(\omega)\}$  durante o ajuste do modelo estocástico e, então, calcularam-se os resultados de  $\{a_1(\omega)\}$  para conferir a qualidade do ajuste. O problema de otimização definido pode ser resolvido utilizando-se algoritmos genéticos, levando aos valores de  $\delta_M^c = 0,05$ ,  $\delta_C^c = 0,46$  e  $\delta_K = 0,08$ . Os resultados obtidos para o modelo ajustado encontram-se na Fig. 44, onde a linha tracejada preta mostra a resposta do modelo médio, as linhas cinzas apresentam os valores obtidos experimentalmente e o envelope limitado pelas linhas pretas indica a região de 99% de confiança do modelo estocástico. Na parte de baixo de cada espectro apresentam-se, ainda, as funções coerência obtidas nos experimentos.

A partir da análise dos resultados do modelo estocástico ajustado, nota-se o aumento da predicabilidade do modelo. A grande maioria dos resultados experimentais encontram-se dentro do envelope de confiança do modelo e, ainda, os limites experimentais e numéricos mostram-se relativamente próximos. Este resultado mostra que o modelo estocástico é bastante representativo dentro da faixa de frequência analisada. Porém, algumas respostas experimentais ainda encontram-se fora do envelope calculado, sugerindo que uma melhor representação do modelo médio deve levar a melhores resultados. De fato, existe uma série de fatores que podem ser melhorados no modelo médio. Uma sugestão de melhoria é, por exemplo, efetuar um mapeamento mais detalhado das espessuras da estrutura. Alguns resultados disponíveis na literatura mostram que a abordagem dividindo a carcaça de um compressor em fatias pode levar a resultados mais representativos (FABRO, 2010). Uma outra fonte de incerteza que pode ser bastante aprimorada é a região de solda, que neste modelo numérico é modelada apenas como uma região de aço com espessura distinta. Uma estratégia para aprimorar a representação dessa região seria, por exemplo, admitir uma condição ortotrópica para as propriedades mecânicas da região de solda e, então, determinar os valores dessas propriedades através de um ajuste de modelo.

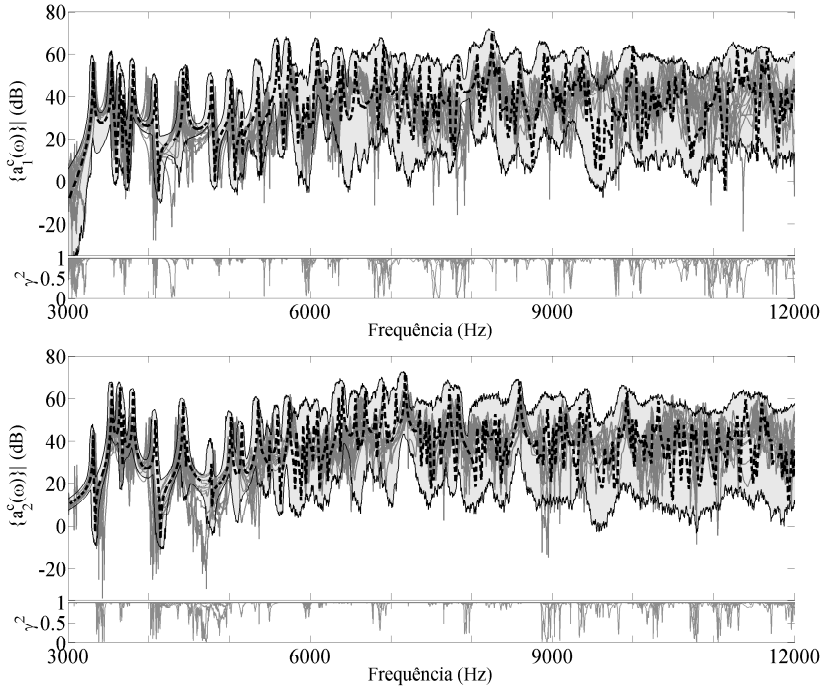


Figura 44 – Espectros de aceleração obtidos com o modelo médio, em preto tracejado, juntamente com as respostas experimentais, em cinza escuro. A região em cinza claro delimitada pelas linhas pretas indicam os envelopes de 99% de confiança obtidos com o modelo probabilístico não paramétrico.

## 5.6 Síntese do capítulo

Essa seção apresentou os procedimentos necessários para a construção de um modelo probabilístico não paramétrico para a carcaça de um compressor hermético típico. Desse modo, os principais desenvolvimentos desse capítulo são:

1. construiu-se um modelo determinístico, com base em uma teoria de placas finas, para a carcaça de um compressor hermético típico;
2. um modelo probabilístico não paramétrico para as matrizes do

problema foi discutido e uma nova representação algébrica foi necessária levando-se em conta a condição de contorno livre da estrutura;

3. apresentou-se o procedimento experimental adotado para avaliar as variabilidades na resposta dinâmica da estrutura devido às limitações do processo de manufatura;
4. aplicou-se o procedimento de ajuste de modelo sugerido da seção anterior e, por fim, construiu-se um modelo numérico para a carcaça do compressor considerando as incertezas do modelo.





## 6 Acoplamento através de síntese modal de componentes

A predição das incertezas na resposta dinâmica de duas estruturas, quando acopladas, ainda é um desafio para os pesquisadores. Isso ocorre devido à ligação entre os dois componentes mecânicos, que pode ser bastante complexa e, conseqüentemente, de difícil representação matemática. Porém, quando a união dessas subestruturas pode ser aproximada, matematicamente, por relações mais simples, a aplicação de um método de subestruturação (ou método de síntese modal) juntamente com a abordagem probabilística não paramétrica oferece uma alternativa para a quantificação de incertezas no modelo das estruturas acopladas. Essa abordagem permite construir um modelo estocástico no qual as incertezas estão distribuídas de maneira não homogênea nos operadores do modelo mecânico-matemático proposto.

### 6.1 Método de Craig-Bampton

Considere uma estrutura mestre  $S$  composta por duas subestruturas  $S^1$  e  $S^2$ , como mostrado na Fig. 45. Essas estruturas encontram-se ligadas por uma interface  $\Sigma$  que pertence, simultaneamente, aos contornos de  $S^1$  e  $S^2$ . Admite-se que a subestrutura  $S^r$ , onde  $S^r$  representa  $S^1$  ou  $S^2$ , tenha sido discretizada através do método dos elementos finitos. Desse modo, a equação de movimento do subsistema não amortecido

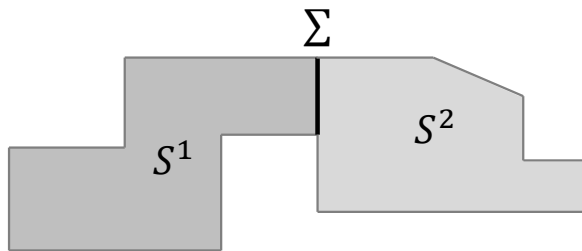


Figura 45 – Subestrutura  $S^1$  acoplada à subestrutura  $S^2$  através da interface  $\Sigma$ .

pode ser escrita, de maneira particionada, como (CRAIG, 1981; MAIA; SILVA, 1997)

$$\begin{bmatrix} [M_{ii}^r] & [M_{ic}^r] \\ [M_{ic}^r]^T & [M_{cc}^r] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}_i^r\} \\ \{\ddot{u}_c^r\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{ii}^r] & [K_{ic}^r] \\ [K_{ic}^r]^T & [K_{cc}^r] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_i^r\} \\ \{u_c^r\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_i^r\} \\ \{f_c^r\} \end{Bmatrix}, \quad (6.1)$$

onde  $\{u_i^r\}$  e  $\{u_c^r\}$  são os graus de liberdade no interior e na interface de  $S^r$ , respectivamente, enquanto  $\{f_i^r\}$  e  $\{f_c^r\}$  são as excitações externas em  $\{u_i^r\}$  e  $\{u_c^r\}$ . Ao admitir-se que a interface  $\Sigma$  da estrutura  $S^r$  encontra-se fixa, o problema de autovalores e autovetores do sistema pode ser escrito na forma

$$[K_{ii}^r] \{\phi_i^r\} = (\omega_k^r)^2 [M_{ii}^r] \{\phi_i^r\}, \quad (6.2)$$

enquanto a solução do sistema pode ser aproximada através de superposição modal

$$\{u_i^r\} = [\Psi_i^r] \{q_i^r\}, \quad (6.3)$$

onde  $[\Psi_i^r]$  é matriz de formas modais e  $\{q_i^r\}$  são as respectivas coordenadas generalizadas. Durante o processo de solução do sistema utilizando o método de Craig-Bampton, necessita-se, ainda, da determinação dos modos estáticos  $[S_i^r]$  da estrutura. Esta matriz pode ser obtida a partir da aplicação sucessiva de um deslocamento unitário em cada grau de liberdade da interface  $\Sigma$ , mantendo-se o restante fixo, e, a partir dessa perturbação, podem-se determinar os deslocamentos dos graus de liberdade no interior de  $S^r$ . Esta operação pode ser diretamente obtida como

$$[S_i^r] = -[K_{ii}^r]^{-1} [K_{ic}^r], \quad (6.4)$$

uma vez que  $[K_{cc}^r]$  representa, matematicamente, as forças necessárias para que hajam os deslocamentos unitários em  $\Sigma$ .

De posse de  $[\Psi_i^r]$  e  $[S_i^r]$ , o vetor solução do sistema  $\{\{u_i^r\} \{u_c^r\}\}^T$  pode ser escrito, através do método de Craig-Bampton, como

$$\begin{Bmatrix} \{u_i^r\} \\ \{u_c^r\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Psi_i^r] & [S_i^r] \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_i^r\} \\ \{u_c^r\} \end{Bmatrix} = [H_{CB}^r] \begin{Bmatrix} \{q_i^r\} \\ \{u_c^r\} \end{Bmatrix}, \quad (6.5)$$

onde  $[H_{CB}^r]$  é a matriz de mudança de base de Craig-Bampton. A principal vantagem da aplicação desta técnica é que se torna possível truncar a matriz  $[\Psi_i^r]$  e, conseqüentemente, reduzir a dimensão dos operadores utilizados para a solução do sistema. Desse modo, o custo computacional associado ao cálculo da solução do problema deixa de

crescer com o aumento do número de graus de liberdade do sistema global e passa a crescer com o aumento da densidade modal do problema, de maneira similar à superposição modal tradicional. Ao se reescrever a Eq. 6.1 na base de  $\{\{u_i^r\} \{u_c^r\}\}^T$ , utilizando  $[H_{CB}^r]$  como operador mudança de base, tem-se

$$\begin{aligned} & [H_{CB}^r]^T \begin{bmatrix} [M_{ii}^r] & [M_{ic}^r] \\ [M_{ic}^r]^T & [M_{cc}^r] \end{bmatrix} [H_{CB}^r] \begin{Bmatrix} \{\tilde{q}_i^r\} \\ \{\tilde{u}_c^r\} \end{Bmatrix} + \\ & [H_{CB}^r]^T \begin{bmatrix} [K_{ii}^r] & [K_{ic}^r] \\ [K_{ic}^r]^T & [K_{cc}^r] \end{bmatrix} [H_{CB}^r] \begin{Bmatrix} \{q_i^r\} \\ \{u_c^r\} \end{Bmatrix} = [H_{CB}^r]^T \begin{Bmatrix} \{f_i^r\} \\ \{f_c^r\} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

A Eq. 6.6 após desenvolvida, considerando a normalização do operador de formas modais pela matriz de massa, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [\tilde{M}_{ii}^r] & [\tilde{M}_{ic}^r] \\ [\tilde{M}_{ic}^r]^T & [\tilde{M}_{cc}^r] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_i^r\} \\ \{\tilde{u}_c^r\} \end{Bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} [\tilde{K}_{ii}^r] & [\tilde{K}_{ic}^r] \\ [\tilde{K}_{ic}^r]^T & [\tilde{K}_{cc}^r] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_i^r\} \\ \{u_c\} \end{Bmatrix} = [H_{CB}^r]^T \begin{Bmatrix} \{f_i^r\} \\ \{f_c^r\} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

onde os operadores da Eq. 6.7 são obtidos, algebricamente, como  $[\tilde{M}_{ii}^r] = [I]$ ,  $[\tilde{M}_{ic}^r] = [\Psi_i^r]^T ([M_{ii}^r] [S_i^r] + [M_{ic}^r])$ ,  $[\tilde{M}_{cc}^r] = [M_{ic}^r]^T [S_i^r] + [M_{cc}^r] + [S_i^r]^T ([M_{ii}^r] [S_i^r] + [M_{ic}^r])$ ,  $[K_{ii}^r] = [(\omega_k^r)^2]$ , sendo  $[(\omega_k^r)^2]$  uma matriz diagonal cujos elementos representam o quadrado da frequência natural angular da estrutura com interface fixa, enquanto  $[\tilde{K}_{ic}^r] = [0]$  e  $[\tilde{K}_{cc}^r] = [K_{cc}^r] - [K_{ic}^r]^T [K_{ii}^r]^{-1} [K_{ic}^r]$  (CRAIG, 1981).

Após efetuar as operações anteriores e descrever as subestruturas  $S^1$  e  $S^2$  na base vetorial de Craig-Bampton é possível montar as matrizes de massa e rigidez do sistema composto pelas subestruturas acopladas, levando em conta as compatibilidades do problema e as suas respectivas condições de equilíbrio. Esta montagem pode ser interpretada, de maneira bastante simples, admitindo-se que cada subestrutura é um elemento finito cujas matrizes elementares de massa e rigidez do modelo são os operadores da Eq. 6.7. Através dessa analogia, as subestruturas  $S^r$  são também chamadas, na literatura, de superelementos (GERSEM et al., 2007). No que segue, a dinâmica do sistema com as estruturas  $S^1$  e  $S^2$  acopladas e com excitações externas pode ser escrita como (MAIA;

SILVA, 1997)

$$\begin{bmatrix} [I] & [0] & [\tilde{M}_{ic}^1] \\ [0] & [I] & [\tilde{M}_{ic}^2] \\ [\tilde{M}_{ic}^1]^T & [\tilde{M}_{ic}^2]^T & [\tilde{M}_{cc}^1] + [\tilde{M}_{cc}^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\tilde{q}_i^1\} \\ \{\tilde{q}_i^2\} \\ \{\tilde{u}_c\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [(\omega_i^1)^2] & [0] & [0] \\ [0] & [(\omega_i^2)^2] & [0] \\ [0] & [0] & [\tilde{K}_{cc}^1] + [\tilde{K}_{cc}^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_i^1\} \\ \{q_i^2\} \\ \{u_c\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_i^1\} \\ \{F_i^2\} \\ \{F_c\} \end{Bmatrix}, \quad (6.8)$$

onde  $\{F_i^1\} = [\Psi_i^1]^T \{f_i^1\}$  e  $\{F_i^2\} = [\Psi_i^2]^T \{f_i^2\}$  são as excitações no interior de cada subestrutura, enquanto  $\{F_c\} = [S_i^1]^T \{f_i^1\} + [S_i^2]^T \{f_i^2\} + \{f_c^1\} + \{f_c^2\}$  identifica as excitações na interface de acoplamento. Por fim, a solução do problema acoplado, em coordenadas físicas, pode ser obtida através da relação (SOIZE, 2003)

$$\begin{Bmatrix} \{u_i^1\} \\ \{u_i^2\} \\ \{u_c\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Psi_i^1] & [0] & [S_i^1] \\ [0] & [\Psi_i^2] & [S_i^2] \\ [0] & [0] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_i^1\} \\ \{q_i^2\} \\ \{u_c\} \end{Bmatrix}. \quad (6.9)$$

O método de Craig-Bampton se mostra uma alternativa de menor custo computacional para o cálculo da dinâmica de estruturas complexas quando os deslocamentos nas regiões de acoplamento são pequenos. Para sistemas onde existem grandes deslocamentos na interface entre as duas subestruturas este método apresenta resultados limitados, necessitando-se avaliar outros métodos de subestruturação mais complexos, como o de interface livre de Craig-Chang (MAIA; SILVA, 1997). Um exemplo do método de Craig-Bampton quando aplicado a um sistema de cinco graus de liberdade não amortecido está apresentado no Apêndice E, enquanto um outro exemplo envolvendo um modelo de barra discretizado, utilizando-se o método dos elementos finitos, pode ser encontrado em COOK et al. (2002). Para um exemplo envolvendo o método de interface livre de Craig-Chang, sugere-se a Referência (WIDRICK, 1992).

Uma dificuldade inerente à aplicação do método de subestruturação de Craig-Bampton surge na representação do amortecimento do modelo. Uma alternativa para contornar essa dificuldade pode ser implementada ao se admitir que a matriz de amortecimento  $[\tilde{C}_{CB}^r]$  pode ser obtida através da proporcionalidade com as matrizes de massa  $[\tilde{M}_{CB}^r]$  e rigidez  $[\tilde{K}_{CB}^r]$ , escritas na Eq. 6.7, tal que

$$[\tilde{C}_{CB}^r] = \alpha_{CB}^r [\tilde{M}_{CB}^r] + \beta_{CB}^r [\tilde{K}_{CB}^r], \quad (6.10)$$

onde  $\alpha_{CB}^r$  e  $\beta_{CB}^r$  são duas constantes. Esta representação, também conhecida na literatura como modelo de amortecimento de Rayleigh, torna o amortecimento do modelo variável com a frequência (COOK et al., 2002). Porém, é possível estimar uma aproximação para um amortecimento modal  $\xi_k^r$  constante, em de uma faixa de frequência  $[\omega_1, \omega_2]$ , tal que

$$\alpha_{CB}^r = 2\omega_1\omega_2\xi_k^r \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \quad \text{e} \quad \beta_{CB}^r = 2\xi_k^r \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2}. \quad (6.11)$$

Essa região de interpolação deve ser suficientemente estreita para que os erros devido ao ajuste possam ser negligenciados. Na implementação do modelo de amortecimento modal constante em uma solução harmônica, ao atualizar os valores  $\alpha_{CB}^r$  e  $\beta_{CB}^r$  a cada iteração, deixa-se de ter um amortecimento dependente da frequência e obtêm-se um operador  $[\tilde{C}_{CB}^r(\omega)]$  variável.

### 6.1.1 Método de Craig-Bampton probabilístico não paramétrico

O método de Craig-Bampton probabilístico não paramétrico foi proposto, recentemente (SOIZE; CHEBLI, 2003), e consiste em substituir os operadores determinísticos do modelo de Craig-Bampton usual por matrizes aleatórias cuja lei de probabilidades é construída a partir de teoria de matrizes aleatórias juntamente com o PME. Esse método possibilita a análise das respostas dinâmicas de estruturas complexas cujas incertezas não se encontram distribuídas de maneira homogênea nos operadores do modelo. Considere as matrizes de massa  $[\tilde{M}_{CB}^r]$  e rigidez  $[\tilde{K}_{CB}^r]$  da subestrutura  $S^r$  apresentadas na Eq. 6.7. O operador  $[\tilde{M}_{CB}^r]$  é, necessariamente, simétrico e positivo definido, levando à possibilidade de efetuar-se uma decomposição de Cholesky na forma

$$[\tilde{M}_{CB}^r] = [L_{CB}^r]^T [L_{CB}^r], \quad (6.12)$$

onde  $[L_{CB}^r]$  é uma matriz triangular superior. Caso a subestrutura  $S^r$  esteja fixa, necessariamente, o operador  $[\tilde{K}_{CB}^r]$  passa a ser simétrico e positivo definido, possibilitando que esta matriz seja reescrita através de uma decomposição de Cholesky, de maneira similar ao operador  $[\tilde{M}_{CB}^r]$ . Porém, caso a subestrutura  $S^r$  esteja livre, o operador  $[\tilde{K}_{CB}^r]$  é, necessariamente, simétrico e positivo semi-definido, fato que impossibilita a sua reconstrução através de uma fatorização de Cholesky. Além disso,  $[\tilde{K}_{CB}^r]$  não é diagonal e, por consequência, pode não apresentar raiz quadrada  $[\tilde{K}_{CB}^r]^{1/2}$ , propriedade que inviabiliza a construção semelhante à Eq. 5.2 do capítulo anterior. Para contornar essa dificuldade, considerando a

condição de simetria de  $[K_{CB}^r]$ , este operador pode ser reescrito através de uma decomposição por valor singular na forma

$$[\tilde{K}_{CB}^r] = [S^r][\mathcal{V}^r][S^r]^T, \quad (6.13)$$

onde  $[S^r]$  é uma matriz real, enquanto  $[\mathcal{V}^r]$  é um operador diagonal positivo semi-definido que pode ser reescrito como  $[\mathcal{V}^r] = [\mathcal{V}^r]^{1/2}[\mathcal{V}^r]^{1/2}$ . Assim, o operador  $[K_{CB}^r]$  pode ser obtido através da expressão

$$[\tilde{K}_{CB}^r] = [S^r][\mathcal{V}^r]^{1/2}[\mathcal{V}^r]^{1/2}[S^r]^T = [L_{CB}^r][L_{CB}^r]^T, \quad (6.14)$$

onde  $[L_{CB}^r] = [S^r][\mathcal{V}^r]^{1/2}$ , visto que  $[\mathcal{V}^r]^{1/2}$  é uma matriz diagonal. Seja  $[\tilde{A}_{CB}^r]$  qualquer matriz  $[\tilde{M}_{CB}^r]$  ou  $[\tilde{K}_{CB}^r]$ . As incertezas são adicionadas ao modelo na forma

$$[\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{CB}}^r] = [L_{CB}^r][\mathbf{G}_{\mathbf{CB}}^r][L_{CB}^r]^T, \quad (6.15)$$

onde  $[\mathbf{G}_{\mathbf{CB}}^r]$  é um operador aleatório cujo modelo probabilístico é construído a partir da teoria de matrizes aleatórias juntamente com o PME utilizando-se as propriedades algébricas desta matriz como restrições junto ao problema de otimização definido. Ao se observarem as propriedades de  $[\mathbf{G}_{\mathbf{CB}}^r]$ , conclui-se que este operador apresenta as mesmas restrições que as matrizes aleatórias não paramétricas construídas anteriormente (SOIZE; CHEBLI, 2003) e, conseqüentemente, a sua representação algébrica segue as leis de probabilidades dos operadores aleatórios discutidos anteriormente (ver Subseção 3.2.2). A equação de movimento não amortecido da Subestrutura  $S^r$  pode ser escrita, na base vetorial proposta pelo método de Craig-Bampton, como

$$\begin{bmatrix} [\tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{ii}}^r] & [\tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{ic}}^r] \\ [\tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{ic}}^r]^T & [\tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{cc}}^r] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\tilde{\mathbf{q}}_i^r\} \\ \{\tilde{\mathbf{u}}_c^r\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [\tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{ii}}^r] & [\tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{ic}}^r] \\ [\tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{ic}}^r]^T & [\tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{cc}}^r] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{q}_i^r\} \\ \{\mathbf{u}_c^r\} \end{Bmatrix} = [H_{CB}^r]^T \begin{Bmatrix} \{f_i^r\} \\ \{f_c^r\} \end{Bmatrix}, \quad (6.16)$$

onde  $[\tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{ii}}^r]$ ,  $[\tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{ic}}^r]$ ,  $[\tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{cc}}^r]$ ,  $[\tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{ii}}^r]$ ,  $[\tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{ic}}^r]$  e  $[\tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{cc}}^r]$  são os operadores aleatórios construídos a partir da representação não paramétrica de  $[\tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{CB}}^r]$  e  $[\tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{CB}}^r]$ , enquanto  $\{\mathbf{q}_i^r\}$  e  $\{\mathbf{u}_c^r\}$  são os processos estocásticos associados às respostas do modelo. De posse da equação de movimento de cada subestrutura, a Eq. 6.8 que define, de maneira determinística, o movimento das subestruturas acopladas, pode ser substituída pelo modelo

estocástico

$$\begin{bmatrix} [\tilde{\mathbf{M}}_{ii}^1] & [0] & [\tilde{\mathbf{M}}_{ic}^1] \\ [0] & [\tilde{\mathbf{M}}_{ii}^2] & [\tilde{\mathbf{M}}_{ic}^2] \\ [\tilde{\mathbf{M}}_{ic}^1]^T & [\tilde{\mathbf{M}}_{ic}^2]^T & [\tilde{\mathbf{M}}_{cc}^1] + [\tilde{\mathbf{M}}_{cc}^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{\mathbf{q}}_i^1\} \\ \{\ddot{\mathbf{q}}_i^2\} \\ \{\ddot{\mathbf{u}}_c\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [\tilde{\mathbf{K}}_{ii}^1] & [0] & [0] \\ [0] & [\tilde{\mathbf{K}}_{ii}^2] & [0] \\ [0] & [0] & [\tilde{\mathbf{K}}_{cc}^1] + [\tilde{\mathbf{K}}_{cc}^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{q}_i^1\} \\ \{\mathbf{q}_i^2\} \\ \{\mathbf{u}_c\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_i^1\} \\ \{F_i^2\} \\ \{F_c\} \end{Bmatrix}, \quad (6.17)$$

enquanto o processo estocástico relacionado às coordenadas físicas pode ser obtido, levando em conta os resultados da Eq. 6.9, como

$$\begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}_i^1\} \\ \{\mathbf{u}_i^2\} \\ \{\mathbf{u}_c\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Psi_i^1] & [0] & [S_i^1] \\ [0] & [\Psi_i^2] & [S_i^2] \\ [0] & [0] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{q}_i^1\} \\ \{\mathbf{q}_i^2\} \\ \{\mathbf{u}_c\} \end{Bmatrix}. \quad (6.18)$$

De maneira análoga ao caso determinístico, a representação do amortecimento da estrutura para o modelo estocástico também apresenta dificuldades. Uma alternativa para contornar essa limitação surge a partir da representação via modelo de Rayleigh, assim como no caso determinístico. Porém, vale ressaltar que, além de se recalcular a matriz de amortecimento a cada iteração da simulação de Monte Carlo, esse mesmo operador deve ser atualizado algumas vezes durante uma solução harmônica, sempre que se deseja a aproximação por um amortecimento modal constante.

Outra característica bastante importante do modelo estocástico acoplado é a quantificação da incerteza no acoplamento. Ao se observar a Eq. 6.17, nota-se que a incerteza nas matrizes de acoplamento é a soma do nível de incerteza de cada modelo. De fato, essa aproximação pode, para algumas estruturas, ser relativamente pobre, uma vez que processos físicos bastante complexos podem ocorrer nestas junções. Porém, essa estratégia torna a análise mais simples, mostrando-se uma boa ferramenta para o estudo de estruturas complexas sempre que o nível de incerteza na região de acoplamento encontra-se ao mesmo nível das incertezas de cada subestrutura. Para acoplamentos mais complexos, uma alternativa consiste em criar uma subestrutura do modelo para a junção e, então, construir um modelo médio mais sofisticado para esta região. Essa abordagem foi proposta por SOIZE; CHEBLI (2003) e validada, experimentalmente, em um problema de duas placas planas acopladas por parafusos (CHEBLI; SOIZE, 2004; DUCHEREAU; SOIZE, 2006). Mais recentemente, MIGNOLET; SOIZE; AVALOS (2013) propuseram um modelo probabilístico não paramétrico alternativo para sistemas

onde existem grandes níveis de incerteza nas condições de contorno ou nos acoplamentos entre as subestruturas de um modelo.

## 6.2 Modelo numérico para o tubo de descarga acoplado à carcaça

A fim de determinar o comportamento dinâmico da carcaça do compressor quando acoplada ao tubo de descarga, avaliou-se a estrutura de maneira determinística e estocástica. Desse modo, utilizam-se os modelos médios dos Capítulos 4 e 5 para a representação de cada subestrutura e, com base na Seção 6.1, constroem-se os modelos médio e estocástico para a estrutura acoplada. Uma vez que o tubo de descarga encontra-se conectado fisicamente ao tubo passador, espera-se que, devido às impedâncias comparáveis em algumas faixas de frequências, grandes deslocamentos possam existir nesta região. Esta característica inviabiliza a construção de um modelo baseado em síntese modal com interface fixa, como o método de Craig-Bampton. Para contornar essa dificuldade, deslocou-se a região de acoplamento das subestruturas à conexão do passador com a carcaça, onde os deslocamentos devem ser pequenos, fato que possibilita a aplicação do método de subestruturação proposto. Desse modo, uma subestrutura do modelo é composta pelo

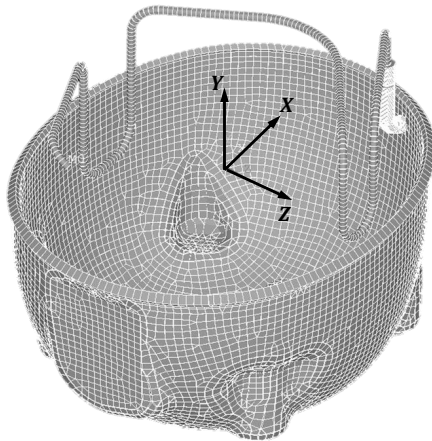


Figura 46 – Base da carcaça acoplada ao tubo de descarga através do tubo passador.



tubo de descarga juntamente com o passador, enquanto a outra subestrutura se resume à carcaça do compressor. A Fig. 46 ilustra a estrutura acoplada, onde é possível identificar a base da carcaça juntamente com o passador e o tubo de descarga. Além disso, vale ressaltar que existe uma inserção de 13 mm do tubo de descarga no passador. A região de inserção é considerada no modelo admitindo-se uma viga Euler-Bernoulli com propriedades geométricas equivalentes.

### 6.2.1 Resultado do modelo médio

Para validar o modelo acoplado através do método de Craig-Bampton, comparam-se as respostas obtidas na interface entre as duas subestruturas quando calculadas através do método de subestruturação aos mesmos valores quando obtidos através do modelo completo usual. A Fig. 47 ilustra a resposta da aceleração na direção  $X$  devido à aplicação de uma excitação unitária em todos os graus de liberdade da extremidade livre do tubo de descarga, onde a curva preta mostra os resultados obtidos com o modelo completo usual, enquanto a curva em cinza ilustra a resposta obtida com o modelo de Craig-Campton. Para os cálculos do modelo subestruturado, admite-se a superposição de 70 formas modais para o tubo de descarga, enquanto a resposta da carcaça é calculada admitindo-se uma expansão com 350 modos naturais de vibração. As respostas estruturais foram obtidas admitindo-se uma excitação pontual e unitária em todas as direções de rotação e translação

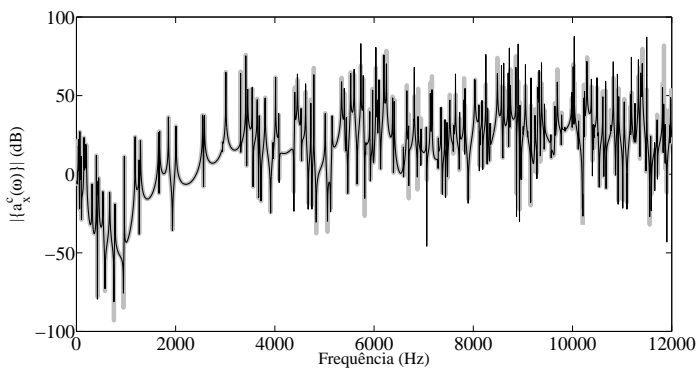


Figura 47 – Resposta obtida com o método de Craig-Bampton, em cinza, comparada ao espectro do modelo completo, em preto.

da extremidade livre do tubo de descarga. Os resultados mostram que as diferenças são negligenciáveis, confirmando a ideia de que o método proposto apresenta bons resultados para subestruturas com baixos deslocamentos na interface. Vale ressaltar que os resultados obtidos na Fig. 47 foram calculados utilizando modelos não amortecidos, uma vez que não é tarefa simples adicionar o mesmo nível de amortecimento aos dois modelos confrontados. Além disso, os níveis de amortecimento das duas subestruturas foram caracterizados utilizando-se uma abordagem modal, fato que dificulta a representação utilizando uma abordagem convencional para as duas estruturas acopladas. De fato, um modelo completo usual apresenta apenas uma matriz de massa e outra de rigidez, tornando difícil a tarefa de adicionar dois níveis de amortecimento espacialmente distintos em uma mesma estrutura via modelo de amortecimento proporcional. Neste caso, torna-se mais simples adicionar o amortecimento utilizando o modelo de Craig-Bampton, visto que as matrizes de massa e rigidez de cada subestrutura podem ser utilizadas para a solução do problema através de um modelo de Rayleigh.

### 6.2.2 Convergência quadrática média

Para garantir que os resultados obtidos com o modelo de Craig-Bampton estocástico não paramétrico sejam estatisticamente significativos, avaliou-se a função convergência média quadrática

$$\text{Conv}(s_{CB}) = \left\{ \frac{1}{s_{CB}} \sum_{k=1}^{s_{CB}} \int_{\mathbb{B}^{CB}} |\{a_x^c(\omega, k)\}|^2 d\omega \right\}^{1/2}, \quad (6.19)$$

como função do número de simulações  $s_{CB}$  em uma banda de frequência  $\mathbb{B}^{CB}(0,12]$  kHz. A Fig. 48 apresenta  $20 \times \log_{10}(\text{Conv}(s_{CB}))$  em função de  $s_{CB}$ , de onde é possível concluir que o modelo converge com 1200 simulações. Os resultados da Fig. 48 foram calculados admitindo-se o fator de dispersão de  $\delta_M^t = \delta_C^t = \delta_K^t = \delta_M^c = \delta_C^c = \delta_K^c = 0,1$  para as matrizes aleatórias do modelo do tubo de descarga e da carcaça analisados.

### 6.2.3 Resultados do modelo estocástico

Com a finalidade de avaliar a sensibilidade das respostas da estrutura às incertezas no modelo do tubo de descarga e da carcaça, o modelo probabilístico não paramétrico de Craig-Bampton é calculado para diferentes valores de incerteza nos modelos de cada subestrutura. Os resultados são obtidos admitindo-se a mesma excitação discutida

na subseção anterior. Apresentam-se, a princípio e como exemplo, dois cenários distintos, onde as incertezas nos modelos do tubo de descarga e da carcaça são adicionadas separadamente. Os espectros da Fig.49 mostram três respostas do sistema quando calculados admitindo-se  $\delta_M^t = \delta_C^t = \delta_K^t = 0,1$  para o modelo probabilístico do tubo de descarga, enquanto o modelo numérico da carcaça é tratado de maneira determinística. O primeiro espectro apresenta a resposta pontual no tubo de descarga, calculada na direção  $X$ . Os resultados ilustram que a incerteza no modelo do tubo de descarga faz com que exista uma determinada incerteza na resposta da estrutura e, ainda, que este comportamento cresce em frequências mais elevadas. O segundo espectro apresenta a resposta, calculada para a direção  $X$ , na interface de acoplamento entre as duas subestruturas. O resultado mostra que, devido às incertezas no modelo estrutural do tubo de descarga, a determinação da resposta da estrutura encontra-se afetada em toda a faixa de frequência, como mostra o envelope de confiança calculado. Este resultado ocorre pelo fato de que a determinação da resposta neste local é muito sensível com respeito ao modelo do tubo de descarga. O terceiro espectro apresenta a aceleração normal à superfície da carcaça em uma posição qualquer da estrutura. Os resultados mostram que, mesmo que o modelo da carcaça seja tratado de maneira determinística, a determinação da resposta nesse componente encontra-se bastante afetada pelas incertezas no modelo do tubo de descarga.

De maneira análoga ao caso anterior, a Fig. 50 apresenta as mesmas três respostas estruturais da Fig. 49 quando calculadas considerando um modelo determinístico para o tubo de descarga e uma abordagem aleatória com  $\delta_M^c = \delta_C^c = \delta_K^c = 0,1$  para a carcaça do compressor.

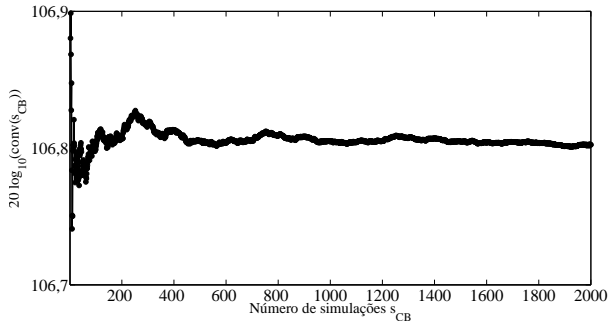


Figura 48 – Gráfico da Eq. 6.19 avaliada para diferentes valores de  $s_{CB}$ .

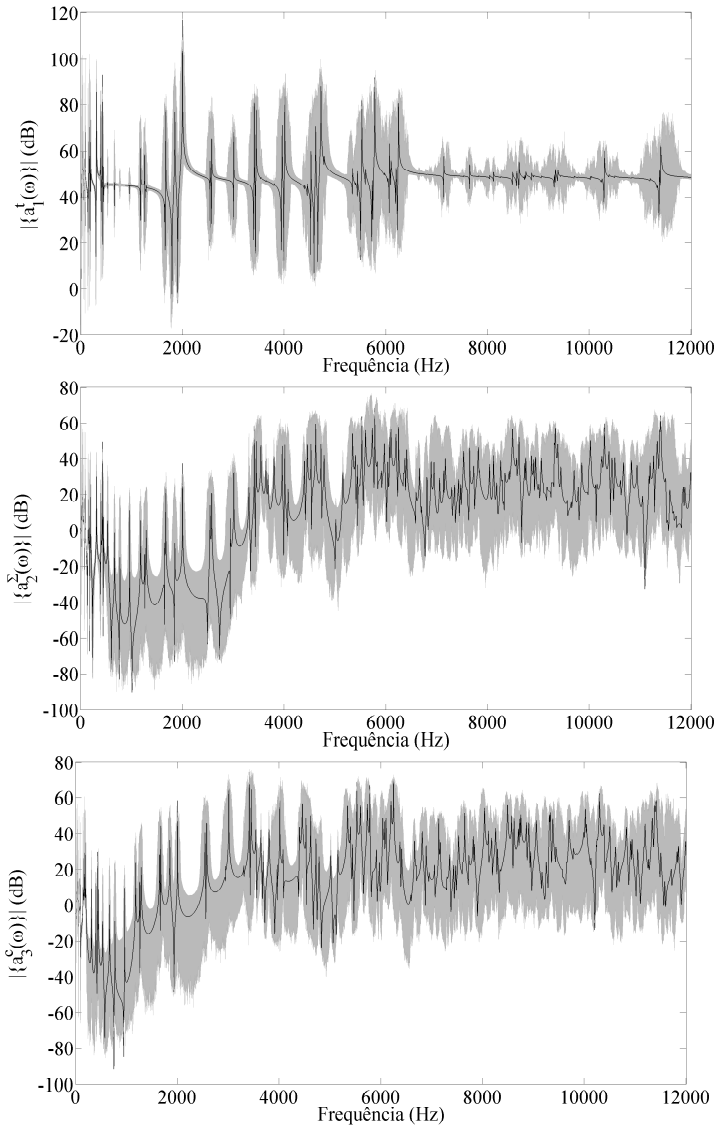


Figura 49 – Espectro de aceleração na extremidade do tubo de descarga ( $\{a_1^t(\omega)\}$ ), na interface ( $\{a_2^\Sigma(\omega)\}$ ) e na carcaça ( $\{a_3^c(\omega)\}$ ). As linhas pretas indicam a resposta do modelo médio e o envelope cinza identifica a região de 99% de confiança do modelo estocástico calculadas utilizando uma abordagem incerta para o tubo e uma determinística para a carcaça.

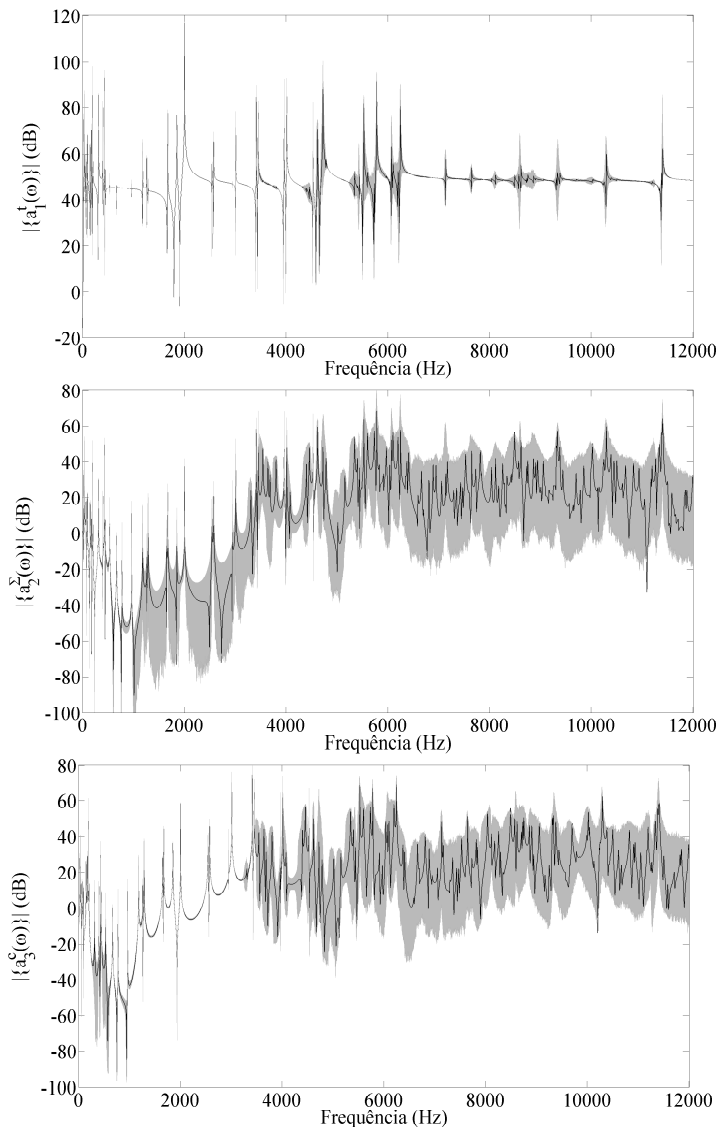


Figura 50 – Espectro de aceleração na extremidade do tubo de descarga ( $\{a_1^t(\omega)\}$ ), na interface ( $\{a_2^\Sigma(\omega)\}$ ) e na carcaça ( $\{a_3^c(\omega)\}$ ). As linhas pretas indicam a resposta do modelo médio e o envelope cinza identifica a região de 99% de confiança do modelo estocástico calculadas utilizando uma abordagem determinística para o tubo e uma incerta para a carcaça.

O primeiro espectro mostra que a resposta pontual é pouco afetada pela sensibilidade no modelo da carcaça. Este resultado comprova que, para extremidade livre do tubo de descarga, a carcaça apresenta pouca influência no seu comportamento dinâmico. A resposta na interface entre as duas subestruturas, por sua vez, mostra que, em frequências inferiores a 1 kHz, a resposta é pouco sensível ao modelo da carcaça. Porém, em frequências superiores a 1 kHz, as incertezas no modelo da carcaça deixam a resposta na interface bastante sensível. O espectro calculado na superfície da carcaça, por sua vez, mostra um comportamento bastante interessante. Mesmo com o nível de incerteza no modelo da carcaça, a resposta da estrutura é pouco sensível em frequência inferiores a, aproximadamente, 3,5 kHz. Isto ocorre pelo fato de que, nesta faixa de frequência, o comportamento do sistema é dominado pela dinâmica do tubo de descarga. Em frequências superiores a 3,5 kHz a dinâmica da carcaça torna-se mais importante no sistema acoplado e, então, a resposta do sistema torna-se mais sensível.

Com a finalidade de avaliar o comportamento da carcaça de maneira mais global, foi calculada a velocidade quadrática média da estrutura em bandas de terço de oitava. Esse cálculo foi computado utilizando-se 100 pontos distribuídos uniformemente ao longo da superfície da estrutura. A Fig. 51 apresenta os resultados obtidos admitindo-se

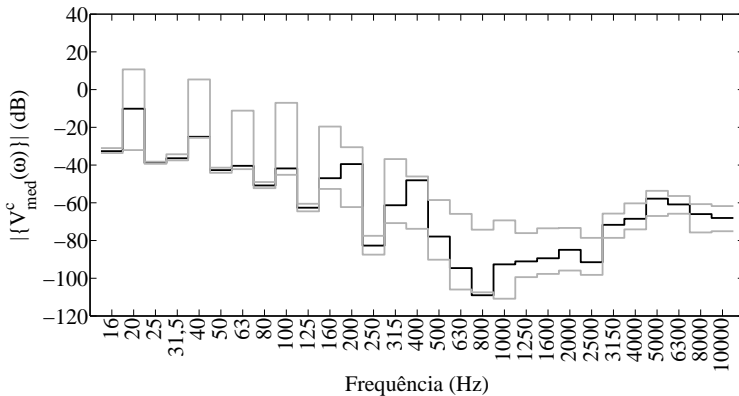


Figura 51 – Envelope de 99% de confiança referente à velocidade quadrática média da carcaça, em cinza, comparada à respectiva resposta do modelo médio, em preto. Os resultados foram calculados admitindo-se  $\delta_M^t = \delta_C^t = \delta_K^t = 0, 1$  e um modelo determinístico para a carcaça do compressor.

$\delta_M^t = \delta_C^t = \delta_K^t = 0, 1$ , enquanto a dinâmica da carcaça é modelada utilizando-se uma abordagem determinística. A partir desse resultado comprova-se que, mesmo em baixas frequências, o nível de incerteza em banda de terço de oitava pode alcançar 40 dB. Esses cálculos comprovam a afirmação de que a resposta dinâmica da carcaça do compressor é bastante sensível à dinâmica do tubo de descarga, corroborando a ideia de que um modelo mais robusto para a estrutura tubular deve levar a resultados mais precisos. Além disso, para a banda específica de 800 Hz, o valor calculado para o modelo determinístico encontra-se fora do envelope de 99% de confiança, sugerindo que, neste caso, uma análise determinística para a estrutura pode levar a resultados pouco representativos.

De maneira similar à Fig. 51, os resultados da Fig. 52 apresentam as velocidades quadráticas médias na superfície da carcaça do compressor admitindo-se  $\delta_M^c = \delta_C^c = \delta_K^c = 0, 1$ , enquanto o modelo do tubo de descarga é tratado de maneira determinística. Os valores obtidos

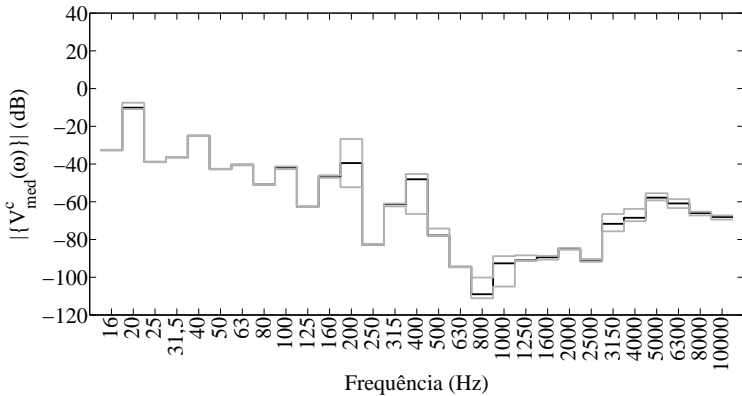


Figura 52 – Envelope de 99% de confiança referente à velocidade quadrática média da carcaça, em cinza, comparada à respectiva resposta do modelo médio, em preto. Os resultados foram calculados admitindo-se  $\delta_M^c = \delta_C^c = \delta_K^c = 0, 1$  e um modelo determinístico para o tubo de descarga do compressor.

mostram que a velocidade quadrática média da estrutura é pouco sensível às incertezas no modelo da carcaça, especialmente em baixas frequências. Além disso, todos os resultados obtidos com o modelo médio encontram-se dentro da região de confiança predita pelos resultados

estocásticos, mostrando que uma abordagem determinística para a carga do compressor apresenta resultados bastante representativos na determinação do comportamento dinâmico da estrutura.

Por fim, a Fig. 53 apresenta os valores obtidos para a velocidade quadrática média da carga do compressor calculada admitindo-se  $\delta_M^t = 0,17$ ,  $\delta_C^t = 0,31$ ,  $\delta_K^t = 0,09$ ,  $\delta_M^c = 0,05$ ,  $\delta_C^c = 0,46$  e  $\delta_K^c = 0,08$ . Estes valores foram obtidos através dos ajustes de modelo dos

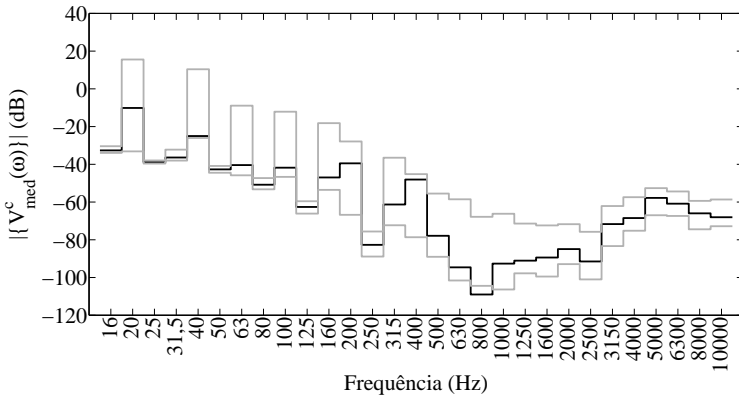


Figura 53 – Envelope de 99% de confiança referente à velocidade quadrática média da carga, em cinza, comparada à respectiva resposta do modelo médio, em preto. Os resultados foram calculados admitindo-se  $\delta_M^t = 0,17$ ,  $\delta_C^t = 0,31$ ,  $\delta_K^t = 0,09$ ,  $\delta_M^c = 0,05$ ,  $\delta_C^c = 0,46$  e  $\delta_K^c = 0,08$ .

capítulos anteriores ao se analisarem, separadamente, as incertezas de cada componente. Ao se analisarem os resultados da Fig. 53, conclui-se que os valores obtidos são bastante semelhantes aos resultados da Fig. 51. De fato, ao se adicionarem as incertezas ao modelo da carga, as diferenças são quase desprezíveis devido à sensibilidade da estrutura com respeito às incertezas do tubo de descarga.

### 6.3 Síntese do capítulo

Essa seção avaliou as respostas dinâmicas de um tubo de descarga acoplado à carga de um compressor hermético típico considerando os modelos incertos construídos anteriormente. Desse modo, os principais desenvolvimentos desse capítulo são:



1. apresentou-se a metodologia de Craig-Bampton para a síntese modal de componentes utilizando uma abordagem com interface fixa;
2. discutiram-se as restrições físicas para as matrizes de Craig-Bampton e, a partir delas, determinou-se o melhor modelo probabilístico não paramétrico para o sistema;
3. uma nova estratégia para a construção das matrizes não paramétricas foi apresentada, por necessidade, devido às propriedades algébricas dos operadores de Craig-Bampton;
4. aplicou-se o método de Craig-Bampton juntamente com a abordagem probabilística não paramétrica para um sistema composto por um tubo de descarga acoplado à carcaça de um compressor típico;
5. discutiu-se a sensibilidade da resposta do sistema acoplado com respeito às incertezas nos modelos numéricos de cada subestrutura modelada.



## 7 Conclusões

Esse trabalho teve como principal objetivo a construção de modelos numéricos robustos para componentes estruturais utilizados em compressores herméticos. Desse modo, esse documento versou sobre os seguintes temas:

1. discussão sobre o conceito de incertezas em vibrações e acústica, apresentação de alguns resultados disponíveis na literatura e elaboração de uma pequena introdução a respeito das ferramentas matemáticas necessárias para se estudar a modelagem de incertezas em sistemas dinâmicos. As informações discutidas sugerem que a grande maioria dos avanços em quantificação de incertezas ocorreu na área computacional. Além disso, para sistemas manufaturados complexos, poucos trabalhos disponíveis comparam resultados numéricos com experimentais;
2. aplicação dos métodos probabilísticos paramétrico e não paramétrico de modelagem de incertezas a um problema de flexão de vigas. Além disso, apresentou-se uma metodologia, disponível na literatura, para a solução de problemas inversos utilizando-se informações obtidas em ensaios de análise modal experimental. Essa metodologia baseia-se na definição matemática dos parâmetros de dispersão e apresenta um baixo custo computacional para a solução do problema. Porém, devido ao elevado número de resultados experimentais necessários, tal metodologia mostra-se inviável para a solução de problemas inversos em uma realidade industrial;
3. construção de modelos probabilísticos paramétrico e não paramétrico para o tubo de descarga de um compressor hermético. Essa abordagem discutiu os objetivos de cada modelo, bem como as suas respectivas dificuldades e limitações. Com a finalidade de confrontar os resultados numéricos com algumas respostas experimentais, uma série de experimentos foi conduzida utilizando-se tubos de descarga obtidos em uma linha de manufatura. Por fim, sugeriu-se uma nova metodologia para a solução de problemas inversos, em modelos não paramétricos, utilizando-se uma formulação ligeiramente distinta das alternativas disponíveis na literatura. A metodologia de ajuste mostrou-se viável para a aplicação em

ambientes industriais e, ainda, o modelo não paramétrico apresentou resultados satisfatórios comparados às respectivas respostas experimentais dos tubos de descarga ensaiados;

4. determinação de um modelo robusto não paramétrico para a carga de compressores herméticos utilizando-se o mesmo procedimento aplicado ao tubo de descarga investigado anteriormente. Esses resultados mostraram que o método de ajuste de modelo descrito anteriormente pode ser estendido a problemas dinâmicos mais complexos;
5. previsão do comportamento dinâmico do tubo de descarga acoplado à carga de um compressor hermético utilizando-se os modelos incertos construídos anteriormente. Para esses cálculos, optou-se por uma metodologia de interface fixa, visto que as impedâncias dos dois componentes estruturais estudados são bastante distintas. Os resultados mostram que a velocidade quadrática média na superfície da carga do compressor, devido a uma excitação fictícia na extremidade do tubo de descarga, é altamente sensível às incertezas no modelo estrutural do tubo de descarga. Esse resultado sugere que a construção de um modelo numérico mais representativo para o tubo de descarga é parte dominante para o desenvolvimento de um modelo acoplado menos incerto.

Desse modo, a metodologia de modelagem estocástica que utiliza uma estratégia não paramétrica mostrou-se uma ferramenta bastante acessível para a construção de modelos robustos para componentes estruturais de compressores herméticos. Além disso, o modelo estrutural robusto construído para a carga do compressor pode ser reutilizado para o projeto de novas configurações de tubos de descarga. Essa investigação pode ser feita, utilizando-se uma abordagem estocástica, ao se substituir o tubo de descarga original por uma outra configuração no modelo estrutural acoplado (ver Capítulo 6), como sugerido recentemente por MBAYE et al. (2012) no contexto de projetos de turbomáquinas.

## 7.1 Sugestões para trabalhos futuros

Para pesquisas futuras, sugerem-se os seguintes trabalhos:

1. o ajuste do modelo não paramétrico discutido na Subseção 4.5 avaliou apenas três configurações para as constantes  $C_1$  e  $C_2$  do problema. Essa análise deve ser estendida e, conseqüentemente,

melhor investigada montando-se um problema de otimização multiobjetivo utilizando-se diversas configurações de  $C_1$  e  $C_2$ . Ao se observar as respostas obtidas, através de um diagrama de Pareto, outras configurações ótimas serão avaliadas e o ajuste poderá ser aprimorado. Além disso, outras técnicas mais complexas para a solução de problemas inversos devem ser avaliadas, como as estratégias de inferência Bayesiana (SOIZE, 2013);

2. os ajustes não paramétricos utilizaram apenas uma FRF para cada estrutura. A leitura das respostas em pontos distintos e a inserção dessas informações no problema de otimização deve levar a resultados ainda mais robustos;
3. avaliar a resposta dinâmica de algumas amostras de carcaças acopladas ao tubo de descarga para confrontar com a predição do modelo estocástico construído. De fato, a hipótese de que a flutuação estatística nas matrizes de acoplamento pode ser aproximada como a soma das incertezas de cada subestrutura é uma afirmação forte e que, portanto, necessita de uma investigação mais detalhada. Porém, como a carcaça do compressor é hermeticamente fechada, o acesso ao comportamento dinâmico do tubo de descarga é bastante restrito. Uma alternativa para contornar essa dificuldade pode ser observada na Fig. 54, onde os tubos de descarga e passador encontram-se fora da carcaça. A partir dessa

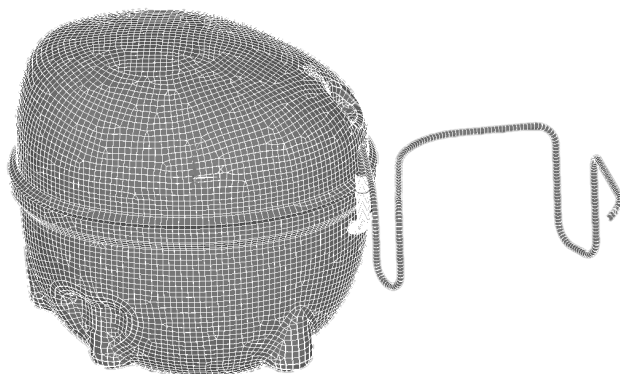


Figura 54 – Configuração estrutural sugerida para a investigação do tubo de descarga acoplado à carcaça.

configuração estrutural, o acesso ao tubo de descarga é facilitado e o comportamento dinâmico da estrutura pode ser melhor avaliado;

4. adicionar ao modelo outros componentes estruturais encontrados em compressores herméticos típicos e, ainda, utilizar espectros de excitações obtidas experimentalmente. Essa análise deve levar a resultados mais próximos daqueles encontrados em condições normais de operação do compressor. Uma outra análise necessária e que não foi abordada nesse documento é a interação fluido-estrutura entre o sistema composto pelo gás circulando no interior do tubo de descarga e, também, a interação entre o óleo e a carcaça do compressor. Essas análises também podem ser feitas utilizando uma abordagem probabilística não paramétrica (RITTO; SAM-PAIO; ROCHINHA, 2011; RITTO et al., 2014);
5. os resultados experimentais obtidos, em algumas faixas de frequência, diferem muito dos resultados preditos pelo modelo médio. Desse modo, a construção de melhores modelos médios é parte fundamental do problema. Uma alternativa para melhorar os resultados dos modelos médios é a aplicação de técnicas de ajuste de modelo, como sugerido por DOI (2011), em diversos componentes estruturais utilizados em compressores herméticos típicos;
6. aplicar técnicas de otimização aos modelos incertos construídos com o objetivo de melhorar o comportamento dinâmico do sistema. Algumas técnicas de otimização paramétrica utilizando os modelos não paramétricos encontram-se disponíveis na literatura no contexto de análise estrutural (CAPIEZ-LERNOUT; SOIZE, 2008b) e vibroacústica (CAPIEZ-LERNOUT; SOIZE, 2008a). Porém, outros métodos de otimização mais sofisticados, como os algoritmos topológico e de forma, ainda carecem de fundamentação teórica para as aplicações em modelos probabilísticos não paramétricos.

# Referências

- ABCM. *Comitê de quantificação de incertezas e modelagem estocástica*. 2015. Data de acesso: 19 de janeiro de 2015. Disponível em: <<http://www.abcm.org.br/comites-tecnicos/comite-de-quantificacao-de-incertezas-e-modelagem-estocastica>>.
- ADHIKARI, S. Matrix variate distributions for probabilistic structural dynamics. *AIAA Journal*, v. 45, n. 7, p. 1748–1762, 2007.
- ADHIKARI, S. Wishart random matrices in probabilistic structural mechanics. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 134, n. 12, p. 1029–1044, 2008.
- ADHIKARI, S.; FRISWELL, M.; LONKAR, K.; SARKAR, a. Experimental case studies for uncertainty quantification in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, v. 24, n. 4, p. 473–492, 2009.
- ADHIKARI, S.; SARKAR, A. Uncertainty in structural dynamics: Experimental validation of a Wishart random matrix model. *Journal of Sound and Vibration*, v. 323, p. 802–825, 2009.
- ANSYS. *Theory Reference - Release 5.6*. Pennsylvania, USA: [s.n.], 1999. 14-16 p.
- ASME. *Uncertainty*. 2015. Data de acesso: 19 de janeiro de 2015. Disponível em: <<https://www.asme.org/engineering-topics/uncertainty>>.
- BATOU, A.; SOIZE, C.; AUDEBERT, S. Model identification in computational stochastic dynamics using experimental modal data. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, p. 1–16, 2014.
- BECK, A.; TRINDADE, M. Special Issue 2: Uncertainties 2012. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 34, n. 2, p. 632–633, 2012.
- BECK, A.; TRINDADE, M. Special issue on uncertainty quantification and stochastic modeling. *International Journal for Uncertainty Quantification*, v. 3, n. 6, p. 540–541, 2013.

- BOHIGAS, O.; LEGRAND, O.; SCHIMIT, C.; SORNETTE, D. Comment on spectral statistics in elastodynamics. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 89, p. 1456–1458, 1991.
- BORTOLI, M.; SILVA, J. The Application of Monte Carlo Method for Sensitivity Analysis of Compressor Components. In: *International Compressor Engineering Conference*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 1–10.
- CAPIEZ-LERNOUT, E.; PELLISSETTI, M.; PRADLWARTER, H.; SCHUELLER, G.; SOIZE, C. Data and model uncertainties in complex aerospace engineering systems. *Journal of Sound and Vibration*, v. 295, n. 3-5, p. 923–938, 2006.
- CAPIEZ-LERNOUT, E.; SOIZE, C. Design Optimization With an Uncertain Vibroacoustic Model. *Journal of Vibration and Acoustics*, v. 130, n. 2, p. 02100–1, 2008.
- CAPIEZ-LERNOUT, E.; SOIZE, C. Robust Design Optimization in Computational Mechanics. *Journal of Applied Mechanics*, v. 75, n. 2, p. 02100–1, 2008.
- CATALDO, E. *Introdução aos Processos Estocásticos*. São Carlos: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2012. 106 p.
- CHEBLI, H.; SOIZE, C. Experimental validation of a nonparametric probabilistic model of nonhomogeneous uncertainties for dynamical systems. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 115, n. 2, p. 697–705, 2004.
- CHEN, C.; DUHAMEL, D.; SOIZE, C. Probabilistic approach for model and data uncertainties and its experimental identification in structural dynamics: Case of composite sandwich panels. *Journal of Sound and Vibration*, v. 294, n. 1-2, p. 64–81, 2006.
- COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. *Concepts and applications of finite element analysis*. Madison, USA: [s.n.], 2002. 388-405 p.
- CRAIG, R. R. *Structural dynamics - An introduction to computer methods*. Texas, USA: [s.n.], 1981. 467-495 p.
- DOI, R. M. *Validação de um modelo de conjunto para predição e análise vibroacústica de um compressor hermético*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.



- DUCHEREAU, J.; SOIZE, C. Transient dynamics in structures with non-homogeneous uncertainties induced by complex joints. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 20, n. 4, p. 854–867, 2006.
- DURAND, J.; SOIZE, C.; GAGLIARDINI, L. Structural-acoustic modeling of automotive vehicles in presence of uncertainties and experimental identification and validation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 124, n. 3, p. 1513–25, 2008.
- FABRO, A. T. *Análise estocástica do comportamento dinâmico de estruturas via métodos probabilísticos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2010.
- FAHY, F. *Foundations of Engineering Acoustics*. London, UK: Academic Press, 2000. 275 p.
- FAHY, F.; GARDONIO, P. *Sound and Structural Vibration*. Oxford, UK: Elsevier, 2007. 466 p.
- FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. *The Feynman Lectures on Physics*. [S.l.]: California Institute of Technology, 1963. 10 p.
- FONTANELA, F.; LENZI, A.; SILVA, O. Structural response of a discharge tube subjected to model and data uncertainties. In: *ISMA-USD*. Leuven, BE: [s.n.], 2014. p. 1–10.
- GAERTNER, E. L. Robust Design Applied to Manufacturing Analysis. In: *International Compressor Engineering Conference*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 1–8.
- GAGLIARDINI, L. Dispersed vibroacoustic responses of industrial products : what are we able to predict? In: *ISMA-USD*. Leuven, BE: [s.n.], 2014. p. 17–38.
- GERSEM, H. D.; MOENS, D.; DESMET, W.; VANDEPITTE, D. Interval and fuzzy dynamic analysis of finite element models with superelements. *Computers & Structures*, v. 85, n. 5-6, p. 304–319, 2007.
- GIBBONS, J. D.; CHAKRABORTI, S. *Nonparametric Statistical Inference*. Alabama, USA: [s.n.], 2003. 422-432 p.
- GOLDBERG, D. E. *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Boston, USA: Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1989.

- HILLS, E.; MACE, B.; FERGUSON, N. Response statistics of stochastic build-up structures. In: *Proceedings of ISMA*. [S.l.: s.n.], 2004. p. 3273–3285.
- HINKE, L.; DOHNAL, F.; MACE, B.; WATERS, T.; FERGUSON, N. Component mode synthesis as a framework for uncertainty analysis. *Journal of Sound and Vibration*, v. 324, n. 1-2, p. 161–178, 2009.
- IBRAHIM, R. Structural dynamics with parameter uncertainties. *Applied Mechanics Reviews*, v. 40, n. 3, p. 309–328, 1987.
- JAYNES, E. Information theory and statistical mechanics. *Physical review*, v. 106, n. 4, p. 620–630, 1957.
- KAPUR, J. N. *Maximum-Entropy Models in Science and Engineering*. New Delhi, India: New Age International Publishers, 2009. 44 p.
- KOMPELLA, M. S.; BERNHARD, R. J. Measurement of the statistical variation of structural-acoustics characteristics of automotive vehicles. In: *Proceedings of the SAE Noise and Vibration Conference*. [S.l.: s.n.], 1993. p. 17.
- LEGAULT, J.; LANGLEY, R.; WOODHOUSE, J. Physical consequences of a nonparametric uncertainty model in structural dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, v. 331, n. 25, p. 5469–5487, 2012.
- LEGAULT, J.; WOODHOUSE, J.; LANGLEY. Comparison of two nonparametric models of uncertainty in structural dynamics. In: *ISMA-USD*. Leuven, BE: [s.n.], 2012. p. 4809–4816.
- LIMA, R. de Q. *Análise de vibrações estocásticas em sistemas mecânicos*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.
- MACE, B. R.; WORDEN, K.; MANSON, G. Uncertainty in structural dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, v. 288, n. 3, p. 423–429, 2005.
- MAIA, N. M. M.; SILVA, J. M. M. ao. *Theoretical and experimental modal analysis*. Lisboa, PT: [s.n.], 1997. 265-302 p.
- MANOHAR, C. S.; KEANE, a. J. Statistics of Energy Flows in Spring-Coupled One-Dimensional Subsystems. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 346, n. 1681, p. 525–542, 1994.

- MBAYE, M.; SOIZE, C.; OUSTY, J.-P.; CAPIEZ-LERNOUT, E. Robust Analysis of Design in Vibration of Turbomachines. *Journal of Turbomachinery*, v. 135, n. 2, p. 021008, 2012.
- MEHTA, M. L. *Random matrices*. San Diego, USA: Elsevier, 2004. 688 p.
- MIGNOLET, M. P.; SOIZE, C.; AVALOS, J. Nonparametric Stochastic Modeling of Structures with Uncertain Boundary Conditions/Coupling Between Substructures. *AIAA Journal*, v. 51, n. 6, p. 1296–1308, 2013.
- PAPOULIS, A. *Probability, random variables, and stochastic processes*. New York, USA: McGraw-Hill, Inc, 1991. 666 p.
- RITTO, T. Bayesian approach to identify the bit-rock interaction parameters of a drill-string dynamical model. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, p. 1–12, 2014.
- RITTO, T.; SAMPAIO, R.; CATALDO, E. Timoshenko beam with uncertainty on the boundary conditions. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 30, n. 4, p. 295–303, 2008.
- RITTO, T.; SAMPAIO, R.; ROCHINHA, F. Model uncertainties of flexible structures vibrations induced by internal flows. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 33, n. 3, p. 373–380, 2011.
- RITTO, T.; SOIZE, C.; ROCHINHA, F.; SAMPAIO, R. Dynamic stability of a pipe conveying fluid with an uncertain computational model. *Journal of Fluids and Structures*, p. 1–14, 2014.
- RODRIGUES, J. D. *Apointamentos de Vibrações em Sistemas Mecânicos*. Porto, PT: Universidade do Porto, 2012. 349 p.
- SAMPAIO, R.; CATALDO, E. Comparing two strategies to model uncertainties in structural dynamics. *Shock and Vibration*, v. 17, p. 171–186, 2010.
- SAMPAIO, R.; CURSI, J. E. de. *Modelagem estocástica e Quantificação de Incertezas*. São Carlos: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2012. 13 p.
- SAMPAIO, R.; LIMA, R. de Q. *Modelagem estocástica e geração de amostras de variáveis e vetores aleatórios*. São Carlos: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2012. 144 p.

- SAMPAIO, R.; RITTO, T. *Mini-curso sobre Análise Dinâmica de Estruturas Flexíveis - Análise Determinística e Estocástica*. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUCRJ, 2008. 104 p.
- SCHERER, C. *Métodos Computacionais da Física*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2005. 284 p.
- SCHUËLLER, G. On the treatment of uncertainties in structural mechanics and analysis. *Computers & Structures*, v. 85, n. 5-6, p. 235–243, 2007.
- SCHUËLLER, G.; JENSEN, H. Computational methods in optimization considering uncertainties: An overview. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 198, n. 1, p. 2–13, 2008.
- SERFLING, R. J. *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. Maryland, USA: John Wiley & Sons, 1980. 74 p.
- SHANNON, C. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, v. 27, p. 379–423, 1948.
- SOIZE, C. A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, v. 15, p. 277–294, 2000.
- SOIZE, C. Random matrix theory and non-parametric model of random uncertainties in vibration analysis. *Journal of Sound and Vibration*, v. 263, n. 4, p. 893–916, 2003.
- SOIZE, C. A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, v. 288, n. 3, p. 623–652, 2005.
- SOIZE, C. Random matrix theory for modeling uncertainties in computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 194, n. 12-16, p. 1333–1366, 2005.
- SOIZE, C. Short course on uncertainties and stochastic modeling. In: *Seminar on uncertainties and stochastic modeling, PUCRJ*. Rio de Janeiro: [s.n.], 2008. p. 268.
- SOIZE, C. Generalized probabilistic approach of uncertainties in computational dynamics using random matrices and polynomial chaos

decompositions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 81, p. 939–970, 2010.

SOIZE, C. *Stochastic models of uncertainties in computational mechanics - Lecture notes in mechanics*. Reston, USA: ASCE - American society of civil engineers, 2012. 125 p.

SOIZE, C. Stochastic modeling of uncertainties in computational structural dynamics - Recent theoretical advances. *Journal of Sound and Vibration*, v. 332, n. 10, p. 2379–2395, 2013.

SOIZE, C.; CAPIEZ-LERNOUT, E.; DURAND, J.-F.; FERNANDEZ, C.; GAGLIARDINI, L. Probabilistic model identification of uncertainties in computational models for dynamical systems and experimental validation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 198, n. 1, p. 150–163, 2008.

SOIZE, C.; CHEBLI, H. Random Uncertainties Model in Dynamic Substructuring Using a Nonparametric Probabilistic Model. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 129, n. 4, p. 449–457, 2003.

VOSE, D. *Risk Analysis*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd, 2008. 47 p.

WEAVER, R. Spectral statistics in elastodynamics. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 85, p. 1005–1013, 1989.

WIDRICK, T. W. *Determining the effect of modal truncation and modal errors in component mode synthesis methods*. Tese (Doutorado) — The George Washington University, Washington, USA, 1992.



# Apêndices





# APÊNDICE A – Exemplo de aplicação do Princípio de Máxima Entropia

Para uma variável aleatória real e contínua  $X$  definida no intervalo  $[a, b]$ , a entropia de Shannon  $S(p_X)$  associada à função densidade de probabilidade  $p_X$  é escrita como

$$S(p_X) = - \int_a^b p_X(x) \ln p_X(x) dx. \quad (\text{A.1})$$

Pelo PME, tem-se o interesse de encontrar, conhecidas algumas restrições, a função  $p_X$  que maximiza  $S(p_X)$ , ou seja,

$$p_X(x) = \arg \max S(p_X). \quad (\text{A.2})$$

Na ausência de qualquer conhecimento a respeito da variável  $X$ ,  $p_X$  possui apenas uma restrição

$$\int_a^b p_X(x) dx = 1, \quad (\text{A.3})$$

que reflete o fato de que a probabilidade acumulada dentro do intervalo  $[a, b]$  é unitária. Caracteriza-se, então, um problema de otimização, que consiste em encontrar a função  $p_X$  que maximiza  $S(p_X)$ , dada a restrição definida pela Eq. A.3. Para transformar o problema descrito na Eq. A.2, com restrição exposta na Eq. A.3, em um problema sem vínculo, utiliza-se o método dos multiplicadores de Lagrange. Deste modo, a Lagrangiana do sistema é escrita como (SAMPAIO; CURSI, 2012)

$$\mathcal{L}(p_X, \lambda_0) = - \int_a^b p_X(x) \ln p_X(x) dx - (\lambda_0 - 1) \left[ \int_a^b p_X(x) dx - 1 \right], \quad (\text{A.4})$$

onde  $\lambda_0$  é um multiplicador de Lagrange. Pelo cálculo variacional, sabe-se que os extremos de máximo e mínimo da Lagrangiana são independentes

de  $p_X$  em primeira ordem, ou seja

$$\frac{\partial \mathcal{L}(p_X, \lambda_0)}{\partial p_X} = \frac{\partial}{\partial p_X} \left\{ - \int_a^b p_X(x) \ln p_X(x) dx - (\lambda_0 - 1) \left[ \int_a^b p_X(x) dx - 1 \right] \right\} = 0. \quad (\text{A.5})$$

Ao se desenvolver a igualdade anterior, encontra-se como extremo

$$p_X(x) = e^{\lambda_0}, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (\text{A.6})$$

Para encontrar o valor de  $\lambda_0$ , substitui-se a Eq. A.6 na Eq. A.3 e se conclui que  $\lambda_0 = \ln(b - a)$ . Para verificar se a função encontrada é um ponto de máximo ou mínimo, recorre-se à segunda derivada da Lagrangiana. Deste modo, para a função  $p_X$  encontrada, verifica-se que

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(p_X, \lambda_0)}{\partial p_X^2} < 0, \quad (\text{A.7})$$

e confirma-se que a função encontrada é um máximo da Lagrangiana. No que segue, a função  $p_X$  que maximiza  $S(p_X)$ , seguindo as restrições descritas acima, é a função densidade de probabilidade uniforme

$$p_X(x) = \frac{1}{b - a} \quad \forall x \in [a, b]. \quad (\text{A.8})$$

## APÊNDICE B – Restrições físicas em um sistema dinâmico simples

Considere um sistema massa-mola, como mostrado na Fig. 55. Trata-se do sistema dinâmico, do ponto de vista constitutivo, mais simples possível.

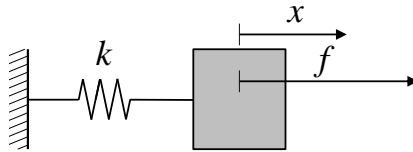


Figura 55 – Sistema massa-mola.

O deslocamento estático  $x$  da massa conectada à mola de constante elástica  $k$  pode ser obtido, aplicando-se a lei de Hooke, através da equação

$$f = -kx, \quad (\text{B.1})$$

onde  $f$  é a força estática aplicada. Admitindo-se a existência de incerteza no parâmetro  $k$ , modela-se a rigidez do sistema como uma variável aleatória  $K$  com as seguintes restrições (SOIZE, 2008; SAMPAIO; CATALDO, 2010):

1. uma vez que uma mola com rigidez negativa não é fisicamente estável,  $K$  é deve ser necessariamente uma variável aleatória estritamente positiva;
2. o seu valor esperado de  $K$  é conhecido,  $\mathcal{E}\{K\} = \underline{k}$ ;
3. para que  $K$  possua variância finita, necessariamente  $\mathcal{E}\{K^2\} < +\infty$ , uma vez que  $\text{var}(K) = \mathcal{E}\{K^2\} - \underline{k}^2$ . O fato de  $K$  possuir variância finita faz com que ela seja uma variável aleatória de segunda ordem;
4. a última restrição necessária decorre da necessidade de que o deslocamento seja uma variável aleatória de segunda ordem,

ou seja,  $\mathcal{E}\{(U^2)\} = \mathcal{E}\{\underline{f}^2 K^{-2}\} = \underline{f}^2 \mathcal{E}\{K^{-2}\} < \infty$ . A restrição  $\mathcal{E}\{K^{-2}\} < \infty$  pode ser inserida no problema de otimização admitindo-se que  $\mathcal{E}\{\ln K\} < \infty$ .

Desse modo, uma variável aleatória que descreve a rigidez de um sistema harmônico simples deve, para garantir as restrições físicas, obedecer aos quatro vínculos anteriores. Admitindo-se que o modelo probabilístico de  $K$  seja definido, ao acaso, a partir de uma função densidade de probabilidades gaussiana

$$p_K(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_K} \exp\left[-\frac{(k - \underline{k})^2}{\sigma_K^2}\right], \quad (\text{B.2})$$

onde  $\mu_K$  e  $\sigma_K$  representam, respectivamente, a média e o desvio padrão de  $K$ , o momento estatístico  $\mathcal{E}\{U^2\}$  pode ser calculado na forma (SOIZE, 2008)

$$\mathcal{E}\{U^2\} = \mathcal{E}\{\underline{f}^2 K^{-2}\} = \underline{f}^2 \mathcal{E}\{K^{-2}\} = \underline{f}^2 \int_0^\infty k^{-2} p_K(k) dk = \infty. \quad (\text{B.3})$$

Desse modo, ao se admitir um modelo probabilístico com função densidade de probabilidade gaussiana, conclui-se que a resposta do sistema não é uma variável aleatória de segunda ordem, ou seja, possui variância infinita. Isso ocorre pelo fato de que a função  $p_K(k)$  não decresce o suficiente nas proximidades de  $x = 0$  para que a Eq. B.3 deixe de divergir. Esse comportamento não é admissível para sistemas estáveis como o da Fig. 55 e, conseqüentemente, o modelo gaussiano deveria ser descartado para a modelagem de  $K$ . Porém, vale ressaltar que isso ocorre apenas nas proximidades de  $x = 0$  e que em algumas configurações a probabilidade de os geradores de números aleatórios gerarem valores próximos a este patamar é baixo ao ponto de poder ser negligenciada.

## APÊNDICE C – Regiões de confiança via método dos quantis

Seja  $F_X(x)$  uma função distribuição de probabilidade qualquer. O  $p$ -ésimo quantil  $\xi_X(p)$  de  $F_X$  é definido, admitindo-se  $0 < p < 1$ , como (SERFLING, 1980)

$$\xi_X(p) = x : F_X(x) \geq p, \quad (\text{C.1})$$

ou seja, é o valor de  $x$  tal que  $F_X(x) \geq p$ , como mostrado na Fig. 56. A parte superior  $x^+$  e inferior  $x^-$  de uma região de confiança com  $P_c$  significância pode ser determinada, admitindo-se que  $F_X$  é uma função contínua, como

$$x^+(P_c) = \xi_X((1 + P_c)/2), \quad x^-(P_c) = \xi_X((1 - P_c)/2). \quad (\text{C.2})$$

A grande dificuldade em resolver a Eq. C.2 encontra-se no fato de que a função  $F_X$ , quando construída a partir de um número finito de simulações de Monte Carlo, não é uma função contínua. Desse modo, para uma sequência de variáveis aleatórias  $\{X\} = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ ,

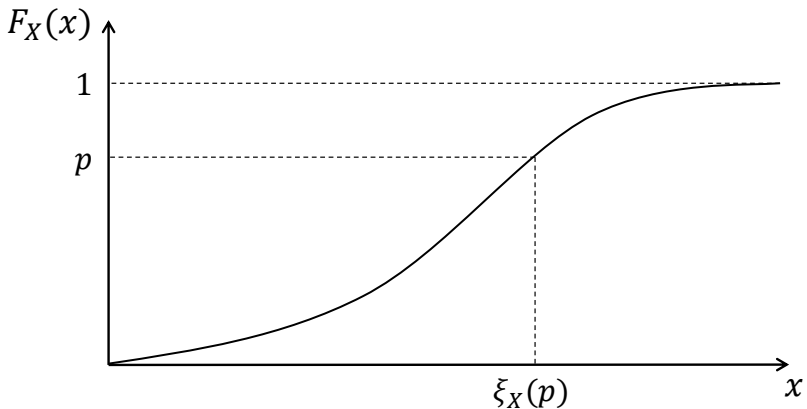


Figura 56 – Função distribuição de probabilidade.

os valores de  $x^+$  e  $x^-$  podem ser aproximados por  $\tilde{x}^+$  e  $\tilde{x}^-$  na forma (CAPIEZ-LERNOUT et al., 2006; SOIZE et al., 2008)

$$x^+(P_c) \simeq \tilde{x}^+(l^+), \quad l^+ = \text{int}(s(1 + P_c)/2), \quad (\text{C.3})$$

$$x^-(P_c) \simeq \tilde{x}^-(l^-), \quad l^- = \text{int}(s(1 - P_c)/2), \quad (\text{C.4})$$

onde o operador  $\text{int}(x)$  indica a parte inteira de um número real  $x$  qualquer. Nas Eq. C.3 e C.4, os valores de  $\tilde{x}^+(l^+)$  e  $\tilde{x}^-(l^-)$  indicam, respectivamente, os valores de  $\{\tilde{X}\}$  nos postos  $l^+$  e  $l^-$ , sendo  $\{\tilde{X}\}$  um vetor quem contém os elementos de  $\{X\}$  ordenados de forma crescente. As Eq. C.3 e C.4 mostram uma maneira bastante robusta de estimar regiões de confiança de uma função distribuição de probabilidades contínua  $F_X(x)$  utilizando um conjunto discreto de amostras de  $x$ .

# APÊNDICE D – Transformação de funções densidade de probabilidades

Seja  $X$  uma variável aleatória com função densidade de probabilidade  $p_X(x)$  e  $Y$  uma outra variável tal que  $Y = g(X)$ . Para se determinar a função densidade de probabilidade de  $Y$  a partir de  $p_X(x)$  basta aplicar a seguinte transformação (HILLS; MACE; FERGUSON, 2004; SAMPAIO; RITTO, 2008)

$$P_Y(y) = \frac{p_X(x)}{\left| \frac{dy}{dx}(x) \right|} \Bigg|_{x=g^{-1}(y)}. \quad (\text{D.1})$$

Para o problema de uma viga com incerteza na altura, como descrito na Subseção 3.3.3, é possível determinar a função densidade de probabilidade das frequências naturais da estrutura a partir da Eq. D.1. A  $i$ -ésima frequência natural  $f_i^v$  de uma viga de seção retangular, com condição de contorno engastada-livre, segue a equação

$$f_i^v = \frac{k_i^2 h_v}{2\pi} \sqrt{\frac{E_v}{12\rho_v L_v^4}}, \quad (\text{D.2})$$

onde  $E_v, \rho_v, L_v$  e  $h_v$  são, respectivamente, o módulo de elasticidade, densidade, comprimento e altura da viga, enquanto  $k_i$  é a  $i$ -ésima constante obtida resolvendo-se a equação transcendental (RODRIGUES, 2012)

$$\cos(k_i) \cosh(k_i) + 1 = 0. \quad (\text{D.3})$$

Admitindo-se que o modelo probabilístico  $p_H(h_v)$  de  $H_v$  segue a função gama da Eq. 3.11, o modelo probabilístico  $p_{F_i}(f_i^v)$  de  $F_i$  pode ser escrito como

$$p_{F_i}(f_i^v) = \frac{p_H(h_v)}{\left| \frac{df_i^v}{dh_v}(h_v) \right|} \Bigg|_{h_v=g^{-1}(f_i^v)} = \frac{1}{C} p_H(f_i^v/C), \quad (\text{D.4})$$

onde  $C = \left| \frac{df_i^v}{dh_v}(h_v) \right| = \frac{k_i^2}{2\pi} \sqrt{\frac{E_v}{12\rho_v L_v^4}}$  é uma constante e  $g^{-1}(f_i^v) = f_i^v/C$  é a função inversa da Eq. D.2. Desse modo, a Eq. D.1 ilustra uma maneira analítica bastante simples de se determinar a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória  $Y$  a partir do modelo probabilístico de outra variável aleatória  $X$  sempre que uma função transformação  $Y = g(X)$  é conhecida.





# APÊNDICE E – Exemplo de aplicação do método de Craig-Bampton

Considere o sistema massa-mola, com cinco graus de liberdade, apresentado na Fig. 57. Para este exemplo abaixo, admitem-se os valores de  $m_1=m_4=m_5=2$  kg,  $m_2=1$  kg,  $m_3=4$  kg e  $k_1=k_2=k_3=k_4=k_5=k_6=1 \times 10^3$  N/m. No que segue, divide-se o sistema principal em dois subsistemas com interface fixa, como mostrado na parte de baixo da Fig. 57.

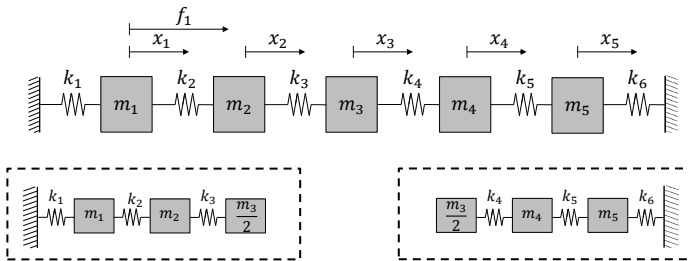


Figura 57 – Sistema massa-mola com cinco graus de liberdade. Na parte de baixo identificam-se as duas subestruturas  $S^1$  e  $S^2$ , admitindo-se que o acoplamento dos dois componentes é feito através da massa  $m_3$ .

## E.1 Subsistema 1

Considere a subestrutura à esquerda. Ao se aplicarem as leis de Newton ao subsistema dinâmico, as matrizes de massa  $[M^1]$  e rigidez  $[K^1]$  do problema são escritas como

$$[M^1] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (\text{E.1})$$

$$[K^1] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times 10^3. \quad (\text{E.2})$$

Ao se resolver o problema de autovalores e autovetores generalizados utilizando-se as matrizes  $[M^1]$  e  $[K^1]$  admitindo-se a interface fixa, fato que implica na eliminação das terceira linha e coluna dos operadores da Eq. E.2, determina-se a matriz de formas modais  $[\Psi_i^1]$ , normalizada pela matriz massa do subsistema, como

$$[\Psi_i^1] = \begin{bmatrix} -6,28 & -3,25 \\ -4,60 & 8,88 \end{bmatrix}. \quad (\text{E.3})$$

Além disso, para a aplicação do método de Craig-Bampton, torna-se necessário a determinação dos modos estáticos do sistema. Esses modos podem ser calculados a partir da Eq. 6.4, tal que

$$[S_i^1] = -[K_i^1]^{-1}[K_c^1] = - \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,34 \\ 0,67 \end{bmatrix}. \quad (\text{E.4})$$

No que segue, o operador mudança de base de Craig-Bampton para a subestrutura 1 pode ser escrito, a partir da Eq. 6.5, como

$$[H_{CB}^1] = \begin{bmatrix} [\Psi_i^1] & [S_i^1] \\ [0] & [I] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6,28 & -3,25 & 0,34 \\ -4,60 & 8,88 & 0,67 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{E.5})$$

enquanto as matrizes de massa e rigidez, na nova base vetorial, podem ser escritas como

$$[M_{CB}^1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,73 \\ 0 & 1 & -0,38 \\ 0,73 & -0,38 & 2,67 \end{bmatrix} \text{ e} \quad (\text{E.6})$$

$$[K_{CB}^1] = \begin{bmatrix} 6,34 & 0 & 9,19 \\ 0 & 23,66 & -17,76 \\ 9,19 & -17,76 & 30,00 \end{bmatrix} \times 10^2 \quad (\text{E.7})$$

## E.2 Subsistema 2

As mesmas operações descritas na subseção anterior podem ser aplicadas à subestrutura apresentada na Fig. 45, à direita. Desse modo, torna-se possível determinar as formas modais com interface fixa  $[\Psi_i^2]$  e os modos estáticos  $[S_i^2]$ , tal que

$$[\Psi_i^2] = \begin{bmatrix} -0,50 & -0,50 \\ -0,50 & 0,50 \end{bmatrix} \text{ e } [S_i^2] = \begin{bmatrix} 0,34 \\ 0,67 \end{bmatrix}, \quad (\text{E.8})$$

enquanto as matrizes de massa e rigidez da subestrutura 2 podem ser escritas, na base vetorial de Craig-Bampton, como

$$[M_{CB}^2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -0,34 \\ 1 & -0,34 & 3,11 \end{bmatrix} \text{ e} \quad (\text{E.9})$$

$$[K_{CB}^2] = \begin{bmatrix} 5,00 & 0 & 10,00 \\ 0 & 15,00 & -10,00 \\ 10,00 & -10,00 & 30,00 \end{bmatrix} \times 10^2. \quad (\text{E.10})$$

## E.3 Resposta do sistema acoplado

De posse das matrizes de massa e rigidez de cada subestrutura, a construção dos operadores globais segue a Eq. 6.8. Desse modo, as matrizes de massa e rigidez globais podem ser escritas como

$$[M_{CB}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0,73 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0,38 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0,34 \\ 0,73 & -0,38 & 1 & -0,34 & 5,78 \end{bmatrix} \text{ e} \quad (\text{E.11})$$

$$[K_{CB}] = \begin{bmatrix} 6,34 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 26,66 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5,00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15,00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 60,00 \end{bmatrix} \times 10^2. \quad (\text{E.12})$$

Após obterem-se os operadores apresentados nas Eqs. E.11 e E.12, as frequências naturais da estrutura podem ser obtidas através de um problema de autovalores e autovetores generalizados. Por fim, a Fig. 58 mostra, como exemplo, o espectro de aceleração de  $m_5$  devido à aplicação de uma excitação unitária em  $m_1$ . Os gráficos ilustram os

resultados obtidos através do método de Craig-Bampton comparados aos resultados obtidos utilizando-se o modelo completo usual. Vale ressaltar que as forças não devem ser diretamente aplicadas ao modelo dinâmico de  $[M_{CB}]$  e  $[K_{CB}]$ , pois estas excitações necessitam ser avaliadas na base vetorial de Craig-Bampton, como discutido na Seção 6.1.

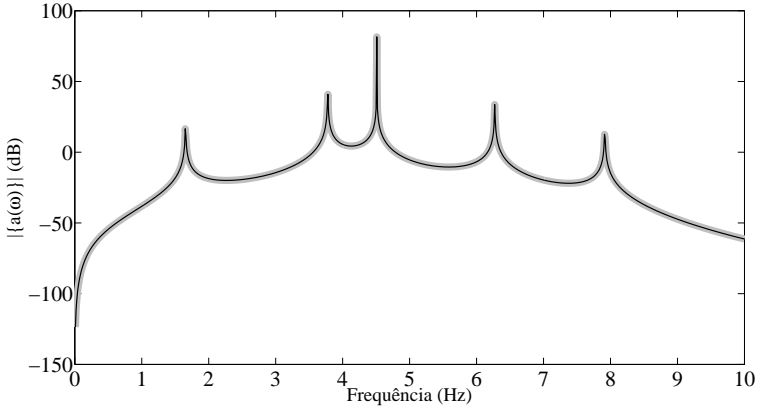


Figura 58 – Resposta do sistema em  $m_5$  devido à aplicação de uma força unitária em  $m_1$ . A linha preta indica o espectro calculado utilizando o método de Craig-Bampton, enquanto a linha tracejada cinza identifica a solução direta aplicando-se as leis de Newton.

As respostas da Fig. 58 mostram que os erros devido à aplicação do método de Craig-Bampton, para o sistema proposto, podem ser negligenciados. Porém, o fato mais importante em relação à aplicação de um método de subestruturação é que, na maioria dos casos, a dimensão das matrizes de cada subestrutura pode ser substancialmente reduzida. Esse fato faz com que o custo computacional seja bastante reduzido durante a solução do problema dinâmico acoplado.