J. BANDET - R. SARAZANAS - M. ABBADIE

HACIA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

48539

372
B16r.

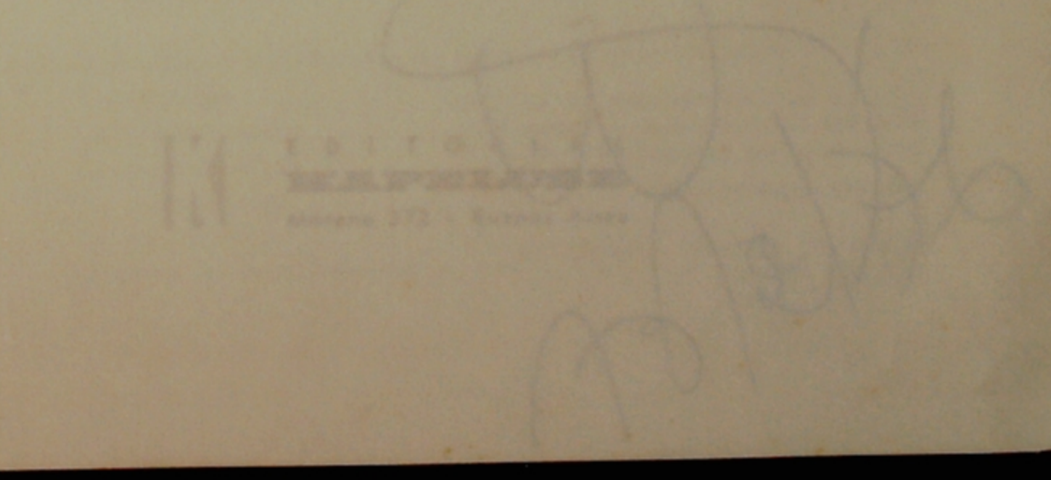
BIBLIOTECA PARTICULAR
WALDEMAR ENS
N.º 1221 | 81

BIBLIOTECA PARTICULAR

COLECCIÓN DE PEDAGOGÍA PRÁCTICA

J. BAINDET - R. SARAZANAS
M. ADRADE

HACIA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS



J. BANDET - R. SARAZANAS -
M. ABBADIE

HACIA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

EDITORIAL
KAPELUSZ
Moreno 372 · Buenos Aires

Versión castellana de
VERS L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES
© Librairie Armand Colin, 1967. Paris.
Traducción de *IRIS UCHA DE DAVIE*

Todos los derechos reservados por (©, 1969)
EDITORIAL KAPELUSZ, S. A. – Buenos Aires.
Hecho el depósito que establece la ley 11.723.

Publicado en agosto de 1969.

LIBRO DE EDICIÓN ARGENTINA
Printed in Argentina

ÍNDICE

Introducción 1

1. De las actividades espontáneas a la técnica del cálculo 5
   1. El cálculo en la vida cotidiana 9
   2. Las primeras nociones matemáticas 13
   3. Elementos de un programa 17
   4. Caracteres generales del método propuesto 20

2. Iniciación a la matemática mediante análisis de situaciones vividas ... 25
   1. El cálculo en la vida cotidiana 25
   2. Organización del espacio 32
   3. Del juego libre al lenguaje y a la construcción de conjuntos 33
   4. Situar un lugar con respecto a coordenadas 36
   5. En momentos libres 38
   6. Las relaciones 40
   7. Las intersecciones 41
   8. Conjuntos equipotentes 44
   9. Recortado 49
   10. Representación simbólica 53
   11. Representación simbólica de un cuento 65
   12. El conjunto de los alumnos de la clase y los "pequeños grupos" 73
   13. El número 77
   14. Ejercicios sobre los números 80
   15. A) Cálculo mental y operaciones 85
   15. B) Las operaciones: los álbumes ilustrados 94
   16. Problemas resueltos en una clase 97
   17. Un juego de relaciones 100

3. Naturaleza, orden y construcción de las adquisiciones matemáticas ... 103
   Introducción 103
   La primera etapa 106
   La segunda etapa 121
   La tercera etapa 134
   La cuarta etapa 146
   Cuadros de recapitulación 161

4. Algunos detalles sobre el sentido dado a ciertos términos utilizados en esta obra 170
1. Los conjuntos 170
2. Los números 174
3. Lógica 181

APÉNDICE: Estudio crítico de algunos materiales 183
Los bloques lógicos 183
Los números de color 187
El método Discat 190

Bibliografía 196

INTRODUCCIÓN

CONTRIBUCIÓN A UN TRABAJO EN COMÚN

Los pequeños alumnos de los jardines de infantes tienen una suerte extraordinaria: cualquiera sea la edad de sus maestras, éstas son eternamente jóvenes; viven siempre el presente, sienten el deseo de conocer los métodos que psicólogos e investigadores tratan de adaptar a esta época, para aplicarlos en sus técnicas educativas. Rodeadas de niños, cuyo crecimiento es tan evidente, también ellas parecen tentadas de crecer –espiritualmente ahora– para ayudar al desarrollo, no de escolares abstractos, sino de aquellos que a su lado esperan, sin saberlo, que los preparen para aprender a vivir.

Así pues, estas maestras se transforman en aquello que permite inspirar y luego experimentar las investigaciones que los especialistas de la pedagogía conciben y animan. Las condiciones en las cuales ejercen su oficio, las circunstancias en que persiguen y aseguran su formación profesional hacen posible la asociación de teóricos y técnicos, el vaivén indispensable entre una hipótesis de trabajo y su verificación, la crítica sagaz de los métodos usados para llevar a la práctica esas hipótesis y sus progresos.

En el aprendizaje de la matemática –más tal vez que en el caso de otras disciplinas– vemos cuán eficaz puede ser esa unión. Sería curioso establecer la historia del interés que ha provocado la transformación moderna de esta ciencia entre aquellos que, por su profesión, parecían tan alejados de ella. Primero en una escuela, después en diez, en cien, se han querido sustituir los mecanismos tradicionales de cálculo por una conciencia profunda (de efectos seguros a más largo plazo) de un cierto orden de cosas. Se ha intentado reemplazar así reglas por nociones bien comprendidas. Sobre todo, se ha deseado saber claramente qué había que enseñar con prioridad, qué camino tomar en seguida para llevar al niño más allá de la memorización de los números y de la práctica de las operaciones.

Esta voluntad de progresar es una voluntad colectiva. Ninguna maestra ha pensado en guardar para sí el resultado de estos ensayos: en los círculos de trabajo se han estudiado investigaciones e incertidumbres.

Obras, materiales, documentos diversos se han reunido y confrontado. Períodos de práctica, jornadas de trabajo, demostraciones, han permitido lograr información y crítica. Se han organizado legajos de documentos. Por medio de filmaciones tomadas en el transcurso de ejercicios, se han podido seguir las actividades de mayor éxito.

Es necesario difundir más aún las enseñanzas que algunos han descubierto y que todos habrían deseado encontrar. Tratando de aportar una nueva contribución a esta tarea común, hemos pensado que sería necesario retomar lo que se ha dicho o escrito aquí o allá; agrupar las informaciones más apropiadas para revivificar el aprendizaje de los números que, bajo una forma adaptada entonces a su tiempo, logró en el pasado el renombre de la escuela primaria a la cual estamos tan unidos.

Este trabajo es, pues, por sus raíces, la obra de un grupo, de un vasto "conjunto" de maestras e inspectores de jardines de infantes. Todos ellos están animados por la misma fe, por el mismo deseo de responder a la expectativa de los alumnos, de colmar su curiosidad, de guiarlos hacia el conocimiento. En el prefacio de otra obra recientemente publicada,[1] *he expresado esta idea, que me es muy cara: en esta época, sólo el trabajo de un equipo puede autorizar la elaboración de una doctrina pedagógica. Y ya que vamos a tratar de "conjuntos" en el curso de esta obra, digamos que el más importante de todos, para reformar desde su comienzo el aprendizaje de la matemática, será el formado por las educadoras de los niños.*

Cualquiera sea el tema de su investigación pedagógica, el camino debe ser para ellas el mismo: convencerse primero de que la acción educativa no puede instaurarse sin reflexión previa: no se va a la técnica sin una idea. *Saber en seguida que cuando se trata de educar a un niño no hay que situarse intransigentemente en el campo de tal o cual doctrina y, por lo tanto, contra tal otra. No hay adversarios entre nosotros, ni deseo de hacer triunfar una sola causa. Para hablar en términos de publicidad moderna, "no seremos" ni Dienes ni Cuisenaire, solamente: "Vida cotidiana" o "Construcción lógica". Creemos que trabajando juntos descubriremos que la educación tiene ahora, como siempre, exigencias diferentes pero reales; no se las satisface pasando de una a otra, porque esta yuxtaposición introduciría incoherencia en el trabajo, si no contradicción. Parecería que entre las dos tendencias en la enseñanza del cálculo hubiera aparecido ya una conciliación (simplificando podemos decir que una tiende a la utilización de las actividades espontáneas del niño, y la otra a un ejercicio más sistemático de su lógica). Pero es menester ir más allá, resolver las oposiciones que aún subsisten, reemplazar el compromiso actual por una síntesis más fuerte que prepare un nuevo avance.*

Esta asimilación, este acuerdo, que querríamos lograr en esta obra, son su fin esencial. Aquí encontrarán los lectores la exposición sucesiva de los problemas relativos al espíritu del método y luego a su aplicación, es decir:

[1] *L'éducation physique des enfants de 3 à 7 ans.* (Colección "Cahiers de pédagogie moderne". A. Colin - Bourrelier.)

- *la presentación de los principios pedagógicos que permiten, en el aprendizaje de la matemática, conducir al niño de las actividades espontáneas a la técnica del cálculo;*
- *ejemplos de aproximación a nociones matemáticas por el análisis de situaciones vividas;*
- *la naturaleza, el orden y la organización de las adquisiciones matemáticas de los niños de 3 a 7 años.*

En esta nueva edición se han modificado algunos términos, para mayor conformidad con el vocabulario actualmente empleado por los profesores de matemática. Agradecemos a nuestros amigos especialistas de esa disciplina, que estudiaron con interés nuestro trabajo, las oportunas observaciones que nos permitieron eliminar lo que habría podido parecer discutible en el lenguaje utilizado. Se han empleado términos voluntariamente aproximados, teniendo en cuenta las personas que están aún poco al tanto de la "matemática moderna".

J. BANDET
Inspectora General
de Instrucción Pública

Nuestro reconocimiento va particularmente dirigido al señor Walusinski, cuya ayuda para los jardines de infantes es, en todo momento, muy preciosa.

1

DE LAS ACTIVIDADES ESPONTÁNEAS A LA TÉCNICA DEL CÁLCULO

"Nada más cercano al tanteo, nada más empírico (al menos en apariencia), que la instauración de un orden entre las cosas; nada que exija una mirada más atenta, un lenguaje más fiel y mejor modulado; nada que demande con más insistencia que uno se deje llevar por la proliferación de las cualidades y de las formas. Y sin embargo una mirada que no fuera perspicaz podría muy bien reunir algunas figuras semejantes y separar otras en razón de tal o cual diferencia; en efecto, no existe, ni siquiera para la experiencia más ingenua, una sola similitud, una sola distinción que no resulte de una operación precisa y de la aplicación de un criterio previo...

...El orden es, a la vez, lo que se presenta en las cosas como su ley interior, la red secreta según la cual dichas cosas se miran, en cierto modo, las unas a las otras; y también aquello que sólo existe a través del filtro de una mirada, de una observación, del lenguaje. Es solamente en los cuadros blancos de este tablero en donde el orden se manifiesta en profundidad, como allá, esperando en silencio el momento de ser enunciado."[1]

De esto se trata en la primera etapa de la matemática: el conocimiento de las cosas, de sus formas, de sus cualidades; el descubrimiento –no obstante las disimilitudes– de la "ley interior" que les es propia. Pero este orden no puede presentirse sino por medio de otra ley, la del espíritu. Y es por esta razón que desde el comienzo del aprendizaje están en juego, simultáneamente, una cierta experiencia activa de los objetos que rodean al niño y un ejercicio de las funciones mentales que harán aparecer de las *propiedades* de las cosas y de sus *relaciones*, un *ordenamiento* y una *estructura* que él no reconocería sin esa doble actividad, concreta y lógica alternativamente.

Doble interés también, no ya dirigido solamente hacia el conocimiento, que podríamos denominar *individual*, de un elemento y de sus propie-

[1] Michel FOUCAULT, *Les mots et les choses*, pág. 11 (Gallimard).

dades particulares, sino también hacia el conocimiento, más general, de las *clases* que esos elementos agrupados pueden formar y las *relaciones* que pueden establecerse entre ellas. En esto, especialmente, consiste la transformación del estudio de la matemática, a nivel de los niños. ¿Cómo se va a manifestar este cambio?

Antes de entrar en detalles sobre el método yo querría señalar que los primeros conocimientos matemáticos del niño se desprenden de los objetos particulares del mundo que lo rodea. En el universo de su existencia es seguro que sus sentimientos, sus hábitos, lo impulsan a investigar esos objetos para su propio placer; su contemplación lo llevará a la ensoñación, y sabrá jugar, adueñándose de ellos en cierta forma, y se convertirán, poco a poco, en partes de sí mismo. Más que cosas, son seres con los cuales él se comunica, y no es por azar que poetas y filósofos le acuerdan, en la vida actual del hombre, un papel preponderante a esta amistad con los objetos.

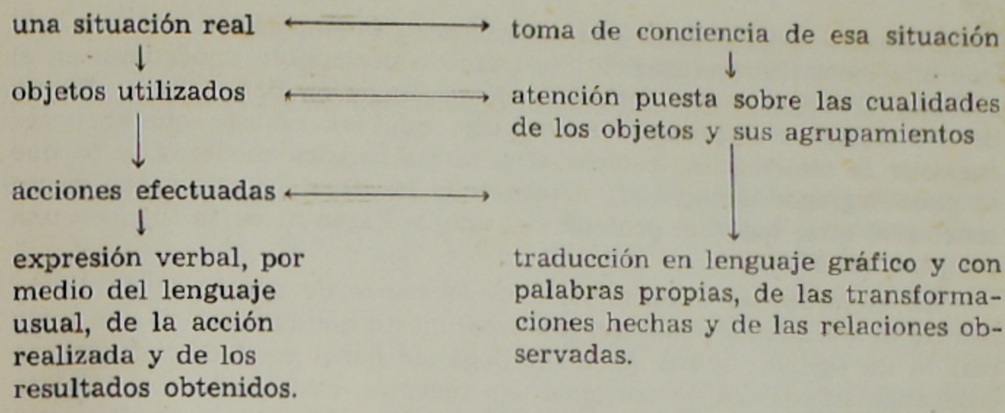
Para otros elementos o en otras circunstancias, el juego, la acción, la observación son utilizados y provocados por él. El niño los ve muy distintos a él: sus ojos, sus manos, distinguen en ellos formas, colores, espesores, pesos. Las propiedades que percibe las vuelve a encontrar, parecidas, en objetos diversos. Su mente las junta o las separa. Esta comparación lo conduce a hacer grupos, pero también series, que él verá crecer o decrecer. Lo que se ha llamado *magnitudes continuas* lo conducirá al conocimiento de las formas, del espacio, luego a los números que las miden. Mientras que otros objetos, reunidos en colecciones o montones, lo llevarán hacia la noción de conjuntos y después a los números que los cuentan.

El camino por recorrer va, pues, de los objetos (elementos y conjuntos) a sus relaciones y luego a los números. Se parte de la exploración de las propiedades que poseen los objetos y sus conjuntos; es necesario, para esto, actuar sobre ellos, pero al mismo tiempo examinarlos. En el jardín de infantes, la base de la matemática es una realidad, un dato físico. Sólo progresivamente llegaremos a la noción y a la operación mental. "En una primera etapa, el sujeto aparece simplemente como aquel que descubre; en una segunda etapa se descubre, envuelto él mismo en el sistema que interpreta, simple servidor de la estructura."[2]

El método de aproximación es, pues, el del conocimiento experimental, motivado por las necesidades del niño y condicionado por su medio. Este método supone *actos* (juego o trabajo); una *atención particular* puesta no solamente sobre todo el objeto, sino sobre algunas de sus propiedades (comienzo de análisis); la *observación continua* de las transformaciones que pueden sufrir las cualidades de las cosas y las modificaciones de sus agrupamientos. El método sólo queda completo con *la expresión figurada o verbal* de lo que se ha hecho, examinado y comprobado.

Entre las actividades concretas del niño y los ejercicios mentales relacionados se podrían establecer las sucesiones habituales y las relaciones, así como los niveles progresivamente alcanzados, sin creer, sin embargo, que esas sucesiones y esos niveles se presentan en el mismo orden en el caso de las diversas adquisiciones y en todos los niños.

[2] Robert PUAGAUD, *L'Arc*, nº 30.



Es importante poner de manifiesto las interacciones de las dos series de actividades y la necesidad de establecer una progresión y varias etapas para adaptarse al desarrollo de los niños, y realizar el mismo ejercicio, de preferencia –según las necesidades del medio y del momento– en el plano concreto o en el plano mental. Los objetos se convierten, poco a poco, en *representación* (construcción, dibujo), luego en *símbolo* (palabra, signo, cifra). Las diversas acciones se convierten en *operaciones*. Sería peligroso reducir cualquiera de estas formas de actividad.

Antes de ir más lejos, desearía inculcar confianza a *aquellas maestras que pudieran dudar de su competencia para el trabajo* que se les encomienda. Por cierto que siempre es conveniente tener conocimientos profundos sobre lo que se enseña; pero no es necesario haber hecho alta matemática para enseñar a los pequeños el comienzo del cálculo; por supuesto que no es necesario conocer la "teoría de los conjuntos", su vocabulario y sus símbolos. Además las palabras que se utilizan en ella son de uso común para todos. En particular, esa palabra *conjunto* –ya lo veremos– está en lo más profundo de nuestra experiencia cotidiana; del mismo modo, los términos como: *propiedad, atributo, relación, operación*, y también *inclusión* e *intersección*, ¿no tienen, acaso, para todos nosotros, un sentido bien definido que bastará aplicar a situaciones matemáticas muy simples, pero claramente precisas? Lo que hace falta saber en el jardín de infantes para orientar bien los comienzos del cálculo, está al alcance de todas las mentes, aun de aquellas que se juzgan más literarias o artísticas que científicas. Entre nosotros nadie debe pensar como Paul Valéry en su adolescencia: "Que la ciencia no es amor, que sus frutos son, tal vez, útiles, pero su follaje muy espinoso, su corteza horriblemente áspera".

Yo confío en poder demostrar que no hay nada de espinoso ni de áspero en el espíritu de lógica que deseamos introducir en nuestra enseñanza. Me siento tentada de hacer mía la salida de un promotor de la matemática moderna: "«Los conjuntos» parecen ser el terror actual, pero aquellos que los rechazan tan enérgicamente para sus niños, ¿han reflexionado que se trata simplemente de saber reconocer los objetos para clasificarlos en los cajones?".

No nos encontraremos, desde luego, con la dificultad que preocupa a las maestras de la escuela primaria y a los profesores de la secundaria.

Para ellos, la acogida dada a la matemática contemporánea significa más que una evolución pedagógica. Se trata de un cambio importante en el método, el lenguaje y el principio de organización del trabajo. En un debate reciente, el profesor Papy[3] dijo que era nefasto querer hacer coexistir la matemática tradicional y la matemática moderna, a lo que se puede agregar también el "desorden de los alumnos que pasan de un sistema al otro, según el profesor del año, y llegan al curso final en una completa confusión".[4]

En el jardín de infantes *tenemos la suerte de encontrarnos al comienzo de las adquisiciones del niño*; por cierto que él no es ni una tabla rasa ni un espíritu nuevo; pero nos llega sin haber recibido todavía una enseñanza sistemática de nociones. No tenemos, pues, nada que cambiar ni destruir de su formación anterior. Como lo podemos leer en el boletín de la *Association de professeurs de mathématiques*,[5] no tenemos nada que rechazar de aquello que consideraríamos un buen comienzo en el aprendizaje de los números. No deseamos ser revolucionarios; tal vez, sin embargo, queramos ser innovadores en ciertos aspectos, conformándonos –para emplear un lenguaje matemático– con una adición y, posiblemente, una transposición de términos en la sucesión de las nociones por aprender.

Yo querría *tranquilizar a aquellos que pudieran temer que la tendencia actual de la enseñanza de la matemática fuera el efecto de un capricho o de una moda*, o sea, un hecho pasajero. Deploro que hayan aparecido demasiados artículos de divulgación; que gran número de periodistas, con la enfermedad de la copia, hayan hablado de lo que no conocían, con tono falsamente jocoso. Se trata de una cosa seria y se podría demostrar por su historia que la transformación de la matemática es un fenómeno permanente, como el de cualquier otra ciencia, que en ningún momento pudo considerarse como definitiva.

Parece que en el curso de los siglos ha habido períodos sucesivos de creación, en los que espíritus eminentes entrevieron concepciones nuevas y fecundas después de largos años de maduración. Tales fueron: Pitágoras y Arquímedes, en la época del milagro griego; Descartes, en el siglo XVII, que puso el álgebra al servicio de la geometría y de la mecánica; más adelante, Gauss y Cauchy, cuyos trabajos parecían en su época difíciles de sobrepasar. Sin duda, nos encontramos ahora en un período en el que se trata de asimilar y extender las concepciones de esos grandes matemáticos, cuyos nombres son célebres en el mundo entero; el ruso Lobatchevsky dudó del postulado de Euclides; el alemán Hilbert elaboró una axiomática de la geometría; el francés Evariste Galois concibió las primeras estructuras algebraicas; Cantor (ruso) dio forma definitiva a la teoría de los conjuntos; en fin, el grupo francés que ha tomado por nombre el de Nicolás Bourbaki continúa investigando la unidad de la matemática. Parece haber llegado el momento de introducir en todos los grados de la enseñanza (desde el jardín de infantes hasta la universidad, según la fórmula tan extendida hoy) esta ciencia, cuyo contenido actual nos preguntamos si no es, en realidad, una etapa de una evolución que nos llevará a quién sabe qué progresos futuros.

Para la maestra del jardín de infantes, la investigación de un método adaptado a los niños pequeños *debe tener en cuenta otros conocimientos que no sean los datos matemáticos*; debe reflexionar sobre lo que tiene que enseñar, pero es necesario que esté informada de las posibilidades del niño, y no puede ignorar lo que éste tiene ocasión de aprender lejos de ella. *Material por estudiar, receptividad del espíritu infantil, influencias exteriores que actúan sobre el niño*, he ahí cuáles deben ser continuamente los temas de sus preocupaciones. Para resolverlos, sería necesario tomar sucesivamente el punto de vista del matemático, del psicólogo y del sociólogo. Ésta es la razón por la cual la puesta en marcha de un método no podrá hacerse sino por la colaboración estrecha de un grupo de investigadores, ayudados por la experimentación práctica de aquellas que forman a los niños.

¿Sobre qué bases vamos a trabajar, entonces, en el jardín de infantes?

1. EL CÁLCULO EN LA VIDA COTIDIANA

Para el aprendizaje de los números, como para cualquier otro aprendizaje, diversos caminos se ofrecen ante el niño. Cada vez más mezclados con la vida social, informados por los más variados medios, reciben primero, en contacto con los adultos, un número importante de enseñanzas. La primera educación del niño no es ya solamente familiar y escolar: se convierte ampliamente en social. Al mismo tiempo que la escuela institucional, actúa sobre él lo que Georges Friedmann ha llamado "la escuela paralela", que está hecha de acciones múltiples, pasajeras y mal coordinadas. Debemos tener en cuenta estas influencias, más aún, tal vez, para los pequeños que para los grandes, pues aquéllos sufren más intensamente su fuerza sugestiva, y les es imposible conocer, juzgar y, por consiguiente, combatir sus efectos.

Tratándose del aprendizaje de números, *¿cuál es el aporte de esos diversos medios?* El ambiente del niño lo lleva a ver, oír, actuar, de manera que penetra en el mundo de los números y de las operaciones. Se encuentra colocado en *situaciones matemáticas* y sumergido en un baño de *lenguaje* que las expresa. Descubre, bajo formas diversas y concretas, lo que en aritmética se denominan *magnitudes* (longitudes, superficies, volúmenes) y grupos de objetos. Interviene en estas magnitudes, ya sea por juego o por necesidad, y las compara, las agrupa, las separa, las ordena, puesto que los azares de la vida lo ponen en esas situaciones matemáticas. Dicho de otro modo, le plantean *problemas* que él se ve con-

[3] Profesor en la Universidad Libre de Bruselas. Debate organizado el 16 de diciembre de 1965 por la *Fédération de la Seine* de las Asociaciones de Padres de Alumnos de Liceos y Colegios.

[4] M. VIATTE, *Éducation national*, nº 774.

[5] Asociación de Profesores de Matemática, de Francia. *(N. del T.)*

ducido a resolver por medio de acciones prácticas, las que en el plano de la realidad son lo que llamará más tarde –a nivel de los números– las operaciones y el cálculo.

En esos encuentros ocasionales, el niño descubre también los *números*. En un artículo reciente[6] me ha sorprendido ver definido al jardín de infantes como "el país sin números". Nada más falso, pues nuestros pequeños los han descubierto fuera de la escuela, bajo una forma muy particular, pero que podríamos llamar "natural" y, en todo caso, propia de la infancia. Tal vez el número no sea al principio más que una palabra para el niño, pero la utiliza. El número no es, quizás, más que una figura, pero él la percibe; no es, tal vez, más que un seudo-número, pero el niño prefigura al verdadero. Al principio se le presentan al niño sólo números pequeños, inferiores a 5, que pronto se le hacen familiares; reconociéndolos y efectuando con ellos ordenamientos concretos, podrá imaginar otros números y otras operaciones. Podrá, también, por sobre el número cuyo sentido conoce, presentir la cifra y su valor de símbolo. Él ya sabe que ciertos signos numéricos designan una realidad: el número de la casa, el del ómnibus, el precio marcado sobre el paquete de caramelos, y toman rápidamente valor de lenguaje. Incluso conoce algunas veces la serie verbal de los números que los padres, los hermanos mayores, la radio, la televisión o los cuentos le han hecho escuchar, y hasta ciertos mecanismos que se fijan en su memoria sin tener para él ningún sentido: 2 y 1, 3; 2 por 2, 4, son fórmulas que a él le gusta repetir a veces, como un juego de palabras.

Esas palabras forman parte del *lenguaje matemático* que el chico emplea fácilmente. Encontramos aquí toda una serie de términos que expresan las cualidades de las magnitudes, o mejor aún, de las cantidades que las miden, y las operaciones prácticas correspondientes:

- *verbos:* juntar, agregar, alargar, tomar, sacar, suprimir, repetir, apartar, repartir, distribuir, etc.
- *sustantivos* que se refieren a las magnitudes continuas y a los conjuntos: un montón, una fila, una hilera, una línea, un trozo, una parte, el resto.

Toda una serie de expresiones corrientes que se refieren a las cantidades: adjetivos, pronombres, adverbios, locuciones adverbiales (mucho, no mucho, el más, menos).

¿Qué provecho podemos sacar de estas observaciones?

Primero, que es indispensable conocer esta suma de situaciones y de palabras que el niño ha explorado o adquirido en diversos medios y que continúa descubriendo, sin que nosotros lo sepamos. No lo podemos alimentar correctamente, en todos los sentidos del término, si no sabemos qué alimentos ha tomado primero. Desdeñar e ignorar lo que él sabe por otro intermedio distinto del nuestro es realmente condenable, pues revela una incomprensión peligrosa de nuestro papel. Actualmente, "el maestro no es sólo un emisor de conocimientos, es además un guía que ayuda al niño, en medio de las informaciones que lo sofocan, a escoger, a sintetizar y a utilizarlas en pro de sus intereses y de su desarrollo". (G. Friedmann.)

[6] *Éducation nationale*, nº 774.

Además, es necesario que la maestra conozca estas informaciones. Es menester *inventariarlas*, clasificarlas en las diversas etapas del desarrollo del niño, pero una maestra de jardín de infantes debe saber también *juzgarlas* para ejercitar a su respecto la selección y la síntesis de las que acabamos de hablar. Los conocimientos que el niño reúne espontáneamente son *imprecisos* y *multiformes*, porque se refieren a una acción particular y a un determinado instante; se expresan con una abundancia de términos que le impiden descubrir en ellos un hecho único. Dicho de otra manera: esos conocimientos están encerrados en lo concreto, y el niño no puede ver surgir la situación análoga o la propiedad común que ahí encontraría el adulto. Así, juntar, agregar, apilar, son juegos diversos, pero no siempre una suma. Dos personas que se dan el brazo no son ciertamente, para el niño, el grupo numérico que formarían yendo una detrás de la otra.

También hay que considerar que tales conocimientos son muy *subjetivos* y mezclados de *afectividad*. El sentido atribuido al lenguaje que los traduce es muy personal. ¿Qué pone nuestro pequeño alumno tras los términos: "grande", "pesado", "igual"? ¿Qué quiere decir cuando habla de muchos juguetes? ¿De su casa, que está lejos? ¿De sus fichas, que serán cinco, veinte o mil, según el momento?

Así, los conocimientos que aporta el ambiente son confusos, inciertos, afectivos, pero están ahí. Despreciarlos, significaría no comprender el sentido profundo de la primera educación que debemos impartir, que no es una formación escolar, es decir, separada de la existencia real del niño, sino una penetración en esa vida. "No se podría tener para esos niños dos vidas compitiendo o deteriorándose entre ellas, una vida escolar y una vida privada." (G. Friedmann.) Todos estos conocimientos, que el niño recibe de manera anárquica y desordenada, sin control, en un mundo que es el de los adultos y que, sin ser hecho para él, es su medio y fuente de saber, deben ser captados por la maestra, inventariados, juzgados. Su papel es, entonces, de ajuste, de coordinación y de complemento.

El jardín de infantes, que es también un medio de existencia cada vez más importante para los niños, facilita, por el desarrollo de sus acontecimientos y de sus ritmos, las oportunidades de penetrar en el dominio de los números, el cálculo, que es una de las dos piedras angulares del aprendizaje.

El cálculo es la utilización espontánea, natural y para fines prácticos, de los primeros datos numéricos. En los orígenes del pensamiento calculador encontramos, ligados a la vida material y a las formas sociales, conocimientos empíricos, precientíficos, pero prácticos y utilitarios. Una de las preocupaciones de los fundadores de la escuela primaria fue la de dar rápidamente al alumno esa herramienta cómoda y necesaria que constituía el cálculo. El mecanismo bien preparado de las operaciones tiene siempre su valor y su papel, y muchos hombres no tendrán necesidad de más matemática que ese cálculo, que manejarán con soltura y seguridad; pero hay que cuidarse mucho de no llegar a organizar prema-

turamente –por una mala interpretación de esas necesidades y posibilidades– mecanismos que excluyan la participación de la inteligencia en las situaciones matemáticas. La prolongación de la escolaridad permite dar ahora a todos los alumnos una formación de base, que les facilite más tarde el acceso a la verdadera matemática. Debe quedar bien entendido que: *por una parte, es necesario utilizar la vida real para extraer de ella el interés por los números. Este aspecto concreto, que marca bien el sentido original de la palabra cálculo,*[7] *debe tenerse en cuenta en nuestras escuelas y conservar en ellas su lugar*; pero, por otra parte, *debe organizarse y extenderse hacia otra formación que, alejando provisoriamente mecanismos y utilitarismo, tenga por ambición preparar el espíritu del niño para que conciba el número* de una manera distinta a como lo encuentra en la calle. De esta introducción a "la matemática" trataremos en seguida.

Pero yo querría hacer notar, antes de examinar esta segunda base fundamental de la formación matemática, que el doble método utilizado para el aprendizaje de los números es muy característico de nuestro sistema actual de educación en el jardín de infantes, donde no se separan en sectores diferentes las actividades que provocamos en el niño. La acción del jardín de infantes no es un total de disciplinas; es una forma de vida que encauza el interés del niño tan pronto hacia ciertas adquisiciones como hacia otras, que se inserta en la existencia de los pequeños para enriquecerla y ordenarla. Toda verdadera educación consiste en la tentativa de simplificar y de unificar la masa de materiales reunidos por el niño. Así, ayudémoslo a pasar de los balbuceos y de la jerigonza al verdadero lenguaje; de los mamarrachos informes a la escritura precisa y al dibujo significativo; de la sincinesis primitiva de los movimientos al gesto adaptado y logrado; del paso vacilante y caprichoso al caminar seguro; sin destruirle el placer que debe conservar por lo inexpresable y por la divagación, es necesario que el maestro ejerza su influencia sobre el aporte del niño para que éste conquiste, por el juego de la abstracción y de la lógica, la clasificación y la elegancia del pensamiento. Mientras la existencia cotidiana ponga al niño, brutalmente y sin orden, en contacto con todos los problemas que plantean los números y sus aplicaciones, debemos esforzarnos, en la escuela, por adaptar poco a poco la enseñanza a la naturaleza de la materia por enseñar, y también al desarrollo de la inteligencia y de la sensibilidad del niño. Al conocimiento abstracto y desinteresado precede una cierta técnica, como para toda conquista intelectual, formada por la vida y utilizada por ella; pero el uno se nutre de la otra y vuelve a aquél; ambos se apuntalan y se vivifican mutuamente.

[7] Del latín *calculus*, piedrecilla, por contarse antiguamente con piedrecillas. *(N. del T.)*

2. LAS PRIMERAS NOCIONES MATEMÁTICAS

Al lado del cálculo, o más bien, en el cálculo, colocamos la matemática.

La primera pregunta que debemos formularnos es la cuestión clave de este nuevo aspecto del método: *Queremos enseñar el número; pero, ¿qué es el número?* Es sorprendente que no se haya subrayado antes en nuestra pedagogía que el número es una propiedad, por lo tanto, una abstracción; y que para llegar al número hay que pasar por la realidad de la cual es una cualidad. Esta realidad son las agrupaciones de objetos; son los conjuntos. El número, cualquiera sea, incluso 1 ó 0, no se aplica a un objeto definido, sino a un grupo, ya se trate de cosas, seres o conceptos. "Existe un mundo intermedio entre el mundo de los objetos y el de los números: es el mundo de los conjuntos. Hasta no hace mucho, este mundo no formaba parte de las situaciones vividas en nuestras escuelas." Debemos explicar "cómo se pueden introducir los conjuntos en primer lugar, de manera de servirnos de ellos en seguida para construir los números". (Dienes.)

A aquellos que temen que orientar la atención de los niños hacia un conjunto pueda significar atraerlos demasiado precozmente hacia una abstracción, les responderé que los conjuntos pueden sentirse como realidades. El lenguaje corriente nos da múltiples pruebas de ello. Ha creado toda una serie de términos para designar esas colecciones, grupos o reuniones que son la forma viva de los conjuntos que, distintos, por supuesto, de los elementos que los componen, son a la vez una abstracción y un objeto nuevo. Cuando se trata de hombres decimos, según el caso, pueblo, clan, asamblea o compañía. Un auditorio, que luego sale a la calle, será probablemente una multitud, donde cada uno es también miembro de una familia, de una escuela, de una corporación, de un sindicato. En los sistemas fuertemente organizados, como el ejército, se incluyen grupos de hombres en los conjuntos más numerosos: así vamos, del grupo a la sección, a la compañía, al batallón, al regimiento, a la brigada, a la división, al ejército, y esto constituye la tropa hecha de soldados, y, cosa notable, estos grupos se denominan a veces unidades. Es un juego muy divertido y altamente instructivo el de buscar así los conjuntos de hombres que han merecido ser designados con un nombre; ver por qué se puede definir el grupo considerado; preguntarse lo que incluye y lo que excluye. A veces lo que caracteriza este conjunto es el número, y entonces hablamos de yuntas, de pares, de dúo, de trío o de trinidad, de cuarteto o de cuarteta y aun (por abuso de término) de cuarterón. Está la decena y la docena. Ha habido centurias y a veces imaginamos miríadas de estrellas. Con respecto a los animales, a las plantas y a las cosas, podríamos demostrar cuán rica es nuestra lengua en términos que prueban que con frecuencia reunimos a aquéllos en grupos. Las categorías gramaticales: sustantivo propio y sustantivo común, plural y singular, demuestran que constantemente pensamos de una manera que yo llamaría social. De este modo,

las *necesidades de nuestra existencia o las de nuestro pensamiento nos conducen a agrupar los elementos, de cualquier naturaleza que sean, con respecto a un criterio que elegimos de acuerdo con el punto de vista desde el cual nos hayamos ubicado. Estos agrupamientos tienen propiedades y constituciones peculiares y a veces existen relaciones entre ellos. Como el señor Jourdain*[8] *en la prosa, nosotros hacemos conjuntos sin saberlo.*

Con todo esto he querido demostrar que el trabajo más sistemático y más progresivo que vamos a introducir en el jardín de infantes no aleja al niño de la realidad, como podría temerse. Permite, por el contrario, utilizarla, poniéndola en evidencia con precisión. No traba las actividades espontáneas, sino que se integra con ellas. Siguiendo el camino que vamos a trazarle, entre los objetos y los seres de su ambiente, se introducirá en el campo del pensamiento racional, lo que es muy natural que suceda, ya que de lógica se trata.

La primera etapa consiste, pues, en darle al niño la noción de conjuntos, haciendo que los descubra a su alrededor. Muchos son los ejemplos que le van a permitir tomar conciencia de ellos. Por empezar, el grupo infantil mismo le proporcionará la reunión de cosas y el objeto, es decir, el conjunto y el elemento; y también el universo en el cual se ubican los niños. Es necesario, pues, atraer la atención hacia los *diversos grupos* de los cuales forman parte: el jardín de infantes, la clase (de los grandes, de los medianos, de los pequeños, de la señorita X, de la señorita Z), la familia, el barrio (por la dirección que toman al salir de la escuela; el sentido, etc.).

También se les puede dar la noción de conjunto por la de *propiedad*: en el guardarropa, por lo que es de uno y lo que es de otro; por la de *uso*: lo que sirve para comer, para dormir; por *el espacio ocupado*: lo que ponemos sobre la mesa de pintura, en el rincón de los juguetes, en el estante para la lectura. ¡Es precisamente empezando por ordenar los cajones en el jardín de infantes que uno se va acercando a Cantor!

Para los niños más pequeños es bueno que el lugar de guardar las cosas tenga una relación directa con lo que ahí se pone, para que ellos sientan mejor que el grupo formado tiene una propiedad común; se pone en un plato los que se come; en las cajas, los juguetes; en un garaje o en la calle, los autos; en las bibliotecas, los libros. Esta materialización del conjunto por la naturaleza de su contenido ayuda mucho al niño. Observará rápidamente que *toda agrupación de objetos supone la exclusión de otros objetos.* En un campo de juego determinado, agrupar es también separar. No se pondrán en el plato las cosas que deben ir en la caja de los juguetes. Desde el comienzo, los conjuntos van de a dos.

Después de haber descubierto la existencia de conjuntos en el medio en que vive, pediremos al niño que *construya otros nuevos.* El papel de la maestra consiste, ahora, en proporcionar al niño una cantidad suficientemente grande de objetos para que pueda agruparlos, primero a su gusto, luego según una consigna dada. Se le invitará entonces a hacer selec-

[8] Personaje principal de *Le bourgeois gentilhomme*, de Molière. Hombre enriquecido y sin cultura, tomaba lecciones para adquirir lenguaje y aspecto de distinción. *(N. del T.)*

ciones según el color, la forma, el tamaño o el espesor de los objetos utilizados. Luego de haber hecho esto debemos conducirlo a *definir el conjunto obtenido*, y para ello deberá:

- decir lo que forma o no parte del conjunto;
- y por qué.

El chico se ubica desde dos puntos de vista: enumera todos los objetos que constituyen la colección, tocándolos con el dedo: "Está éste, aquél y el otro". Se hace así el inventario de los objetos, de la misma manera en que se podría llamar a los niños y niñas de la clase: el conjunto queda entonces definido por todos los seres a los cuales se extiende, o sea, por *extensión.* Pero se pudieron reunir los elementos porque tenían una cualidad común que hemos elegido: el casillero de los rojos, o de los redondos, etc.; el conjunto se define ahora por esa cualidad que comparten todos los objetos del grupo, es decir, por *comprensión.*

Nunca se repetirán suficientemente estos juegos de constitución de conjuntos. Es conveniente hacer con los mismos objetos, primero un grupo de acuerdo con un cierto atributo; después con otro. Así, luego de haber agrupado en un juego de mosaicos todos los objetos rojos, se destruirá este conjunto para hacer el de todos los objetos cuadrados, haciendo especificar cada vez el atributo elegido. Habrá que dar progresivamente objetos que tengan un número creciente de caracteres, y por lo tanto, cada vez mayores diferencias entre ellos; se harán enunciar esas propiedades y anotar el número de diferencias:

6 cualidades 3 por objeto	A. cuadrado, rojo, fino B. redondo, rojo, fino C. redondo, azul, grueso	De A a B 1 diferencia De B a C 2 diferencias	de A a C 3 diferencias

La investigación de estas cualidades comunes y de estas diferencias ya es, en forma de juego, un trabajo de abstracción muy bueno. Es lo que llamamos conjunto reunido, desde el punto de vista que hemos elegido, que puede considerarse como semejante, y por lo tanto, sustituible. Al llamar la atención de los niños sobre lo que los objetos tienen en común, *asentamos la creación de los conjuntos sobre el conocimiento de las cosas.* Su reunión no puede hacerse si su propiedad común no ha sido claramente percibida y admitida por todos. Si se trata de formas netas o de colores definidos, no hay errores posibles; si se trata de usos, es necesario conocerlos bien antes de intentar el agrupamiento: no se podrán, por ejemplo, reunir vehículos de paseo y vehículos de reparto si no se han examinado y reconocido previamente como tales. Habrá que eliminar ciertos caracteres que son discutibles, o subjetivos o inciertos. Entre los niños es difícil agrupar a los rubios, los castaños y los morenos. ¿Qué es pesado o liviano? ¿Qué se define por "mucho" o por "poco"? "Si yo quisiera formar el conjunto de mis amigos –dice un matemático–, ¿cuáles son las personas que entrarían en él?"

Observemos, sin embargo, que el atributo elegido, aun si no es claramente conocido o directamente percibido, puede *admitirse convencio-*

nalmente. Yo he utilizado siempre, a propósito, propiedades que pertenecen a ese caso: fino y grueso no son calificativos intrínsecos, pero si entre los objetos que yo clasifico no hay más que esas dos clases, no habrá equivocaciones. Del mismo modo, pequeño y grande; niño, adolescente, adulto, si yo fijo en diez y en veinte años los límites de cada clase de edad. Deben tomarse toda clase de precauciones para que la constitución del conjunto se haga sin ninguna posibilidad de error, sobre todo cuando el criterio de elección dependa no de una percepción, sino de un conocimiento o de una convención. Se pueden agrupar los animales en pájaros, peces e insectos; hay que conocer los caracteres de esas clases. Lo mismo para lo que rueda, lo que vuela, lo que camina. Más tarde se agruparán los números en pares e impares, múltiplos de *a* o de *b*, positivos y negativos, cuadrados perfectos, irracionales, imaginarios, etc.

Llegaremos, pues, a considerar como *pertenecientes a un mismo conjunto objetos cuya apariencia es muy diferente.* El pertenecer a un grupo ya no se ligará al dato inmediato de la percepción, sino que supondrá una actividad mental previa, un interés especial por un determinado atributo de las cosas o de los seres. Ya no es más el objeto total el que se examina; se busca en él una propiedad que determinan ya sean los sentidos, el saber o la convención. De donde surge la posibilidad de reconsiderar, con los mismos objetos (y más tarde conceptos), lós grupos que forman; de reestructurar el universo de maneras muy diferentes. Durante estas actividades de reconstrucción, el espíritu del niño se sutiliza, se enriquece y se estructura. *La constitución de conjuntos no es, pues, solamente un trabajo de abstracción; supone conocimientos, organización, clarividencia y afán de verdad.* Atañe a la formación total del niño.

Descubrir conjuntos alrededor de sí mismo; constituir otros, eligiendo un atributo; considerarlos en extensión y darse cuenta que pueden ser vacíos o no contener más que un elemento; modificarlos, cambiando la elección de los atributos; he ahí la primera serie de juegos y ejercicios que se introducen en el jardín de infantes, y que apasiona a los pequeños.

Después de haber formado los conjuntos, se pueden organizar, es decir, hacer en su seno nuevos agrupamientos.

En esta obra se encontrará el plan de los juegos y ejercicios que se pueden hacer sobre este tema, dándose por sentado que los elementos de los conjuntos deben ser variados; que los niños serán siempre invitados a jugar espontáneamente primero y que luego se les aplicarán las reglas del juego; que se debe modificar la sucesión de los ejercicios o cambiar de ritmo, según los hallazgos de los niños; que en ningún momento deben tener cabida en el juego ni la mecanización ni la rutina.

Teniendo en cuenta todo lo que he indicado a propósito de la noción de conjunto, se verá a continuación *lo que se puede hacer a este respecto en el jardín de infantes.* El desarrollo se encontrará en la 3ª parte de esta obra.

3. ELEMENTOS DE UN PROGRAMA

Recordamos aquí que toda enseñanza debe fundarse en la experiencia adquirida por los niños y en sus actividades. Debe conducir, primero, a una toma de conciencia de la situación dada y de las acciones realizadas y llevar en seguida a una organización lógica del pensamiento.

PRIMERA PARTE

Diversos juegos sobre conjuntos formados por elementos móviles separados

Descubrir conjuntos

En el medio ambiente, indicando en qué campo jugamos o en qué "universo" nos encontramos.

Constituir conjuntos

Eligiendo, en un universo dado, objetos que posean uno o varios atributos comunes.

Definir los conjuntos constituidos

- Por extensión, enumerando los elementos (lista, inventario).
- Por comprensión, enunciando el o los atributos elegidos (cuidar que éstos se hayan percibido o concebido bien claramente).
- Introducir aquí la noción de *pertenencia* o de *no pertenencia.* Jugar a encontrar los *conjuntos vacíos.*

Organizar un conjunto

De los ordenamientos a las particiones:

- Partes de un conjunto. Partes complementarias (utilización del "no"). Noción de resto (fig. 1 a).
- Partición en conjuntos disjuntos. Relación de las partes y el todo (fig. 1 b - c).
- Parte común a dos o a varios conjuntos (utilización de la conjunción "y"; fig. 1 d).

Es evidente que la representación de los conjuntos no solamente se hace por medio de círculos, como se ha hecho aquí para simplificar.

- *Inclusión*; definir exactamente la extensión y la comprensión de cada uno de los conjuntos incluidos (fig. 1 e).

Operaciones con conjuntos

- Repaso de la diferencia de conjuntos.
- Unión de dos, de varios conjuntos. Uso de la conjunción "o", de los adverbios "más", "menos", "más aún".

Acostumbrar a los niños a describir: el estado inicial, la operación efectuada y el estado final.

Relación término a término

- Relación biunívoca y otras relaciones (fig. 1 f).

Uso de "tanto como", "más que", "menos que", "número de veces".

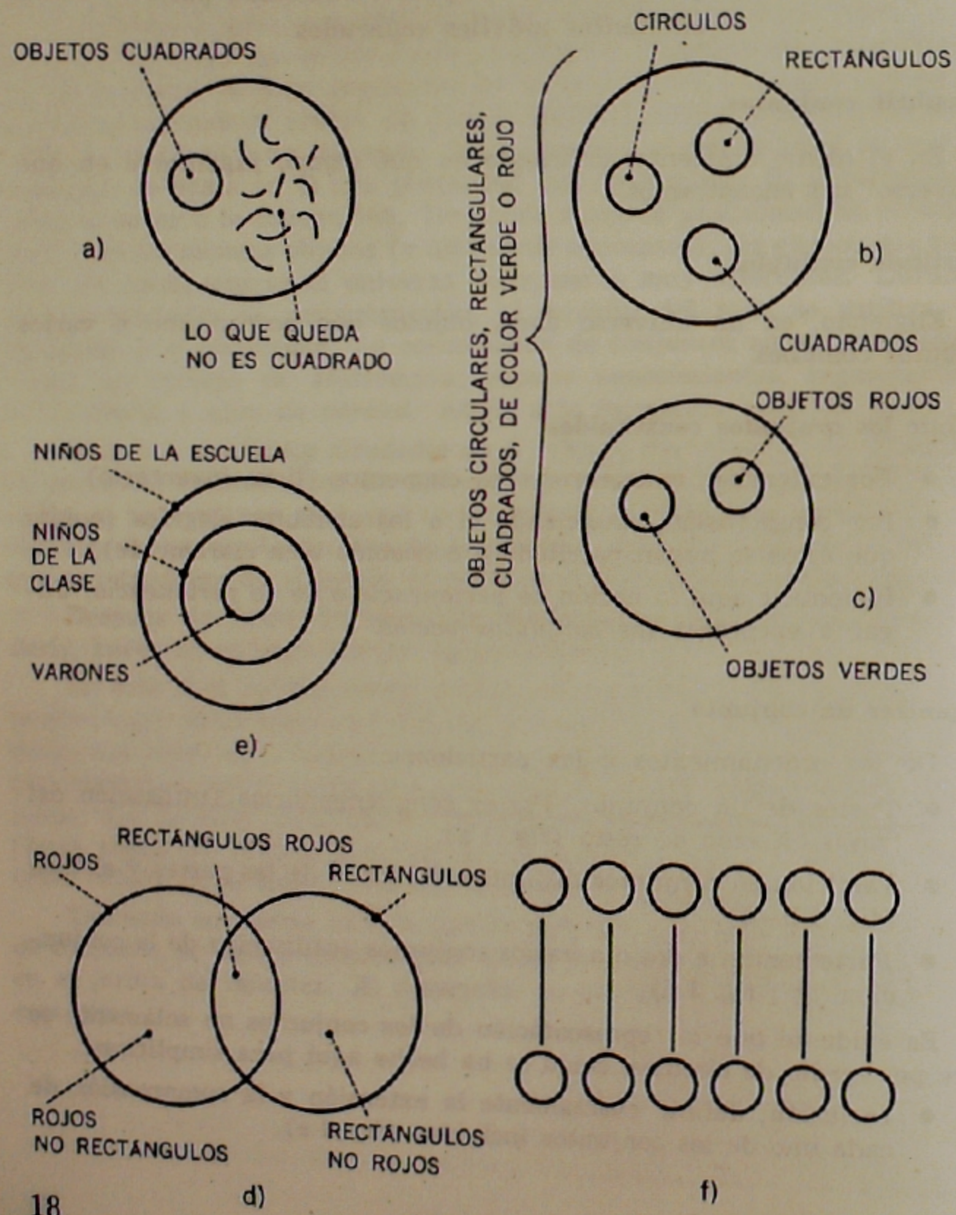


Fig. 1

Propiedad común a varios conjuntos

El número cardinal... Utilización de conjuntos de referencia para reconocer el cardinal de los conjuntos superiores a 4.

De los ordenamientos a las relaciones de orden

Utilización de "antes", "después", "primero", "último", etc.

SEGUNDA PARTE

Diversas representaciones de las manipulaciones hechas, con enunciado de los resultados obtenidos

1. Construcciones, modelados, dibujos.
2. Simbolización de los objetos por esquemas o puntos.
3. Simbolización de las relaciones por trazos.
4. Simbolización por números.

TERCERA PARTE

Algunos detalles sobre el comienzo de la adquisición de los números

1. *Valor adjetivo del número.* Su utilización como atributo de un *conjunto de objetos*, para hacer una comparación de conjuntos que lo poseen: *número cardinal.*

Los números pequeños: valor verbal, figurativo, perceptivo.

Reconocimiento de un número comprendido entre 5 y 10 por referencia a un conjunto dado y nombrado: relación término a término.

Juegos de conjuntos con número como atributo:

- uniones de conjuntos $(2 + 3)$, $(5 + 4)$;
- diferencias de conjuntos $(8 - 2)$;
- aproximación al producto: 4 dos veces,
  2 cuatro veces;
- aproximación a la conmutatividad y a la asociatividad de la suma, agrupando los conjuntos de maneras diferentes.

2. *Extensión de la noción de número: el número sustantivo.* Estudiar *el* 8, *el* 10, etc.

- La clasificación en series, el ordenamiento, el orden;
- Comparación de números: repetición de la unidad.

Número ordinal

La serie de los números hasta 10: composición y descomposición.

CUARTA PARTE

El material en la formación lógico-matemática del niño

Los capítulos siguientes presentarán los materiales más corrientemente usados en la actualidad: materiales Dienes, Cuisenaire, Discat. Todos ellos están constituidos por elementos movibles que permiten una progresión continua en los ejercicios propuestos a los niños. Para utilizarlos en las mejores condiciones es necesario conocer muy exactamente las ideas de sus constructores y seguir con precisión el método que preconizan; en otras palabras: comprender la formación de la mente para la cual se han concebido. Pero este rigor en su uso no debe impedir que los niños jueguen libremente con ellos, ni que la maestra adapte su método a su clase y a sus gustos.

Cualquiera sea la excelencia de los materiales considerados, es necesario tener presente que ni son imprescindibles (otros objetos pueden reemplazarlos), ni son *suficientes* (es de temer que su uso exclusivo produzca rápida mecanización y desinterés), pero es muy conveniente ver, en las clases donde se los utiliza, sus valores y sus limitaciones. Para una buena investigación pedagógica, desearía que entre varias escuelas que utilizan materiales diferentes, se realicen intercambios de las observaciones hechas y se confronten los resultados obtenidos. Por el trabajo de mis colaboradoras, he llegado a la conclusión de que este estudio comparado, hecho con objetividad, es extraordinariamente fecundo.

4. CARACTERES GENERALES DEL MÉTODO PROPUESTO

Recordemos que el método tiene en cuenta tanto el origen como la forma de los ejercicios; por una parte, *se basa en situaciones reales y explota esta realidad* por medio del enriquecimiento de la experiencia y la precisión del lenguaje; por otra parte, tiende a la *preparación de la noción de clases*, relaciones y números, por intermedio de los juegos y ejercicios progresivos y ordenados, o sea, a la *formación sistemática de las nociones lógicas.*

Podrá causarnos extrañeza esta dualidad, pero precisamente en ella está el valor esencial de una educación que intenta iniciar a los niños en el espíritu de la matemática moderna. Hasta un cierto nivel de madurez, los conceptos abstractos no reemplazan definitivamente a la experiencia concreta, pero se van elaborando mientras dura la educación matemática. Esta elaboración, hasta cierto punto, se nutre continuamente de experiencias concretas.

En un primer estadio encontramos la experiencia bruta que provee los materiales intuitivos necesarios para los primeros esfuerzos de la creación matemática, aunque estos materiales no consisten en imágenes registradas pasivamente, sino, fundamentalmente, en actividades de exploración muscular, visual, etc. La elaboración del pensamiento matemático primitivo no es otra cosa que una prolongación normal de la adaptación biológica del ser humano al mundo exterior, en el curso de innumerables acciones elementales muchas veces repetidas: desplazamiento de los objetos, sobre todo de los cuerpos sólidos; organización de colecciones y exploración del medio ambiente; todas éstas, situaciones vividas, primero por los músculos, más tarde en los juegos, por fin en la imaginación, que permite suplir la acción y prever los resultados. La formulación matemática significa un paso más por el mismo camino: representar la experiencia imaginada, por medio de símbolos de manejo cómodo y necesario para la comunicación social. "La axiomatización consistirá en establecer conexiones entre esos símbolos, de modo que surja, por sus combinaciones, la representación simbólica de otras situaciones y de otras experiencias."[9]

Más adelante, la matemática volverá a lo concreto y penetrará en el mundo de la física. *Tanto en su historia como en su aprendizaje, la matemática es una dialéctica incesante entre lo concreto y lo abstracto, entre la exploración de lo real y las construcciones del espíritu, entre los números naturales y la concepción de las clases y de las relaciones. Es lo que algunos han llamado un "bilingüismo científico", por el cual, dos formas de expresiones y de actividades diferentes sirven para la aproximación a un mismo conocimiento.*

Según la edad de los niños y según el momento o las circunstancias, recogeremos los datos de la realidad y los utilizaremos para la formación lógica del espíritu del niño. El camino del pensamiento matemático se presenta actualmente bajo la forma siguiente:

Observar, axiomatizar, deducir, utilizar.

Es posible que todos estos estadios aparezcan ya, con su forma particular, en el jardín de infantes, claro que con gran prioridad del primero de ellos. Con nuestro lenguaje, esta progresión podría definirse así:

Jugar, inventar reglas, aplicar las reglas del juego.

El método recomendado *parecería retrasar la adquisición de la noción de número y las operaciones con números*, pero en realidad no es así, porque en el momento en que aparece el número, ya no está desprovisto de sentido, sino que a través de las variadas experiencias que los niños han vivido, se ha ido cargando poco a poco de significados. Lo que hay que eliminar del aprendizaje de los números *son los mecanismos sin comprensión, la utilización de símbolos sin conexión sólida con aquello que significan.* Los mecanismos (serie verbal de las cifras, tablas de adición y de multiplicación) serán muy necesarios en su momento. Lo mismo que en lectura, en escritura, en gramática y en música tendrán un papel que desempeñar. Pero, introducidos demasiado pronto, perturban la formación del espíritu matemático. La prolongación de la escolaridad permite preparar más lentamente y mejor a los niños para que sepan servirse de los datos numéricos en la vida práctica, y permite, también, disponer

[9] ZADOU-NAISKY, *L'enseignement des mathématiques*, pág. 76.

del tiempo indispensable para formar su espíritu en el aspecto de la lógica matemática.

Así, como lo ha escrito Piaget, en la adquisición de las primeras nociones matemáticas que implican, como ya lo hemos visto, las clases, las relaciones y los números, se pueden considerar tres posibilidades. "La primera es que las clases y las relaciones marcan un avance sobre los números y son elaboradas operatoriamente antes que se efectúe su síntesis eventual en forma de números. La segunda, sin duda la menos probable, es que se alcance primero la estructura del número y que luego pueda ésta resurgir por una disociación en la elaboración de las clases y las relaciones. La tercera posibilidad y, a priori, la más probable, es que, clases, relaciones y números se construyan simultáneamente, con mucha posibilidad de la influencia de clases y relaciones sobre los números, pero también de influencias recíprocas." (Piaget.)

Esta última es la hipótesis que ha servido de base a nuestro trabajo.

Desearía subrayar una vez más, que el método preconizado *está dentro del "estilo" de todas las formas de educación que queremos dar en el jardín de infantes:* requiere toda una suma de actividades infantiles, pues es a la vez un juego y una creación. El papel de la maestra es poner al niño en situación de actuar, de ver, de observar, es decir, de descubrir; también es de su incumbencia prepararlo y conducirlo, pues ella es la que sabe; no se trata, pues, de seguir al alumno, sino de ayudarlo a elevarse, y todo ello con un ímpetu gozoso que bien conocen aquellas que han practicado con los niños lo que yo llamo los "juegos de conjuntos".

Yo querría, en fin, poner en evidencia la *actitud mental que este método exige al niño* y entonces tratar de demostrar *qué formación intelectual prepara dicho método.*

Este método –esencialmente concreto, una "*actividad* de juego" (juego que tiene sus reglas y sus códigos, pero suficientemente simples para que el niño los aplique con éxito)– utiliza la necesidad de movimiento de los niños y también su afectividad, pues cada objeto manejado se le aparece como un ser que él introduce en un grupo, una familia, una casa (la casa de los redondos, de los puntiagudos, suele decir). El niño *admite que hay vida* en las cosas en las que busca algún rasgo característico; *imagina* cuentos relacionados con ellas, sobre todo en las divisiones de los más chicos. Los juegos sobre los conjuntos satisfacen también el deseo de participar en *un trabajo común*, el de emulación, que se desarrolla cada vez más entre los pequeños.

Así, cautivo en la red de sus necesidades y de sus gustos, el niño puede ser llevado –prudente y muy progresivamente– hacia un orden intelectual distinto.

Tratamos de sustituir el *interés por el objeto aislado*, el *sustancialismo*, el *"pensamiento por yuxtaposición"* –como dice Piaget–, el *"pensamiento en islotes"* –como decía Wallon– por un *pensamiento por relaciones.* Ya sea que tenga que constituir conjuntos, organizarlos o proceder a efectuar operaciones con ellos, el niño es conducido, como lo hemos visto, a pensar sucesivamente por análisis y por síntesis. Este trabajo se opone a *la impotencia del sincretismo primitivo*, es decir, al *pensamiento global* incapaz de captar totalidades dotadas de unidad sistemática, al *pensamiento confuso* que agrupa propiedades descubiertas al mismo tiempo, pero que no tienen entre sí ninguna relación profunda, y en cambio sirve al esfuerzo indispensable para *revelar una realidad permanente* más allá de las apariencias. Permite descubrir la cualidad que, en un momento dado, *parezca esencial* y que al permitir la clasificación permitirá también la construcción del número.

Por la *expresión* que exigimos con respecto a las acciones realizadas, por la *notación* de lo que hemos llamado estado inicial y estado final, llegamos a lograr que, poco a poco, el niño sea *consciente de sus propias operaciones mentales.* Le pedimos una especie de desdoblamiento que le permita pensar los actos que efectúa y las reglas que los guían; lo cual supone que se acuerda constantemente de esas reglas, andamiaje del pensamiento; que recuerda también, en el presente, lo que acaba de realizar hace un instante.

Esta elaboración lenta de un pensamiento racional depende, en gran medida, de la madurez psicofisiológica del niño; pero esta madurez no podría, por sí sola, hacerle alcanzar el dominio lógico si no hubiera tenido la posibilidad de realizar todos esos juegos, todos esos ejercicios de agrupamiento y de clasificación, de formación de series y de parejas, para los cuales debió aprender a controlar su acción en función del resultado deseado y tomar conciencia de lo que quería hacer y de lo que ha hecho.

Es nuestro deseo, pues, que el niño tenga un buen comienzo en aritmética, no por los resultados que puedan aparecer en el jardín de infantes, sino por los progresos ulteriores, en primer grado y luego en el transcurso de toda la escolaridad. No se trata, pues, de enseñarle rápidamente a contar, sino de asentar los fundamentos de un pensamiento racional, eliminando uno a uno y sin apuro los obstáculos lógicos que constituyen las barreras que debe franquear. Hay que saber que en la construcción de los números, sus adquisiciones no son, a menudo, más que aparentes, durante mucho tiempo siguen siendo inestables. Es necesario consolidarlas con dulzura, firmeza y paciencia. Esto es muy importante, porque podemos decir que de la manera en que se preparen los comienzos del cálculo depende el porvenir matemático del niño. *"Parece mucho más fácil restablecer una noción mal comprendida en geografía, en historia, en química, aun en física, que enderezar una construcción errónea de las operaciones matemáticas."*[10]

En toda la exposición precedente he empleado a menudo el término *método*, pero nunca el de *teoría.* No hay que creer, en efecto, que en el jardín de infantes comenzamos el estudio de lo que se llama, en términos de matemática moderna, la "teoría de los conjuntos". Contribuiremos, tal vez, a preparar el espíritu del niño para que reciba dicha teoría mucho más adelante. No se trata, por supuesto, de emplear vocabulario o símbolos científicos; se trata de buscar un buen camino para ayudar a nuestros pequeños en sus actividades de descubrimiento, colocarlos en un campo fértil en experiencias y permitirles tomar conciencia de la realidad y de ellos mismos.

[10] Jacques WITTWER, en *Bulletin de psychologie*, nov. 1963.

Sobre estas ideas generales os corresponde a vosotras poner en práctica –adaptándolos como convenga a vuestros alumnos y a vosotras mismas– un orden, una progresión, un camino que será vuestro método. Para ayudaros en esta investigación, tomaré de Péguy una conclusión que haré mía (cambiando lo que deba cambiarse):

"No es porque el método de Descartes sea bueno, que ha tenido tan buena suerte, sino porque es un método.

No es porque haya triunfado, sino porque ha luchado.

No, en absoluto, porque haya llegado a la meta, sino porque partió hacia ella."[11]

11 PÉGUY (*Note sur M. Bergson et la philosophie bergsonienne*, pág. 39. Gallimard, editores).

BIBLIOTECA PARTICULAR
WALDEMAR ENS
N.º 1221 | 81

2

INICIACIÓN A LA MATEMÁTICA MEDIANTE ANÁLISIS DE SITUACIONES VIVIDAS

1. EL CÁLCULO EN LA VIDA COTIDIANA

Este segundo capítulo está consagrado a la investigación de un método a través de la explotación de situaciones naturales o provocadas, pero siempre vividas.

Este trabajo es un método pedagógico de comunicación y no una exposición exhaustiva de nociones matemáticas. Así deseamos que sea considerado y que de él sepan nuestros lectores extraer su espíritu para poder diversificar sus aplicaciones.

A. CARÁCTER DE NUESTRA "EXPERIENCIA"

"Así aprenderán los niños a extraer la esencia de la matemática en base a su experiencia y no a la nuestra."[1]

El profesor Dienes insiste en estos términos sobre la necesidad de llevar al niño a construir la matemática sobre su propia experiencia.

Esta tesis confirma la preocupación que, desde hace varios años, ha inspirado y dirigido nuestro trabajo en el campo de la iniciación en el cálculo, bajo el nombre de "cálculo ocasional" o "cálculo en la vida cotidiana". Se trataba, más bien, de llegar a la utilización inteligente de los números a través de juegos o a la resolución de pequeños problemas, tal como se le pueden plantear en la vida a un niño de cuatro a seis años, y

1 Z. P. DIENES, *Construction des Mathématiques*. PUF (Presses Universitaires de France), 1966, pág. 7.

no de asociar solamente las cantidades a los nombres de los números y a los signos escritos que los representan, como se hacía en muchas clases.

Tal era, pues, nuestro objetivo impuesto por los programas; pero en verdad nuestra ambición se orientaba sobre todo a otros resultados: facilitar y afirmar las posibilidades de reflexión y de juicio, habituar al espíritu a separarse rápidamente de las situaciones y de los objetos concretos, a representárselos, a fin de poder dominarlos mejor más tarde.

En efecto, la enseñanza pretendidamente "concreta", que hacía aparecer sobre la mesa o ante los ojos del niño un arsenal de fichas, maderitas o cosas llamativas, no tenía otro efecto, la mayor parte de las veces, que fijar de manera definitiva la idea de cada número a una sola imagen visual que limitaba el pensamiento. Este acondicionamiento subsistía en el aprendizaje mecánico de las operaciones. El cálculo utilitario podía, a veces (no siempre, desde luego) encontrar ahí algún beneficio, pero no la comprensión de los problemas y el sentido de investigación, con la agilidad mental que ellos exigen.

Más amplia, más vivaz y más afectiva al comienzo, "la experiencia", en su totalidad, ofrece una riqueza de explotación mayor que el objeto, cuyo único interés reside en las manipulaciones que provoca. La actividad no puede reducirse a la simple observación material de cosas que, al limitarse al aspecto y movimiento exterior, termina casi siempre ignorando la actividad mental que dichas observaciones deben promover a través de variadas experiencias.

Pero, ¿qué hay que entender por "experiencia del niño"?

Por cierto que debe estar ligada al medio en que vive el niño ya que las características ambientales varían con el medio: los niños de las ciudades y los del campo, por ejemplo, no conocen ni desean las mismas cosas, los mismos juguetes, ni se dedican a las mismas actividades.

Sin embargo, el medio escolar interviene para reducir esas diferencias. Existe la experiencia directa, espontánea, y la otra, más preparada, que la escuela y, sobre todo las maestras, provocan con cuidado.

Esta última forma resulta más agradable para el niño, especialmente si se la sabe integrar con la de la familia. Apoyándonos en ella es que hemos concebido el inventario no exhaustivo –que se encontrará más adelante– de las situaciones por explotar en la iniciación del cálculo. Un aspecto falta en ese cuadro: el que provoca, en el ambiente escolar, la aparición del material estandardizado concebido por el adulto. Cuando está hábilmente presentado, ese material no es menos real a sus ojos que el que encuentra en la experiencia espontánea de la vida cotidiana. Especialmente estudiado y concebido para poner de relieve sucesivamente ciertos problemas con exclusión de otros, puede tener la ventaja de hacerlos más accesibles al espíritu, al aislarlos del contexto demasiado rico de la experiencia espontánea. Posiblemente es más "simple" en este sentido. Pero la simplicidad psicológica no es la simplicidad lógica. Empleado de manera exclusiva o con prioridad, tendrá el inconveniente de suprimir, en la experiencia de los niños, todos los problemas individuales, variables para cada uno de ellos y vividos intensamente, fuentes de motivaciones naturales para una investigación y una comprensión más personal. Ésta es la razón por la

cual creemos que si se conciben seriamente, estos materiales pueden y deben emplearse después de las primeras tentativas de reflexión vividas en la clase. La vida se encarga, por cierto, de dar lugar a la experiencia espontánea...

Cometeríamos un error, por otra parte, si limitáramos demasiado la experiencia "de los niños" a la "del niño"; como en los adultos, la experiencia de aquéllos varía con el temperamento de cada uno. En cualquier clase, aun en la de jardín de infantes, se encuentran niños que están al acecho y lo ven todo, son capaces de cualquier tentativa, hasta el punto de llegar a ser molestos, mientras otros se repliegan sobre sí mismos, en un mundo limitado. En un mismo contexto, cada uno forja su experiencia para restringirla o extenderla a su voluntad. Cada uno la orienta, también, de manera más o menos activa, más o menos flexible, con mayor o menor respeto por la intención de los educadores. El medio escolar debe ser suficientemente rico en solicitaciones para responder a todas las necesidades.

En fin, entre los adultos es costumbre decir que la experiencia enriquece al hombre solamente en la medida en que éste sabe tomar conciencia de ella y dominarla. Esto es particularmente cierto para el niño pequeño que no ha llegado a la edad de la toma de conciencia deliberada. Corresponde al educador ayudarlo en este camino, y no conformarse con encontrar "ocasiones" para explotar superficialmente. También debe ayudarlos a madurarlas, a recordarlas, a "hablarlas". Procediendo así, les dará oportunidad para que adapten su lenguaje de manera más precisa, más matemática, a la situación vivida.

Esta toma de conciencia no puede efectuarse en un medio a la vez invariable y difuso, en el que no haya cambio alguno que provoque la atención y la reflexión, en donde nada sugiera deseo o inquietud. La realidad debe oponer resistencias al hombre para que surjan los problemas. Estas resistencias tienen que apoyarse sobre puntos precisos. Cuando no surjan en forma natural, el educador deberá proceder a una verdadera decantación de los hechos para que resulten más claros y visibles. Incluso tendrá que llegar, a veces, a transformar el ambiente para hacer surgir los problemas.

Por ejemplo, por un verdadero golpe de magia han desaparecido ciertos objetos; ¿habrá suficientes para cada niño?; nos hemos olvidado de poner a disposición de la clase todo el material necesario para el trabajo, o hemos dado una varilla demasiado corta o demasiado larga para encuadrar un dibujo... La vida de la clase, organizada por la maestra, plantea los problemas por la manera misma en que ésta crea los hechos y las situaciones.

"Estoy buscando una puerta más mediana para esta casa mediana", dijo un alumno de la clase de los grandes a su maestra, en el transcurso del ejercicio que proponemos en la página 49.

Si la medida de la puerta mediana se hubiera tenido en cuenta antes, jamás el trabajo propuesto habría sugerido esa reflexión que obligó al niño, por propia iniciativa, a despegar la puerta que ya había fijado, para buscar otra de dimensión más acorde. Vemos así que el educador tampoco debe exagerar la precisión. En la medida en que las experiencias

que favorece sean más auténticas, más posibilidades de elección ofrecerá a la actividad y por lo tanto, más temas a la reflexión. Cuanto más ricas, más llenas de matices y más compleja serán, y las diferencias individuales aumentarán la manera de encararlas. Es así que dentro del problema sugerido por la maestra surgen todos los nacidos de la imaginación, de la torpeza, del azar, en el nivel de cada experiencia infantil. Cada uno encuentra, entonces, su propio problema.

Acabamos de ver cómo, tratando de dar importancia a la experiencia del niño, el educador puede enriquecerla, hacerla consciente, destacando en ella los problemas sometidos a la reflexión, e inclinarla, en fin, en el sentido de la experiencia "del niño" hacia la de "cada niño".

Si queremos traducir esta experiencia en términos de comportamiento, enunciaremos: la imitación, la actividad manual, el juego (en su más amplio sentido). Ésas son las manifestaciones esenciales de la "vida cotidiana" en el jardín de infantes, a las cuales el niño puede entregarse por completo. Nuestros lectores no deberán sorprenderse de encontrarlas al comienzo de los ejercicios propuestos más adelante. Sumados a los comportamientos espontáneos, más orientadores y, por lo tanto, respondiendo a esas dos actitudes del maestro, estos ejercicios se inspiran todos en el "método de los conjuntos" y constituyen, de hecho, una suerte de iniciación primera en la llamada matemática moderna. El número aparece en ella, sin embargo, aunque de manera no ordenada ni sistemática.

Para conducir la aplicación de este método, la maestra deberá acostumbrarse a un cambio de punto de mira: ya no tiene que precipitarse, con los niños, hacia la adquisición de los números y el establecimiento de estructuras –aun cuando hayan sido bien comprendidos–, sino que debe captar desde el comienzo, en los contactos de los niños con una realidad a medias natural, a medias construida por ella misma, los primeros balbuceos de la lógica infantil, para provocar y controlar el desarrollo de dicha lógica.

Como lo acabamos de decir, en el curso de este trabajo surgirá fácilmente aquello que hemos dado en llamar los resultados: en estas circunstancias, el número y el mecanismo de las operaciones. Pero el beneficio de estas actividades, tanto para el niño como para el educador, sobrepasa ampliamente ese estrecho objetivo. Para el educando, significa toma de conciencia de la realidad y de la acción que puede ejercer sobre ella, sentido del ordenamiento y de las relaciones, hábito de no ubicarse en el centro de los acontecimientos, cambiando su punto de vista según las situaciones, enriquecimiento del vocabulario y sentido de la precisión de las palabras en un lenguaje bien inteligible.

Es una actitud general frente a los "seres" –cualesquiera sean éstos–, que al hacerse cada vez más lógica eleva al yo, pues se aplica a situaciones vividas, cargadas de afectividad. De esta forma el niño, particularmente el más pequeño, no renuncia bruscamente a lo que era para adoptar otro punto de vista, sino que pasa insensiblemente del uno al otro, sin mutilación. Este proceso favorece su aptitud para la "verdadera abstracción que permanece en contacto con la realidad". (Mialaret.)

Del mismo modo, pasará sin tropiezo del cálculo al lenguaje, a la

lectura o a las actividades de expresión en general, ya que esos ejercicios de iniciación en los conjuntos pueden aplicarse a todas las disciplinas.

Estas actividades sólo rendirán eficazmente a través de ciertas condiciones del educador, de su investigación personal y de sus posibilidades de adaptación. Es de imaginar la fuente de interés y de renovación que encontrará en una tarea en la que va a adquirir un conocimiento más profundo y más personal de cada niño, gracias a las posibilidades que se le darán de observarlo y de hacerlo progresar en su propia vida y por ella misma.

B. FORMA DE LAS ADQUISICIONES

La maestra hace el inventario de los conocimientos del niño

La maestra hace preguntas (¿quién sabe contar?, etc.). Trabajo de encuesta bastante largo que permite apreciar lo que recubre el sentido de las palabras para los niños y la realidad matemática a la cual corresponden. Hace el inventario en el curso de los ejercicios (en qué momento aparecen los números verbales, las cifras, etc.).

Los acontecimientos de la vida de la clase

Espontáneos

Agrupación de los niños (educación física, rítmica). Reparto y distribución de objetos (traídos o enviados por los padres o tutores). Clasificación del material aportado por la maestra o los niños (cuadro de observación). Inventario del material didáctico después de la desaparición de algunos elementos. Recuento de dinero (por la función de títeres, la venta de estampillas). Pesos, medidas.

Relacionados con el ritmo normal de la vida

Las filas (variar las agrupaciones de a 1-2-3). Acción de pasar lista. Enumeración de los niños que desayunan en la escuela, o que participan en el coro. La temperatura. La fecha. El calendario. La hora (prever con los niños una hora especial: canto, danza o ejercicios físicos, que ellos esperan y controlan). Clasificación semanal o mensual de los dibujos en los legajos personales. Distribución del material, ordenamiento de las mesas, etc.

Todas éstas son situaciones que se pueden explotar, ya sea de manera pasajera, ya para transformarlas en problemas.

Provocados por la maestra

a) *La imitación.* La maestra habla. Formula problemas que ella se plantea. Asocia a los niños a sus preocupaciones, los toma por testigos y a veces reclama su ayuda. Utiliza los aportes de los más adelantados. Los sitúa en el tiempo y en el espacio.

b) *Acontecimientos relacionados con la organización material de la clase y de la escuela.* Rincones de juegos para los más pequeños. Medianos y mayores. Jardinería y cultivo. Fiestas y aniversarios.

c) *Relacionados con el desarrollo de los temas de la vida.* Invitaciones. Envíos, despachos. Clases de paseo. Correspondencia escolar. Compras. Cédula de identidad (talla, peso, fecha de nacimiento, ubicación en la familia). Planos (barrio, escuela). Fabricación y vestido de muñecos. Juego de la vendedora. Maquetas.

d) *Los juegos.* Lotería. Dominó. Dados. Ludo. Bolos. Bochas.

C. SIGNIFICADO DE LAS ADQUISICIONES

(Diferentes etapas)

Adquisición del lenguaje y del vocabulario
Conocimiento intuitivo

Problemas, relaciones, clases, cantidades (continuas y discontinuas), los números figurados, el número verbal, cardinal y ordinal, símbolos.

Toma de conciencia y ordenamiento de las actividades o de las experiencias, siempre descritas verbalmente por la maestra o por los niños

Imaginación (con los ojos cerrados) de la cantidad y del número. Paso de los números verbales a la representación dibujada, de la noción concreta y gráfica a las cifras.

Relación de los números entre sí. Operaciones con los números.

Se habla, se repite, se recita; se actúa, se formula; se plantean problemas, se reflexiona; se buscan los medios de resolverlos; se verifica siempre la solución; se asegura el acuerdo de todos; se formula de nuevo.

Preocupación esencial:

Separar el pensamiento de la experiencia concreta que lo ha originado.

D. PRESENTACIÓN DE LOS EJERCICIOS

Nos proponemos describir aquí el desarrollo de varios ejercicios en el transcurso de los cuales aparecen las nociones que indicaremos más adelante.

Hemos querido que esas nociones, preparadas y conducidas por los juegos o las distintas actividades de la clase, surgieran siempre en el transcurso de la resolución de un problema, en lugar de ser impuestas desde el exterior y aprendidas mecánicamente. Ésta es nuestra preocupación esencial, nuestra regla de oro. Daremos un ejemplo de lo que entendemos por "vivir problemas".

En la vida cotidiana de la clase se impone muy pronto la necesidad de representar las situaciones vividas. Esta representación es de por sí la fuente de problemas numerosos, mientras no se llega al conocimiento y la utilización de los números y de las cifras. Varios ejercicios se agruparán alrededor de este tema.

En un trabajo, es difícil establecer un orden riguroso, de lo simple a lo organizado, inspirándose en una realidad vivida, esencialmente compleja. Además, repetimos, para cada niño, ¿dónde se encuentra la simplicidad? Este aspecto, ¿no varía con cada mentalidad?

Parece natural, puesto que los problemas reales preparan y conducen las adquisiciones, que estas últimas se ordenen más adelante. El orden, pues, aparecerá al final del trabajo.

Por las mismas razones, también nos es difícil clasificar los ejercicios reagrupándolos alrededor de nociones lógicas. Podemos, sin embargo, distribuirlos en dos series.

Lenguaje y actividad

Organización del espacio (topología). Constitución de conjuntos *con objetos reales.* Inclusión, exclusión, intersecciones, relaciones.

Representación simbólica

Imagen modelada, recortada, dibujada.
El esquema, el número

Con la preocupación permanente por la realización práctica de estos ejercicios en las clases, nos hemos dedicado a buscar situaciones fáciles de descubrir o de provocar. Pero digamos una vez más que el niño pequeño no tiene más que la experiencia que nosotros queremos permitirle. Nos corresponde, entonces, tanto en el cálculo, como en el lenguaje, o en el curso de cualquier ejercicio de expresión, enriquecer en todo momento el ambiente, no sólo con objetos, sino también con sugerencias para utilizar esos objetos, integrándolos en actividades tan naturales como sea posible.

La formulación debe conservar siempre, durante la ejecución de todos los ejercicios, la importancia primordial que merece. La maestra debe emplear en todo momento los términos precisos que convengan exactamente a la situación. Sin embargo, para evitar la repetición mecánica de vocablos a la manera de un catecismo matemático, deberá usar repetidas veces y en distintas ocasiones las palabras y expresiones matemáticas antes de pedir a los niños que las aprendan. Ésta es la razón por la cual es deseable multiplicar las experiencias y hacerlas variar sobre un mismo tema *matemático.*

2. ORGANIZACIÓN DEL ESPACIO

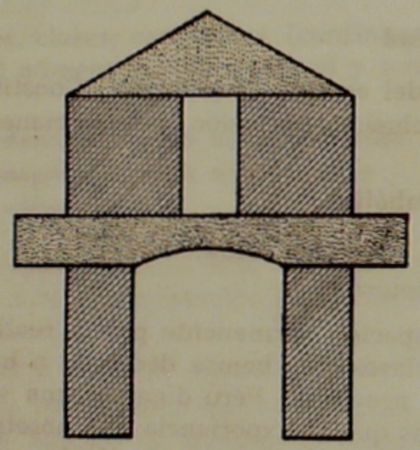
Experiencia en base a un juego de cubos

Un niño, con los ojos vendados, tiene que tratar de construir una especie de casa, con las indicaciones de sus compañeros, sentados a su alrededor. Cuando la casa se derrumba, el niño cede su lugar a otro. Aquel que logra terminar el proyecto es el que ha ganado.

La casa se compone de:

- dos especies de ladrillos, colocados verticalmente;
- un "puente" transversal colocado sobre aquéllos;
- dos cubos sobre el puente;
- un techo.

Al comienzo se enseña el modelo, y la construcción se efectúa a la vista de los alumnos. Luego se deshace.



Primer ensayo

Todos los elementos se hallan dispersos por el suelo, alrededor del constructor.

Realizado con diez niños de 3 años y 10 meses a 4 años y 8 meses de edad.

Observaciones de la maestra:

Todos se han divertido. Se reían, sobre todo cuando se desplomaba la torre, o cuando el constructor se equivocaba. Hablaban con bastante soltura, pero aún con ayuda de la maestra, y después de haberles dado el ejemplo, guiaban muy mal al jugador para indicarle la posición de los cubos. Casi nunca dijeron: "A tu lado, delante de ti, detrás, a la izquierda...", sino: "Aquí, allá, ahí debajo, etc.".

Nueva intervención de la maestra. Repetición de la experiencia

Después de manifestar que el jugador estaba mal guiado, la maestra colocó, siempre comentando sus gestos, dos cubos sobre una mesita traída a propósito y puesta junto al constructor, los ladrillos debajo de la mesa, el puente en el suelo, junto a la mesa, y el techo sobre una silla. Recomendó a los niños que indicaran con precisión la posición de los objetos *con relación a la mesita y a la silla.*

Estos dos puntos de referencia fijos les permitió estructurar mejor el espacio y expresarse con más precisión. Los éxitos fueron más numerosos, y todo el mundo tomó conciencia de ello.

Nociones puestas de relieve con este juego

El problema se ha planteado por el juego mismo:

- Volver a colocar bien los cubos en sus *posiciones relativas.*

Para ello deben encontrarlos en un conjunto de elementos diseminados, con las indicaciones de sus compañeros, lo que supone que éstos se *expresan con precisión* y que el jugador *los comprende.*

Es un problema de *comunicación*, ligado a una buena comprensión de *expresiones precisas que dirigen gestos precisos.*

Hay, pues, *adquisición de términos*, sentido de su precisión (el fracaso sanciona el error) *asociado a una organización activa del espacio* y toma de conciencia intuitiva del papel del *punto de referencia fijo.*

Expliquemos ahora lo que entendemos por "nociones impuestas desde el exterior, sobre una experiencia estática".

Se podría, con el mismo fin, pedir a cada niño que colocara un cubo sobre la mesa o debajo de ella, al lado, delante de él, detrás de él...

No habría en ello ninguna motivación. Por otra parte, concebido de esa manera el ejercicio, el error no implica ningún fracaso, y la comprensión exacta ningún éxito apreciable.

Con nuestro método, la adquisición de las nociones está *impuesta por el juego mismo*: para triunfar o ayudar a triunfar es necesario, por parte del jugador, haber comprendido bien y actuar en consecuencia; por parte de los compañeros, expresarse correctamente.

3. DEL JUEGO LIBRE AL LENGUAJE Y A LA CONSTRUCCIÓN DE CONJUNTOS

Transcribiendo la conversación de dos niños durante la ejecución de un juego libre, vamos a tratar de demostrar cómo puede la educadora (al ayudar a una mejor organización del juego) orientarlo hacia la adquisición de la noción de conjunto, por medio de la misma construcción.

Se trata de una conversación registrada hace ocho años en una clase durante un trabajo sobre "la expresión". No estaba previsto utilizarla en un manual de iniciación en el cálculo. Veremos, sin embargo, aparecer muchos términos del léxico matemático. Esto prueba hasta qué punto toda situación puede aprovecharse en ese sentido.

El juego espontáneo

Luis y Claudio, de 6 años, trabajan juntos en la construcción de una carreta, con un juego desarmable formado por placas perforadas de diferentes tamaños y colores, tornillos, tuercas y uniones en ángulo.

LUIS. — Yo soy mecánico. Estoy desarmando la carreta y después voy a hacer otra más linda; ya está, ya he desarmado todo. Le pongo los tornillos. Claudio, ¿me das un tornillo; uno *chiquito*?

CLAUDIO. — ¿Los *grandes* no?

LUIS. — No.

CLAUDIO. — No hay más que *dos* de los *grandes*. Aquél es demasiado *chico*. Falta uno. Hay que *ordenarlos*.

LUIS. — Voy a poner la *segunda* barra azul y luego la *tercera*; ya está; ahora pongo la *cuarta*. No, *falta todavía una* barra azul. Faltan *cinco* de las barras azules. Bueno, aquélla, allá, *al costado*.

CLAUDIO. — Bueno, ¿*cuántas* barras rojas *faltan*? (silencio, mientras se ajustan las barras rojas con tornillos y tuercas, luego...).

CLAUDIO. — Ahora hay que poner las ruedas. Yo le pongo estas ruedas. Hay que poner las del *otro lado*, ¿dónde está el ángulo?, etc.

La maestra, atenta, descubre rápidamente las nociones que surgen en el curso de esta conversación: *Magnitud* (tornillo grande y chico, etc.). *Número* (cinco, uno). *Orden* (primera, segunda). *Suma* (falta todavía). *Topología* (al costado, del otro lado).

No se le escapa la riqueza de este juego libre que conduce a adquisiciones intuitivas. Sin embargo, tiene la preocupación de enriquecerlo más aún, y procede a la repetición de la experiencia.

Repetición de la experiencia

El problema ha sido planteado por Claudio: los *elementos* de la carreta, amontonados en desorden, son difíciles de encontrar. *"Faltan algunos, hay que ordenarlos."*

La maestra vuelve a ese tema: "Claudio tiene razón, hay que *ordenar los elementos* de la carreta".

Problema: ¿Cómo *ordenarlos*?

Ella deja a los niños la elección del *atributo*: color o tamaño. Si gana primero la idea del color, pongamos juntos las barras azules, las barras rojas, los tornillos azules, los tornillos rojos.

Terminado el trabajo rápidamente, la maestra resume:

Aquí está el conjunto de los tornillos rojos;
el conjunto de los tornillos azules;
el conjunto de las barras azules, etc.

—¿Puedo poner este ángulo aquí?

—No, *no forma parte del conjunto de los tornillos.*

—¿Y este tornillo azul?

—No, *no es rojo* y no puede ir con ellos.

Y así sucesivamente. La maestra formula preguntas a las que ella misma contesta primero, y luego le siguen los alumnos.

Constituidos así los conjuntos, de acuerdo con el color, se hace la siguiente pregunta:

—¿Es más fácil encontrar así los elementos?

—No, los *grandes* y los *chicos* están mezclados.

—¿Cómo podríamos ordenarlos, entonces?

Conjunto de los tornillos *grandes*;
conjunto de los tornillos *chicos*;
conjunto de barras *grandes*;
conjunto de barras *chicas*.

—Pero ahora son los colores los que están mezclados. ¿Cómo podríamos hacer?

Conjunto de los tornillos grandes *y* azules;
conjunto de los tornillos chicos *y* azules;
conjunto de los tornillos grandes *y* rojos;
conjunto de los tornillos chicos *y* rojos;
conjunto de las barras grandes *y* azules;
conjunto de las barras chicas *y* azules, etc.

La maestra repite cada vez mientras los niños hacen el trabajo y luego concluye:

—Eso es, hemos encontrado un *método* para ordenar los *elementos de la carreta*, no perderlos y encontrarlos rápidamente. ¡Vamos a mostrarle esto a todo el mundo!

Se deshace la carreta, se vuelve a formar el *conjunto de todos los elementos de la carreta* y se llama a los compañeros para que vean. Se les hace participar en la elección de los atributos para la construcción de los conjuntos y en la crítica de la clasificación hecha.

En seguida, dos o tres de ellos pueden volver a armarla.

(Las palabras y expresiones subrayadas han sido introducidas por la maestra durante el trabajo, sin exigir su repetición.)

Nociones puestas en evidencia en el curso de este juego

Hemos enumerado las nociones que pueden adquirirse de manera intuitiva. Pero la maestra ha conseguido transformar un ejercicio de clasificación (ordenamiento) en un ejercicio de construcción de conjuntos. Ha insistido sobre el vocabulario, empleando ella misma varias veces las palabras "conjunto", "elementos", que los niños volverán a escuchar durante la realización de otras actividades. También se ha destacado el valor de la conjunción "y".

El método consistió en adaptar, en un momento oportuno, el lenguaje

a la acción, y no de enseñar vocabulario. La maestra no ha dado una lección; ha partido de la decisión de un niño.

N. B. Recomendamos muy especialmente los juegos desarmables, que constituyen una actividad muy interesante desde el punto de vista que nos interesa. Este ejercicio lo acaba de demostrar.

4. SITUAR UN LUGAR CON RESPECTO A COORDENADAS

Problema

Al principio del año escolar, como los niños tienen dificultad para encontrar su mesa y su silla, cada vez que entran a clase surgen controversias. Se plantea así un problema: ¿cómo encontrar fácilmente *su lugar en la clase*? Se obtendrán diversas respuestas, según las experiencias vividas por los alumnos, cuando se trate, desde luego, de niños que ya concurrieron el año anterior:

—Pegar un dibujo o su retrato sobre la mesa.

La maestra objeta:

—Pero la mesa no es fija, no está clavada al piso; puede moverse o la portera puede cambiarla de lugar. Y *es el lugar de cada niño en el salón de clase* lo que queremos encontrar.

Y da un ejemplo:

—Carolina estaba siempre *en la primera fila, delante de mi escritorio.* Hay un dibujo muy lindo sobre la mesa de Carolina, miren, lo estoy pegando, es un hermoso barco. Pero Carolina se va y su mesa queda vacía. Ahora yo soy la portera y no sé que la mesa del barco tiene que estar *adelante, en la primera fila.* Y miren dónde la pongo después de haber barrido el salón: *en el fondo de la clase, en la última fila, del lado del pasillo.*

—¿Estaba Carolina *del lado del pasillo*?

—No, *del lado de la ventana.*

Al día siguiente, Carolina al llegar busca su barco, lo encuentra y se sienta...

La maestra dice:

—Pero, ¿dónde está Carolina hoy?

Carolina no está *en su lugar.* Es, pues, necesario encontrar otro medio.

—Yo estoy al lado de "él", dice un niño señalando a su vecino.

—Sí, es tu compañero, está *del lado de la ventana*, pero, ¿si mañana se equivoca y se sienta *del lado del pasillo*?, etc.

Patricio está *en la primera fila, frente al pizarrón*; si va a sentarse *al fondo, delante de los armarios*, ¿qué va a hacer su compañero de banco?

Es necesario idear otro medio de encontrar el lugar en la clase. Piensen. La maestra da un tiempo para la reflexión. Después sugiere:

—¿Si uno se situara *con respecto a los objetos que no cambian nunca de lugar*? Busquen cuáles son esos objetos en el salón.

Ventanas, ventanas del lado del patio, ventanas del lado del pasillo, armarios del fondo del salón, armarios del lado del pasillo, el pizarrón... ¿el escritorio? Puede moverse. ¿La maestra? Se mueve, va de un lado a otro.

—Entonces, ¿con respecto a *qué punto fijo* quieren *situarse* ustedes?

Y aparecen las respuestas:

—Yo estoy *del lado del pasillo.*

—Yo, *del lado del patio.*

—Y yo *en el fondo del salón, delante de los armarios.*

—Pero, ¿es suficiente eso? ¿Cuántos niños hay *del lado de las ventanas del patio*? Varios levantan la mano.

—¿Y *del lado de las ventanas del pasillo*? Otras manos se levantan.

Aparece la noción de *fila* (con respecto al pizarrón o a los armarios del fondo; luego, las filas intermedias).

—Yo estoy *en la primera fila, del lado de las ventanas del patio.*

—Y yo, *en la última fila, del lado de las ventanas del pasillo.*

—Sí, pero hay *varios lugares en cada fila.* El *primero* está del lado de la ventana (si empezamos a contar desde ahí), luego, el *segundo*, un lugar vacío, el *tercero*, el *cuarto*, un lugar vacío, el *quinto* y el *último*, del lado del pasillo.

Para los alumnos más pequeños podemos considerar como suficiente lo que sigue:

—Yo estoy en el *primer* lugar de la *primera* fila.

—Yo estoy en el *último* lugar de la *primera* fila.

—Yo estoy en el *segundo* lugar de la *tercera* fila.

—Yo estoy en el *último* lugar de la *última* fila.

Se cambian todas las mesas de lugar para el trabajo manual, el que consistirá en agrupar mesas y alumnos para formar pequeños talleres de recorte y pegado, para dibujar, recortar y pegar una silueta, lo que dará ocasión para reconocer la propia mesa (pues es indispensable encontrar el cajón, los instrumentos de trabajo y los efectos personales).

Una vez terminado ese trabajo, y ya con las indicaciones precisas dadas en el transcurso de las conversaciones precedentes, se volverá a poner *cada mesa en su lugar.* Se podrá verificar y formular de nuevo el problema.

Si se trata de una clase de los mayores, se continuará el tema hasta llegar a establecer un plan, un esquema.[2] En la tercera serie de los ejercicios prácticos, titulada "Representación simbólica", se encontrará la

[2] Las dificultades de realización del plan harán surgir la necesidad de confrontar el esquema con la realidad. También se planteará el problema de la orientación, lo que obligará a numerosas idas y vueltas de la realidad al plan.

Este ejercicio, como muchos otros, se extenderá durante varias clases.

continuación de este trabajo. Sin embargo, antes de pasar a esa representación será necesario someter el siguiente problema a los niños, en el plano verbal:

—Si hemos decidido que la primera fila está frente al pizarrón, la segunda está detrás de ésta, etc., y que la... fila es la última del fondo del salón, y que en cada fila el primer lugar está del lado de la ventana, después viene el segundo, el tercero, hasta el sexto, ¿tenemos necesidad de situarnos respecto al pasillo o al fondo del salón para encontrar nuestro sitio? Por ejemplo, si yo digo: primera fila, segundo lugar; tercera fila, sexto lugar, etc., ¿es suficiente? (Juego rápido, haciendo ejecutar las órdenes a uno de los niños.) ¿Comprenden?

Nociones establecidas durante la realización de esta actividad

Noción de lugar (es decir, *situación de un punto en el espacio con respecto a dos coordenadas*), opuesta a la noción más egocéntrica, espontáneamente reivindicada por el niño, de mesa personal.

Para ello, búsqueda de puntos, o mejor, de líneas de *referencia fijas*. Primero, varias líneas, después *dos, que son suficientes*. (Posibilidad de la *elección* libre de esas dos líneas: abscisa y ordenada.)

En la tercera serie de ejercicios se verá cómo estas actividades pueden llegar al establecimiento de un *plan* y luego a la realización de un *esquema*.

Como la formulación no debe preceder a la comprensión, es decir, a la experiencia que favorece a esta última, hemos creído necesario insistir ampliamente sobre el desarrollo del ejercicio, que puede hacerse en varias sesiones, en base a distintos cambios de lugar de las mesas, ocasionados por el trabajo de limpieza del personal o por los reordenamientos diferentes (en equipos de trabajo o en las filas habituales), según los ejercicios.

Desde luego que no todos los alumnos van a adquirir la formulación correcta al fin de la serie de ejercicios. Será necesario promover nuevamente esa ejercitación cuando sea oportuno, a lo largo del año, en variadas actividades de la vida escolar.

5. EN MOMENTOS LIBRES

Establecer la costumbre de recortar libremente siluetas varias, recortadas ya sea directamente como son o previo dibujo y coloreado.

Todos estos elementos se clasifican en una caja individual: *Conjunto de los elementos recortados por mí*, con el fin de pegarlos un día sobre un cartón, para hacer un cuadro.

Inventario después de la clasificación

el *subconjunto* de los árboles,
el *subconjunto* de las casas,
el *subconjunto* de las montañas,
el *subconjunto* de los autitos,
el *subconjunto* de los muñequitos.

Juegos con estos diferentes elementos

a cada muñeco: su auto,
a cada muñeco: su casa,
a cada casa: su árbol.

La maestra pone sobre la mesa, en el momento del inventario, algunos juguetes: autos de plástico, casitas. ¿Los podemos colocar en la caja?

—No, no son de papel recortado. No forman parte del *conjunto de los elementos recortados por mí*.

Cambio de *atributo*:

Se juega a clasificar las figuras recortadas, muy rápidamente, según el *atributo* indicado por la maestra:

—Clasifiquemos por color, rápido... ¡a ver quién termina primero!

—Ahora por tamaño (difícil, cuando el atributo no está bien determinado, lo que da lugar a discusiones).

—Hagamos un conjunto de todo lo que vuela, para pegarlo en el cielo...

—De todo lo que vive en el mar, para hacer un cuadro...

—De todo lo que tiene motor...

La crítica de la clasificación que haga cada uno obligará a la maestra y a los niños a emplear las expresiones:

—Este objeto *forma parte del conjunto* de los rojos, de lo que vuela, de lo que tiene motor, etc.

—No, *esto no es rojo, no vuela*...

Problema

¿Cómo separar los subconjuntos para que los elementos no se mezclen? (el auto se desliza hacia el pescado, éste hacia los árboles... Así no se encuentran). Dejar entonces que los niños busquen todas las soluciones posibles.

Números perceptivos

En el gran conjunto de los objetos recortados, algunos elementos se agrupan de a dos, tres, cuatro. Se lo hace notar al pasar, sin insistir. Algunos otros elementos ya están pegados en un cuaderno: pequeños paisajes, etc. ¿Forman parte del *conjunto de los objetos recortados por mí*?

—Sí, pero ya no están en la caja.

6. LAS RELACIONES

En todo momento, en el curso de la vida diaria, es posible, e incluso necesario, invitar a los niños a establecer relaciones.

Relaciones de orden

Entre ellos, en el momento de formar fila: cuál es el primero, el segundo, el último, etc., quién es el que precede, quién sigue.

Los juegos dan ocasión de hacer clasificaciones, de establecer recompensas.

Relaciones entre los conjuntos

Pensamos especialmente en la relación (o correspondencia) biunívoca, tan importante en la génesis del número.

Antes de entrar a la clase, hay que hacer pensar que no se deben colgar 2 sacos en la misma percha, sino que hay una percha para cada niño, y que cada uno debe colgar su saco en su percha.[3] Es necesario verificar.

Es conveniente hacer realizar ejercicios en el transcurso de los cuales la maestra repita estas fórmulas, las que, poco a poco, serán asimiladas por los alumnos. Por ejemplo:

—¿Hay una silla para cada alumno?
—¿Está cada alumno sentado en su silla?
—¿Quedan sillas desocupadas?
—¿Hay un lápiz, un cuaderno, una hoja y un pincel para cada niño?
—¿Tiene cada uno de ustedes...? etc.,

son preguntas que se plantean diariamente.

Es fundamental dar a los niños la importancia que merecen y *llegar así a una formulación exacta durante la realización de actividades totalmente naturales.*

Al pasar, y sin asumir una actitud didáctica, la maestra puede incluso sugerir:

—Vamos a ver, establezcamos la *relación entre los elementos del conjunto "niños" y los elementos del conjunto "lápices".*

Los alumnos repetirán, sin duda, estas expresiones sin tener siquiera la sensación de haberlas aprendido.

Se practica en seguida algún ejercicio para hacer corresponder dos, tres elementos de un conjunto a un solo elemento de otro.

Cada niño tiene 3 lápices, uno negro, uno azul, uno rojo.

Cada niño tiene 2 cuadernos, uno de escritura y uno de dibujo.

Hay tres lápices para cada niño. Hay dos cuadernos para cada niño. Todas las distribuciones de objetos y de material permiten comparar el número de los elementos contenidos en dos conjuntos.

[3] Relación biunívoca, a condición de que cada niño tenga realmente su saco.

—Aquí está el conjunto de los niños, por una parte, y el conjunto de los caramelos que están en una bolsita, por la otra. Voy a darle un caramelo a cada niño. Quedan todavía caramelos en la bolsita.

O, por el contrario:

—No queda ningún caramelo más:

El conjunto de los caramelos es equipotente con el conjunto de los niños. La maestra puede hacer adivinar la tercera situación posible:

—¿Qué podría pasar de desagradable para algunos de ustedes? Yo le podría dar un caramelo a Juan, uno a Carolina, uno a Daniel, uno a Ana María, y después, de pronto...

También puede hacer vivir esta situación llamando solamente a unos cuantos para dibujar en un caballete, por ejemplo. Siempre habrá, en esos casos, más interesados que los que se pueden conformar... Y se pueden sacar conclusiones: quedan niños sin caramelos, niños que no tienen caballete, etc.

Problema

La maestra puede entonces formular la pregunta:

—Cuando reparto caramelos a los niños pueden pasar tres cosas, ¿cuáles son?

También puede invitar a los niños a representar estos tres cuentos dibujándolos.

7. LAS INTERSECCIONES

El juego de cartas

Se podrá confeccionar el siguiente juego, formado por cartas en las que figuran dibujos (en número variable de 1 a 5) de las siguientes características:

1, dibujos negros (tréboles, cuadrados, hojas o flores, barquitos, aviones, etc.);

2, tréboles negros, rojos, verdes;

3, dibujos rojos (tréboles, cuadrados, hojas o flores, arbolitos de Navidad, peces, etc.);

4, cuadrados rojos, negros, verdes;

5, dibujos grises.

Cada categoría comprende 8 cartas, o sea que habrá 40 en total.

Primer juego

Se juega entre 4 niños, con las cartas de las categorías 1, 2, 5, o sea, con 24 cartas en total (6 para cada niño).

Se dan las cartas exactamente como en una partida común.

Se juega en el suelo, sobre una alfombra que sirve de fondo y sobre la cual la maestra traza ligeramente, con tiza, el contorno de dos rectángulos.

Se dan las convenciones del juego:

- colocar las cartas con dibujos de tréboles en un rectángulo;
- colocar las cartas con dibujos negros en otro rectángulo.

Se plantearán dos preguntas:

—¿Dónde ponemos las cartas con dibujos grises que no son tréboles? *Ni* con las de dibujos negros *ni* con las de tréboles. Estas cartas se *excluyen*.

—¿Qué haremos con las cartas de tréboles negros? Deben encontrarse en el conjunto de tréboles. Pero *también* deben encontrarse en el conjunto de las cartas con dibujos negros.

Habrá que dejar que los niños respondan y encuentren las soluciones prácticas a estas dos preguntas (ver fig. 2).

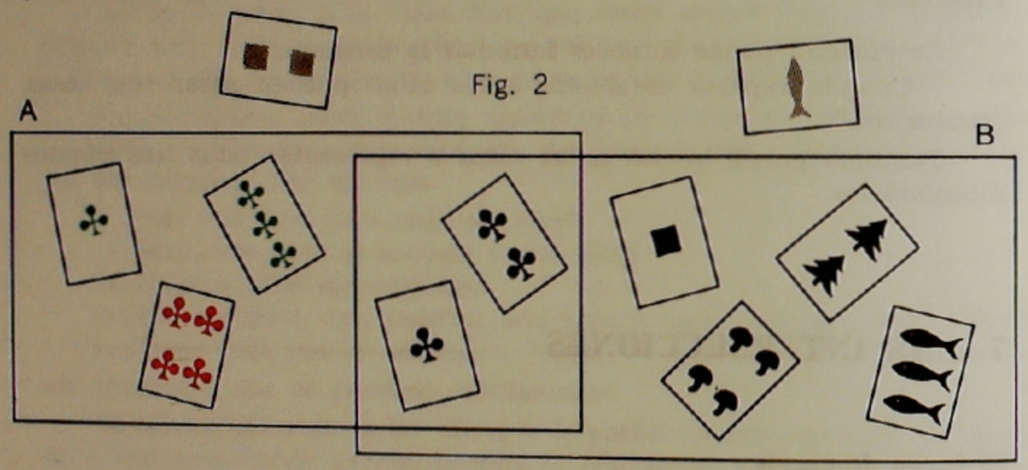


Fig. 2

Rectángulo A: Cartas con tréboles. *Rectángulo B:* Cartas con dibujos negros. *Intersección:* Cartas con tréboles negros.

Segundo juego

Se jugará con las cartas de las categorías 3, 4, 5. También serán en este caso 24 cartas, 6 para cada jugador.

Las convenciones:

- poner en un círculo las cartas con dibujos rojos;
- poner en otro círculo las cartas con cuadrados.

—¿Dónde colocaremos las cartas grises que *no pertenecen ni* al conjunto de las cartas con dibujos rojos, *ni* al conjunto de las cartas con cuadrados?

—¿Dónde pondremos las cartas con cuadrados rojos? Éstas pertenecen *a la vez* al conjunto de las cartas con dibujos rojos y al conjunto de las cartas que tienen cuadrados.

Cada niño juega por turno; el que se equivoca vuelve a recoger la carta mal jugada. Gana el primero que se ha quedado sin cartas (ver fig. 3).

Tercer juego

Esta vez se dispondrá de:

a) 8 cartas con dibujos verdes (en número variable de 2 a 5);

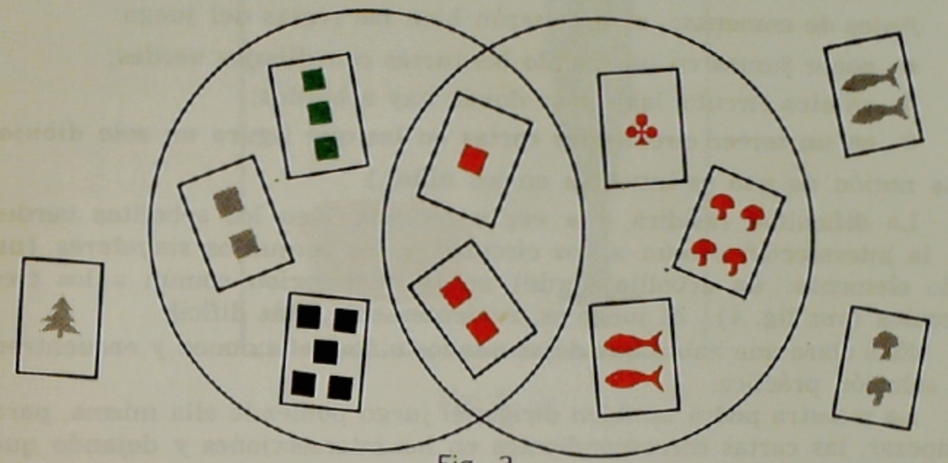


Fig. 3

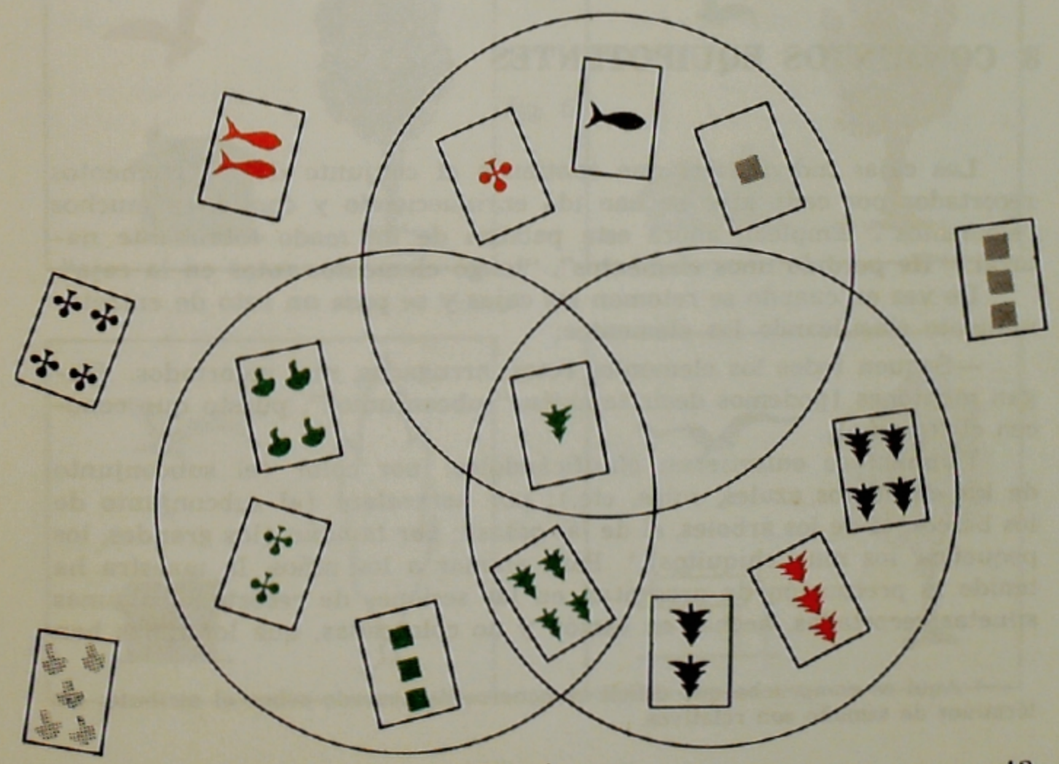


Fig. 4

b) 8 cartas en las que se han dibujado arbolitos de Navidad tanto rojos como verdes, negros o grises (en número de 1 a 5);

c) 8 cartas, en cada una de las cuales se ha dibujado *un solo* dibujo de objetos varios, y en colores distintos (cada dibujo de un solo color). Se tendrá la precaución de que haya varias cartas con *un solo árbol de Navidad verde*.

Tendremos así nuevamente 24 cartas, para repartir entre 4 jugadores (6 cartas para cada uno).

Antes de comenzar, se precisarán bien las reglas del juego:

- poner juntas en un círculo las cartas con dibujos verdes;
- en otro círculo, las cartas donde hay arbolitos;
- en un tercer círculo, las cartas en las que figura *un solo dibujo*.

(La noción de *uno* es intuitiva en los niños.)

La dificultad residirá esta vez en colocar bien los arbolitos verdes en la intersección común a dos círculos, y los conjuntos *singulares* (un solo elemento: *un* arbolito verde) en la intersección común a los tres círculos (ver fig. 4). El juego es, evidentemente, más difícil.

Está claro que habrá que dejar que los niños reflexionen y encuentren la solución práctica.

La maestra podrá también dirigir el juego poniendo ella misma, para empezar, las cartas correspondientes en las intersecciones y dejando que los niños busquen y encuentren el lugar para las demás cartas.

8. CONJUNTOS EQUIPOTENTES

Las cajas individuales que contienen el conjunto de los elementos recortados por cada niño se han ido enriqueciendo y contienen muchos "elementos". Emplean ahora esta palabra de un modo totalmente natural: "He perdido unos elementos", "tengo elementos rotos en la caja".

De vez en cuando se retoman las cajas y se pasa un rato de entretenimiento clasificando los elementos:

—Saquen todos los elementos rotos, arrugados, mal recortados. Hagan montones (podemos decir también "subconjuntos", puesto que conocen el término).

También se entretienen clasificándolos: *por color* (el subconjunto de los elementos azules, rojos, etc.); *por naturaleza* (el subconjunto de los barcos, el de los árboles, el de las casas); *por tamaño* (los grandes, los pequeños, los muy chiquitos).[4] Para animar a los niños, la maestra ha tenido la precaución de presentar, en las sesiones de recortado, algunas siluetas recortadas, hechas en cartón y no coloreadas, que los niños han

[4] Aquí se comprueba qué difícil es ponerse de acuerdo sobre el atributo; los términos de tamaño son relativos.

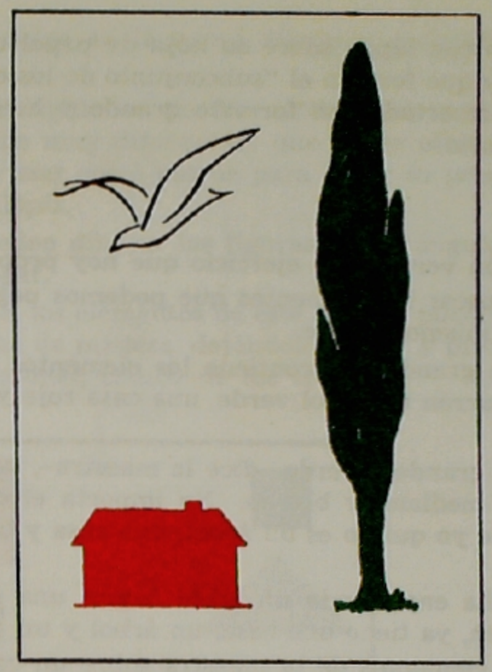


Fig. 5

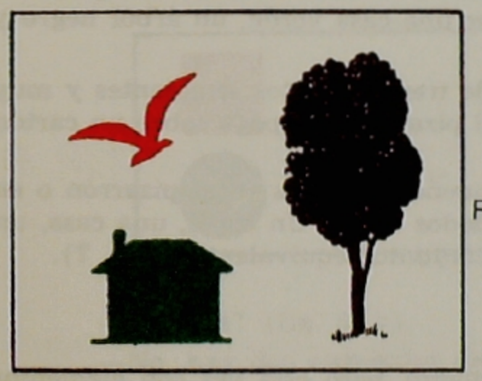
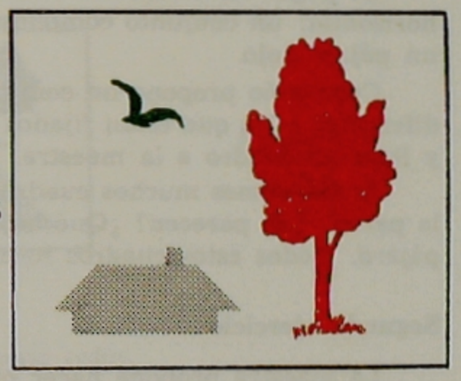


Fig. 6



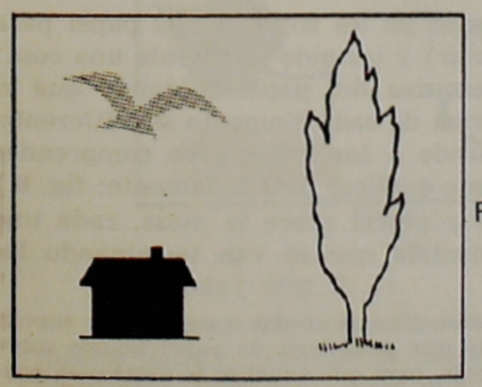
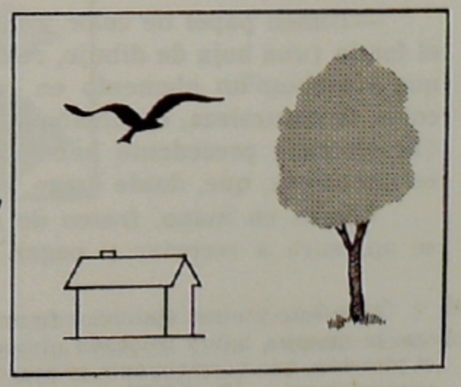


Fig. 7



contorneado luego con lápiz, sobre su hoja de papel o cartulina y finalmente recortado, y que forman el "subconjunto de los elementos dibujados por la maestra", recortados en formato grande y luego guardados en el cajón de su escritorio.

Primer ejercicio

A continuación veremos el ejercicio que hoy propone la maestra:

—Vamos a buscar los elementos que podemos pegar sobre un cartón para formar este mismo paisaje.

Saca el sobre grande que contiene los elementos recortados por ella y fija sobre el pizarrón un árbol verde, una casa roja y un pájaro blanco[5] (fig. 5).

—El árbol es grande y verde –dice la maestra–, la casa muy chiquita y roja, el pájaro mediano y blanco. No importa el color, ni el tamaño ni la forma; lo que yo quiero es un árbol, una casa y un pájaro. Busquen ustedes lo mismo.

—Juan José ha encontrado un árbol negro, una casa verde, un pájaro rojo; muy bien, ya tiene una casa, un árbol y un pájaro (fig. 6).

Se pegan los elementos de la maestra sobre un cartón, formando un gran cuadro vertical; un conjunto compuesto de un árbol verde, una casa roja y un pájaro blanco (hacer repetir esto a los niños).

Se pegan los elementos de Juan José y se obtiene un cuadro pequeño horizontal: un conjunto compuesto por una casa verde, un árbol negro y un pájaro rojo.

Cada niño propone un conjunto de tres elementos semejantes y muy diferentes a los que están fijados en el pizarrón; los pega sobre un cartón y lleva su cuadro a la maestra.

Al fin vemos muchos cuadros pequeños colgados en el pizarrón o en la pared. ¿Se parecen? ¿Qué hay en todos ellos? Un árbol, una casa, un pájaro. Todos estos cuadros forman conjuntos equivalentes (fig. 7).

Segundo ejercicio

La maestra propone hacer otro cuadro, pero esta vez con elementos completamente dispares (geométricos o figurativos).

—Tomen papel de color y las tijeras; yo les voy a dar el papel para el fondo (una hoja de dibujo, rectangular) y les pido solamente una cosa: que coloquen un elemento en cada esquina del papel cuidando que el color, la naturaleza, el tamaño y la forma de cada elemento sea diferente. (El ejercicio precedente habrá preparado a los niños para comprender esta consigna, que, desde luego, se puede explicar detalladamente; fig. 8.)

Tijeras en mano, frasco de goma y pincel sobre la mesa, cada uno se apresura a recortar y pegar. A medida que se van terminando los

[5] En éste y otros ejercicios figuran varios dibujos verdes o negros. Se supone que la maestra habrá colocado previamente una gran hoja de papel blanco sobre el pizarrón, que normalmente es negro o verde, para que aquéllos se destaquen convenientemente. *(N. del T.)*

cuadros, se los cuelga en la pared, siempre y cuando correspondan a la consigna dada.

Para ir más rápido se pueden utilizar los modelos (de naturaleza, forma y dimensión muy diferentes) que se les ofrece en una caja, y que los niños pueden usar como patrón para hacer su propio dibujo, siguiendo la figura con el lápiz.

También pueden dibujar las figuras en los ángulos de la hoja, en vez de recortar y pegar.

Más adelante, los elementos de este trabajo pueden hacerse con arcilla sobre una plancha de madera, dejándolos secar y pintándolos. Se procede entonces a un examen crítico de los trabajos:

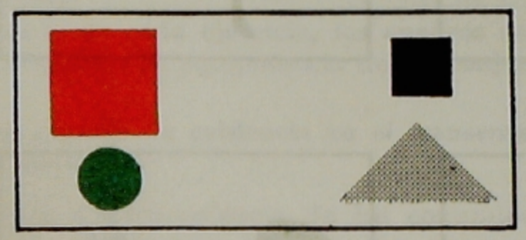


Fig. 8a

—¿Puedo colgar éste? –dice la maestra (fig. 8, *a*).

—No, hay dos elementos de la misma forma.

Fig. 8b

—¿Y éste? (fig. 8, *b*).

—No, hay dos elementos del mismo color.

Fig. 8c

—¿Y éste? (fig. 8, *c*).

—No, hay dos elementos de la misma naturaleza (dos hojas) y del mismo tamaño (el niño ha usado el mismo patrón para recortar esos dos elementos. Hay que hacer que verifique sus trabajos).

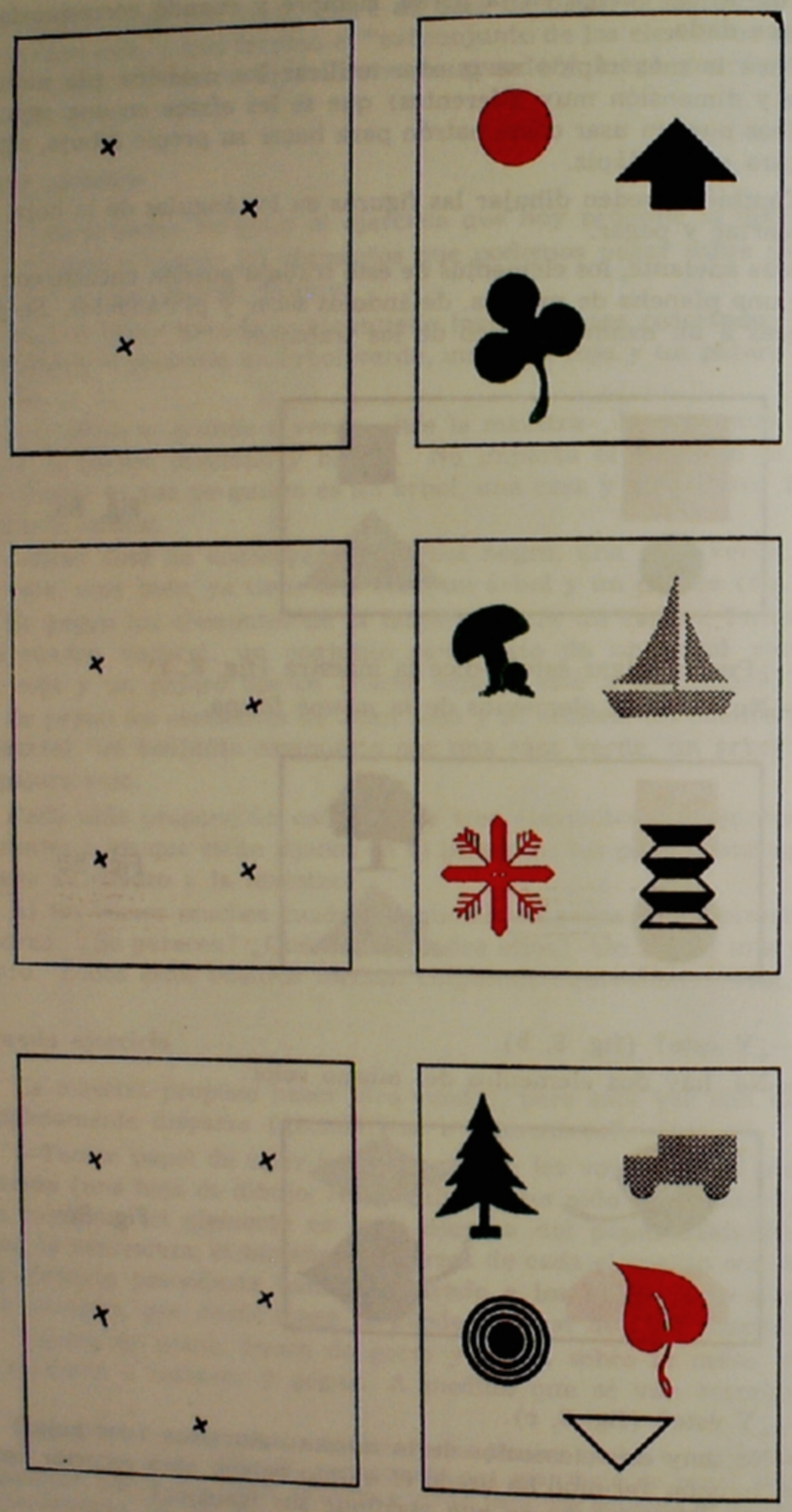


Fig. 9

A continuación se observan detenidamente los pequeños cuadros que han podido colgarse; se los aprecia, se los comenta. Ninguno es igual a otro. Sin embargo, en todos ellos hay un elemento en cada esquina.

Trabajo individual

Proponer fondos diferentes, cuya trama obligue a colocar un número determinado de elementos.

Esto constituirá, al mismo tiempo, una iniciación en el dibujo decorativo.

Por ejemplo, pegar elementos de naturaleza, color, tamaño y forma diferentes sobre las cruces o los puntos o las líneas de los fondos dados (ver *Fichas*).

Después de cada ejercicio, los cuadros se cuelgan y se comentan, a fin de comprobar la equipotencia de los conjuntos (fig. 9).

Nociones puestas en evidencia en el transcurso de estos ejercicios

Noción *de equivalencia* de los conjuntos, adquirida intuitivamente durante la construcción de conjuntos cuyos elementos no tienen niguna propiedad común de naturaleza, forma, color, tamaño. Entonces aparece *la única propiedad común* a estos conjuntos: *el número*, sin que necesariamente se exprese aún su nombre.

9. RECORTADO

UNA CALLE

Proyecto

Construir una calle por medio de pegado de casas, cuyos elementos se habrán recortado de un papel de color.

Elementos

El techo, las dos ventanas, la puerta, la fachada (el modelo de la fachada se lo habrá dado la maestra a los niños: grande - mediana - chica).

La experiencia ha demostrado que a los niños de 5 años, es conveniente darles un modelo de cada elemento.[6]

[6] En efecto, los atributos grande, mediana o chica, son ambiguos. No teniendo modelo patrón, un niño descubrió por sí mismo esta ambigüedad, al tratar de constituir el conjunto de las puertas medianas: "Busco otra, más mediana".

Para los grandes, más evolucionados, que pueden realizar rápidamente el trabajo, basta con el modelo de la fachada. El problema de la identidad necesaria de los atributos grande - mediana - chica, ha sido planteado por ellos mismos.

Método

Nos hacen falta muchas casas, y por consiguiente, muchas fachadas, techos, ventanas, etc. Cada niño recortará a su gusto, en cada clase de trabajo manual, esos elementos en gran número y los depositará en una caja grande, amontonados.

Ensayos

Después de varias clases de trabajo manual y antes de proceder al pegado de las casas sobre una inmensa hoja de papel, cada niño va a tratar de construir una casa en su mesa.

¿Qué va a sacar de la caja grande? La fachada; el techo (a cada casa su techo); la puerta (a cada casa su puerta); las ventanas (a cada casa sus dos ventanas).

El niño debe disponer las cosas de la manera siguiente:

El techo *sobre* la casa; la puerta *en el centro* de la fachada; una ventana *a cada lado* de la puerta.

Convención

Pongámonos bien de acuerdo en que las dimensiones del techo estarán en relación con las de la fachada, las ventanas, la puerta, etc.

La maestra pasa por entre las filas, critica, verifica, diciendo en voz alta:

—*A cada casa su techo, un techo para cada casa; a cada casa su puerta, una puerta para cada casa*, etc., pero *dos* ventanas para *cada* casa.

La calle

Cuando su casa esté correctamente construida, cada niño puede ir a pegarla sobre el papel, para formar la calle. Éste será trabajo *libre*, sin *ninguna consigna* dada por la maestra.

Antes de pegar los elementos en la hoja grande de papel, los colocará en proyección vertical.

Crítica

El cuadro formado, ¿se parece a una calle? ¿Por qué? (casas pegadas al azar sobre toda la superficie de la hoja). ¿Cómo había que colocarlas? Unas *al lado* de las otras.

La calle está en el medio de las hileras de casas.

Hacer *una hilera* de casas de *cada lado* de la calle.

El trabajo no ha salido bien. Hay que comenzar de nuevo, pero, ¿cómo? Ahora está todo pegado.

¿Quedarán tal vez elementos en la caja? La maestra toma la caja y saca un techo, otro techo, una ventana, otra ventana más, ¡oh!, un perrito, un árbol... ¡está todo mezclado! Se podrá empezar de nuevo mañana, pero hay que ordenar...

La maestra vacía la caja en una mesa grande y confía el ordenamiento a un grupo, mientras los demás observan y critican.

Se juntan todos los techos rojos, las ventanas verdes.

—Bien –dice la maestra–, *juntemos* los techos, *juntemos* las ventanas, *juntemos* las fachadas y no volvamos a mezclar los elementos. Para separarlos bien, voy a hacer pequeños círculos con tiza en la mesa. Fíjense:

el *conjunto* de las fachadas;
el *conjunto* de los techos;
el *conjunto* de las ventanas.

—Y el perrito, el árbol, el autito, ¿qué hacemos con ellos? ¿Pueden estar en la calle?

—Sí, guardémolos en la caja y ya veremos luego cómo utilizarlos.

—¡Oh!, ¿una puerta azul? ¿La podemos poner con las puertas? Las opiniones están divididas.

—Pero sí, *de todos modos* es una puerta.

El ordenamiento se ha terminado. La caja no contiene más que recortes diversos y sobre la mesa tenemos:

el *conjunto* de las fachadas;
el *conjunto* de los techos;
el *conjunto* de las puertas;
el *conjunto* de las ventanas.

Observemos bien cada *conjunto*, el de las fachadas, por ejemplo: Hay grandes y muy pequeñas. Y también medianas.

La misma observación cabe para los techos.

No se puede poner un techo más chico que la casa, ni una ventana más grande que la puerta.

Para entonces, ya algunos han comenzado a hacer montones de fachadas grandes, chicas y medianas, en el interior del círculo correspondiente. Continuemos.

Realizamos el mismo trabajo para las puertas y para las ventanas. Se les indica a los que quieran hacer una casa grande que busquen:

una fachada *grande*;
un techo bastante *grande* para la fachada;
una puerta suficientemente *grande* para la casa.

Los aficionados a construir casas *pequeñas* y *medianas* hacen, a su vez, la elección de sus elementos.

Cada uno comienza a construir su casa en su mesa.

¿Cada fachada tiene su techo?, ¿su puerta?, ¿sus dos ventanas?

¿Hay un techo para cada fachada? Sí.

Sobran algunas fachadas en el círculo. *No sobra* nada en el círculo de los techos. Pero *sobran* algunas ventanas...

El problema de las puertas:

Es más complejo. Se encuentran puertas marrones *y* grandes; marrones *y* medianas; marrones *y* chicas. Puertas azules *y* grandes; azules *y* medianas; azules *y* chicas. ¿Es el color de la puerta lo que importa?

¿Le puedo poner una puerta chica azul a una casa grande?

¿Una puerta grande azul a una casa chiquita? *No.*

Pero sí una puerta grande azul a una casa grande (hacerles buscar). *O* una puerta grande marrón a una casa grande.

Cada uno puede elegir el color de su puerta.

Hacemos, entonces, tres montones en el interior del círculo:

puertas grandes, marrones o azules;
puertas chicas, marrones o azules;
puertas medianas, marrones o azules.

Y cada niño, fachada en mano, va a elegir la puerta cuyo tamaño le convenga, pero la elige marrón o azul, a su gusto.

Se ha construido de nuevo una casa, grande, chica o mediana, en la mesa de cada uno.

La calle terminada

Recordar las críticas formuladas después del primer trabajo. Recordar las consignas: las casas deben alinearse una junto a otra, contra la acera.

La calle debe pasar *entre* las dos hileras de casas. ¿Cómo no equivocarse si cada uno pega al azar, sin fijarse en el trabajo de los otros?

¿Cómo pegar las casas en línea recta, junto al borde de la acera?

Hay que dibujar la acera, dibujar la calle, etc.

Hacer un plan. Después de varios ensayos en el pizarrón, criticados, recapitulados, se establece el plan definitivo sobre la hoja en que van a pegarse las casas.

Se hace al fin el trabajo de pegado, bajo la dirección de la maestra, esforzándose cada niño por respetar las consignas. La calle queda terminada.

¿Qué vamos a poner ahora en nuestra calle? Tenemos en la caja los elementos que pueden figurar en una calle. Tomemos de nuevo la caja y constituyamos:

El conjunto de los elementos que pueden figurar en la calle. La maestra los nombra al exhibirlos: ¿un perro?, sí; ¿un árbol?, sí; ¿otro perro?, sí; ¿un auto?, sí; ¿un hombre?, sí; ¿otro árbol más?, sí.

—Los niños que han recortado otras cosas, además de techos y ventanas, han hecho muy bien, porque ahora tendremos una hermosa calle. Pero, hagamos *el conjunto de los elementos recortados que pueden estar en la calle.* Y traza un círculo único sobre la mesa.

Los niños depositan en ese círculo, reagrupándolos espontáneamente

en *subconjuntos:* 3 árboles, 2 autos, 4 hombrecitos, 1 surtidor de nafta, 2 perros.

—Pero –dice la maestra–, los perros que no tienen bozal y el certificado de vacuna en el collar no deben andar por la calle; está prohibido.

Se *excluyen* los dos perros. Es necesario, pues, *excluirlos.* No forman parte de los *elementos recortados* que pueden colocarse en la calle.

10. REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA

Ya hemos insistido sobre la necesidad de asociar el dibujo, el recortado y el modelado, a la actividad y a la adquisición paralela del lenguaje. Aquéllos son los medios de expresión familiares al niño del jardín de infantes; cuando los utiliza, ha dado ya un paso hacia el símbolo. A nosotros nos corresponde ayudarlo en este sentido durante el aprendizaje del cálculo. La escritura, que se llega a dominar poco a poco entre los 4 y 6 años, podrá también sernos de utilidad.

Mientras los niños dibujen libremente y a su gusto, al azar de la inspiración del trazo y del color, jugarán con el símbolo y con el número, sin ninguna inquietud. En cuanto se les exija un esfuerzo de precisión: dibujar, por ejemplo, un cierto número de objetos agrupados, el asunto ya tendrá otro cariz.

Los niños logran muy difícilmente la relación biunívoca por medio del dibujo. En éste se encuentran siempre dos o tres objetos de más o de menos con respecto a la realidad.

Cuando no se sabe contar, cuando no se sabe escribir, es de mucha utilidad saber dibujar y dominar los movimientos.

¿Cómo comunicar a la directora el número de alumnos presentes, a fin de que pueda mandar un cuaderno para cada uno de ellos?

¿Ir en grupo a buscar cada uno el suyo? Resulta muy largo.

¿Contar el número de niños? En seguida se ve que resultaría infructuoso.

Hacer cada uno su retrato, recortarlo y enviar el conjunto de los retratos de todos los niños de la clase: esto es más fácil. Pero, ¿cómo podría un solo niño dibujar en una hoja el retrato de todos sus compañeros además del suyo?

Sin embargo, cada vez que se trate de comunicarse (con la directora, las porteras, los alumnos de otros grados) se planteará el mismo problema.

No vamos a insistir sobre la manera –ya clásica– de explotar estas situaciones diferentes. Propondremos, a título de sugerencia y de ejemplo, la confección de hojas dibujadas, que se irán coleccionando en un álbum, lo que permitirá ver cómo la representación se va haciendo cada vez más abstracta. Éste será un medio (entre tantos otros que no hay por qué despreciar) de llegar al mismo tiempo a los conjuntos referenciales y luego a los números.

Esta última serie de ejercicios la realizaremos en forma de croquis. Estos croquis podrán repetirse en las ilustraciones individuales que se

entregarán a cada uno, quienes los recortarán para luego pegarlos en hojas apropiadas, o los dibujarán directamente en las hojas (los más hábiles). Lo esencial es conducirlos al empleo de signos cada vez más abstractos.

El álbum confeccionado con los recortes y dibujos presentará, poco más o menos, el aspecto de las páginas que siguen (ver figuras 10 a 27). Se lo podrá mostrar a los familiares con el pretexto de relatarles algunos sucesos de la vida escolar, lo que dará mayor importancia a la noción del valor de los signos.

El conjunto de los títeres de la clase

LÁMINA I. *Bailarinas y jirafas reunidas. Se exponen en el pizarrón o en un caballete.*

Dar a cada niño una ilustración que represente ese mismo conjunto de títeres de la clase. Pedirle que recorte las bailarinas para disponerlas en farándula. Las jirafas no bailan (fig. 10).

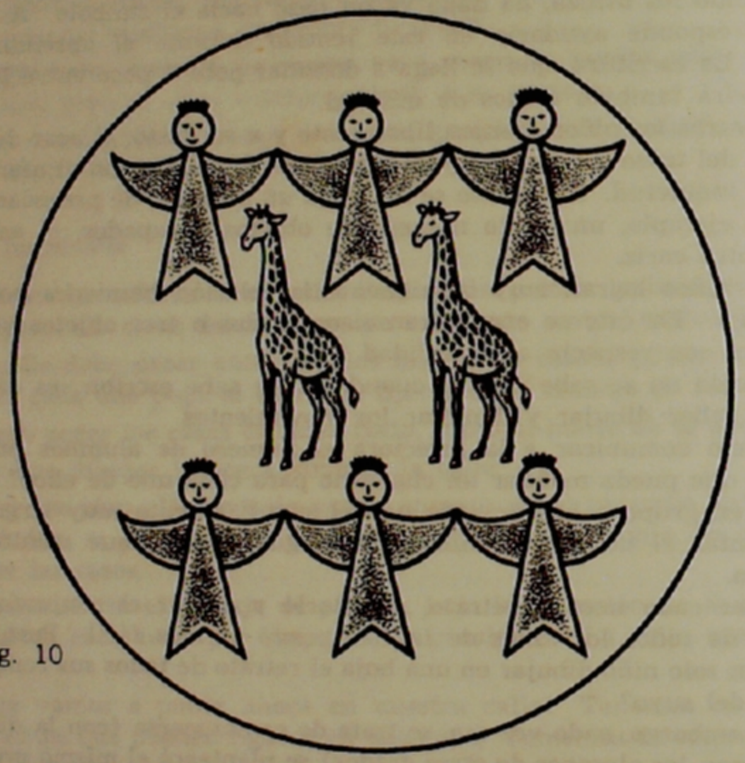


Fig. 10

LÁMINA I (cont.). *El subconjunto de las bailarinas.*
Pegarlas cuidadosamente en el cuaderno (fig. 11).

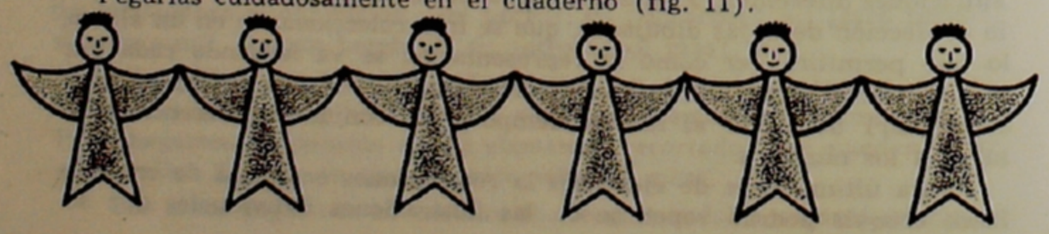


Fig. 11

LÁMINA II. *El subconjunto de las jirafas.*

Quedan dos jirafas, que no bailan (fig. 12). Recortarlas, pegarlas en el cuaderno. Darles de comer: a cada jirafa un plato grande de alimento y un gran recipiente con agua.

Envío de los niños de otra clase equivalente

LÁMINA III. Una lámina con figuras para recortar y pegar, agrupándolas en subconjuntos. Trabajo que se realizará en el cuaderno (fig. 13).

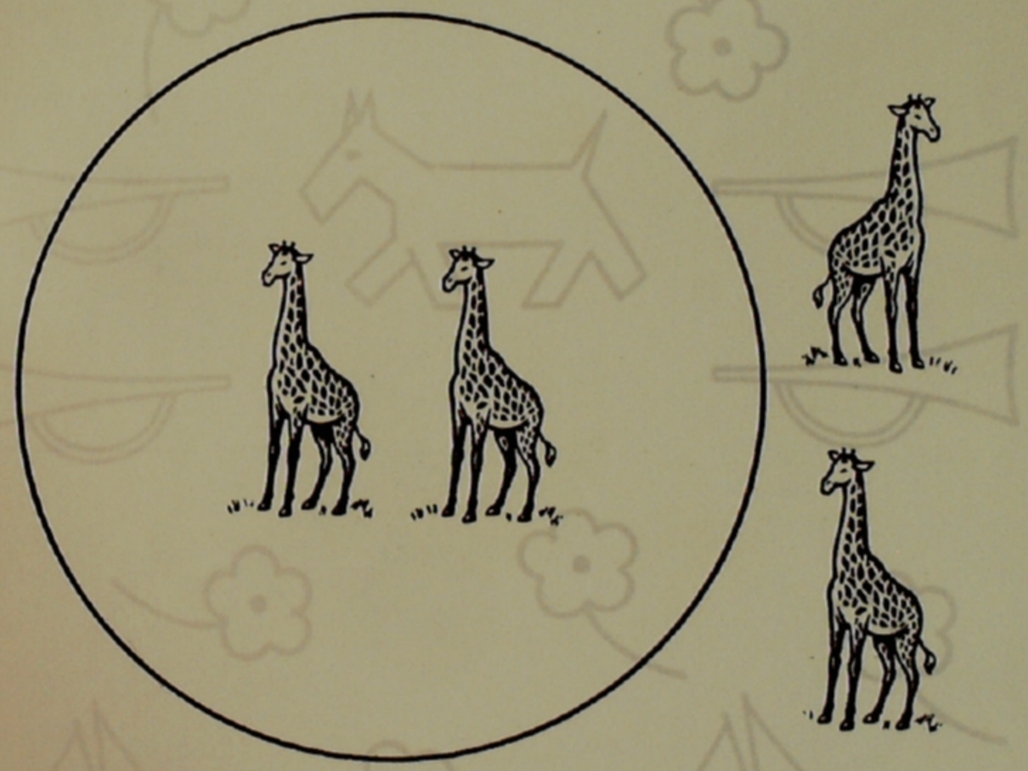


Fig. 12

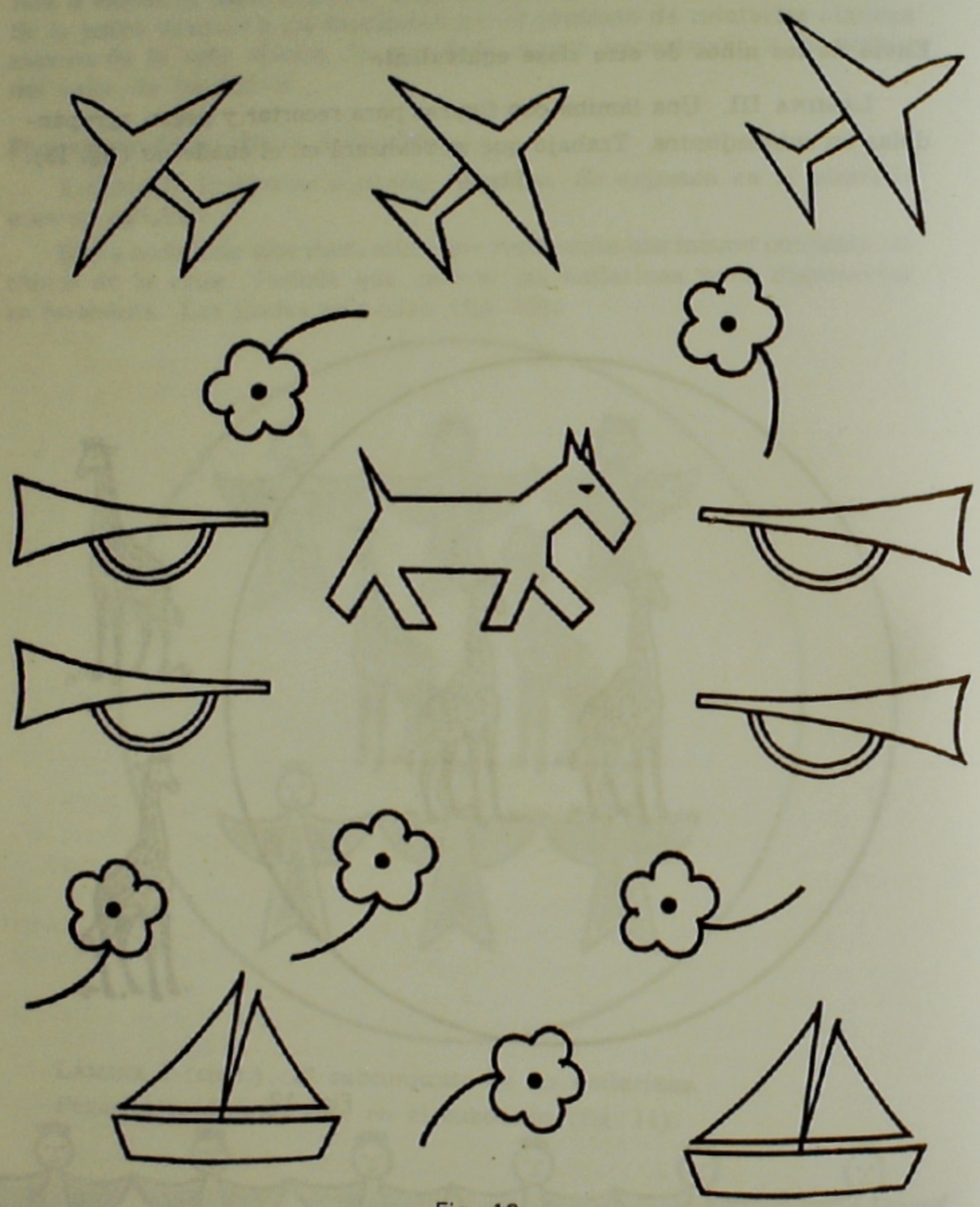


Fig. 13

Un perrito para cada niña

LÁMINA IV.

Fig. 14

Un cuento dibujado por la maestra en el pizarrón

LÁMINA IV (bis).

Un niño juega con un globo rojo.
Otro niño juega con dos globos.
Pero hay dos niños que sólo tienen un globo para los dos.
Darle un globo a cada uno de ellos.

Hacer dibujar en el cuaderno (fig. 15).

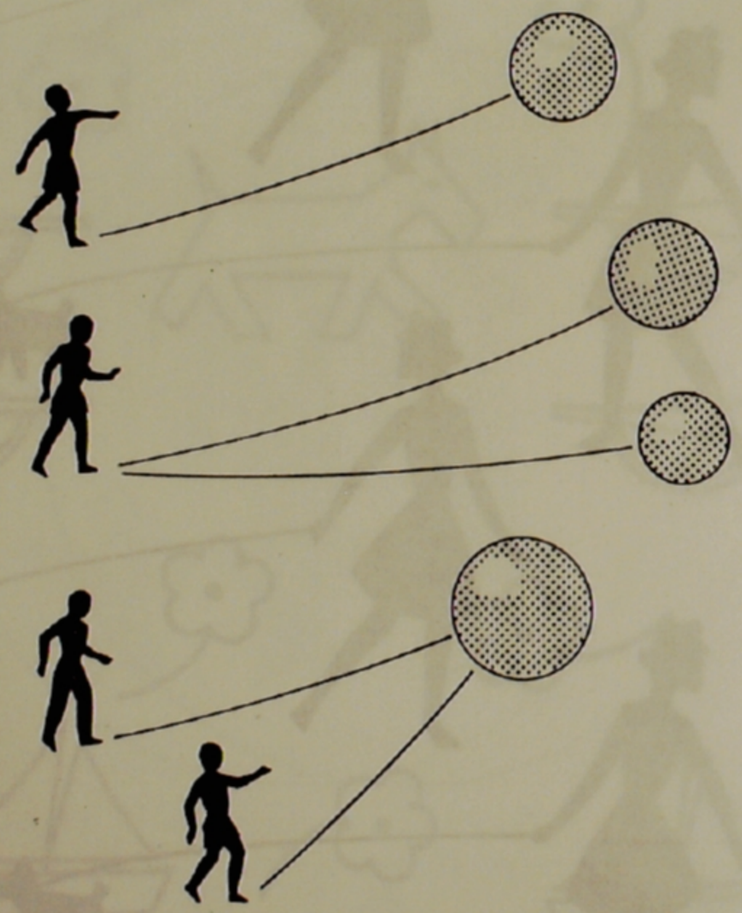


Fig. 15

Proyecto: Fabricación de títeres para los niños de otra clase equivalente

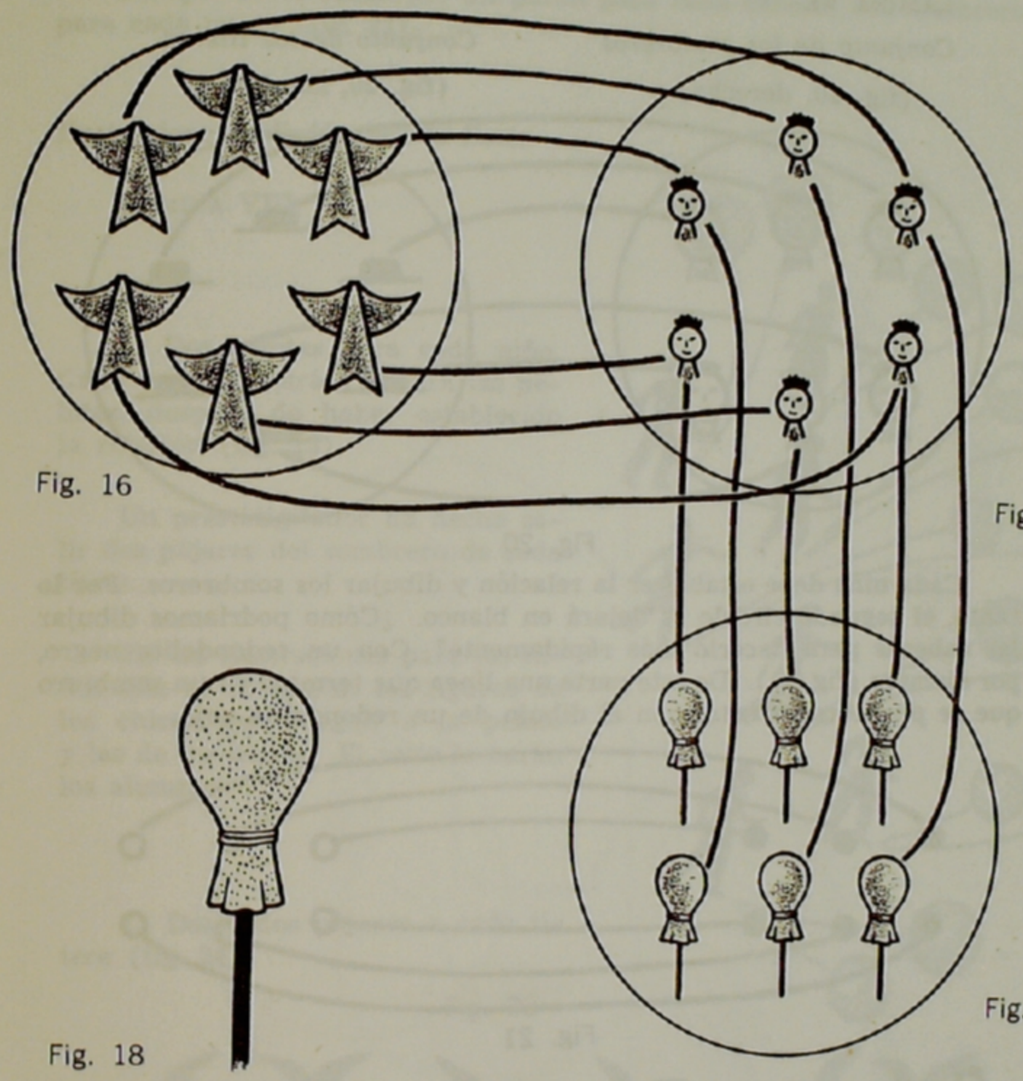


Fig. 16

Fig. 17

Fig. 18

Fig. 19

LÁMINA V. *Conjunto de los vestidos.* Dibujar en el cuaderno solamente este conjunto. El niño hará el resto, estableciendo las relaciones (fig. 16).

Conjunto de las cabezas. Una cabeza para cada vestido (fig. 17).

Se han preparado los vestidos. A partir de cada vestido el niño debe dibujar un trazo, y en la extremidad de éste la cabeza correspondiente.

El mismo procedimiento se seguirá para la construcción del conjunto de las "cachiporras" que sirven para la confección de los títeres: cada cabeza está modelada sobre una "cachiporra" de aserrín (fig. 18).

Conjunto de las "cachiporras". Una para cada cabeza (fig. 19).

Queremos comprar un sombrero para cada títere. Un sombrero para cada cabeza. Dibujemos entonces las cabezas solamente.

LÁMINA VI.

Conjunto de los sombreros (fig. 20, derecha).

Conjunto de los títeres (fig. 20, izquierda).

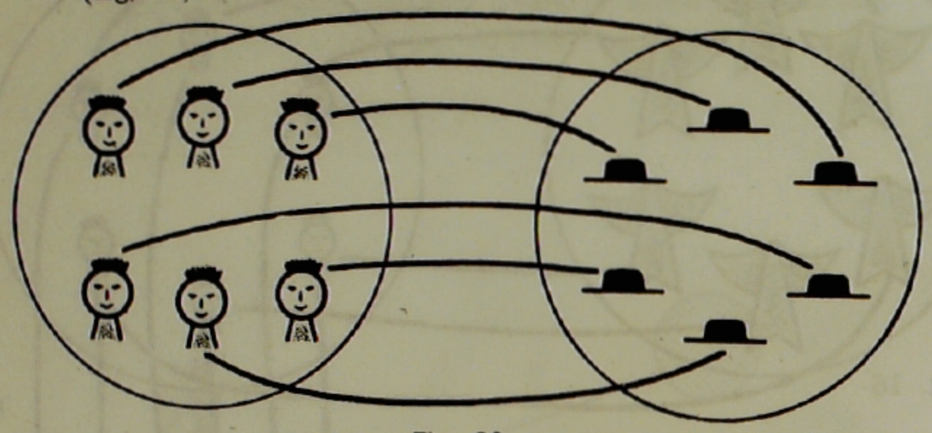


Fig. 20

Cada niño debe establecer la relación y dibujar los sombreros. Por lo tanto, el segundo círculo se dejará en blanco. ¿Cómo podríamos dibujar las cabezas para hacerlo más rápidamente? Con un redondelito negro, por ejemplo (fig. 21). De éste parte una línea que termina en un sombrero que se puede representar con el dibujo de un redondelito rojo.

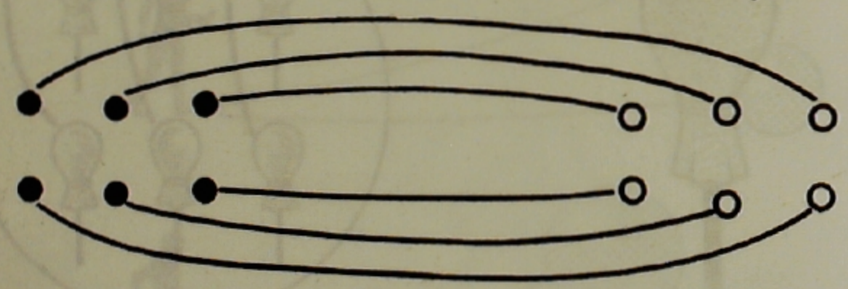


Fig. 21

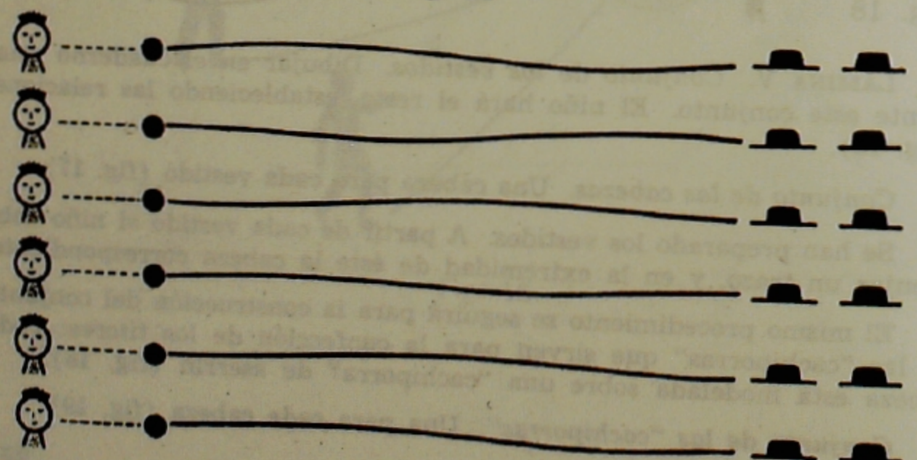


Fig. 22

LÁMINA VII. Pero hace falta también un sombrero para cada títere de la clase. La maestra proveerá entonces dos sombreros para cada cabeza.

Dibujar en el cuaderno: un punto para cada cabeza; dos sombreros para cada punto (fig. 22).

Ilustraciones individuales: la fiesta

LÁMINA VIII.

1. Dos pelotas para cada niño. Cada uno recortará y pegará las pelotas, después de haber establecido la relación (fig. 23).

Un prestidigitador ha hecho salir dos pájaros del sombrero de cada títere.

En las ilustraciones para los niños sólo se dibujarán las figuras de los chicos que juegan a la pelota y las de los títeres. El resto lo harán los alumnos.

2. Darle dos pájaros a cada títere (fig. 24).

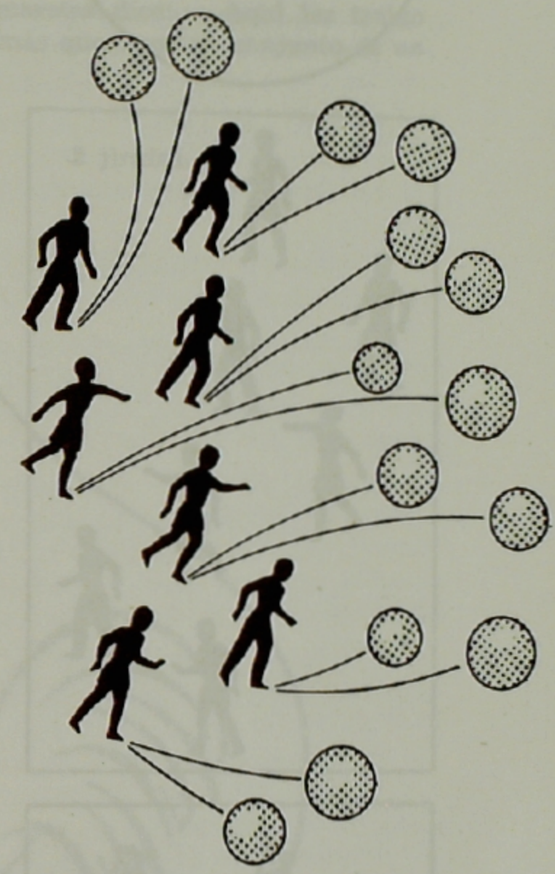


Fig. 23

Fig. 24

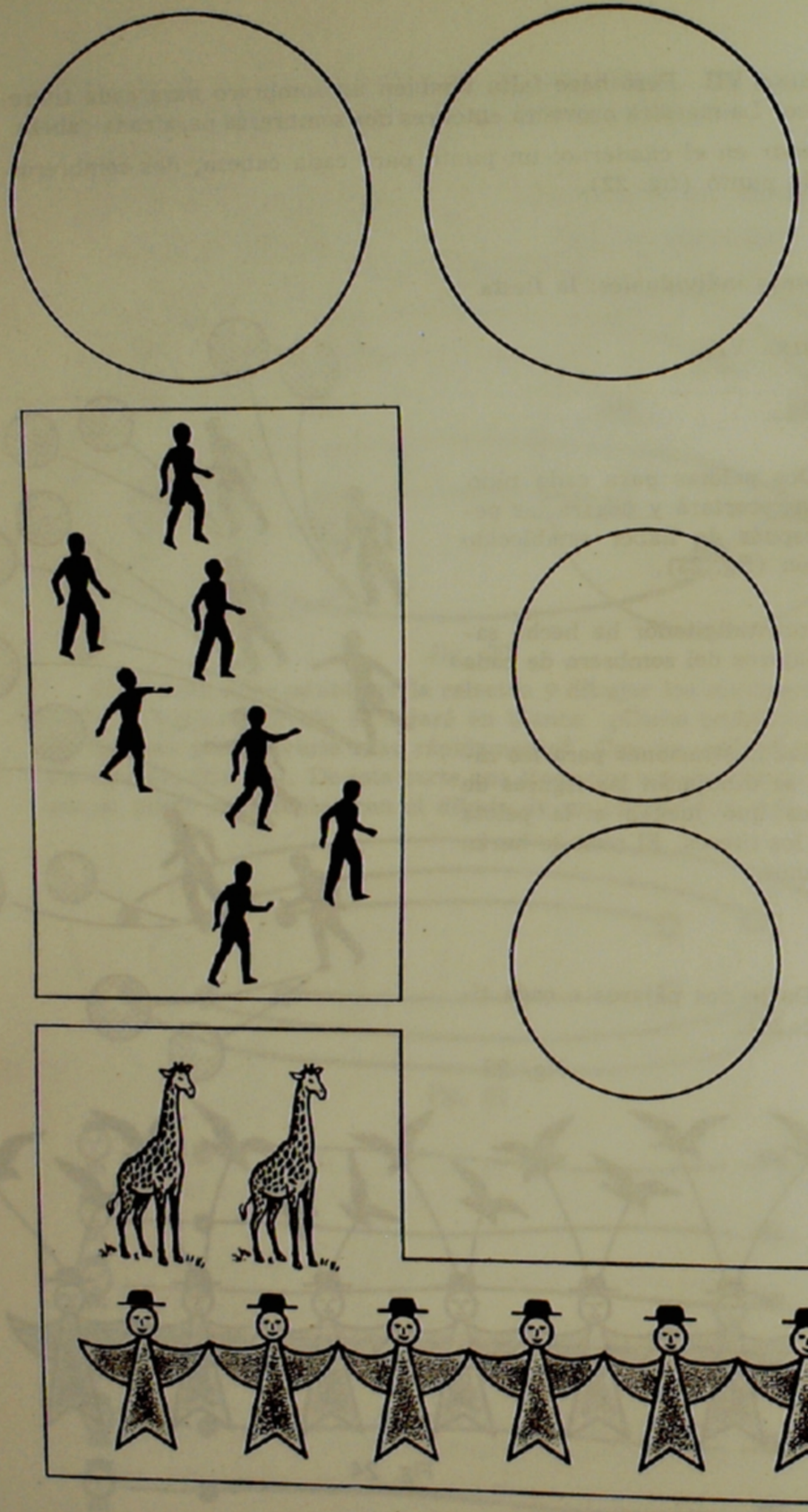


Fig. 25

Fig. 26

LÁMINA IX. Pedir a los niños que dibujen con signos abstractos de su elección (proponerlos), *el conjunto de las jirafas, el conjunto de los fardos de pasto* (a cada jirafa se le han dado dos fardos de pasto; fig. 25).

LÁMINA X. *Los actores de la fiesta.*

Conjunto de los niños. Conjunto de los títeres.

Pedir a los niños que representen los elementos de cada uno de los conjuntos, de manera que quepan en los dos círculos (fig. 26).

LÁMINA XI. *Un títere nuevo.* La maestra dice: —Aquí les traigo un títere nuevo. De estos títeres no hay más que uno: *un conjunto de un títere* (fig. 27).

Tenemos ahora:

6 bailarinas, 1 gallo, 2 jirafas.

Unamos ahora los dos conjuntos:

6 bailarinas, 1 gallo,

2 jirafas.

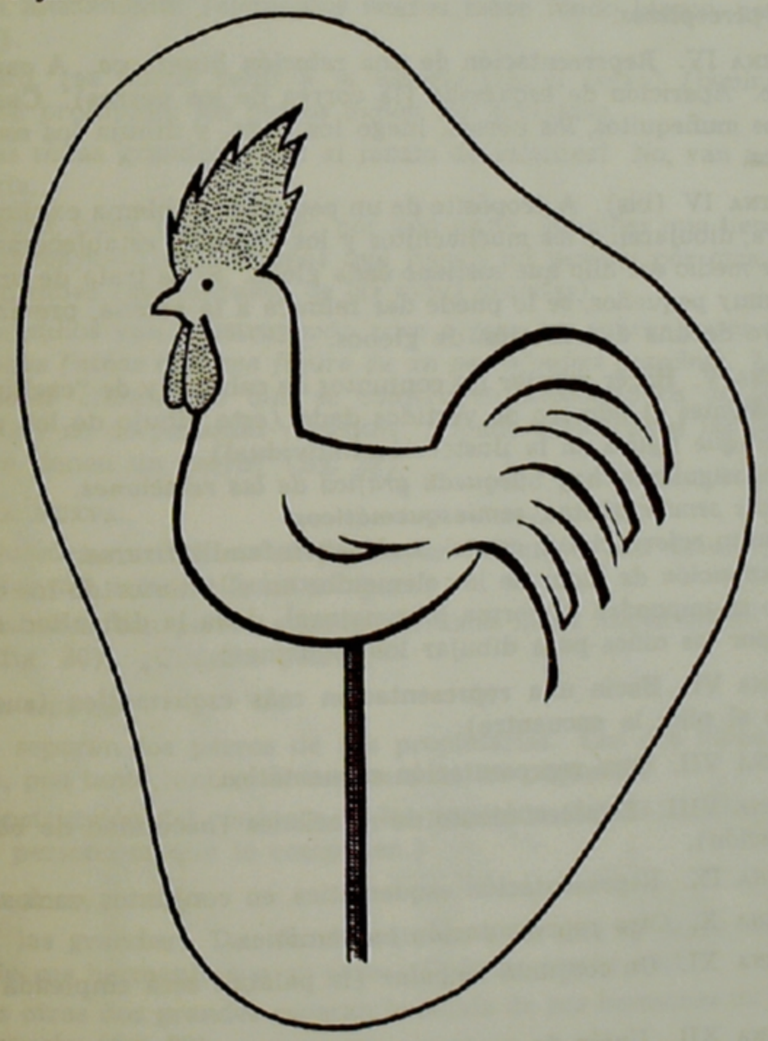


Fig. 27

Nociones puestas en evidencia en el transcurso de estos ejercicios

LÁMINA I. Representación dibujada por la maestra (o por los niños cuando son muy hábiles) de un *conjunto de elementos* que figuran en la realidad en la clase. Esta actividad puede ser motivada por el interés de informar a los padres, a los niños de otras clases (comunicación), o de guardar un recuerdo (memoria).

Elección del *conjunto referencial* 8.

Constitución de un subconjunto por elección de los elementos que *interesan* (las bailarinas para una fiesta). Es la elección de un *atributo* la que decide la construcción de este subconjunto. Procedemos por *descripción.*

LÁMINA II. Representación del *conjunto complementario.* Noción de *resto.*

LÁMINA III. Constitución de *subconjuntos* de objetos representados. *Números perceptivos.*

LÁMINA IV. Representación de una *relación biunívoca.* A cada niña su perrito. Aparición de *esquemas* (la correa de los perros). Cada niño recorta los muñequitos, los perros, luego los pega, y dibuja los esquemas respectivos.

LÁMINA IV (bis). A propósito de un pequeño problema explicado por la maestra, dibujarán a los muchachitos y los globos y establecerán la relación por medio del hilo que sostiene cada globo. Si se trata de una clase de niños muy pequeños, se le puede dar mímica a la escena, previamente, con motivo de una distribución de globos.

LÁMINA V. Hacer dibujar los conjuntos de cabezas y de "cachiporras" correspondientes al número de vestidos dado (este dibujo de los vestidos es el único que figura en la ilustración individual).

Por consiguiente, hay *búsqueda gráfica de las relaciones.*

Croquis semirrealistas, semiesquemáticos.

Conjunto referencial 6, con el cual deben familiarizarse.

Transposición de lugar de los elementos en el interior de los círculos (todo esto se impondrá en forma bien natural, dada la dificultad experimentada por los niños para dibujar los esquemas).

LÁMINA VI. Hacia una representación más *esquemática* (sugerir y hacer que el niño la encuentre).

LÁMINA VII. Otra representación *esquemática.*

LÁMINA VIII. Establecimiento de relaciones (necesidad de *variar la representación*).

LÁMINA IX. Representación esquemática en conjuntos vacíos.

LÁMINA X. Otra representación esquemática.

LÁMINA XI. Un conjunto *singular* (la palabra será empleada por la maestra).

LÁMINA XII. *Unión de conjuntos. Conjunto referencial* 9.

11. REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA DE UN CUENTO

El siguiente trabajo se presenta en forma de un cuento narrado por la maestra y que los niños deben ilustrar a medida que se va desarrollando el relato, con la ubicación de los elementos móviles recortados por ellos. La lámina nº 1 se habrá repartido con antelación a cada uno de ellos, quienes movilizan a los personajes recortándolos.

Veamos el texto del relato, a título de ejemplo:

El primer día de clase, varios niños de la misma casa se presentan en el jardín de infantes. Hay niñas grandes y pequeñas, varones chiquitos; dos niñas grandes han llevado su perro; dos niñas pequeñas también han llevado su perro.

Los niños disponen los elementos sobre un fondo en el que se destaquen nítidamente (elementos negros sobre fondo blanco, por ejemplo, fig. 28).

Pero, ¿se puede venir a la escuela con el perro? (lámina nueva). Eso está prohibido; los perros deben ser *excluidos.*

Las niñas grandes, ¿van al jardín de infantes? No, van a la escuela primaria.

Habrá, pues, que revisar: por una parte, las niñas que tienen un perro *(subconjunto de las niñas que tienen un perro)*; por otra parte, las niñas grandes *(subconjunto de las niñas grandes).*

Los niños van construyendo poco a poco los subconjuntos de *figuras recortadas (niñas con una figura de un perro, niñas grandes).* La maestra hace notar claramente que se construyen subconjuntos de figuras recortadas y no de personas vivientes. ¿Dónde colocaremos las niñas grandes que tienen un perro? (fig. 29).

LÁMINA NUEVA.

¿Quiénes quedan en el jardín de infantes? Los niños. ¿Cuántos? Las niñas sin perro. ¿Cuántas?

Las niñas con perros quedan excluidas hasta nueva orden. ¿Cuántas son? (fig. 30). ¿Cuántos perros?

LÁMINA NUEVA.

Se separan los perros de sus propietarias. Las dos niñas chiquitas pueden, por tanto, unirse al *conjunto de los pequeños.*

Construcción del *conjunto de los pequeños* (fig. 31). (Hacer *enumerar* los personajes que lo componen.)

LÁMINA NUEVA.

¿Y las grandes? Dos de ellas llevan cada una su perro, además del perro de sus hermanitas, a su casa. ¿Cuántos perros son?

Las otras dos grandes esperan la salida de sus hermanas en la puerta de la escuela (fig. 32).

Fig. 28

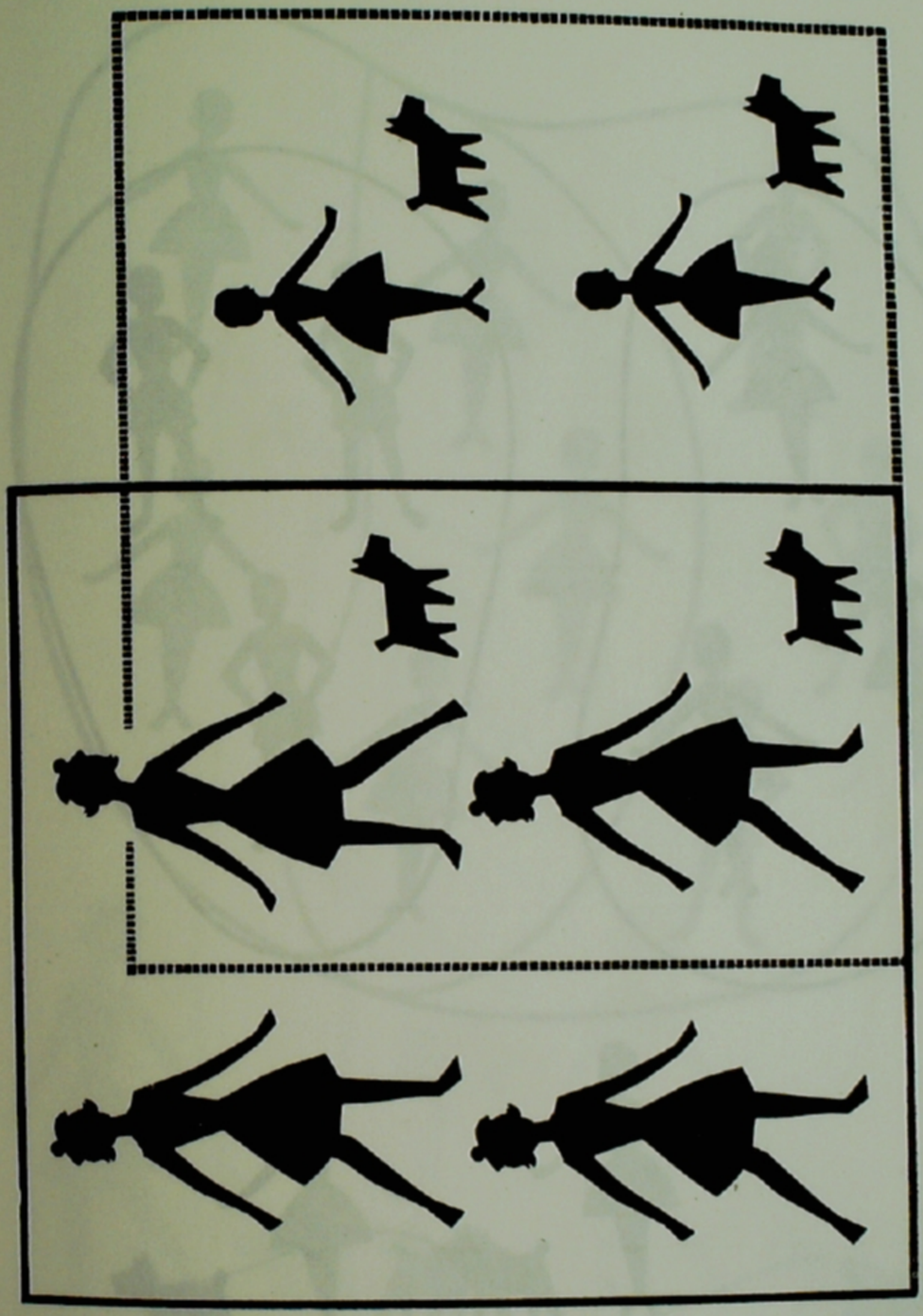


Fig. 29

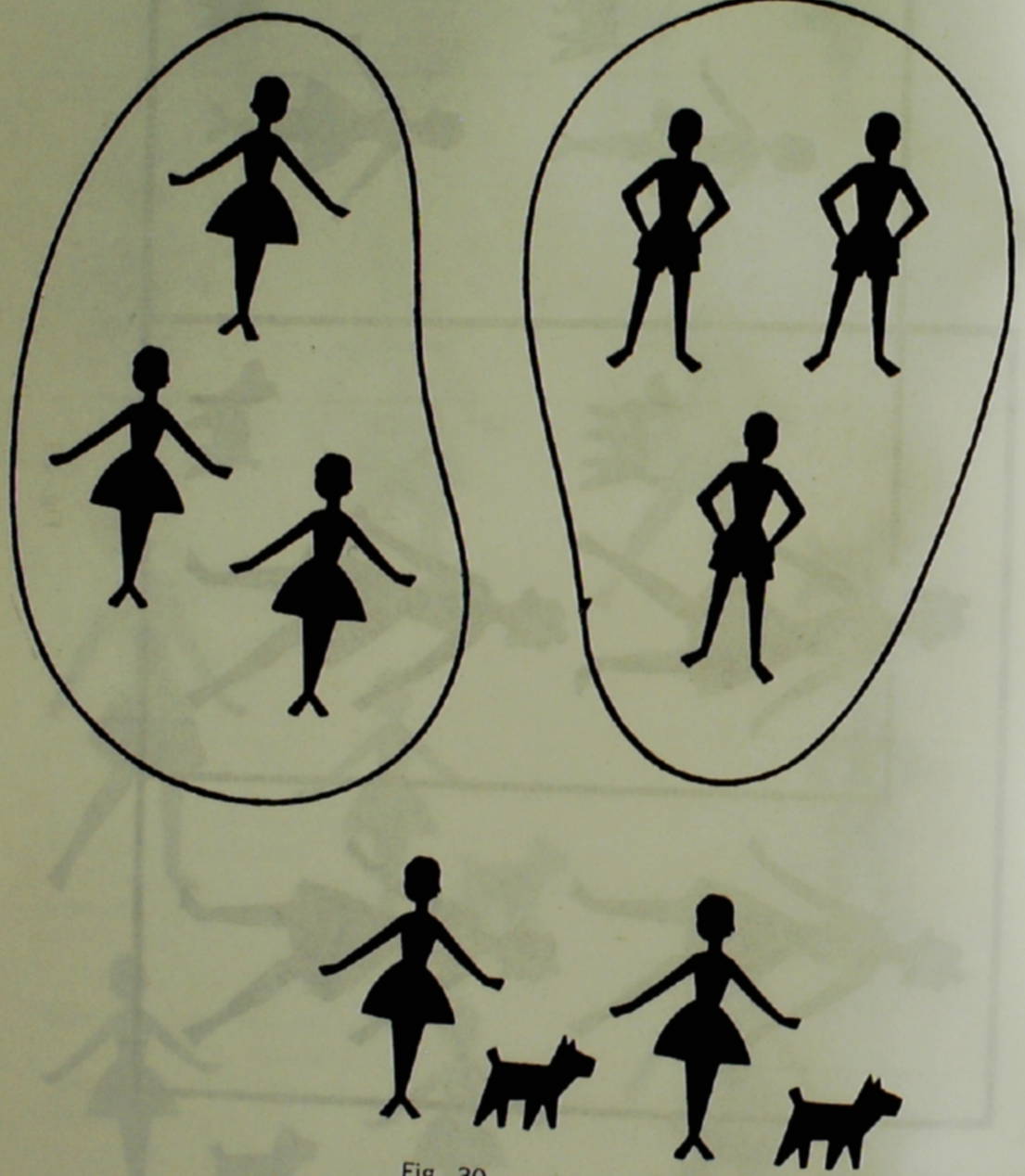


Fig. 30

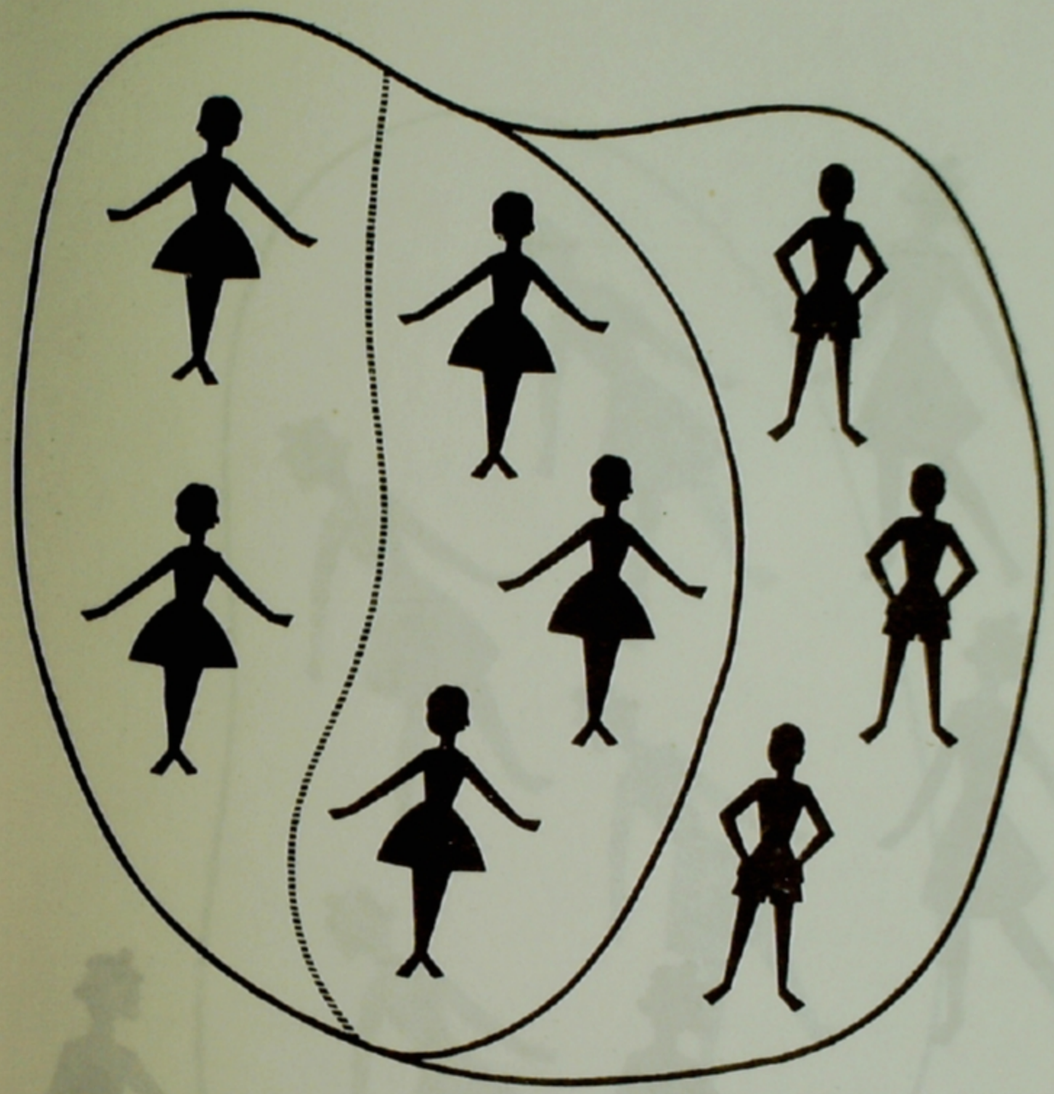


Fig. 31

Fig. 32

Fig. 33

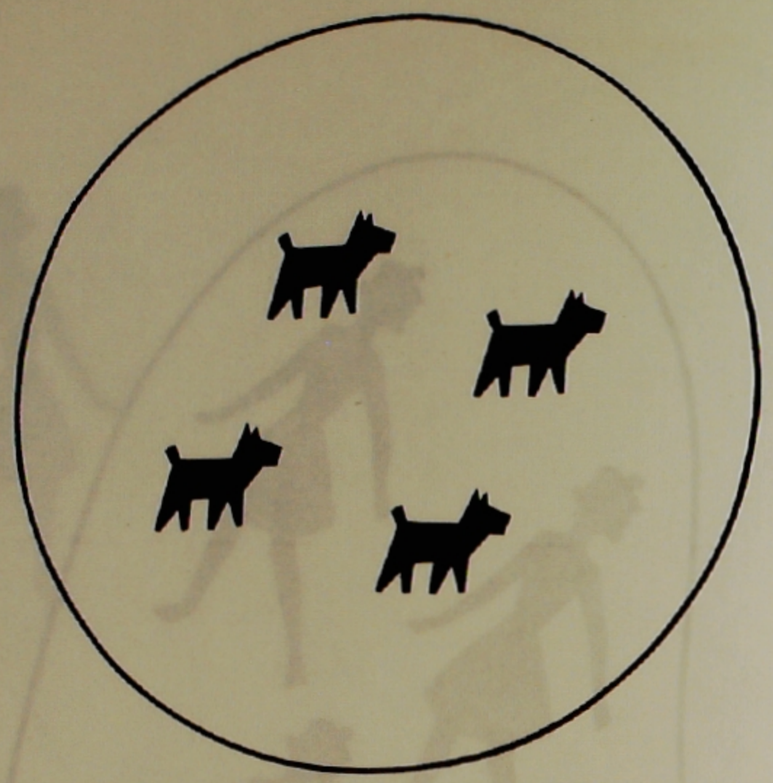


Fig. 34

LÁMINA NUEVA.

Ahora podemos construir el conjunto de las ninas grandes de la familia que van a la escuela primaria. Dos que esperan en la puerta. Dos que han regresado de su casa. ¿Cuántas son en total? (fig. 33).

LÁMINA NUEVA.

El conjunto de los perros está en la casa. ¿Cuántos perros hay? (fig. 34).

Ejercicio inverso

(Con las mismas siluetas)

La maestra, que disponía también de una lámina de la que ha recortado los mismos personajes con que han trabajado los niños, les sugiere inventar un cuento diferente, en el que intervengan los trece hermanos y sus cuatro perros, y que ella ilustrará con las figuras recortadas de su lámina. Por ejemplo, dice: los perros podrían haber estado en poder de los niños en vez de las niñas, o podrían haberse salvado de la prohibición de entrar a la escuela..., o un niño pudo haberse escapado a la calle...

El ejercicio es más difícil, pues es necesario imaginar y expresarse a la vez, con precisión, o bien el primer intento ha salido mal a causa de que los medios de expresión no han sido todavía dominados. La maestra presta su ayuda en la medida que la considera indispensable.

Hacia una representación más abstracta

Después de haber comprobado cuán largo y difícil es recortar las siluetas, la maestra apela a otros medios de representación más rápidos: los dibujos, por ejemplo (dibujar las niñas grandes, las niñas pequeñas, los varones, los perros).

Relata de nuevo el cuento y pide a los alumnos que lo traduzcan con ayuda de esos signos convencionales adoptados por todos. Se puede luego recurrir a otros signos.

Con los niños que comienzan a utilizar las cifras y las letras, es posible encontrar un medio más abstracto aún. Escribir, por ejemplo: 3 niñas, 3 varones, etc.

O también: 2 niñitas, 2 niñas grandes, 4 perros, etc.

Es preferible, por supuesto, que los símbolos sean propuestos, en la medida de lo posible, por los mismos niños.

Nociones puestas en evidencia en el transcurso de estos ejercicios

Adquisición de hábitos de trabajo e iniciación en una representación simbólica *cada vez más abstracta:*

- es necesario traducir con claridad –verbalmente y en el papel– *los datos de un problema*. Repetirlos. Descubrir las relaciones. Modificarlos.

El reconocimiento natural y la utilización de los *números perceptivos* se va a imponer en forma natural durante la resolución de estos pequeños problemas.

Del mismo modo que se *unen* los conjuntos, se *suman* los *números* que representan la totalidad de sus elementos. Asimismo, la constitución de subconjuntos puede traducirse por *números*: 2 niñas se van, quedan dos; estas dos últimas vuelven, se reúnen las cuatro, etc.

Puesto que el mecanismo de las operaciones no se ha aprendido todavía, y tampoco los números, este trabajo intuitivo conduce a un *cálculo mental* espontáneo, impuesto por la reflexión.

12. EL CONJUNTO DE LOS ALUMNOS DE LA CLASE Y LOS "PEQUEÑOS GRUPOS"

La noción moderna de "pequeños grupos" es conocida en forma empírica, desde hace mucho tiempo, en el jardín de infantes. En los momentos de actividades libres, en las clases de los más chicos o en las clases de trabajo manual de los más grandes, se reúnen en pequeños equipos alrededor de una ocupación de su preferencia.

Este modo de agruparse, hasta ahora reservado a las actividades, se extenderá en lo sucesivo a momentos de relación más profundos y más íntimos entre la maestra y algunos niños cuyos intereses y gustos los hace congregarse alrededor de un tema de trabajo. El ejercicio de observación, el ejercicio de cálculo, se refiere entonces a un "pequeño grupo", cuya constitución totalmente espontánea garantiza su homogeneidad. Dentro, entonces, del *conjunto de los alumnos de la clase*, se constituyen *subconjuntos*. La maestra invita a sus alumnos a representar esos agrupamientos, basándose siempre en la realidad vivida.

El conjunto de los alumnos de la clase

Este conjunto comprende (esto deben encontrarlo los mismos niños):

1º Los niños presentes hoy.

2º Los ausentes.

Los presentes: podemos verlos, tocarlos, invitarlos a moverse, a decir su nombre. *Cada uno de ellos*, al llegar a clase, ha tomado del tablero correspondiente *su propia tarjeta*, donde está escrito su nombre.

Se invita a los niños a reagruparse, teniendo cada uno la tarjeta con su nombre en la mano. Tenemos así el *conjunto de los alumnos presentes.*

Si cada uno deposita su tarjeta en la mesa, tenemos el *conjunto de las tarjetas de los alumnos presentes* (hacer distinguir bien los dos conjuntos).

Pero la clase comienza. Algunos instantes más tarde, la maestra llama la atención de los alumnos sobre sus actividades:

—Tú, ¿qué haces?

—¿Y tú?

Hay: un grupo de niños que trabajan con la maestra; un pequeño grupo que escribe; otro grupo de niños que dibujan y, finalmente, un pequeño grupo que juega. Cuatro subconjuntos en total, entre los alumnos presentes.

Se los invita a:

- reagruparse en el espacio;
- agrupar sus tarjetas personales.

Pero en el segundo y tercer grupo hay niños que tienen láminas con figuras y deben ilustrar lo que escriben: éstos escriben *y* dibujan. ¿Dónde los colocamos? ¿Dónde ponemos sus tarjetas?

Los ausentes: no se los ve ni se los puede tocar, ni invitarlos a contestar, a moverse, a reagruparse. Pero podemos tomar sus tarjetas personales, que han quedado en el tablero, y construir *el conjunto de las tarjetas personales de los alumnos ausentes* (son 3).

También podemos dibujarlos en el pizarrón, representando a cada uno por un círculo gris (fig. 35).

Fig. 35

La maestra hace notar que *es necesario dibujarlos para acordarse de su número, puesto que como no están ahí no se los puede contar.*

Esto va a permitir *representar* también los *subconjuntos de los presentes* si se quiere recordar más adelante cómo se han formado los pequeños grupos de hoy, o si se quiere comunicar ese hecho a alguien.

Representación esquemática de los pequeños grupos

Los integrantes de cada grupo pequeño o subgrupo, se ponen de acuerdo para elegir un *signo* que *represente* a cada alumno de ese subgrupo. (Todos los signos de los presentes serán rojos.)

Los signos elegidos son:

- ■ para cada niño que trabaja con la maestra,
- I para los que escriben,
- ● para los que dibujan,
- O para los que juegan,
- i para los que escriben *y* dibujan.

La maestra traza grandes círculos en el pizarrón y cada niño pasa sucesivamente a trazar el signo suyo en el círculo del subconjunto al que pertenece.

Por fin se construye de la misma manera el conjunto de los alumnos presentes (fig. 36) y el conjunto de todos los alumnos del grado (fig. 37).

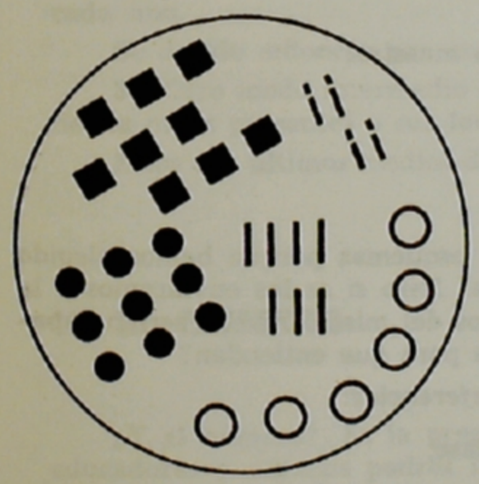


Fig. 36

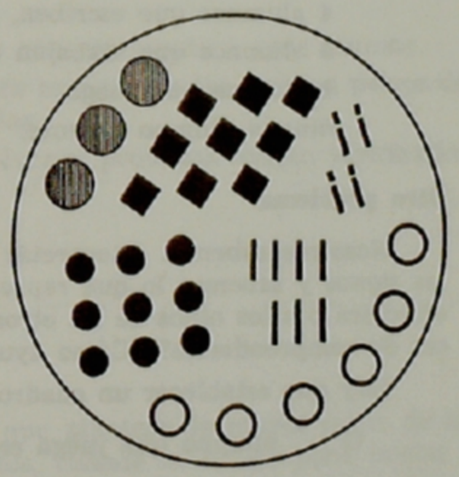


Fig. 37

Ejercicios

Se deja este último esquema en el pizarrón y se invita a los alumnos, uno a uno, a traducir verbalmente las indicaciones dadas por el esquema.

Hoy hay en la clase:

9 alumnos que trabajan con la maestra,
7 alumnos que escriben,
9 alumnos que dibujan,
4 alumnos que escriben *y* dibujan,
6 alumnos que juegan,
3 alumnos ausentes.

La maestra traza en seguida otro esquema ideográfico y pide a los niños que traduzcan las indicaciones. Dicho esquema se refiere a otra clase, donde hay (ver fig. 38):

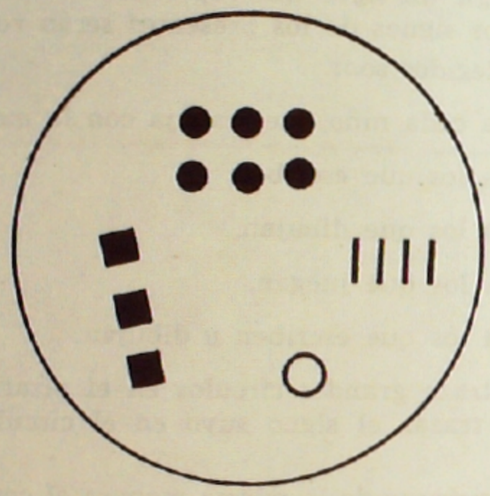


Fig. 38

6 alumnos que dibujan,
4 alumnos que escriben,
3 alumnos que trabajan con la maestra,
1 alumno que juega,
ningún alumno ausente.

Otro problema

Nosotros sabemos interpretar estos esquemas porque hemos *elegido* los *signos* y sabemos lo que *representan*. Pero si se los enviáramos a la directora o a los niños de los otros cursos del mismo nivel, ¿serían capaces de comprenderlos? ¿Cómo ayudarlos para que entiendan?

Hay que establecer un cuadro de *referencias*:

○ alumno que juega en la clase,

■ alumno que trabaja con la maestra,

I alumno que está escribiendo,

● alumno que está dibujando,

i alumno que está escribiendo *y* dibujando,

◍ alumno ausente.

Nociones puestas en evidencia en estos ejercicios

- Distinción entre el *elemento vivo* y el *símbolo* que lo representa.
- Necesidad de la *representación simbólica*, cuando el elemento concreto está fuera del campo perceptivo.
- Sentido de la *convención*.
- Lectura de los esquemas.
- Establecimiento de *referencias*.
- Reconocimiento de los conjuntos referenciales entre 5 y 10.

Organización de un conjunto en subconjuntos iguales

Después del ejercicio precedente se puede, con motivo de un ejercicio de rítmica o del aprendizaje de una danza, por ejemplo, proponer el problema de la *organización del conjunto de los alumnos de la clase en subconjuntos iguales*. El problema es el siguiente:

Hay que hacer rondas de 3, 4 ó 5 alumnos cada una. ¿Cuántas rondas podemos organizar con el conjunto de la clase? (La maestra ha tenido la precaución de contar sus alumnos antes de fijar el número que habrá de ponerse en cada ronda, para asegurarse que puede dividirse exactamente el total por 3, 4 ó 5.)

Este problema se resolverá teniendo en cuenta el nivel de los niños:

1º *Espontáneamente:* se agrupan de a 3, 4 ó 5. Se cuentan las rondas.

2º Si los niños están muy adelantados, la maestra puede sugerir que se haga un *proyecto* en forma de dibujo, donde se marque el lugar de cada uno.

Se decide entonces por un signo que represente a cada alumno.

3º Otro modo intermedio consiste en agrupar las tarjetas personales de los niños presentes o sus fotografías.

Estos dos últimos medios de resolver el problema exigen verificación.

13. EL NÚMERO

¿Y el número? Es la pregunta que plantean la mayor parte de los educadores y algunos padres inquietos, cuando se les propone iniciar a los niños en la matemática por el método de los conjuntos.

Si durante mucho tiempo se ha enseñado a contar sin enseñar a razonar, para restablecer el equilibrio de la situación, no basta adoptar el método inverso, es decir, enseñar a razonar sin enseñar a contar.

Admitamos, sin embargo, que esta última empresa no es la más difícil. Si bien todo el mundo sabe más o menos calcular (muchos adultos, muy expertos cuando se trata de hacer cuentas, no han alcanzado a domi-

nar la lectura en un nivel corriente), ¡cuántos adolescentes son *incapaces de leer, analizar e interpretar los datos de un problema!* El niño aprende siempre a contar, aunque sea por el método empírico. Muchos de ellos, menores de 6 años, son capaces de verificar el vuelto que reciben e identificar mejor que ciertos adultos los valores pequeños de la moneda en curso.

Nuestro método se propone no desdeñar esos conocimientos empíricos y utilizarlos cuando el niño los ofrece.

—Hay quince niños que almuerzan en el comedor de la escuela; el que sepa escribir 15 que venga y lo escriba en el pizarrón.

Esto no impedirá que se proceda al agrupamiento de los quince, a dibujarlos, a representarlos por signos abstractos y a comprobar que resulta más rápido *escribir 15* que dibujar quince niños o incluso quince puntos.

Esos mismos alumnos, a los cuales se les enseña a veces a reconocer los grupos de 1 y de 2, saben muy bien, en su casa, reclamar la suma que les falta para procurarse el objeto deseado, o dividir con sus hermanos la tableta de chocolate que se les ha regalado.

Lejos de rechazar estos conocimientos pragmáticos, tendremos mucho interés en utilizarlos en el momento y en el orden en que se presenten, aun cuando no todos los alumnos de la clase estén en condiciones de asimilarlos. La maestra se dedica continuamente a buscar en la vida de la clase ocasiones propicias para la explotación de esos conocimientos.

Ya desde los cursos de los más pequeños, los alumnos (de 2 a 4 años) saben muy bien precipitarse ante el llamado de la maestra, para tratar cada uno de ser "el primero". Ser "el último" no les hace ninguna gracia, pero ocupan con indiferencia cualquier rango intermedio. Cualquiera sea el nivel del curso, la maestra sabe multiplicar las ocasiones para jugar a agruparse de a dos, de a tres, de a cuatro. Las órdenes tales como: "tráeme uno, dos, tres objetos", las observaciones: "faltan dos, tres, cuatro", etc., aparecen en forma natural en su lenguaje.

La maestra escribe y hace escribir y leer todos los días la fecha en el pizarrón y en los cuadernos. Anota cuidadosamente en una esquina del mismo el número de los niños presentes con cifras legibles y bien dibujadas; diariamente se espera en la clase una hora especial, cuya llegada acechan los niños en el reloj: "A las 15, esta tarde, habrá sesión de títeres"; "Mañana a las 9 saldremos de paseo"; "Pasado mañana tomaremos naranjada a las 11", etc.

Así hace su aparición la notación numérica, en forma muy atractiva, durante el desarrollo de los acontecimientos cotidianos. En estas condiciones, el niño emplea las cifras de la misma forma en que escribe, copia y reconoce los dibujos, pero los dibujos que tienen un *valor significativo.* Estos últimos tienen, después de todo, una relación viva con el número: son *representaciones de cantidades, signos premonitorios, generadores de orden e instauran un cierto ritmo de vida.*

Este aprendizaje natural, basado en la imitación y en la memoria, no deja, sin embargo, de recurrir a la reflexión, al insertar los conocimientos en la vida. Ésta se encarga muy bien de enseñar que las convenciones

basadas en la noción de tiempo tienen su fuerza y que, por ejemplo, el operador encargado de la función de cine no vendrá antes de la hora indicada; el paseo tampoco tendrá lugar antes de la hora prevista; hay demasiados alumnos alrededor de la maestra tratando de conseguir lo que ella está repartiendo: algunos se quedarán sin lograrlo, etc. Los pequeños toman así conciencia del valor y de la importancia del número en la sociedad.

Y no obstante, dirán los matemáticos, ignoran lo que es el número...

Trabajar poco a poco en la *construcción del número cardinal*, por medio de muchas y renovadas experiencias de *relación biunívoca*, tal es nuestro propósito. Nos hemos dedicado con insistencia a la investigación de ejercicios que se fundan en este tema. Las educadoras deberán enriquecerlos más aún, eligiendo en su clase los acontecimientos susceptibles de ser explotados en este sentido.

El trabajo sobre conjuntos *formados por elementos de naturaleza diferente* y que se pueden reagrupar de a dos, tres, cuatro, cinco, si se renueva de tanto en tanto (ver láminas en el título "Representación simbólica"), favorece el *reconocimiento visual de los números perceptivos.*

Así, en la consideración de los elementos de un conjunto, *el atributo numérico* podrá, poco a poco, ser utilizado como lo ha sido *el atributo forma* o *color* o *magnitud*; existen los subconjuntos de los rojos, de los azules, de los grandes y de los pequeños, pero también los subconjuntos de los elementos que van de a dos, de a tres, de a cuatro, etc. El número sólo tiene aquí un *valor adjetivo*, pero aparece, de todos modos, en el vocabulario, *en relación regular con la cantidad correspondiente.*

En resumen, el interés puesto en los conjuntos que comprenden un número pequeño de elementos (entre 5 y 10) que se agrupan de distintas maneras en subconjuntos, hace aparecer las cantidades 5, 7, 8, 9 (ver las diferentes láminas del título "Representación simbólica").

Tal vez pueda objetarse que el procedimiento no difiere mucho de los diferentes medios empleados hasta ahora para ayudar a los niños a comparar, reconocer y nombrar las cantidades.

Difiere, sin embargo, de manera esencial, en la medida en que el aprendizaje de los números sólo aparece como el resultado de una sucesión de operaciones en las que la *reflexión lógica* que inspira y dirige la actividad y la afectividad *ocupa el lugar más importante.* De esta manera se pasa, en forma natural y gradualmente, de la resolución activa, dibujada y luego esquemáticamente representada de los problemas, a la bien pensada que conduce a los números y a la solución numérica. Así creemos haber resuelto nosotros la contradicción: aprendizaje-del-número-sin-razonamiento o a la inversa, planteada al comienzo de estas páginas.

14. EJERCICIOS SOBRE LOS NÚMEROS

Primer ejercicio: un nuevo inventario[7]

Acabamos de indicar, en forma práctica y teórica, cómo y con qué ejercicios es posible ayudar poco a poco al niño a construir el número cardinal. Pero hemos insistido sobre la obligación que debe crearse la maestra de conocer y utilizar los conocimientos que sus alumnos llevan a la escuela.

Tras este objetivo, y en cuanto ella vea aparecer el nombre de los números en el vocabulario de los niños, debe dedicarse a confeccionar un inventario. ¿Cómo hacerlo?

Un niño ha pronunciado el nombre de un número: tres, treinta, cien o mil. La maestra aprovecha la ocasión para preguntar:

—¿Me puedes mostrar 3 ó 30, o 100, o 1 000 lápices..., cuadernos..., figuritas?, etc.

Con las cantidades grandes, el niño se reconoce muy pronto incompetente y abandona la partida. El asunto es mucho más fácil con las pequeñas colecciones. Es necesario, pues, renovar la pregunta y aprovechar la oportunidad para hacer un sondeo en la clase (este trabajo puede hacerse utilizando la caja de los elementos que han recortado).

La pregunta siguiente es:

—Muéstrame 3... u otro número (sin mención de unidad).

El niño responde entonces, generalmente, mostrando 3 dedos. O bien señalando la cifra 3, si por casualidad la tiene ante su vista. La confusión del número con la cifra es normal a esa edad.

Segundo ejercicio

El ejercicio precedente se repite a menudo y para cada ocasión. Puede también tomar otra forma y otra densidad:

- Se les pide que dibujen conjuntos de x objetos (el número se elige según los conocimientos, ahora mejor verificados, de los alumnos).
- Que dibujen la cifra que representa al número x.
- Se comprueba: cada número está representado por una cifra. El número se dice, pero la cifra puede escribirse, verse, tocarse (recordar lo que se ha dicho al respecto de los alumnos y de su representación simbólica, página 73).

No se hacen más que una o varias cifras para *representar* infinidad de objetos. Esto es más rápido.

[7] Se da por sentado que este trabajo habrá sido precedido por numerosos ejercicios de vocabulario y ejercicios sensoriales sobre las magnitudes, sus propiedades y sus relaciones, y sobre las cantidades. Se mencionan ampliamente estos ejercicios en la tercera parte de esta obra.

- La portera ha preguntado cuántos alumnos almuerzan en el comedor. ¿Qué es más rápido: agrupar 18 alumnos y contarlos? ¿Dibujarlos? ¿Escribir y leer 18? (recordar lo que ya se ha tenido la oportunidad de hacer notar).

Tercer ejercicio: el conjunto de los números conocidos

La maestra invita entonces a cada niño a tomar conciencia de los números que conoce.

—Escriban las *cifras que representan los números* que ustedes conocen bien.

Cada uno escribe, un poco al azar, con dudas... Algunos no hacen nada. Toma una hoja cualquiera y hace criticar el trabajo de uno de los alumnos. Éste ha escrito: 3, 4, 1. Pidámosle que venga al pizarrón a dibujar un conjunto de tres puntos; uno de cuatro cruces; un conjunto de un palito, etc. Escribimos entonces en el pizarrón: *Conjunto de los números conocidos por Francisco:* 3, 4, 1 (la maestra enseña a los niños el signo que delimita este conjunto).

Se procede a realizar otras verificaciones colectivas y a estudiar individualmente cada caso.

- Todos pueden ahora escribir en sus cuadernos el conjunto de los números conocidos por ellos.
- Pero la maestra hace notar que se van a aprender nuevos números y que de ese modo cada día el conjunto se va a enriquecer con nuevos *elementos*. Será necesario, pues, recomenzar ese trabajo de tanto en tanto.

Para hoy, martes, éste es el *conjunto de los números conocidos por Francisco:* 3, 4, 1. Nombremos los elementos de este conjunto:

3 es un *elemento del conjunto*, etc.
4 es un *elemento del conjunto*, etc.
1 es un *elemento del conjunto*, etc. (hacérselo decir a los niños).

De tanto en tanto se vuelve sobre este ejercicio. Cada uno dice y repite los números que conoce; con la ayuda de la maestra verifica si sus conocimientos son exactos; construye a su gusto los *conjuntos* de elementos variados correspondientes a cada número.

Cuarto ejercicio

Partimos del *conjunto de los números conocidos.* Se verifica:

- tal alumno ha escrito: 8, 9, 2;
- tal otro: 1, 2, 3, ... 11.

Pero cuando se le pide a este alumno que señale cuatro, cinco, siete, ocho objetos, es incapaz de hacerlo: *no conoce, pues, todos estos números. Conoce solamente, por ejemplo,* 1, 2, 3, 4.

- Una vez hechas estas verificaciones (y cada uno está ahora en condiciones de controlarse), se dibujan los conjuntos de elementos diversos correspondientes a los números indicados por las cifras.

- Se pregunta cuál es *el más grande*, y *el más chico* (los niños están suficientemente ejercitados como para que se les pueda hacer estas preguntas).
- Se intenta entonces clasificar esos conjuntos, partiendo del que contiene el *menor número de elementos.*
- Se llega, al fin, a *ordenar la serie de los números conocidos por cada uno.*
- Aquí está, *en orden*, el conjunto de los números conocidos
  - por Francisco: 1, 2, 3.
  - por Nicolasa: 1, 7, 8, 9, 10.
  - por Juan José: 1, 2, 3, ... 30.

Algunos consejos

Es indispensable, ahora, dar un consejo a las educadoras. Lo resumiremos en dos palabras: *Saber esperar.*

En efecto, sería inútil inventariar cuidadosamente los conocimientos del niño si se va a adoptar de entrada la actitud didáctica que supone emprender el estudio de cada número y de sus descomposiciones, en forma prematura.

Este trabajo sobre los números debe iniciarse muy temprano, puesto que aquí y allá, durante las clases, los niños pronuncian los nombres de los números. Se prosigue paralelamente a los ejercicios casuales inspirados por la vida de cada clase (véase lo escrito bajo el título "Los acontecimientos de la vida de la clase", pág. 29), y a los ejercicios que acabamos de desarrollar en las páginas precedentes. Todos ellos permitirán revelar diariamente números nuevos. Es necesario aprovecharlos en el momento en que aparecen y *sólo en ese momento examinarlos*, teniendo en cuenta *el nivel de los alumnos*, y evitando, por ejemplo, detenerse demasiado en los números entre 5 y 9, si los intuitivos no se conocen todavía.

También es indispensable en este estudio tener en consideración las posibilidades de acceso al pensamiento simbólico que haya manifestado cada niño.

Supongamos, por ejemplo, que en el transcurso de un ejercicio se imponga el estudio del número 8.

- Si los niños han participado con éxito en todos los trabajos sobre la "Representación simbólica", se llega rápidamente a un acuerdo sobre el signo que va a representar a cada elemento del conjunto considerado y se lo hace por escrito.
- Si los niños no han abordado aún esos trabajos, pero admiten la relación término a término entre los elementos de dos conjuntos diferentes, se decide que cada elemento estará representado por una ficha, un palito o una figura recortada.
- En fin, si no han alcanzado ninguno de esos dos niveles, se deberá trabajar sobre los objetos mismos, aun a riesgo de tener que volver más tarde sobre el mismo ejercicio, bajo una forma más abstracta.

A continuación proponemos un ejercicio modelo para el estudio del número 8 y de su descomposición, ejercicio que será válido para cualquier otro. Es evidente que en cada clase será indispensable adaptarlo a los intereses ocasionales del momento y que no se trata de ajustarse exactamente al ejercicio tal como lo damos aquí.

Quinto ejercicio: estudio de un número

En los últimos días se han modelado algunos corderitos y las pastoras para cuidarlos. Se han cocido los elementos mejor logrados y después de sacarlos del horno se ha elegido un conjunto de 6 corderos y 2 pastoras para enviar como recuerdo a los niños de otras clases del mismo nivel. Se deja trabajar la imaginación sobre el tema:

6 corderos y 2 pastoras. ¿Cuántos elementos son en total?: 8 elementos.

Se plantea un problema: estos 8 elementos son frágiles. ¿Cómo protegerlos al máximo en el paquete en el cual se van a enviar?

Se decide preparar una caja con divisiones, como si fuera una caja para huevos. Hacen falta, entonces, 8 divisiones (fig. 39).

Se dispone de varias cajas: una es baja y ancha; la otra, estrecha y más alta, etc. ¿Cómo disponer las divisiones? ¿En un solo piso? ¿En dos? Se analizan las organizaciones posibles del conjunto (las indicamos con los distintos esquemas de la figura 39). Queda por decir que este último proyecto sólo puede ser realizado, en esta forma, por niños adelantados. Además, no se les prohíbe que procedan por tanteo con los objetos mismos.

La descomposición $7 + 1$ no se aborda. Será examinada más adelante (repetición de la unidad).

Hacemos notar que la organización de los elementos de un conjunto decorativo (hojas, flores, motivos geométricos, recortes diversos); un pequeño grupo de alumnos con distintos pretextos; el conjunto de los elementos de la mesa de observaciones, etc., pueden servir de punto de partida para este estudio.

Nociones puestas en evidencia en el transcurso de este ejercicio

- En cada caso, es necesario orientar este ejercicio hacia las nociones de *cálculo mental*, incluso hacia la *adquisición de mecanismos indispensables.*
- Las diferentes descomposiciones *deben imaginarse* primero *con los ojos cerrados.*
- Se puede en seguida recurrir a la *repetición*: 6 y 2; 4 y 4; 2 y 2 y 2 y 2, etc.
- Al presentarse este trabajo en forma de juego rápido, se puede llevar a los niños a una verdadera *gimnasia.*
- Porque –subrayémoslo– la comprensión lógica *no excluye los mecanismos.*

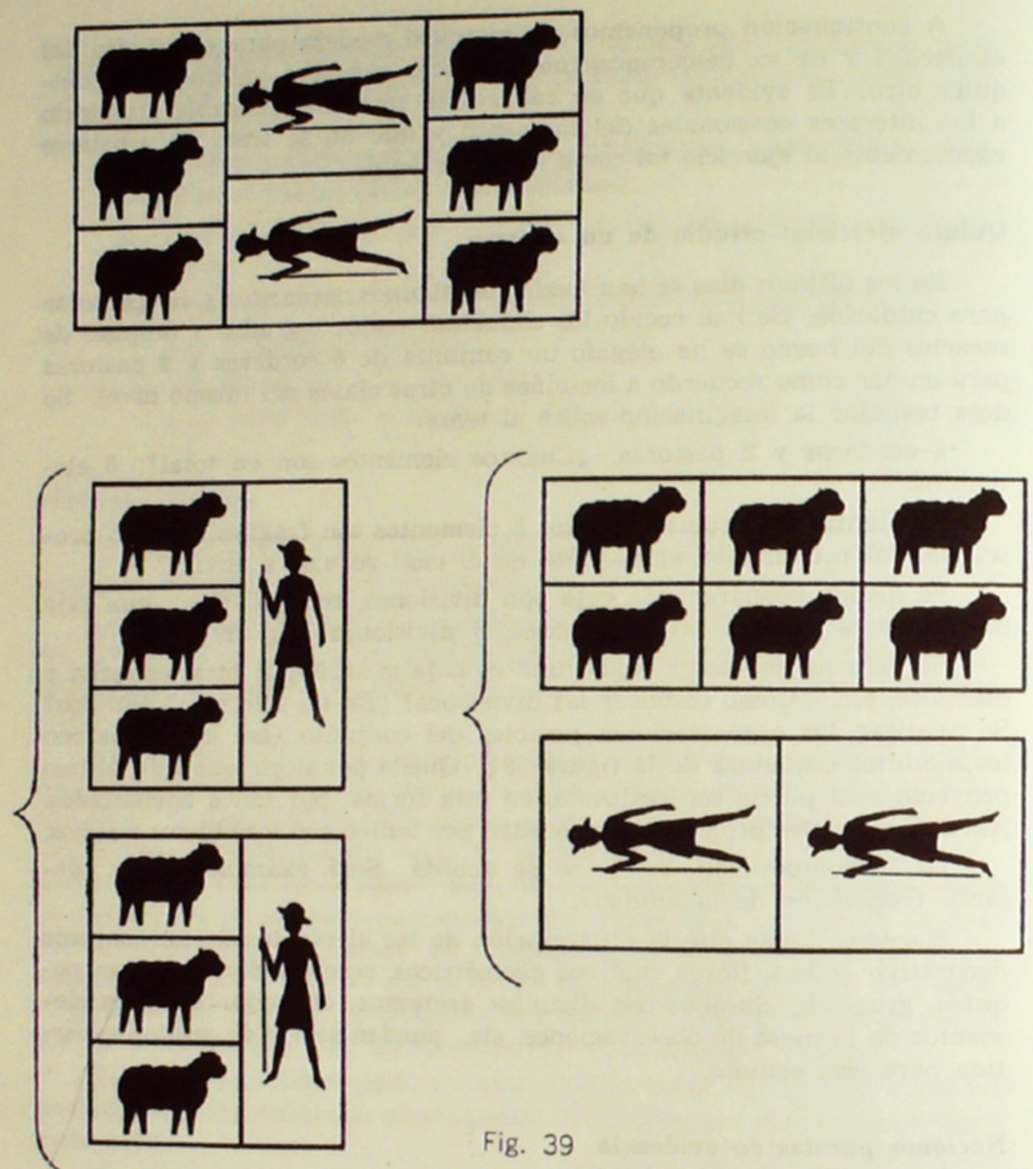


Fig. 39

Sexto ejercicio: la decena

Vemos que el estudio de los números de 1 a 9 puede transformarse en un problema de organización de un conjunto en subconjuntos. Ello se realiza en un momento apropiado, es decir, cuando los acontecimientos lo hacen necesario y deseable y no tiene nada que ver con la serie lógica de los números. Dicho proceso de organización no representa más que breves momentos de nuestro trabajo, mientras que en el aprendizaje tradicional ocupaba el centro del programa.

El estudio de la decena también está preparado por todos los ejercicios que exigen la enumeración de elementos que figuran en grandes

cantidades en la clase: imágenes traídas por los niños para la documentación fotográfica y que terminan por amontonarse sobre la mesa de observaciones; monedas de poco valor para las funciones de títeres, etc.

Indicamos aquí el método que debe emplearse, teniendo en cuenta que los distintos ensayos pueden resultar simplemente episódicos y no conducir, desde la primera clase en que se han utilizado, a la constitución de decenas.

- Se agrupa el conjunto de los elementos a enumerar, en una mesa grande, alrededor de la cual se reúnen los alumnos.
- Se invita a éstos a contar.
- El ensayo puede resultar fructífero. En este caso es conveniente repetir la experiencia, esta vez con un conjunto que contenga un mayor número de elementos.
- El ensayo fracasa.

  "No sabemos contar tanto", dicen los niños. ¿Qué hacer? Se deja completa libertad a los ensayos individuales y se realiza su crítica. No varían mucho entre sí; cada uno cuenta y se detiene en un cierto número. Sobre la mesa tenemos ahora pequeños montones y uno grande con los elementos aún no contados. ¿Cómo hallar el total? Hay que juntarlos, dicen algunos, pero, ¿cómo?
- Sugerencia de la maestra: hacer montones iguales. Ejecución y luego crítica. Uno lo formó con 3, otro con 6, otro con 8...
- Ponerse de acuerdo sobre un número, el mismo para todos, logrando que varíe a través de las diversas experiencias. Hacer notar que cuanto más grande es el número, menor es el grupo de montones.
- Proponer el número 10.
- Procurar que formen montones de 10 elementos.
- Hacer contar estos montones.

15. A) CÁLCULO MENTAL Y OPERACIONES

Pero, ¿cómo contar?; es decir, ¿cómo conducir al niño que ha adquirido el sentido de las operaciones para que las resuelva? Acabamos de decirlo más arriba: la adquisición de los *mecanismos* se hace indispensable.

Y se puede siempre ayudar a esta adquisición:

- pidiendo siempre a los niños que dibujen las cantidades indicadas por las cifras;
- invitándolos a representárselas *con los ojos cerrados*;
- proponiendo, con números chicos, problemas que permitan la organización de conjuntos que faciliten el recuento.

Damos a continuación algunos ejemplos (en cada caso la *maestra dicta y los niños dibujan*):

Primer problema

Hay en la clase:

6 alumnos en la primera fila, sentados de a dos (fig. 40);

3 alumnos en la segunda fila (fig. 41).

¿Cuántos alumnos hay en las dos filas? (fig. 42).

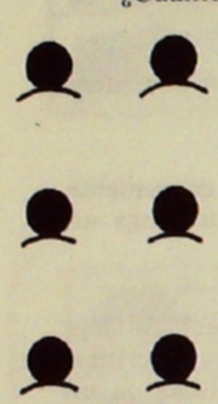


Fig. 40

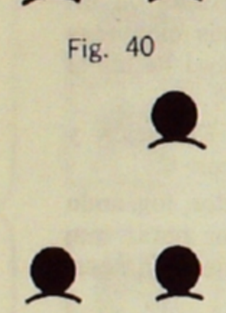


Fig. 41

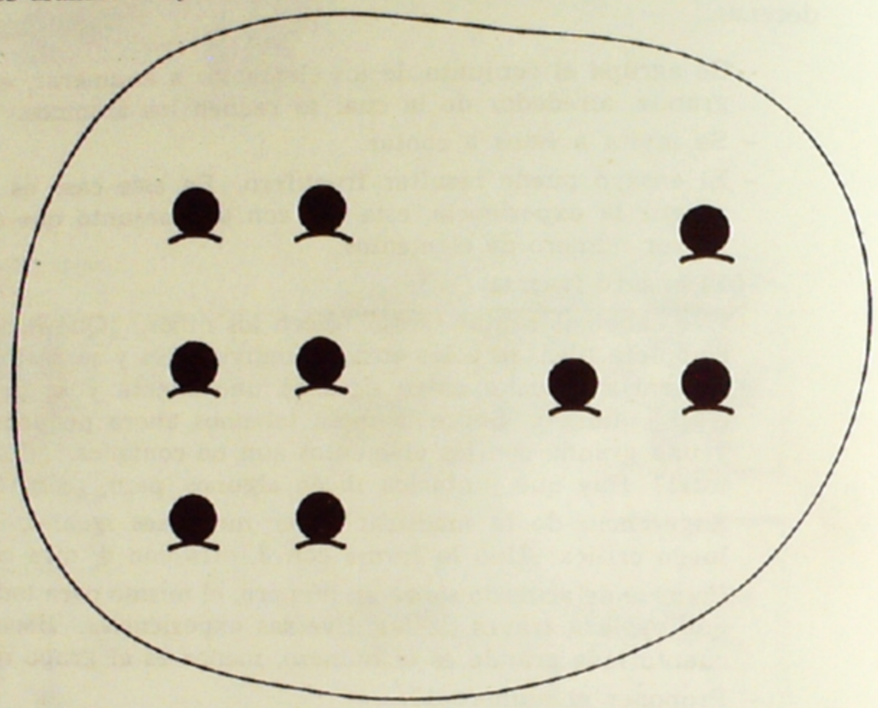


Fig. 42

Evidentemente, hay que *unir los dos conjuntos* y contar los elementos del nuevo conjunto así formado. Pero se les puede pedir que organicen este nuevo conjunto agrupando los elementos de modo que resulte fácil contarlos.

Estos elementos-alumnos pueden estar sentados de a dos, como ya dijimos, o en grupos de 3 (fig. 43).

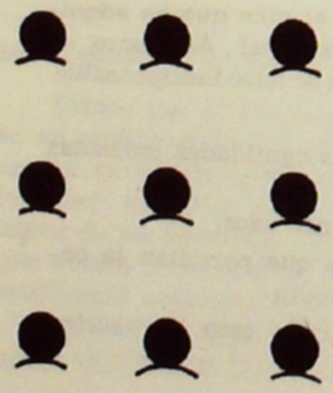


Fig. 43 (izquierda)

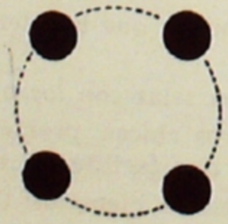
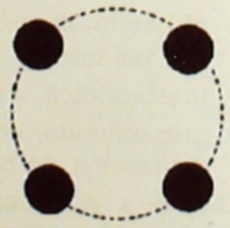


Fig. 44 (abajo)



También pueden estar ubicados de a 4 en círculo (fig. 44).
Esto conduce, ya lo vemos, a contar por múltiplos de 2, 3 ó 4.

Segundo problema

La maestra dicta y los alumnos dibujan:

Hay 8 alumnos colocados en ronda, que ejecutan una danza. Cuatro de ellos tienen un cinturón azul sobre el vestido blanco, de modo que hay uno azul, uno no azul, uno azul, uno no azul, etc. (fig. 45).

A un acorde de piano, los azules deben colocarse en fila. ¿Cuántos quedan en la ronda? (búsqueda de un resto; fig. 46).

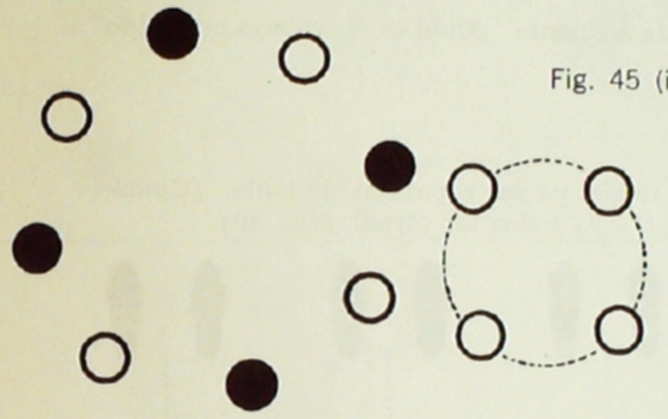


Fig. 45 (izquierda)

Fig. 46 (abajo)

Traducir la situación al lenguaje de los conjuntos: hemos formado el subconjunto de los azules. Quedan los no azules: 4 no azules.

Tercer problema

En la figura siguiente de la danza, los bailarines deben agruparse de a 3. ¿Cuántas rondas de 3 se formarán?

¿Cuántos niños quedarán fuera de una ronda de tres? (fig. 47).

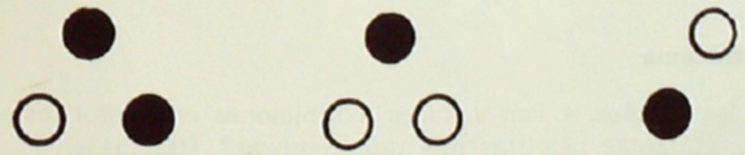


Fig. 47

Se necesitan 8 vestidos blancos para vestir a los bailarines. La maestra no tiene más que 5. ¿Cuántos vestidos tendrá que hacer confeccionar? (búsqueda del complemento).

Cuarto problema

Se acaban de formar dos grupos de trabajo: 9 alumnos van a dibujar; 4 alumnos van a escribir en el cuaderno. ¿Qué diferencia hay entre los dos grupos de niños? (búsqueda de la diferencia).

Cada uno de los grupos puede colocarse en fila, y todos los alumnos estarán sentados frente a su mesa. La diferencia aparece nítidamente (fig. 48).

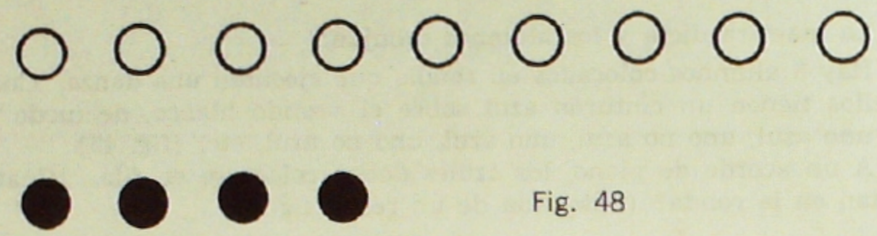


Fig. 48

Se puede plantear la pregunta siguiente: ¿Cuál es el trabajo preferido por los niños?

Quinto problema

De los 8 niños que bailan, 4 tienen ya sus zapatillas de baile. ¿Cuántas zapatillas hacen falta en total para todos los otros? (fig. 49).

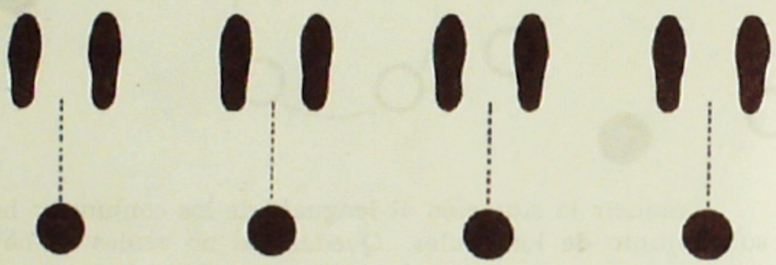


Fig. 49

Quedan 4 niños a quienes les falta el calzado apropiado. Pero se necesitan 2 zapatillas para cada bailarín.

El conjunto de las zapatillas que hay que comprar es un conjunto de 4 conjuntos de 2 zapatillas cada uno. (Representación dibujada, fig. 50.)

Hacen falta, pues, 2 zapatillas 4 veces, o sea, 8 zapatillas.

Sexto problema

De los 8 niños, 4 van a hacer exhibiciones con pelotitas. Cada uno usará 2. ¿Cuántas pelotitas hay que comprar? (fig. 51).

Harán falta 4 conjuntos de 2 pelotitas, es decir, 2 pelotas 4 veces, lo cual hace 8.

Séptimo problema

Los 8 bailarines deben formar, a una señal determinada, rondas de a 2. ¿Cuántas rondas se van a hacer? (fig. 52).

Hay que organizar el conjunto de los 8 bailarines en grupos de a 2 y contar el número de los subconjuntos.

Ahora hay que plantear el problema inverso:

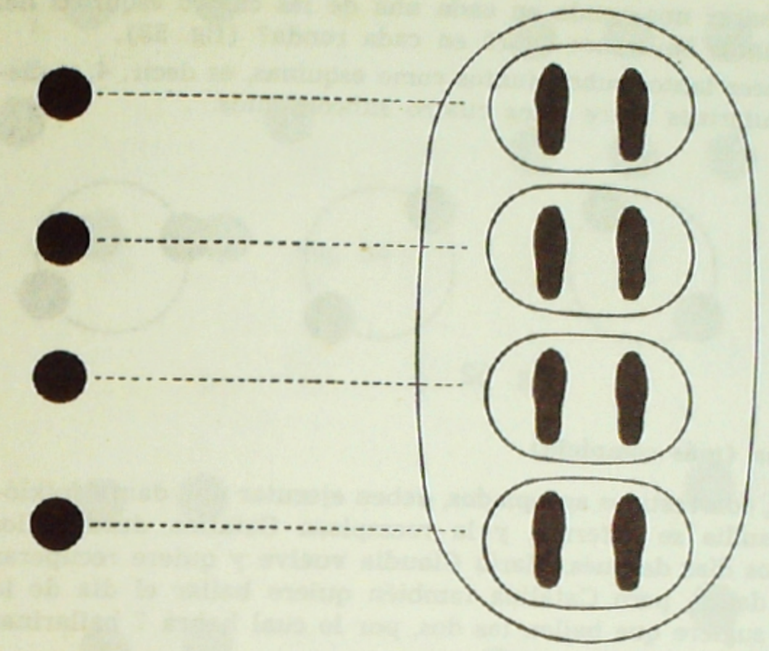


Fig. 50

Conjunto de los niños sin zapatillas.
Conjunto de 4 niños.

Conjunto de zapatillas.
Conjunto de 4 conjuntos de 2 zapatillas.

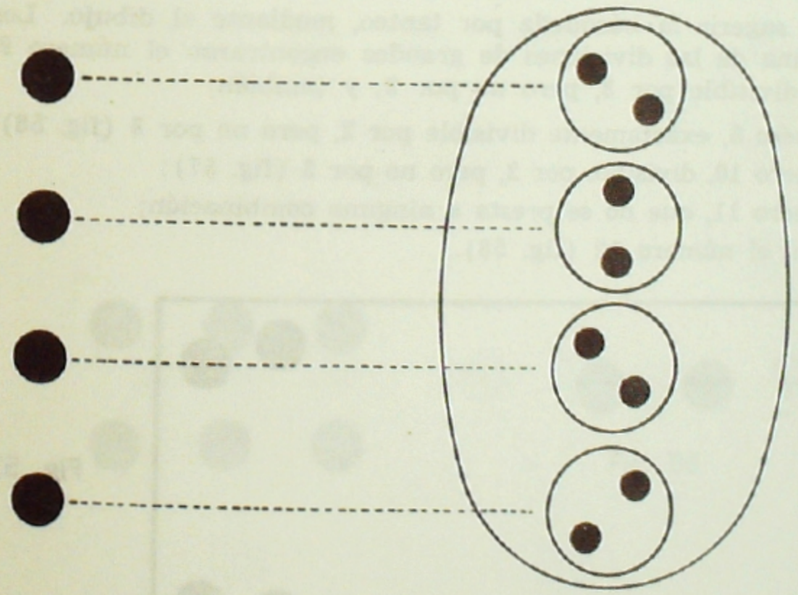


Fig. 51

Niños malabaristas.

Pelotitas.

Queremos hacer una ronda en cada una de las cuatro esquinas del escenario. ¿Cuántos bailarines habrá en cada ronda? (fig. 53).

Hay que hacer tantos subconjuntos como esquinas, es decir, 4, y distribuir los 8 bailarines entre estos cuatro subconjuntos.

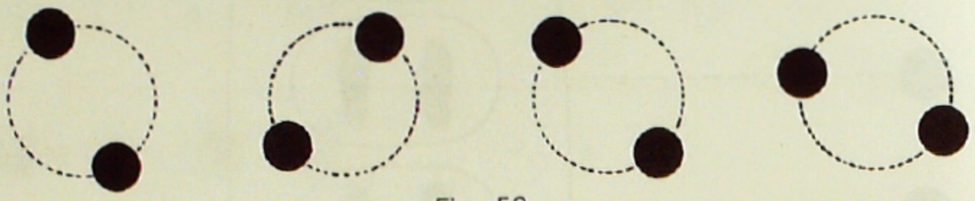


Fig. 52

Octavo problema (más complejo)

Seis niñitas, con vestidos apropiados, deben ejecutar una danza folklórica. María Claudia se enferma, y la reemplaza Catalina durante los ensayos. Algunos días después, María Claudia vuelve y quiere recuperar su lugar en la danza, pero Catalina también quiere bailar el día de la fiesta. Alguien sugiere que bailen las dos, por lo cual habrá 7 bailarinas en vez de 6.

Pero en la primera figura de la danza las bailarinas evolucionan en grupos de 3, o sea, 2 grupos de 3, que son 6 en total. ¿Qué hacemos con la 7ª? (fig. 54).

En una segunda figura evolucionan de a 2 (fig. 55).

Sobra siempre una niña, ¿qué hacer?

Es necesario encontrar un conjunto de bailarinas cuyos elementos puedan agruparse exactamente de a 2 y de a 3.

Hay que sugerir la búsqueda por tanteo, mediante el dibujo. Los alumnos de una de las divisiones de grandes encontraron el número 9, exactamente divisible por 3, pero no por 2; y también:

- el número 8, exactamente divisible por 2, pero no por 3 (fig. 56);
- el número 10, divisible por 2, pero no por 3 (fig. 57);
- el número 11, que no se presta a ninguna combinación;
- por fin, el número 12 (fig. 58).

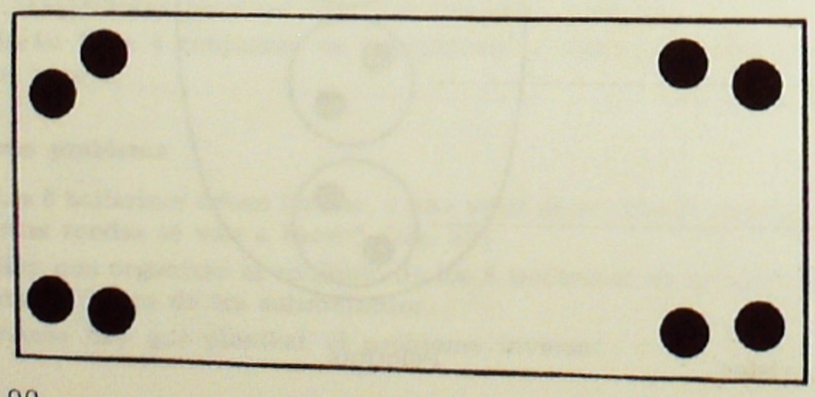


Fig. 53

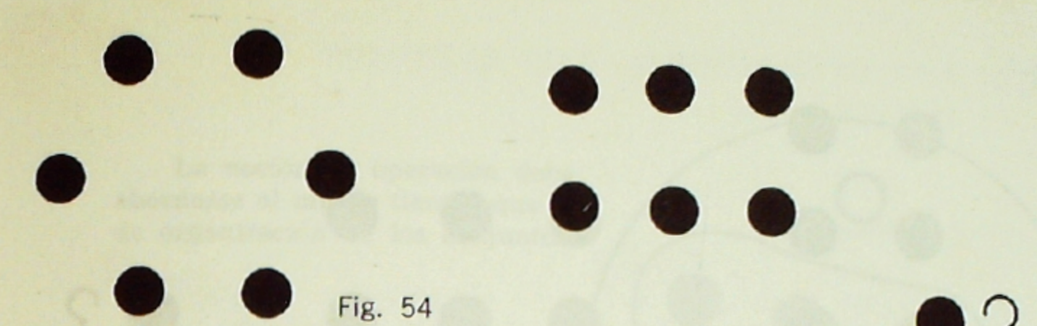


Fig. 54

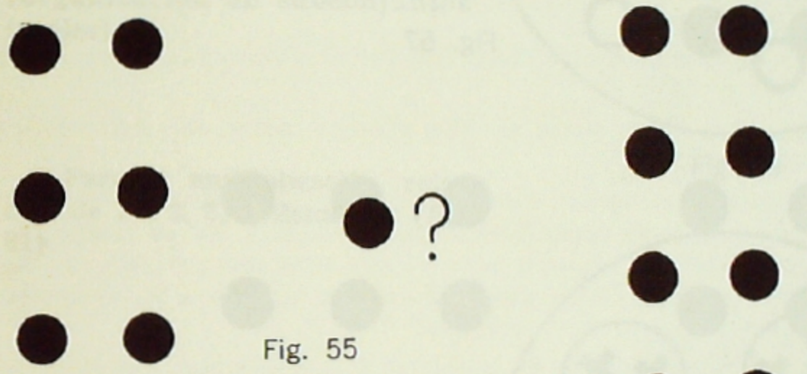


Fig. 55

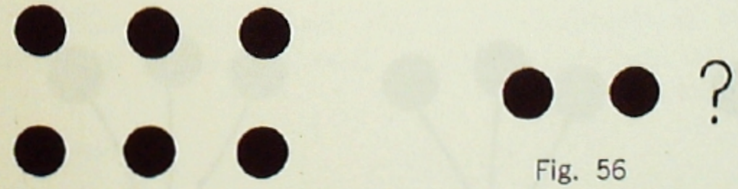


Fig. 56

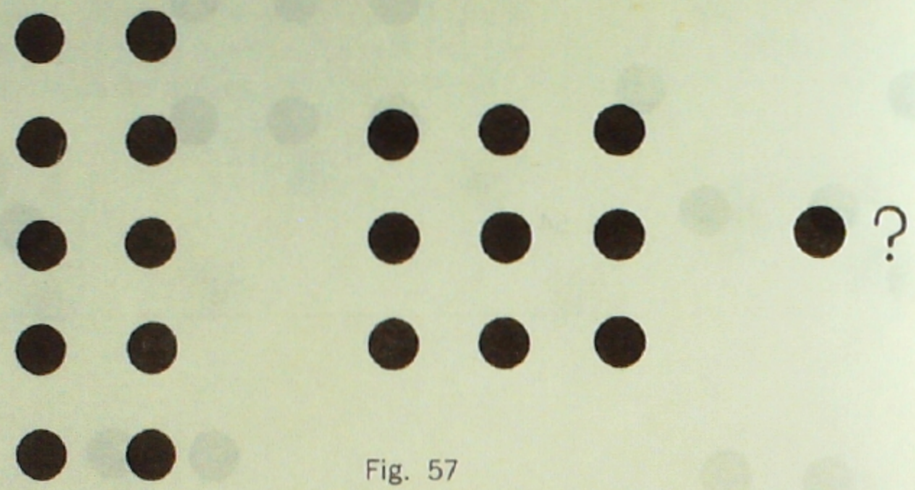


Fig. 57

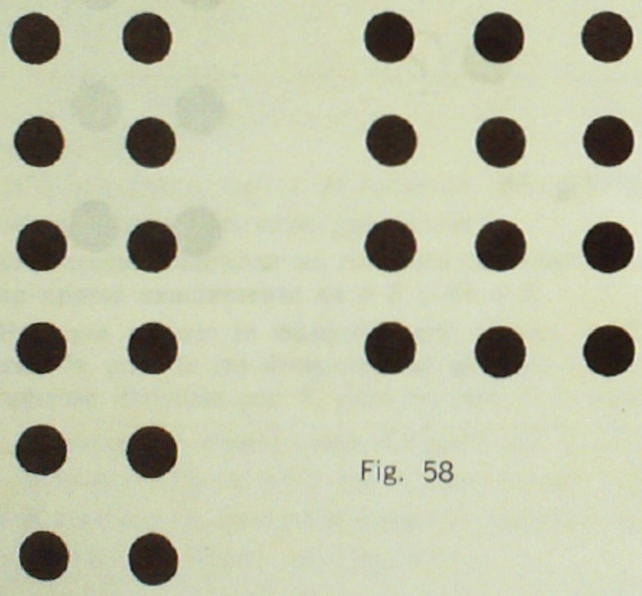


Fig. 58

La noción de operación debe abordarse al mismo tiempo que la de organización de los conjuntos.

Tenemos entonces la figura 59: *adición* y *sustracción* (unión o conjunto complementario), y la figura 60: *multiplicación* y *división* (organización en subconjuntos iguales).

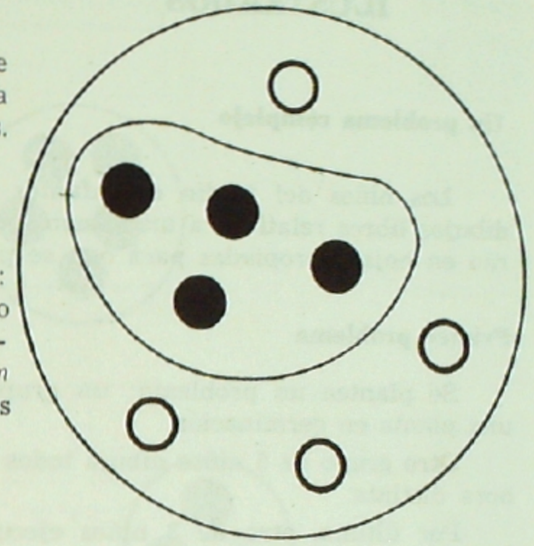


Fig. 59

Para la multiplicación, relación de 1 a 2, 3, 4 elementos (fig. 61).

De este modo, ya no existirá ninguna dificultad para traducir cualquier problema al lenguaje de los conjuntos.

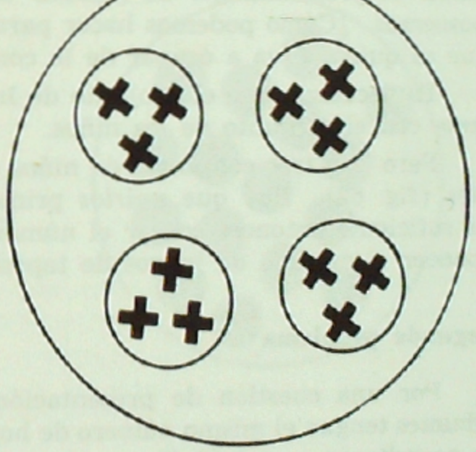


Fig. 60

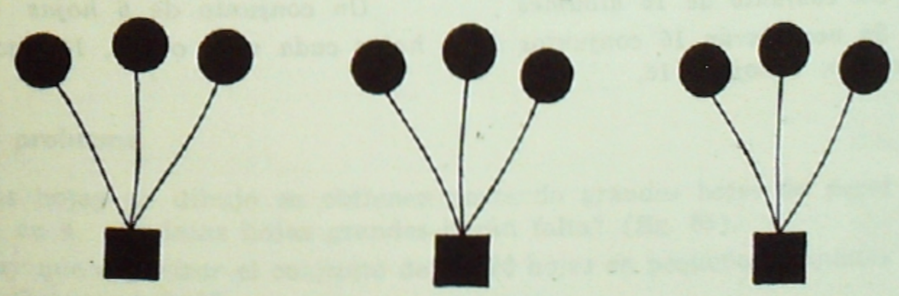


Fig. 61

15. B) LAS OPERACIONES: LOS ÁLBUMES ILUSTRADOS

Un problema complejo

Los niños del jardín de infantes van reuniendo en un álbum sus dibujos libres relativos a un mismo tema de trabajo, los que se realizarán en hojas apropiadas para que se puedan agregar al mismo.

Primer problema

Se plantea un problema: un grupo de 8 niños dibuja diariamente una planta en germinación.

Otro grupo de 5 niños dibuja todos los días la calle, observada a una hora distinta.

Por último, otro de 3 niños ejecuta dibujos sobre las actividades diarias de la clase.

Hace falta que cada uno de ellos disponga de un juego de tapas de álbum. ¿Cuántos juegos de tapas habrá que comprar? No se puede recurrir al procedimiento de repartir uno a cada uno, porque aún no los poseemos. ¿Cómo podemos hacer para indicar ese número a la directora, que es quien se va a ocupar de la compra?

Es necesario que el conjunto de las tapas de los álbumes sea *equivalente* con el conjunto de los niños.

Pero hay tres conjuntos de niños en la clase que necesitan los álbumes (fig. 62). Hay que *unirlos* primero en un solo conjunto (fig. 63). Es suficiente entonces contar el número de niños del conjunto total para conocer el número de juegos de tapas.

Segundo problema

Por una cuestión de presentación, la maestra desea que todos los álbumes tengan el mismo número de hojas: 6, por ejemplo. ¿Cuántas hojas se necesitarán en total? Tenemos, pues (fig. 64):

Un conjunto de 16 álbumes *Un conjunto de 6 hojas*

Se necesitarán 16 conjuntos de 6 hojas cada uno, o sea, 16 veces 6 hojas o: 6 hojas × 16.

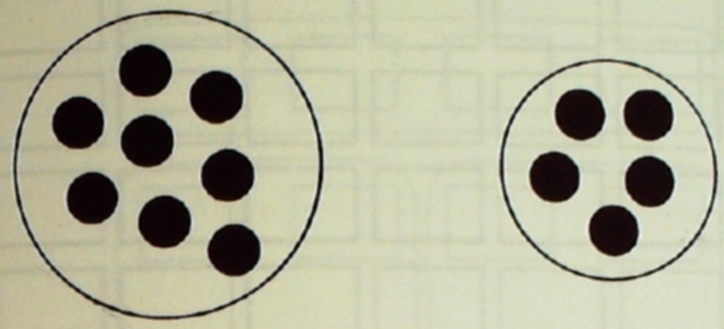


Fig. 62

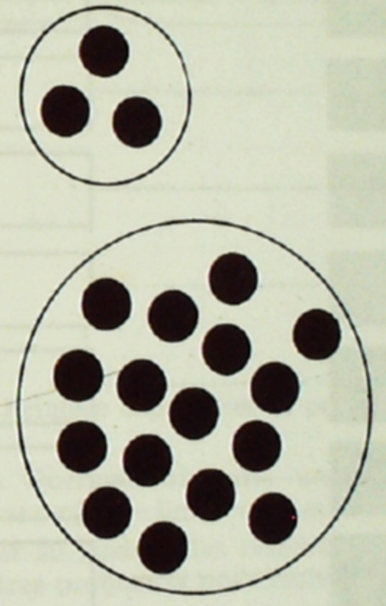


Fig. 63

Tercer problema

Las hojas de dibujo se obtienen cortando grandes hojas de papel canson en 4. ¿Cuántas hojas grandes harán falta? (fig. 65).

Hay que *organizar* el conjunto de las 96 hojas en pequeños conjuntos de 4. ¿Cuántos habrá?

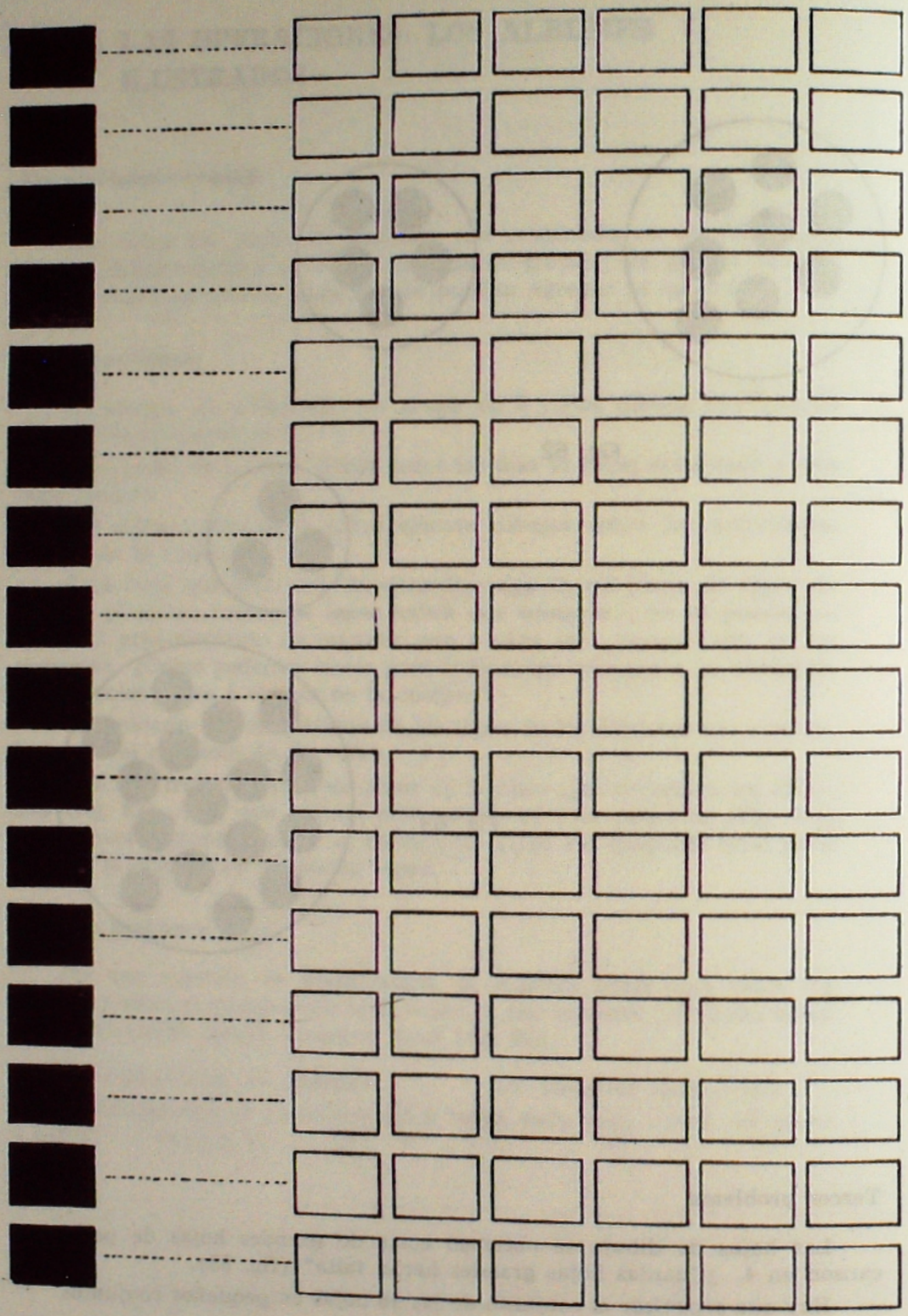


Fig. 64

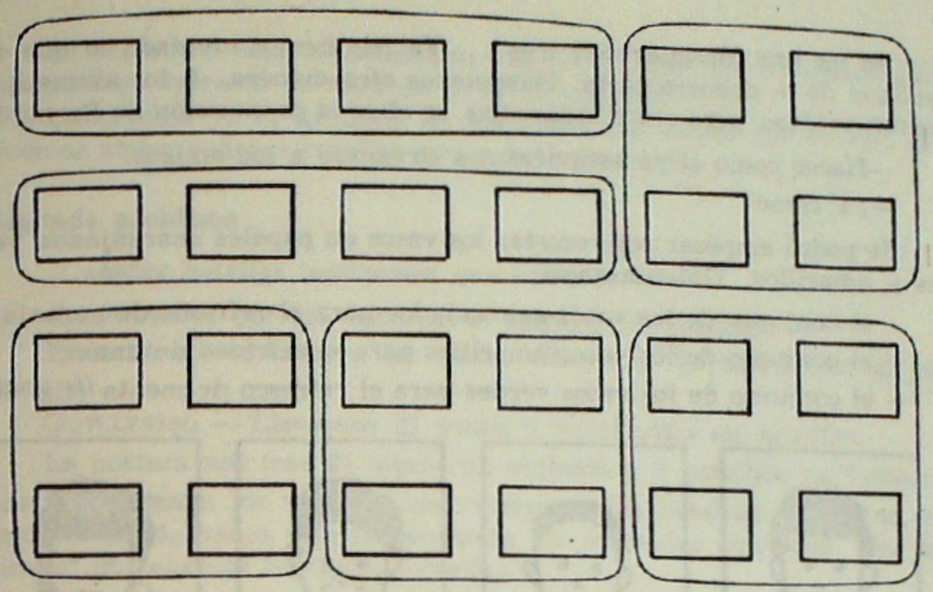


Fig. 65

16. PROBLEMAS RESUELTOS EN UNA CLASE

¿Cuántos vasos? ¿Cuántas botellas? Primero exponemos el problema que se ha de resolver:

Hemos invitado a nuestros amiguitos. Queremos ofrecerle un pedazo de torta y un refresco; éste puede ser de naranja, de limón o de menta.

Escribimos a todos ellos para conocer su gusto y las respuestas nos han llegado en seguida. Tenemos ahora tres problemas que resolver:

1º Enumerar los vasos que hay que servir dentro de cada categoría.

2º Conocer el número de vasos que se pueden servir con una botella.

3º Encontrar la cantidad de botellas que hay que comprar.

Este ejercicio se da en una división de los niños mayores, al principio del último bimestre. Los alumnos ya están bastante ejercitados y podemos abordar con ellos un problema complejo.

Primer problema

Enumerar los vasos que se pueden servir con los distintos gustos de refresco. Cada uno tiene la respuesta del amigo al que ha invitado. ¿Cómo hacerla conocer a los otros? Los chicos mismos ofrecen soluciones:

CRISTINA. — Leamos las cartas recibidas.

Se lee una, después dos, tres... Ya nos hemos olvidado lo que deseaba el de la primera carta. Busquemos otra manera. A los alumnos no les faltan ideas, pero entre todas ellas, se elige la proposición de Bernardo:

—Hacer como si ya estuviéramos sirviendo a los amigos.

—¿Y cómo?

Se podrá empezar por recortar los vasos en papeles anaranjados, verdes y amarillos. Obtendremos:

- el conjunto de los vasos anaranjados para el refresco de naranja;
- el conjunto de los vasos amarillos para el refresco de limón;
- el conjunto de los vasos verdes para el refresco de menta (fig. 66)

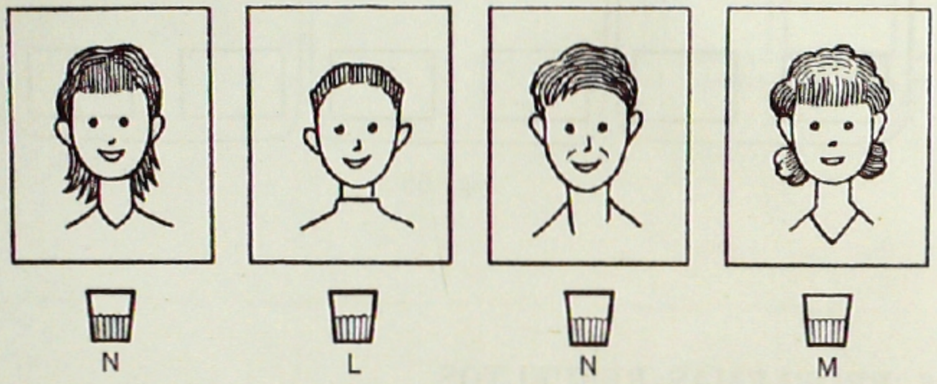


Fig. 66

De la misma manera, se recortarán botellas de color; un número grande de botellas, para tener la seguridad de que habrá suficientes.

En seguida, como lo propone Bernardo, se colocarán los retratos y a cada uno se le pondrá al lado un vaso de la bebida elegida.

La maestra propone luego retirar los retratos: aparece entonces *el conjunto* de los vasos, que forma un borde coloreado alrededor de la mesa.

MANUEL. — Hay más vasos anaranjados que verdes o amarillos. Haría falta ponerlos todos juntos; pongan todos los vasos anaranjados juntos.

—Tienes mucha razón; ahora hay que organizar ese *conjunto*.

Agrupamos los vasos de cada clase. Obtenemos tres nuevos *conjuntos:*

- *conjunto* de vasos anaranjados;
- *conjunto* de vasos amarillos;
- *conjunto* de vasos verdes.

Todos estos vasos estaban contenidos en el *conjunto* de los vasos que había que servir. Son, entonces, *subconjuntos*.

En efecto, si elijo un vaso de la mesa: es un *elemento* del *conjunto* de los vasos que hay que servir, y un elemento del *conjunto* del refresco de naranja; pero no es un elemento del conjunto del refresco de menta.

Al terminar esta clasificación, los niños observan también que el *subconjunto* refresco de naranja es el más grande.

Conocemos ya la cantidad de los vasos que habrá que servir. Busquemos ahora cuántas botellas van a ser necesarias.

Segundo problema

¿Cuántas botellas tendremos que comprar?

Comencemos por las botellas de refresco de naranja.

FRANCISCA. — Contemos los vasos. Hay 21. Yo escribo en el pizarrón: 21.

GUILLERMO. — Llenemos 21 vasos y vaciémolos en botellas.

La portera nos trae 21 vasos, un embudo y 3 botellas; no tiene más. Los niños llenan los vasos y los vacían en las botellas. La tarea va a resultar larga; habrá que repetir para los otros dos refrescos. Por añadidura, no tenemos bastantes botellas.

Busquemos otra solución (fig. 67).

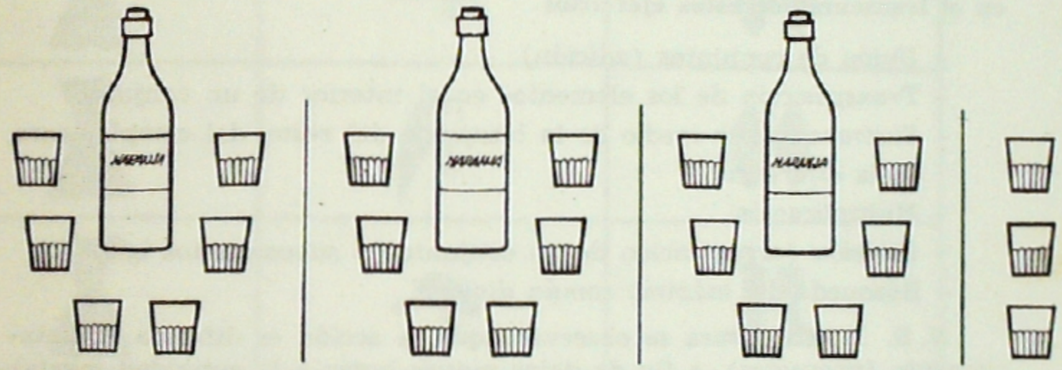


Fig. 67

—Yo he vaciado 6 vasos en mi botella...

—Yo también.

Verificamos delante de los niños: se llenan 6 vasos con el agua que contiene una botella.

Volvamos al *conjunto* de los vasos del refresco de naranja. Sabemos que para llenar 6 vasos hay que comprar una botella.

FRANCISCA. — Hay que hacer grupos de 6 vasos.

Habíamos recortado botellas del color de las bebidas. Podríamos ahora poner una botella en el medio de 6 vasos.

En efecto, una botella corresponde a 6 vasos.

¿Cuántas botellas de refresco de naranja compraremos? Para unos "3 botellas"; para otros "4 botellas".

Pensamos: si compramos 3 botellas, quedarán 3 vasos vacíos, pues las 3 botellas alcanzan para 18 vasos. Y si compramos 4 botellas se podrán llenar los 21 vasos y sobrará refresco.

Miremos el dibujo: 1 botella y los 6 vasos correspondientes. Ya hemos llenado 3 vasos, ¿cuántos vasos podemos llenar con lo que queda en la botella?

FRANCISCA. — "Tres, porque 3 y 3 son 6".

Formulemos de nuevo:

21 vasos son 6 vasos 3 veces, y 3 vasos más.

Aplicaciones:

Busquemos ahora cuánto tenemos que comprar de refresco de limón y de menta. Los resultados obtenidos por los niños son:

- 2 botellas de refresco de limón y sobrará 1 vaso;
- 2 botellas de refresco de menta y sobrarán 4 vasos.

Estos nuevos ejercicios han servido de control y probaron que los niños entendieron.

Nociones puestas en evidencia en el transcurso de estos ejercicios

- *Unión* de conjuntos *(adición)*.
- *Transposición* de los elementos en el interior de un conjunto.
- *Sustracción* por medio de la búsqueda del *resto*, del *complemento*, de la *diferencia*.
- *Multiplicación*.
- *División* (organización de un conjunto en subconjuntos iguales).
- Búsqueda del *máximo común divisor*.

N. B. A esta altura se observará que la acción es diferida voluntariamente (proyectos), a fin de dejar mayor lugar a la actividad mental.

17. UN JUEGO DE RELACIONES

En la clase no tenemos más que 3 muñecas. Por esta razón no podemos dar a cada niño una muñeca, y hemos decidido fabricar muñequitas individuales, hechas de cartón, que cada uno vestirá recortando en tela los vestidos que luego se pegarán directamente sobre el cuerpo.

La casualidad ha querido que hiciéramos las observaciones siguientes. Podemos ponerle a cada muñequita:

un vestido o un pantalón;
un pañuelo en la cabeza o un sombrero;
botas o zapatos.

Resumimos estos nombres con las iniciales correspondientes, primero explicadas verbalmente, luego escritas en el pizarrón:

V (vestido) o P (pantalón);
T (pañuelo o triángulo) o S (sombrero);
B (botas) o Z (zapatos).

Busquemos, dibujando, todos los *equipos posibles*

- a partir del vestido,
- a partir del pantalón,

haciendo todas las combinaciones distintas que puedan hacerse y dando por resultado un cuadro con dibujos como el de la fig. 68.

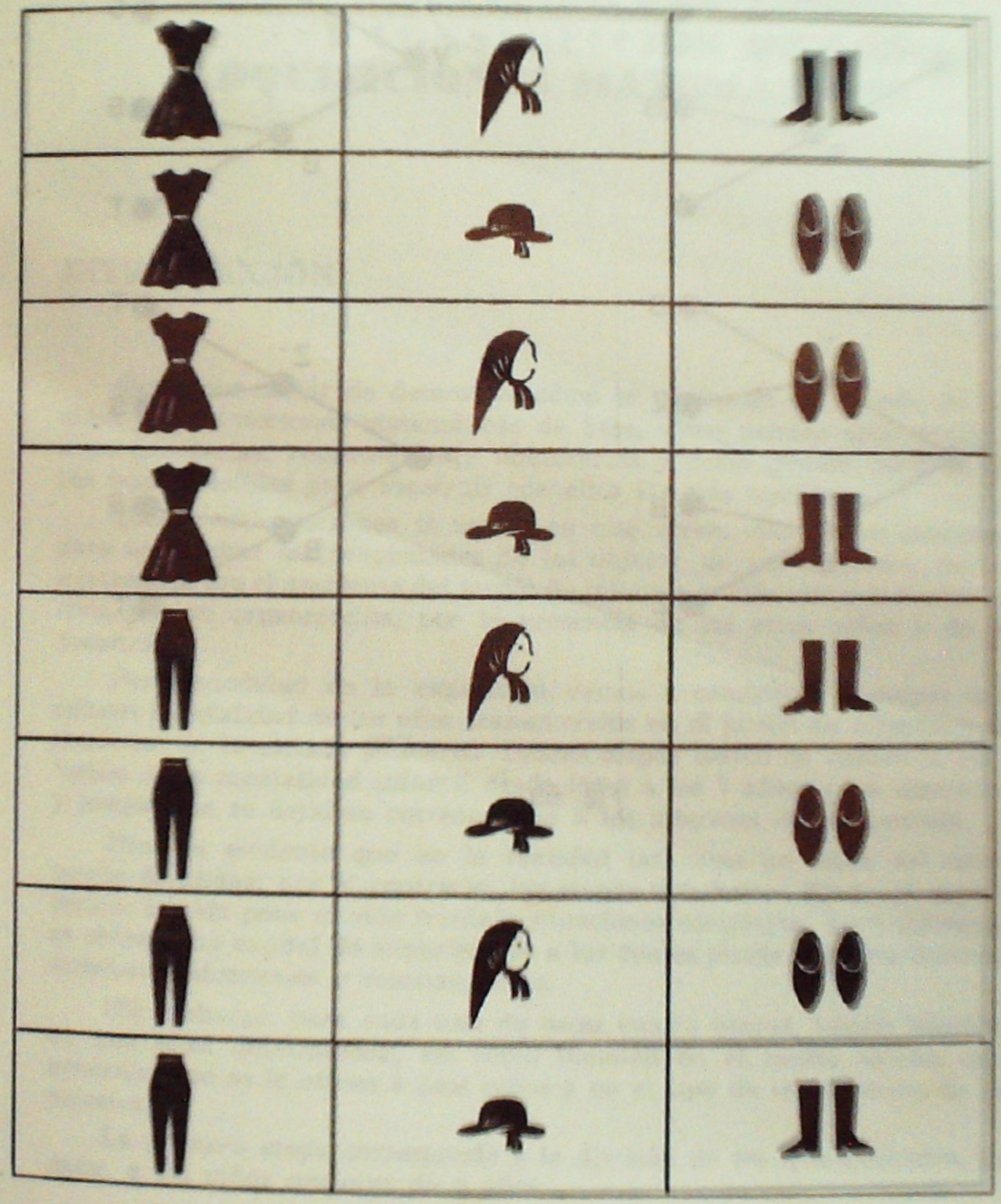
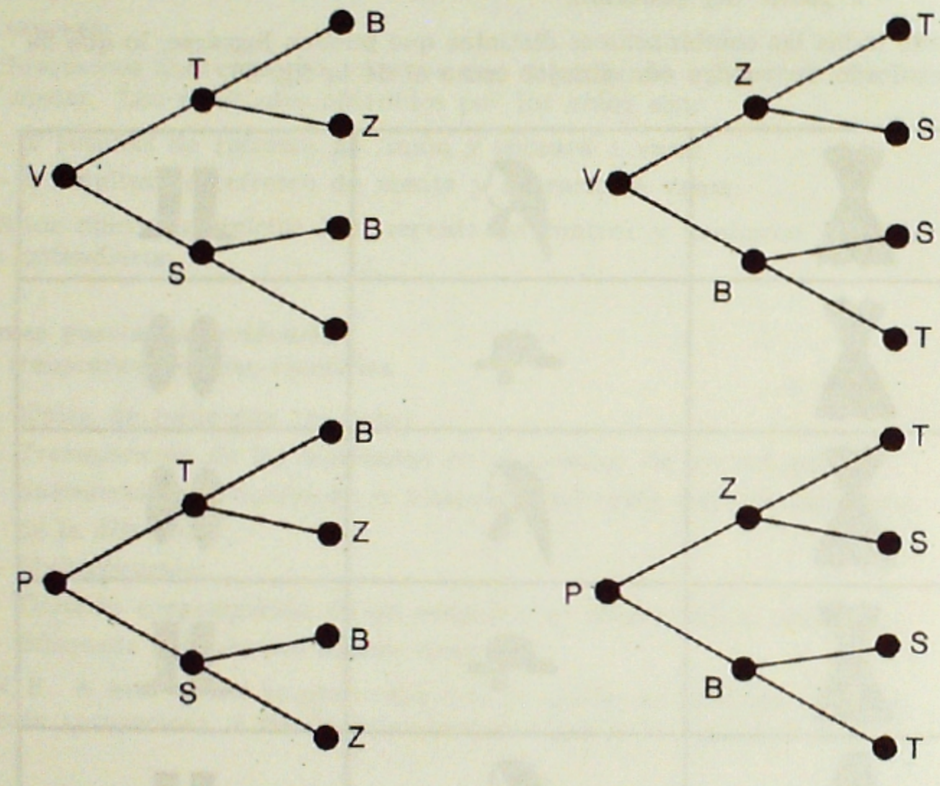


Fig. 68

Tratemos ahora de traducir, de manera más rápida, el equipo posible de nuestra muñeca. Esto constituye un juego muy divertido (fig. 69).

Como puede verse, estos "árboles" que resultan pueden leerse a partir de cualquiera de los elementos: nuestro propósito es *romper los mecanismos* con la ayuda de este juego, e invitar al niño a *agilitarse*.



ETC. . . .

Fig. 69

3

NATURALEZA, ORDEN Y CONSTRUCCIÓN DE LAS ADQUISICIONES MATEMÁTICAS

INTRODUCCIÓN

Queremos tratar de demostrar cómo se presentan en la vida de los niños ciertas nociones matemáticas de base, cómo pueden ellos vivirlas, experimentarlas, reconocerlas y nombrarlas y cómo pueden servirse de las más accesibles para construir con ellas las más complejas.

Todos, cualquiera sea el medio en que viven, encuentran ocasiones para comprobar las propiedades de los *objetos*, de los *conjuntos*, de los *números*. Pero el ambiente del jardín de infantes es más rico que cualquier otro, por su organización, por la presencia de los otros niños y de la maestra.

Por comodidad de la exposición vamos a considerar *4 etapas* que cubren la totalidad de los años transcurridos en el jardín de infantes y el comienzo de la escuela primaria. Dichas etapas tienen en cuenta la evolución de la mentalidad infantil desde los 2 a los 7 años, y los ejercicios y juegos que se detallan corresponden a los intereses de ese período.

Pero es evidente que en la realidad las cosas no están así netamente divididas; por el contrario, las etapas que hemos fijado se superponen; la vida pone al niño frente a situaciones complejas. Lo importante es obtener un capital de experiencias a las cuales pueda acudirse durante nuestras deducciones y razonamientos.

Sin embargo, para cada una de estas cuatro etapas, hemos pensado en una edad determinada, así como también en el medio escolar que generalmente se le ofrece a esos niños y en el tipo de intervención de la maestra.

La *primera etapa* corresponde a la división de los más pequeños, es decir, a los niños menores de 4 años.

La *segunda etapa* se refiere a la división intermedia, o sea, a los niños de 4 a 5 años.

La *tercera etapa* se desarrolla al comienzo de la división de los mayores; alrededor de los dos primeros trimestres. Los niños cuentan en ese momento con 5 años o 5 años y medio.

Por fin, la *cuarta etapa* tiene lugar al final de la escolaridad en el jardín de infantes y al comienzo de la escuela primaria. Comprende los niños desde los 5 años y medio o 6, hasta los 7 años.

Pero, digámoslo una vez más, esta clasificación sólo es útil especialmente para fijar ideas, pero no para ajustarse a ella en forma inflexible. Es evidente que no hay que desperdiciar ninguna oportunidad de hacer reflexionar a un niño acerca de lo que está haciendo, aun cuando la actividad a la que se dedique haya sido tomada como ejemplo para ilustrar algún punto de una etapa anterior. Es al espíritu que debemos ajustarnos, más que a la letra.

En la página 166 damos un cuadro sinóptico de estas etapas. En él veremos para cada una de ellas una división triple: los *objetos*, los *conjuntos*, los *números*; división que se volverá a encontrar en la descripción que hacemos de cada una de ellas. Previamente, en las páginas 161 a 165 damos los cuadros de evolución longitudinal de algunas de las principales nociones matemáticas que los niños pueden manejar.

Método general

Ante todo, se trata de permitir una actividad libre. La actividad mental en los niños pequeños está ligada a la actividad sensorio-motriz. Aquélla se desarrolla poco a poco, y se recurre a la actividad motriz sólo como medio de buscar soluciones a los problemas planteados, y luego como medio de control (ver pág. 50).

Por fin llega el momento en que la actividad mental, apoyándose en el recuerdo de experiencias numerosas, se basta por sí misma para resolver el problema planteado.

La actividad libre es posible gracias a una intencionada organización del medio escolar y a la actitud de la maestra, es decir, al clima que ella crea.

Esta actividad es, naturalmente, una actividad de grupo, colectiva, por el hecho mismo de desarrollarse en una clase. La colectividad aporta ayuda y sostén a cada uno en el esfuerzo de la búsqueda. De la discusión nace, poco a poco, la verdad y la exactitud de la expresión. Por estos medios, las adquisiciones afloran a la conciencia. Sin aquéllos, éstas quedarían en el plano de la acción y de sus resultados.

Intervención de la maestra

La maestra cambia de actitud a medida que los alumnos maduran. Al principio es simplemente observadora; sólo interviene para promover la reflexión sobre una situación o para hacer recordar lo que existía antes de la acción en curso; es también la que facilita el término apropiado y su aplicación.

Poco a poco, se convierte en la que propone las situaciones –los problemas– y apoya la investigación.

Por fin, es ella la que "da los ejercicios", facilitando la construcción de mecanismos que hacia los 6-7 años resultan indispensables.

Su papel, como vemos, no es diferente durante las actividades de adquisición matemática, al de las otras que se realizan en el jardín de infantes. Desde luego que para los niños más pequeños –hasta alrededor de los 4 años y medio– no hay momento especialmente previsto para estas adquisiciones; se realizan, ya lo veremos, utilizando cualquier actividad que ofrezca una ocasión propicia. Se trata, más bien, de una preocupación constante de la maestra, que sabe aprovechar la oportunidad cuando ésta se presenta.

Resulta de mucha importancia la organización del medio escolar, la instalación del salón. Aquí trabaja la maestra todo el año, introduciendo o haciendo desaparecer objetos, juguetes o instrumentos (balanza, regla, etc.), de manera que las nociones se presenten en situaciones distintas y que las actividades de los niños renueven las situaciones generadoras de experiencias.

La de observadora no es una actitud pasiva más que en apariencia. En efecto, es activa porque permite juzgar la adaptación de todo lo previsto a las necesidades de cada uno. La maestra puede, así, organizar la instalación material del salón de clase e intervenir provechosamente en la actividad de cada educando.

Su intervención toma diferentes formas:

- ayuda al niño a comprobar el resultado de su acción, haciéndole describir sus acciones, los resultados obtenidos, usando siempre los términos adecuados de acuerdo con el nivel del vocabulario del alumno;
- formula preguntas con referencia a las acciones realizadas, dirigiéndose ya sea al autor de la acción o a los compañeros que han actuado como colaboradores o testigos;
- organiza juegos en grupo, siendo conductora o participante;
- sabe dar, en fin, a una misma noción, el aspecto renovado indispensable para evitar la mecanización prematura, e impedir que la memoria intervenga sin haberse empeñado profundamente el pensamiento y la reflexión;
- por fin, *llegado el momento*, es decir, en los primeros años de la escuela primaria, la maestra ayudará a retener de memoria lo que debe ser memorizado en ese nivel y que ya no lo será jamás si se deja pasar la oportunidad.

En las divisiones de los más pequeños y de los medianos, la educadora no debe preocuparse por un plan de estudio. Las adquisiciones están ligadas a la vida diaria, según se presenta y desarrolla en la clase; tampoco hay momento especialmente previsto para el empleo del tiempo. Las nociones que el niño descubre no son para él totalmente nuevas. Se trata, sobre todo, de darle un conocimiento en cierto modo orientado

y, especialmente, de rectificar el lenguaje con el cual expresa aquellas nociones en forma natural.

Por el contrario, en las otras divisiones, la maestra debe fijarse los objetivos y conducir metódicamente el estudio desde los comienzos de la aritmética, a través de las ocasiones que presenta la vida. Pero ya no son estas oportunidades el punto de partida del estudio, sino, más bien, su ilustración.

LA PRIMERA ETAPA

Intuitiva y verbal

Introducción

Ubicamos la primera etapa antes de los 4 años. Es, pues, la etapa de la división de los pequeños. Las nociones que nos interesan nacen paulatinamente de las situaciones en las que se encuentra el niño. No son el tema de ninguna enseñanza por parte de la maestra. No es cuestión de que ella tenga "un programa" que seguir, que los obligue a analizar situaciones artificialmente creadas, o a retener "los resultados".

Sencillamente, el niño vive la vida de la clase, se entrega a los juegos y actividades propias de su edad, intenta conocer el mundo que lo rodea y hace así numerosas experiencias, algunas de las cuales le permitirán hacer ciertas comprobaciones que van constituyendo en su mente la base de los conocimientos matemáticos.

La intervención de la maestra es ocasional, en el sentido que debe estar siempre dispuesta a aprovechar el momento de hacer notar, comparar entre sí y fijar en el recuerdo las situaciones favorables a esta primera formación matemática y lógica del espíritu.

Su intervención consiste también en dar al niño la posibilidad de expresar aquello de lo que ha tomado conocimiento y no en cualquier lenguaje, sino en aquel que pertenece a la vez a la matemática y a su vocabulario corriente.

Es decir que, por una parte, el pequeño se entrega libremente a las actividades sensorio-motrices y a los juegos de movimientos, de imitación, que son propios de su edad y, por otra parte, la maestra interviene ocasional y discretamente para hacerle tomar conciencia de la situación y para que la exprese correctamente. Debe, además, favorecer dichas situaciones.

Esta etapa es pues, a la vez, intuitiva y verbal.

Nociones que deben adquirirse durante este período

En la acción y el juego cotidianos, el niño se encuentra con las magnitudes. Veremos que éstas se desprenden poco a poco del conjunto de las cualidades perceptivas de los objetos.

Encuentra también la idea de distribución y de orden, la de pertenencia, y primero la de pertenencia a sí mismo y a los otros. Tiene ocasión de reconocer en los objetos diferentes cualidades comunes, entre las cuales algunas son cualidades numéricas.

Sus juegos lo conducen a distribuir los objetos en grupos.

Descubre los primeros números en su forma ordinal (idea de primero y último) y algunos números pequeños en su forma cardinal.

El salón

Hemos dicho cuán importante es la organización del medio escolar. Lo habitual es organizar el salón de los pequeños en "rincones de juego".

Los niños menores de 4 años tienen siempre a su disposición juguetes y material en abundancia. Es indispensable que estos juguetes y estos materiales sean fácilmente accesibles. A continuación describimos brevemente algunos de estos "rincones de juego".

Juegos de construcción. Caja con cuerpos sólidos de formas geométricas diversas: paralelepípedos (cubos, ladrillos), prismas, esferas, cilindros, tablitas... Estos elementos deben encontrarse en distintos tamaños, y constituidos con diversos materiales (madera, material plástico, etc.).

También se encuentran a menudo cajas, ovillos de hilo, etc., que sirven de accesorios para las construcciones.

Cuando éstas son voluminosas, los niños estarán mejor si se instalan en el suelo; hay que tener en cuenta, entonces, la necesidad de una alfombra o estera.

Pequeños juegos de construcción sobre la mesa: se necesitan las mismas formas geométricas, en tamaño chico, si bien algunos los prefieren con piezas grandes, especialmente cuando están alrededor de los 4 años de edad.

Juegos de arena. Además del montón de arena que puede encontrarse en el patio o jardín, se puede instalar una especie de pileta o caja de arena en el salón de clase, a fin de permitir el juego con arena en cualquier momento. Ésta puede reemplazarse por afrecho o aserrín. Lógicamente, debe haber moldes, palas y tamices.

Juegos con agua. Puede instalarse una pileta con agua en el salón, provista con frascos, biberones, botellas, vasos, potes, embudos...

El agua puede colorearse con algún agregado apropiado (pero habrá que tener la más absoluta seguridad de que no sea tóxico y de que pueda ser fácilmente eliminado de la ropa con el lavado común). El niño vierte, llena, transvasa, sin cansarse jamás.

Autos, camiones, trenes. En una caja pueden estar ciertos juguetes, tales como autos, camiones, etc., que sirven para transporte o carga de

otros. También pueden estar aquí los pequeños autitos que seguirán las rutas jalonadas por los cubos, y los vagones que forman los trenes.

Juegos de imitación. Los juegos con la casa de muñecas con cocina, dormitorio, comedor y baño, permitirán, ya lo vamos a ver, muchas experiencias, siempre que el contenido de los muebles sea rico.

Es necesario darle mucho espacio a este "rincón", pues es siempre muy frecuentado, y hay que facilitar los juegos colectivos, que son la regla en los juegos de imitación.

Balanza. Es indispensable una balanza de brazos, con platillos suspendidos, aun cuando esté toscamente fabricada. Cerca de ella se encontrarán recipientes apropiados (cajas, canastillos, bolsitas) donde poder pesar, y objetos menudos para ser pesados (piedrecitas, bolitas, porotos, tapitas, etc.).

Juegos para enhebrado. Debe haber siempre a disposición de los niños cuentas de diversos colores, formas y dimensiones, junto con todos los accesorios indispensables para el enhebrado.

Según el lugar de que se disponga, no se presentará nunca simultáneamente la totalidad de los juguetes y materiales existentes. Se pueden organizar las cosas de modo tal que se suceda la instalación o presentación de los diversos materiales, renovándose de esta manera el interés. Sin embargo es de desear que siempre se les deje una posibilidad de elección.

A. LOS OBJETOS

Entre las cualidades perceptivas de los objetos, las que aquí nos interesan son las *magnitudes.* No obstante, no siempre son las que más atraen la atención de los niños. El color es a menudo la cualidad dominante para ellos, salvo que se trate de caramelos, en cuyo caso el tamaño puede importar más que el color.

Será necesario, pues, un trabajo de análisis, lentamente accesible a la mente del niño, conducido en base a observaciones renovadas por situaciones que se modifican.

En matemática, las magnitudes se vinculan con las cantidades continuas y las cantidades discontinuas. En las primeras, no se pueden distinguir los elementos constituyentes: tales son las medidas de longitud, de superficie, de volumen, de peso, de capacidad. En las segundas –cantidades discontinuas–, por el contrario, aparecen los elementos constituyentes: colecciones de objetos que se pueden enumerar.

El niño encuentra unas y otras, separadas o asociadas, en sus juegos y experiencias cotidianas. Ejemplos de ello son: la longitud de una varilla que está sobre la mesa, la de una cinta suspendida de una percha, la distancia que debe recorrerse en el salón o en el corredor de la escuela, la longitud de la línea que puede trazarse con el pincel, la de un collar de cuentas.

En todos estos ejemplos, la longitud está ligada a una comprobación o a una comparación (varilla, cinta); a la acción de caminar o correr (en este caso existe una relación entre la distancia a recorrer y la velocidad del desplazamiento); a la acción de pintar (pero también a la capacidad del pincel para retener pintura: un pincel grueso puede retener más que uno fino); a la acción de enhebrar (pero también al número de cuentas de que se dispone, a la rapidez y a la habilidad del niño).

Las nociones de longitud, duración, distancia, velocidad y cantidad se encuentran, pues, en juego a la vez. Pero solamente de manera *intuitiva* y *global* toma el niño conocimiento de las relaciones entre todas esas variables inherentes a la complejidad de las situaciones cotidianas y banales a las cuales nos hemos referido. También podemos decir que ciertas nociones de esencia matemática, como la longitud, el número, se encuentran ligadas a otras nociones que más tarde se estudiarán en física, como la velocidad, la densidad... Ya encontraremos otros ejemplos.

En todo momento el niño se encuentra con las magnitudes. Así, la construcción de torres, casas, puentes, muros, con cubos de diferentes formas, cajas, ladrillos... le enseñan que si se quiere que ella sea alta, es necesario que la base sea sólida, que tenga un cierto apoyo; es menester que a medida que crece, los elementos sean cada vez menos pesados. Se presentan dos nociones: la de verticalidad (u oblicuidad) y la de densidad de los materiales, que si no se las tiene en cuenta, pueden producir el derrumbe. Esto también puede provocarse por una cierta presión aplicada lateralmente.

Sabemos bien qué placer, continuamente renovado, siente el niño con estos juegos, por medio de los cuales construye y demuele sin cesar.

Si el puente construido es largo, el paso bajo su arco será ancho; esto plantea otro problema de equilibrio, distinto al del muro o la torre.

La construcción de casas o bloques es cada vez más compleja, a medida que se dominan en la práctica las nociones de equilibrio: elementos construidos bien a plomo unos sobre otros, o desalineados, para dar origen a las aberturas (ventanas).

El manejo de las piezas de los juegos de cubos o de mosaicos proporciona al niño un primer conocimiento de las *formas geométricas:* cubos, paralelepípedos, prismas, pirámides, esferas, conos, y también cuadrados, círculos, triángulos, rombos, son utilizados por él según sus propiedades geométricas, intuitivamente reconocidas.

Estas múltiples acciones se expresan por medio de numerosos términos que el niño comprende o emplea corrientemente. Por lo menos conoce el sentido en la acción práctica. Volveremos a encontrar esta idea en la página 127. Digamos simplemente aquí que su vocabulario es rico, demasiado rico para el matemático y, sin embargo, impreciso.

Las magnitudes se presentan también en forma de *peso.* Los niños conocen sus efectos por haberlos experimentado en sus primeros juegos de movimiento. Al desplazar o transportar los juguetes, al empujar o tirar de carruajes o carretillas, muchas veces dice: "¡Es pesado!". Esto se repite a menudo durante las primeras comprobaciones, no sin un cierto sentimiento de orgullo, desde luego.

Los términos "pesado" y "liviano" y las nociones que designan están asociados a otras nociones como la de "voluminoso" y a la cantidad discon-

tinua, es decir, al número de elementos considerados. Desde el punto de vista motor, del mismo modo que la noción de longitud está ligada a la distancia por recorrer, o a la altura que hay que franquear, la de peso lo está a la sensación muscular del esfuerzo que debe realizarse para desplazar un objeto pesado.

Entre la noción de volumen y la de peso se encuentra, ya lo sabemos, la de densidad. Muy pronto nace en el niño, intuitivamente.

Las magnitudes se presentan también en forma de *capacidad* de recipientes. Los juegos de arena y de agua permiten una primera aproximación a este concepto. El traspaso de líquidos a vasos de formas diversas; la fabricación de "tortas" de arena por vaciado del molde o baldecito previamente lleno de arena húmeda, son experiencias que permiten comprobar que los líquidos no tienen forma propia, que la arena húmeda conserva la forma del recipiente que la contenía o la impresión en hueco del molde que se ha hundido en ella: primera idea del "negativo", igual en valor absoluto al positivo, pero inverso.

La idea de pesado y liviano se vuelve a encontrar con los líquidos: lo que flota y lo que cae al fondo del recipiente con líquido.

1. Ejemplos de experiencias posibles

Construcciones y juegos similares

Se trata de los juegos en los cuales ciertos elementos se amontonan, se apilan, se acumulan, se yuxtaponen, se alinean, se colocan uno sobre otro o uno junto al otro, de forma que se adapten aproximadamente entre sí.

El niño experimenta: con relaciones entre dimensiones de los elementos y dimensiones del conjunto; entre acumulación en altura, verticalidad y equilibrio, y también con las relaciones entre volumen y peso, proporcionales para una misma sustancia, o ligadas por la noción de densidad, si los materiales son diferentes. Aquí es interesante hacer ver que un cubo pequeño puede ser más pesado que otro mucho más grande.

Como vemos hay nociones de geometría intuitiva que se ponen en evidencia: una esfera no se mantiene inmóvil sobre una superficie plana; una pirámide o un cono no se apoyan sobre el vértice; los cubos se deslizan sobre las caras de una pirámide; los cilindros o las bobinas ruedan si se las coloca sobre la superficie lateral, etc.

Juegos de movimiento con desplazamiento

Los juegos libres en el salón o en el patio, las sesiones de educación motriz, permiten al niño recorrer las distancias, ya sea caminando, corriendo o saltando, o cubrirlas lanzando algún objeto como, por ejemplo, una pelota.

Las ocasiones que tiene de subir una escalera o de trepar por la escalerilla del tobogán lo familiarizan con las distancias verticales, o refuerzan la experiencia que puede haber tenido mirando por la ventana: cuanto más alto se está más pequeños parecen los objetos.

Así nacen las nociones de "lejos" y "cerca", que se combinan con las de tiempo y duración:

- ir lejos demanda más tiempo que ir cerca;
- ir rápidamente exige menos tiempo que ir lentamente;
- ir lejos y lentamente, lejos y rápidamente...

Espacio próximo y espacio lejano son conceptos poseídos desde siempre y el niño no hace en la escuela más que una nueva experiencia por la dimensión de los salones, de los pasillos, del patio.

Estos desplazamientos pueden hacerse mientras se transportan objetos:

- arrastrando vehículos;
- llevando un objeto: transportando su mesa o su silla, o cambiando de lugar un banco entre varios.

Los desplazamientos dan existencia al espacio y constituyen una cierta iniciación en la topología. El punto de vista cambia según el lugar en el que uno se encuentra. ¿Dónde hay que ubicarse en el salón de clase para ver el armario de frente, de perfil? ¿Desde qué lugar del salón de música se ve a la vez el piano y la puerta? ¿Y si se lo mira en un espejo?

La educación motriz ofrece numerosas oportunidades para desplazarse:

- en línea, en fila;
- en diagonal, en el salón o en el patio;
- entre los obstáculos.

Estos obstáculos pueden estar ubicados:

- unos detrás de otros, unos juntos a otros, unos a continuación de otros: sillas, bolos, etc.
- en línea recta, en línea sinuosa, en zigzag.

Se pueden lanzar objetos dentro de un cesto, por sobre el borde de un cerco, hacia el exterior.

También se pueden disponer objetos alrededor de otro objeto (sillas alrededor de un aro, o alrededor de un niño, etc.).

Estos términos de posición recíproca se utilizarán más adelante, con motivo de situaciones matemáticas. Es necesario aprovechar desde ahora la ocasión de integrarlos en la acción, en esquemas de desplazamiento.

Juego de arena

La arena puede tamizarse: las pequeñas piedras que contiene quedan en el tamiz, mientras que los granos finos pasan a través de él (relación de dimensión). Si el tamiz es fino hace falta más tiempo para hacer pasar la misma cantidad de arena que si es grueso.

La arena tamizada entra fácilmente en los frasquitos, si no, las pie-

recitas tapan el orificio... Hacer entrar arena fina en un frasco con ayuda de un embudo da una imagen del escurrimiento (reloj de arena).

Las tortas de arena húmeda o de aserrín húmedo conservan la impresión del molde y dan una imagen en negativo (relieve en lugar de hueco). Se obtiene el mismo efecto apoyando una superficie dura sobre la superficie de la arena: ésta conserva la impresión.

Juego de agua

El interés por los juegos de agua es muy grande. La docilidad del líquido, material que no ofrece ninguna resistencia, es sin duda una de las causas. Con estos juegos el niño adquiere destreza motriz, indispensable si queremos evitar que se embarre mientras juega; trata de verter el líquido de un vaso al otro sin derramarlo fuera del recipiente. Llena, transvasa, vierte y vuelve a verter en todos los recipientes que tiene a su disposición. Las experiencias de J. Piaget han hecho célebres los ejercicios de trasiego para la comprensión del concepto de conservación de las cantidades. En el nivel en que estamos nosotros no conviene pretender que entiendan eso; a lo sumo se puede hacer que comprueben "que es la misma agua" y que "ahora no llega tan arriba".

Juego con la balanza

Éste es un juego muy apreciado por los niños. Los que tienen menos de 4 años se entretienen mucho haciendo subir y bajar los platillos poniendo objetos en uno de ellos y agregando o sacando objetos. Comprueban que baja el platillo que contiene el o los objetos más pesados. Al principio no trata de restablecer el equilibrio, sino que busca, más bien, el sube y baja de los platillos, que lo pone frente a cierto aspecto de la composición de fuerzas.

Efectos análogos encuentra jugando en la hamaca, e incluso si se pone de pie en una madera en equilibrio sobre un objeto cilíndrico.

En este nivel, cuando juega con la balanza no necesita ni taras ni pesas, simplemente coloca en cada platillo objetos de la misma naturaleza.

Las nociones de geometría intuitiva aparecen por medio de los juegos de construcción, por el dibujo (superficie del papel), por el enhebrado (longitud de los collares), por los mosaicos... El niño dice que ciertas piezas "van" y otras "no van". Se trata ahora de sus propiedades geométricas.

2. Papel de la maestra durante este período

La maestra puede favorecer la actividad del niño animándolo, interesándose por lo que hace, jugando con él. Dándole "consejos técnicos" lo ayuda a tomar conciencia de las propiedades de los objetos que está empleando:

- "tu construcción se derrumba porque el cubo que has colocado aquí es demasiado pequeño";
- "el agua se vuelca porque el recipiente lo has puesto torcido";
- "si pones un caracol grande sobre este platillo quedarán los dos bien derechos".

También puede ayudarlo a reflexionar:

- "¿te parece que habrá bastante agua para estas flores?, ¿o demasiado?";
- "si yo echo todos estos granos en esta bolsita, ¿no serán demasiados?";
- "¿en qué vaso hay más agua?" (observar si el niño señala el vaso que evidentemente tiene mayor capacidad o si se guía por la altura del líquido en los vasos);
- "¿qué pelota vas a poder arrojar más lejos, la más pesada o la más liviana?".

En resumen, la maestra habla con el niño, es decir, emplea y le hace emplear los términos en su forma correcta desde el punto de vista matemático.

3. Observaciones sobre el lenguaje del niño

El lenguaje de los niños pequeños es particularmente pobre en adjetivos y relativamente rico en verbos. Esto se explica psicológicamente por el interés que el niño pone en la acción y no en las cualidades de las cosas, excepción hecha de aquellas que están ligadas a la satisfacción de las necesidades fundamentales.

Los términos que permiten expresar las cantidades son *adjetivos*. Entre ellos, grande, chico, grueso, son los más conocidos y se emplean en lugar de otros que, sin embargo, convendrían mucho más.

El niño dice: una torre "grande", por decir "alta"; una cinta "grande", por "larga"; habla de una tabla "chiquita" por decir que es "delgada"; al llevar un objeto que le parece pesado, dice de sí mismo que es "grande", por decir que es "fuerte".

El adulto mismo emplea también, sobre todo hablando con los niños, esos adjetivos de manera no apropiada, dándoles un tono de afectividad: "eres grande", le dice al niño, con el significado de: "eres inteligente, razonable...".

Vemos, pues, que la idea de dimensión no es, a veces, lo principal.

Sucede a menudo que estos adjetivos se emplean de manera no relativa. Los términos de dimensión son siempre relativos. Un objeto no es ni grande, ni grueso, ni delgado, ni largo... Es más o menos grande, grueso, delgado, largo, que tal otro.

Desde el punto de vista matemático, es esta relatividad la que interesa; de ella surgirá la noción de igualdad y desigualdad, de relación y, por ende, de medida.

Evidentemente, no se puede presentar esto de manera dogmática. Es a través del uso como se encontrarán los matices.

A título de ejemplo vamos a explicar un modo de proceder. Dos niños están haciendo construcciones:

—Es grande mi torre.

Interviene la maestra: —Es linda, pero, ¿te parece que es bastante alta? ¿Es tan alta como la de Pedro? (o más alta o menos alta que la de Pedro). Obsérvese la introducción del término justo: "alta", del relativo.

—¿Qué puedes hacer para que sea más alta?

Es probable que el niño responda con la acción, agregando más elementos de construcción. Demostrará así que ha comprendido que la altura de la torre es proporcional al número de elementos, siempre que todos sean de la misma altura.

Sólo la repetición en muchas oportunidades puede llegar a hacer sentir estos distintos matices y a convertir en indispensable la precisión lograda. La maestra deberá poner atención cuando en otros momentos hable de una montaña alta (¿es muy alta para lo que es una montaña?), una soga gruesa, una varilla larga, unas plumas livianas...

En cuanto a los términos de acción, son numerosos; ya tendremos oportunidad de volver sobre este punto.

4. Lenguaje comprendido y lenguaje hablado

Es sabido que hay una diferencia notable entre los dos, que será tanto mayor cuanto menos estime necesario el niño expresar por medio de la palabra, lo que hace o lo que ha comprobado. Muchas preguntas de la maestra, aunque sean hábiles y oportunas, quedan sin respuesta a esta edad.

Es bueno saber si tal o cual término ha sido comprendido, ya que de ese modo sabremos si se ha adquirido tal o cual noción, si se ha formado cierto concepto.

Para hacer estas comprobaciones pueden utilizarse sondeos en forma de juegos individuales o colectivos:

—Haz una torre, pero solamente con los cubos grandes...

—Toma un caramelo grande para ti y uno más chico para tu hermanita.

—Dime, ¿cuál es la casa más alta (o amplia), la que construyó Francisca o la que construyó Pedro?

—Pon en fila todos esos juguetes sobre la repisa.

—Vete a ayudar a Jaime a llevar esa caja, porque es demasiado pesada...

Dicho esto, no hay que exigir que el niño se exprese verbalmente si no demuestra deseos de hacerlo. Él conoce el concepto, lo practica en forma operacional. Puede incluso conocer el nombre sin emplearlo.

B. LOS CONJUNTOS

En el transcurso de esta etapa no puede hablarse de conjuntos en sentido propio; pero se puede, por medio de ejercicios especiales, poner al niño en camino hacia ellos. Son esos ejercicios lo que dan la idea de "lo que va con, lo que va junto"; son ellos los que utilizan la noción de "pertenencia", los que exigen tomar en consideración las cualidades comunes.

1. Ideas de disposición y de orden

Estas nociones aparecen muy temprano en la vida de los niños, en su forma práctica; desde la más tierna edad, el bebé, aún en su corralito, junta en un rincón tales juguetes, mientras que agrupa en otro rincón los demás. La repetición de estas disposiciones nos conduce a pensar que hay una idea que gobierna ese seudo ordenamiento. Los criterios que han servido para estos agrupamientos y disposiciones se nos escapan. Intervienen razones netamente afectivas cuando un niño que ya domina la deambulación y, por lo tanto, dispone de localizaciones más numerosas y más diversificadas, coloca en la cama el oso y la muñeca, mientras que amontona en un cajón el resto de los juguetes.

A la edad del jardín de infantes ya ha habido imitación del ambiente e incluso costumbres inculcadas en el niño, y la disposición de los objetos se hace según las costumbres de los adultos.

Es así cómo en los juegos de imitación vemos al niño colocar todo lo que es vajilla y utensilios del hogar en el aparador, que es la cocina de la muñeca, mientras que ubica los vestidos en el ropero. Sin embargo, hay disposiciones que nos asombran, por lo imprevistas.

Conviene dejar a los niños completa libertad en sus ordenamientos espontáneos, sin darles consignas precisas, ya que lo esencial no es el ordenamiento mismo, sino la búsqueda al tanteo para adecuar "continentes y contenido".

Poco a poco, el niño se forma la idea de "lo que va con" y de "lo que va junto". Para ello se refiere a criterios:

- de orden perceptivo, como el color, lo que podrá desembocar más tarde en investigaciones de orden estético;
- de puntos de vista sobre el uso, como, por ejemplo, gorro y bufanda de lana, botas e impermeable, pantalón y saco de pijama, para la muñeca;

– de lo que es igual: así nace la idea de pares de guantes, de medias, de zapatos.

En un grado de abstracción superior, esta actividad organizadora se encamina hacia la decoración, las "disposiciones decorativas"; el orden de disposición de los elementos no es antojadizo, sino que obedece a una regla cada vez más complicada.

Los criterios para la elección de los elementos son primero del tipo de selección por forma, color o tamaño; luego se ven aparecer poco a poco disposiciones que obedecen a las reglas de alternancia[1] y, más tarde, una búsqueda de simetría. Si los elementos proporcionados al niño son juegos de mosaico, traba conocimiento con diferentes formas geométricas que lo ayudan a organizar el espacio de manera matemática.

En los juegos de imitación aparecen también los signos de una clasificación ordenada. El adulto es grande, el niño es pequeño; el padre es grande, la madre mediana, el hijo chico... Así clasifica él a sus muñecos, luego a todas las piezas del material que posee.

La división de los más pequeños sabe ordenar según criterios de dimensiones (altura, superficie, volumen) 3, luego 4 y 5, más de 5 elementos, del más grande al más chico, o a la inversa. Construye escaleras y torres más altas que las de sus compañeros. Así nace la noción de más y menos (o mayor y menor), siempre con un sentido de comparación.

2. Idea de pertenencia

La idea de pertenencia, tan importante en matemática, nace precozmente en el niño. Siente lo que le pertenece desde los primeros meses de vida, y el alumno de la división de los más pequeños está muy aferrado aún a lo que es suyo o él juzga como tal. "Es mío", es una de las respuestas que se oye a menudo entre los niños, aun cuando se trate de juguetes comunes.

Una gran parte de los "ejercicios de orden" del jardín de infantes tiene por finalidad hacer reconocer a cada uno lo que se le adjudica: una percha en el vestuario, un lugar en la clase, en la sala de descanso o de música, ropas personales, etc.

En los juegos de imitación nace la idea de lo que pertenece a tal o cual muñeca, lo que "le va bien", así como en los juegos con muñecas surge lo que pertenece a la cocina, al dormitorio, etc.

En estos juegos se vuelve a encontrar variantes cuando se trabaja con figuras, las que se recortan según ciertos criterios (vestimenta de varones o de niñas, juguetes para el bebé, etc.), y se las clasifica de acuerdo con ciertas reglas.

[1] En bellas artes: sistema de adorno que consiste en la repetición alternada de dos motivos diferentes. *(N. del T.)*

3. Reconocimiento de cualidades comunes

Los juegos de los que acabamos de hablar preparan directamente el terreno para otros cuya regla es clasificar entre un conjunto de objetos (elementos diversos, figuras) aquellos que presentan tal o cual propiedad. Es sabido que los niños pequeños son más sensibles a ciertas cualidades perceptivas que a otras, y es el color una de las que más atrae su atención. Pero es interesante ver qué otros criterios influyen en ellos en el momento de los ordenamientos espontáneos y de las clasificaciones. Algunas veces es la dimensión lo que los atrae y ponen juntos todos los elementos que son largos o gruesos y en otras ocasiones son las cualidades las que adquieren preeminencia sobre la utilidad, de donde resultan comparaciones que nos parecen graciosas o inesperadas.

Los criterios observados pueden también ser no ya cualidades percibidas, sino conocimientos; así, cuando un niño agrupa las imágenes que representan a los animales de la granja o que viven en el mar, está utilizando lo que él sabe de la vida de los animales.

4. Ejemplos de ejercicios posibles sobre los puntos mencionados

Ordenamientos

Además de las disposiciones u ordenamientos de los que hemos hablado en la página 115, los *juegos con muñecas* proporcionan numerosas oportunidades para ordenar y, sobre todo, clasificar, es decir, no solamente poner un objeto en un determinado lugar o recipiente, sino adaptar contenido y continente, poniendo juntos aquellos elementos que tienen un mismo carácter, una misma propiedad (uso, forma, color, etc.). Aquí encontraremos, especialmente, los ordenamientos y las clasificaciones por el uso.

Así, los niños ponen en orden la casa de la muñeca y agrupan:

– lo que corresponde a la cocina: sobre la mesa, en el aparador (utensilios, vajilla), junto a la pileta, en el horno, etc.;
– lo que corresponde al dormitorio: en la cama (ropa de cama), en el ropero, sobre la cómoda.

Podemos luego distinguir en el dormitorio: la vestimenta (ropa interior, vestidos, tapados, calzado, etc.), ropa de cama, toallas.

Entre la vestimenta se agrupan: medias, guantes, zapatos.

En la cocina se ordenan las cacerolas (por tamaño, introduciendo cada una dentro de la que le sigue inmediatamente), se distinguen las ollas, las sartenes, etc.

Se puede, en fin, poner la tapa a cada cacerola, lo que es a la vez clasificación y adjudicación.

Ya hemos dicho que cuanto más rico y provisto de objetos diversos esté el "rincón de las muñecas", más ricos y variados serán esos juegos de ordenamiento y clasificación. Veremos en la página 129 que así se van preparando los niños para comprender la manera de constituir los conjuntos.

Adjudicaciones

Hay numerosas ocasiones en la vida de la clase para utilizar este tema. En efecto, es fácil encontrar las *adjudicaciones ligadas a la vida colectiva.*

A cada niño se le adjudica una percha en el vestuario, un lugar en el comedor o en el salón de clase. Cada uno tiene "su percha", "su lugar"... "Éste es mi lugar", suelen decir, o bien: "Ése es el lugar de Juan".

También encontramos las *adjudicaciones ligadas al juego.* Ofrecemos algunos ejemplos de esto:

a) *Muñecas:* si las muñecas son numerosas, se puede jugar a darles lo que les corresponde (vestidos, accesorios). El juego resulta más variado y divertido si entre las mismas hay niñas, varones y bebés.

b) *Figuras:* recortar de revistas o catálogos lo que puede pertenecer a mamá, a papá, a las niñas, a los varones.

c) *Otros juegos:* elegir, de modo que se adapten, tapones y frascos, tapas y cajas, etc.

Reconocimiento de una propiedad común

Aquí hay que ubicar los juegos de clasificación o selección. Se trata de reunir objetos que posean una propiedad común, por ejemplo, el *color* (objetos rojos, azules, etc.); la *forma* (alargados o redondos); el *uso* (que se usan en la mesa, etc.). Los demás objetos presentes se eliminan.

A los niños les gusta mucho este juego de clasificación. Algunas veces son más complicados porque los objetos seleccionados deben colocarse en cajas tipo alcancía, o hacer con ellos collares o trabajos de pegado ("collage").

Hay que tener cuidado de poner para su clasificación objetos de la misma naturaleza. Así, por ejemplo, se presentan granos mezclados y se les pide que seleccionen separando los granos de maíz, que se darán a los pollos. El aspecto de los granos de maíz es suficientemente reconocible como para que el ejercicio no presente ninguna dificultad.

Muy distinto es el ejercicio si el niño debe atenerse a una determinada cualidad y descubrirla en objetos de apariencia muy diferente. El color se ve bien, pero la forma, por ejemplo, es percibida menos nítidamente, y si de un montón de cuentas de todos los colores y formas el niño debe separar las que son ovoides, juntando para ello cuentas de muy distintos colores, tendrá bastantes dificultades para no dejarse influir por el color. Con mayor razón si tiene que reunir un lápiz, una cinta, un pin-

cel, una bufanda de la muñeca, porque dichos objetos tienen como propiedad común el hecho de ser alargados.

En todos estos ejemplos no hemos pensado más que en cualidades perceptivas. Pero también puede ser su propiedad de uso la que sirva para la selección. Se puede invitar al niño a agrupar vajilla y ropa de mesa, y a separar la ropa de mesa de la de cama. En estos casos recurre al conocimiento que tiene de las cosas.

Vemos que por medio de ejercicios progresivos se puede ir alcanzando un mayor grado de abstracción. Se pasa de la selección de objetos semejantes en todo, salvo en una propiedad (cuentas de la misma forma pero de colores diferentes: separar las verdes), a la selección de objetos diferentes en todo, salvo en una cualidad (reunir todo lo que es alargado o todo lo que se usa en la mesa), tomando como criterio ya sea una propiedad perceptiva, ya sea un elemento de conocimiento del objeto, adquirido por una experiencia vivida.

C. LOS NÚMEROS

1. Los primeros números

La noción de unidad y de dualidad es precoz en el niño. Hacia los dos años ya emplea correctamente los términos *uno* y *dos*, que forman parte de su vocabulario corriente. Sabe que hay una nariz, una boca, dos ojos, dos piernas, etc. Sabe tomar uno o dos caramelos de la caja que se le presenta.

Esto significa que es completamente innecesario hacer ejercicios sobre estas dos cantidades numéricas.

También posee la noción de pluralidad, pero los términos que la expresan son aún vagos: *mucho*, es el más empleado. El niño lo utiliza para designar las cantidades numéricas superiores a 2: "Hay más de 2", esto es, en resumen, lo que quiere decir, y no distingue unas cantidades de las otras.

Sin embargo, en la práctica parece que distinguiera las primeras cantidades (3, 4, 5), tal vez por comparación. Siempre están vinculadas con los objetos cuya colección caracterizan. Sabemos que en este momento, el número no es más que una de las propiedades sensibles de la colección puesto que aún no ha construido ni adquirido esta noción. Sobre este punto volveremos más adelante.

Durante su permanencia en la división de los más pequeños, muchos adquieren la noción intuitiva de 3, 4. Como acabamos de decirlo, estos números, que los psicólogos denominan "números intuitivos", están ligados a los objetos. El niño no relaciona el 4 de cuatro caramelos con el 4 de cuatro niños. Al cambiar la naturaleza de la colección, como los objetos que la componen son diferentes, el niño no tiene la impresión de que

conserve su carácter numérico: 4 caramelos pertenecientes a un sólo niño no son la misma cosa que 4 que pertenecen a 4 niños reunidos. Esto es lo que ha llevado a decir que en la mente del niño el número no tiene aún su aspecto cardinal. Conserva un valor adjetivo, y esto dura mucho tiempo en la vida del niño.

Por el contrario, veremos que existe un cierto aspecto cardinal que el niño admite bastante pronto; lo trataremos a propósito de las series de cantidades pequeñas.

2. Inventario de conocimientos

La maestra puede evaluar los conocimientos de los niños por diversos medios. Veamos algunos ejemplos:

Juego colectivo

Se hace que los niños se ubiquen alrededor de una mesa, sobre la cual hay muchos elementos pequeños semejantes: cuentas de colores, fichas, tapitas, etc. Uno a uno se invita a los niños a elegir 3, 2, 1, 4 de esos pequeños objetos. Es fácil observar cuáles son aquellos que simplemente toman varios sin discernir, y los que saben tomar exactamente el número pedido. Los primeros confunden 3, 4, con la pluralidad.

Con motivo de un cumpleaños, hacer contar 3 ó 4 velitas para la torta.

Ejercicios metódicos

Actividades sensorio-motrices. El enhebrado, los trabajos decorativos, son oportunidades para ejecutar collares, agrupamiento de objetos, pequeños mosaicos, etc.

- ya sea reproduciendo un modelo que muestra alternancias de 2, 3 cuentas, o disposición especial de 2, 3 elementos;
- o ejecutando la misma consigna, pero dada verbalmente, lo que exige saber contar 3, 4 elementos.

Actividades motrices. Hacer que se agrupen los niños de a 2, de a 3, de a 4, en parejas, para que hagan rondas, cortejos, molinetes.

Organización de las adquisiciones de la etapa precedente

Introducción

Hacia los 4 años, gracias a su actividad espontánea y a las sugerencias de la maestra, el niño posee un capital de experiencia suficientemente importante como para permitir que por reagrupamiento y análisis se pongan en evidencia las nociones más precisas. El niño ha aprendido a expresar sus descubrimientos.

Ahora está en la división de los medianos. Es necesario ayudarle a reencontrar las adquisiciones de la etapa precedente, a organizarlas y generalizarlas y a precisar las situaciones que las van a sugerir y los términos que las describirán.

En esta segunda etapa, aun cuando reservemos la parte principal a la *actividad espontánea*, y la maestra siga ejerciendo solamente una *intervención ocasional*, introduciremos *ejercicios metódicos* y daremos un objetivo a este indispensable conocimiento experimental.

La organización del salón de clase sigue siendo el elemento fundamental de la actividad matemática, puesto que aspiramos a que el niño realice libremente sus experiencias; pero dicha organización será concebida de manera tal que tienda a favorecer la adquisición de las nociones que puede asimilar a esa edad.

Nociones que deben adquirirse en este período

Se vuelven a considerar las adquisiciones del período precedente, como ya lo hemos dicho, de manera más metódica, por medio de la actividad experimental o en forma de ejercicios más sistemáticos, pero siempre "para ver".

Por otra parte, las actividades de agrupamientos, clasificación y ordenamiento del período precedente pueden ahora dejar presentir la constitución de conjuntos, la comparación de éstos por relación de objeto a objeto.

Así surgirá la primera noción de *relación entre objetos* y *entre colecciones*.

Los conocimientos relativos a los primeros números se utilizarán para las acciones de agrupamiento, de distribución y de reparto.

Puede aparecer, por fin, una primera exigencia de rigor en la expresión. Consiste, principalmente, en la elección del término que entre todos los que empleaba hasta este momento será preferido por su mejor adaptación a la idea que quiere expresarse.

El salón de clase

La organización del salón es semejante a la que aconsejábamos cuando se trató de los más pequeños. Los "rincones de juego" ofrecen permanentemente posibilidades para actividades libres y, simultáneamente, se vuelven a encontrar aquí los materiales y juguetes indicados en las páginas 107 y 108.

Por otra parte, los juegos de imitación son más ricos y se practican con mayor cohesión colectiva.

La instalación permanente de un lugar de "ventas" permite ciertas actividades en las que tiene importante aplicación la matemática elemental. Es necesario preverlo con suficiente amplitud para que puedan jugar entre varios.

Habrá que tener una o varias balanzas comunes y dinero, que podrá estar formado por fichas de madera, cartón o plástico, sin valor indicado. También será necesario disponer de recipientes apropiados: bolsitas, canastitos, etc.

Según los intereses del momento, el lugar de ventas será una mercería, una florería, un almacén, una panadería, una confitería, etc.

Las actividades manuales y gráficas tienen un lugar importante en esta sección; así, entre los "rincones" permanentes son indispensables:

- el de dibujo, con papeles de todas dimensiones, lápices, etc.;
- el de recortado, con papeles, tijeras, cartones, rafia, lana, cintas;
- el de modelado, con plastilina en particular.

Las diferentes actividades explotables

Además de los *juegos libres*, que son posibles gracias a la organización que acabamos de describir, las *empresas de grupo* son una fuente muy rica de experiencias. Entre ellas:

- las que proporcionan las actividades físicas: juegos al aire libre con pelota, soga, vallas; las rondas;
- la cría de animales pequeños; el cultivo de plantas en maceta o en la huerta, serán oportunidades para utilizar los descubrimientos hechos a propósito de las magnitudes y de los números;
- las empresas destinadas a la vida colectiva, a su comodidad, a su mejoramiento: arreglo del salón, decoración, etc.;
- las actividades colectivas ligadas a las fiestas, a las manifestaciones normales de la vida en sociedad;
- la confección de maquetas, títeres.

Además introduciremos ejercicios que tiendan a *simplificar la realidad*, al concretarse a uno solo de los aspectos de las situaciones con que se enfrenta el niño en el curso de las actividades mencionadas más arriba. Aquéllos pierden en parte su carácter de acción real, en beneficio de un carácter de "ejercicio". No desagradan a los niños, que son sensibles a esta simplificación de la situación. La prueba está en que ellos se dedican espontáneamente a esas actividades: selección, clasificación, ordenamiento. Pueden considerarse ejercicios de adiestramiento.

A. **LOS OBJETOS**

Se trata, por supuesto, del aspecto relacionado con las magnitudes. Las nociones que pueden adquirirse a este respecto, son:

- además de la consolidación de los conceptos de "más grande que" o "más chico que", la noción más amplia de igualdad y desigualdad;
- la de clasificación en serie, en orden creciente o decreciente.

El niño adquiere también la comprensión de las acciones que modifican las magnitudes:

—¿Cómo hay que hacer para que esto sea más grande, más chico, más grueso?... Cuando se trata de cantidades continuas o discontinuas, según el caso, se trata de tomar, sacar, suprimir total o parcialmente, agregar, alargar, colocar nuevamente, tomar o poner esto y también aquello, dividir, hacer partes, distribuir, tomar varias veces lo mismo.

A. Los psicólogos han demostrado que la acción más natural del niño cuando está en presencia de objetos, es *tomar*.

Si el objeto es único, resulta un simple desplazamiento. Si se trata de una colección de cosas, puede ocurrir:

- que las tome todas y no quede nada donde se encontraba la colección primitiva. Desde el punto de vista matemático, este desplazamiento es una translación;
- que no tome nada más que algunos objetos, es decir, que ejecute la acción de retirar, de separar. En este caso, quedan objetos;
- que, nuevamente frente a uno solo, no tome más que una parte, ya sea cortando, recortando, arrancando, partiendo, rompiendo, quebrando... Comprobamos, una vez más, la abundancia de términos que cubren el mismo hecho de "tomar una parte de un objeto".

También se pueden hacer partes con el objeto, o sea, dividirlo. La división en dos partes iguales no es sino un caso particular, que se examinará más adelante.

Un gran número de actividades espontáneas o sugeridas por la maestra consiste en recortar, partir, romper. No hay que dejar de explotarlas para la cultura matemática del niño y la formación de su mentalidad.

Por medio de cualquiera de estas acciones, se obtienen dos o varios trozos que son más pequeños que el objeto primitivamente dado, y podremos decir que unos son más grandes que otros. Las formas obtenidas también son diferentes. Vemos así todo lo que puede lograrse en este sentido, aun sin querer hacer sistemáticamente geometría experimental prematura.

La parte explotada de los juegos espontáneos, así como los ejercicios metódicos, se refieren a las longitudes, las superficies, los volúmenes (líquidos o sólidos). El fraccionamiento, la división, tienen por objeto realizar repartos, adjudicaciones, distribuciones. Y si la cantidad en cuestión es una colección, sólo se la aprecia cualitativamente, jamás se la enumera, salvo que se trate de los números más pequeños, ya que el niño de esa edad suele, generalmente, reconocer las cantidades 3, 4.

B. La acción opuesta a la de sacar, es *unir*; unir cantidades o colecciones. Esto puede hacerse ya sea poniendo juntas las cosas, ya sea pegando, fijando, clavando, cosiendo, etc. La nueva cantidad es mayor que cada uno de los dos constituyentes; es el uno y también el otro. Juntarlos y separarlos de nuevo significa descubrir, por la acción, las relaciones de la parte con el todo y del todo con las partes.

En la conducta espontánea del niño vemos esos incansables juegos que consisten en reunir, separar, volver a unir, y pasar del "más" y "más aún", al "menos" y "menos todavía".

Agregar, sacar, son acciones y términos bien conocidos a esta edad.

C. En el transcurso de estos juegos se le puede inducir a mostrarse equitativo y distribuir algo en partes iguales. Deberá, pues, saber dividir en dos partes iguales o construir esas partes por tanteo, es decir, agregando y sacando sucesivamente, lo cual lo conduce a saber reconocer la igualdad: igualdad de longitudes o de superficies, por superposición; igualdad de pesos, sopesando y apreciando muscularmente, luego recurriendo a la balanza y a la horizontalidad de los platillos; igualdad de volúmenes de líquidos por medio de la medida patrón del tipo de: "Un vaso de refresco para cada uno".

1. Ejemplos de experiencias posibles

Noción de desigualdad y de igualdad

Esta noción –aparecida ya en la etapa anterior– puede ahora precisarse por medio de una apreciación exacta.

Hasta ahora el niño juzgaba con una mirada, sopesaba: "Éste es el collar más largo, el cubo más liviano, el caramelo más grande". Era una comparación intuitiva.

La comparación puede hacerse ahora por medios más evolucionados. Se comparan dos longitudes superponiendo los objetos y haciendo coincidir una de las extremidades de cada uno (papel, cinta, hebra de lana). El niño sabe que aquel que sobrepasa al otro es el más largo de los dos. También sabe que el objeto más pesado es el que hace bajar más el platillo de la balanza que lo soporta.

Por deducción, sabe hacer o descubrir dos cosas iguales o desiguales, es decir, tan largo, tan grueso, tan pesado como..., más largo, más grueso, más pesado que...

Un *ejemplo* de actividad posible en el grupo de los medianos ilustra todo lo que hemos dicho:

Con motivo de una fiesta, los niños deben confeccionar guirnaldas y adornos para colgar.

Se hace un inventario de lo que se dispone y se ve que hay varias guirnaldas; son de diferentes longitudes. Las alinean en el suelo o las cuelgan de la pared; hecho esto se dan cuenta que para poder compararlas,

es decir, para poder juzgar cuál es más larga o más corta que otra, es necesario poner en la misma línea una de las extremidades de cada una: la guirnalda más larga es aquella que desciende más (si están colgadas) o que alcanza un punto más alejado (las del suelo). Pero hay que confeccionar otras guirnaldas; se harán gracias a la técnica fácil que consiste en formar anillos y pasar unos dentro de otros. Los niños descubren en seguida que hay que disponer de tiras de papel (tiras recortadas o trozos de serpentinas). Comienzan, entonces a recortar las tiras y a confeccionar anillos. No tardan en darse cuenta que los anillos son desiguales, que los hay demasiado chicos y demasiado grandes, y que las guirnaldas resultan muy desiguales.

Después de algunos ensayos, Pedro descubre que eso pasa porque las tiras son de longitudes desiguales: "Hay algunas muy chicas y otras muy grandes". La maestra aprueba y aconseja cortar las tiras de la misma longitud. ¿Cómo hacer?

Bien pronto varios niños toman una tira como modelo y cortan otras de papel de longitudes sensiblemente iguales.

Jaime toma un lápiz y hace una marca donde llega la que sirve de modelo, una vez colocada correctamente sobre el papel que hay que cortar.

Ante una sugerencia de la maestra, se logra un efecto agradable haciendo alternar anillos de 2 ó 3 dimensiones, obtenidos usando tiras de distintas longitudes (2 ó 3).

Observemos que intuitivamente se han asociado en la mente del niño la longitud de la tira y la dimensión del anillo, o sea, la relación entre el diámetro y la circunferencia del círculo, relación proporcional, como los niños lo han presentido, y de la que se han servido para obtener un efecto estético de alternancia.

El proyecto supone también la confección de adornos colgantes. Se trata de recortar figuras en cartón y recubrirlas con papel metalizado, variando las formas a fin de lograr, también aquí, un efecto estético.

Para obtener formas geométricas bien regulares, los niños recurren al procedimiento del trazado alrededor de modelos (de madera o de cartón) y luego recortan la figura siguiendo el trazo.

También pueden utilizarse los modelos para "estarcir" en cartón o metal, con formas geométricas; son la inversa del modelo, como la impresión en arena, según vimos, era la inversa del molde. Digamos al pasar que esto se vuelve a encontrar en los juegos de ensamblado.

Ahora hay que recubrir con papel metalizado las formas recortadas en cartón, o sea, hay que saber recortar una superficie equivalente. Para ello se puede, a elección, proceder como para el recortado del cartón (usando un patrón) o recortar el papel metalizado directamente sobre la forma ya obtenida en cartón. Esto último será, probablemente, lo que elijan los niños de esta división. El primer método tiene la ventaja de aplicar la idea de que dos superficies iguales a una tercera son iguales entre sí; ésta será la manera de actuar de los niños de 5-6 años. Con este ejemplo vemos que las actividades más elementales permiten a menudo la aplicación de reglas aún desconocidas. La acción no es, en este mo-

mento, la aplicación voluntaria de la regla, sino que la regla es la generalización de los procedimientos de la acción.

Por lo que concierne a las "pesadas", jugando al vendedor, el niño sabrá hacer iguales o desiguales los pesos de dos objetos o colecciones, utilizando para ello la balanza.

Respecto a las capacidades, sabrá poner los dos niveles de líquido a la misma altura, pero la igualdad de las capacidades no se logrará si los recipientes no tienen la misma forma y dimensión.

Observemos que si bien el niño sabe decir "más pesado", "más largo", muy difícilmente emplea el término "igual". Utiliza en cambio expresiones incorrectas como: "parece el otro", "como el otro", "la misma cosa"... La maestra debe expresarse correctamente.

Demos algunos otros ejemplos rápidamente:

- comprar en "la mercería" cintas de tal longitud (cintura de la muñeca);
- comprar en "la confitería" una tableta de chocolate. La vendedora corta un papel destinado a envolver la tableta;
- cortar hebras de lana iguales entre sí, para hacer pompones;
- cortar fibras de junco para un trabajo de cestería, cuidando de que tengan la misma longitud;
- repartir a varios compañeros una bolita de plastilina del mismo tamaño.

Estos ejemplos no se refieren más que a las magnitudes; en la página 142 volveremos sobre el tema de la igualdad, en las colecciones de objetos.

Noción de clasificación en serie

La comparación de magnitudes desiguales conduce a su clasificación en orden creciente o decreciente.

En sus juegos libres de construcción o en otros, los niños realizan espontáneamente clasificaciones, formando, por ejemplo, "escaleras" con las piezas de esos materiales.

Cuanto más pequeño es el niño, más dudosa es la clasificación: dos o tres elementos están bien colocados; luego, los siguientes están en desorden. Así, en el llamado juego "de las columnas de evaluación", del método Discat (página 190), los niños de 4 años colocan muy bien el más grande de los elementos y siempre el más pequeño, pero entre estos extremos, solamente 3 ó 4 de los 10 que lo forman están bien colocados. La maestra se esfuerza en dar una técnica: "Tomen el más grande, luego el más grande de los que quedan...", lo que, por lo general, resulta totalmente inútil.

Sin embargo, el hecho de que 3 ó 4 de los elementos hayan sido colocados en orden creciente o decreciente, nos lleva a admitir que se ha comprendido la idea de clasificación en serie.

No es, pues, más que una cuestión de madurez y de un poco de ejercitación, para que se pueda realizar convenientemente la clasificación en serie de una decena de piezas.

Citaremos, además de "las columnas de evaluación", las "pirámides" del método Discat y las "reglitas" del material Cuisenaire.

Cada grado de la "escalera" es a la vez mayor que el precedente y menor que el que le sigue.

Al niño le resulta más fácil si el ordenamiento tiene forma propia, es decir, si en lugar de alinear los elementos, éstos deben encajarse o ensamblarse entre sí. Los juegos del tipo "muñecas rusas", que existen en numerosas versiones, le agradan enormemente: cajas o tubos que encajan unos en otros, casitas desarmables, etc.

Con las cajas y los tubos se plantea un problema particular: es que para que los tubos o las cajas puedan entrar los unos en los otros es necesario que a medida que los elementos decrezcan en dimensión, sean a la vez más cortos y de menor espesor (los tubos), menos altos y de menor superficie (las cajas). Encontramos por primera vez la idea de dos atributos que se combinan: más cortos y delgados a la vez..., menos altos y más chicos a la vez...

En un juego más complejo y que está dedicado a los niños mayores,[2] encontramos la combinación de dimensiones y formas: un cubo vacío que puede contener 2 ó 4 paralelepípedos, 8 cubos pequeños o 2 prismas.

En las series que realiza el niño de 4 años ya tiene –lo hemos visto en la página 107– la idea de primero y último. Esta noción la vive en la vida escolar, con motivo de la formación de las filas, no sin que intervenga el factor afectivo en lo que concierne al primer lugar.

Operaciones con las medidas de las magnitudes (cantidades)

Ya hemos señalado las nociones de: hacer dos cosas iguales, hacer dos cosas desiguales, clasificar.

Vamos ahora a considerar estas acciones de manera más completa y con miras a las operaciones aritméticas que prefiguran.

Comencemos por la *acción de tomar*. Hemos visto en la página 123 que es la operación más natural en el niño.

De una cantidad se puede sacar un poco, un trozo, una parte, una porción. Esta operación se puede hacer ya sea arrancando o tomando con la mano, o por medio de un utensilio: tijera, cuchillo, pala, cincel, etc.

En todo momento, con motivo de diversas construcciones, el niño, al hacer cualquiera de esos objetos que se confeccionan en la clase, se ve obligado a cortar un trozo de papel, de cartón, a tomar una hebra de lana de la madeja, un pedazo de chocolate, a cortar un hilo de rafia del ovillo...

A estas operaciones manuales corresponden numerosos términos representativos de acciones: tomar, sacar, arrancar, rasgar, etc.

En cuanto a las colecciones de cosas, la misma operación conduce al niño a tomar, sacar, suprimir... algunos de los elementos de esas colecciones; al tomar algunos solamente, quedan otros: hay un resto.

[2] "Juego de volúmenes" (A. Colin-Bourrelier).

Se aclaran las relaciones entre la parte y el todo: la parte es más pequeña que el todo; hay menos en la parte que en el todo.

La acción inversa es la de poner o volver a poner, colocar juntos esto y lo otro. Son numerosas las actividades que entran en juego en estas acciones: reunir el contenido de dos paquetes de caramelos, pegar dos tiras de papel para tener una nueva suficientemente ancha para lo que queremos hacer, coser dos trozos de tela para poder vestir a la muñeca, agregar agua al florero, mezclar leche y harina para hacer una crema...

Que esto se haga con cantidades o con colecciones no plantea problemas de comprensión. El niño sabe que el todo contiene ahora las partes que se han reunido: el todo es más grande que la parte.

Tomemos el ejemplo práctico de un juego de "pesadas": se trata de hacer dos paquetes de caramelos iguales en peso. El niño sabe que es necesario que los dos platillos de la balanza estén al mismo nivel. Poniendo el paquete modelo en uno de los platillos, llega a la igualdad por tanteo, sacando o poniendo sucesivamente caramelos en el otro paquete. Hecho esto, queda demostrado que sabe lo que es sacar y poner (o agregar).

El segundo grupo de operaciones prácticas que se realizan con las cantidades es el de las *divisiones* o particiones: acción de hacer partes iguales, o de poner juntas varias partes iguales (acción inversa).

La acción de dividir o repartir la conocen muy bien, pues es algo que se hace muy comúnmente en familia: cortar partes, repartir una torta, distribuir estas partes entre los presentes, repartir los caramelos de un paquete entre varios niños (dándole un número cualquiera o la misma cantidad a cada uno).

Hay que hacer notar que la distribución de un objeto (cantidad continua) conduce a obtener partes de ese objeto, partes iguales o desiguales entre sí, mientras que el reparto de una colección lleva a la construcción de colecciones más pequeñas, iguales o desiguales entre sí. El término "repartir" no significa que las partes sean iguales entre sí; conviene siempre decir: "repartir en partes iguales o en números iguales".

Las relaciones de las partes con el todo son las mismas que para la acción de tomar: las partes son más pequeñas que el todo. Reunidas todas juntas, lo reconstituyen.

La inversa consiste en juntar varias veces una misma cantidad; es la unión de porciones iguales entre sí. Por ejemplo, para agasajar a un compañero cada niño da dos caramelos. El beneficiario recibe tantas veces dos caramelos como donantes hay.

En la página 135 encontraremos otros aspectos de estas operaciones prácticas, cuando nos ocupemos de la distribución y del agrupamiento numérico.

En cuanto a las actividades prácticas que ponen en juego operaciones tales como: sacar, reunir, repartir, poner varias veces la misma cantidad (operaciones que se expresan con muy diversos términos), no son nada raras en una clase de niños de 4 a 5 años. Citemos:

- actividades de construcción, fabricación, realización de maquetas, de vestidos, de juguetes, de adornos para el salón, de máscaras, de pequeños objetos para regalar, preparación de sandwiches, resolución de rompecabezas, reconstrucción de juguetes desarmables;
- juegos de imitación en el "rincón de ventas" (mercería, confitería);
- actividades de la vida colectiva: organización de meriendas, refrigerios (reparto, distribución de golosinas, bebidas, etc.).

2. Papel de la maestra

Debe ser semejante al que le correspondió en la etapa anterior: observar, dar el término apropiado a la operación en curso o a su resultado, hacer sondeos e inventarios destinados a determinar claramente lo que se ha adquirido.

También está dentro de su responsabilidad el provocar las experiencias, no solamente por las posibilidades de actividad libre, realmente dadas, sino también proporcionando al niño la oportunidad de reflexionar a propósito de esas situaciones, tan numerosas en la vida colectiva, y todas generadoras de actividad matemática.

Daremos un ejemplo: la clase festeja el cumpleaños de uno de los niños. La maestra ha traído paquetes de galletitas. Podría distribuirlas ella misma, ya sea presentando a cada uno el plato con las galletitas o diciendo: "Cada uno tome tres", pero es más conveniente hacer pensar: "Queremos que cada niño tenga tantas galletitas como todos los demás, ni más ni menos". ¿Cómo hacer? Hay dos soluciones para este problemita: cada niño toma una; cuando se acaba la vuelta, cada uno toma otra, etc., hasta que se terminen, o bien se hacen primero los cálculos de lo que le corresponde a cada uno, por tanteo. ¿Y si queda un resto que no alcanza para que le toque una más a cada uno? Se deja para otra ocasión o se le regala al homenajeado.

Muchas situaciones se pueden aprovechar de este modo. Para la maestra es una cuestión de disposición natural. Pero su intervención sólo será beneficiosa si es capaz de ver en la situación, por una parte, lo que se puede aprovechar para la educación matemática de los niños, y por otra, si saca partido correctamente, desde el punto de vista matemático.

B. LOS CONJUNTOS

Hasta ahora hemos considerado los objetos, pasando lista a sus cualidades perceptivas, especialmente a aquellas que corresponden a los atributos matemáticos.

Vamos ahora a emprender la tarea de agrupar los objetos, teniendo en cuenta la presencia de algunas de sus cualidades comunes.

Los juegos en los que –en el período precedente– los niños agrupaban los objetos por alguna semejanza, los conducían en forma natural a constituir *conjuntos finitos.*

Para esto basta que el niño sepa con precisión la razón por la cual reúne ciertos objetos y descarta otros. Dicho de otra manera, el niño debe conocer la propiedad –decimos el *atributo*– que deben poseer todos los objetos que se han reunido para formar parte del conjunto.

A la inversa, se excluye del conjunto todo objeto que no posea dicha propiedad.

Es fácil conducir al niño hacia la constitución de conjuntos, de los cuales la vida corriente ofrece tantos ejemplos.

Esto se puede obtener, ante todo, por el camino de la pertenencia a un grupo. El niño sabe que él pertenece a diversos grupos: familia, clase, escuela... Puede, entonces, describir los conjuntos a los cuales pertenece o aquellos a los que pertenecen o no sus compañeros.

Los juegos de adjudicaciones, que ya hemos visto en el período precedente, permiten llegar a la constitución de conjuntos de objetos que "pertenecen a...". Entre éstos se encuentran, por ejemplo, los juegos de adjudicación de vestimenta a las diferentes muñecas de la clase, los juguetes de niñas y de varones, etc.

Finalmente, los conjuntos pueden estar constituidos por grupos de figuras, que sustituyen los objetos y amplían el campo del razonamiento.

Desde este período en adelante es necesario distinguir bien claramente lo que es simple selección de lo que es constitución de conjuntos. Basta para ello con elegir los objetos que posean numerosos atributos y puedan, sucesivamente, entrar a formar parte de distintos conjuntos, según el punto de vista elegido. Así, el pensamiento se encuentra comprometido en idas y venidas y en variaciones de puntos de vista, característicos del pensamiento matemático.

Un caso particular lo constituye la formación de conjuntos de colecciones que tengan el mismo valor numérico: éstos son *conjuntos de conjuntos*; en el período que estamos tratando, esos conjuntos sólo se pueden realizar con valores numéricos pequeños.

La vida colectiva es rica en oportunidades prácticas para establecer *relaciones*: su mesa, su silla, sus útiles de dibujo, sus pinturas. La comparación de estos conjuntos es fácil: ¿hay demasiados?, ¿faltan? Así se establecen las relaciones término a término, que conducen en forma natural a los conjuntos equipotentes. Estas relaciones pueden hacerse, por medio de la acción, con conjuntos numéricamente elevados: número de los niños de la clase, por ejemplo, aunque solamente los primeros son conocidos a esta edad en su aspecto cardinal.

La preocupación de la maestra es la obtención de una expresión justa, precisa, pero lo que el niño comprende en el plano de la acción es mucho más amplio e importante que lo que expresa espontáneamente.

1. Observaciones sobre algunos puntos referentes al lenguaje

Existen a nuestro alrededor, muchos "conjuntos" que tienen nombres especiales y que los niños emplean muy corrientemente y con propiedad:

- la familia es el conjunto de los padres y los hijos;
- la clase, la escuela, son conjuntos de niños y de adultos;
- la ropa, los cubiertos y la vajilla de la muñeca son conjuntos de objetos reunidos por el hecho de tener el mismo uso;
- una pila de fichas, un ramo, una docena de flores, son conjuntos que el niño constituye, conoce y de los cuales ha oído hablar.

El niño llega también a la conclusión de que el conjunto toma el nombre del continente:

- un cartucho de caramelos, un canasto de frutillas, un puñado de piedrecitas.

Observemos que cuando el niño explica lo que es una familia, puede decir: es un papá, una mamá, los hijos; *el conjunto está definido por extensión*, es decir, se han enumerado sus constituyentes; o bien: es la reunión de personas que llevan el mismo nombre y que viven en la misma casa o departamento; *el conjunto está definido por comprensión*, es decir, por el atributo común a todos los elementos del conjunto (nombre, dirección, etc.). También puede decir lo que pertenece al conjunto o lo que no pertenece a él: el perro vive en la casa, pero no forma parte de la familia porque no es una persona, mientras que la hermana mayor, que está de pensionista en otra ciudad y no vive en la casa, forma parte de la familia porque lleva el mismo nombre que sus padres y hermanos.

2. Ejemplos de ejercicios posibles durante esta etapa

Son sumamente numerosos y a los educandos les gustan mucho, porque esos ejercicios satisfacen sus necesidades de orden y de ponerlo en el mundo que los rodea.

Al principio es muy posible hacerles buscar a qué conjuntos diferentes pertenecen:

- la clase, la escuela –que comprende varias clases–, el grupo escolar, la ciudad o el barrio;
- pero en esta ciudad hay familias y cada niño de la clase tiene la suya.

También se encuentran los conjuntos constituidos por niñas y por

varones, el conjunto de los niños que recortan figuras, el de los que dibujan, etc.

Se obtiene fácilmente la expresión justa:

Yo soy, Pedro es... un niño de la escuela, de la clase, por lo tanto, *es un elemento de la escuela...*

Yo pertenezco, Pedro pertenece... al conjunto de los niños que pintan...

¿Por qué? Yo soy un elemento del conjunto del jardín de infantes, porque yo estoy en la clase de la Srta.... Ella también es la maestra de Francisca y de Juan; luego, Francisca y Juan pertenecen al conjunto de los niños de la escuela, de la clase...

Una representación gráfica por medio de "esquemas" puede hacer visibles los lazos entre maestra y niños de la clase. Por ejemplo, cada uno dibuja su retrato y todos los retratos se fijan en la pared o en el pizarrón; de cada uno de ellos parte una cinta que lo une con el retrato de la maestra, también dibujado y colocado entre los demás. Refiriéndose a lo que no pertenece al conjunto de la clase se explica por qué no se colocará una cinta entre el retrato de un niño de otra clase (si también estuviera colocado sobre la pared) y el de la maestra.

Utilizando todo lo que se encuentra en el mundo que rodea a los niños, es posible constituir un gran número de conjuntos. Se pueden también imaginar, sin constituirlos. Se llega así a situaciones que divierten mucho a los niños. "¿Qué piensan del conjunto de los patos, de los pollos, de los elefantes de la clase?". "Eso no existe", dicen los niños. Para el matemático, son "conjuntos vacíos". Se pueden, así, organizar numerosos juegos de este tipo, cuentos, etc.

El conjunto de los patos, de los pollos, de los elefantes de la clase es un conjunto vacío. Si un día, por un ejercicio de observación, se trae un pollo o un pato a la clase, el conjunto existirá realmente, en forma de un conjunto constituido por un solo elemento.[3]

Nota. No hay que tener miedo de extenderse en estos ejercicios, de modificar las consignas, es decir, de cambiar el atributo, lo que conduce a constituir diversos conjuntos con los mismos elementos, excluyendo algunos.

Se puede, entonces, pasar a los *conjuntos constituidos por objetos:* los que usamos en clase, los que sirven a todos, colectivamente, excluyendo los objetos que no pertenecen a esos conjuntos (por ejemplo, el paraguas de la maestra, el pijama de Pedro, etc.).

Según los atributos elegidos, tal objeto está en el conjunto o fuera del conjunto.

Es conveniente hacer conocer y comprender también la noción de universo.[4] El conjunto se constituye a partir de un universo que debe ser definido. Retomemos los dos ejemplos recientemente dados:

El paraguas de la maestra forma parte del universo de la clase (cuando ella lo trae a la escuela, por supuesto, y lo deja en la clase), y se lo excluye porque no es un objeto del cual se sirvan todos, o que la maestra use para dar la clase. Por el contrario, el pijama de Pedro ha sido excluido no solamente porque es un objeto que Pedro no utiliza en clase, sino porque no forma parte del universo de la clase, sino del universo de la familia de Pedro o del de su casa.

Las figuras son muy útiles para estos ejercicios. (Se pueden emplear colecciones de figuritas, recortarlas de revistas o catálogos o dibujarlas.)

Utilizando estos materiales se constituyen conjuntos muy diversos, y según los atributos elegidos como propiedad común, se pueden modificar o reconstruir los conjuntos. Es esta redistribución en diferentes conjuntos la que es formativa para el pensamiento.

También pueden considerarse los conjuntos cuyos elementos solamente se evocan: el conjunto de los juguetes que se usan durante las vacaciones (en la playa); el conjunto de los objetos que se encuentran en la estantería del frutero, del confitero; el conjunto de lo que se puede encontrar en el dormitorio, etc.

El niño no utiliza, en este caso, un carácter perceptivo, sino que aprovecha lo que sabe, lo que ha aprendido.

Si la maestra quiere hacer trabajar a los niños sobre un material especialmente concebido para la formación lógica de la mente, es el momento de usar los "bloques lógicos" del profesor Dienes (ver página 183).

C. EL NÚMERO

Ya hemos visto en la etapa precedente que los niños conocen algunos de los primeros números.

Pueden continuar las actividades poniendo en juego las primeras cantidades, agrupando los objetos de a 2, 3, 4, tal vez 5.

Es posible:

- por una parte, agrupar los objetos: distribuir 3 lápices a cada niño; los juegos de distribución son numerosos en la vida colectiva; también los de intercambio (compras y ventas);
- por otra parte, "realizar" el grupo 3, 5, 4... con objetos semejantes o no (porciones de caramelos). En este último caso, se realizan los conjuntos cuya propiedad es la de ser una propiedad numérica: propiedad 4, 3, 5...

Volveremos a hablar de esta noción en la etapa siguiente.

[3] Este conjunto se denomina "Clase singular".

[4] Ver capítulo 4.

LA TERCERA ETAPA

Acceso al número

Introducción

El niño tiene ahora alrededor de 5 años; se encuentra al final de la división de los medianos y al comienzo de la de los mayores.

El material y las instalaciones disponibles permiten experiencias simultáneas en distintas campos, que si los distinguimos es por la comodidad de la exposición. Los juegos espontáneos o sugeridos por la maestra dan oportunidad para comprobaciones, a menudo renovadas, gracias a las cuales las nociones matemáticas pasan paulatinamente del plano operatorio concreto al plano del pensamiento. En el curso de esta etapa y con motivo de la medida de magnitudes, vamos a encontrar un ejemplo de trabajo mental (páginas 137 y 138).

Llega un momento en el cual el niño ya no necesita ver las cosas ni las situaciones; es capaz de imaginar lo que pasaría si se realizara el proyecto concebido mentalmente.

Nociones que se adquirirán durante este período

A. Hasta ahora, los juegos lo han conducido a utilizar las propiedades de los objetos en diversas colecciones. También puede hacérsele reflexionar metódicamente sobre las *relaciones entre tamaño y número.*

Vamos a volver a encontrar esta relación en dos formas, según se trate de magnitud o de colección.

Cuando se trata de una colección de objetos, la relación es visible; cuantos más objetos hay, más importante es la colección, no sólo numéricamente, sino también en lo que respecta a todos sus aspectos perceptivos (volumen, peso, etc.).

Cuando se trata de una magnitud continua (superficie, volumen, capacidad), la relación con el número pasa por el intermediario de la medida.[5] En efecto, sólo gracias a una unidad patrón podemos evaluar numéricamente una magnitud continua: la evaluamos, por ejemplo, en tantos metros, tantos kilogramos, etc. Veremos que para el niño es necesario pasar por una etapa intermedia.

B. También en el curso de esta etapa, el trabajo con los conjuntos lo lleva a la *organización de los conjuntos*, a las *operaciones con conjuntos.*

Volvemos a encontrar las mismas operaciones manuales que durante la etapa precedente, pero estas operaciones se realizaban hasta ahora con los objetos (o las cantidades), mientras que en adelante se harán con los conjuntos.

Organización de un conjunto. Es fácil hacer comprender a los niños por medio del juego y la acción, que un conjunto de cosas, de elementos o de personas puede fraccionarse en dos o varias partes utilizando otro atributo de esos objetos, elementos o personas, distinto del que había servido para reunirlos la primera vez.

Así, el conjunto de los niños de la clase puede organizarse en dos subconjuntos: el de los varones y el de las niñas. Los varones forman un subconjunto del cual el de las niñas es el complemento, y viceversa.

La unión de los subconjuntos vuelve a dar el conjunto primitivo. El niño comprueba así el efecto de las dos operaciones aritméticas inversas que son la suma y la resta.

Pero un conjunto puede organizarse de otra manera, agrupando los elementos de a 2, 3, 4... o 2 veces 3, 3 veces 4... Se ve entonces que el conjunto contiene, por ejemplo, 5 grupos de 4 elementos y que sobran 3 elementos. La operación hecha es la *partición* del conjunto.

Los arreglos y modificaciones que pueden hacerse dentro de un conjunto llevan al niño a tomar conciencia de lo que es *a la vez* esto y aquello. Es un nuevo descubrimiento de la doble comparación, análoga a la de la segunda etapa: el globo rojo es a la vez más grande que el amarillo y menos grande (o más chico), que el verde.

Relación entre dos o varios conjuntos. Dos o varios conjuntos pueden tener una parte común, llamada *intersección*; así, el conjunto de los niños que tienen guardapolvo y el conjunto de los varones de la clase tienen por intersección el grupo de los varones que tienen guardapolvo. Los varones de este grupo pertenecen *a la vez* a los dos conjuntos, porque tienen los dos atributos.

Las inclusiones de conjuntos muestran el caso en que un elemento pertenece a varios de estos conjuntos: así cierto niño es a la vez alumno del jardín de infantes, alumno de la escuela, niño de la ciudad de..., puesto que la escuela está en la ciudad, el jardín de infantes en la escuela, el niño en la clase.

Durante la etapa precedente se lo ha conducido a *vincular* dos conjuntos, por relación término a término: conjunto de los niños y conjunto de las sillas. Los conjuntos relacionados pueden ser iguales o desiguales. Así también se pone en evidencia la noción de igualdad numérica, de "tanto como".

Se define el *número* como la propiedad común de dos conjuntos equipotentes. Se ve, pues, la importancia que tiene para el futuro la comparación de las propiedades numéricas de dos o varios conjuntos.

La propiedad numérica de un conjunto se llama su *cardinal.*[6]

C. El número. Los nombres de los números forman parte del vocabulario corriente de los niños de esta edad. Los asocian a las cantidades y saben vagamente que mil es más que 2. Queda mucho por hacer, evidentemente, para que la noción de número quede convenientemente construida, pero esto se logrará experimentando con las cantidades numéricas.

Conoce las 4 ó 5 primeras cantidades, es decir, puede concebirlas como reales: si se le pide, puede presentar 4, 5 piedrecitas, caramelos, etc.

[5] El número se utiliza entonces con su valor de relación.

[6] Número cardinal, número ordinal (ver págs. 175 y 176).

Agrupando de a 2, 3, 4 ó 5, se familiariza con la cantidad formada por 3 grupos de 2, 2 grupos de 5, etc. Él ve estas cantidades, las compone, las descompone, las recompone; en fin, aprende a nombrarlas.

Obtiene así las cantidades de la primera decena, aproximadamente, imágenes de los primeros números cardinales. Paralelamente, los ejercicios de clasificación en serie de cantidades le enseñan a formar la serie creciente de esas cantidades numéricas, procediendo del siguiente modo:

- cantidad 1;
- se vuelve a escribir y se le agrega 1;
- se escribe esta nueva cantidad y se le agrega otra vez 1;

y así sucesivamente. Se forma entonces la serie creciente de las primeras cantidades, o decreciente, si se hacen las operaciones inversas (sacar 1 cada vez).

Éstas se le aparecen también en forma de relación con la unidad, como se lo han enseñado los anteriores ejercicios de medición, siendo la unidad el patrón de medida.

Es razonable pensar que durante este período el niño forma las cantidades numéricas de la primera decena, dando por sentado que esto sólo concierne a los ejercicios metódicos. Claro que empleará números mayores si la vida se los presenta (ver pág. 153 y siguientes).

A. LOS OBJETOS

1º Tratemos primero lo que se refiere a las *colecciones de objetos* y las relaciones entre su magnitud y el número de sus elementos.

Todo niño de 5 años sabe decir que en un collar largo hay más perlas que en uno corto, que en un paquete grande de caramelos hay más caramelos que en una bolsita chica, que entre dos montones de nueces colocados en los dos platillos de la balanza, el montón más pesado es el que contiene más nueces.

Sin embargo, a estas nociones hay que darles precisión y matices: unas pocas cuentas gruesas forman un collar más largo que muchas perlas minúsculas; algunos caramelos grandes constituyen un grupo más pesado que un montón más numeroso de maníes, etc. En estos ejemplos hay combinación de dos relaciones: relación entre el número de elementos y la colección, y relación entre dimensiones de los elementos y dimensión de la colección, las cuales resultan un poco difíciles para la mayor parte de los niños. Señalamos no obstante, a la maestra, esta dificultad, a fin de que:

- por una parte, cuide de no poner al niño frente a una situación demasiado compleja: si se comparan dos collares, es mejor que estén hechos con cuentas de las mismas dimensiones;
- por otra parte, que controle bien los términos que ella misma emplea para describir una situación compleja, en el caso en que ésta se presentara (por ejemplo, comparando dos pesos: dos mandarinas más livianas que una sola naranja).

Quedan todos los casos en los que las propiedades de la colección son directamente proporcionales al número de elementos.

El collar es tanto más largo cuanto mayor sea el número de cuentas. Comparando dos collares se puede considerar no solamente el número de cuentas, sino también el tiempo empleado en enhebrarlos, suponiendo que en ambos casos la velocidad de enhebrado haya sido la misma; las perlas del collar más largo ocupan más volumen que las del más corto, y también más lugar, si se las coloca una al lado de otra en la mesa.

Son numerosas las ocasiones que hay para verificar estas relaciones, no solamente durante los juegos con objetos, sino también cuando se consideran los niños como una colección. Así, en el curso de actividades motrices se comprueba que cuando hay muchos alumnos presentes, la ronda es más grande, la fila es más larga y los alumnos ocupan más lugar que cuando hay muchos alumnos ausentes.

2º Debemos considerar ahora el caso en el que la cantidad estudiada es un solo objeto, está constituida por un solo pedazo, o considerada como un todo de elementos no disociables: "una torre", "un collar", objetos en los cuales no se tiene en cuenta el número de cubos o el de cuentas.

Nos encontramos, pues, frente al siguiente problema: evaluar un objeto (trozo de cinta, bola de pasta de modelar, botella de refresco).

Hemos visto, en una etapa precedente, que pueden compararse dos cosas que tienen una propiedad dimensional común (ver página 124). Así se comprueba que una de las dos cintas es más larga que la otra (o igual, en el caso particular de la identidad de las longitudes), que un trozo de pasta para modelar es más pesado que el otro, que una botella contiene más refresco que la otra, porque es mucho más grande (alta, ancha, etc. Ver aquí los errores del niño, como resultado de que no sabe combinar el alto y el ancho; experiencias de Piaget.)

La comparación se expresa en términos relativos: más ... que, menos ... que, igual a, o igual que.

Pero ya sabemos que en la práctica la evaluación la hacemos con respecto a una unidad patrón, que es una unidad del sistema métrico. Hablamos de metros, de kilogramos, de litros, etc. Valiéndonos de ciertos procedimientos prácticos, comparamos la magnitud por evaluar y la unidad patrón y expresamos con un número la relación entre estas dos magnitudes. Este es el aspecto de "relación" del número.

Esta noción de relación entre una magnitud por medir y una unidad se elabora en la mente del niño según un mecanismo muy visible.

Desde muy chicos, los niños tienen la idea de tomarse como unidad de medida. Vemos muy a menudo a los niños compararse entre sí, no a fin de saber cuál es el más grande, sino, más bien, de encontrarse a sí mismos más grandes que sus compañeros. Se ponen frente a frente y evalúan la altura relativa de la cabeza de ambos. Esta conducta demuestra que han comprendido la necesidad de que las dos magnitudes por comparar se hagan coincidir –en este caso, por los pies, que están en el suelo– y estén colocadas lado a lado (idea de superposición).

También toman la mano o el brazo como unidad de medida.

Un ejemplo tomado de la realidad permite ver el paso a un estadio

superior de pensamiento: en una clase de niños de esta edad, dos grupos han construido una torre cada uno, en dos lugares distintos del salón. La maestra pregunta cuál de las dos torres es la más alta. En el primer momento las opiniones están divididas, pues las evaluaciones se hacen al tanteo y además, influidas por el factor afectivo: cada grupo quiere tener la más alta. Se busca entonces el medio de estar seguros del juicio. Algunos niños intentan transportar las torres para ponerlas juntas; comprueban que esto es imposible. Otros ensayan entonces tomar la medida de una y compararla con la otra, utilizando para ello la distancia que hay entre los brazos abiertos, o un punto de referencia tomado sobre el cuerpo: la torre llega "hasta la mitad del muslo o de la cadera de José"; éste pone la mano a esa altura y se dirige hacia la otra torre para comparar la altura de ésta con la otra medida tomada. Por fin a alguien se le ocurre la idea de tomar un trozo de piolín tan largo como alta es una de las torres y compararlo con la altura de la segunda. La idea que aparece aquí es la de introducir una cosa que no tiene nada que ver con las que se comparan, salvo su longitud; se ha llegado a una abstracción: la de la altura de la torre, en este caso particular. Además vemos que el niño admite también que la cualidad (longitud) se conserva, cualquiera sea la situación (la "altura de la torre" se transporta gracias al piolín utilizado). Finalmente, comprende en forma intuitiva que dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí.

Volvamos ahora a las unidades de medida "naturales": mano, brazo, puño, y objetos usualmente tomados como unidad de medida: el lado del pañuelo... (ver Decroly: *Le calcul et la mesure*).

Muy frecuentemente, la magnitud por medir contiene varias veces a la unidad: la longitud del lado de la mesa contiene 4 veces la mano, y el ancho la contiene 3 veces. Aparece el número. Éste *expresa la relación* entre las dos magnitudes en presencia. En estas circunstancias se pueden presentar dos casos: la magnitud por evaluar es más grande que la unidad de medida; la contiene varias veces, por ejemplo, 3 veces y queda un pedacito; o bien es más pequeña y en este caso ya sabemos que la relación está expresada por una fracción de la unidad. El niño no puede utilizar las fracciones, salvo en casos muy simples, donde debe invertir la expresión (la mitad, un cuarto).

Por ejemplo, mide el contenido de una botella con la ayuda de un vaso:

1er. caso: la botella está llena y se mide el contenido con ayuda de un vaso. Se comprueba que la botella contiene 6 veces el vaso.

2º caso: el vaso es el mismo, pero esta vez queremos medir el contenido de un frasquito chico de farmacia. Se comprueba, vertiendo el líquido del frasquito en el vaso, que sólo lo llena hasta la mitad (aproximadamente). En este caso puede expresar la fracción utilizando el término "la mitad".

3er. caso: imaginemos que el frasquito sea muy pequeño y que su contenido sea apenas de 2 ó 3 centímetros cúbicos. En este caso no puede evaluar, ni decir "un sexto", "un séptimo", etc. El único medio ahora es operar a la inversa y buscar cuántas veces el vaso contiene al frasquito.

El frasquito se ha convertido en la unidad. Esto hace sentir la reversibilidad que existe en toda relación. El vaso contiene 7 veces al frasco, porque el frasco es 1/7 del vaso. Esta última observación no está al alcance del niño.

El lazo de unión que existe entre la medida de las colecciones y la de las magnitudes consiste en que cuando una unidad de medida está contenida varias veces en una magnitud dada, es como si esa magnitud fuera la colección de varias unidades idénticas.

Debemos volver entonces al punto 1º (página 136) y analizar cómo se puede evaluar una colección numérica importante cuando el niño no conoce más que unos pocos números. A esta edad sabe enumerar, es decir, establecer la relación término a término entre los elementos de una colección y la sucesión de los números, por lo menos para los primeros números. Es una adquisición no despreciable, porque la enumeración es uno de los usos de la numeración.

Más allá de las cantidades numéricas que conoce, le es imposible enumerar. Entonces es necesario sugerirle que haga agrupamientos, es decir, que fraccione la colección, no en unidades, sino en grupos de 2, 3, 5... elementos. En estos casos, se puede obtener un número entero de agrupamientos semejantes, o bien tener un resto. Se puede expresar el resultado diciendo: con todos estos manies, he podido hacer 5 montones de 3, 3 montones de 5... o 3 montones de 4 y sobra un resto de 3 manies.

Esta práctica familiariza al niño con la idea de que ciertas colecciones pueden repartirse fácilmente en montones pequeños, iguales entre sí, mientras que con otros eso no es posible (17, por ejemplo).

Surge entonces para él que la enumeración, es decir, la evaluación con ayuda de la unidad, no es sino un caso particular.

Las "reglitas" del material Cuisenaire ponen muy fácilmente esta idea en evidencia.

Este trabajo lo encamina hacia el cálculo multibase. Lo volveremos a encontrar en la página 145.

Ejercicios posibles sobre estos temas

Medidas de magnitudes continuas para las actividades de construcción (maquetas, juguetes pequeños), para los juegos de compra y venta

Evaluación de colecciones: en los juegos de distribución, con motivo de trabajos en común, de fiestas, etc. (ver pág. 97 y siguientes).

Lectura de la hora: la hora, la media, el cuarto...

Si jugando a comprar y vender el niño utiliza dinero –fichas, por ejemplo–, el intercambio hace aparecer la evaluación de una magnitud (lo comprado) por medio de otra (valor del dinero pagado). Hay proporcionalidad entre las dos, intuitivamente percibida a esta altura.

B. LOS CONJUNTOS

Durante la etapa anterior hemos ayudado al niño a comprender lo que son los conjuntos finitos haciéndoselos construir.

Hemos hecho notar que es importante definir el *universo* en el cual

se hallan y donde se toman los elementos del conjunto. Este universo es, por ejemplo, la clase donde estamos o la escuela a la que pertenecemos: es el "universo de juego", cuando nos interesamos en la muñeca o en los cubos... Hay que precisarlo bien y exigir el enunciado completo: "Éste es el conjunto de los vestidos de la muñeca de la clase". Dicho de otra manera, no son vestidos cualesquiera ni de cualquier muñeca.

Hay que aclarar en seguida por qué tal objeto forma parte del conjunto que se construye y por qué se excluye tal otro. Así, en el "universo de juego" de la muñeca hacemos el conjunto de su ropa y en él colocamos las polleras y las blusas, porque son vestidos, o sea, ropa, pero descartamos los repasadores, no porque son repasadores, sino porque *no son vestidos*. Así se excluye un objeto no a causa de lo que es, sino en razón de lo que no es. Se vuelve a encontrar la noción de pertenencia a un conjunto.

En el "universo considerado", todo lo que no es elemento del conjunto en tren de constitución, definido por la o las propiedades de los objetos que se reúnen, se denomina el *complemento*. Así, todos los objetos que sirven para jugar con las muñecas, pero que no es la ropa, forman el complemento del conjunto de la ropa de la muñeca.

En un universo dado se pueden constituir muchos conjuntos diferentes según las cualidades –atributos– de los elementos que en él se encuentran. Volvamos al universo de juego de la muñeca; se puede construir:

- el conjunto de la ropa (¿a qué se llama ropa?; hay que definirla);
- el conjunto de la lencería (lencería personal, ropa de cama, de mesa, etc.);
- el conjunto de lo que está hecho de tela (vestidos, ropa de cama, etc.);
- el conjunto de lo que es blanco (una parte de los vestidos, de la lencería, etc.);
- el conjunto de lo que tiene forma alargada...;
- el conjunto de lo que los niños pueden confeccionar por sí mismos...

Vemos que, sucesivamente, muchos de los objetos de ese universo se juntan o se excluyen. Los cambios de atributo ponen en discusión los agrupamientos anteriores.

También se puede imaginar un "conjunto vacío", por ejemplo: el conjunto de los paraguas de la muñeca "es vacío", si la muñeca no tiene paraguas. Hay que considerar también el conjunto que comprende solamente un elemento (es la clase singular); así, podemos considerar a la maestra como único elemento del conjunto de los adultos de la clase (conjunto singular).

Son numerosos los juegos, colectivos en general, que agradan a los niños y permiten afianzar bien estas nociones. Podemos pasar ahora a las *operaciones con conjuntos*. Veremos que son las mismas que hemos empleado con los objetos.

1. Organización de un conjunto

Un conjunto comprende elementos que tienen en común uno o varios atributos dados. Pero algunos de esos elementos, y solamente algunos, pueden poseer otro atributo; será fácil agruparlos en el interior del conjunto.

Por ejemplo, formemos el conjunto de los niños de la escuela que se encuentran en la clase de la Srta. X. Entre los niños de este conjunto, algunos tienen en común el hecho de ser varones y otros el de ser niñas. El conjunto se organiza entonces en dos subconjuntos. Pero este mismo conjunto de los niños de la clase de la Srta. X puede estar organizado en diversos subconjuntos: los que tienen guardapolvo azul, los que tienen guardapolvo que no es azul –*"no azul"*– los que no tienen guardapolvo en absoluto... Y así, para cualquier otra propiedad.

Si de un conjunto se separa un subconjunto, queda el *complemento* (ver pág. 135).

La unión del subconjunto y de su complementario vuelve a dar el conjunto primitivo (ver pág. 135).

Llegamos a que la organización de un conjunto conduce a la realización de inclusiones: resulta análogo a la ensambladura de objetos apropiados. De esta forma, si consideramos el conjunto de las niñas de la sección intermedia, resulta que está contenido en el conjunto de los alumnos de esta división; éste, a su vez, está contenido en el conjunto de los alumnos de la escuela, el cual está contenido en el de los habitantes del barrio, luego en el de los habitantes de la ciudad...

Hagamos notar que el grado de precisión en los atributos considerados aumenta progresivamente desde el mayor al menor de los conjuntos: tenemos primero los habitantes indeterminados, después, entre ellos, los niños de una escuela, luego, los de una de las clases, por fin, las niñas de esta clase. Es de éstas que sabemos más datos: son de la división de los intermedios, de la escuela de..., del barrio de...

Relaciones entre conjuntos

También podemos encontrar ahora la inclusión: retomemos el ejemplo precedente e imaginemos que consideramos los dos conjuntos: niñas de la división intermedia; alumnos de la división intermedia.

Unión de conjuntos

Se pueden unir dos o varios conjuntos. Podemos, por ejemplo, unir el conjunto de los útiles que sirven para escribir *y* el de los útiles que sirven para pintar. En efecto, nada impide que pongamos en un mismo cajón o en una misma caja todos los lápices, las lapiceras y bolígrafos, con todos los pinceles, esponjas, etc. Pero ahora el nuevo conjunto cambia de nombre. Hay que denominarlo "el conjunto de los útiles que sirven para escribir *y* pintar" –o sea, para la grafía–. Se pueden, pues,

unir los objetos de diversas clases, con la condición de dar a la unión una designación diferente de la de las partes.

Hagamos notar que acabamos de considerar el conjunto de los objetos que sirven para escribir y aquellos que sirven para pintar. Imaginemos ahora que consideramos el conjunto de los útiles que sirven para escribir –lápices, lapiceras, bolígrafos– y el conjunto de los que sirven, no ya para pintar, sino para dibujar –lápiz también, colores, esfumino–. Vemos que el lápiz se encuentra a la vez en el conjunto de los objetos para escribir y en el de los que sirven para dibujar.

Es una experiencia muy interesante hacer construir los conjuntos de este tipo y proponer a los niños que los ordenen: en una caja, lo que sirve para escribir; en otra, lo que sirve para dibujar. Los vemos entonces colocar el lápiz tanto en una caja como en la otra..., dando cada vez una razón convincente: "El lápiz permite escribir, pero también dibujar". Algunos intentan ponerlo "entre los dos", atravesado sobre las dos cajas... La solución se facilita cuando los recipientes se pueden superponer, de modo que haya una parte común: una especie de cerco de papel, una cajita chica, pueden constituir la zona común; el lápiz se coloca entonces en el espacio común a las dos superficies: es la *intersección*.

Así, las piezas para construcción que son a la vez rojas y cuadradas se encontrarán en la intersección del conjunto de las piezas rojas de todas las formas y el conjunto de las piezas cuadradas de todos los colores. Los "bloques lógicos" del profesor Dienes permiten realizar muchos de los ejercicios de este tipo: unión de 2, 3 conjuntos, lo que supone una o dos intersecciones.

Vemos aparecer aquí un caso particular de la adición. Conjunto de los objetos para escribir (lápiz, lapicera, bolígrafo): 3 elementos; conjunto de los objetos para dibujar (lápiz, pincel, esfumino): 3 elementos. Pero en total no hay más que 5, porque el lápiz figura en los 2 conjuntos.

Por el contrario, en el ejemplo del "universo de juego de la muñeca" que vimos en la página 140, teníamos dos conjuntos distintos: el de la ropa de vestir y el de la de mesa, por ejemplo; estos dos conjuntos no tienen intersección: se los denomina *disjuntos*.

Comparación de conjuntos

En muchos casos se puede querer comparar dos conjuntos; esto sucede cada vez que deseamos proporcionar elementos individuales a un cierto número de personas o de cosas: darle un lápiz a cada niño, ofrecerle una silla a cada invitado, poner una flor en cada florero...

La manera de comparar conjuntos es hacer corresponder un elemento de uno de ellos a un elemento del otro: un caramelo a Pedro, un caramelo a Juan... Si no queda ningún caramelo en el paquete después de haberle dado uno a cada niño, o si no quedó ninguno sin caramelo después de haber terminado la distribución, se puede deducir que el conjunto de los caramelos era equivalente al de los niños. Estos dos conjuntos "equivalentes" se denominan "*equipotentes*". Nosotros sabemos que ambos tienen el mismo valor numérico, pero el pequeño no lo sabe todavía.[7]

[7] Esta relación término a término se llama también biunívoca.

Y también sabemos que *el número es la propiedad común de dos conjuntos equipotentes*. Recordemos que la propiedad numérica del conjunto se llama su cardinal.

2. Ejercicios posibles durante esta etapa

Sólo mencionaremos rápidamente los ejemplos, ya que los ejercicios detallados se han expuesto en las páginas 53 a 64.

a) En los diversos "rincones" de la clase:

- *la ropa de la muñeca:* agruparla según el uso, los materiales con que está hecha, el uso según las estaciones. Tomar una parte de este "universo" para preparar la valija de la muñeca cuando se va de vacaciones al mar, a la montaña, de vacaciones de invierno, etc.;
- *la cocina de la muñeca:* agrupar los utensilios, las piezas de la vajilla según el uso, el material, la fragilidad (clasificar en serie, si es posible), según la comida, el menú;
- *la perfumería:* agrupar los objetos según la categoría de los recipientes: frascos, tubos, potes; según el conocimiento que se tiene del contenido: polvos, cremas; según el uso: para el bebé, para mamá;
- *el cajón de los vestidos para disfrazarse:* clasificación según los atributos que pueden observarse: material, color; atributos de los personajes: para el hada, para el pierrot;
- *el rincón de la cochera:* dar vida a distintas "situaciones": el domingo, los trabajos de vialidad, la carrera de automóviles;
- *el rincón de los libros:* clasificación por formato, por el tipo de cuento, luego por el número o la naturaleza de los personajes: libros donde se cuentan historias de animales, de niños, y en las que intervienen ambos.

b) A medida que se desenvuelve la *vida de la clase* y se desarrollan los *temas de actividad:*

- *la granja:* conjuntos de animales según el género de vida, el aspecto, utilizando las maquetas realizadas, las figuras, etc.;
- *el jardín y la huerta:* cereales y raíces; lo que da flores sueltas o en racimo; clasificación de las flores por el color; lo que se planta, lo que se siembra;
- *los juguetes:* juguetes de varones, de niñas; para la casa, para el jardín, para la playa; que hacen ruido y silenciosos; para jugar solo o para jugar entre varios;
- *carnaval y disfraces:* ver más arriba (el cajón de los vestidos para disfrazarse);

c) En las *diversas actividades* de la clase:

- *evolución:* agrupar a los niños numéricamente: de a 2, de a 3; agrupar a aquellos que saben bailar folklore, que saben saltar; a aquellos que saben a la vez...;
- *títeres:* según su carácter, su naturaleza, los materiales que se han empleado para fabricarlos;

d) Con el *material didáctico*, los *elementos* empleados:

- *los lápices:* agruparlos por color; nuevos o usados; con la punta rota o bien afilada;
- *los pinceles:* clasificaciones análogas;
- *las figuras:* aquí se pueden construir una gran cantidad de conjuntos muy interesantes, recurriendo a lo que se ve en la figura, a lo que se sabe sobre lo que en ella se representa.

3. Lenguaje y lógica

El mecanismo de la constitución de los conjuntos, de su organización, de su comparación se conoce y comprende rápidamente.

Pero lo que se logra más lentamente es la expresión exacta, precisa, completa, no ambigua. Por medio del lenguaje adaptado el niño obtendrá los beneficios que reportan estos ejercicios y formará las primeras bases de la lógica.

Es necesario, ante todo, exigir precisión en la designación del *universo* considerado y en la designación del o de los *atributos*. Desde luego que deben descartarse los atributos que por su naturaleza carecen de precisión, así: ojos azules, verdes, castaños, persona joven (¿cuándo se deja de ser joven?), los adjetivos imprecisos como grande, corto; los usos o caracteres desconocidos para los niños; los conocimientos complejos (animales perjudiciales, plantas leguminosas).

Luego, hay que decir: "Buscamos, reunimos, los elementos del conjunto de...". Después: "Este objeto es un elemento del conjunto de..., o pertenece al conjunto de los... porque... Este otro no pertenece a ese conjunto porque no es...". Ejemplos: "Porque no es un vestido", "porque no es rojo".

El empleo de la conjunción *y* es fácil a esta edad: un objeto "*rojo y cuadrado*". Los elementos excluidos son entonces aquellos que *no son "rojos y cuadrados"*. Hay que cuidarse mucho de decir: "aquéllos que no son *ni rojos ni cuadrados*". Por el contrario, si se han reunido *los objetos rojos y los objetos cuadrados*, los que se han excluido "no son *ni* rojos *ni* cuadrados".

La alternativa marcada por la conjunción "o" se encuentra en la reunión de objetos que son "o *rojos* o *cuadrados*"; es otra manera de expresar el ejemplo precedente.

Finalmente, la condición de *implícito* existe cuando, por ejemplo, hay

objetos rojos y azules sobre la mesa; se saca uno de los objetos a espaldas de los niños. "¿Es uno rojo?", preguntan. "No", les contestamos. "Entonces tiene que ser uno azul", dicen los niños.

Aquí ha aparecido la idea de lo que *necesariamente* debe ser.

C. LOS NÚMEROS

Al principio de esta etapa, podemos hacer un censo de lo que saben los niños en lo referente a números.

Conocen algunas cantidades numéricas, las que corresponden a los cinco primeros números, generalmente, y saben formarlas con diferentes objetos.

Saben comparar dos colecciones por relación término a término, o reproducir, también término a término, una cantidad dada. Así, las dos colecciones formadas por 5 platos y por 5 cucharas (o vasos), respectivamente, pueden ponerse en relación en un juego de mesa; hay tantos platos como cucharas (o vasos). O bien, habiéndose reunido 5 platos, se pueden reunir por relación término a término 5 vasos, es decir, copiar la colección de 5 vasos sobre la de 5 platos.

Puede darse el caso de que una cantidad esté formada por un número mayor de objetos que otra; establecida la relación término a término, quedan objetos sin pareja en la colección más grande.

En esta etapa, el niño sabe evaluar numéricamente las colecciones correspondientes a los primeros números: 4 caramelos, 3 sillas, 5 compañeros.

Si hay una cantidad mayor, la fragmenta; puede hacer entonces dos grupos de caramelos, uno de 4, otro de 3. Juntando todos estos caramelos, obtiene una nueva cantidad que la maestra le dice que es de 7 caramelos. Así, progresivamente, construye las primeras cantidades numéricas, aprende su nombre. No hay que hablar aún del número como una entidad, sino simplemente en su forma adjetiva: 8 caramelos, 4 niños...

Hemos visto en la página 126 que también sabe establecer series, del más pequeño al más grande, o viceversa. Clasificando, pues, las primeras colecciones numéricas descubre el orden creciente.

Volveremos a encontrar en los tanteos los mismos errores que en el ordenamiento de las magnitudes (ver pág. 127); luego logrará el orden correcto de las cantidades de 1 a 10: 1 ficha, después 3 fichas, finalmente 3, ... 9, 10.

La sucesión de cantidades numéricas aparece, pues, como una simple puesta en orden de cantidades de importancia diversa.

Esta sucesión también se puede encontrar por medio del siguiente juego, que ya vimos en la página 136. Se exhibe un elemento; se reproduce esta colección y se le agrega un elemento, lo que da por resultado 2 elementos. Se reproduce esta nueva colección y se agrega un elemento, lo que da tres... Hay que tener la precaución de no dar este juego como un conocimiento para aprender, sino como una experiencia "para ver", y a continuación hay que conservar todas las colecciones formadas: la de 1, después la de 2... y no agregar unidades a la colección prece-

dente. De esta manera, el niño tendrá a la vista una serie de colecciones numéricamente creciente.

Las clasificaciones y las formaciones de series realizadas con las cantidades numéricas (colecciones), con las magnitudes y con los conjuntos son, ante todo, *operatorias*.

LA CUARTA ETAPA

Adquisición de las convenciones

Introducción

El niño que ha realizado las experiencias que hemos descrito en esta obra, que ha hecho y rehecho tantas veces como ha querido las acciones que el medio o la maestra le sugirieron, que ha reflexionado, que se ha habituado a expresar sus descubrimientos, ha forjado en su espíritu las nociones necesarias para abordar los primeros elementos de aritmética que contienen los programas de las divisiones de los mayores y de primer grado de la escuela.

Nociones que se van a adquirir durante esta etapa

Lo que caracteriza esta cuarta y última etapa es la adquisición de las convenciones:

- numeración en base 10;
- escritura simbólica con cifras;
- empleo de las unidades del sistema métrico para la evaluación de magnitudes.

Es decir que las nociones que aparecieron en las etapas anteriores vuelven a presentarse en un plano más matemático, y a menudo en forma escrita.

A. *Operaciones con magnitudes*

Éstas aparecerán en forma de medida de cantidades continuas, especialmente: longitudes, en decímetros y en metros; pesos, en kilogramos y en gramos; capacidades, en litros y decilitros; tiempo, por la lectura de la hora.

La comparación y la evaluación de la igualdad de superficies entre sí, o de volúmenes también entre sí, puede hacerse por medio de la acción: recorte, ensamblado.

Se utilizará el dinero, llamando la atención sobre su carácter totalmente simbólico.

B. *Evaluación numérica de los conjuntos*

El único criterio que mantendremos de aquí en adelante para la comparación de los conjuntos, será el número; *éste* es propiedad de un conjunto y no propiedad de un objeto. Ya lo hemos visto en la página 143. Es necesario ahora que se admita esta noción fundamental.

Dicha noción conduce al concepto de *invariancia del número*: el número es independiente de todos los aspectos de los elementos de la colección (aspectos perceptivos de los elementos, topológicos de la colección, es decir, de la posición recíproca de los elementos entre sí).

La clasificación en serie de las cantidades numéricas crecientes o decrecientes pone en evidencia la noción de *iteración* (repetición) *de la unidad*. Esta noción, de la que ya tratamos en la página 136 con motivo de la construcción de cantidades numéricas por adición de un elemento más a la precedente, la emplearemos ahora sistemáticamente para construir la sucesión de los números.

Los ejercicios sobre redistribución de elementos en grupos (pág. 139) han preparado al niño para que pueda leer cantidades numéricas en todas las bases de numeración. Debe ahora saber que la base 10 es privilegiada, y aprender las propiedades de la decena, nueva unidad. Agrupando de a 10, constituirá los conjuntos de conjuntos.

C. *El número y la numeración*

Ahora se va a comprender cómo surge el número, consecuencia del trabajo sobre los conjuntos, metódicamente conducido.

En la etapa en la que nos encontramos, el niño sabe que cada número tiene un nombre, que se escribe por medio de cifras. El número existe por sí mismo: toma su carácter sustantivo. Ya no es 8 caramelos, 8 niños... sino "el ocho".

La noción de infinito dada por la repetición de la unidad, combinada con la noción de decena, hace presentir al niño la ventaja de una escritura posicional, respecto a la posición de las cifras para la cual el cero –cifra y no número– es indispensable.

Las operaciones con los conjuntos son similares a las operaciones con los números. Los ejercicios con conjuntos lo han familiarizado con dos de las tres operaciones aritméticas, a saber:

- la suma y su inversa, la resta;
- la multiplicación y su inversa, la división, y con las diferentes formas de cada una de ellas.

Según la edad del niño y el grado que cursa en ese momento, se le exigirá un esfuerzo de memoria aparte del esfuerzo de comprensión. Llega un momento –hacia los 7 años– en el que deben adquirirse los *mecanismos* en forma perfecta: es necesario aprender de memoria. No hay ningún peligro en esto si durante mucho tiempo antes se han realizado los ejercicios y las experiencias correspondientes.

EL MÉTODO

En el curso de esta etapa el método será, como en las etapas precedentes, *ocasional*; es decir, se explotarán las situaciones de la vida cotidiana en la medida en que puedan ser "matematizadas".

Pero el método será también *ordenado* y *didáctico*, pues el niño ha llegado a la edad en que debe aprender a retener, a sistematizar los hechos observados.

Durante esta etapa explotaremos problemas complejos como los que vimos en las páginas 88 y 90 (séptimo y octavo problema), resolviéndolos por medios matemáticos –no ya por tanteos.

Es decir que frente a cada caso el niño se verá inducido a generalizar la situación, así como los medios de resolverla. De este modo, el número surgirá de las situaciones particulares, donde hasta ahora estaba encerrado.

Prácticamente, por un lado, enfrentaremos problemas tan reales e interesantes como sea posible, que no pongan en juego más que la experiencia infantil y, por otro lado, podremos lograr el esfuerzo de generalización y adquisición de los resultados.

No hay que temer el empleo de números elevados desde el comienzo. Los números forman parte del lenguaje corriente y hay que reconocer que a los niños de esta edad les agradan particularmente los números grandes (ver M. Goutard: *L'enfant et les mathématiques*. Delachaux). Ellos constituyen la realidad de la aritmética, y si queremos que descubra las principales reglas fundamentales, es necesario que pueda trabajar con un material suficientemente importante que los diez primeros números están lejos de proporcionar.

Además, la vida práctica los envuelve, muy especialmente, en una colectividad de niños tan numerosa como lo es una escuela. En suma, es el "baño de lenguaje" adaptado a la vida matemática.

Sin embargo, hay que tener ciertas precauciones, sobre todo al comienzo del primer grado, si se encuentran alumnos –pocos o muchos– que no han realizado ninguno de los ejercicios descriptos en las etapas precedentes. Será entonces peligroso para su futuro ponerlos directamente frente a los números si no han podido forjarse por sí mismos el concepto de magnitud, el de cantidad, el de número; si no han vivido, ejecutado, las diferentes operaciones con las magnitudes, con los conjuntos, con los números pequeños; si no han aprendido a distribuir cantidades en distintos agrupamientos, comprendiendo así el paso de una unidad a otra de orden superior.

En un caso así, es necesario provocar rápidamente las situaciones que ponen en evidencia estos conceptos, hacer actuar y hacer reflexionar, con lo que se logrará que nazca el gusto por la precisión en los términos y por la expresión bien adaptada. No es perder el tiempo, es salvaguardar las posibilidades de llegar muy lejos.

1. El número en la vida cotidiana

Los niños de esta edad saben escribir; se interesan por los símbolos de la vida de los adultos.

Todos los días, pueden escribir *la fecha*. Se puede leer el calendario

y copiar, pero mejor aún, se puede tratar de escribir sólo el número que corresponde a ese día del mes.

Así, el niño llegará a comprender intuitivamente la sucesión de los números de 1 a 30 ó 31.

La maestra no debe ignorar la convención que, en nuestro idioma, nos hace emplear la numeración cardinal para expresar las fechas, aunque para poner en evidencia la sucesión de los días habría que utilizar, como en inglés, la numeración ordinal: el 3º, el 26º día del mes.

Incluso las preguntas como: "¿Cuántos días faltan para la fiesta?", son ambiguas. El número cardinal expresa una colección cuyos elementos están presentes; eso no sucede en el caso de la sucesión de los días. Se puede justificar la pregunta planteada haciendo contar las hojas en un calendario de taco, o las casillas con los números en los almanaques comunes que dedican una hoja a cada mes.

Una dificultad similar se encuentra con las direcciones y la numeración de las casas: no obstante usarse un número cardinal, éste implica un cierto orden.[8] Podríamos decir lo mismo de la numeración de los libros de la biblioteca, de las habitaciones de un hotel, de las líneas de ómnibus, etc. El número aquí no es más que un signo. Para el niño es un número para leer, tanto más interesante cuanto que tiene cifras.

La lectura de *la hora*, además de permitir al niño ejercitarse en una lectura que no es fácil, pero que le interesa mucho a esa edad, lo conduce a la práctica de contar de 5 en 5.

Hay ejercicios que pueden hacerse de tanto en tanto, con cuadrantes especialmente concebidos para poder "escribir" las horas. Aquí encontramos el número como signo y como medida. Volveremos sobre ello.

Un ejercicio muy útil es el que permite contar los niños de la clase, de las diferentes clases, de la escuela entera. ¿Cuál es la clase que tiene más (o menos) alumnos?, ¿más varones, o menos?, ¿la que tiene menos varones es la que tiene más niñas? Entre todos, ¿cuántos almuerzan en la escuela?, ¿cuántos tienen un hermano o una hermana en la escuela? Se hacen cálculos al tanteo primero, a la espera de que se adquieran las tablas de adición y la forma de transportar las decenas comprendidas en el cálculo de las unidades... Llegamos, en general, a totales que pasan de la primera y aun de la segunda centena.

La maestra proporciona el medio de escribir estos números y observa la manera de proceder de los niños para encontrarlos. En primer grado no se tarda en utilizar las reglas aritméticas.

Tal ejercicio puede realizarse una o dos veces por semana, justificado por la necesidad de saber quién está presente, quién falta, quién almuerza en la escuela. Puede convertirse, por ejemplo, en un juego de los lunes y viernes.

Muchas otras ocasiones proporcionarán el material para este "baño de lenguaje". En la división de los mayores llega un momento en el que

[8] En algunos países (Francia), el número de la casa expresa el número de orden del inmueble en esa calle; en otros, como en la Argentina, el número asignado, o las dos últimas cifras, es proporcional, aproximadamente, a la distancia desde la esquina. *(N. de T.)*

quieren reemplazar por un número cualquier descripción de situaciones en las que se encuentren varios o muchos seres o cosas...

"Había nueve barcos, cada uno con doce remeros", contaba la maestra. Y los niños: "Hay que saber cuánto es todo eso". Y cada uno trataba de buscar la forma de resolverlo. Una de las niñas (la escena se desarrollaba en una división de los mayores) dibujó los nueve barcos, con los doce remeros cada uno, y sumando 9 decenas y 18, encontró 108. Esto prueba que se dio cuenta que $12 \times 9 = (10 \times 9) + (2 \times 9)$, que es la propiedad fundamental de la multiplicación.

Todo esto, expresado a título de ejemplo, demuestra cómo puede el niño vivir en un baño de lenguaje matemático y tener una actividad mental espontánea realmente matemática.

2. El estudio metódico

En el punto en que estamos, el estudio metódico del número y de la numeración resulta indispensable. Los niños sienten su necesidad y lo reclaman. Afianzado, como ya lo hemos demostrado, por gran número de experiencias, presenta muchas ventajas.

El niño conoce de los números:

- ya sea simplemente el nombre (fechas, lectura del termómetro);
- ya sea su estructura (8 es 4 más 4, etc.).

Sabe generalmente recitar la sucesión de los números de las dos o tres primeras decenas, pues se sirve de esta serie de números para enumerar las colecciones (relación término a término entre los elementos de la colección y el nombre de los números recitados sucesivamente). Hemos visto en la página 145 que la sucesión de los números se ha establecido experimentalmente por medio de las colecciones numéricas crecientes.

A partir de este momento conviene familiarizarlo con las colecciones de referencia. Para ello se le dan pequeños elementos, fichas por ejemplo, representando una unidad, y se le enseña a estructurar esas colecciones según un método que servirá de referencia. Se le puede sugerir que los coloque de a dos.

Así organizada, surge en seguida si la colección es par o impar. Fácilmente se ven también los agrupamientos de a 4, 8, 6... o de a 5.

Aparecen, igualmente, los dobles y las mitades, los cuartos y los tercios, en casos particulares. Se pueden utilizar entonces otros materiales, que serán una ayuda durante algunos meses, y se abandonarán poco a poco, a medida que los niños vayan construyendo mentalmente los esquemas de las estructuras y reteniendo los resultados.

Paralelamente, la escritura de las cifras permite la escritura simbólico-matemática de los números. Cada niño confecciona su documentación:

tabla de la sucesión de los números, tablas de dobles y de mitades, sucesión de números pares e impares...

Esta serie, esta colección de números que forma también un conjunto, puede fraccionarse en subconjuntos. El niño ya lo sabe hacer: organizar un conjunto numérico en agrupamientos de 3, 6, ... 10 elementos. Hemos visto que éste es el principio del cálculo multibase. Le será fácil comprender que en nuestro sistema de numeración damos privilegio a la decena, es decir, que empleamos la numeración en base 10. Así, sin dejar de utilizar los otros números como bases, debe saber contar con base 10 y con esta base escribir los números.

Los números, en efecto, se escriben con un signo particular, por lo que concierne a los 9 primeros. Pero a partir del número 10, que constituye *una unidad de primer orden*, se vuelven a tomar los mismos signos, asociándolos de a 2, 3, 4... y utilizando una convención: la de la posición de los signos, unos con respecto a otros: cifra de las unidades, de las decenas, de las centenas... La descomposición de las veinte o treinta primeras cantidades numéricas en decenas y unidades permite comprender fácilmente esto. Si algún orden de unidades no está presente, su lugar lo ocupa la cifra cero.

Es evidente que todo esto se descubre a medida que se realizan los cálculos prácticos. En la página 154 daremos un ejemplo.

La afición por las series (5-6 años), por la repetición de memoria de las "formulitas", el intento de retener de memoria las tablas de adición, de multiplicación por 2 y por 5, la numeración hasta 100 o más... son conocimientos indispensables para la continuación del estudio de la aritmética. Es evidente que todas estas series, estas tablas, se han ido descubriendo poco a poco, completándose paulatinamente.

El "cartón con los 100 agujeros", la "plancha con las 100 bolitas" y las "pilas de discos" del material Discat dan muchas ocasiones para ver la estructura del número.

A. LOS OBJETOS

Abordamos ahora el problema de la medida por medio de las unidades convencionales del sistema métrico. Como la numeración, es también decimal.

Los niños conocen algunas de las unidades: el centímetro, el metro, forman parte desde hace tiempo de su vocabulario, como también el litro, el kilogramo... Han tenido y tienen aún valor sustantivo: es el "centímetro" de la modista, que designa impropiamente una cinta graduada de 1,50 m; es el "litro", que representa, también impropiamente, una botella que no siempre contiene el litro; es el "kilo" de azúcar, que en realidad suele designar el paquete de azúcar.

También conocen otras unidades, que han utilizado, como el doble decímetro escolar, el metro, la regla graduada de la maestra... Este conocimiento es aún bastante empírico en estos momentos.

Lo que se les puede enseñar ahora es cómo se elige la unidad de medida, en función del objeto por medir. Esta idea no es nueva. En el momento en que apareció el patrón de medida, durante la tercera etapa,

comprobaron, ya lo hemos dicho, la importancia que tiene elegir la unidad de acuerdo con lo que se va a medir (página 137). Descubren que un mismo objeto puede medir 1 metro, o 10 decímetros, o 100 centímetros; que el litro de agua pesa un kilogramo; que, por lo tanto, el valor numérico depende de la unidad elegida. Por ejemplo, se evalúan los registros (técnicos o deportivos) con apreciación de un segundo, mientras que basta con la hora en la vida ordinaria.

Desde otro punto de vista, ven aparecer el número como una relación. El número que expresa la medida no sólo depende del objeto, sino también de la unidad de medida: la longitud de una cuerda puede ser a la vez de 1 metro, de 10 decímetros o de 100 centímetros, como la acabamos de decir.

Entre las medidas, la moneda –medida del valor de un objeto– plantea un problema particular. No es de la misma naturaleza que el objeto por evaluar; es una convención. Por otra parte, los múltiplos y submúltiplos de una unidad monetaria no tienen una apariencia física proporcional a su valor. Es necesario "aprender" la moneda unidad por unidad.

En esto los niños reciben ayuda de las múltiples ocasiones que han tenido, desde tiempo atrás, de manejar billetes y monedas.

Hagamos notar que, a esta altura, la moneda debe ser objeto de estudio y no motivo de cálculo; dicho de otro modo, no es un "material de cálculo", por las razones que acabamos de dar.

B. LOS CONJUNTOS

El trabajo indicado para la tercera etapa puede retomarse en el transcurso de la presente; en aquel momento hemos sugerido muchos ejercicios posibles. Pueden repetirse, creando mayores dificultades y en forma de juegos colectivos, con miras a que den lugar a una expresión cada vez más precisa.

Este trabajo no ha sido más que una introducción al conocimiento del número; ha sido y sigue siendo un excelente medio de formación del espíritu para la lógica, formación que debe proseguir.

Los elementos de un programa podrían ser:

- realización de conjuntos con parte común (intersección) o sin ella
- realización de diagramas con 2 ó 3 intersecciones;
- realización de inclusiones con motivo de problemas análogos a los de la página 140.

Pero el trabajo mental será mayor si estas realizaciones se imaginan, en lugar de construirse con objetos o figuras. Veamos algunos ejemplos:

—Estoy pensando en el conjunto de los animales de la granja. Busquen un conjunto que no tenga con éste ningún elemento en común. (*Respuesta:* por ejemplo, el conjunto de los animales salvajes.)

—Estoy pensando en el conjunto de los animales de la granja. ¿Qué podríamos poner en uno de sus subconjuntos que comprenda a los animales que vuelan? (*Respuesta:* patos, gallinas, gallos, pollos.)

—Estoy pensando en el conjunto de los niños de la clase que tienen

guardapolvo. Pienso ahora en otro conjunto; éste tiene con el primero una intersección que comprende a los varones que tienen guardapolvo. ¿Cuál es el segundo conjunto? (*Respuesta:* el conjunto de los varones de la clase.)

—Estoy pensando en dos conjuntos; su intersección comprende a los varones que tienen guardapolvo. ¿Cuáles son esos dos conjuntos? (*Respuesta:* los mismos conjuntos del ejemplo anterior.)

El trabajo debe ser también de expresión. Todo lo que hemos dicho a este respecto para la tercera etapa puede repetirse aquí, hasta que los niños dominen el uso de conjunciones, alternativas, contrarios ("no rojo...").

C. LOS NÚMEROS

A esta altura, el estudio de los números comprende:

- la numeración o sucesión de los números hasta un valor tan alto como quiera llegar el niño. Hay que darse cuenta que cuando ha comprendido el mecanismo de su formación en nuestro sistema decimal, eso le resulta fácil y agradable;
- la articulación de las decenas (y de las centenas y de los millares o unidades de mil, si el niño las descubre por su cuenta, lo que es muy frecuente);
- la estructura de los números, que no es sino la tabla de adición, que debe saberse de memoria;
- las tablas de multiplicación por 2 y por 5, y que no es sino una variante de las tablas de adición o escalas que también deben saberse de memoria.

El estudio de los números comprende también su escritura; hay que saber trazar las cifras y para ello, habrá que hacer ejercicios gráficos adaptados, como también "dictado" de cifras y de números.

En el ejemplo que sigue señalamos cómo se puede lograr un estudio metódico basándose en situaciones reales y aprovechando la afición de los niños por los números y el cálculo. Constituye otra faceta interesante de este ejemplo, la que muestra cómo ciertas adquisiciones se van escalonando en el tiempo.

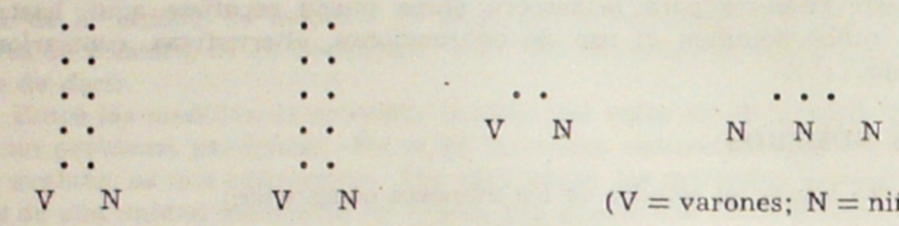
1. Ejemplo de descubrimientos y de adquisiciones en lo que respecta a los números

Un grupo de niños de 5 a 6 años admite que es conveniente saber todos los días cuántos son en clase. ¿Cómo hacer para saberlo? "Hay que contar", dicen.

La clase está formada por niños y niñas. Se decide formar parejas:

un varón y una niña. Se comprueba que una vez formadas las parejas quedan 3 niñas sin varón. Se organiza un cortejo; se cuentan las parejas: son 11. La clase comprende, pues, 11 parejas y 3 niñas solas.

Cada uno reproduce el "cortejo" en su mesa, con ayuda de fichas: rojas para los varones, azules para las niñas. Como conocen la decena, colocan entonces las 10 parejas representadas por fichas, haciendo 2 grupos de 5 parejas (saben que cada grupo de 5 parejas son 10 niños), luego una pareja sola y las 3 niñas.



(V = varones; N = niñas)

Fácilmente se encuentra que hay 11 varones y $11 + 3 = 14$ niñas.

Un estudio metódico sobre estos dos números conduce a analizarlos como

$$10 + 1 \quad \text{y} \quad 10 + 4$$

Se recuerda el valor del 1 (o sea 1 decena) y del 0, que ocupa el lugar de las unidades; diferencia entre 10 y 14.

(En las clases posteriores se puede recordar lo que se sabe del 10. Repetir los complementos de 10: 10 es $1 + 9$, $2 + 8$, ...; lo que se sabe de 14, doble de 7, etc.)

7 de abril. Algunos días más tarde, la clase cuenta con 9 varones y 12 niñas. Se forman las parejas con los niños, luego con las fichas.

Estudiando los números 9 y 12, se comprueba que 9 es una decena a la que le falta 1; 12 es una decena y 2 más.

Se le puede pedir prestado 1 a 12 (quedan 11) y agregárselo a 9; se tiene 2 veces una decena y 1. Todo el mundo sabe que esto es 21.

(Más adelante se podría trabajar sobre los siguientes números: 19 y 12, 29 y 12..., 9 y 22, 19 y 22... Se los hace ejercitar para sacar 1 al número mayor y completar la o las decenas del número menor. Repasar lo que se sabe del número 12.)

18 de abril. Los alumnos son 10 varones y 15 niñas. "No hace falta contar", dicen los niños, "son 2 decenas y 5, o sea 25".

(Posteriormente se aprovecha para establecer o verificar o repetir la sucesión de los números de 5 en 5, que es también la tabla de multiplicación del 5. Se comprueba también que 10, 10 y 5, es lo mismo que 5 y 5, luego 5 y 5 más, y después otros 5, o bien, 5 veces 5.)

26 de abril. Esta mañana los alumnos son 13 niñas y 11 varones. Sin ayuda, los niños dibujan, utilizando los agrupamientos en base 2, las dos cantidades de alumnos presentes. Se dan cuenta que basta juntar las dos decenas, que son 20, y agregarles las unidades, que son 4 (3 niñas y 1 varón). Los alumnos son, en total, 24.

En las primeras clases de la escuela primaria, hay que dar ejercicios de cálculo mental del mismo tipo, es decir, donde las unidades de cada uno de los números sean inferiores a 5; es suficiente juntar las decenas y las unidades.

Ejercicio de sustracción: si se forman las parejas, ¿cuántos niños quedan solos?, ¿serán niñas o varones?

12 de mayo. Los niños de esta división de mayores encuentran por sí mismos el medio de sumar 11 niñas y 17 varones. También encuentran que la diferencia entre los dos grupos es de 6 niños.

15 de mayo. La casualidad quiere que estén presentes 15 niñas y 15 varones. Hay "tantos" varones "como" niñas. Al hacer las parejas no queda ningún alumno solo. El total es de 3 decenas, o sea 30.

(Ulteriormente, aprovechar un caso semejante para hacer repetir los dobles y las mitades: tabla de multiplicación del 2.)

3 de junio. Hoy también hay 14 niñas y 14 varones. Llegan 2 niñas mientras se está realizando el ejercicio. "No hace falta contar –dicen los niños–, hay 2 niñas más que varones." Al hacer el total, dicen: "Hay 2 decenas ya hechas y una tercera que se hace con 4 y 6".

(Más tarde se puede proponer un cálculo mental de suma de números cuyas unidades formen una decena: 13 y 17, 21 y 19, etc.)

4 de junio. Hoy hay 14 varones y 17 niñas. Aparecen varios medios para encontrar el total:

- por *enumeración*: un niño dice: "Yo no cuento más esos 14 y sigo: 15, 16...";
- por *organización de decenas*: "Yo tomo 6 para hacer 14 y 6, y quedan 1 y 10. Todo esto forma 31."

(En primer grado se pueden hacer ejercicios de cálculo rápido con números cuyas unidades, sumadas, pasan la decena: 14 y 19, 13 y 18, etc.).

18 de julio. Hay 7 varones y 14 niñas. La organización en parejas deja 7 niñas solas. La maestra sugiere: "¿Si cada varón acompañara a 2 niñas?" Se descubre la organización de a 3 y se comprueba que 14 es el doble de 7.

(Más adelante se podrán encontrar ejemplos análogos: 4 y 2, 8 y 4, 6 y 3... Hacerlos resolver, primero por el dibujo, luego reflexionando; se ve que esto obliga a sumar un número y su mitad, o un número y su doble.)

16 de setiembre. Se produce el mismo caso con 13 varones y 26 niñas. Los niños encuentran por sí mismos la organización de a 3, y salen al recreo formados de esa manera. Encuentran un total de 39 niños.

Esta clase está formada por dos grupos de distinta edad, digamos: los jóvenes y los mayores, a quienes designaremos por *J* y *M*, respectivamente, para simplificar, y por la misma razón llamaremos *N* y *V* a las niñas y a los varones, respectivamente.

Hacia mediados de setiembre, ellos deciden contarse a sí mismos dividiéndose en *J* y *M*; encuentran 9 J y 20 M, o sea 29 niños.

Se cuentan ahora como N y V, y encuentran también 29 (15 N + 14 V). Es, pues, el mismo total.

Un niño dice: "Son los mismos niños; nadie ha entrado o salido mientras calculábamos".

A partir de este momento, el total se hace con los dos agrupamientos. Se reconoce así la *organización diferente de un mismo conjunto.*

Desde este momento, también, dejan de recurrir a las fichas, y calculan reduciendo unidades a decenas. Haciéndolo de esta manera, los resultados numéricos deben retenerse de memoria.

2. Las operaciones con los números

Las operaciones con las magnitudes, luego con los conjuntos, conducen en forma natural a las operaciones con los números. Éstas no son sino la transcripción matemática, es decir, simbólica, de las acciones.

Ya hemos señalado que, en ciertos casos, situaciones diferentes conducen a una misma operación aritmética. Esto significa que, inversamente, una misma operación aritmética puede resolver acciones o situaciones diferentes. Por lo tanto, es siempre indispensable *razonar sobre la acción.* Al comienzo, existe una situación dada. Interviene una acción y la situación primitiva se modifica. Es este conjunto ternario el que debe ser transcrito de manera simbólica por lo que en cálculo denominamos "operación". El término es ambiguo. Hay que darse cuenta que lo que llamamos adición, sustracción, etc., es el conjunto de una situación, de una acción y de la nueva situación que de aquéllas resulta.

Sabemos que una acción contraria a la primera, remite la situación al estado inicial.

Es este mecanismo el que siempre hace falta precisar claramente. Hecho esto, la traducción aritmética no presenta dificultades.

A causa de la aparente dificultad de todo esto y también de la importancia que tiene el saber dar desde el principio los distintos matices en el significado de las operaciones, para que jamás se plantee algo que no corresponda a una situación real bien clara para la mente del niño, nos extenderemos un poco sobre este punto y ofreceremos ejemplos razonados de los diferentes sentidos de las dos operacions aritméticas: adición y multiplicación, así como de sus inversas: la sustracción y la división. Hagamos notar, de paso, que la tercera operación aritmética: la potenciación, y su inversa, la radicación, no pertenecen al programa de primer grado.

ADICIÓN

La operación aritmética abarca dos acciones: la de unir y la de agregar.

1º *Unir.* a) *Unir dos o varias colecciones de elementos de la misma naturaleza.*

En la casa hay 4 manzanas en la frutera y 5 manzanas en la heladera. Mamá las pone juntas en la mesa. ¿Cuántas manzanas hay para el postre? Respuesta: 4 manzanas y 5 manzanas son 9 manzanas.

b) *Unir dos colecciones de elementos de distinta naturaleza.*

En casa hay 4 manzanas en una frutera y 5 naranjas en la heladera. Mamá las pone juntas en la mesa. ¿Qué hay para postre? Respuesta: 4 manzanas y 5 naranjas son 9 frutas.

Observar la obligación que se tiene de cambiar el universo de referencia. Esto ya se ha tratado en el transcurso de la tercera etapa, a propósito de las uniones de conjuntos (pág. 141).

c) *Unir dos o varios conjuntos.*

Pedro y Juan juegan con la arena (en la playa, en la plaza). Pedro tiene un balde, una pala, un tamiz, 3 moldes. Juan tiene un balde, una pala, 4 moldes. Para entrar a la casa, la mamá les hace poner todos los juguetes en el baúl del auto. ¿Cuántos juguetes habrá en el baúl?

Se suman los elementos idénticos de cada conjunto. Hay, entonces, 2 baldes, 2 palas, 1 tamiz, 7 moldes. El conjunto de los juguetes del baúl queda definido por extensión.

Pero también se puede decir cuántos juguetes hay, pues balde, pala, tamiz y molde son juguetes. Hay 12. El conjunto formado por la unión de los dos conjuntos primitivos queda ahora definido por comprensión.

2º *Agregar.* La acción es un poco diferente; la diferencia de matiz en lo que al sentido se refiere proviene de que, en este caso, se aumenta la colección primitiva, procurándose lo que se necesita para ello:

Mamá comprueba que no hay más que 4 manzanas para el postre; no alcanzan; va entonces a comprar otras, que agrega a las que ya tenía.

Sea, por ejemplo, 4 manzanas que había y 5 manzanas agregadas después.

Hay que recordar aquí el caso planteado en el transcurso de la tercera etapa, de unión de dos conjuntos con intersección.

SUSTRACCIÓN

La operación aritmética abarca tres acciones:

- existe una colección de elementos; se ejecuta la acción de retirar algunos de esos elementos. Se busca cuántos quedan (resto);
- existe una colección de elementos; se conoce otra que es numéricamente diferente. Se busca el valor de la diferencia;
- existe una colección de elementos; se la compara con otra que sirve de referencia. Se busca lo que hace falta para completar la primera hasta que sea igual a la segunda: esto significa buscar el complemento.

Veamos las situaciones que corresponden a estos tres casos.

Búsqueda del resto

—Una granjera tiene 9 gallinas en su gallinero; todas las mañanas

les da maíz. Esta mañana tiene que ir al mercado a vender 3 de esas gallinas. Las saca del gallinero. ¿Cuántas gallinas quedarán?

Respuesta. Tenía 9 gallinas, saca 3; quedan 6 gallinas.

Búsqueda de la diferencia

—Luisa y María son dos granjeras. Las dos tienen gallinas en su granja. Luisa tiene 8 y María tiene 5. ¿Qué diferencia hay entre estos dos números de gallinas?

Respuesta. Una de ellas tiene más gallinas que la otra; es Luisa. María es la que tiene menos; no tiene más que 5. La diferencia es 3, porque le faltan 3 gallinas a María para tener tantas como Luisa (o bien, a Luisa le sobran 3 gallinas para tener tantas como María).

Búsqueda del complemento

—Lucía, la granjera, tiene 7 gallinas; ella desea tener más. Querría tener tantas como Rosa, su vecina, que tiene 15. ¿Cuántas gallinas tendrá que comprar Lucía para tener tantas como Rosa?

Respuesta. Lucía desea tener 15 gallinas. Ya tiene 7; debe, pues, comprar lo que le falta a la colección de 7 para convertirse en una colección de 15, o sea 8 gallinas.

Observación sobre las dos operaciones (adición y sustracción).

Sabemos que ambas son inversas entre sí, es decir, que las acciones que modifican el estado inicial para transformarlo en estado final son inversas entre sí.

En los dos casos, sólo hemos razonado sobre conjuntos de objetos: conjuntos de juguetes, de frutas, de gallinas...

MULTIPLICACIÓN

Es la operación que corresponde a la yuxtaposición de cantidades iguales, es decir, a la unión de conjuntos iguales. Vamos a mostrar con un ejemplo cómo se distingue la multiplicación de la adición, no obstante decirse a veces, sin razón, que aquélla es un caso particular de ésta.

Situación. La maestra organiza un conjunto de dibujo. Los niños que toman parte en el juego van a dibujar, y luego toda la clase elegirá el dibujo más lindo, para decorar el salón. Para que las posibilidades sean iguales, se le va a dar a cada niño una hoja de papel (el mismo formato, el mismo color) y una caja de 6 lápices de colores (los mismos colores, lápices nuevos). ¿Cuántos lápices hay que distribuir?

La acción. El problema para la maestra es juntar los lápices, elegir los colores, hacer paquetes de 6 colores. Esto lo hace antes de la clase, ignorando aún cuántos dibujantes habrá. Constituye conjuntos de 6 lápices, conjuntos idénticos; multiplica los montones de lápices.

Estamos ahora en clase; pone en marcha el juego y designa 8 niños voluntarios para dibujar. Tenemos un nuevo conjunto: el conjunto de los 8 niños.

Operación aritmética. Consiste en poner en relación el conjunto de los niños con los conjuntos de 6 lápices.

Sabemos que numéricamente esta puesta en relación conduce a encontrar 48 lápices.

Hagamos notar que hay combinación de un conjunto y de un conjunto de conjuntos (este último es un conjunto de 8 conjuntos de 6 lápices, o también: 6 lápices repetidos 8 veces, o sea, 48 lápices).

Es necesario razonar como lo acabamos de hacer, a fin de no confundir las dos situaciones diferentes que conducen a dos multiplicaciones cuyo resultado es análogo. En efecto –y únicamente en el plano numérico–, 6 repetido 8 veces da el mismo resultado que 8 repetido 6 veces. La situación real, en cambio, es totalmente distinta: por una parte, tenemos 8 niños que utilizan 6 lápices cada uno, mientras que por la otra parte, serían 6 niños que utilizan 8 lápices cada uno.

Otra dificultad deriva de saber cuál es el número multiplicando y cuál es el número multiplicador.

Volvamos a nuestro ejemplo: habíamos dicho que la maestra multiplica los montones de lápices. Ha hecho n montones, luego, de estos n toma 8. Ha repetido, entonces, cada montón 8 veces. La traducción oral es "6 repetido 8 veces"; la traducción aritmética es "6 lápices $\times$ 8 = 48 lápices".

Mientras que en la adición podemos cambiar el orden de los términos, esto es imposible en la multiplicación, so pena de traducir una situación totalmente diferente.

Un ejemplo que puede servir de modelo para recordar: distingamos 4 veces 2 de 2 veces 4, en las siguientes situaciones: 4 ramos de 2 flores cada uno y 2 ramos de 4 flores cada uno. En los dos casos tendremos 8 flores, pero en uno de ellos necesitaremos 2 floreros y en el otro, 4.

En el caso en que se necesitan 2 floreros, la traducción es: 4 flores repetidas 2 veces, o sea: $4 \times 2 = 8$, y en el otro caso, la traducción es 2 repetido 4 veces: $2 \times 4 = 8$.

DIVISIÓN

Esta operación aritmética corresponde a dos situaciones. En una se busca la composición de las partes; en la otra, el número de beneficiarios. Se sabe que las partes serán iguales, salvo el resto, si lo hay, que tiene otro valor.

Observemos que, según el caso, el dividendo es de la misma naturaleza que el divisor o que el cociente.

Tomemos dos ejemplos, o mejor dicho, dos aspectos de una misma situación.

Búsqueda de la composición de las partes

La maestra quiere repartir lápices en igual número a un grupo de niños que dibujan. Tiene 28 lápices y los niños son 7. ¿Cuántos lápices debe dar a cada uno?

Respuesta. Estamos frente a dos conjuntos que hay que relacionar: un conjunto de lápices y un conjunto de niños. La relación debe ser tal que a cada uno de los elementos del conjunto de los niños se le atribuya uno de los subconjuntos iguales del conjunto de los lápices. Puesto que hay 7 niños hay que organizar en el conjunto primitivo de los lápices 7 subconjuntos iguales.

Como en la multiplicación, tenemos, por un lado, un conjunto, y por el otro, un conjunto de conjuntos. La situación es simplemente la inversa. Podemos encontrar la solución por tanteo, organizando subconjuntos de 4, 5, 6 lápices, o aplicando la tabla de multiplicar.

La operación aritmética es: dado un conjunto de 28 lápices, ¿de cuántos lápices se compondrá la parte de cada uno de los 7 niños? También podemos decir: ¿cuántas veces cabe 7 en 28? El cociente será un número de lápices, de la misma naturaleza que el dividendo.

Búsqueda del número de los beneficiarios

La maestra dispone de 28 lápices. Desea dar un paquete de 4 lápices a varios de sus alumnos. ¿Para cuántos alumnos alcanzan los lápices?

Respuesta. Éste es el problema inverso, que pone en relación un conjunto de conjuntos de 4 lápices y un conjunto de niños cuyo número de elementos es igual al número de subconjuntos de 4 lápices.

La operación aritmética se razona de la siguiente manera: habrá tantos niños beneficiados como veces entren 4 lápices en 28 lápices. Dividendo y divisor son de la misma naturaleza; el cociente es diferente: dividiendo un número de lápices por otro número de lápices, se encuentra un número de niños.

Dicho de otro modo, el par de operaciones inversas, multiplicación, división, y los términos multiplicador, multiplicando, producto, dividendo, divisor, cociente, están ligados por una relación en la cual estos términos no son intercambiables. Unos corresponden a conjuntos de objetos y otros a conjuntos de conjuntos de objetos. A estas distinciones de sentido deben corresponder razonamientos diferentes y transcripciones adaptadas.

ORGANIZACIÓN DEL TRABAJO

PARA UN HORARIO DADO DE ENSEÑANZA DEL CÁLCULO

Una parte del trabajo que hemos propuesto parece demandar más tiempo que el que actualmente se aplica. Proponemos dos sesiones diarias en primer grado, por ejemplo de media hora y de un cuarto de hora.

La media hora cotidiana podría consagrarse, semanalmente:

- dos veces al trabajo de lógica (conjuntos);
- dos veces al trabajo con números;

- una vez al trabajo de mediciones o de geometría (construcciones, dibujos, arreglos decorativos, etc.).

En cuanto a las clases de un cuarto de hora, estarían diariamente reservadas al trabajo de memorización, de ejercitación en el cálculo mental, de repetición de tablas. El esfuerzo de memorización, ya lo hemos repetido varias veces, es indispensable. Estamos convencidos que si se ha hecho el trabajo previo, si las experiencias se han adquirido y comprendido, si se ha dominado la expresión, si los niños trabajan con situaciones que despierten su interés y soliciten una actividad mental real, este horario es suficiente para las adquisiciones que deseamos aquí.

CUADROS DE RECAPITULACIÓN

Creemos útil dar, en las páginas siguientes, cuadros que indican las fases de evolución de algunas de las nociones tratadas en el curso de las diferentes etapas:

- cuadros 1 a 6.

Damos también dos cuadros que presentan el conjunto de las nociones que se han visto:

- por orden de aparición en las actividades de los niños, cuadro nº 7;
- según el orden de un programa de adquisición, cuadro nº 8.

CUADRO Nº 1

Relaciones de la parte con el todo

I. LAS MAGNITUDES

Magnitudes continuas. Se obtiene una parte del objeto por medio de la acción: recortar, quebrar, arrancar.

Se pueden obtener 2, 3 . . . pedazos.

Cada parte es más pequeña que el todo (más liviana, más delgada, más fina . . .). No tiene nunca la misma forma (cuadrado recortado en rectángulos, triángulos, tiras).

Las partes reunidas reconstituyen el objeto.

Magnitudes discontinuas. Se puede tomar "un poco, algunos". Cualitativamente, la parte tiene menor volumen, peso, superficie (montón de piedrecitas, mosaicos, cuentas).

Las partes reunidas dan la magnitud inicial.

II. **LOS CONJUNTOS**

Eligiendo entre los elementos de un conjunto aquellos que poseen uno o varios atributos que no todos tienen, se organizan uno o varios subconjuntos.

Noción de complemento. Aplicación a la descomposición de una a formar el estado inicial. (Caso particular donde dos subconjuntos tienen una intersección.)

III. **LOS NÚMEROS**

Aspecto inverso de la adición y de la sustracción.

Noción de complemento. Los diversos subconjuntos, unidos, vuelven cantidad numérica.

CUADRO Nº 2

Relaciones entre las diferentes magnitudes

I. **RELACIONES ENTRE MAGNITUDES DE LA MISMA ESPECIE**

Comparación entre una magnitud y una más pequeña de la misma especie, tomada como patrón de medida.

Noción de medida, que puede expresarse:

- por medio de *un comparativo*: es más grande, más pequeño, menos pesado, etc.
- por medio de *un número*: número entero positivo, si la unidad es más pequeña (puede haber un resto); una fracción, expresada en términos comunes: es la mitad, la cuarta parte, etc.

II. **RELACIONES ENTRE MAGNITUDES DE NATURALEZA DIFERENTE**

- Entre el volumen y el peso;
- entre la cantidad y el tiempo: espacio para recorrer, cuentas para enhebrar;
- entre el número y el volumen,
  el peso,
  la velocidad,
  el tiempo.

III. **RELACIONES ENTRE CANTIDADES NUMÉRICAS**

Evaluación de una cantidad numérica según las diferentes bases (decimal en particular).

Relación entre dos cantidades numéricas (uno de los aspectos de la división).

CUADRO Nº 3

Noción de medida

I. **LOS CONJUNTOS**

- El fraccionamiento de un conjunto en subconjuntos iguales da un *número* de subconjuntos que varía según el tamaño de estos subconjuntos;
- el subconjunto es, pues, una unidad de medida.

Aplicación: el cálculo multibase, del cual el sistema decimal no es más que un caso particular (subconjuntos de 10 elementos).

- El número aparece aquí como la relación entre:
  el número de elementos del conjunto;
  el número de elementos elegido para los subconjuntos.

II. **LAS MAGNITUDES**

- Comparación entre dos magnitudes de la misma naturaleza (dos longitudes, dos capacidades, dos pesos, dos volúmenes): ¿cuántas veces la más pequeña está contenida en la más grande? La respuesta es un *número*, relación entre dos magnitudes;
- evaluación por medio de un patrón de medida:
  a) unidad cualquiera: brazo, mano, altura de un niño, superficie del pañuelo.
  b) unidad del sistema métrico.

CUADRO Nº 4

Nociones de clasificación en serie

I. **MAGNITUDES CONTINUAS**

Comparación por superposición, calco, coincidencia, ordenamiento (apilamiento, alineación, ensambladura; el primero y el último; orden

creciente y decreciente; estar "entre", es decir, a la vez más pequeño que... y más grande que...

II. **MAGNITUDES DISCONTINUAS** (montones de objetos)

Ordenamiento por evaluación cualitativa de más o menos (y viceversa), de mucho o poco, etc.

III. **CANTIDADES NUMÉRICAS EVALUADAS**

Orden creciente y decreciente;
- constitución de un orden regular por 1, luego 1 y 1 más...;
- descubrimiento de la sucesión de las cantidades numéricas y de la repetición de la unidad;
- el número ordinal;
- lugar del número en la sucesión de los números.

IV. **RELACIÓN ENTRE DOS SERIES NUMÉRICAS**

1, 2, 3... muñecas;
2, 4, 6... guantes.

CUADRO Nº 5

Noción de número

- el número empleado como adjetivo;
- el número en el lenguaje corriente: uno, dos, muchos (o mil, o setenta...);
- los números intuitivos (de 1 a 5);
- el orden: el primero y el último;
- constitución de un conjunto equivalente a otro (por relación término a término);
- el número como propiedad de un conjunto,
  como propiedad común de 2 conjuntos equivalentes: el número cardinal.

La numeración

- agrupamientos de objetos de a 2, 3, 4 (números intuitivos);
- evaluación en 2 grupos de 3, 3 montones de 2...;
- agrupamientos de a 5, 6, ... 12; numeración multibase;
- numeración decimal;
- reglas de la numeración.

CUADRO Nº 6

Acciones y operaciones

	LAS MAGNITUDES	*LOS CONJUNTOS*	*LOS NÚMEROS*
1ª operación aritmética			
adición-sustracción			
Acciones de:			
tomar	*de una cantidad continua:* un trozo, todo, un poco	*el subconjunto:* el resto...	*la sustracción:* 1) búsqueda del resto
	de una cantidad discontinua: algunos; quedan...		
comparar	*dos magnitudes continuas:* la más... la menos... *discontinuas:* la diferencia		2) búsqueda de la diferencia
búsqueda de lo que falta	lo que hay que agregar para...	...el complemento	3) búsqueda del complemento
unir	dos cantidades continuas dos cantidades discontinuas ...la suma	*dos conjuntos* sin parte común *dos conjuntos* con intersección	*la adición:* unir esto y aquello agregar esto y lo otro
2ª operación aritmética			
multiplicación división			
Acciones de:			
repartir	hacer partes hacer partes iguales		*la división:* cálculo de: - el valor de una parte - el número de partes (repartir)
repartir en montones de 2, 3, 4		*organizar un conjunto*, agrupando sus elementos en grupos equipotentes (¿número de grupos?, ¿resto?)	
distribuir 1 por 1, 2 por 2...			
juntar varias veces la misma cantidad		*unir varios conjuntos equipotentes:* un conjunto de conjuntos	*la multiplicación:* mutiplicar las partes iguales, las cantidades iguales
agrupar de a 2, 3, 4...			

CUADRO Nº 7 **Encuentro progresivo de nociones matemáticas**

SU EXPLOTACIÓN PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA DE LOS NIÑOS[19]

ETAPAS	LAS MAGNITUDES (OBJETOS)	LOS CONJUNTOS — ACCIÓN	LOS CONJUNTOS — EXPRESIÓN	EL NÚMERO
1ª ETAPA *Etapa intuitiva y verbal*	*Las magnitudes:* cantidades continuas y discontinuas apreciadas globalmente. *Comparación directa:* yuxtaposición, igualdad. *Relación entre magnitudes:* directa (proporcional) o inversa; orden creciente y decreciente. *Expresión:* por comparativos (más grande, el más grande, más grande que...). Precisión de los adjetivos de cantidad (liviano, delgado, estrecho, etc.). Utilización de algunos sustantivos (cuadrado, triángulo, etc.). Empleo correcto de verbos (vaciar, verter, agregar, apilar, etc.). Precisión de adverbios de cantidad (mucho, poco, etc.).	*Relación* entre los objetos: idea de pertenencia. *Ordenamiento:* lo que va junto; lo que no va junto.	Dar la razón (¿por qué?).	Números intuitivos. Primero y último.
2ª ETAPA *Organización de las adquisiciones de la 1ª etapa*	*Acción sobre las magnitudes* (operaciones con cantidades): Tomar, agregar, reunir... Repartir, agregar varias veces una misma cantidad. Fraccionamientos, particiones, reparto, asignación, distribución... Partes iguales. *Expresión:* orientarse hacia el término aritmético que reemplaza poco a poco la pluralidad de los términos que significan, en el lenguaje corriente, la misma operación.	*Constitución de conjuntos:* Agrupamiento de objetos en conjuntos finitos. Los conjuntos en la vida práctica: – lo que forma parte del conjunto *E*; – lo que no forma parte. El conjunto vacío.	Dar la razón. *Representación* de estas nociones por: objetos, dibujos, esquemas.	De 1 a 5. Constituir agrupamientos de 1 a 5 objetos. Asignación de 1 a 5 objetos. Particiones de 1 a 5. Noción de par e impar.
	Expresión por el dibujo.	Noción de pertenencia a un conjunto. Conjuntos definidos por extensión y por comprensión.	Uso de las fórmulas: "pertenece a...", "no pertenece a...", "es un elemento de", "no es..."; "puse esto y lo otro", "es el conjunto de...".	
3ª ETAPA *Acceso al número*	*Relación* entre una cantidad y los elementos que la componen; entre una cantidad y cualquier patrón de medida; proporcionalidad directa e inversa (distancia, velocidad). *Expresión* de estas relaciones: más... y más veces está el patrón contenido...	*Organización de un conjunto;* parte de un conjunto; parte complementaria. Inclusión: de los ordenamientos a las particiones. *Trabajo sobre dos o varios conjuntos:* *parte común* (o partes comunes); conjuntos *disjuntos*; *unión* de 2 o varios conjuntos; *comparación* de conjuntos: relación término a término, biunívoca u otra.	Uso del "no". Uso de las conjunciones "y" y "o". Uso de tanto como; más que; menos que.	El número como propiedad de dos conjuntos equipotentes. Agrupamiento de agrupamientos (números intuitivos). Nombre de las colecciones numéricas obtenidas. Su estudio. Numeración multibase.
4ª ETAPA *Adquisición de las convenciones*	Uso de las unidades de medida convencionales: la moneda, el tiempo. *Expresión:* expresión aritmética.	*Propiedad común* a varios conjuntos: el número cardinal. De los ordenamientos a las relaciones de orden. Trabajo destinado a educar las funciones lógicas del espíritu: juegos individuales y colectivos que permitan la discusión, la representación por medio de dibujos, esquemas, por los símbolos aritméticos.	Uso de "antes" y "después". Uso de todos los términos vistos anteriormente.	Clasificación en serie de las cantidades numéricas. Repetición de la unidad. Lugar del número en la serie numérica. Numeración en base 10. Valor posicional del cero. Operaciones con los números.

[19] El capítulo III sigue el orden de este cuadro.

CUADRO Nº 8 — **Estudio de las primeras nociones matemáticas**

ELEMENTOS DE UN PROGRAMA

NOCIONES QUE SE VAN A ADQUIRIR	*JUEGOS LIBRES — EXPERIENCIAS ESPONTANEAS — ACCIÓN CONCERTADA*
Fase preliminar	Los juegos diversos con cubos, arena, agua, con juguetes (juegos de imitación), con la balanza, permiten aislar poco a poco el aspecto "tamaño" de las otras cualidades perceptivas. Los juegos con objetos pequeños (enhebrado, disposiciones relativas de pequeños elementos) conducen a las nociones de disposición y de orden. Los juegos de distribución conducen a la idea de pertenencia; los de ordenamiento (o selección) a la de cualidad común utilizada como criterio de separación y de agrupación. Los ordenamientos llevan a la idea de clasificación, de comparación, de "lo que va junto".
A. **De los agrupamientos de objetos a la noción de conjunto finito.**	**De los ordenamientos a los conjuntos**
a) Conjunto definido por extensión; por comprensión.	Poner en un recipiente esto y también aquello: juegos de inventario. Poner en un recipiente todo lo que tenga una cualidad común (color, forma..., o un mismo uso, o cualquier otro carácter conocido).
Pertenencia y no pertenencia a un conjunto.	Acciones de clasificación, de ordenamiento: este objeto pertenece al conjunto de... porque... este objeto no pertenece... Ordenamientos espontáneos, investigaciones por tanteos. Juegos individuales, colectivos (discusión).
Conjunto vacío.	Caso particular: la caja está vacía; ningún elemento llena la condición.
Representación de estas nociones.	Representación de estas nociones por: – los objetos: hacer conjuntos según un criterio impuesto; describir los conjuntos hechos; juegos de asignación; – el dibujo, – los esquemas.
b) Parte de un conjunto.	Tomar un trozo, un poco, algunos { de un objeto / de un conjunto
Parte complementaria.	Tomar aquellos que tengan un carácter común, aislarlos dentro del conjunto; ...queda.
Inclusiones.	Ordenar en recipientes que entren unos en otros.
Parte común a 2 o varios conjuntos.	Discusiones en los juegos colectivos de ordenamiento: ¿dónde se pone esto?
Unión de 2 o varios conjuntos.	Reclasificación: juntar lo que es así o de la otra manera.
B. **Relación biunívoca u otras relaciones:** tanto como, más que, menos que.	Juegos de asignación: distribuir individualmente uno o varios objetos (lápices, pinceles, etcétera). Hay bastante, demasiado, no hay suficiente.
C. **Propiedad común** a varios conjuntos: el número cardinal.	Hay tantos elementos en cada conjunto: hay *n* elementos.
D. **De los ordenamientos a las relaciones de orden:** antes, después.	*a)* Comparación de tamaños: clasificación por alineación, apilamiento, ensambladura; – el primero y el último; – el rango: antes y después. *b)* De más a menos (y viceversa); de mucho a poco (y viceversa). *c)* Constitución de cantidades crecientes de a 1 unidad. *d)* Descubrimiento de la sucesión de los números.

4

ALGUNOS DETALLES SOBRE EL SENTIDO DADO A CIERTOS TÉRMINOS UTILIZADOS EN ESTA OBRA

1. LOS CONJUNTOS

Damos aquí algunas definiciones simples para el conocimiento intuitivo de los conjuntos.

Conjuntos finitos

Cuando hablamos de conjuntos finitos nos referimos a las colecciones, a los agrupamientos de objetos. La noción matemática es, en cambio, mucho más compleja. En particular, es un error creer que los conjuntos sólo pueden estar constituidos por elementos (objetos, personas, etc.) que presenten entre sí cierta analogía (niños de una misma escuela, vestidos de una muñeca, material para dibujar). Por el contrario, lo que es verdaderamente fecundo en matemática es la posibilidad de considerar reunidos en un conjunto ciertos objetos o entes matemáticos, a los cuales no vincula ninguna relación de este tipo.

Los objetos, personas, etc., que hemos reunido en un conjunto o que se encuentran reunidos en un conjunto "pertenecen" al conjunto. Se dice que el elemento *e* pertenece al conjunto *E*.

Tal elemento pertenece a tal conjunto, tal otro no pertenece a otro determinado conjunto. La noción de pertenencia a un conjunto es importante. En el lenguaje corriente de nuestras clases decimos también que el conjunto contiene, encierra, comprende, tales elementos.

Estos elementos pueden haberse reunido porque tienen, entre todos sus caracteres, un carácter común. Este carácter común, que sirve de criterio de pertenencia, se denomina también *atributo*.

Éste puede *ser un atributo perceptivo*: forma, color, textura; un atributo que *conocemos por experiencia o porque* lo hemos aprendido: animales que viven *en países fríos, objetos fabricados* con madera, etc.

Los objetos –*los elementos*– que se agrupan para constituir un conjunto, se toman de *un medio ambiente más amplio*, que es necesario delimitar: es el *universo* –*se llama también conjunto referencial*–. En nuestras clases hablamos del *universo de la clase*, de la escuela, del dominio del juego (*dominio* del juego *de construcciones, dominio* del juego con la muñeca). No tenemos derecho *de poner en el* conjunto en formación un elemento tomado fuera del *universo delimitado*, de lo contrario, el universo mismo sería de este modo alterado y habría que modificar la *convención*.

Definición de un conjunto

Un conjunto puede definirse:

- por extensión: cuando se nombran los elementos que forman parte de él, o sea, todos los elementos que abarca: éste, aquél y el otro.

En este caso, se enumera, se inventaría.

- por comprensión: cuando se enuncia la cualidad que poseen los elementos que lo constituyen, común a todos: el conjunto de los *varones* de la clase..., o también, el conjunto de las niñas de la clase que *tienen guardapolvo azul*.

Conjuntos particulares (desde el punto de vista intuitivo).

- Se puede imaginar un conjunto que no tiene ningún elemento: se llama "conjunto vacío".
- Un conjunto que no tiene más que un solo elemento: se dice "clase singular".

La matemática demostrará que existen "conjuntos infinitos". Estos últimos ponen en juego conceptos matemáticos muy difíciles.

Organización de un conjunto

Subconjunto. Si todos los elementos de un conjunto *E* son, a su vez, elementos de otro conjunto *F*, se dice que *E* es "subconjunto" de *F*. Esto es lo mismo que decir que *E* está "incluido" en *F*.

Complemento. Volviendo a lo que acabamos de decir: el conjunto *F* comprende un subconjunto *E* que reúne una parte de sus elementos. Los otros elementos de *F* que no están comprendidos en *E* forman el complemento o "conjunto complementario" de *E*.

Es evidente que estas dos nociones configuran las operaciones de sustracción y de adición: tienen por términos los elementos de *F*, de *E* y del complementario de *E* en *F*.

Vemos también que se pueden practicar inclusiones sucesivas, pues nada impide formar subconjuntos dentro de los subconjuntos precedentemente obtenidos.

Partición de un conjunto. Es un conjunto de subconjuntos, de los

cuales ninguno es vacío, y son tales que todo elemento *e* de *E* pertenece a uno de los subconjuntos y sólo a uno.

Un caso particular es aquel en el que los elementos de todos los subconjuntos se corresponden término a término. Tenemos entonces subconjuntos equipotentes. Todos ellos tienen la misma propiedad –el número– o el mismo cardinal.

La constitución de subconjuntos equipotentes y su reagrupamiento para formar el conjunto primitivo, configuran las operaciones de división y de multiplicación. Observemos que las operaciones de división y de multiplicación se aplican a subconjuntos iguales en número.

Subconjuntos con parte común o sin ella

Cuando en un conjunto se constituyen subconjuntos, se pueden presentar dos casos:

- o bien cada uno de los elementos del conjunto no pertenece más que a un subconjunto (lo que significa que no pertenece "a la vez" a más de un subconjunto), y en ese caso los subconjuntos constituidos se denominan "disjuntos";
- o bien existen elementos del conjunto que pertenecen a dos o a varios subconjuntos. Constituyen entonces la parte común a estos subconjuntos. Esta parte común se denomina "intersección".

El mismo hecho se produce cuando se unen dos conjuntos del mismo universo. La unión de dos conjuntos da por resultado un solo conjunto con la totalidad de los elementos del uno y del otro. Se llega a que estos elementos pertenecen "a la vez" a cada uno de los dos conjuntos. Constituyen la "intersección".

Relación entre conjuntos

Relaciones binarias entre elementos de *E* y elementos de *E'*.[1]

Consideremos dos conjuntos *E* y *E'*, que comprenden, respectivamente, elementos *e* y *e'*.

Se pueden establecer relaciones tales que a cada elemento *e* de *E* (conjunto llamado *alcance*) corresponde un elemento *e'* de *E'* (conjunto denominado *rango*), y sólo uno. Se pueden presentar tres casos:

- quedan elementos *e* sin correspondientes *e'*;
- quedan elementos *e'* sin correspondientes *e*;
- a todo elemento *e* corresponde un elemento *e'*, y a todo elemento *e'* corresponde un elemento *e*.

Si a todo elemento *e* de *E* corresponde, como en el último caso, un elemento *e'* de *E'*, y recíprocamente, se dice que tenemos una *biyección*, y que la relación es biunívoca. Diremos que los dos conjuntos tienen la "misma potencia" o que ambos son "equipotentes".

[1] Existen otras relaciones aparte de las binarias (ver pág. 61).

Representación de los tres casos:

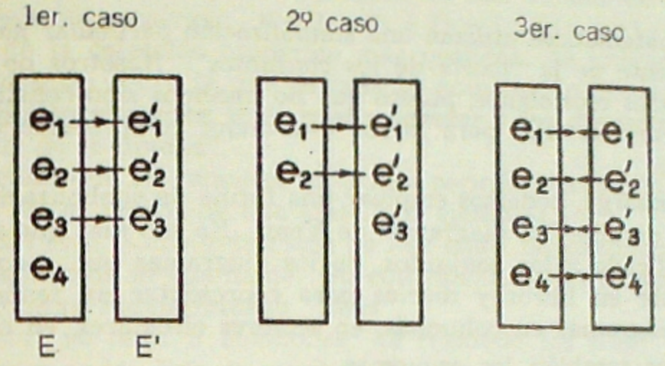
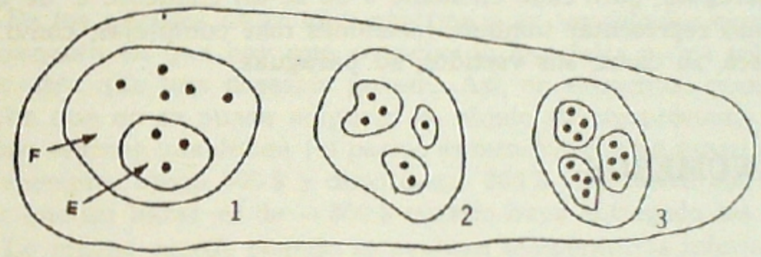
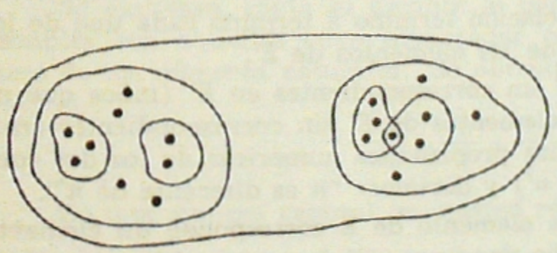


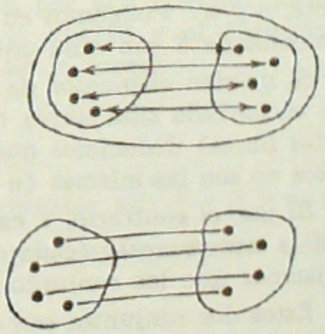
Ilustración de algunas de las nociones expuestas en este capítulo



1. *E* está incluido en *F* (aparece la noción de complemento de *E*).
2. Subconjuntos dentro de un conjunto.
3. Partición de un conjunto en subconjuntos equipotentes.



Subconjuntos sin parte común y con ella (intersección).



Relación biunívoca: conjuntos equipotentes, o sea, conjuntos que tienen la misma propiedad número o el mismo cardinal.

Estas representaciones reciben el nombre de "diagramas de Venn". Permiten la comprensión intuitiva de las definiciones y de algunas operaciones con conjuntos.

Simbolización

Los matemáticos utilizan una simbolización particular para la aplicación corriente de la "teoría de los conjuntos". Nosotros no necesitamos conocer todos esos signos, puesto que no hacemos sino constituir conjuntos y operar con ellos para lograr una mejor comprensión de la noción de número.

Sin embargo, podemos emplear una forma de simbolización dibujada. Acabamos de citar los diagramas de Venn. No son más que un caso particular, aplicado a los conjuntos, de los diagramas que encontramos corrientemente en libros y diarios para representar un fenómeno determinado: diagramas en columnas, en sectores circulares, en bastones, etc.

Citemos también los esquemas.

En el nivel en que nos encontramos, llamamos esquemas a las líneas que indican las relaciones entre elementos, por ejemplo: para cada muñeca, su paraguas; para cada elemento e de E, un elemento e' de E'.

Podemos representar también relaciones más complejas, como: para cada muñeca, su cama, sus vestidos, su paraguas.

2. LOS NÚMEROS

Número

Es la propiedad común a dos conjuntos equipotentes, es decir, a dos conjuntos que tienen el mismo cardinal.

Ejemplo: sea un conjunto E de n niños, y
un conjunto E' de n' sillas.

Las propiedades numéricas de estos dos conjuntos son, respectivamente, n y n'. Pongamos en relación término a término cada uno de los elementos de E con cada uno de los elementos de E'.

Si quedan elementos de E sin correspondientes en E' (niños que no han encontrado silla libre) o elementos de E' sin correspondientes en E (sillas libres) deducimos que las propiedades numéricas de los dos conjuntos no son las mismas ($n \neq n'$) y decimos: "n es diferente de n'".

Si por el contrario, a cada elemento de E corresponde un elemento de E' e inversamente (cada niño tiene una silla y no hay silla sin niño), deducimos que los conjuntos E y E' tienen el mismo cardinal ($n = n'$).

Estos dos conjuntos son equipotentes y su propiedad numérica (propiedad que es común a los dos) es el número.

El número es, pues, una propiedad de un conjunto y no de un objeto.

Números naturales

Se les llama también "enteros positivos". Constituyen la sucesión 1, 2, 3, 4, ...

Esta sucesión tiene como característica que cada uno de los números

se deduce del precedente por el agregado de una unidad, de un elemento a toda colección numérica: $n+1$; $(n+1)+1$; $[(n+1)+1]+1$; ... partiendo de la colección numérica más pequeña: la unidad.

La operación sobre la que se basa la numeración, gracias a la cual, a toda colección numérica se le puede agregar 1, se denomina "iteración (repetición) de la unidad".

La sucesión de los números naturales permite evaluar las colecciones de objetos reales (niños de una clase, por ejemplo).

Caso del cero. Cero indica que no hay nada, en particular, que se ha sacado o suprimido lo que había. Su equivalente en el lenguaje corriente es el pronombre indeterminado "nada".

Ejemplo: yo tenía 3 bombones; he regalado los tres. Ya no tengo más; no tengo nada. Esto se escribe: $3 - 3 = 0$.

Números enteros negativos

En los cálculos de la vida práctica y en los cálculos científicos llega el momento en que hay que enunciar lo que falta a una colección para tener otra que uno desearía poseer. Así, en economía, cuando se comprueba que no se puede adquirir un objeto sin un préstamo, o también, cuando se tiene una deuda (el pasivo es numéricamente superior al activo). Por ejemplo: tengo 500 $ y debo pagar 800 $. Me faltan 300 $. Se podrá decir que mi haber es de $-$ 300 $ cuando haya entregado los 500 $.

Lo mismo sucede cuando se evalúan temperaturas inferiores a la del hielo o profundidades del mar, medidas a partir de su superficie.

El conjunto de los números naturales y los negativos se denomina "enteros relativos", o simplemente "enteros".

Números fraccionarios

Se expresan, como su nombre lo indica, por una fracción. Los más simples son aquellos cuyo numerador es la unidad y el denominador uno de los números naturales. Se obtiene así la sucesión:

$$\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{4}\ \ldots$$

De una manera general, se pueden representar así: $\frac{p}{q}$; si p es múltiplo de q, el número fraccionario no es otro que uno de los números naturales:

$$\frac{9}{3}\ ,\ \frac{25}{5}\ ,\ \frac{81}{9}\ \ldots$$ (3, 5, 9, respectivamente).

Número cardinal

Recordemos que el cardinal es la propiedad numérica de un conjunto. Así, 5 tiene sentido de número cardinal cuando se habla de 5 niños, 5 libros, etc.

Se admite también este significado cuando se trata de 5 horas que, sin

embargo, no se han vivido simultáneamente, sino sucesivamente, en el caso de considerar la duración total que han abarcado (efectuar un trayecto de 5 horas en avión).

Número ordinal

Es el significado dado por la serie. Si se ubican 5 niños en fila, uno detrás de otro, se distinguen: el primero, el segundo, ... el quinto o último.

También se puede hablar de la quinta hora: durante un viaje de 5 horas, en avión, el viajero está impaciente durante la 5ª hora.

La serie de los números enteros positivos y la de los enteros negativos son series ilimitadas, que parten del primer número (1 o -1) y pueden continuarse sin que se encuentre jamás "el último".

El número-relación

En las medidas prácticas de objetos se pueden comparar dos cantidades. Si se comprueba que una de ellas es más grande que la otra se dice que ambas son desiguales. El caso contrario constituye la igualdad de dos magnitudes (o cantidades).

Para las cantidades de objetos semejantes, se llega a que la más grande contiene n veces a la más chica. La más chica es el $\frac{1}{n}$ de la más grande (el sexto, el onzavo, etc.).

Muy a menudo n no es un entero, sino un número fraccionario cualquiera: $\frac{23}{7}$, $\frac{7}{23}$, ... (veintitrés séptimos, siete veintitresavos, etc.).

En ciertos casos no se comparan dos magnitudes cualesquiera, sino que se trata de medir una magnitud a partir de otra, fija, de la misma naturaleza, elegida como unidad de medida; las hay naturales (el pulgar, el pie, la mano) que fueron unidades de medida aceptadas por determinados grupos culturales.

En las sociedades evolucionadas, las unidades tienen un valor convencionalmente definido. Así, un sistema de medida como el de nuestro país comprende unidades de medida ligadas entre sí por relaciones simples.

El metro tiene en él un papel fundamental. Actualmente se lo define como "1 650 763,73 longitudes de onda en el vacío de la radiación correspondiente a la transición entre los niveles $2\,p_{10}$ y $5\,d_5$ del átomo de criptón 86".

De este patrón de longitud se deducen las medidas de superficie (metro cuadrado), de volumen (metro cúbico), de peso (kilogramo peso), de fuerza (kilogramo fuerza), con las cuales están relacionadas las unidades de medida del tiempo (hora solar media, dada por la Oficina Internacional de la Hora).

Una misma magnitud puede ser evaluada por medio de diferentes unidades: así, la longitud del salón de clase puede ser de 8,12 metros, 81,2 decímetros, 812 centímetros...; el peso de una bolsa de comestibles puede ser de 5,693 kilogramos peso, o 5 693 gramos peso.

Simbolización

Cifras. Las cifras son los signos que permiten escribir los números. Las civilizaciones que han precedido a la nuestra han tenido diversos medios de escribir los números.

Nosotros utilizamos las cifras árabes, que son nueve (1 a 9), y además la cifra 0.

Estos diez signos permiten escribir todos los números enteros positivos, ya sea escribiéndolos sobre una misma línea de escritura (32, 487, 60 947, 197 684 238, etc.), ya sea escribiéndolos con cierto desplazamiento, como en las fracciones: $\frac{498}{32}$, o en las potencias: 492×10^{61} (que es el número 492 seguido por 61 ceros).

Las cifras pueden también estar asociadas a signos tales como: la barra de las fracciones $\left(\frac{1}{3}\right)$; el signo negativo (-76); la raíz $\left(\sqrt[5]{97}\right)$ que se lee "raíz quinta de 97" (número que elevado a la quinta potencia: n^5 vuelve a dar 97).

Numeración. Es el conjunto de los números en un sistema de referencia dado. Nosotros tenemos el hábito de leer los números en la numeración decimal: leemos 42, 63, 392... lo que significa, respectivamente: 4 veces 10 y 2, 6 veces 10 y 3, 3 veces 100, 9 veces 10 y 2...

Según su lugar en la escritura del número las cifras representan las unidades (a la derecha), las decenas (inmediatamente a la izquierda de las unidades), las centenas (otro lugar más a la izquierda)...

Hablamos de unidades, de unidades de primer orden (las decenas), de unidades de segundo orden (las centenas)...

Estas diversas unidades corresponden a las potencias de 10:

1	
$10 = 10^1$	$40 = 4 \times 10^1$
$100 = 10^2$	$400 = 4 \times 10^2$
$1\,000 = 10^3$	$4\,000 = 4 \times 10^3$
	$4\,000\,000 = 4 \times 10^6$
	etc...

Diferentes sistemas (o bases) de numeración

Como acabamos de decir, nuestro sistema de numeración es decimal, es decir que, en una colección de elevado número de elementos, organizamos grupos de 10 elementos, después reunimos esos grupos de 10 en 10 nuevos grupos (grupos de 100 elementos), luego de 1 000, etc.

Por ejemplo, podemos hacer:

3 subconjuntos de 1 000 elementos,
8 subconjuntos de 100 elementos,
4 subconjuntos de 10,
y quedan 5 elementos aislados.

Sabemos entonces que nuestra colección comprende

$$3 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5,$$

o sea 3 845, que leemos: tres mil ochocientos cuarenta y cinco.

Las calculadoras electrónicas cuentan con un sistema de numeración en base 2. Las colecciones se evalúan, pues, en grupos de 2 y en potencias de grupos de 2.

Se puede evaluar una misma colección con diferentes bases de numeración: es el cálculo multibase.

Cualquiera sea la base elegida, se obtienen cifras que indican el número de veces que se encuentra una misma potencia de la base.

Tomemos por ejemplo la colección que en el sistema decimal llamamos veintitrés. Evaluémosla en las bases 2 a 9. Podemos elegir entre dos métodos:

1º *Método de los subconjuntos.*

Evaluación en base 3. Se hacen subconjuntos de 3 elementos. Después se reúnen de a 3 los subconjuntos obtenidos; si es posible, se reúnen estos nuevos subconjuntos en grupos de 3, y así sucesivamente. De este modo se constituyen subconjuntos de la primera, de la segunda, de la tercera potencia de 3...

En la colección elegida podemos hacer:

2 subconjuntos de segunda potencia (2 grupos de 3 veces 3 cada uno),

1 subconjunto de primera potencia (1 grupo de 3),

quedan 2 elementos aislados.

Escribimos en resultado: 2.1.2.

Este resultado no podemos leerlo como si estuviera en base 10 (o sea, doscientos doce). Hay que leerlo: "dos, uno, dos"; lo que significa: 2 unidades de segundo orden, una unidad de primer orden, y dos unidades.

Evaluación en base 5. Se hacen subconjuntos de 5 elementos. Encontramos 4 subconjuntos de 5 elementos y quedan 3 elementos aislados. El resultado es 4.3, que leemos: "cuatro, tres", o sea, cuatro unidades de primer orden y tres unidades.

Evaluación en base 10. Esta vez los subconjuntos son de 10 elementos. Encontramos:

2 subconjuntos de 10 elementos; quedan 3 elementos aislados.

El resultado es 2.3, que esta vez leemos "veintitrés". La colección comprende 2 subconjuntos de primer orden y 3 unidades.

Evaluación en base 2. Se hacen subconjuntos de 2 elementos. Se encuentra un cierto número de ellos, entre los cuales se pueden hacer subconjuntos de 2 grupos de 2, y entre éstos también subconjuntos de 2 grupos de 2 grupos de 2. En definitiva, tenemos:

1 subconjunto de cuarta potencia,

0 subconjuntos de tercera potencia,

1 subconjunto de segunda potencia,

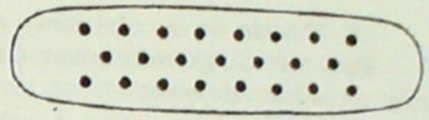
1 subconjunto de primera potencia,

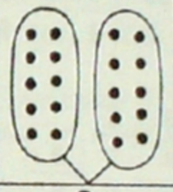
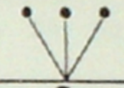
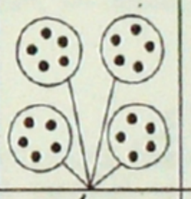
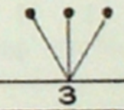
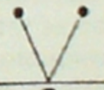
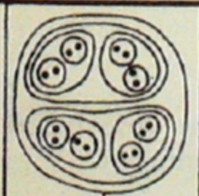
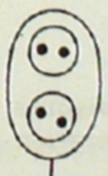
1 unidad aislada.

El número es: 1.0.1.1.1. y se lee: "uno, cero, uno, uno, uno".

Formación, en un conjunto dado y sucesivamente, de subconjuntos con n, n^2, n^3, n^4... elementos y escritura de los números en la base correspondiente

Conjunto inicial:



	Subconjuntos con n^4 elementos	Subconjuntos con n^3 elementos	Subconjuntos con n^2 elementos	Subconjuntos con n elementos	elementos simples
base 10					
				2	3
base 5					
				4	3
base 3					
			2	1	2
base 2					
	1	0	1	1	1

Resumamos la expresión de esta colección decimal veintitrés en las diferentes bases:

base 9: 2.5 (dos, cinco);
base 8: 2.7 (dos, siete);
base 7: 3.2 (tres, dos);
base 6: 3.5 (tres, cinco);
base 5: 4.3 (cuatro, tres);
base 4: 1.1.3 (uno, uno, tres);
base 3: 2.1.2 (dos, uno, dos);
base 2: 1.0.1.1.1 (uno, cero, uno, uno, uno).

2º *Método de las divisiones sucesivas (para los adultos).*

Este método permite pasar de la numeración en base 10 a la numeración en la base deseada.

Volvamos a tomar la colección de 23 elementos. Se divide este número por 5 (base de numeración elegida: 5).

```
23 | 5
 3   4
```

Resultado: 4.3 (cuatro, tres);

en base 3:

```
23 | 3
 2   7 | 3
       1   2
```

Resultado: 2.1.2 (dos, uno, dos);

en base 2:

```
23 | 2
 1   11 | 2
        1   5 | 2
              1   2 | 2
                    0   1
```

Resultado: 1.0.1.1.1 (uno, cero, uno, uno, uno).

Es importante habituar al niño a utilizar las diferentes bases de numeración antes de fijar definitivamente el cálculo en base 10. Para él no es más que una aplicación de la organización de un conjunto en subconjuntos, los cuales son a su vez reagrupados, si es posible. Observemos que el método de las divisiones sucesivas no está a su alcance.

El niño y el número

Esto nos lleva a decir algunas palabras sobre las dificultades que encuentra el niño en la elaboración de la noción de números.

Noción de número

El número es la propiedad de los conjuntos y no de los objetos. Resulta de la abstracción de las cualidades sensibles de la colección de la cual es la propiedad numérica (necesidad de hacer abstracción de las

cualidades perceptivas de los objetos que componen la colección, así como de las relaciones topológicas entre esos elementos).

Esta noción no es inmediata. Se forma lentamente en el espíritu del niño, que debe reconocer, según nos enseñan los psicólogos:

- la conservación de las cantidades, no obstante la variación aparente de sus caracteres perceptivos;
- la invariancia del número.

Lo cual resulta lo mismo que acabamos de expresar en este parágrafo.

Números intuitivos

Los psicólogos designan así a los primeros números, de los cuales el niño tiene la intuición antes de cualquier conocimiento de cálculo.

La cantidad *uno* tiene, desde el comienzo, valor sustantivo (el "uno"), es decir, su sentido cardinal. En este nivel, existe la unidad como opuesta a la pluralidad.

Después aparece la dualidad con la cantidad *dos*.

En este momento, el niño conoce el uno, el dos, y más allá de esto: mucho, varios.

Más tarde aparece, hacia los tres años, la cantidad 3, convenientemente distinguida, y que puede formar cuando se lo piden. Por fin, hacia los cuatro años, la cantidad 4.

Estas cantidades, conocidas antes de cualquier aprendizaje –llamadas, como ya lo hemos dicho, números intuitivos–, no deben dar lugar a "lecciones".

Las operaciones

Las operaciones aritméticas, es decir, aquellas que trabajan con los números enteros positivos (naturales), son el traspaso al dominio de estos números, de las acciones efectuadas con las magnitudes y con los conjuntos.

Se pueden distinguir tres operaciones aritméticas con su respectiva operación inversa:

la adición y su inversa, la sustracción;
la multiplicación y su inversa, la división;
la elevación a una potencia y su inversa, la extracción de una raíz.

3. LÓGICA

El trabajo que hemos presentado en esta obra está destinado, por una parte, a hacer comprender mejor la noción de número, incluso antes de emprender el aprendizaje del cálculo; por otra parte, a hacer que el niño llegue a la lógica.

El principio de no contradicción, la deducción (razonamiento que va de lo general a lo particular), la inducción (operación por medio de la

cual se pasa de las observaciones particulares a una proposición general que las explica), son las herramientas de la lógica.

Sus principales características son la axiomatización (elaboración de un sistema de proposiciones evidentes, admitidas sin demostración y que constituyen la base de una rama de la matemática), la formulación y la simbolización.

Lo que aquí interesa –y basta para el nivel en que nos encontramos– es, por una parte, lo que se encuentra en el capítulo Lógica del programa del bachillerato; por otra, lo que concierne al acceso del niño a la lógica.

Sobre este segundo punto se pueden con provecho, consultar las obras de epistemología genética indicadas en nuestra bibliografía. Así, no nos haremos exageradas ilusiones sobre las posibilidades del niño pequeño que, sobre este punto, está lejos de tener el poder de no contradicción del pensamiento que posee el adulto cultivado. Pero también podrá verse cuántas posibilidades hay en potencia, que no esperan sino desarrollarse por medio del ejercicio, si el adulto puede y sabe guiar las investigaciones por tanteo del niño en este campo. A este respecto, la introducción de la "nueva matemática" o, mejor aún, la nueva orientación que nosotros deseamos dar al aprendizaje del cálculo, ha revelado en los niños muy pequeños posibilidades hasta ahora insospechadas.

APÉNDICE

ESTUDIO CRÍTICO DE ALGUNOS MATERIALES

LOS BLOQUES LÓGICOS[1]

Los bloques lógicos se han concebido para permitir un trabajo metódico y variado sobre los "Conjuntos" y una iniciación a la lógica. Este trabajo es asequible para los niños mayores del jardín de infantes y para los de primer grado de la escuela primaria.

Los bloques, de madera o plástico, son de base "cuadrada", "redonda", "triangular" o "rectangular". Para cada una de estas formas hay dos dimensiones (grandes y pequeñas) y dos espesores (gruesos y finos), y para cada volumen así obtenido, hay tres colores (azul, amarillo y rojo). Esto da por resultado 48 bloques en el "universo de juego". La lista es la siguiente:

– "cuadrados":

1 grande, grueso 1 grande, fino, 1 pequeño, grueso, 1 pequeño, fino	y para cada uno de estos 4 volúmenes de base cuadrada, uno amarillo, uno rojo y uno azul

o sea, 12 bloques de base cuadrada;

– "redondos", "triangulares" y "rectangulares": la misma composición, o sea 12 bloques para cada una de estas formas.

Dicho de otra' manera, tenemos:

– 12 bloques de cada una de las 4 formas;

– 24 bloques finos y 24 gruesos;

– 24 bloques grandes y 24 pequeños;

– 16 bloques rojos, 16 azules, 16 amarillos.

Para distinguir un bloque de los 47 restantes, es necesario precisar 4 de sus cualidades perceptivas, o sea, 4 de sus atributos:

[1] Z. P. Dienes, Edición OCDL, París.

- color, forma (éstos son dos atributos absolutamente verdaderos);
- espesor, tamaño (éstos son dos atributos relativos; un bloque no es "grueso" ni "pequeño" más que con relación a otros bloques; existe la categoría de los 24 gruesos, de los 24 finos...). A decir verdad, el niño no encuentra dificultades en esto; admite que es una convención.

Los 48 bloques están a su disposición en la caja o sobre la mesa.

Estas 4 categorías de atributos sirven de criterio para el agrupamiento de los bloques cuando se constituyen "conjuntos".

1. Objetivo del método

Los bloques lógicos permiten un trabajo mental en el campo de la lógica. La experiencia demuestra que es posible un trabajo válido desde la edad de 5-6 años, sin esperar la adolescencia. Por el contrario, es mejor comenzar precozmente; a los niños les gusta este trabajo.

Los bloques permiten también la adquisición, a través del juego, de nociones fundamentales con respecto a los conjuntos. Este trabajo debe preceder a todo aprendizaje de los números, pues pone en evidencia la noción de número. El número es la propiedad de dos conjuntos equivalentes. Saber construir conjuntos y luego conjuntos equivalentes debe, pues, preceder al trabajo metódico sobre el número.

Los bloques lógicos proporcionan a los niños muy variadas y numerosas situaciones que los obligan a reflexionar; no se debe subestimar la importancia de la actividad mental empeñada en la investigación lógica y matemática. Con los bloques se tratan problemas y situaciones que se volverán a encontrar más tarde en el plano del pensamiento abstracto. De este modo se habrá facilitado su construcción.

Finalmente, los niños son impulsados a expresar sus descubrimientos en un lenguaje bien preciso que emplea ya los términos del vocabulario de la lógica; las herramientas del pensamiento: conjunciones, alternativas, simultaneidad, necesidad, exclusión, etc., pasan en forma totalmente natural al vocabulario corriente de los niños que juegan en pequeños grupos y con su maestra. Este vocabulario no está calcado sobre el lenguaje corriente que ya poseía el niño, sino que ha surgido por necesidad y por comprensión de las situaciones en las que se han visto envueltos los pequeños jugadores.

2. Juegos preliminares

Tienen por finalidad hacer que el niño conozca bien los bloques que va a utilizar. Evidentemente, es necesario que llegue a tener una gran familiaridad con las formas y los tamaños (dimensión y espesor); los colores no plantean problemas a esta edad. Sería un error creer que estos

juegos de presentación de los bloques son fastidiosos; por el contrario, resultan muy entretenidos.

Citemos el *juego de la descripción*: consiste en describir cada uno de los bloques, precisando los 4 atributos perceptivos: "Es un bloque redondo, amarillo, pequeño, fino...". Cada uno por turno toma un bloque y lo describe.

La inversa es la elección de un bloque entre los 48, que corresponda a la descripción: "Busca un bloque que sea...".

Aquí se puede hacer el juego más variado, no fijando más que 2 ó 3 atributos: "Busca todos los bloques cuadrados, amarillos y grandes" (hay 2: el grueso y el fino).

O también: "Busca todos los bloques redondos y rojos" (hay 4: el grande fino, el grande grueso, el pequeño fino y el pequeño grueso). O incluso: "Busquen todos los bloques redondos y grandes" (hay 6: 3 redondos, grandes, gruesos, 3 redondos, grandes, finos, es decir, de cada uno hay 3 colores), y así sucesivamente.

Citemos los *juegos con diferencias o semejanzas*: son verdaderos juegos de sociedad, que reúnen a 6 u 8 niños, de pie, alrededor de una mesa. Se trata de hacer, como en el juego de dominó, largas cadenas de bloques, colocando uno junto a otro los bloques que tienen entre sí una, dos, tres diferencias o semejanzas de atributos. El ejercicio es más difícil de lo que se podría creer y da tema a discusiones animadas. Así: el bloque redondo, grueso, grande, rojo; el bloque cuadrado, grueso, pequeño, rojo (dos diferencias: la forma, el tamaño; dos semejanzas: el espesor, el color), etc.; el bloque redondo, fino, pequeño, rojo, etc.

De vez en cuando se descubre un error cometido varios bloques atrás del que se está colocando en ese momento; es necesario, entonces, "releer", "corregir" la cadena.

Como se ve, en estos juegos se encuentra un factor de interés debido al juego colectivo y, además, un trabajo de razonamiento: "Yo puedo hacer variar el color o el tamaño..."; o bien: "He hecho variar el color y la forma, hace falta todavía hacer variar otro atributo: el espesor o el tamaño". Y como se juega entre varios, es indispensable tener en cuenta a los otros, sus acciones, sus posibles errores.

Una variante muy difícil y que sin embargo los niños de las divisiones de los mayores del jardín de infantes logran realizar, es el *juego en cruz*. Se parte de una pieza central. A partir de este bloque se construye, por ejemplo, una serie con una diferencia en el sentido izquierda-derecha, y otra serie con dos diferencias en el sentido arriba-abajo. Los dos primeros cruces se logran bastante bien, pero luego el juego se complica. La experiencia demuestra que los niños juegan apasionadamente.

En este momento ya conocen los 48 bloques perfectamente. Se puede entonces pasar a la constitución de conjuntos.

3. Constitución de conjuntos

El número de bloques y sus 4 atributos permiten la constitución de conjuntos variados y numerosos. La maestra pide que se constituya tal conjunto... Aquí interviene la precisión de la expresión:

—Hagan el conjunto de los bloques rojos, de los bloques finos; es muy fácil.

—Hagan el conjunto de los bloques que son a la vez finos y rojos; de los bloques que son rojos o cuadrados (lo que no es lo mismo que rojos *y* cuadrados)...

Luego se construyen sobre la mesa 2 conjuntos: el de los bloques rojos, por ejemplo, y el de los bloques gruesos. Los niños se encuentran frente a un problema, pues existen bloques que son a la vez rojos y gruesos (hay 6). ¿Dónde colocarlos? Algunos niños los ponen con los rojos, pero son gruesos, y otros los ponen con los gruesos, pero son rojos. La búsqueda dura varios días. Los niños encuentran soluciones prácticas, colocándolos, por ejemplo, entre los dos lugares o cajas que actúan de recipientes. Ellos sienten lo insólito de la situación; están a punto de descubrir lo que se denomina la parte común de dos conjuntos, o sea, la intersección.

A partir de este momento, puede dársele a los niños un conjunto y pedirles que busquen lo que hay que poner en un segundo conjunto para que tenga con el primero una intersección, o para que no la tenga.

Continuando en el mismo sentido y complicando el ejercicio, se llega a hacer construir a los niños tres conjuntos con intersecciones, es decir, un diagrama de Venn con 3 atributos: así, los bloques redondos, los bloques azules y los bloques finos dan las tres intersecciones siguientes, tomando los conjuntos de a 2:

- los bloques redondos y azules;
- los bloques redondos y finos;
- los bloques azules y finos.

En el centro del diagrama se encuentra la intersección de los tres conjuntos; en ella hay dos bloques: los dos que son a la vez redondos, azules y finos; uno de ellos es grande y el otro pequeño. Finalmente, en el exterior de los tres conjuntos, o sea, fuera del diagrama, se encuentran los bloques de la caja que no son azules, ni redondos, ni finos. También se puede decir que éstos son bloques no azules, no redondos, no finos... En efecto, porque no tienen esas cualidades es que se han excluido del diagrama.

Las relaciones entre varios conjuntos pueden ser relaciones de inclusión. Por ejemplo, se constituye el conjunto de los bloques rojos; en el interior del mismo se separan los bloques gruesos (la mitad de los bloques rojos son gruesos y la mitad son finos). Entre los bloques gruesos se separan los pequeños (la mitad de los bloques rojos y gruesos son grandes y la mitad son pequeños).

4. De los conjuntos al número

A. OPERACIONES CON LOS CONJUNTOS

Un conjunto puede organizarse. Entre los elementos de un conjunto se pueden separar aquellos que tienen una propiedad común, no poseída por todos.

Sea el conjunto de los bloques cuadrados, se lo puede organizar en tres subconjuntos según el color de los bloques cuadrados, o también en dos subconjuntos, según el espesor o el tamaño.

O también, en el conjunto de los bloques rojos se aísla el subconjunto de los bloques rojos, pequeños, cuadrados, finos.

Con estos conjuntos y subconjuntos se pueden estudiar las relaciones de la parte con el todo, ejercitar las operaciones manuales de sustracción y de unión. Se observa el conjunto, el o los subconjuntos, el complemento del conjunto (en el universo de juego) o de los subconjuntos.

B. COMPARACIÓN ENTRE CONJUNTOS

Si dos o varios conjuntos son muy diferentes en cuanto al número de sus elementos, resulta bien visible que uno de ellos es numéricamente superior al otro. En éste hay más (o menos), dicen los niños.

Pero si el número de elementos es parecido o igual, es necesario practicar la relación término a término: a cada elemento de uno de los conjuntos se le hace corresponder un elemento del otro. Si al fin de la operación no queda ningún elemento aislado en ninguno de los dos conjuntos, se dice que son equipotentes. De este modo el número aparece como una propiedad de los conjuntos de objetos y no como una propiedad de los objetos. Los bloques lógicos permiten la evaluación de los conjuntos por comparación y relación término a término de los elementos de éstos.

Los bloques lógicos permiten además muchos otros descubrimientos. Nuestro campo de acción se limita a lo que pueden aportar a los niños menores de 7 años. Esto ya es bastante considerable. Podemos agregar que los niños sienten un placer muy grande en practicar estos juegos, se apasionan, discuten entre ellos, reflexionan... y comprenden.

LOS NÚMEROS DE COLOR

Material Cuisenaire[2]

Los números de color son reglitas presentadas en una caja con diez compartimientos, cada uno de los cuales contiene reglitas del mismo color e igual longitud.

[2] Editores: *Delachaux et Niestlé*.

La pieza más pequeña es, en realidad, un cubo cuya arista es la unidad de longitud con la cual se han construido las demás. La segunda es un paralelepípedo de base igual a la del cubo y de altura doble, después, la tercera es de altura triple, etc., hasta llegar a la altura igual a 10 veces la arista del cubo unidad.

Para simplificar la exposición, diremos: reglita "uno", "seis", "nueve"...

Las reglitas son de color, de la siguiente manera:

- el cubo pequeño, o reglita uno, es blanco;
- las reglitas 2, 4, 8 son: roja, rosada,[3] marrón (gama de los rojos);
- las reglitas 3, 6, 9 son: verde claro, verde oscuro, azul (gama de los verde-azul);
- las reglitas 5 y 10 son: amarilla y anaranjada (gama de los amarillos);
- la reglita 7 es negra.

Señalamos a continuación todo el provecho que se puede sacar de estas familias de colores:

Blanco y negro son únicos (números primos, 1 y 7).

Las familias: 2 - 4 - 8; 3 - 6 - 9; 5 - 10, ponen en evidencia los dobles, los triples, las potencias 2 y 3.

Estas reglitas permiten primero los juegos de construcciones: alinear, hacer pequeñas realizaciones geométricas, apilar, construir formaciones en cuadrados, en cubos, en paralelepípedos...

Durante una primera etapa, los niños juegan como quieren. Sólo se les habla de colores, jamás de los números representados.

De este modo, pueden construir "escaleras": noción de orden creciente y decreciente. Vemos así que se pueden formar escaleras cuyos peldaños son 1, 2, 3... Se igualan los peldaños entre sí con tantos cubos blancos como sean necesarios... (imágenes del complemento, de la diferencia) [1].

Una de las actividades que se les ocurre en seguida es hacer "trenes" con las reglitas, alineando varias de ellas, análogas o diferentes. Observan que los trenes son más largos, menos largos o tan largos como otros. Los niños "leen" los trenes: una reglita roja, una amarilla, una verde... [2].

Al comparar los trenes fabricados, haciéndolos coincidir, ven que el tren rojo + verde + blanco es más corto que el tren rojo + marrón + blanco [3]; que el tren rojo + blanco + verde es igual al tren verde + rojo + blanco o al blanco + verde + rojo... [4].

Cuando la maestra se los pide, construyen trenes tan largos o más largos que una reglita o que un conjunto de varias reglitas.

En esta primera fase, en la que no ha aparecido ningún nombre de número todavía, se han manejado, sin embargo, las siguientes nociones:

[3] Lila en algunos equipos de reglitas de los que se venden en el comercio.

- noción de *orden*;
- noción de *desigualdad* y luego de *igualdad*;
- noción de *equivalencia*;
- noción de *estructura algebraica*: un elemento puede siempre reemplazarse por otros y viceversa.

Los juegos que conducen a colocar las reglitas, no ya en línea, sino en superficies y en volúmenes, muestran:

- que ciertas piezas agrupadas forman cuadrados o rectángulos, cubos o paralelepípedos;
- que existen superficies y volúmenes equivalentes: dos reglitas amarillas colocadas una al lado de la otra tienen la misma superficie que cinco reglitas rojas también puestas una junto a otra [5]. Lo mismo se comprueba cuando se forman volúmenes.

En una segunda etapa los nombres de los colores se reemplazan por los nombres de los números, dándole el número 1 a la reglita blanca. Los niños, poseedores de una cierta experiencia, gracias a las manipulaciones de la etapa precedente, descubren múltiples propiedades de las primeras cantidades numéricas.

Volviendo a considerar los ejemplos citados anteriormente, que hemos numerado [1], [2], etc., y traduciéndolos al lenguaje de los números, tendremos:

[1]: escaleras 1, 2, 3, 4...
1, 3, 5, 7... Los peldaños se rellenan si se agregan 2 a cada uno.
1, 4, 7... Los escalones se rellenan si se agregan 3, etc.

[2]: El tren amarillo + rojo + verde se lee: $5 + 2 + 3$.

[3]: Los trenes desiguales citados son: $2 + 3 + 1$ y $2 + 8 + 1$.

[4]: Los trenes iguales son: $2 + 1 + 3$; $3 + 2 + 1$; $1 + 3 + 2$.

[5]: Las superficies citadas son: $5 + 5$ y $2 + 2 + 2 + 2 + 2$.

Imaginemos ahora que hemos decidido que la reglita blanca unidad valga no ya 1 sino 3. Tendremos entonces la siguiente escala numérica:

- reglita blanca: 3; roja: 6; verde: 9; etc.

Imaginemos, por el contrario, que sea la reglita verde la que valga la unidad; la escala numérica será:

- reglita blanca: $\frac{1}{3}$; roja: $\frac{2}{3}$; verde: 1; rosada: $\frac{4}{3}$; amarilla: $\frac{5}{3}$; verde oscuro: 2, etc.

Vemos, pues, qué útil es este material para hacer comprender el *cambio de base de la numeración* y las *fracciones*. Éste es, a nuestro criterio, su gran mérito.

No está, por otra parte, concebido sólo para usarse en el jardín de infantes y en primer grado; también se emplea en los demás grados de la escuela primaria, en la enseñanza secundaria e incluso en la universidad.

Entre los 3 y 7 años, además de lo que hemos expuesto más arriba, permite:

- la comprensión de la *conservación de las cantidades*, las *relaciones de la parte con el todo*, las *operaciones* aritméticas y el enunciado de los resultados en diversas bases numéricas;
- la composición de las familias de:
  - *sumas equivalentes* (propiedades asociativa y conmutativa de la suma);
  - *diferencias equivalentes* (la misma diferencia entre dos cantidades numéricas, o sea, entre todos los pares que tienen entre sus miembros esta misma diferencia);
  - *productos equivalentes:* factores que dan el mismo resultado numérico, pero que traducen dos situaciones contrarias (2 repetido 4 veces y 4 repetido 2 veces);
  - *cocientes* o *fracciones equivalentes*, es decir, las series:

$$\frac{3}{6}, \frac{2}{4}, \frac{5}{10} \ldots \text{ o: } \frac{6}{3}, \frac{10}{5}, \frac{4}{2} \ldots$$

Vemos, pues, que por medio de las reglitas Cuisenaire –o números de colores– el niño experimenta, con una actividad sensorio-motriz anterior al número, todas las propiedades de las cantidades numéricas. Respecto al número, comprende su estructura, la maneja incluso, la evalúa según el valor de la unidad (número de referencia). Comprende las propiedades fundamentales de las operaciones aritméticas.

De una etapa a la otra, pasa de la investigación empírica a la elaboración de un conocimiento matemático, por medio de un esfuerzo de sistematización; se expresa primero en lenguaje descriptivo-perceptivo, luego en lenguaje simbólico oral, después escrito.

Podemos, también, hablar de una construcción matemática que se realiza en la mente del niño, principalmente en las diversas direcciones que permite este material.

EL MÉTODO DISCAT[4]

Este material fue creado en Ginebra para la "Maison des Petits" del Instituto J. J. Rousseau, por las Srtas. Audemars y Laffendel, bajo la dirección de Claparède y de J. Piaget.

Se trata de un material matemático en su concepción y en su construcción: el orden es el principio esencial; en él se practican la medida y la geometría tanto como los números.

A propósito de cada uno de los juegos que lo componen, los niños sienten profundamente el llamado a la acción, y no hablan más que de "hacer" y emprenden alegremente las experiencias tan originales como variadas, que abarcan múltiples campos de las actividades matemáticas.

[4] Editores: *A. Colin - Bourrelier.*

Lo característico de un buen material es poner orden en las experiencias, simplificar y organizar los problemas planteados por la vida. El material Discat puede desempeñar ese papel. Pero es también un juego, a veces un juguete, que plantea problemas de lógica al que lo utiliza. Permite tanto las investigaciones individuales como las colectivas.

Descripción de los diferentes materiales que lo componen

I. LAS COLUMNAS DE EVALUACIÓN

Cuatro columnas constituidas por esferas, cubos, paralelepípedos y ovoides, respectivamente, en 10 dimensiones crecientes. Cada cuerpo está perforado según un eje central y puede ensartarse en una varilla vertical.

Las columnas permiten el ordenamiento creciente o decreciente de los volúmenes, la relación de los volúmenes de igual rango en las series, y dan al niño las primeras impresiones de tamaño, forma, orden.

II. LAS PIRAMIDES

Están compuestas por "rebanadas" centrales, de caras paralelas, de los volúmenes descritos en el punto anterior. También con una perforación central, pueden ensartarse en una varilla vertical.

Se trata ahora de clasificar las superficies en orden creciente y decreciente.

Si todas estas placas están mezcladas, es necesario primero ordenarlas de acuerdo con la forma: cuadrado, redondel, óvalo, rectángulo.

Es un juego más difícil que el precedente.

Para designar el ordenamiento de las piezas, en los juegos I y II, los niños utilizan el número ordinal: primero, último, segundo, décimo...

III. LOS 66 BLOQUES

Estos bloques son paralelepípedos (salvo el primero, que es un cubo). Todos tienen la misma superficie de base, y las alturas van tomando valores de 1 a 20 veces la medida de la arista de dicha base. En cada altura hay un trazo lateral marcado, igual a la arista de la base, lo que hace que la unidad de división sea visible, de 1 a 20.

Los niños utilizan los bloques como piezas de juego para construcciones, mucho antes de pensar en realizar equivalencias entre 2 o varios bloques colocados uno a continuación del otro, y un bloque suma de aquéllos.

En una etapa posterior, estos bloques permiten la suma y la diferencia (de 1 a 20), el estudio de los dobles y de las mitades.

También se pueden clasificar por longitud creciente.

IV. EL ÁBACO

Está formado por 55 bolitas de igual diámetro, todas perforadas según el diámetro, y pintadas de 10 colores, de manera tal que haya 1 blanca, 2 marrones, . . . 10 rojas.

Estas bolitas se ensartan en 10 varillas, de longitud creciente de 1 a 10, siendo la unidad de longitud el diámetro de una bolita.

Después de haberse entretenido en ensartar las bolitas en las varillas, el niño se dedica a asociar la longitud de cada varilla con el número de bolitas de un mismo color que la llenan. Obtiene así series verticales u horizontales, cada una de un mismo color, de 1 a 10 bolitas.

De este modo aparecen en sucesión los números de la primera decena, y la comparación entre ellos resulta fácil, como así también su estructura.

V. LAS PILAS DE DISCOS

Los discos son círculos de madera, relativamente de poco espesor, perforados en el centro. Hay 10 de cada color (los mismos colores que los de las bolitas del ábaco) y cada serie de 10 puede ensartarse en 10 varillas de igual longitud.

Son numerosos los ejercicios y juegos que pueden hacerse con estas pilas de discos; permiten realizar todas las operaciones aritméticas con los 100 primeros números.

VI. LA PLANCHA CON 100 BOLITAS

Cien bolitas, análogas a las del ábaco, 10 de cada color, perforadas según el diámetro, pueden ensartarse en 100 cortos vástagos (especie de clavos sin cabeza), presentados sobre una plancha de madera, en 10 filas de 10 vástagos cada una.

Se pueden realizar las mismas operaciones que se mencionan en el parágrafo anterior, pero presentadas "en superficie"; las sumas y restas con transporte de unidades, composición de decenas, etc., resultan claramente comprensibles.

También se pueden agrupar las bolitas de manera que representen multiplicaciones y aún potencias: cuadrados, cubos.

VII. LOS CONSTRUCTORES

El juego tiene la apariencia de un juego de construcciones; las piezas tienen orificios en los cuales pueden introducirse varillas que dan solidez a las construcciones. Algunas poleas le dan más atractivo.

Los niños pueden copiar modelos o realizar las construcciones a partir de croquis o dibujos, respetando las dimensiones. Constituye una iniciación a la geometría y un cultivo de la observación y de la memoria de las formas.

VIII. LAS SUPERFICIES

Es un juego de mosaicos de cartón, con numerosas formas y en varias dimensiones. Los colores son variados.

El niño se puede dedicar a toda clase de realizaciones geométricas, donde el factor estético no está excluido.

Nota. La dimensión básica: el diámetro de las bolitas, se encuentra en todas las piezas del juego, o bien uno de sus múltiplos; así, todas se pueden emplear en cualquier construcción.

Estudio del valor de este material

I. DE LA EXPERIENCIA SENSORIO-MOTRIZ A LA ABSTRACCIÓN

. . . mediante un material coloreado, manuable, que ejercita la vista, el tacto, el sentido de apreciación (colores, longitudes, volúmenes, formas, etcétera).

Las experiencias sensorio-motrices se hacen progresivamente y con seguridad. Estas experiencias, subrayémoslo, son de carácter esencialmente matemático:

- investigación de equilibrio: constructores, bloques;
- investigación de simetría: constructores, bloques, superficies, plancha con las 100 bolitas;
- investigación de apareamiento de formas, de tamaños, de colores;
- ordenamiento de cantidades continuas y discontinuas.

El número se *siente* a través de diversos aspectos perceptivos:

- los ábacos diversos: horizontales, verticales, oblicuos, de bolitas, de bloques, de discos;
- la evolución de cantidades continuas a cantidades discontinuas se hace por medio de la comparación de los bloques con las bolitas, los discos, etc.;
- la disposición de las bolitas sobre la plancha para 100 bolitas permite las relaciones entre el número y la superficie ocupada por las bolitas.

La representación mental se desprende de la regla de juego que se da el niño: poco a poco, el tanteo cede lugar a la previsión, a la imaginación de los resultados esperados. Ve sus propios errores y los de sus compañeros; ejercita la memoria.

Las experiencias se consolidan en su mente gracias a la representación gráfica siempre posible (y recomendada) de las realizaciones hechas con el material (dibujos y "collages").

Finalmente, el niño llega a ser capaz de interpretar figuras (materiales o numéricas) y de analizarlas.

II. SENTIDO DE LA COMPARACIÓN

Este sentido se ejercita en numerosos ordenamientos:

- columnas (alturas, volúmenes);
- bloques: longitud, altura, valor numérico;
- ábaco: color, altura, cantidad;
- discos: altura de las pilas, superficie ocupada por los discos, cantidades.

Las comparaciones conducen el pensamiento hacia las operaciones reversibles por la comparación de 2 o varios términos, por la relación término a término. Esta última introduce la noción de igualdad entre dos colecciones.

El ábaco permite comparar una colección numérica con otra, situarla en la sucesión de las colecciones numéricas crecientes (o decrecientes), e inicia al niño en la noción de orden.

III. NOCIÓN DE ORDEN

El niño puede imaginar la sucesión regular de las cantidades gracias a las columnas, a las pequeñas pirámides, que representan una progresión regular de volúmenes y de superficies.

En el ábaco, toda nueva cantidad se engendra por adición de una unidad a la colección anterior. Aquí el orden es tan evidente, que los niños construyen "ábacos" con los discos, con los bloques, con la plancha de 100 bolitas.

IV. NOCIÓN DE MEDIDA

Ésta aparece por:

- la comparación de superficies, de longitudes, de volúmenes;
- el ordenamiento de superficies, de longitudes, de volúmenes;
- las evaluaciones en las que se siente la necesidad de una unidad patrón.

Los ejercicios que imponen la necesidad de tener una impresión de los bloques, de los discos, de las superficies, etc. (marcando el contorno de la pieza con el lápiz sobre un papel), conducen a registrar n veces esta impresión patrón.

V. EL NÚMERO ORDINAL

Se lo emplea permanentemente en los juegos de clasificación ordenada: columna, pirámides, bloques, ábaco (número de bolitas que contiene el ábaco).

VI. ESTRUCTURA DE LOS NÚMEROS

Ésta se descubre a través de las combinaciones de unidad, de las operaciones ocasionadas por los juegos individuales o colectivos con los discos, por las manipulaciones con la plancha de las 100 bolitas del ábaco.

VII. EL NÚMERO COMO RELACIÓN

Se desprende de los juegos con los bloques y también de los paralelos establecidos entre las cantidades de discos, de bolitas, de bloques.

VIII. LA NOCIÓN DE IGUALDAD

Aparece en las comparaciones, los equilibrios, las simetrías y composiciones decorativas; aparece también cuando se establecen relaciones término a término entre dos colecciones (bolitas y discos), en las comparaciones, en los inventarios, en las verificaciones de un juego con otro.

IX. LAS OPERACIONES

Aparecen como la traducción de situaciones reales, muchas veces experimentadas:

- adición de discos para formar una pila, de bolitas para completar la plancha, de bloques para construir, o por el placer de adicionar;
- sustracción, en sus tres aspectos: expresión de una diferencia por comparación (bloques, varillas del ábaco), inventario de los elementos que faltan (bloques), sustracción de elementos y expresión del resto (discos, ábaco, bloques);
- particiones en partes iguales y divisiones: de cantidades continuas, volúmenes del juego de constructores y de las superficies; de cantidades discontinuas, discos y bolitas;
- multiplicación: construcciones con bloques iguales, composición de motivos decorativos repetidos, juegos con los dados y con los discos.

El lenguaje escrito y la representación gráfica permiten al niño dejar una constancia de sus experiencias, representarlas y comunicarlas, todo ello gracias al dibujo, al "collage", luego a las cifras escritas y a las operaciones, cuando se hace sentir la necesidad del símbolo.

La exposición rápida que acabamos de hacer de este método, con un material tan variado y tan rico de posibilidades de juego y de descubrimientos demuestra que todo esto está de acuerdo con lo que nosotros pensamos que se puede dar como "programa" de experiencias para los niños de 3 a 7 años.

BIBLIOGRAFÍA

1. Información psicológica y problemas generales

J. Piaget y otros

— *Classes, relations, nombres* (Vrin).

— *La genèse du nombre chez l'enfant* (Delachaux et Niestlé).

— *Problèmes de la construction du nombre* (Presses Universitaires de France).

— *La genèse des structures logiques élémentaires* (Presses Universitaires de France).

En estas obras, Piaget y sus colaboradores siguen paso a paso las dificultades que encuentra el niño en la elaboración de nociones necesarias para la comprensión del número.
Deja al lector las respuestas a numerosas y minuciosas encuestas; analiza el contenido de las mismas y concluye con algunas páginas esenciales.

Gréco y Grize, Papert, Piaget

— *Le problème de la construction du nombre* (Presses Universitaires de France).

Gréco y Manf

— *Structures numériques élémentaires* (Presses Universitaires de France).

En la serie de los estudios de epistemología genética, estas dos importantes obras presentan la forma y los resultados de investigaciones realizadas sobre el acceso del niño a las nociones aritméticas y al pensamiento lógico.

Warusfel

— *Les nombres et leur mystère* (Seuil: "Le Rayon de la science").

Esta pequeña obra recuerda las nociones indispensables sobre la numeración, las diferentes categorías de los números; está escrita con la perspectiva de la matemática actual.

F. Le Lionnais

— *Les grands courants de la pensée mathématique* (Blanchard).

Esta obra permite ubicar los descubrimientos y las teorías matemáticas en la evolución de las ideas a lo largo de los siglos. Se presenta en forma de una serie de artículos variados que proporcionan ideas nuevas e interesantes sobre la historia y la utilización de la matemática.

2. Iniciación en la matemática moderna

F. Dupont

— *Apprentissage mathématique* (Sudel).

L. Félix

— *L'aspect moderne des mathématiques* (Blanchard).

— *Mathématiques modernes et enseignement élémentaire* (Blanchard).

Escritas por un profesor de matemática, estas obras han sido las primeras en dar la nueva orientación de la enseñanza en este campo.

S. Papy

— *Mathématique moderne* (Didier).

Manual destinado a la enseñanza de segundo grado, escrito por un profesor belga.

J. Lelong-Ferrand

— *Les notions mathématiques de base dans l'enseignement du second degré* (A. Colin).

— *Cours de pédagogie des mathématiques donnés à la Faculté des Sciences de Paris* (C.A.P.E.S.).

I. Adler

— *Initiation à la mathématique d'aujourd'hui* (Office central de diffusion et de librairie).

Introducción a las ideas nuevas en matemática. Esta obra ha sido escrita para el "lector medio". Presenta ejercicios que permiten seguir las explicaciones dadas en el transcurso de los diferentes capítulos.

A. Revuz

— *Mathématique moderne, mathématique vivante* (Office central de diffusion et de librairie).

Exposición simple y clara de la matemática moderna, muy accesible a los no especialistas.

Z. P. Dienes

— *Construction des mathématiques* (Presses Universitaires de France).

— *La mathématique moderne dans l'enseignement primaire* (Office central de diffusion et de librairie).

— *Comprendre la mathématique* (Office central de diffusion et de librairie).

— *Les premiers pas en mathématique* (Office central de diffusion et de librairie).

Tres pequeños volúmenes: Lógica y juegos lógicos; Conjuntos, números y potencias; Explotación del espacio y práctica de la medida. Estas obras exponen las ideas del profesor Dienes sobre el aspecto pedagógico de la nueva concepción de la matemática. Explican el provecho que puede sacarse del material especialmente concebido por el autor.

3. Documentos pedagógicos

G. Mialaret y otros

— *L'enseignement des mathématiques* (Presses Universitaires de France).

M. Goutard

— *Les mathématiques et les enfants* (Delachaux et Niestlé).

La obra expone una experiencia pedagógica seria; muestra las posibilidades, muy vastas, que tienen los niños para la utilización de los números.

J. Bandet y otros

— *Les débuts du calcul* (C.P.M., A. Colin-Bourrelier).

La obra contiene diversos artículos, en particular un capítulo sobre "aprendizaje y conocimiento de las primeras nociones del cálculo" (J. Bandet); "psicología de los comienzos del cálculo" (G. Mialaret); "cuando los pequeños del jardín de infantes juegan a los conjuntos" (J. Bandet).

— *Dossiers pédagogiques*, en *"École maternelle française"*, revue, Éd. A. Colin-Bourrelier.

Octubre 1964: "L'école maternelle et les ensembles" (J. Bandet).
Setiembre 1966: "L'enfant et les mathématiques" (J. Bandet)
Octubre 1966 y noviembre 1966: "Le calcul dans la vie quotidienne" (R. Sarazanas).
Enero 1967: "La méthode Dienes" (A.-M. Gillie).
Febrero 1967: "La méthode Cuisenaire" (L. Guenot).
"La méthode Discat" (M.-L. Madre).

Debe señalarse que diversos centros regionales de documentación pedagógica publican breves estudios sobre las experiencias en marcha.

La EDITORIAL KAPELUSZ, S.A., dio término a la primera edición de esta obra, en el mes de agosto de 1969, en el Establecimiento Litográfico Alloni Hnos., S.A., Centenera 1436/52 — Buenos Aires.

K - 9853

siempre DINAMICAMENTE
identificada
con el propósito
de expandir la cultura

EDITORIAL
KAPELUSZ