

Mario Luiz Previatti de Souza

**Métodos de Maz'ia e Landweber para o Problema
de Cauchy elíptico**

Dissertação submetida ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof.^o Dr. Antonio Carlos Gardel Leitão

Florianópolis
2015

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Previatti, Mario Luiz

Métodos de Maz'ia e Landweber para o Problema de Cauchy elíptico / Mario Luiz Previatti ; orientador, Antonio Carlos Leitão - Florianópolis, SC, 2015.

54 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Inclui referências

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Problemas inversos. 3. Problema de Cauchy elíptico. 4. Método de Maz'ia. 5. Método de Landweber. I. Leitão, Antonio Carlos. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

**Métodos de Maz'ia e Landweber para o
Problema de Cauchy elíptico**

Por

Mario Luiz Previatti de Souza

Esta dissertação foi julgada para obtenção do Título de "Mestre", Área de Concentração em Matemática Aplicada, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

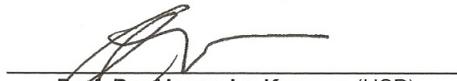


Prof. Dr. Daniel Gonçalves – Coordenador

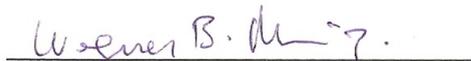
Comissão Examinadora:



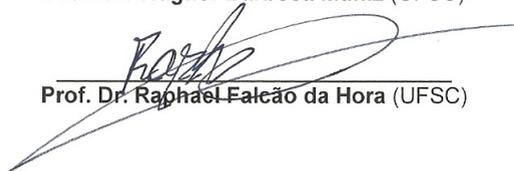
Prof. Dr. Marcelo Sobottka (Presidente - UFSC)



Prof. Dr. Alexandre Kawano (USP)



Prof. Dr. Wagner Barbosa Muniz (UFSC)



Prof. Dr. Raphael Falcão da Hora (UFSC)

Florianópolis, Fevereiro de 2015.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por mostrar o caminho a ser percorrido e fazer eu estar no caminho Dele mesmo sendo tentador a tomar atalhos outrora do lado negro da força.

Agradeço a minha mãe, Marly Previatti, por sempre estar ao meu lado e sempre me lembrar de todos os meus objetivos pessoais, fazendo-me sempre ir em busca deles; além de toda orientação e amor.

Agradeço a minha família, em especial meus primos Osvaldo Previatte Szenczuk e Osvaldo Previatte Szenczuk e a minha tia Luzia Previatti, devido à toda orientação, suporte e referencial que são em minha formação como pessoa; e por toda a companhia e ajuda familiar durante os momentos difíceis enfrentados.

Agradeço a Cássia Aline por toda a compreensão, paciência, dedicação e tempo que se dispôs a mim; por todos os momentos juntos que, de uma forma ou de outra, fizeram-me terminar essa dissertação.

Agradeço ao meu orientador Antonio Carlos Gardel Leitão por toda orientação, paciência e conselhos que só um amigo sabe dar.

Agradeço aos demais professores presentes em minha formação matemática e àqueles presentes em minha formação pessoal.

Agradeço aos colegas de mestrado por facilitar os momentos estressantes desse período.

Grato pelo suporte financeiro fornecido pela CAPES por facilitar essa jornada.

Resumo

Nesta dissertação foi trabalhado o clássico exemplo de problema mal posto, o problema de Cauchy elíptico para o operador de Laplace sobre um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ suficientemente regular, onde os dados de Cauchy são fornecidos apenas sobre uma parte da fronteira, $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$. O objetivo é o de reconstruir o traço da $H^1(\Omega)$ -solução da equação de Laplace sobre $\partial\Omega \setminus \Gamma_1$. Para tal finalidade, foi analisado dois métodos iterativos; o método de Maz'ia que consiste em resolver sucessivamente problemas de valor de contorno misto (que são bem postos) utilizando os dados de Cauchy como parte das condições de fronteira e o método de Landweber, baseado na equação normal da condição de otimalidade de primeira ordem para resolver o problema de mínimos quadrados. Através de uma abordagem via análise funcional com uma topologia não usual foi demonstrado a análise de convergência para o método de Maz'ia sob dados exatos; por outro lado, para demonstrar que o método de Landweber é um método de regularização e obter taxa de convergência, a teoria de regularização clássica. Ao final, uma relação entre os métodos foi encontrada, a igualdade entre as iterações, possibilitando, assim, concluir a análise do método de Maz'ia, isto é, sob dados com ruídos.

Palavras-chave: Problemas inversos, problemas mal postos, problema de Cauchy elíptico, métodos iterativos de regularização, método de Maz'ia, método de Landweber.

Abstract

This dissertation deals with the classical ill-posed problem example, the elliptic Cauchy problem for the Laplace operator at a sufficiently regular set $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, where the Cauchy data are given only at part of the boundary, $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$. The goal is to reconstruct the trace of $H^1(\Omega)$ -solution of the Laplace equation at $\partial\Omega \setminus \Gamma_1$. For such purpose, two iterative methods are analyzed; the algorithm of Maz'ia is a method based on solving successively well-posed mixed boundary value problems using the given Cauchy data as part of the boundary data and the Landweber iteration, which is based on the normal equation of the first order optimality condition to solve the nonlinear least square problem. An approach via functional analysis with unusual topology was used to proof the convergence analysis under exact data; on the other hand, to show that Landweber iteration is a regularization method and to obtain a convergence rate, the classical regularization theory was widely used. At the end of this dissertation, a relation between the methods was found, the iterations are equal, allowing to complete the Maz'ia's method analysis, i.e., under noise data.

Keywords: Inverse problems, ill-posed problems, elliptic Cauchy problem, iterative regularization methods, Maz'ia algorithm, Landweber iteration.

Sumário

Introdução	13
1 O problema de Cauchy elíptico	17
1.1 Sobre a bem posição do problema de Cauchy elíptico . . .	18
2 Descrição e Análise dos Métodos de Maz'ia e de Landweber para o Problema de Cauchy Elíptico	23
2.1 Método de Maz'ia	24
2.1.1 Análise do método de Maz'ia	26
2.2 Método de Landweber	33
2.2.1 Análise do método de Landweber	35
3 A Relação Entre os Métodos de Maz'ia e Landweber	43
Considerações Finais	49
Referências Bibliográficas	51
A Resultados Auxiliares	53

Introdução

As equações diferenciais aparecem para modelar diversos problemas das ciências aplicadas, em situações como condutividade térmica, dispersão de poluentes, processamento de imagens, finanças, otimização, etc. Dentre essas equações diferenciais que modelam esses problemas há casos em que não se busca uma solução da equação e, sim, completar os dados faltantes para modelar completamente algum fenômeno ou situação desejada.

O problema a ser resolvido pelos métodos de Maz'ia e Landweber referente ao problema de Cauchy elíptico pode ser aplicado a problemas de tomografia ou reconstrução de dados. Como por exemplo, verificar a transferência de calor numa região de uma placa em equilíbrio térmico onde não é possível se calcular.

Neste trabalho, enquadrado dentro da área de problemas inversos, o modelo estudado é o clássico problema de Cauchy elíptico com o intuito de associá-lo a um problema inverso. Dentre alguns dos métodos capazes de resolver o problema inverso estão o método de Maz'ia e o método de Landweber linear.

O problema de Cauchy elíptico trabalhado é um problema de valor inicial independente no tempo. Aqui o operador diferencial é o operador de Laplace sobre um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto, limitado e simplesmente conexo, cuja fronteira suave $\partial\Omega$ pode ser dividida em duas componentes abertas, disjuntas e conexas Γ_1 e Γ_2 tais que $\overline{\Gamma_1} \sqcup \overline{\Gamma_2} = \partial\Omega$. Os dados, chamados de dados de Cauchy, as condições de contorno de Dirichlet e de Neumann, no problema de Cauchy elíptico são prescritos apenas sobre uma parte da fronteira, Γ_1 , isto é, $u|_{\Gamma_1} = f$ e $u_\nu|_{\Gamma_1} = g$, onde f e g são conhecidas. Assim, o problema de Cauchy elíptico em questão é

$$(CP) \Delta u = 0, \Omega; u|_{\Gamma_1} = f; u_\nu|_{\Gamma_1} = g.$$

Segundo Hadamard, um problema é bem posto se para todos os dados admissíveis, existe uma solução, a qual é única e depende conti-

nuamente dos dados. Se uma dessas condições é violada, o problema é dito ser mal posto. O problema de Cauchy elíptico é mal posto, o próprio Hadamard exibiu um exemplo em que não ocorre a dependência contínua dos dados; na verdade, a unicidade da solução, caso exista, é a única condição satisfeita.

No entanto, o objetivo com os métodos iterativos não é o de encontrar a solução u do problema de Cauchy elíptico (CP), a meta é a de reconstruir o traço da solução u ao longo da fronteira onde nenhum dado é fornecido, isto é, avaliar o traço da solução u de (CP) sobre $\Gamma_2 \subset \partial\Omega$, em particular, o traço de Neumann, ou seja, calcular $u_\nu|_{\Gamma_2}$. Note que é equivalente resolver estes dois problemas. De fato, se calcular $\varphi = u_\nu|_{\Gamma_2}$, então tem-se o seguinte problema misto

$$\Delta u = 0, \quad \Omega; \quad u|_{\Gamma_1} = f; \quad u_\nu|_{\Gamma_2} = \varphi;$$

que é bem posto, e assim, obtém-se a solução u do problema de Cauchy.

Engl diz que por problemas inversos se entende àqueles problemas que visam determinar causas através dos efeitos observados. Ou seja, dois problemas são inversos um do outro se na formulação de cada um envolve a solução do outro. Dessa forma, pode-se associar ao problema direto mal posto (encontrar a solução u) a um problema inverso (mal posto) da forma $F(\varphi) = g$, onde φ é solução para o problema inverso se $\varphi = u_\nu|_{\Gamma_2}$, isto é, φ é o traço da solução do problema de Cauchy sobre a fronteira onde não se tinha dados prescritos e F é um operador afim entre espaços de Hilbert a ser determinado que depende apenas dos dados f e g . Note que para Hadamard, a equação de operadores $F(\varphi) = g$ seria bem posta se F fosse uma bijeção com inversa contínua.

Na prática, os dados nunca são precisos, o que se têm, na verdade, são dados próximos, isto é, uma aproximação g^δ e f^δ tais que

$$\|f^\delta - f\| + \|g^\delta - g\| < \delta;$$

onde f^δ e g^δ não precisam estar na imagem de F e $\delta > 0$ é chamado o nível de ruído. O nível de ruído deve-se a imprecisões nos aparelhos de medidas, erros de modelagens e demais incertezas.

Se a solução existe para $F(\varphi) = g$, a falha da terceira condição de Hadamard para um problema ser bem posto é de extrema importância devido à dificuldade numérica a ser contornada (associada ao mal condicionamento do problema). Então, para contornar essas dificuldades provenientes de problemas mal postos, utiliza-se métodos de regularização com o intuito de obter uma aproximação para a solução desejada, não só convergente, mas, também, estável.

Brevemente, uma família de problemas bem postos que se aproxima de um problema mal posto é um método de regularização. A dificuldade em encontrar uma solução φ^* de $F(\varphi) = g$ invertendo o operador F está em que pode-se obter soluções inadequadas, devido a instabilidade do problema, se fornecidos somente dados perturbados. Assim, o objetivo é encontrar uma aproximação φ_k^* que depende continuamente dos dados perturbados e convirja para φ^* , se o nível do ruído tende a zero e o parâmetro de regularização k é escolhido apropriadamente, isto é, φ_k^* deve ser calculada de maneira estável.

Após garantir estabilidade $\varphi_k^\delta \rightarrow \varphi_k$, se $\delta \rightarrow 0$, e a convergência $\varphi_k^\delta \rightarrow \varphi^*$, se $\delta, k \rightarrow 0$, do método, ou seja, depois de demonstrado que é um método de regularização, há ainda a dificuldade de se encontrar taxa de convergência do método, ou seja, a taxa com que $\|\varphi_k^\delta - \varphi^*\| \rightarrow 0$, se $\delta \rightarrow 0$.

Os dois métodos, de Maz'ia e de Landweber linear, capazes de resolver o problema de Cauchy elíptico foram trabalhados de maneiras ligeiramente diferentes. O primeiro deles, método de Maz'ia, inicialmente apresentado e estudado em [8], foi abordado por técnicas de análise funcional, adotando uma nova topologia sobre os espaços utilizados, como em [4]. Este método foi analisado, inicialmente, apenas sob dados exatos, isto é, provada apenas a convergência para dados sem ruído. O método de Landweber linear foi inteiramente analisado pela teoria clássica de regularização. Foi provado que é um método de regularização (análise de convergência e estabilidade do método) e uma taxa de convergência.

Para terminar a análise do método de Maz'ia, isto é, demonstrar ou observar a estabilidade e análise de convergência do método, estabelecer algum critério de parada e concluir alguma taxa de convergência, caso fornecido apenas dados com ruídos, foi necessária a discussão entre a relação das iterações dos métodos de Maz'ia e Landweber linear. Esta discussão entre os métodos é a contribuição desta dissertação, onde se demonstra a igualdade entre as iterações dos métodos de Maz'ia e Landweber linear.

O texto está dividido em três capítulos. O primeiro descreve o problema de Cauchy elíptico e associa o problema inverso; ainda, em seção, aborda quais os aspectos de Hadamard para se dizer que o problema é mal posto. O segundo capítulo está dividido em duas seções, a primeira descreve o método de Maz'ia mostrando a análise de convergência sob dados exatos; a segunda, traz o método de Landweber linear e faz a análise completa do método. No terceiro capítulo, conclui-se a análise do método de Maz'ia sob dados com ruído, isto é, que é um método

de regularização e obtendo a mesma taxa de convergência; isso foi somente possível após obter uma relação fundamental entre os métodos, a igualdade entre as iterações. No Apêndice pode ser encontrado os demais resultados que fundamentam essa dissertação.

Capítulo 1

O problema de Cauchy elíptico

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, limitado e simplesmente conexo com fronteira suave $\partial\Omega$, onde $\partial\Omega$ pode ser dividido em duas componentes abertas e conexas Γ_1, Γ_2 tais que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ e $\overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2} = \partial\Omega$.

O problema de Cauchy elíptico sobre Ω consiste no problema de valor inicial (independente do tempo) para um operador diferencial elíptico sobre Ω em que os dados iniciais são dados apenas em $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$. Assim, o problema de Cauchy elíptico considerado é para o operador de Laplace, dado por

$$(CP) \Delta u = 0, \Omega; u|_{\Gamma_1} = f; u_\nu|_{\Gamma_1} = g;$$

onde (f, g) é chamado de par de dados de Cauchy.

Como solução para o problema de Cauchy (CP) considere distribuições $u \in H^1(\Omega)$ que resolvem o problema na formulação fraca e também satisfazem os dados de Cauchy (f, g) sobre Γ_1 no sentido do traço do operador. Além disso, o par de dados de Cauchy (f, g) está no espaço $H^{1/2}(\Gamma_1) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ [4].

O problema a ser analisado é o de reconstruir o traço da solução desse problema de valor inicial sobre a parte da fronteira onde não têm dados iniciais, isto é, avaliar u_ν sobre Γ_2 .

Note que resolver este problema (avaliar o traço de uma solução sobre Γ_2) é equivalente a encontrar esta solução do problema de Cauchy. De fato, se $\varphi = u_\nu|_{\Gamma_2}$ é o traço da solução u de (CP) sobre Γ_2 , então para encontrar esta solução de (CP) , basta resolver o seguinte problema

de valor de contorno misto bem posto [A.1]:

$$\Delta u = 0, \quad \Omega; \quad u|_{\Gamma_1} = f; \quad u_\nu|_{\Gamma_2} = \varphi.$$

Aqui, φ é o traço de Neumann, a formulação do problema também pode ser feita com o traço de Dirichlet. Estes operadores serão definidos ao longo do texto.

Na seção seguinte, os aspectos sobre a bem posição para o problema de Cauchy elíptico segundo Hadamard são apresentados, isto é, existência, unicidade e a dependência contínua dos dados.

1.1 Sobre a bem posição do problema de Cauchy elíptico

A seção analisa cada um dos três critérios de Hadamard para o problema de Cauchy. Além disso, também, é apresentado um resultado sobre o conjunto dos pares de dados (f, g) de Cauchy.

Apesar da existência de solução para o problema de Cauchy ser ferida, o primeiro resultado dá uma condição necessária para a existência de solução de (CP) a respeito dos dados de Cauchy.

Proposição 1.1 *Considere (f, g) um par de dados de Cauchy com f e g de classe C^∞ . Se $f \equiv 0$ e existe solução para (CP) em $C^2(\Omega)$, então g é uma função analítica.*

Demonstração: Seja $u \in C^2(\Omega)$ solução de (CP) para dados de Cauchy (f, g) , onde $f \equiv 0$ e g é uma função de classe $C^\infty(\Gamma_1)$. Então, como $\Delta u = 0$, u tem a seguinte representação de Green [p. 18, 3]:

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} (u(x)\Gamma_\nu(x-y) - \Gamma(x-y)u_\nu(x)) d\partial\Omega(x), \quad (y \in \Omega);$$

onde $\Gamma(x-y) = \frac{1}{2\pi} \ln|x-y|$, onde $x \in \partial\Omega$ e $y \in \Omega$.

Como o integrando é analítico com respeito a y , pois como $y \in \Omega$ e $x \in \partial\Omega$ e Ω é aberto, tem-se que $x \neq y$, ou seja, a singularidade de $\Gamma(x-y)$ não ocorre e, assim, conclui-se que u é analítica em Ω .

Pelo princípio de reflexão de Schwarz [A.2], a função

$$U(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} u(x_1, \dots, x_n), & x_n \geq 0; \\ u(x_1, \dots, -x_n), & x_n < 0; \end{cases}$$

satisfaz $\Delta U = 0$ e, além disso, é analítica. Então, $\gamma_{N, \Gamma_1}(U)$ é analítica [p.494, 6], ou seja, g é analítica. ■

Um par de dados de Cauchy (f, g) será dito consistente, caso exista solução para (CP) .

Das condições de Hadamard, a unicidade da solução de (CP) é a única possível de ser demonstrada, como segue abaixo.

Proposição 1.2 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto, limitado, simplesmente conexo com fronteira analítica e considere $\Gamma \subset \partial\Omega$ aberto e simplesmente conexo. Então, o problema (CP) com par de dados de Cauchy $(f, g) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H_0^{1/2}(\Gamma)'$ consistente tem no máximo uma solução.*

Demonstração: Suponha que existam duas soluções w e v em $H^1(\Omega)$ para o problema de Cauchy com par de dados $(f, g) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H_0^{1/2}(\Gamma)'$ consistente. Então, $u := w - v$ é solução de

$$\Delta u = 0, \quad \Omega; \quad u|_{\Gamma} = 0; \quad u_{\nu}|_{\Gamma} = 0.$$

Como $\Delta u = 0$, tem-se que $u \in C^\infty(\Omega)$, ou seja, u é uma solução clássica para (CP) com dados homogêneos em Γ . Além disso, como o operador laplaciano é um operador elíptico e Γ e $\partial\Omega \setminus \Gamma$ não são variedades características, é possível encontrar uma família de variedades analíticas $\{\Gamma_\lambda\}_{0 \leq \lambda \leq 1}$ tal que $\Gamma_0 = \Gamma$ e $\Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma$ e Γ_λ tem os mesmos pontos finais. Logo, se utilizar essa família $\{\Gamma_\lambda\}_{0 \leq \lambda \leq 1}$ na demonstração do teorema de Holmgren [p. 166, 7], então $u = 0$ em Ω . Portanto, $w = v$.

■

O exemplo a seguir, encontrado por Hadamard, mostra que uma solução do problema de Cauchy pode não depender continuamente dos dados iniciais.

Exemplo 1.1 *Considere a seguinte família de problemas de Cauchy:*

$$\begin{cases} \Delta u_k(x, y) = 0, & (x, y) \in \Omega := (0, 1) \times (0, 1); \\ u_k(x, 0) = 0, & x \in (0, 1); \\ \frac{\partial u_k}{\partial y}(x, 0) = \frac{1}{\pi k} \sin(\pi k x), & x \in (0, 1); \end{cases}$$

para $k \in \mathbb{N}$.

Primeiramente, note que

$$0 \leq \left\| \frac{1}{\pi k} \sin(\pi k x) \right\| \leq \left\| \frac{1}{\pi k} \right\| \|\sin(\pi k x)\| \leq \frac{1}{\pi} \left\| \frac{1}{k} \right\|.$$

Como para $k \rightarrow \infty$, $\|1/k\| \rightarrow 0$, então $\left\| \frac{1}{\pi k} \sin(\pi k x) \right\|$ converge uniformemente para zero, para k suficientemente grande. Assim, para

$k \rightarrow \infty$ tem-se um problema de valor inicial homogêneo que admite apenas a solução trivial.

Agora, note que as soluções $u_k(x, y) = \frac{1}{(\pi k)^2} \sinh(\pi k y) \sin(\pi k x)$ existem para cada $k \in \mathbb{N}$ e são únicas. No entanto, para cada $0 < y < 1$, tem-se que

$$\left\| \frac{\exp(\pi k y) \sin(\pi k x)}{2(\pi k)^2} \right\| \leq \left\| \frac{1}{(\pi k)^2} \sinh(\pi k y) \sin(\pi k x) \right\|;$$

ou seja, u_k torna-se ilimitado e oscila cada vez mais à medida que $k \rightarrow \infty$ e, portanto, $u_k \not\rightarrow 0$ em nenhuma norma razoável.

Portanto, a solução não depende continuamente dos dados iniciais.

Conclui-se, então, que o problema de Cauchy (CP) é um problema mal posto segundo Hadamard.

Apesar da dependência contínua dos dados para (CP) não ser verificada para todos os pares de dados de Cauchy (f, g) , o resultado a seguir diz que se fixar f , então o conjunto de dados g para o qual existe solução de (CP) é denso no espaço de Sobolev $H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$; o mesmo vale se fixar g , ou seja, o conjunto de dados f para o qual existe solução de (CP) é denso no espaço de Sobolev $H^{1/2}(\Gamma_1)$. Este resultado é obtido de [1].

Proposição 1.3 Para o par de dados de Cauchy $(f, g) \in H^{1/2}(\Gamma_1) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$, têm-se que

1. para $f \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ fixo, o conjunto de dados $g \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ para o qual existe $u \in H^1(\Omega)$ satisfazendo o problema de Cauchy (CP) é denso em $H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$;
2. para $g \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ fixo, o conjunto de dados $f \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ para o qual existe $u \in H^1(\Omega)$ satisfazendo o problema de Cauchy (CP) é denso em $H^{1/2}(\Gamma_1)$.

Demonstração: Nesta demonstração apenas a parte 1 é apresentada uma vez que a outra afirmação segue analogamente. Note que é suficiente demonstrar para $f \equiv 0$.

Seja $u \in H^1(\Omega)$ solução de (CP). Suponha, por contradição, que o conjunto de dados de $g \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ tal que existe $u \in H^1(\Omega)$ satisfazendo (CP) não é denso em $H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$.

Seja $G \subseteq H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ o conjunto de dados de g tal que o problema de valor inicial

$$\Delta u = 0, \quad \Omega; \quad u|_{\Gamma_1} = 0; \quad u_\nu|_{\Gamma_1} = g;$$

tenha solução.

Note que $\overline{G} \neq H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$. Então, existe uma forma linear contínua não nula $l \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ e $l \in G \subseteq H^{1/2}(\Gamma_1)$ tal que $\langle l, g \rangle = 0, \forall g \in G$.

Considere o seguinte problema de valor de contorno misto

$$\Delta v = 0, \quad \Omega; \quad v|_{\Gamma_1} = l; \quad v_\nu|_{\Gamma_2} = 0;$$

note que este problema é bem posto [A.1]. Agora, pela segunda fórmula de Green $\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) dx = \int_{\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2} (vu_\nu - uv_\nu) d\partial\Omega$ [p. 17, 3], tem-se que $\int_{\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2} (vu_\nu - uv_\nu) dx = 0$; ainda mais, pelas condições de fronteira,

$$\int_{\Gamma_2} vu_\nu dx = 0.$$

Considere também $h \in C^\infty(\Gamma_2)$ e o seguinte problema de valor de contorno misto (bem posto [A.1])

$$\Delta w = 0, \quad \Omega; \quad w|_{\Gamma_1} = 0; \quad w_\nu|_{\Gamma_2} = h;$$

cuja solução é única em $H^1(\Omega)$. Assim, analogamente, pela fórmula de Green acima para v e w e utilizando as condições de fronteira, tem-se que $\int_{\Gamma_2} vhdx = 0, \forall h \in C^\infty(\Gamma_2)$.

Logo, v satisfaz o problema homogêneo

$$\Delta v = 0, \quad \Omega; \quad v|_{\Gamma_2} = 0; \quad v_\nu|_{\Gamma_2} = 0;$$

ou seja, $v \equiv 0$ pelo teorema de Holmgren [p.166, 7] e, assim, $l \equiv 0$, o que é uma contradição.

Portanto, o conjunto de dados $g \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$ para o qual existe $u \in H^1(\Omega)$ satisfazendo (CP) é denso em $H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$. ■

Com o objetivo de escrever o problema de avaliar o traço da solução do problema de valor inicial sobre a fronteira Γ_2 (onde nenhum dado é prescrito) na forma de uma equação de operadores $F(\varphi) = y$ dependendo apenas dos dados de Cauchy $(f, g) \in H^{1/2}(\Gamma_1) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ e $F : H_{00}^{1/2}(\Gamma_2) \rightarrow H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ é um operador entre espaços de Hilbert (o produto interno que os torna espaços de Hilbert será apresentado no próximo capítulo), considere os seguintes operadores:

- $U_f : H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)' \longrightarrow H^1(\Omega)$, onde $U_f(\varphi) := u$ é solução de

$$\Delta u = 0, \quad \Omega; \quad u|_{\Gamma_1} = f; \quad u_\nu|_{\Gamma_2} = \varphi;$$

note que este operador está bem definido, pois o problema de valor de contorno misto a ser resolvido é bem posto [A.1].

- $\gamma_{N,\Gamma_1} : H^1(\Omega) \longrightarrow H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$, onde $\gamma_{N,\Gamma_1}(u) := u_\nu|_{\Gamma_1}$, este é o operador traço de Neumann sobre Γ_1 .

Assim, defina $F := \gamma_{N,\Gamma_1} \circ U_f : H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)' \longrightarrow H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ por

$$F(\varphi) := \gamma_{N,\Gamma_1}(U_f(\varphi));$$

note que

$$\gamma_{N,\Gamma_1}(U_f(\varphi)) = \gamma_{N,\Gamma_1}(u) = u_\nu|_{\Gamma_1}.$$

Logo, dado $(f, g) \in H^{1/2}(\Gamma_1) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ um par de dados de Cauchy consistente, o problema a ser analisado (encontrar o traço da solução de (CP) sobre Γ_2) pode ser visto pelo seguinte problema inverso mal posto, $F(\varphi) = g$.

Observe que F é um operador afim, isto é, $F(\varphi) := F_l(\varphi) + F_f$; onde $F_l(\varphi) := v_\nu|_{\Gamma_1}$ é a parte linear e $F_f := w_\nu|_{\Gamma_1}$ é a parte afim, com v sendo a solução de

$$\Delta v = 0, \quad \Omega; \quad v|_{\Gamma_1} = 0; \quad v_\nu|_{\Gamma_2} = \varphi;$$

e w , a solução de

$$\Delta w = 0, \quad \Omega; \quad w|_{\Gamma_1} = f; \quad w_\nu|_{\Gamma_2} = 0.$$

O próximo capítulo apresenta dois métodos iterativos de ponto fixo para resolver esse problema inverso mal posto, encontrar o traço de Neumann de $u \in H^1(\Omega)$ sobre Γ_2 , onde u é solução de

$$\Delta u = 0, \quad \Omega; \quad u|_{\Gamma_1} = f; \quad u_\nu|_{\Gamma_1} = g.$$

O método de Maz'ia e o método de Landweber.

Capítulo 2

Descrição e Análise dos Métodos de Maz'ia e de Landweber para o Problema de Cauchy Elíptico

Os métodos analisados neste trabalho para resolver o problema inverso mal posto referente ao problema de Cauchy elíptico descritos no capítulo anterior são os métodos iterativos de Maz'ia e de Landweber.

A análise de convergência para o método de Maz'ia está feita por uma abordagem de análise funcional e utilizando uma topologia diferente para o espaço de Sobolev $H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$, tornando-os espaços de Hilbert e feita apenas sob dados exatos. Concluindo que o método de Maz'ia é um método de regularização apenas no terceiro capítulo. Enquanto que a análise de convergência, estabilidade do método e a taxa de convergência (mesmo quando fornecidos dados perturbados) do método de Landweber é demonstrada pela teoria clássica de regularização.

O capítulo está apresentado em duas seções: na primeira seção para o algoritmo de Maz'ia e a segunda, para o método de Landweber. As respectivas análises estão em subseções.

Dado um par de dados de Cauchy $(f, g) \in H^{1/2}(\Gamma_1) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ consistente, o objetivo dos métodos a seguir é o de calcular o traço de

Neumann de $u \in H^1(\Omega)$ na fronteira Γ_2 (onde nenhum dado é fornecido previamente), onde u é a solução do problema de Cauchy (CP), isto é, encontrar $u_\nu|_{\Gamma_2}$.

Em relação a dimensão, apesar de o problema de Cauchy elíptico e o método de Landweber poderem ser analisados em três dimensões, a formulação do método de Maz'ia muda devido ao fato de os teoremas de traço serem dependentes da dimensão do espaço. Portanto, nessa dissertação é visto apenas em duas dimensões.

2.1 Método de Maz'ia

O algoritmo de Maz'ia consiste em dado uma aproximação inicial $\varphi_0 \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$ para $u_\nu|_{\Gamma_2}$, onde $u \in H^1(\Omega)$ é solução de (CP), gerar a seguinte iteração $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} w \in H^1(\Omega) \text{ resolve : } \Delta w = 0, \Omega; w|_{\Gamma_1} = f; w_\nu|_{\Gamma_2} = \varphi_k; \\ \quad \psi_k := w|_{\Gamma_2}; \\ v \in H^1(\Omega) \text{ resolve : } \Delta v = 0, \Omega; v_\nu|_{\Gamma_1} = g; v|_{\Gamma_2} = \psi_k; \\ \quad \varphi_{k+1} := v_\nu|_{\Gamma_2}; \end{array} \right.$$

para um par de dados de Cauchy $(f, g) \in H^{1/2}(\Gamma_1) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ consistente; a ideia é a de resolver problemas de valor de contorno mistos bem postos [A.1] sucessivamente usando os dados de Cauchy como parte das condições de contorno.

Note que na iteração acima dois problemas de valor de contorno são resolvidos e dois traços de soluções são calculados. Portanto, duas sequências são geradas. A primeira, de traços de Dirichlet e a segunda, de traços de Neumann, ambas definidas sobre Γ_2 ; definidas ao longo do texto. Além disso, como $w, v \in H^1(\Omega)$, têm-se que $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$ [A.3] e $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq H^{1/2}(\Gamma_2)$ [4].

Com o objetivo de fazer a análise de convergência deste método, observe que a iteração pode ser representada por potências de um operador $T : H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)' \rightarrow H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$, construindo esse operador T da seguinte maneira:

Primeiro, defina os seguintes operadores:

- $L_N : H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)' \rightarrow H^1(\Omega)$, $L_N(\varphi) := w$, onde w é solução de

$$\Delta w = 0, \Omega; w|_{\Gamma_1} = f; w_\nu|_{\Gamma_2} = \varphi;$$
- $L_D : H^{1/2}(\Gamma_2) \rightarrow H^1(\Omega)$, $L_D(\psi) := v$, onde v é solução de

$$\Delta v = 0, \Omega; v_\nu|_{\Gamma_1} = g; v|_{\Gamma_2} = \psi;$$

note que estes operadores estão bem definidos pois os problemas de valor de contorno mistos são bem postos [A.1].

Assim, a iteração do método de Maz'ia pode ser reescrita por

$$\begin{cases} w = L_N(\varphi_k); & \psi_k = \gamma_{D,\Gamma_2}(w); \\ v = L_D(\psi_k); & \varphi_{k+1} = \gamma_{N,\Gamma_2}(v); \end{cases}$$

onde

$$\gamma_{N,\Gamma_2} : H^1(\Omega) \longrightarrow H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)', \quad \gamma_{N,\Gamma_2}(u) := u_\nu|_{\Gamma_2};$$

é o traço de Neumann sobre Γ_2 e

$$\gamma_{D,\Gamma_2} : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma_2), \quad \gamma_{D,\Gamma_2}(u) := u|_{\Gamma_2};$$

é o traço de Dirichlet sobre Γ_2 .

Logo, para representar algoritmo por potências de um operador $T : H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)' \longrightarrow H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$, basta defini-lo por

$$T := \gamma_{N,\Gamma_2} \circ L_D \circ \gamma_{D,\Gamma_2} \circ L_N.$$

Note que T satisfaz, por definição,

$$\varphi_{k+1} = T(\varphi_k) = T^{k+1}(\varphi_0), \quad k \in \mathbb{N};$$

ou seja, o método de Maz'ia é uma iteração de ponto fixo que pode ser representada por potências de um operador afim (pois L_D e L_N claramente são operadores afins).

Como T é um operador afim, então $\varphi_{k+1} = T(\varphi_k) := T_l(\varphi_k) + T_0$, $k \in \mathbb{N}$, onde $T_l(\varphi_k) = \gamma_{N,\Gamma_2} \circ L_D^l \circ \gamma_{D,\Gamma_2} \circ L_N^l(\varphi_k)$ é a parte linear, com L_D^l e L_N^l sendo as partes lineares de L_D e L_N , respectivamente; e $T_0 = \gamma_{N,\Gamma_2} \circ L_D^l \circ \gamma_{D,\Gamma_2}(w_f) + \gamma_{N,\Gamma_2}(v_g)$ sendo a parte afim, com w_f e v_g em $H^1(\Omega)$ sendo as partes afins de L_N e L_D , respectivamente, e com w_f dependendo apenas de f e v_g dependendo apenas de g .

Assim, recursivamente, tem-se que

$$\varphi_{k+1} = T_l^{k+1}(\varphi_0) + \sum_{j=0}^k T_l^j(T_0), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Observação 2.1 Note que se $\bar{\varphi} := \gamma_{N,\Gamma_2}(u)$, onde u é solução de (CP) com dados de Cauchy $(f, g) \in H^{1/2}(\Gamma_1) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ consistente, então $T\bar{\varphi} = \bar{\varphi}$, por definição de T . Agora, se $\bar{\varphi}$ é um ponto fixo do operador T , as funções w e v têm os mesmos traços sobre Γ_2 . Logo, pela unicidade da solução, $w = v$ é solução de

$$\Delta u = 0, \quad \Omega; \quad u|_{\Gamma_1} = f; \quad u_\nu|_{\Gamma_1} = g.$$

Na subseção está apresentado as propriedades sobre o operador T_l e a análise de convergência do método de Maz'ia sob dados exatos.

2.1.1 Análise do método de Maz'ia

Nesta subseção, além da análise de convergência do método de Maz'ia, o resultado recíproco também é provado, isto é, se a sequência $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{T^k(\varphi_0)\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge, o problema de Cauchy associado é consistente e $\bar{\varphi} := \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k$ é o traço de Neumann da solução de (CP).

Os dois primeiros resultados desta seção fornecem as ferramentas para a demonstração da convergência do método, ou seja, propriedades sobre o operador T_l .

A primeira proposição dá informações a respeito do operador T_l , a positividade e a injetividade do operador T_l , 1 não é autovalor de T_l e o operador T_l é autoadjunto.

Para a demonstração da proposição a seguir deve-se estabelecer primeiro algumas identidades.

Defina o operador $W : H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)' \rightarrow H^1(\Omega)$ por

$$W(\varphi) := L_D^l \circ \gamma_{D, \Gamma_2} \circ L_N^l(\varphi);$$

em que L_D^l , L_N^l e γ_{D, Γ_2} são os operadores definidos anteriormente nesta seção.

A ferramenta principal desta demonstração é a fórmula de Green [A.4]

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2} u_\nu v d\partial\Omega - \int_{\Omega} (\nabla v)^t (\nabla u) dx.$$

Assim, com essa fórmula e considerando $\varphi, \psi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$, tem-se que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\nabla L_N^l T_l(\varphi) - \nabla W(\varphi))^t \nabla L_N^l(\psi) dx = \\ & \int_{\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2} (L_N^l T_l(\varphi) - W(\varphi))_\nu L_N^l(\psi) d\partial\Omega \\ & - \int_{\Omega} \Delta (L_N^l T_l(\varphi) - W(\varphi)) L_N^l(\psi) dx \end{aligned}$$

Agora, se usar a notação $w := L_N^l(\varphi)$, $\bar{w} := L_N^l(\psi)$ e $v := W(\varphi)$, conclui-se que

$$\int_{\Omega} (\nabla L_N^l T_l(\varphi) - \nabla W(\varphi))^t \nabla L_N^l(\psi) dx = 0;$$

pois pela definição de v , de w e de \bar{w} , têm-se que $\bar{w}|_{\Gamma_1} = 0$ e que $w|_{\Gamma_2} = v|_{\Gamma_2}$ já que $L_N^l T_l(\varphi) = L_N^l(v_\nu|_{\Gamma_2})$ e tanto w quanto v satisfazem a equação de Laplace em Ω .

Logo, vale a igualdade

$$\int_{\Omega} (\nabla L_N^l T_l(\varphi))^t \nabla L_N^l(\psi) dx = \int_{\Omega} (\nabla W(\varphi))^t \nabla L_N^l(\psi) dx;$$

e, portanto,

$$\langle T_l(\varphi), \psi \rangle_* = \langle \nabla L_N^l T_l(\varphi), \nabla L_N^l(\psi) \rangle = \langle \nabla W(\varphi), \nabla L_N^l(\psi) \rangle;$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno interno sobre $L^2(\Omega)$ e

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_* := \int_{\Omega} (\nabla L_N^l(\varphi))^t \nabla L_N^l(\varphi) dx;$$

é o produto interno sobre $H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$.

Analogamente, com a mesma notação, tem-se que

$$\langle \nabla L_N^l(\varphi), \nabla W(\psi) \rangle = \langle \nabla W(\varphi), \nabla W(\psi) \rangle;$$

isto é,

$$\int_{\Omega} (\nabla W(\varphi) - \nabla L_N^l(\varphi))^t \nabla W(\psi) dx = 0;$$

pois, pela definição de v e de w , têm-se que $v_\nu|_{\Gamma_1} = w|_{\Gamma_1} = 0$, $v|_{\Gamma_2} = w|_{\Gamma_2}$ e v e w satisfazem a equação de Laplace.

Além disso, vale as seguintes igualdades:

$$\langle \nabla L_N^l(\varphi), \nabla L_N^l T_l(\psi) \rangle = \langle \nabla L_N^l(\varphi), \nabla W(\psi) \rangle;$$

e

$$\langle \nabla W(\varphi), \nabla W(\psi) \rangle = \langle \nabla W(\varphi), \nabla L_N^l(\psi) \rangle;$$

obtidas, também, através da fórmula de Green [A.4] e pela definição de v , de w e de \bar{w} .

Uma nota importante a ser feita antes de enunciar a proposição é que a norma $\|\cdot\|_*$ proveniente do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ é equivalente a norma usual de $H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$. Além disso, $H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$ é um espaço de Hilbert com este produto interno [4]. A equivalência entre essa norma e a norma usual do espaço encontra-se em [4].

Assim, para os próximos resultados, a estrutura a ser considerada sobre o espaço de Sobolev $H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$ é o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$, afim de torná-lo espaço de Hilbert. E a norma proveniente desse produto interno é denotada por $\|\cdot\|_*$.

Com essas identidades, a demonstração a seguir é facilitada.

Proposição 2.1 *Seja $T_l \in \mathcal{L}(H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)')$ o operador definido como na descrição do método de Maz'ia. Então, têm-se que T_l é positivo, auto-adjunto, 1 não é autovalor de T_l e injetivo.*

Demonstração: Parte 1 - T_l é positivo: Com as identidades estabelecidas anteriormente à demonstração, conclui-se facilmente que

$$\begin{aligned} \langle T_l(\varphi), \varphi \rangle_* &= \langle \nabla L_N^l T_l(\varphi), \nabla L_N^l(\varphi) \rangle \\ &= \langle \nabla W(\varphi), \nabla L_N^l(\varphi) \rangle \\ &= \langle \nabla W(\varphi), \nabla W(\varphi) \rangle \\ &\geq c \|W(\varphi)\|_{H^1(\Omega)}^2; \end{aligned}$$

$\forall \varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$ e alguma constante $c \in \mathbb{R}$.

Portanto, T_l é positivo.

Parte 2 - 1 não é autovalor de T_l : Por contradição, suponha que 1 é autovalor de T_l , isto é, $\exists \varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$ não nulo tal que $T_l(\varphi) = \varphi$. Com a mesma notação precedente à proposição, lembre que w satisfaz

$$\Delta w = 0, \Omega; w|_{\Gamma_1} = 0; w_\nu|_{\Gamma_2} = \varphi;$$

e que v satisfaz

$$\Delta v = 0, \Omega; v_\nu|_{\Gamma_1} = 0; v|_{\Gamma_2} = w|_{\Gamma_2}.$$

Além disso, observe que a diferença $(v - w)$ é solução do problema homogêneo

$$\Delta(v - w) = 0, \Omega; (v - w)|_{\Gamma_2} = 0; (v - w)_\nu|_{\Gamma_2} = 0;$$

pois $v|_{\Gamma_2} = w|_{\Gamma_2}$; ou seja, pela unicidade da solução, devemos ter $v = w$; pelo fato de que a única solução do problema homogêneo é a solução trivial. Pela definição de v e de w , têm-se $w|_{\Gamma_1} = 0$ e $0 = v_\nu|_{\Gamma_1} = w_\nu|_{\Gamma_1}$; pois $w = v$. Portanto, como w também satisfaz o problema homogêneo, w deve ser identicamente nulo. Logo, $\varphi \equiv 0$, contradição.

Logo, 1 não é autovalor de T_l .

Parte 3 - T_l é autoadjunto: Para $\varphi, \psi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$, pelas identidades estabelecidas previamente, têm-se que

$$\langle \nabla L_N^l(\varphi), \nabla L_N^l T_l(\psi) \rangle = \langle \nabla L_N^l(\varphi), \nabla W(\psi) \rangle;$$

e que

$$\langle \nabla W(\varphi), \nabla W(\psi) \rangle = \langle \nabla W(\varphi), \nabla L_N^l(\psi) \rangle;$$

ou seja, estas igualdades implicam que $\langle T_l(\varphi), \psi \rangle_* = \langle \varphi, T_l(\psi) \rangle_*$.

Portanto, T_l é autoadjunto.

Parte 4 - T_l é injetiva: Sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$ tais que $T_l(\varphi_1) = T_l(\varphi_2)$ e defina $w := L_N^l(\varphi_1 - \varphi_2)$ e $v := W(\varphi_1 - \varphi_2)$. Note que a hipótese $T_l(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ implica em $v_\nu|_{\Gamma_2} = 0$, pois $T_l(\varphi_1 - \varphi_2) = \gamma_{N, \Gamma_2}(v) = v_\nu|_{\Gamma_2}$ e note que v satisfaz

$$\Delta v = 0, \quad \Omega; \quad v_\nu|_{\Gamma_1} = 0; \quad v|_{\Gamma_2} = w|_{\Gamma_2}.$$

Como v é constante, pois satisfaz

$$\Delta v = 0, \quad \Omega; \quad v_\nu = 0, \quad \partial\Omega;$$

deve-se ter que $v \equiv 0$, pois a única função constante em $H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$ é a função nula [4]. Logo, $w \equiv 0$ em Ω e segue que $\varphi_1 = \varphi_2$, pois $0 = w_\nu|_{\Gamma_2} = \varphi_1 - \varphi_2$.

Portanto, T_l é injetiva. ■

Na proposição anterior foi provado que 1 não é autovalor de T_l . Agora, a proposição a seguir diz que, de fato, o operador é não expansivo e, além disso, a prova de que T_l é regular assintótico em $H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$ é apresentada.

Proposição 2.2 *Seja $T_l \in \mathcal{L}(H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)')$ o operador definido como na descrição do método de Maz'ia. Então, têm-se que T_l é regular assintótico e não expansivo em $H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$.*

Demonstração: Parte 1 - T_l é regular assintótico: Para provar que T_l é regular assintótico, deve-se mostrar que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \| |T_l^{k+1}(\varphi) - T_l^k(\varphi)| \|_* = 0;$$

$\forall \varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$.

Assim, basta verificar que $T_l^k(\varphi_0) \rightarrow 0$, $\forall \varphi_0 \in R(T_l - I)$, pois vale a identidade

$$(T_l^{k+1}(\varphi) - T_l^k(\varphi)) = T_l^k(T_l - I)(\varphi).$$

De fato, seja $\psi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$ tal que $(T_l - I)(\psi) = \varphi$. Para essa demonstração, observe que a iteração $T_l^k(\psi)$ pode ser reescrita por

$$\begin{cases} w_k(\psi) = L_N^l(\gamma_{N, \Gamma_2}(v_{k-1}(\psi))), & k \geq 1; \\ v_k(\psi) = L_D^l(\gamma_{D, \Gamma_2}(w_k(\psi))), & k \geq 0; \end{cases}$$

com $w_0(\psi) = L_N^l(\psi)$.

Assim, por essa descrição, segue que como w_k satisfaz

$$\Delta w_k = 0, \Omega; w_k|_{\Gamma_1} = 0; (w_k)_\nu|_{\Gamma_2} = (v_{k-1})_\nu|_{\Gamma_2};$$

e v_k é solução de

$$\Delta v_k = 0, \Omega; (v_k)_\nu|_{\Gamma_1} = 0; v_k|_{\Gamma_2} = w_k|_{\Gamma_2};$$

têm-se que $w_k|_{\Gamma_1} = (v_k)_\nu|_{\Gamma_1} = 0$ e em Γ_2 , $v_k = w_k$ e $(w_k)_\nu = (v_{k-1})_\nu$.

Com isso e utilizando a fórmula de Green [A.4], conclui-se as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla v_k)^t (\nabla v_k) dx &= \int_{\Gamma_2} v_k (v_k)_\nu d\partial\Omega; \\ \int_{\Omega} (\nabla w_k)^t (\nabla w_k) dx &= \int_{\Gamma_2} w_k (w_k)_\nu d\partial\Omega; \\ \int_{\Omega} (\nabla v_k)^t (\nabla w_k) dx &= \int_{\Gamma_2} w_k (v_k)_\nu d\partial\Omega; \\ \int_{\Omega} (\nabla v_{k-1})^t (\nabla w_k) dx &= \int_{\Gamma_2} w_k (v_{k-1})_\nu d\partial\Omega; \end{aligned}$$

com a mesma argumentação das identidades obtidas para a proposição anterior.

Essas quatro identidades, analogamente, fornecem que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla (w_k - v_{k-1})^t \nabla (w_k - v_{k-1}) dx = \\ \int_{\Omega} \left((\nabla v_{k-1})^t (\nabla v_{k-1}) - (\nabla w_k)^t (\nabla w_k) \right) dx; \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla (v_k - w_k)^t \nabla (v_k - w_k) dx = \\ \int_{\Omega} \left((\nabla w_k)^t (\nabla w_k) - (\nabla v_k)^t (\nabla v_k) \right) dx. \end{aligned}$$

Pela definição de φ e ψ , tem-se que $w_k(\varphi) = w_{k+1}(\psi) - w_k(\psi)$, para ver isso basta observar que

$$T_l^k(\varphi) = T_l^k(T_l - I)(\psi).$$

Note, pelo que foi feito acima, que

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\nabla w_k(\varphi))^t \nabla w_k(\varphi) dx \\
& \leq 2 \int_{\Omega} \nabla (w_{k+1}(\psi) - w_k(\psi))^t \nabla (w_{k+1}(\psi) - w_k(\psi)) dx \\
& = 2 \int_{\Omega} \left((\nabla w_k(\psi))^t (\nabla w_k(\psi)) - (\nabla w_{k+1}(\psi))^t (\nabla w_{k+1}(\psi)) \right) dx;
\end{aligned}$$

ou seja, vale que

$$\|T_l^k(\varphi)\|_*^2 \leq 2 \left(\|T_l^k(\psi)\|_*^2 - \|T_l^{k+1}(\psi)\|_*^2 \right), \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

pela definição $w_k(\cdot) := L_N^l(\cdot)$.

Além disso, observe que $\|T_l^k(\psi)\|_*^2 - \|T_l^{k+1}(\psi)\|_*^2 \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}$, isto é, a sequência $\{\|T_l^k(\psi)\|_*\}_{k \in \mathbb{N}}$ não é crescente.

Logo, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|T_l^k(\varphi)\|_* = 0$.

Portanto, T_l é regular assintótico.

Parte 2 - T_l é não expansivo: Para demonstrar que T_l é não expansivo, isto é, $\|T_l\|_{\mathcal{L}(H_{00}^{1/2}(\Gamma_2))} \leq 1$, defina para $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$, $w := L_N^l(\varphi)$ e $v := L_D^l \circ \gamma_{D,\Gamma_2} \circ L_N^l(\varphi)$.

Agora, como $T_l(\varphi) = \gamma_{N,\Gamma_2}(v)$ e pela fórmula de Green [A.4], tem-se que

$$\begin{aligned}
\langle T_l(\varphi), T_l(\varphi) \rangle_* &= \int_{\Omega} (\nabla L_N^l(\gamma_{D,\Gamma_2}(v)))^t \nabla L_N^l(\gamma_{D,\Gamma_2}(v)) dx \\
&= \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} (L_N^l(\gamma_{D,\Gamma_2}(v)))_{\nu} L_N^l(\gamma_{D,\Gamma_2}(v)) d\partial\Omega \\
&+ \int_{\Omega} \Delta (L_N^l(\gamma_{D,\Gamma_2}(v))) L_N^l(\gamma_{D,\Gamma_2}(v)) dx \\
&= \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} v_{\nu} L_N^l(\gamma_{D,\Gamma_2}(v)) d\partial\Omega \\
&+ \int_{\Omega} \Delta(v) L_N^l(\gamma_{D,\Gamma_2}(v)) dx \\
&= \int_{\Omega} (\nabla v)^t \nabla L_N^l(\gamma_{D,\Gamma_2}(v)) dx \\
&\leq \left(\int_{\Omega} (\nabla v)^t (\nabla v) dx \right)^{1/2} \langle T_l(\varphi), T_l(\varphi) \rangle_*^{1/2};
\end{aligned}$$

ou seja, vale a desigualdade

$$\langle T_l(\varphi), T_l(\varphi) \rangle_* \leq \int_{\Omega} (\nabla v)^t (\nabla v) dx.$$

Também, pela definição de v e w e pela fórmula de Green [A.4], segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla v)^t (\nabla v) dx &= \int_{\Gamma_2} v_{\nu} v d\partial\Omega \\ &= \int_{\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2} v_{\nu} w d\partial\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\nabla v)^t (\nabla w) dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} (\nabla v)^t (\nabla v) dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} (\nabla w)^t (\nabla w) dx \right)^{1/2}; \end{aligned}$$

isto é,

$$\int_{\Omega} (\nabla v)^t (\nabla v) dx \leq \int_{\Omega} (\nabla w)^t (\nabla w) dx.$$

Logo, para ver que T_l é não expansivo, observe que

$$\|T_l(\varphi)\|_* \leq \left(\int_{\Omega} (\nabla w)^t (\nabla w) dx \right)^{1/2} = \langle \varphi, \varphi \rangle_*^{1/2} = \|\varphi\|_*;$$

pois $w := L_N^l(\varphi)$.

Portanto, T_l é não expansivo. ■

Após essa análise sobre o operador T_l , o trabalho de demonstrar a análise de convergência para o método de Maz'ia é facilitado; como abaixo o teorema desta seção.

Teorema 2.1 *Sejam T e T_l os operadores definidos como na descrição do método de Maz'ia. Se $(f, g) \in H^{1/2}(\Gamma_1) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ é um par de dados de Cauchy consistente, então a sequência $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{T^k(\varphi_0)\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge para o traço de Neumann da solução do problema de Cauchy, isto é, para $u_{\nu}|_{\Gamma_2}$, para todo $\varphi_0 \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$.*

Demonstração: Nesta demonstração, observe que basta provar que $T^k(\varphi_0)$ converge para o ponto fixo $\bar{\varphi}$ do operador T , pela observação feita nesta seção.

Para isso, defina, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_k = \varphi_k - \bar{\varphi}$. Então, tem-se que

$$\begin{aligned}\varepsilon_{k+1} &= \varphi_{k+1} - \bar{\varphi} = T(\varphi_k) - T(\bar{\varphi}) \\ &= T_l(\varphi_k) + T_0 - T_l(\bar{\varphi}) - T_0 = T_l(\varphi_k) - T_l(\bar{\varphi}) = T_l(\varepsilon_k).\end{aligned}$$

Como $H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$ é um espaço de Hilbert (com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$), tem-se que $\varepsilon_k \rightarrow 0$, pelas proposições anteriores. De fato, T_l ser regular assintótico implica em ser uma sequência de Cauchy e, como o espaço é um espaço de Hilbert, a sequência é convergente. Portanto, como 1 não é auto valor de T_l , tem-se que $\varphi_k \rightarrow \bar{\varphi}$, se $k \rightarrow \infty$. ■

O último resultado a respeito desse método é a reciprocidade do teorema da análise de convergência. A proposição a seguir também pode ser entendida como um critério para a existência do problema de Cauchy elíptico.

Proposição 2.3 *Seja $(f, g) \in H^{1/2}(\Gamma_1) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ um par de dados de Cauchy consistente. Se a sequência $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{T^k(\varphi_0)\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge em $H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$, então o problema de Cauchy elíptico (CP) tem uma solução $u \in H^1(\Omega)$ e $u_\nu|_{\Gamma_2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k$.*

Demonstração: Defina $\bar{\varphi} = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$, então

$$T(\bar{\varphi}) = T\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{k+1} = \bar{\varphi}.$$

Portanto, $\bar{\varphi}$ é ponto fixo de T e, assim, a **observação** feita nesta seção garante a existência de solução para (CP). ■

A próxima seção traz o método de Landweber com uma subseção abordando a análise de convergência, estabilidade do método e a taxa de convergência via a teoria clássica de regularização.

2.2 Método de Landweber

Dado um par de dados de Cauchy $(f, g) \in H^{1/2}(\Gamma_1) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ consistente, sabe-se que o operador F do problema inverso $F(\varphi) = g$ é um operador afim e, portanto, $F(\varphi) = g$ pode ser reescrito por $F_l(\varphi) = h$, onde $h = h(f, g) := g - F_f$. Note que como $F_f \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$, $h \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ também.

Como o operador do problema inverso obtido é um operador linear, o método de Landweber apresentado aqui é apenas para problemas lineares. Em particular, para resolver o problema inverso associado ao problema de Cauchy elíptico, $F_l(\varphi) = h$.

O método de Landweber também consiste em uma iteração de ponto fixo, $\varphi_{k+1} = L(\varphi_k)$, $k \in \mathbb{N}$, com $L : H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)' \rightarrow H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$ definida por

$$L(\varphi) := \varphi + F_l^*(h - F_l(\varphi));$$

esta iteração de ponto fixo provém da condição de otimalidade de primeira ordem para o problema de mínimos quadrados não linear

$$\min_{h \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'} \frac{1}{2} \|h - F_l(\varphi)\|^2;$$

que é a equação normal

$$F_l^* F_l(\varphi) = F_l^*(\varphi) h.$$

Com o intuito de analisar o método sob dados perturbados, isto é, afim de demonstrar que é um método de regularização (análise de convergência e estabilidade) e obter taxa de convergência, considere $(f, g) \in H^{1/2}(\Gamma_1) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ um par de dados de Cauchy consistente e um outro par $(\bar{f}, \bar{g}) \in H^{1/2}(\Gamma_1) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ consistente ou não. Considere também h como anteriormente, então, analogamente, pode-se calcular \bar{h} , a saber $\bar{h} := \bar{g} - F_{\bar{f}}$.

Então, dado um par de dados $(f^\delta, g^\delta) \in L^2(\Gamma_1) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ tais que

$$\|f^\delta - f\|_{L^2(\Gamma_1)} + \|g^\delta - g\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'} \leq \delta.$$

A pergunta a ser feita é: pode-se garantir que existe um termo h^δ tal que $\|h^\delta - h\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'} \leq \delta$?

Para isso é necessário a hipótese *a priori* sobre o par de dados de Cauchy exatos: $f \in H^r(\Gamma_1)$, para $r \geq 1/2$ [5]. O seguinte lema [5] fornece a resposta a essa pergunta.

Lema 2.1 *Sejam $f \in H^r(\Gamma_1)$, $r > s > 0$ e $f^\delta \in L^2(\Gamma_1)$ com*

$$\|f^\delta - f\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq \delta;$$

para algum $\delta > 0$. Então, existem um operador suavizante $S : L^2(\Gamma_1) \rightarrow H^s(\Gamma_1)$ e uma função positiva γ com $\lim_{x \downarrow 0} \gamma(x) = 0$ tais que $\|f - Sf^\delta\|_{H^s(\Gamma_1)} \leq \gamma(\delta)$.

Para responder a pergunta, utiliza-se o operador suavizador $S : L^2(\Gamma_1) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_1)$ para gerar a função $\overline{f^\delta} := Sf^\delta \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ tal que $\|f - \overline{f^\delta}\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \leq \delta'$, para algum outro $\delta' > 0$. Assim, após suavizar $f^\delta \in L^2(\Gamma_1)$, pode-se calcular o termo $h^\delta := g^\delta - F_{\overline{f^\delta}} \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ tal que $\|h^\delta - h\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'} \leq \delta'$ a partir do par de dados de Cauchy $(\overline{f^\delta}, g^\delta)$, pois o termo $h := g - F_f$ depende continuamente do par de dados (f, g) . Essa análise é necessária para obter uma estimativa do erro de propagação do algoritmo de Landweber, feita na subseção.

Logo, pode-se pensar em resolver o problema inverso $F_l(\varphi) = h^\delta$ tal que $\|h - h^\delta\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'} \leq \delta$ [5].

A subseção a seguir, além de abordar a análise de convergência, também apresenta um teorema sobre a taxa de convergência do algoritmo de Landweber para dados perturbados.

2.2.1 Análise do método de Landweber

Os resultados clássicos para o método de Landweber linear são apresentados nesta subseção.

O objetivo desta subseção é o de apresentar as demonstrações referente a análise de convergência e estabilidade (regularização) e taxa de convergência para o método. Apenas a demonstração de que o método é de ordem ótima não está presente.

Como a teoria de regularização para o método de Landweber é feita para operadores não expansivos, portanto, o primeiro resultado garante que esta teoria pode ser aplicada ao problema inverso $F_l(\varphi) = h$.

Proposição 2.4 *Seja $F_l \in \mathcal{L}(H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)', H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)')$ o operador definido como na descrição do método de Landweber. Então, tem-se que F_l é não expansivo.*

Demonstração: Seja $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$. Sejam $v, w, q \in H^1(\Omega)$ soluções dos seguintes problemas de valor de contorno

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0, \quad \Omega; \quad v|_{\Gamma_1} = 0; \quad v_\nu|_{\Gamma_2} = \varphi; \\ \Delta w &= 0, \quad \Omega; \quad w_\nu|_{\Gamma_1} = 0; \quad w|_{\Gamma_2} = v|_{\Gamma_2}; \\ \Delta q &= 0, \quad \Omega; \quad q_\nu|_{\Gamma_1} = v_\nu|_{\Gamma_1}; \quad q|_{\Gamma_2} = 0; \end{aligned}$$

respectivamente.

Então, têm-se que $F_l(\varphi) = v_\nu|_{\Gamma_1} = q_\nu|_{\Gamma_1}$, $\|\varphi\|_*^2 = \int_\Omega |\nabla v|^2 dx$ e $\|F_l(\varphi)\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'}^2 = \int_\Omega |\nabla q|^2 dx$.

Assim, $r := v - w$ é solução de

$$\Delta r = 0, \Omega; \quad r_\nu|_{\Gamma_1} = v_\nu|_{\Gamma_1}; \quad r|_{\Gamma_2} = 0;$$

ou seja, tem-se que $q = v - w$.

Além disso,

$$\int_\Omega |\nabla w|^2 dx = \int_{\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2} w w_\nu d\partial\Omega = \int_{\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2} v w_\nu d\partial\Omega = \int_\Omega (\nabla v)^t (\nabla w) dx.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|F_l(\varphi)\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'}^2 &= \int_\Omega |\nabla q|^2 dx \\ &= \int_\Omega |\nabla(v - w)|^2 dx \\ &= \int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + |\nabla w|^2 - 2(\nabla v)^t (\nabla w) \right) dx \\ &= \int_\Omega \left(|\nabla v|^2 - |\nabla w|^2 \right) dx \\ &= \|\varphi\|_*^2 - \int_\Omega |\nabla w|^2 dx. \end{aligned}$$

Portanto, $\|F_l(\varphi)\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'} \leq \|\varphi\|_*$, $\forall \varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$, ou seja, $\|F_l\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'} \leq 1$ e, assim, F_l é não expansivo. ■

Vale ressaltar que o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'}$ definido sobre o espaço de Sobolev $H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ de modo a torná-lo espaço de Hilbert é análogo ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ sobre o espaço $H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$, isto é, dados $\varphi, \psi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$, então

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'} := \int_\Omega (\nabla v)^t (\nabla w) dx;$$

onde $v, w \in H^1(\Omega)$ são soluções dos seguintes problemas de valor de contorno

$$\begin{aligned}\Delta v &= 0, \quad \Omega; \quad v_\nu|_{\Gamma_1} = \varphi; \quad v|_{\Gamma_2} = 0; \\ \Delta w &= 0, \quad \Omega; \quad w_\nu|_{\Gamma_1} = \psi; \quad w|_{\Gamma_2} = 0;\end{aligned}$$

respectivamente. A norma denotada por $\|\cdot\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'}$ é a norma proveniente desse produto interno.

A proposição a seguir garante que a sequência $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge para a solução de mínimos quadrados de $F_l(\varphi) = h$, se o par de dados de Cauchy $(f, g) \in H^{1/2}(\Gamma_1) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ for consistente. Em outras palavras, caso seja fornecido um par de dados de Cauchy exatos (e consistente), tem-se a convergência do método de Landweber.

Proposição 2.5 *Se $(f, g) \in H^{1/2}(\Gamma_1) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ é um par de dados de Cauchy consistente, então $\varphi_k \rightarrow F_l^\dagger(h)$, se $k \rightarrow \infty$.*

Demonstração: Primeiramente, observe que como $(f, g) \in H^{1/2}(\Gamma_1) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ é um par de dados de Cauchy consistente, o problema de Cauchy (CP) admite uma única solução $u \in H^1(\Omega)$. Então, $F(\varphi) = g$ admite solução. Logo, $g \in R(F)$ e, portanto, $h \in R(F_l)$.

A ideia desta demonstração é definir uma função g_k de modo que satisfaça as hipóteses de [A.5] para aplicá-lo e concluir a demonstração.

Para $k \in \mathbb{N}$, como $\varphi_{k+1} = \varphi_k + F_l^*(h - F_l(\varphi_k))$, então φ_k pode ser reescrito por uma forma não recursiva

$$\varphi_k = \sum_{j=0}^{k-1} (I - F_l^* F_l)^j F_l^*(h);$$

para ver isso basta escrever $\varphi_k = (I - F_l^* F_l)(\varphi_{k-1}) + F_l^*(h)$ e utilizar essa expressão recursivamente de $k-1$ até $k=0$, se $\varphi_0 = 0$.

Então, tem-se que $F_l^*(h) = F_l^* F_l(\varphi^\dagger)$, onde $\varphi^\dagger = F_l^\dagger(h) \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$.

Logo, utilizando a forma não recursiva para φ_k ,

$$\varphi^\dagger - \varphi_k = \varphi^\dagger - F_l^* F_l \sum_{j=0}^{k-1} (I - F_l^* F_l)^j (\varphi^\dagger).$$

Com a igualdade $F_l^* F_l \sum_{j=0}^{k-1} (I - F_l^* F_l)^j = I - (I - F_l^* F_l)^k$, vale que

$$\varphi^\dagger - \varphi_k = (I - F_l^* F_l)^k \varphi^\dagger.$$

Defina $g_k(\lambda) = \sum_{j=0}^{k-1} (1-\lambda)^j$ e $r_k(\lambda) = (1-\lambda)^k$. Então, têm-se que

$$\varphi_k = g_k (F_l^* F_l) F_l^* (h);$$

e que

$$\varphi^\dagger - \varphi_k = r_k (F_l^* F_l) \varphi^\dagger.$$

Considere $\lambda \in (0, 1]$. Note que neste intervalo $\lambda g_k(\lambda) = 1 - r_k(\lambda)$ é uniformemente limitada e $g_k(\lambda) \rightarrow 1/\lambda$, se $k \rightarrow \infty$, já que $r_k(\lambda) \rightarrow 0$, se $k \rightarrow \infty$.

Portanto, pode-se aplicar o resultado [A.5] para concluir a demonstração. ■

A próxima proposição dá uma simples estimativa do erro de propagação do algoritmo de Landweber na presença de dados perturbados (f^δ, g^δ) , isto é, uma estimativa para saber de que modo o erro nos dados deteriora a iteração $\{\varphi_k^\delta\}_{k \in \mathbb{N}}$. Em outras palavras, é demonstrada a estabilidade do método de Landweber. Note que se fornecidos dados perturbados (f^δ, g^δ) tais que

$$\|f - f^\delta\|_{L^2(\Gamma_1)} + \|g - g^\delta\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)} \leq \delta;$$

é possível calcular o termo $h^\delta = h(f^\delta, g^\delta)$ tal que

$$\|h - h^\delta\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)} \leq \delta.$$

Proposição 2.6 *Sejam $h, h^\delta \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ dados tais que*

$$\|h - h^\delta\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'} \leq \delta,$$

e considere as iterações de Landweber correspondentes, $\{\varphi_k\}$ e $\{\varphi_k^\delta\}$ (com dados exatos e inexatos, respectivamente). Então, tem-se que

$$\|\varphi_k - \varphi_k^\delta\|_* \leq \sqrt{k}\delta, \quad k \geq 0.$$

Demonstração: Seja $R_k(h - h^\delta) := \sum_{j=0}^{k-1} (I - F_l^* F_l)^j F_l^* (h - h^\delta)$. Então, pela demonstração da proposição anterior, $\varphi_k - \varphi_k^\delta = R_k(h - h^\delta)$.

Assim, utilizando novamente a igualdade $F_l^* F_l \sum_{j=0}^{k-1} (I - F_l^* F_l)^j = I - (I - F_l^* F_l)^k$, segue que

$$\|R_k\|^2 = \|R_k R_k^*\|$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \sum_{j=0}^{k-1} (I - F_l^* F_l)^j \left(I - (I - F_l^* F_l)^k \right) \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{j=0}^{k-1} (I - F_l^* F_l)^j \right\| ;
\end{aligned}$$

pois $I - F_l^* F_l$ é um operador semidefinido positivo não expansivo.

Como o lado direito da expressão acima é limitado por k , tem-se que

$$\|\varphi_k - \varphi_k^\delta\|_* \leq \|R_k\| \|h - h^\delta\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'} \leq \sqrt{k}\delta.$$

Portanto, $\|\varphi_k - \varphi_k^\delta\|_* \leq \sqrt{k}\delta$, $k \geq 0$. ■

O critério de parada utilizado para o método de Landweber é o princípio da discrepância, um critério *a posteriori*, devido a Morozov [p.83, 2]. O princípio da discrepância é um critério que determina a parada da iteração em $\bar{k} = k(\delta, h^\delta)$ quando, pela primeira vez,

$$\|h^\delta - F_l(\varphi_k^\delta)\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'} \leq \tau\delta;$$

para $\tau > 1$ fixo.

A motivação do uso do princípio da discrepância como critério de parada para o algoritmo, além do resultado abaixo, é o de garantir um índice de parada finito, facilitando, assim, demonstrar taxa de convergência para o método de Landweber.

Além disso, tem como objetivo o de torná-lo um método de regularização de ordem ótima. Em breves palavras, isso significa que se o método de Landweber sob dados perturbados com este critério de parada é usado sob a hipótese *a priori* $F_l^\dagger(h) \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$, então o erro do pior caso para este método é o ínfimo dos erros dos piores casos para o método com outros critérios de parada.

Proposição 2.7 *Sejam $(f, g) \in H^{1/2}(\Gamma_1) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ um par de dados de Cauchy consistente e $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$ uma solução de $F_l(\varphi) = h$ qualquer. Se $\|h^\delta - F_l(\varphi_k^\delta)\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'} > 2\delta$, então φ_{k+1}^δ é uma aproximação melhor para φ^\dagger do que φ_k^δ . Em outras palavras, a iteração não termina antes de*

$$\|h^\delta - F_l(\varphi_k^\delta)\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'} \leq 2\delta.$$

Demonstração: Para ver que φ_{k+1}^δ é uma aproximação melhor, note que

$$\begin{aligned}
\|\varphi^\dagger - \varphi_{k+1}^\delta\|_*^2 &= \|\varphi^\dagger - \varphi_k^\delta - F_l^*(h^\delta - F_l(\varphi_k^\delta))\|_*^2 \\
&= \|\varphi^\dagger - \varphi_k^\delta\|_*^2 - 2\langle \varphi^\dagger - \varphi_k^\delta, F_l^*(h^\delta - F_l(\varphi_k^\delta)) \rangle_* \\
&\quad + \langle h^\delta - F_l(\varphi_k^\delta), F_l F_l^*(h^\delta - F_l(\varphi_k^\delta)) \rangle_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'} \\
&= \|\varphi^\dagger - \varphi_k^\delta\|_*^2 - 2\langle h - h^\delta, h^\delta - F_l(\varphi_k^\delta) \rangle_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'} \\
&\quad - \|h^\delta - F_l(\varphi_k^\delta)\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'}^2 \\
&\quad + \langle h^\delta - F_l(\varphi_k^\delta), (F_l F_l^* - I)(h^\delta - F_l(\varphi_k^\delta)) \rangle_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'}.
\end{aligned}$$

Como F_l é um operador não expansivo, tem-se que $F_l F_l^* - I$ é semidefinido negativo, então

$$\begin{aligned}
&\|\varphi^\dagger - \varphi_k^\delta\|_*^2 - \|\varphi^\dagger - \varphi_{k+1}^\delta\|_*^2 \\
&\geq \|h^\delta - F_l(\varphi_k^\delta)\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'} \left(\|h^\delta - F_l(\varphi_k^\delta)\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'} - 2\delta \right).
\end{aligned}$$

Por hipótese, $\|h^\delta - F_l(\varphi_k^\delta)\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'} > 2\delta$, então o lado direito da desigualdade acima é positivo.

Portanto, $\|\varphi^\dagger - \varphi_k^\delta\|_*^2 - \|\varphi^\dagger - \varphi_{k+1}^\delta\|_*^2 > 0$, ou seja,

$$\|\varphi^\dagger - \varphi_k^\delta\|_* > \|\varphi^\dagger - \varphi_{k+1}^\delta\|_*;$$

e, assim, φ_{k+1}^δ é uma melhor aproximação para φ^\dagger do que φ_k^δ . \blacksquare

O teorema desta seção garante que o princípio da discrepância determina um índice de parada finito e, ainda mais, fornece a taxa de convergência $k(\delta, h^\delta) = \mathcal{O}(\delta^{-2})$.

Teorema 2.2 *Seja $\tau > 1$ fixo. Então, o princípio da discrepância determina um índice de parada finito $k(\delta, h^\delta)$ para a iteração de Landweber com $k(\delta, h^\delta) = \mathcal{O}(\delta^{-2})$.*

Demonstração: Considere momentaneamente $\{\varphi_k\}$ a iteração de Landweber com dado exato h por facilidade na notação.

Pela demonstração anterior, tem-se que

$$\|\varphi^\dagger - \varphi_j\|_*^2 - \|\varphi^\dagger - \varphi_{j+1}\|_*^2 \geq \|h - F_l(\varphi_j)\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'}^2.$$

Somando de $j = 1$ até k , tem-se que

$$\begin{aligned} \|\varphi^\dagger - \varphi_1\|_*^2 - \|\varphi^\dagger - \varphi_{k+1}\|_*^2 &\geq \sum_{j=1}^k \|h - F_l(\varphi_j)\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'}^2 \\ &\geq k \|h - F_l(\varphi_k)\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'}^2; \end{aligned}$$

onde vale a última desigualdade pela monotonicidade das normas dos resíduos.

Note que

$$\begin{aligned} h - F_l(\varphi_k) &= h - F_l(\varphi_{k-1}) - F_l F_l^*(h - F_l(\varphi_{k-1})) \\ &= (I - F_l F_l^*)(h - F_l(\varphi_{k-1})); \end{aligned}$$

então, por indução, tem-se que $h - F_l(\varphi_k) = (I - F_l F_l^*)^k (h - F_l(\varphi_0))$.

Então, pelo que foi feito acima,

$$\begin{aligned} \left\| (I - F_l F_l^*)^k (h - F_l(\varphi_0)) \right\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'} &= \|h - F_l(\varphi_k)\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'} \\ &\leq k^{-1/2} \|\varphi^\dagger - \varphi_1\|_*. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|h^\delta - F_l(\varphi_k^\delta)\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'} &= \left\| (I - F_l F_l^*)^k (h^\delta - F_l(\varphi_0)) \right\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'} \\ &\leq \left\| (I - F_l F_l^*)^k (h - F_l(\varphi_0)) \right\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'} \\ &\quad + \left\| (I - F_l F_l^*)^k (h - h^\delta) \right\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'} \\ &\leq \delta + k^{-1/2} \|\varphi^\dagger - \varphi_1\|_*. \end{aligned}$$

Portanto, tem-se que $\delta + k^{-1/2} \|\varphi^\dagger - \varphi_1\|_* < \tau\delta$, apenas se

$$k > (\tau - 1)^{-2} \|\varphi^\dagger - \varphi_1\|_*^2 \delta^{-2}$$

e, assim, $k(\delta, h^\delta) \leq c\delta^{-2}$, onde c depende apenas de τ . ■

O último resultado do capítulo diz que o algoritmo de Landweber com o princípio da discrepância para $\tau > 1$ fixo é, de fato, um método de regularização de ordem ótima.

Proposição 2.8 *Se $(f, g) \in H^{1/2}(\Gamma_1) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ é um par de dados de Cauchy consistente, então a iteração de Landweber com o princípio da discrepância com $\tau > 1$ fixo é um método de regularização de ordem ótima.*

Esta demonstração encontra-se em [2].

Portanto, neste capítulo, foi demonstrado a análise de convergência para o método de Maz'ia sob dados exatos e que o método de Landweber linear é um método de regularização. Além disso, foi obtido uma taxa de convergência para o método de Landweber e visto que é um método de ordem ótima.

O próximo capítulo relaciona os métodos apresentados. Mostra-se que as iterações dos métodos são idênticas e com isso, um critério de parada e taxa de convergência para o método de Maz'ia pode ser considerado sob dados perturbados, já que a análise foi feita apenas para dados exatos. Logo, conclui-se que o método de Maz'ia é um método de regularização após mostrar a igualdade entre as iterações dos métodos.

Capítulo 3

A Relação Entre os Métodos de Maz'ia e Landweber

A relação entre os métodos de Maz'ia e de Landweber encontrada é a de que as iterações calculadas desses algoritmos de ponto fixo são idênticas, isto é, $L(\varphi) = T(\varphi)$, $\forall \varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$, com L e T sendo os operadores do algoritmo de Landweber e Maz'ia, respectivamente. Demonstrar a igualdade $L(\varphi) = T(\varphi)$, $\forall \varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$, significa provar de fato que

$$\varphi + F_l^*(h - F_l(\varphi)) = T_l(\varphi) + T_0, \quad \forall \varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)';$$

onde $h = g - F_f$.

Como conclusão após provar essa igualdade, tem-se que para dados com ruídos (f^δ, g^δ) tais que

$$\|f - f^\delta\|_{L^2(\Gamma_1)} + \|g - g^\delta\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'} \leq \delta,$$

pode-se observar a estabilidade do método e, assim, usar como critério de parada o princípio da discrepância para ver que o método de Maz'ia é um método de regularização e tem a mesma taxa de convergência que o método de Landweber.

Para estabelecer a igualdade das iterações os três lemas a seguir se fazem necessários. O primeiro deles calcula $F_l^*(\psi)$, $\forall \psi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$.

Lema 3.1 *Sejam $\psi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ e $q \in H^1(\Omega)$ solução do problema de valor de contorno (bem posto [A.1])*

$$\Delta q = 0, \quad \Omega; \quad q|_{\Gamma_2} = 0; \quad q_\nu|_{\Gamma_1} = \psi.$$

Então, tem-se que $F_l^*(\psi) = q_\nu|_{\Gamma_2}$.

Demonstração: Seja $(\psi, \varphi) \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$. Sejam $v, w, q, r \in H^1(\Omega)$ soluções dos seguintes problemas de valor de contorno

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0, \quad \Omega; \quad v|_{\Gamma_1} = 0; \quad v_\nu|_{\Gamma_2} = \varphi; \\ \Delta w &= 0, \quad \Omega; \quad w_\nu|_{\Gamma_1} = v_\nu|_{\Gamma_1}; \quad w|_{\Gamma_2} = 0; \\ \Delta q &= 0, \quad \Omega; \quad q_\nu|_{\Gamma_1} = \psi; \quad q|_{\Gamma_2} = 0; \\ \Delta r &= 0, \quad \Omega; \quad r|_{\Gamma_1} = 0; \quad r_\nu|_{\Gamma_2} = q_\nu|_{\Gamma_2}; \end{aligned}$$

respectivamente.

Então, utilizando a fórmula de Green [A.4]

$$\int_{\Omega} \Delta uv dx = \int_{\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2} u_\nu v d\partial\Omega - \int_{\Omega} (\nabla u)^t (\nabla v) dx;$$

e as condições de fronteira dos problemas de valor de contorno acima, têm-se que

$$\begin{aligned} \langle F_l(\varphi), \psi \rangle_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'} &= \int_{\Omega} (\nabla w)^t (\nabla q) dx \\ &= \int_{\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2} w_\nu q d\partial\Omega \\ &= \int_{\Gamma_1} w_\nu q d\partial\Omega \\ &= \int_{\Gamma_1} v_\nu q d\partial\Omega \\ &= \int_{\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2} v_\nu q d\partial\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\nabla v)^t (\nabla q) dx; \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, q_\nu |_{\Gamma_2} \rangle_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'} &= \int_{\Omega} (\nabla v)^t (\nabla r) dx \\
&= \int_{\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2} v r_\nu d\partial\Omega \\
&= \int_{\Gamma_2} v r_\nu d\partial\Omega \\
&= \int_{\Gamma_2} v q_\nu d\partial\Omega \\
&= \int_{\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2} v q_\nu d\partial\Omega \\
&= \int_{\Omega} (\nabla v)^t (\nabla q) dx.
\end{aligned}$$

Logo, vale que $\langle F_l(\varphi), \psi \rangle_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'} = \langle \varphi, q_\nu |_{\Gamma_2} \rangle_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'}$, ou seja, $F_l^*(\psi) = q_\nu |_{\Gamma_2}$. ■

Os próximos dois lemas visam facilitar a demonstração da igualdade entre as iterações de ponto fixo de Maz'ia e de Landweber.

Lema 3.2 *Para $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$, tem-se que $F_l^* F_l(\varphi) = \varphi - T_l(\varphi)$.*

Demonstração: Seja $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$. Sejam $v, w \in H^1(\Omega)$ soluções dos seguintes problemas de valor de contorno

$$\begin{aligned}
\Delta v &= 0, \quad \Omega; \quad v |_{\Gamma_1} = 0; \quad v_\nu |_{\Gamma_2} = \varphi; \\
\Delta w &= 0, \quad \Omega; \quad w_\nu |_{\Gamma_1} = 0; \quad w |_{\Gamma_2} = v |_{\Gamma_2};
\end{aligned}$$

respectivamente.

Então, têm-se que $F_l(\varphi) = v_\nu |_{\Gamma_1}$ e que $T_l(\varphi) = w_\nu |_{\Gamma_2}$, por definição dos operadores lineares F_l e T_l . Além disso, definindo $q := v - w$, ou seja, $q \in H^1(\Omega)$ é solução do problema de valor de contorno misto

$$\Delta q = 0, \quad \Omega; \quad q_\nu |_{\Gamma_1} = v_\nu |_{\Gamma_1}; \quad q |_{\Gamma_2} = 0;$$

tem-se que $F_l^*(v_\nu |_{\Gamma_1}) = q_\nu |_{\Gamma_2}$, pelo lema anterior.

Portanto, como $q_\nu |_{\Gamma_2} = (v - w)_\nu |_{\Gamma_2} = v_\nu |_{\Gamma_2} - w_\nu |_{\Gamma_2} = \varphi - T_l(\varphi)$, tem-se que $F_l^* F_l(\varphi) = \varphi - T_l(\varphi)$. ■

Agora, o último lema antes do teorema principal deste capítulo.

Lema 3.3 Para o par de dados de Cauchy $(f, g) \in H^{1/2}(\Gamma_1) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ consistente, tem-se que $F_l^*(h) = T_0$, em que $h = g - F_f$.

Demonstração: Sejam $v, w \in H^1(\Omega)$ soluções dos seguintes problemas de valor de contorno

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0, \quad \Omega; \quad v|_{\Gamma_1} = f; \quad v_\nu|_{\Gamma_2} = 0; \\ \Delta w &= 0, \quad \Omega; \quad w_\nu|_{\Gamma_1} = g; \quad w|_{\Gamma_2} = v|_{\Gamma_2}; \end{aligned}$$

respectivamente.

Então, têm-se que $F_f = v_\nu|_{\Gamma_1}$ e que $T_0 = w_\nu|_{\Gamma_2}$, por definição. Note que, definindo $r := w - v$, $r \in H^1(\Omega)$ é solução do problema de valor de contorno misto (bem posto [A.1])

$$\Delta r = 0, \quad \Omega; \quad r_\nu|_{\Gamma_1} = g - v_\nu|_{\Gamma_1}; \quad r|_{\Gamma_2} = 0;$$

assim, tem-se que $F_l^*(h) = r_\nu|_{\Gamma_2} = (w - v)_\nu|_{\Gamma_2} = w_\nu|_{\Gamma_2}$

Portanto, $F_l^*(h) = T_0$. ■

Assim, com essas ferramentas, o teorema a seguir é facilmente demonstrado.

Teorema 3.1 Para $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$, tem-se que $L(\varphi) = T(\varphi)$.

Demonstração: Note que $L(\varphi) := \varphi + F_l^*(h - F_l(\varphi)) = \varphi + F_l^*(h) - F_l^*F_l(\varphi)$. Como $F_l^*F_l(\varphi) = \varphi - T_l(\varphi)$, tem-se que $L(\varphi) = F_l^*(h) + T_l(\varphi)$. Mas $F_l^*(h) = T_0$, assim, $L(\varphi) = T_l(\varphi) + T_0$. Logo, como $T(\varphi) = T_l(\varphi) + T_0$, conclui-se que $L(\varphi) = T(\varphi)$, $\forall \varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$. ■

Então, conclui-se assim, além da estabilidade do método de Maz'ia, que deve-se utilizar o princípio da discrepância como critério de parada para o algoritmo de Maz'ia, se fornecido somente dados com ruídos. Para a estabilidade, basta observar usar a igualdade entre as iterações e seguir as linhas da demonstração para o método de Landweber.

De fato, note que se (f^δ, g^δ) é um par de dados tais que

$$\|f - f^\delta\|_{L^2(\Gamma_1)} + \|g - g^\delta\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)} \leq \delta,$$

para (f, g) um par de dados consistente, então pode-se calcular o termo $h^\delta = g^\delta - F_{f^\delta}$ tal que

$$\|h - h^\delta\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'} \leq \delta.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \|\varphi_{k+1}^\delta - \varphi_k^\delta\|_* &= \|T(\varphi_k^\delta) - \varphi_k^\delta\|_* \\
 &= \|L(\varphi_k^\delta) - \varphi_k^\delta\|_* \\
 &= \|F_l^*(h^\delta - F_l(\varphi_k^\delta))\|_* \\
 &\leq \|F_l^*\| \|h^\delta - F_l(\varphi_k^\delta)\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'} \\
 &\leq \|h^\delta - F_l(\varphi_k^\delta)\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'}.
 \end{aligned}$$

Assim, como as iterações dos algoritmos são de ponto fixo e são iguais, ou seja,

$$\varphi_{k+1}^\delta = T(\varphi_k^\delta) = L(\varphi_k^\delta), \quad k \in \mathbb{N},$$

então, como índice de parada para o método de Maz'ia, basta escolher $\bar{k} = k(\delta, h^\delta)$ igual ao \bar{k} dado pelo princípio da discrepância utilizado no método de Landweber (aplicado ao problema inverso $F_l(\varphi) = h^\delta$) e concluir a mesma taxa de convergência $k(\delta, h^\delta) = \mathcal{O}(\delta^{-2})$ para o método de Maz'ia. Para isso, basta seguir os passos da demonstração do teorema sobre o índice de parada finito e taxa de convergência para o método de Landweber.

Portanto, tem-se que o método de Maz'ia é também um método de regularização e a taxa de convergência concluída é a mesma do método de Landweber.

Vale notar que as demonstrações omitidas nessa última discussão seguem exatamente as mesmas linhas, observando apenas a igualdade entre as iterações.

Assim, a igualdade entre as iterações dos métodos foi fundamental para terminar a análise do método de Maz'ia.

Considerações Finais

Neste trabalho foi apresentado o problema de Cauchy elíptico e, analisado, segundo Hadamard, que o mesmo é um problema mal posto. O problema analisado foi o da reconstrução do traço de uma solução do problema de Cauchy sobre a parte da fronteira onde não se tinha dados; para este problema foram apresentados e analisados dois métodos capazes de resolvê-lo, o método de Maz'ia e o método de Landweber. Na análise do método de Maz'ia, foi demonstrado a análise de convergência para dados exatos utilizando uma topologia não usual sobre o espaço em questão. Após a análise completa do método de Landweber, ou seja, uma vez demonstrado que é um método de regularização e obtido a taxa de convergência, foi encontrada uma relação entre os métodos de Maz'ia e de Landweber. Sendo, assim, possível completar a análise do método de Maz'ia, isto é, sob dados com ruídos.

Dessa forma, pode-se considerar que a parte teórica está completa; portanto, para complementar, busca-se implementar devidamente esses métodos e fazer experimentos numéricos. Para além disso, em trabalhos futuros, abordar os métodos iterativos de regularização tipo Kaczmarz para o problema de Cauchy elíptico.

Referências Bibliográficas

- [1] ANDRIEUX, S.; BARANGER, T. N.; ABDA, A. B.. Solving Cauchy problems by minimizing an energy-like functional. **Inverse Problems**. v. 22, p. 115-133, 2006.
- [2] ENGL, H. W.; HANKE, M.; NEUBAUER, A.. Regularization of Inverse Problems. **Mathematics and Its Applications**. v. 375, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
- [3] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S.. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. **Grundlehren der mathematischen Wissenschaften**. v. 224, 2 ed., Springer-Verlag, Berlin e New York, 1983.
- [4] LEITÃO, A.. An iterative method for solving elliptic Cauchy problem. **Numerical Functional Analysis and Optimization**. v. 21, n. 5-6, p. 715-742, 2000.
- [5] LEITÃO, A.; BAUMEISTER, J.. An iterative methods for solving ill-posed problems modeled by partial differential equations. **Journal of Inverse and Ill-Posed Problems**. v. 9, n. 1, p. 1-17, 2001.
- [6] LION, J. L.; DAUTRAY, R.. Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. **Functional and Variational Methods**. v. 1, Springer-Verlag, Berlin e Heidelberg, 1985.
- [7] LION, J. L.; DAUTRAY, R.. Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. **Functional and Variational Methods**. v. 2, Springer-Verlag, Berlin e Heidelberg, 1988.

- [8] KOZLOV, V. A.; MAZ'YA, V. G.; FOMIN, A. V.. An interactive method for solving the Cauchy problem for elliptic equations. **Comput. Math. Phys.** v. 31, n. 1, p. 45-52, 1991.

Apêndice A

Resultados Auxiliares

Nesta parte do trabalho, está apresentado os enunciados dos resultados utilizados os quais não convêm enunciar-los ou demonstrá-los ao longo do texto.

A existência, unicidade e a dependência contínua dos dados do seguinte problema de valor de contorno misto

$$\Delta u = 0, \quad \Omega; \quad u|_{\Gamma_1} = f; \quad u_\nu|_{\Gamma_2} = g;$$

para o par de dados $(f, g) \in H^{1/2}(\Gamma_1) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$ (com Ω , Γ_1 e Γ_2 como utilizados durante o texto), segue de um teorema do tipo Lax-Milgram, cuja demonstração pode ser encontrada através de [4].

Proposição A.1 *Para cada par de dados $(f, g) \in H^{1/2}(\Gamma_1) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$, o problema de valor de contorno misto*

$$\Delta u = 0, \quad \Omega; \quad u|_{\Gamma_1} = f; \quad u_\nu|_{\Gamma_2} = g;$$

tem solução única $u \in H^1(\Omega)$. Além disso, vale que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left(\|f\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} + \|g\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'} \right).$$

Para demonstrar a **proposição 1.1** é necessário o princípio da reflexão de Schwarz [3]:

Proposição A.2 *Seja Ω^+ um subdomínio do semiespaço $x_n > 0$ tendo como parte da fronteira uma seção aberta T do hiperplano $x_n = 0$.*

Suponha que u seja uma função harmônica em Ω^+ e contínua em $\Omega^+ \cup T$ com $u = 0$ em T . Então, a função

$$U(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} u(x_1, \dots, x_n), & x_n \geq 0; \\ u(x_1, \dots, -x_n), & x_n < 0; \end{cases}$$

é harmônica no domínio $\Omega^+ \cup T \cup \Omega^-$, onde Ω^- é a reflexão de Ω^+ sobre $x_n = 0$, isto é, $\Omega^- := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; (x_1, \dots, -x_n) \in \mathbb{R}^n\}$.

Um resultado importante na definição dos operadores envolvidos na definição dos métodos de Maz'ia e Landweber é o teorema do traço [4]:

Proposição A.3 *O operador do traço de Neumann definido sobre o espaço $C^\infty(\bar{\Omega})$ com imagem no espaço $C^\infty(\Gamma_j)$, $i = 1, 2$ tem uma única extensão definida por*

$$\gamma_{N, \Gamma_i} : H^1(\Omega) \longrightarrow H_{00}^{1/2}(\Gamma_i)';$$

para $i = 1, 2$.

A proposição seguinte foi largamente utilizada nas demonstrações de todo o trabalho, a seguinte fórmula de Green, cuja demonstração pode ser obtida através de [4]:

Proposição A.4 *Dados $u \in H^1(\Omega)$ e*

$$v \in \left\{ v \in H^1(\Omega); \gamma_{N, \Gamma_i}(v) \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_i); i = 1, 2 \right\};$$

então vale que

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2} u_\nu v d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla v)^t (\nabla u) dx.$$

O último resultado neste apêndice é essencial para a análise de convergência do método de Landweber, na **proposição 2.5**, a demonstração encontra-se em [p. 72, 2].

Proposição A.5 *Seja, para todo $\alpha > 0$ e algum $\epsilon > 0$, a função definida por $g_\alpha : [0, \|T\|^2] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que satisfaça as seguintes condições: g_α é contínua por partes; $\exists c > 0$ tal que*

$$|\lambda g_\alpha(\lambda)| \leq c;$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} g_\alpha(\lambda) = 1/\lambda;$$

para todo $\lambda \in (0, \|T\|^2]$. Então, para todo $y \in R(T^\dagger)$, tem-se

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} g_\alpha(T^*T)T^*y = x^\dagger;$$

onde $x^\dagger = T^\dagger(y)$. Se $y \notin D(T^\dagger)$, então $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|g_\alpha(T^*T)T^*y\| = +\infty$.