Felipe Maykot

Estudo da matéria estelar no contexto de um modelo hadrônico relativístico incluindo a interação gravitacional

Florianópolis
2014

Felipe Maykot

Estudo da matéria estelar no contexto de um modelo hadrônico relativístico incluindo a interação gravitacional

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da UFSC, para a obtenção de Título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Sidney dos Santos Avancini

Florianópolis
2014

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Maykot, Felipe
Estudo da matéria estelar no contexto de um modelo hadrônico relativístico incluindo a interação gravitacional / Felipe Maykot ; orientador, Sidney dos Santos Avancini - Florianópolis, SC, 2014.
54 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Física.

Inclui referências

1. Física. 2. Estrelas de nêutrons. 3. Relatividade geral. 4. Modelo sigma-omega-rho. I. Avancini, Sidney dos Santos. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, à minha família. Seu amor e incentivo foram essenciais em todas as etapas da minha vida.

Aos meus amigos, pelos tantos momentos de felicidade que me proporcionaram.

Ao Prof. Dr. Sidney dos Santos Avancini por sua orientação durante o desenvolvimento deste trabalho e ao Prof. Dr. Celso de Camargo Barros Junior por sua contribuição em discussões cruciais.

Resumo

Desenvolvemos a formulação que um modelo arbitrário, descrito por uma densidade Lagrangeana compatível com a relatividade restrita, deve satisfazer quando tratado num espaço-tempo curvo. Aplicamos esta formulação ao modelo $\sigma - \omega - \rho$ para descrever uma estrela de nêutrons em equilíbrio, sujeita às interações nuclear forte, nuclear fraca, eletromagnética e gravitacional. As equações de Euler-Lagrange são obtidas para um espaço-tempo com simetria esférica com o auxílio das aproximações de campo médio e de Thomas-Fermi à temperatura $T = 0$ e desprezando-se o mar de Dirac. Expressões relacionando os potenciais químicos das diferentes espécies de férmions são obtidas exigindo-se o equilíbrio termodinâmico e o equilíbrio β.

Palavras-chave: Estrelas de nêutrons; Relatividade geral; Modelo $\sigma - \omega - \rho$

Abstract

We develop the formalism that an arbitrary model, described by a Lagrangian density compatible with special relativity, has to obey when treated in curved spacetime. We apply this formalism to the $\sigma - \omega - \rho$ model to describe a neutron star at equilibrium, taking in to account the strong, weak, electromagnetic and gravitational interactions. The Euler-Lagrange equations are obtained for a spherically symmetric spacetime with the aid of the mean field, Thomas-Fermi and no-sea approximations at temperature $T = 0$. Expressions relating the chemical potentials of the different fermion species are obtained through the requirements of thermodynamical equilibrium and β-equilibrium.

Keywords: Neutron stars; General relativity; $\sigma - \omega - \rho$ model

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Estrelas de nêutrons são objetos astronômicos extraordinários. Possuem massas comparáveis à do Sol contidas em regiões muitas vezes menor que o volume ocupado pela Terra. Giram com incríveis velocidades, arrastando o espaço-tempo junto consigo à medida que o fazem. Valores típicos de massa e raio estão na ordem de 1,5 massas solares e 10km, respectivamente [1].

Justamente por serem objetos com características tão extremas é que há grande interesse em estudá-las. Elas são, em muitos aspectos, laboratórios naturais onde as teorias físicas atuais podem ser colocadas à prova. A altíssima densidade no interior de uma estrela de nêutrons faz com que a física de partículas seja necessária, ao mesmo tempo em que torna indispensável o uso da teoria gravitacional de Einstein, a relatividade geral, para a descrição acurada do que acontece em seu interior.

Propostas pela primeira vez em 1934 por Baade e Zwicky [2], começaram a ser detectadas apenas nos meados da década de 1960. Geralmente na forma de pulsares, estrelas de nêutrons altamente magnetizadas que emitem feixes de radiação eletromagnética intensos em intervalos de tempo regulares. Desde então, muitas outras foram observadas.

Há uma farta literatura científica expondo incontáveis métodos para a descrição destas estrelas. Algumas, dentre as muitas características que diferenciam estes métodos, são: a composição estelar; as interações incluídas na sua descrição; como estas interações são modeladas.

No entanto, uma característica ubíqua é a maneira como a gravitação é incluída. O sistema é descrito, através de uma formulação Lagrangeana, como uma matéria nuclear e infinita num espaço-tempo plano. Ou seja, ao usar uma geometria plana pré-definida, já se está descartando a gravidade da formulação inicial do problema. Então, todas as equações de movimento são resolvidas e uma equação de estado é obtida. Só depois de calculada a equação de estado é que a gravidade é introduzida, através da equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff [3].

O negligenciamento da interação gravitacional é geralmente justificado por sua magnitude ser muitas ordens de grandeza inferior a das demais interações envolvidas. Acreditamos, no entanto, que descartá-la de maneira tão prematura pode ocultar fenômenos importantes e levar a suposições inconsistentes. A suposição da neutralidade local das cargas [1], por exemplo, comumente adotada na literatura, foi criticada por Ruffini et al [4], pois a consideram inconsistente com um tratamento totalmente dentro do âmbito da relatividade geral.

Antes de desprezar a gravitação, gostaríamos de analisar qual é seu efeito nas equações de movimento dos campos e como ela afeta o equilíbrio termodinâmico dos férmions. Para tanto, devemos primeiro desenvolver o formalismo necessário para o tratamento adequado deste problema dentro do âmbito da relatividade geral, sendo este um dos objetivos principais deste trabalho. Esse desenvolvimento se faz necessário, pois a literatura do assunto carece de textos que abordem esse tema de maneira consistente e sistemática e que discutam as dificuldades que surgem ao adicionarmos este grau de liberdade ao espaço-tempo. Para realizar estes objetivos, organizamos o texto da seguinte maneira:

Capítulo 2 - Fundamentamos, através do princípio variacional e de postulados da relatividade geral, a formulação Lagrangeana de campos arbitrários no espaço-tempo curvo. Deduzimos as equações de Einstein e mostramos a forma adquirida por elas em uma geometria com simetria esférica.

Capítulo 3 - Calculamos o tensor energia-momento de alguns campos de interesse e discutimos sua relação com tensor o energia-momento canônico, utilizado na teoria de campos no espaço-tempo plano.

Capítulo 4 - Escolhemos um modelo já utilizado na literatura para a descrição da matéria estelar e o estendemos ao âmbito da relatividade geral. Deduzimos as equações de Euler-Lagrange no espaço-tempo curvo para os campos deste modelo. Utilizamos o tensor energia-momento para calcular a densidade de energia do sistema e assim obter as relações de equilíbrio termodinâmico. Impomos a condição de equilíbrio β.

Capítulo 2

Relatividade Geral

Incontáveis discussões sobre os fundamentos da relatividade geral e suas implicações, bem como deduções das equações de Einstein, podem ser encontradas na literatura do assunto [5]-[12]. Não é objetivo deste trabalho tratar a relatividade geral de maneira tão prolixa. Pretendemos apenas compilar alguns dos resultados que se farão relevantes ao mesmo tempo em que fixamos notação e convenções. Esperamos, portanto, que o leitor já esteja minimamente familiarizado com esta teoria.

2.1 Formulação variacional

De maneira breve, a relatividade geral se baseia em três postulados[1]: (i) a constância da velocidade da luz; (ii) a indistinguibilidade entre um campo gravitacional uniforme e um sistema de coordenadas acelerado de maneira correspondente (princípio da equivalência); (iii) a forma das leis da física deve ser a mesma em qualquer sistema de referência[2] (covariância geral).

As implicações destes postulados são vastas e profundas, geralmente necessitando de uma extensa discussão para seu completo entendimento. Utilizamos neste trabalho uma abordagem mais pragmática, deixando de lado as questões filosóficas da teoria e nos preocupando apenas com uma abordagem operacional direta.

Partiremos da formulação variacional de um sistema arbitrário na relatividade restrita, descrito por uma ação S. A partir desta formulação, aplicaremos um procedimento de substituições que a levará à formulação correta deste sistema no âmbito da relatividade geral. Estas substituições correspondem ao requerimento de que a ação respeite (ii) e (iii), sendo que (i) já é satisfeito na relatividade restrita.

---

[1] Estes não são os únicos postulados desta teoria, são apenas os mais relevantes para este estudo.
[2] Desde que as transformações de coordenadas sejam diferenciáveis.

São elas [1],

$$\eta_{\mu\nu}, \eta^{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}, g^{\mu\nu} \tag{2.1}$$
$$\partial_\mu \to \nabla_\mu \tag{2.2}$$
$$d^4x \to d^4x\sqrt{-g} \tag{2.3}$$
$$S \to S + S_g. \tag{2.4}$$

A expressão (2.1) substitui a métrica de Minkowski[3] ($\eta_{\mu\nu}$), que corresponde a uma geometria plana do espaço-tempo, pela métrica $g_{\mu\nu}$. Esta última podendo depender das coordenadas e, em geral, correspondendo a uma geometria curva. Ela também é tratada como uma variável dinâmica do sistema e deve ser encontrada através do princípio da mínima ação, juntamente com os demais campos. O fato de a nova métrica depender das coordenadas faz com que o levantamento e abaixamento de índices de derivadas parciais não seja mais uma tarefa trivial, uma vez que,

$$\begin{aligned}\partial_\mu &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \\ &= \frac{\partial x_\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x_\nu} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(g_{\lambda\nu}x^\lambda\right)\frac{\partial}{\partial x_\nu} \\ &= \left[g_{\mu\nu}(x) + x^\lambda \partial_\mu g_{\nu\lambda}(x)\right]\partial^\nu \\ &\neq g_{\mu\nu}(x)\partial^\nu.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Isso, entretanto, não é um empecilho, pois a substituição (2.2) troca as derivadas parciais (∂_μ) por derivadas covariantes[4] (∇_μ), que satisfazem $\nabla_\mu = g_{\mu\nu}\nabla^\nu$. A derivada covariante é definida de modo a satisfazer as seguintes condições: no espaço-tempo plano, sua aplicação deve se reduzir à aplicação de uma derivação parcial; sua aplicação em um tensor de ordem (m,n)[5] deve gerar um tensor de ordem $(m,n+1)$; ela deve ser compatível com a métrica ($\nabla_\gamma g_{\mu\nu} = 0$). Estas condições, juntamente com a condição de uma geometria livre de torção[6], determinam univocamente a ação da derivada covariante

[3] Utilizamos a convenção em que a assinatura da métrica é $(+,-,-,-)$.

[4] A derivada covariante (∇_μ) não deve ser confundida com a derivada covariante de *gauge* (D_μ), ambas serão utilizadas neste trabalho. A definição da derivada covariante de *gauge* será dada posteriormente.

[5] Um tensor que possui m índices contravariantes e n covariantes, $T^{i_1 i_2 \cdots i_m}_{j_1 j_2 \cdots j_n}$.

[6] Uma geometria livre de torção significa que as conexões afim devem ser simétricas em seus índices covariantes.

em tensores de todas as ordens,

$$\nabla_\mu f = \partial_\mu f \tag{2.6}$$
$$\nabla_\mu T_\nu = \partial_\mu T_\nu - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} T_\lambda \tag{2.7}$$
$$\nabla_\mu T^\nu = \partial_\mu T^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} T^\lambda \tag{2.8}$$
$$\nabla_\mu T_{\nu\lambda} = \partial_\mu T_{\nu\lambda} - \Gamma^\rho_{\nu\mu} T_{\rho\lambda} - \Gamma^\rho_{\lambda\mu} T_{\rho\nu} \tag{2.9}$$
$$\vdots$$

Para cada índice contravariante devemos somar um termo envolvendo Γ enquanto que para índices covariantes devemos subtrair. $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ são chamados de conexões afim, ou símbolos de Christoffel, e são definidos como,

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa}(g_{\kappa\nu,\mu} + g_{\kappa\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\kappa}). \tag{2.10}$$

Na definição acima, e esporadicamente durante o texto, usamos a notação onde uma vírgula seguida de um índice representa a derivação parcial em relação a este índice ($V_{,\mu} = \partial_\mu V$). Da mesma maneira, ponto e vírgula representa derivação covariante ($V_{;\mu} = \nabla_\mu V$).

De forma análoga, é possível definir uma derivada covariante para campos espinoriais. Ela será discutida posteriormente.

A expressão (2.3) substitui o elemento de volume d^4x por um elemento de volume que seja invariante perante uma transformação arbitrária de coordenadas, $d^4x\sqrt{-g}$. g é o determinante de $g_{\mu\nu}$.

Por fim, a expressão (2.4) introduz na ação S do sistema a ação livre do campo gravitacional, S_g.

Depois de realizadas as substituições (2.1)-(2.4), encontramos as equações de movimento para os campos da maneira usual, exigindo que a variação da ação se anule, $\delta S = 0$. Lembrando que, agora, a métrica é também tratada como uma variável dinâmica e ao variarmos S devemos levar em conta as variações causadas pela variação da métrica.

Para ilustrar este procedimento, tomemos a ação de um conjunto de campos arbitrários (escalares, tensoriais, espinoriais, etc) na relatividade restrita. Por brevidade, representamos o conjunto de campos por um único símbolo, Φ. Assim,

$$S[\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x); \eta_{\mu\nu}] = \int d^4x \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x); \eta_{\mu\nu}). \tag{2.11}$$

Repare que a métrica de Minkowski aparece na dependência funcional da ação, mesmo não sendo uma variável dinâmica, apenas para explicitar que ela também faz parte de sua definição. Aplicando o procedimento de substituições à (2.11),

$$S[\Phi(x), \nabla_\mu \Phi(x), g_{\mu\nu}(x)] = S_g[g_{\mu\nu}(x)] + \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}(\Phi(x), \nabla_\mu \Phi(x), g_{\mu\nu}(x)). \tag{2.12}$$

Apesar de não ter sido explicitado, a ação depende das derivadas parciais de primeira e segunda ordem da métrica. Essa dependência será omitida em todo o texto.

Devemos escolher qual será a ação do campo gravitacional. Existem diversas escolhas equivalentes que podem ser feitas, a que empregamos é a ação de Einstein-Hilbert,

$$S_g = -\frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}R. \tag{2.13}$$

Usamos um sistema de unidades onde $c = \hbar = G = 1$. R está relacionado com a curvatura do espaço-tempo e é chamado de escalar de Ricci, ele é a contração do tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$,

$$R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \tag{2.14}$$

$$R_{\mu\nu} \equiv \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}. \tag{2.15}$$

Substituindo a ação gravitacional (2.13) na equação (2.12),

$$S\left[\Phi, \nabla_\mu\Phi, g_{\mu\nu}\right] = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{16\pi}R\left(g_{\mu\nu}\right) + \mathcal{L}\left(\Phi, \nabla_\mu\Phi, g_{\mu\nu}\right)\right]. \tag{2.16}$$

Para encontrar as equações de movimento dos campos, basta calcularmos a variação de S e exigirmos que ela se iguale a zero.

2.2 Equações de Einstein

Se estamos interessados em encontrar as equações de movimento para $g_{\mu\nu}$, fazemos a substituição $g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ enquanto mantemos as demais variáveis dinâmicas fixas (o conjunto de campos Φ). A variação induzida na ação é,

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x\left[-\frac{1}{16\pi}\delta\left(\sqrt{-g}R\right) + \delta\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}\right)\right]\\ &= \int d^4x\left[-\frac{1}{16\pi}\delta\left(\sqrt{-g}\right)R - \frac{1}{16\pi}\sqrt{-g}\delta R + \delta\left(\sqrt{-g}\right)\mathcal{L} + \sqrt{-g}\delta\mathcal{L}\right].\end{aligned} \tag{2.17}$$

Para calculá-la devemos saber $\delta\left(\sqrt{-g}\right)$ e δR em função de $\delta g_{\mu\nu}$. As deduções para encontrar estas variações são longas e tediosas, algo comum quando se trabalha no espaço-tempo curvo. Serão, portanto, relegadas ao apêndice. Utilizaremos diretamente os resultados (A.9) e (A.16),

$$\delta\left(\sqrt{-g}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{2.18}$$

$$\delta R = -R^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + \nabla_\mu\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\lambda} - g^{\nu\lambda}\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\right). \tag{2.19}$$

Uma das contribuições do segundo termo de (2.17) à ação é,

$$-\frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\nu\lambda}-g^{\nu\lambda}\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\right). \tag{2.20}$$

Podemos utilizar o teorema de Gauss no espaço-tempo curvo,

$$\int_V d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu j^\mu=\int_{\partial V} d^3x\sqrt{-g}n_\mu j^\mu, \tag{2.21}$$

para transformar (2.20) em uma integral de superfície,

$$\int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\nu\lambda}-g^{\nu\lambda}\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\right)=\int_S d^3x\sqrt{-g}n_\mu\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\nu\lambda}-g^{\nu\lambda}\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\right). \tag{2.22}$$

Como a definição de uma variação exige que ela se anule na superfície de integração, esta integral é identicamente nula e não contribui para o cálculo de δS.

Voltando à (2.17) e utilizando (A.9) e (2.19),

$$\delta S=\int d^4x\left[\frac{1}{16\pi}\sqrt{-g}\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)\delta g_{\mu\nu}+\sqrt{-g}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}}+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathcal{L}\right)\delta g_{\mu\nu}\right]. \tag{2.23}$$

O primeiro termo entre parênteses no integrando é o tensor de curvatura de Einstein, $G^{\mu\nu}$. O segundo termo entre parênteses está relacionado com o tensor energia-momento[7], $T^{\mu\nu}$[8],

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{mat}}{\delta g_{\mu\nu}}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}}+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathcal{L}\equiv-\frac{1}{2}T^{\mu\nu}. \tag{2.24}$$

Então,

$$\delta S=\int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi}G^{\mu\nu}-\frac{1}{2}T^{\mu\nu}\right]\delta g_{\mu\nu}. \tag{2.25}$$

Finalmente, exigindo $\delta S=0$, obtemos as equações de Einstein,

$$G^{\mu\nu}\equiv R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R=8\pi T^{\mu\nu}. \tag{2.26}$$

Observe que, na passagem de (2.17) para (2.23), ao calcularmos $\delta\mathcal{L}$, fizemos a suposição de que a Lagrangeana não dependia das derivadas da métrica, o que nem sempre é verdade. Caso isso aconteça, termos apropriados, do tipo $\partial\mathcal{L}/\partial g_{\mu\nu,\lambda}$, $\partial\mathcal{L}/\partial g_{\mu\nu,\lambda\kappa}$, etc, devem ser incluídos no tensor energia-momento.

[7] Justificativas para esta associação podem ser encontradas em abundância na literatura [5]-[12]. Uma discussão sobre a relação deste tensor com o tensor energia momento canônico é dada no próximo capítulo.

[8] $S_{mat}=\int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}$.

2.3 Espaço-tempo com simetria esférica

As equações de Einstein, apesar de sua simples aparência, podem ser extremamente complexas de se resolver num espaço-tempo arbitrário. Felizmente, estamos interessados apenas em casos em que o espaço-tempo tem simetria esférica. Para estes casos, elas podem ser significativamente simplificadas.

Se desejamos resolver as equações de Einstein, devemos calcular $R^{\mu\nu}$ e R. Ou, de maneira equivalente, $R^{\mu\nu}$ ou $R^{\mu}{}_{\nu}$. Podemos escolher dentre quaisquer dessas três opções porque as equações de Einstein são equações tensoriais, sendo possível levantar e abaixar seus índices à vontade, desde que o façamos consistentemente em toda a equação. Por conveniência, trabalharemos com índices mistos,

$$G^{\mu}_{\nu} = R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu} R = 8\pi T^{\mu}_{\nu}. \tag{2.27}$$

Não nos preocupamos com o posicionamento dos índices, pois todos os tensores acima são simétricos.

Para calcular R^{μ}_{ν}, começaremos escrevendo o intervalo infinitesimal mais geral possível para um espaço-tempo com simetria esférica [5],

$$ds^2 = e^{\nu(r)}dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2. \tag{2.28}$$

Comparando (2.28) com um intervalo infinitesimal arbitrário, $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$, imediatamente percebemos que a métrica é diagonal e identificamos $g_{00} = e^{\nu(r)}$, $g_{11} = -e^{\lambda(r)}$, $g_{22} = -r^2$ e $g_{33} = -r^2\sin^2\theta$. O fato de a métrica ser diagonal nos permite achar facilmente sua inversa, sendo dada por $g^{\mu\nu} = 1/g_{\mu\nu}$, para $\mu = \nu$, e $g^{\mu\nu} = 0$, para $\mu \neq \nu$.

A partir disto, usamos as definições (2.15), (2.10) e $R^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\lambda}R_{\lambda\nu}$ para calcular R^{μ}_{ν} para todos os valores de μ e ν. Os resultados obtidos são,

$$R^0_0 = e^{-\lambda}\left(-\frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda'\nu'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'}{r}\right), \tag{2.29}$$

$$R^1_1 = e^{-\lambda}\left(-\frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda'\nu'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'}{r}\right), \tag{2.30}$$

$$R^2_2 = e^{-\lambda}\left(-\frac{1}{r} - \frac{\nu'}{2r} + \frac{\lambda'}{2r}\right) + \frac{1}{r^2}, \tag{2.31}$$

$$R^3_3 = R^2_2, \tag{2.32}$$

$$R^{\mu}_{\nu} = 0 \quad \text{, para } \mu \neq \nu, \tag{2.33}$$

$$R = R^{\mu}_{\mu} = R^0_0 + R^1_1 + R^2_2 + R^3_3. \tag{2.34}$$

O apóstrofo representa derivação parcial com relação à variável r. Com estas equações, obtemos os G^{μ}_{ν} e, consequentemente, podemos expressar as equações de Einstein como,

$$G_0^0 = e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi T_0^0, \tag{2.35}$$

$$G_1^1 = e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi T_1^1, \tag{2.36}$$

$$G_2^2 = \frac{e^{-\lambda}}{2}\left(\nu'' - \frac{\lambda'\nu'}{2} + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r}\right) = 8\pi T_2^2, \tag{2.37}$$

$$G_\nu^\mu = 0 = T_\nu^\mu \quad , \text{ para } \mu \neq \nu. \tag{2.38}$$

A métrica estará completamente definida se encontrarmos as expressões para $\nu(r)$ e $\lambda(r)$. Podemos fazer isso resolvendo as equações (2.35) e (2.36) utilizando condições de contorno apropriadas. No vácuo ($T_\nu^\mu = 0$), podemos resolvê-las de maneira relativamente fácil, obtendo a conhecida métrica de Schwarzschild [5]. No entanto, para a solução no interior de uma estrela ($T_\nu^\mu \neq 0$) esta tarefa toma outra proporção, se tornando incrivelmente complicada. Isso acontece porque o problema se torna profundamente recorrente. Temos de saber qual é a expressão de T_ν^μ para resolver as equações de Einstein. O tensor energia-momento, por sua vez, depende da métrica e dos campos. Os campos são governados pelas equações de Euler-Lagrange no espaço-tempo curvo, que dependem explicitamente da métrica. É um problema formidável.

Antes de prosseguirmos, devemos calcular o tensor energia-momento para os campos de interesse. Tema do capítulo seguinte.

Capítulo 3

Tensor energia-momento

Neste capítulo nos concentramos na relação entre o tensor energia-momento definido por (2.24), conhecido como tensor energia-momento de Hilbert (TEMH), e dois dos tensores energia-momento usualmente utilizados na teoria de campos no espaço-tempo plano, o canônico e o simetrizado. Além disso, o TEMH é calculado para os campos escalar e vetorial, pois estes serão utilizados no capítulo seguinte para modelar a matéria nuclear.

3.1 Tensor energia-momento canônico e simetrizado

O teorema de Noether é uma poderosa ferramenta da teoria de campos no espaço-tempo plano. Ele relaciona simetrias diferenciáveis da ação com quantidades conservadas. A simetria translacional, por exemplo, dá origem a um tensor conservado que contém as densidades de energia e momento. Portanto, este teorema nos permite obter de maneira bastante natural um tensor energia-momento. Chamaremos este tensor obtido a partir do teorema de Noether e da simetria translacional de tensor energia-momento canônico (TEMC). Ele é dado por,

$$\Theta^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \Phi\right)} \partial^\nu \Phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}. \tag{3.1}$$

De maneira ingênua, podemos estender esta expressão para o espaço-tempo curvo através de (2.1) e (2.2),

$$\Theta^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\nabla_\mu \Phi\right)} \nabla^\nu \Phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \tag{3.2}$$

Este tensor, no entanto, possui ao menos duas deficiências que impedem sua utilização como fonte da curvatura espaço-temporal nas equações de Einstein. A primeira deficiência está relacionada com a simetria de *gauge*. A simetria de *gauge* é considerada uma simetria fundamental da natureza, é esperado, portanto, que uma teoria fundamental seja simétrica sob uma transformação deste tipo. O TEMC, (3.2), não possui necessariamente tal simetria. Tomemos como exemplo a Lagrangeana do campo eletromagnético livre,

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \tag{3.3}$$

Onde $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$. Se aplicarmos a definição (3.2) a esta Lagrangeana,

$$\Theta^{\mu\nu}_{em} = -g^{\mu\alpha} F_{\alpha\beta} \nabla^\nu A^\beta + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \tag{3.4}$$

Os termos $F_{\alpha\beta}$ e $F^{\alpha\beta}$ são invariantes de *gauge*. O termo $\nabla^\nu A^\beta$ não. Isso significa que $\Theta^{\mu\nu}_{em}$ também não é invariante. Pode-se observar isto mesmo no espaço-tempo plano, no limite $g^{\mu\nu} \to \eta^{\mu\nu}$.

A segunda deficiência deste tensor é o fato de ele não ser sempre simétrico. Isso é necessário na relatividade geral, pois as equações de Einstein relacionam um tensor de curvatura simétrico, $G^{\mu\nu}$, ao tensor energia-momento. Se este último não for também simétrico, as equações de Einstein não serão consistentes entre si. A falta de simetria do TEMC pode ser diretamente verificada invertendo-se os índices μ e ν em (3.4).

Tentativas de aprimorar o TEMC foram feitas ao longo dos anos. A mais notável delas tendo sido o procedimento de simetrização desenvolvido por Belinfante e Rosenfeld [13, 14]. De maneira resumida, o procedimento desenvolvido por eles consiste em somar ao TEMC a divergência total de um tensor com propriedades características,

$$\Theta^{\mu\nu}_S = \Theta^{\mu\nu} + \nabla_\lambda S^{\lambda\mu\nu}. \tag{3.5}$$

$S^{\lambda\mu\nu}$ está relacionado com a densidade de momento angular e é anti-simétrico nos seus dois primeiros índices, $S^{\lambda\mu\nu} = -S^{\mu\lambda\nu}$. Dada uma Lagrangeana qualquer, podemos calcular $S^{\lambda\mu\nu}$ exigindo que $\Theta^{\mu\nu}_S$ seja conservado ($\nabla_\mu \Theta^{\mu\nu}_S = 0$) e simétrico. Apesar de parecer um tanto *ad hoc*, este procedimento gera um tensor que respeita a conservação local do momento angular, algo que o TEMC nem sempre é capaz, e cuja componente "00", no caso do campo eletromagnético, é a densidade esperada de energia, $\frac{1}{2}\left(E^2 + B^2\right)$. Além disso, como ele difere do TEMC apenas por uma divergência total, a energia e o momento calculados a partir das componentes "00" e "0i" são as mesmas. Outra propriedade interessante, mostrada por Belinfante [13], é que o tensor energia-momento simetrizado difere do TEMH também por uma divergência total.

Podemos ver que esses três tensores estão intimamente ligados entre si, entretanto, é importante enfatizar que apenas o TEMH é aceitável como fonte da curvatura espaço-temporal nas equações de Einstein. O fato de os outros tensores serem equivalentes a este a menos de uma divergência total faz apenas com que quantidades globais de energia e momento calculadas a partir deles sejam iguais, enquanto que as equações de Einstein lidam com distribuições locais. Por esse motivo, nas seções seguintes lidaremos apenas com o TEMH.

3.2 Campo escalar

O primeiro passo para o cálculo do TEMH é a obtenção da Lagrangeana do campo de interesse no espaço-tempo curvo. Novamente utilizaremos o procedimento de substituições discutido no capítulo anterior para realizar esta tarefa.

Neste primeiro momento estamos interessados na Lagrangeana livre. Para o campo escalar, no espaço-tempo plano, ela é,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - U(\phi). \tag{3.6}$$

$U(\phi)$ é uma função arbitrária do campo escalar que contém suas auto-interações. Aplicando as substituições (2.1) e (2.2) para obter a Lagrangeana no espaço-tempo curvo,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - U(\phi) \\ &= \frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - U(\phi).\end{aligned} \tag{3.7}$$

Para calcular o TEMH desta Lagrangeana devemos calcular a variação induzida na ação por uma variação da métrica,

$$\delta S = \int d^4x \left[\delta\left(\sqrt{-g}\right)\mathcal{L} + \sqrt{-g}\delta\mathcal{L}\right]. \tag{3.8}$$

Já sabemos que $\delta\left(\sqrt{-g}\right)$ é dado por (A.9), resta-nos calcular $\delta\mathcal{L}$,

$$\delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}\delta\left(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi\right) - \frac{1}{2}m^2\delta\left(\phi^2\right) - \delta U(\phi). \tag{3.9}$$

Como estamos variando apenas a métrica, mantendo ϕ constante, o segundo e o terceiro termo da equação acima não contribuirão para a variação da Lagrangeana. Assim,

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\delta\left(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\delta\left(g^{\mu\nu}\right)\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + g^{\mu\nu}\delta\left(\partial_\mu\phi\right)\partial_\nu\phi + g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\delta\left(\partial_\nu\phi\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\partial_\mu\delta\left(\phi\right)\partial_\nu\phi + g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\delta\left(\phi\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi\delta g^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi\delta g_{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Nos utilizamos do fato de a derivada covariante do campo escalar ser igual a sua derivada parcial, (2.6), e de que a variação comuta com o operador de derivação parcial.

Na passagem da quarta para a quinta linha usamos a relação (A.5). Voltando à (3.8),

$$\delta S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\nabla_\alpha\phi\nabla^\alpha\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - U(\phi)\right)\right]\delta g_{\mu\nu}. \quad (3.11)$$

Ou seja,

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = \sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\nabla_\alpha\phi\nabla^\alpha\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - U(\phi)\right)\right], \quad (3.12)$$

e de (2.24),

$$T^{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = \nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi - g^{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}\nabla_\alpha\phi\nabla^\alpha\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - U(\phi)\right]. \quad (3.13)$$

É válido notar que para o campo escalar, no limite em que $g^{\mu\nu} \to \eta^{\mu\nu}$, o TEMC e o TEMH são idênticos. Se aplicarmos a definição do TEMC, (3.1), à Lagrangeana (3.7),

$$\Theta^{\mu\nu} = \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - U(\phi)\right]. \quad (3.14)$$

Como no limite do espaço-tempo plano temos que $\nabla^\mu \to \partial^\mu$, é fácil ver que $T^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu}$.

3.3 Campo vetorial

Analogamente ao caso anterior do campo escalar, partimos da Lagrangeana livre no espaço-tempo plano de um campo vetorial de massa m,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\Xi_{\mu\nu}\Xi_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}m^2\eta^{\mu\alpha}\xi_\mu\xi_\alpha, \quad (3.15)$$

onde $\Xi_{\mu\nu} = \partial_\mu\xi_\nu - \partial_\nu\xi_\mu$. Ao longo do texto usaremos o símbolo ξ para representar de modo geral todos os campos vetoriais. Ao aplicarmos a substituição (2.2) a $\Xi_{\mu\nu}$ obtemos,

$$\begin{aligned}\Xi_{\mu\nu} &= \nabla_\mu\xi_\nu - \nabla_\nu\xi_\mu \\ &= \left(\partial_\mu\xi_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\xi_\lambda\right) - \left(\partial_\nu\xi_\mu - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}\xi_\lambda\right) \\ &= \partial_\mu\xi_\nu - \partial_\nu\xi_\mu. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Na passagem da segunda para a terceira linha utilizamos a simetria dos índices covariantes das conexões afim. A expressão acima nos permite escrever o tensor $\Xi_{\mu\nu}$ substituindo derivadas covariantes por parciais, e vice-versa, de acordo com a conveniência.

Aplicando (2.1) e (2.2) à Lagrangeana,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\Xi_{\mu\nu}\Xi_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}m^2 g^{\mu\alpha}\xi_\mu\xi_\alpha \\ &= -\frac{1}{4}\Xi_{\mu\nu}\Xi^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2\xi_\mu\xi^\mu. \end{aligned} \tag{3.17}$$

A variação de $\mathcal{L}$ é,

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}\delta\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\right)\Xi_{\mu\nu}\Xi_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}m^2\delta\left(g^{\mu\alpha}\right)\xi_\mu\xi_\alpha \\ &= -\frac{1}{4}\left[\delta\left(g^{\mu\alpha}\right)g^{\nu\beta} + g^{\mu\alpha}\delta\left(g^{\nu\beta}\right)\right]\Xi_{\mu\nu}\Xi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}m^2\xi_\mu\xi_\alpha g^{\mu\sigma}g^{\alpha\rho}\delta g_{\sigma\rho} \\ &= -\left(\frac{1}{2}\Xi^{\mu\alpha}\Xi_\alpha{}^\nu + \frac{1}{2}m^2\xi^\mu\xi^\nu\right)\delta g_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

O campo vetorial (com índice covariante) e a métrica são considerados como variáveis dinâmicas independentes, por isso nenhum termo envolvendo $\delta\xi_\mu$ aparece na expressão acima. O mesmo vale para $\Xi_{\mu\nu}$, pois ele depende apenas das derivadas parciais do campo vetorial.

A variação da ação do campo vetorial é então,

$$\begin{aligned}\delta S = \int d^4x\sqrt{-g}\Big[&-\frac{1}{2}\Xi^{\mu\alpha}\Xi_\alpha{}^\nu - \frac{1}{2}m^2\xi^\mu\xi^\nu \\ &+ \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\Big(-\frac{1}{4}\Xi_{\alpha\beta}\Xi^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}m^2\xi_\alpha\xi^\alpha\Big)\Big]\delta g_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

E o TEMH,

$$\begin{aligned}T^{\mu\nu} &= \Xi^{\mu\alpha}\Xi_\alpha{}^\nu + m^2\xi^\mu\xi^\nu - g^{\mu\nu}\left(-\frac{1}{4}\Xi_{\alpha\beta}\Xi^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}m^2\xi_\alpha\xi^\alpha\right) \\ &= \Xi^{\mu\alpha}\Xi_\alpha{}^\nu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}\Xi_{\alpha\beta}\Xi^{\alpha\beta} + m^2\left(\xi^\mu\xi^\nu - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\xi_\alpha\xi^\alpha\right). \end{aligned} \tag{3.20}$$

3.4 Termos de interação

Até agora tratamos apenas de Lagrangeanas de campos livres, sem nenhum termo de interação com outros campos. Para calcular o TEMH completo, devemos levar em conta tanto os termos livres quanto os de interação. Começamos este cálculo pelo termo de interação de um campo vetorial arbitrário. Ele é, já no espaço-tempo curvo, dado por,

$$\mathcal{L}_{int} = -\xi_\mu j^\mu. \tag{3.21}$$

O procedimento usado até agora para calcular a variação induzida por uma variação na métrica foi tratar os campos (ϕ, ξ_μ, etc) e a métrica como variáveis dinâmicas independentes. Uma variação da métrica não induz, portanto, uma variação nas outras variáveis dinâmicas. Se tratarmos a densidade de corrente j_μ também como uma variável dinâmica independente o que obtemos é,

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_{int} &= -\delta\left(\xi_\mu\right) j^\mu - \xi_\mu \delta j^\mu \\
&= -\xi_\mu \delta\left(g^{\mu\nu} j_\nu\right) \\
&= -\xi_\mu j_\nu \delta g^{\mu\nu} \\
&= \xi^\mu j^\nu \delta g_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

Isso implica que,

$$
T^{\mu\nu}_{int} = -2\xi^\mu j^\nu + g^{\mu\nu}\xi_\alpha j^\alpha. \tag{3.23}
$$

Porém, esse tensor não é invariante de *gauge* nem explicitamente simétrico. Se analisarmos com cuidado nossa suposição de que j_μ é uma variável dinâmica independente da métrica, vemos que ela é um tanto ingênua, afinal, j_μ é uma densidade, ao modificar a métrica podemos estar contraindo ou expandindo o espaço-tempo, e isso faz com que as densidades variem de acordo. Se quisermos calcular de maneira correta o TEMH devemos saber qual é a dependência funcional da densidade de corrente em relação à métrica. Isso pode ser feito através do teorema de Gauss,

$$
\int_V d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu j^\mu = \int_{\partial V} d^3x\sqrt{-g} n_\mu j^\mu. \tag{3.24}
$$

Como estamos tratando com correntes conservadas ($\nabla_\mu j^\mu = 0$), as integrais acima devem ser nulas. Tomando a variação do lado direito de (3.24) e utilizando o fato de que esta equação deve ser válida para volumes arbitrários,

$$
\delta\int_{\partial V} d^3x\sqrt{-g} n_\mu j^\mu = \int_{\partial V} d^3x\sqrt{-g} n_\mu \left[\delta\left(\sqrt{-g}\right) j^\mu + \sqrt{-g}\delta j^\mu\right] = 0. \tag{3.25}
$$

De onde concluímos que,

$$
\begin{aligned}
\delta j^\mu &= -\frac{j^\mu}{\sqrt{-g}}\delta\left(\sqrt{-g}\right) \\
&= -\frac{1}{2} j^\mu g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

O TEMH é então,

$$
\begin{aligned}
T^{\mu\nu}_{int} &= -2\frac{\partial\mathcal{L}_{int}}{\partial g_{\mu\nu}} - g^{\mu\nu}\mathcal{L}_{int} \\
&= 2\xi_\alpha\frac{\partial j^\alpha}{\partial g_{\mu\nu}} + g^{\mu\nu}\xi_\alpha j^\alpha \\
&= -g^{\mu\nu}\xi_\alpha j^\alpha + g^{\mu\nu}\xi_\alpha j^\alpha \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

Vemos que o termo de interação da Lagrangeana não contribui explicitamente para o TEMH. Isso não quer dizer que o TEMH não se modifique quando a interação é introduzida, essa dependência só não é explícita, acontecendo através das equações de movimento. É importante notar que todos os campos vetoriais tratados neste trabalho terão seus termos de interação na forma $\xi_\mu j^\mu$, onde j^μ é uma corrente conservada. Portanto, nenhum campo vetorial contribuirá para o TEMH, que continuará sendo dado por (3.20).

Algo análogo acontece para o termo de interação do campo escalar. Ele é,

$$\mathcal{L}_{int} = -g_s \rho \phi. \tag{3.28}$$

g_s é uma constante. ρ é chamado de densidade escalar. Novamente, temos uma densidade no termo de interação, sua dependência funcional em relação à métrica será dada por uma equação semelhante a da densidade de corrente,

$$\delta\rho = -\frac{1}{2}\rho g^{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}. \tag{3.29}$$

O TEMH será,

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}_{int} &= -2\frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial g_{\mu\nu}} - g^{\mu\nu}\mathcal{L}_{int} \\ &= -g^{\mu\nu} g_s \rho\phi + g^{\mu\nu} g_s \rho \phi \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Assim, vemos que nem o termo de interação do campo escalar nem dos campos vetoriais contribuem explicitamente para o TEMH.

Capítulo 4

Matéria Estelar

A descrição rigorosa dos processos que ocorrem no interior de uma estrela de nêutrons é uma tarefa complexa. Estes objetos são compostos principalmente por prótons, nêutrons e elétrons, cujas interações, se desconsiderarmos a curvatura do espaço-tempo, são governadas de maneira mais fundamental pelo Modelo Padrão. Neste contexto, o Modelo Padrão apresenta dificuldades numéricas imensas, o que impossibilita sua utilização para a descrição da matéria estelar. Se levarmos em conta a curvatura do espaço-tempo, as coisas só pioram. Não existe ainda uma teoria física testada experimentalmente que seja consistente com o Modelo Padrão e com a teoria da relatividade geral. Isso, entretanto, não é um problemas para nós. O objetivo deste trabalho não é, obviamente, a conciliação destas duas teorias. Pretendemos apenas tomar um modelo efetivo das partículas e interações presentes no interior de um estrela de nêutrons e estendê-lo ao âmbito da relatividade geral, esperando que isso reflita o comportamento de baixa energia de alguma teoria mais fundamental.

Para fazer tal extensão, o ideal é começar com um modelo efetivo das partículas e interações que seja tão simples quanto possível, mas que consiga descrever características relevantes da matéria estelar. Ruffini et al [15], por exemplo, estenderam o modelo $\sigma - \omega - \rho$ ao espaço-tempo curvo e resolveram suas equações numericamente. Este modelo é um candidato ideal, pois já foi extensamente estudado pela comunidade científica, é simples e produz resultados compatíveis com as observações [16]. Portanto, ele é o modelo escolhido como o ponto de partida para nosso estudo no espaço-tempo curvo.

É importante destacar que, para usufruir da simplicidade deste modelo, algumas aproximações devem ser feitas. A primeira delas é a aproximação de campo médio, que permite tratar os campos dos mésons e do fóton como campos clássicos e os férmions como partículas não interagentes se movendo nestes campos, o que facilita significativamente o tratamento numérico. A segunda é o negligenciamento do mar de Dirac, que nos permite desprezar efeitos de polarização do vácuo. A terceira e última é a aproximação de Thomas-Fermi à temperatura zero, nela os férmions são tratados como um gás degenerado e sua densidade local é obtida assumindo-se que todos os estados possíveis estão preenchidos até o momento de Fermi.

4.1 Modelo $\sigma - \omega - \rho$

Este modelo foi inicialmente proposto por J. D. Walecka [16] e era composto por nucleons[1] interagindo através da troca de mésons virtuais, um escalar (σ) e um vetorial (ω). O méson σ sendo responsável pela parte atrativa da interação nuclear e o méson ω pela parte repulsiva. Apesar de bem sucedido na descrição de diversas propriedades da matéria nuclear, ele possuía deficiências. Com a introdução do méson iso-vetorial ρ por B. D. Serot e J. D. Walecka pôde-se tratar a assimetria entre nucleons e com a introdução de termos de auto-interação por A. R. Bodmer et al [17] pôde-se descrever melhor a incompressibilidade nuclear.

A utilização deste modelo para a descrição da matéria estelar requer a inclusão de mais dois campos, o do elétron e do eletromagnético. Sem eles não seria possível garantir a neutralidade global de cargas de uma estrela de nêutrons. Começamos nosso estudo, portanto, com sete campos distintos: dos nucleons, do elétron, dos mésons σ, ω e ρ e o eletromagnético. Consideramos auto-interações apenas para o campo escalar. A Lagrangeana deste sistema, no espaço-tempo plano, é,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_\sigma + \mathcal{L}_\omega + \mathcal{L}_\rho + \mathcal{L}_\gamma. \tag{4.1}$$

Com,

$$\mathcal{L}_N = \bar{\Psi}\left[i\gamma^\mu D_\mu - M^*\right]\Psi, \tag{4.2}$$
$$\mathcal{L}_e = \bar{\psi}_e\left[\gamma^\mu\left(i\partial_\mu + \mathrm{e}A_\mu\right) - m_e\right]\psi_e, \tag{4.3}$$
$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m_s^2\phi^2 - U(\phi), \tag{4.4}$$
$$\mathcal{L}_\omega = -\frac{1}{4}\Omega_{\mu\nu}\Omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_v^2 V_\mu V^\mu, \tag{4.5}$$
$$\mathcal{L}_\rho = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\rho^2 b_\mu b^\mu, \tag{4.6}$$
$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{4.7}$$

Onde,

$$iD_\mu = i\partial_\mu - g_v V_\mu - \frac{1}{2}g_\rho\tau_3 b_\mu - \mathrm{e}\frac{1+\tau_3}{2}A_\mu, \tag{4.8}$$
$$M^* = M - g_s\phi, \tag{4.9}$$
$$\Omega_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu, \tag{4.10}$$
$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu b_\nu - \partial_\nu b_\mu, \tag{4.11}$$
$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{4.12}$$

Ψ é o dubleto de isospin dos nucleons, contendo dois campos de spin 1/2, do próton e do nêutron. ψ_e é o campo do elétron, também de spin 1/2. $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ é o conjugado de Dirac e γ^μ são as matrizes de Dirac (utilizaremos ao longo do texto o símbolo ψ

[1] Próton e nêutron.

para representar os campos de spin 1/2 em geral). ϕ, V_μ, b_μ e A_μ são, respectivamente, os campos do méson escalar σ, do méson vetorial ω, do méson iso-vetorial ρ e do fóton. τ_3 é a terceira matriz de isospin. g_s, g_v, g_ρ, m_s, m_v e m_ρ são parâmetros do modelo. Outros parâmetros podem estar contidos dentro do potencial $U(\phi)$, dependendo do modelo utilizado para as auto-interações do campo escalar.

O campo do méson ρ, por ser iso-vetorial, usualmente é definido com três componentes, $\mathbf{b}_\mu = \left\{b_\mu^{(1)}, b_\mu^{(2)}, b_\mu^{(3)}\right\}$. O campo b_μ, contido na Lagrangeana $\mathcal{L}_\rho$ acima, corresponde apenas à terceira componente de isospin de $\mathbf{b}_\mu$. As demais componentes não serão necessárias, pois, devido a conservação de carga, são todas iguais a zero [18].

O méson σ é descrito por um campo escalar. No capítulo anterior já fizemos a transição da Lagrangeana do campo escalar no espaço-tempo plano para o espaço-tempo curvo. O mesmo vale para os campos dos mésons ω e ρ e para o campo eletromagnético, que são todos descritos por campos vetoriais. A única modificação que deve ser feita é que no caso do campo eletromagnético a massa é nula.

As Lagrangeanas dos férmions, no entanto, não foram levadas ao espaço-tempo curvo. Para fazer isso, devemos levar em conta as relações de anti-comutação das matrizes de Dirac,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \tag{4.13}$$

No espaço-tempo curvo, elas devem satisfazer novas relações de anti-comutação,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \tag{4.14}$$

Para obter uma representação explícita destas matrizes, que satisfaça as relações de anti-comutação acima, o formalismo da tetrada[2] deve ser utilizado. Como não necessitamos de tal representação, evitaremos a introdução deste formalismo para não adicionar um grau desnecessário de complexidade ao nosso estudo.

Para aplicar a substituição (2.2) às Lagrangeanas fermiônicas devemos saber qual é a ação da derivada covariante num campo de spin 1/2. Novamente o formalismo da tetrada seria necessário se estivéssemos interessados numa representação explícita, entretanto isso não será necessário, nos contentamos com a seguinte definição [20],

$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi - \Gamma_\mu \psi, \tag{4.15}$$
$$\nabla_\mu \psi^\dagger = \partial_\mu \psi^\dagger + \psi^\dagger \Gamma_\mu. \tag{4.16}$$

Onde Γ_μ é um conjunto de matrizes 4x4, chamadas de conexões de Dirac. Elas estão relacionadas com as matrizes de Dirac e com as conexões afim, desempenhado um papel análogo a ambas. Podemos agora reescrever (4.3),

$$\mathcal{L}_e = \bar{\psi}_e \left[\gamma^\mu \left(i\partial_\mu - i\Gamma_\mu + \mathrm{e}A_\mu\right) - m_e\right] \psi_e. \tag{4.17}$$

[2] A tetrada, e_μ^i, é um mapeamento linear dos vetores no espaço-tempo curvo para o espaço de Minkowski [19]. Assim, ao utilizar a tetrada é possível calcular o produto interno de dois vetores usando a métrica de Minkowski, $g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu = e_i^\mu e_j^\nu \eta^{ij} A_\mu B_\nu = \eta^{ij} A_i B_j$. Este formalismo é considerado como mais natural para o tratamento de campos espinoriais.

As matrizes de Dirac agora obedecem às relações de anti-comutação no espaço-tempo curvo. O mesmo acontece para $\mathcal{L}_N$, as matrizes de Dirac são substituídas e o termo contendo as conexões de Dirac é adicionado à derivada parcial contida em D_μ,

$$\mathcal{L}_N = \bar{\Psi}\left[\gamma^\mu\left(i\partial_\mu - i\Gamma_\mu - g_\upsilon V_\mu - \frac{1}{2}g_\rho\tau_3 b_\mu - \mathrm{e}\frac{1+\tau_3}{2}A_\mu\right) - (M - g_s\phi)\right]\Psi. \tag{4.18}$$

Com isso estamos preparados para derivar as equações de Euler-Lagrange dos campos.

4.2 Equações de Euler-Lagrange

4.2.1 Campo escalar

A Lagrangeana do campo escalar livre no espaço tempo curvo é dada por (3.7). Para encontrar a equação de Euler-Lagrange deste campo devemos adicionar à Lagrangeana do campo livre o termo de interação $g_s\phi\bar{\Psi}\Psi$ contido na Lagrangeana dos nucleons,

$$\mathcal{L}_{\sigma+int} = \frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - \frac{1}{2}m_s^2\phi^2 - U(\phi) + g_s\phi\bar{\Psi}\Psi. \tag{4.19}$$

A ação correspondente é,

$$S_{\sigma+int} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - \frac{1}{2}m_s^2\phi^2 - U(\phi) + g_s\phi\bar{\Psi}\Psi\right]. \tag{4.20}$$

Fazendo a substituição $\phi \to \phi + \delta\phi$ enquanto mantemos as demais variáveis dinâmicas constantes,

$$\delta S_{\sigma+int} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\delta\left(\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi\right) - \frac{1}{2}m_s^2 2\phi\delta\phi - \frac{\partial U(\phi)}{\partial\phi}\delta\phi + g_s\bar{\Psi}\Psi\delta\phi\right]. \tag{4.21}$$

A variação do primeiro termo entre parênteses é,

$$\begin{aligned}
\delta\left(\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi\right) &= g^{\mu\nu}\delta\left(\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi\right)\\
&= g^{\mu\nu}\delta\left(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right)\\
&= g^{\mu\nu}\left[\delta\left(\partial_\mu\phi\right)\partial_\nu\phi + \partial_\mu\phi\delta\left(\partial_\nu\phi\right)\right]\\
&= g^{\mu\nu}\left[\left(\partial_\mu\delta\phi\right)\partial_\nu\phi + \partial_\mu\phi\left(\partial_\nu\delta\phi\right)\right]\\
&= g^{\mu\nu}\left[\left(\nabla_\mu\delta\phi\right)\nabla_\nu\phi + \nabla_\mu\phi\left(\nabla_\nu\delta\phi\right)\right]\\
&= 2\nabla^\mu\phi\nabla_\mu\delta\phi.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Então,

$$\delta S_{\sigma+int} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\nabla^\mu\phi\nabla_\mu\delta\phi - m_s^2\phi\delta\phi - \frac{\partial U(\phi)}{\partial\phi}\delta\phi + g_s\bar{\Psi}\Psi\delta\phi\right]. \tag{4.23}$$

O primeiro termo pode ser transformado da seguinte maneira,

$$\begin{aligned}\int d^4x\sqrt{-g}\ \nabla^\mu\phi\nabla_\mu\delta\phi &= \int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu\left(\nabla^\mu\phi\delta\phi\right) - \int d^4x\sqrt{-g}\left(\nabla_\mu\nabla^\mu\phi\right)\delta\phi \\ &= -\int d^4x\sqrt{-g}\left(\nabla_\mu\nabla^\mu\phi\right)\delta\phi. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Onde, na primeira linha, a primeira integral do lado direito foi descartada através do teorema de Gauss. Finalmente obtemos $\delta S_{\sigma+int}$ em função de $\delta\phi$,

$$\delta S_{\sigma+int} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\nabla_\mu\nabla^\mu\phi - m_s^2\phi - \frac{\partial U(\phi)}{\partial\phi} + g_s\bar{\Psi}\Psi\right]\delta\phi. \tag{4.25}$$

Exigindo $\delta S_{\sigma+int} = 0$, obtemos a equação de Euler-Lagrange para o campo escalar,

$$\nabla_\mu\nabla^\mu\phi + m_s^2\phi + \frac{\partial U(\phi)}{\partial\phi} - g_s\bar{\Psi}\Psi = 0. \tag{4.26}$$

4.2.2 Campo vetorial

Como comentado anteriormente, as Lagrangeanas dos campos dos mésons vetoriais e do eletromagnético possuem todas a mesma forma. Portanto, deduziremos as equações de Euler-Lagrange para um campo vetorial genérico e posteriormente faremos as substituições necessárias para obter as equações de Euler-Lagrange dos campos vetoriais específicos.

A Lagrangeana para um campo vetorial genérico contendo os termos livres e de interação é,

$$\mathcal{L}_{\xi+int} = -\frac{1}{4}\Xi_{\mu\nu}\Xi^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2\xi_\mu\xi^\mu - \xi_\mu j^\mu. \tag{4.27}$$

O procedimento para encontrar as equações de Euler-Lagrange é análogo ao realizado para o campo escalar. Fazemos a substituição $\xi_\mu \to \xi_\mu + \delta\xi_\mu$ mantendo as demais variáveis dinâmicas e a densidade de corrente constantes[3]. A variação induzida na ação é,

$$\begin{aligned}\delta S_{\upsilon+int} &= \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{4}\delta\left(\Xi_{\mu\nu}\Xi^{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}m^2\delta\left(\xi_\mu\xi^\mu\right) - \delta\left(\xi_\mu\right)j^\mu\right] \\ &= \int d^4x\sqrt{-g}\left[\nabla_\nu\Xi^{\nu\mu} +\ m^2\xi^\mu - j^\mu\right]\delta\xi_\mu. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Onde utilizamos os resultados $\delta\left(\Xi_{\mu\nu}\Xi^{\mu\nu}\right) = 4\Xi^{\nu\mu}\delta\left(\nabla_\nu\xi_\mu\right)$, $\delta\left(\xi_\mu\xi^\mu\right) = 2\xi^\mu\delta\xi_\mu$, juntamente com uma integração por partes análoga à (4.24). Novamente, exigindo $\delta S_{\upsilon+int} = 0$,

$$\nabla_\nu\Xi^{\nu\mu} +\ m^2\xi^\mu - j^\mu = 0. \tag{4.29}$$

[3]Repare que considerar variações da densidade de corrente independentes de variações do campo vetorial não é inconsistente com o que foi discutido no capítulo anterior. Lá, consideramos que a densidade de corrente possuía uma dependência funcional apenas em relação à métrica.

Esta equação ainda pode ser escrita de outra maneira utilizando o resultado (B.5),

$$\nabla_\nu \nabla^\nu \xi^\mu - R^\mu_\nu \xi^\nu + \ m^2 \xi^\mu - j^\mu = 0. \tag{4.30}$$

Para obter as equações de Euler-Lagrange específicas de cada um dos campos vetoriais basta observarmos que,

$$j^\mu_\omega = g_\upsilon \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi, \tag{4.31}$$

$$j^\mu_\rho = \frac{1}{2} g_\rho \bar{\Psi} \gamma^\mu \tau_3 \Psi, \tag{4.32}$$

$$j^\mu_\gamma = \mathrm{e} \bar{\Psi} \gamma^\mu \left(\frac{1+\tau_3}{2} \right) \Psi - \mathrm{e} \bar{\psi}_e \gamma^\mu \psi_e. \tag{4.33}$$

Além disso, para o campo eletromagnético, devemos fazer $m = 0$. Obtemos então,

$$\nabla_\nu \nabla^\nu V^\mu - R^\mu_\nu V^\nu + \ m^2_\upsilon V^\mu = g_\upsilon \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi, \tag{4.34}$$

$$\nabla_\nu \nabla^\nu b^\mu - R^\mu_\nu b^\nu + \ m^2_\rho b^\mu = \frac{1}{2} g_\rho \bar{\Psi} \gamma^\mu \tau_3 \Psi, \tag{4.35}$$

$$\nabla_\nu \nabla^\nu A^\mu - R^\mu_\nu A^\nu = \mathrm{e} \bar{\Psi} \gamma^\mu \left(\frac{1+\tau_3}{2} \right) \Psi - \mathrm{e} \bar{\psi}_e \gamma^\mu \psi_e. \tag{4.36}$$

4.2.3 Campo espinorial

As Lagrangeanas dos nucleons e do elétron possuem a mesma forma,

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi} \left[\gamma^\mu \left(i \nabla_\mu - \xi_\mu \right) - m \right] \psi. \tag{4.37}$$

Fazendo a substituição $\psi^\dagger \rightarrow \psi^\dagger + \delta \psi^\dagger$, a variação induzida na ação é,

$$\begin{aligned} \delta S_\psi &= \int d^4x \sqrt{-g} \delta \left(\bar{\psi} \right) \left[\gamma^\mu \left(i \nabla_\mu - \xi_\mu \right) - m \right] \psi \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \delta \left(\psi^\dagger \right) \gamma^0 \left[\gamma^\mu \left(i \nabla_\mu - \xi_\mu \right) - m \right] \psi. \end{aligned} \tag{4.38}$$

E a equação de Euler-Lagrange obtida é,

$$\left[\gamma^\mu \left(i \nabla_\mu - \xi_\mu \right) - m \right] \psi = 0. \tag{4.39}$$

Para obter a equação de Euler-Lagrange específica dos nucleons observamos que,

$$\xi^N_\mu = g_\upsilon V_\mu + \frac{1}{2} g_\rho \tau_3 b_\mu + \mathrm{e} \frac{1+\tau_3}{2} A_\mu, \tag{4.40}$$

$$m = M - g_s \phi, \tag{4.41}$$

$$\psi = \Psi. \tag{4.42}$$

Enquanto que para o elétron,

$$\xi^e_\mu = -\mathrm{e}A_\mu, \tag{4.43}$$
$$m = m_e, \tag{4.44}$$
$$\psi = \psi_e. \tag{4.45}$$

Assim, as equações de Euler-Lagrange são,

$$\left[\gamma^\mu\left(i\partial_\mu - i\Gamma_\mu - g_v V_\mu - \frac{1}{2}g_\rho\tau_3 b_\mu - \mathrm{e}\frac{1+\tau_3}{2}A_\mu\right) - M + g_s\phi\right]\Psi = 0, \tag{4.46}$$
$$\left[\gamma^\mu\left(i\partial_\mu - i\Gamma_\mu + \mathrm{e}A_\mu\right) - m_e\right]\psi_e = 0. \tag{4.47}$$

É interessante ver o que acontece quando tentamos fazer a quadratura usual de (4.39). Assumindo uma solução do tipo $\psi(x) = \psi(k)e^{-ik_\alpha x^\alpha}$,

$$\left[\gamma^\mu\left(i\partial_\mu - i\Gamma_\mu - \xi_\mu\right) - m\right]\psi(x) = \left[\gamma^\mu\left(k_\mu - i\Gamma_\mu - \xi_\mu\right) - m\right]\psi(x) = 0. \tag{4.48}$$

Multiplicando o lado esquerdo da equação acima por $[\gamma^\mu(k_\nu - \xi_\nu) - i\gamma^\mu\Gamma_\mu + m]$,

$$\begin{gathered}\left[\gamma^\nu\left(k_\nu - \xi_\nu\right) - i\gamma^\nu\Gamma_\nu + m\right]\left[\gamma^\mu\left(k_\mu - \xi_\mu\right) - i\gamma^\mu\Gamma_\mu - m\right]\psi = 0\\ \left[\left(k_\mu - \xi_\mu\right)\left(k^\mu - \xi^\mu\right) - i\left(k_\mu - \xi_\mu\right)\left\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\Gamma_\nu\right\} - \gamma^\mu\Gamma_\mu\gamma^\nu\Gamma_\nu - m^2\right]\psi = 0.\end{gathered} \tag{4.49}$$

Onde utilizamos as relações de anti-comutação das matrizes de Dirac no espaço-tempo curvo. Os termos envolvendo as conexões de Dirac nos impedem de diagonalizar esta equação. Entretanto, sabemos que no limite do espaço-tempo plano, $g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$, a derivada covariante deve se reduzir a uma derivação parcial, $\nabla_\mu \to \partial_\mu$, consequentemente, $\Gamma_\mu \to 0$. Então, a menos que estejamos lidando com curvaturas extremas, esperamos que a contribuição das conexões de Dirac para os autovalores de ψ não seja tão relevante. Além disso, o tratamento exato desta equação se tornaria proibitivo quando tentássemos obter as relações termodinâmicas dos férmions. Portanto, utilizaremos mais uma aproximação, descartamos as conexões de Dirac nas equações de Euler-Lagrange dos férmions. Com isso, obtemos a expressão usual para os autovalores,

$$(k_\mu - \xi_\mu)(k^\mu - \xi^\mu) = m^2. \tag{4.50}$$

E a partir dela,

$$E \equiv k_0 = \sqrt{g_{00}}\sqrt{m^2 + (\mathbf{k} - \boldsymbol{\xi})^2} + \xi_0. \tag{4.51}$$

Onde $(\mathbf{k} - \boldsymbol{\xi})^2 = -(k_i - \xi_i)(k^i - \xi^i)$, $i = 1{,}2{,}3$.

4.3 Aproximação de campo médio

Na aproximação de campo médio os campos dos mésons e o campo eletromagnético são substituídos por seus valores esperados, $\phi \to \langle\phi\rangle$, $V_\mu \to \langle V_\mu\rangle$, etc. Esses valores esperados são calculados a partir das equações de Euler-Lagrange, tomando-se os valores esperados das fontes calculadas no estado fundamental. Assim,

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \langle\phi\rangle + m_s^2 \langle\phi\rangle + \frac{\partial U(\langle\phi\rangle)}{\partial\langle\phi\rangle} = g_s \left\langle \bar{\Psi}\Psi \right\rangle, \tag{4.52}$$

$$\nabla_\nu \nabla^\nu \langle V^\mu\rangle - R^\mu_\nu \langle V^\nu\rangle + \ m_\upsilon^2 \langle V^\mu\rangle = g_\upsilon \left\langle \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \right\rangle, \tag{4.53}$$

$$\nabla_\nu \nabla^\nu \langle b^\mu\rangle - R^\mu_\nu \langle b^\nu\rangle + \ m_\rho^2 \langle b^\mu\rangle = \frac{1}{2} g_\rho \left\langle \bar{\Psi}\gamma^\mu\tau_3\Psi \right\rangle, \tag{4.54}$$

$$\nabla_\nu \nabla^\nu \langle A^\mu\rangle - R^\mu_\nu \langle A^\nu\rangle = \mathrm{e}\left\langle \bar{\Psi}\gamma^\mu \left(\frac{1+\tau_3}{2}\right)\Psi \right\rangle - \mathrm{e}\left\langle \bar{\psi}_e\gamma^\mu\psi_e \right\rangle. \tag{4.55}$$

Por brevidade, utilizaremos a seguinte notação,

$$\left\langle \bar{\Psi}\Psi \right\rangle \equiv \rho_s, \tag{4.56}$$

$$\left\langle \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \right\rangle \equiv j_B^\mu = j_p^\mu + j_n^\mu, \tag{4.57}$$

$$\left\langle \bar{\Psi}\gamma^\mu\tau_3\Psi \right\rangle \equiv j_3^\mu = j_p^\mu - j_n^\mu, \tag{4.58}$$

$$\left\langle \bar{\Psi}\gamma^\mu \left(\frac{1+\tau_3}{2}\right)\Psi \right\rangle \equiv j_p^\mu, \tag{4.59}$$

$$\left\langle \bar{\psi}_e\gamma^\mu\psi_e \right\rangle \equiv j_e^\mu, \tag{4.60}$$

$$j_{ch}^\mu \equiv j_p^\mu - j_e^\mu. \tag{4.61}$$

Onde, ρ_s é a densidade escalar, j_B^μ é a corrente bariônica, j_p^μ é a corrente de prótons, j_n^μ é a corrente de nêutrons, j_3^μ é a corrente de iso-spin e j_e^μ é a corrente de elétrons. Além disso, omitiremos o símbolo $\langle\cdot\rangle$ ao escrever valores esperados, para evitar uma notação carregada. Observando essas convenções, as equações de Euler-Lagrange dos mésons e do campo eletromagnético são,

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi + m_s^2 \phi + \frac{\partial U(\phi)}{\partial\phi} = g_s \rho_s, \tag{4.62}$$

$$\nabla_\nu \nabla^\nu V^\mu - R^\mu_\nu V^\nu + \ m_\upsilon^2 V^\mu = g_\upsilon j_B^\mu, \tag{4.63}$$

$$\nabla_\nu \nabla^\nu b^\mu - R^\mu_\nu b^\nu + \ m_\rho^2 b^\mu = \frac{1}{2} g_\rho j_3^\mu, \tag{4.64}$$

$$\nabla_\nu \nabla^\nu A^\mu - R^\mu_\nu A^\nu = \mathrm{e} j_{ch}^\mu. \tag{4.65}$$

4.4 Matéria estática com simetria esférica

As equações de Euler-Lagrange expressas acima podem ser significativamente simplificadas se assumirmos uma distribuição estática e esfericamente simétrica. O que, em primeira aproximação, é o esperado para a matéria no núcleo de uma estrela de nêutrons em equilíbrio. Neste contexto, espera-se que apenas a componente temporal das correntes seja não nulo, visto que,

$$j^\mu = \rho u^\mu. \tag{4.66}$$

Onde ρ é a densidade invariante correspondente a j^μ, u^μ é a quadrivelocidade do fluido e, para uma distribuição estática, $u^i = 0$. Além disso, esperamos que todos os campos dependam apenas da coordenada r e que, por simetria, as componentes espaciais dos campos vetoriais sejam nulas, ou seja, $\phi \equiv \phi(r)$, $\xi_0 \equiv \xi_0(r)$ e $\xi_i = 0$. Utilizando essas propriedades, as equações de Euler-Lagrange dos mésons e do campo eletromagnético se reduzem a,

$$\phi'' + \left(\frac{2}{r} + \frac{\nu' - \lambda'}{2}\right)\phi' = e^\lambda\left(m_s^2\phi + \frac{\partial U}{\partial \phi} - g_s\rho_s\right), \tag{4.67}$$

$$V_0'' + \left(\frac{2}{r} - \frac{\nu' + \lambda'}{2}\right)V_0' = e^\lambda\left(m_v^2 V_0 - g_v j_0^B\right), \tag{4.68}$$

$$b_0'' + \left(\frac{2}{r} - \frac{\nu' + \lambda'}{2}\right)b_0' = e^\lambda\left(m_\rho^2\rho_0 - \frac{1}{2}g_\rho j_0^3\right), \tag{4.69}$$

$$A_0'' + \left(\frac{2}{r} - \frac{\nu' + \lambda'}{2}\right)A_0' = -\mathrm{e}e^\lambda j_0^{ch}. \tag{4.70}$$

As correntes aparecendo no lado direito destas equações podem ser calculadas através da aproximação de Thomas-Fermi,

$$\rho_s(r) = \frac{2}{(2\pi)^3}\sum_{i=p,n}\int_0^{k_{F_i(r)}} d^3k\frac{M^*(r)}{\epsilon_i(r)}, \tag{4.71}$$

$$\rho_i(r) = \frac{k_{F_i}^3(r)}{3\pi^2}, i = p,n,e, \tag{4.72}$$

$$j_0^B(r) = j_0^p(r) + j_0^n(r) = [\rho_p(r) + \rho_n(r)]\,u_0 = \left[\frac{k_{F_p}^3(r)}{3\pi^2} + \frac{k_{F_n}^3(r)}{3\pi^2}\right]\sqrt{g_{00}}, \tag{4.73}$$

$$j_0^3(r) = j_0^p(r) - j_0^n(r) = [\rho_p(r) - \rho_n(r)]\,u_0 = \left[\frac{k_{F_p}^3(r)}{3\pi^2} - \frac{k_{F_n}^3(r)}{3\pi^2}\right]\sqrt{g_{00}}, \tag{4.74}$$

$$j_0^{ch}(r) = j_0^p(r) - j_0^e(r) = [\rho_p(r) - \rho_e(r)]\,u_0 = \left[\frac{k_{F_p}^3(r)}{3\pi^2} - \frac{k_{F_e}^3(r)}{3\pi^2}\right]\sqrt{g_{00}}. \tag{4.75}$$

$k_{F_i}(r)$ são os momentos de Fermi locais. $\epsilon_i(r)$ são os espectros de energia das partículas individuais, $\epsilon_p(r) = \epsilon_n(r) = \sqrt{[M - g_s\phi(r)]^2 + \mathbf{k}^2}$, $\epsilon_e = \sqrt{m_e^2 + \mathbf{k}^2}$ e $\mathbf{k}^2 = -k_ik^i$. Podemos identificar os espectros de energia na expressão dos autovalores da equação de Dirac, (4.51), e reescrever estes autovalores como,

$$E_p = \sqrt{g_{00}}\epsilon_p + g_v V_0 + \frac{1}{2} g_\rho b_0 + \mathrm{e}A_0, \tag{4.76}$$

$$E_n = \sqrt{g_{00}}\epsilon_n + g_v V_0 - \frac{1}{2} g_\rho b_0, \tag{4.77}$$

$$E_e = \sqrt{g_{00}}\epsilon_e - \mathrm{e}A_0. \tag{4.78}$$

4.5 Equilíbrio termodinâmico

As equações de movimento não são os únicos vínculos que devem ser satisfeitos pelos férmions, eles também estão estão sujeitos a condições de equilíbrio termodinâmico. Estas condições podem ser encontradas com o auxílio da seguinte relação termodinâmica,

$$\mathcal{P} = T\mathcal{S} - \mathcal{E} + \sum_{i=p,n,e} \rho_i \mu_i. \tag{4.79}$$

$\mathcal{S} = S/V$ é a entropia por unidade de volume. μ_i são os potencias químicos das diferentes espécies de férmions. À temperatura $T = 0$, $\mu_i = \epsilon_i(k = k_{F_i})$. $\mathcal{E}$ é a densidade de energia dos férmions e $\mathcal{P}$ sua pressão. Estes dois últimos são escritos como,

$$\mathcal{E} = \sum_{i=p,n,e} \mathcal{E}_i, \tag{4.80}$$

$$\mathcal{P} = \sum_{i=p,n,e} \mathcal{P}_i, \tag{4.81}$$

$$\mathcal{E}_i = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{F_i}} d^3k \epsilon_i, \tag{4.82}$$

$$\mathcal{P}_i = \frac{1}{3} \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{F_i}} d^3k \frac{k^2}{\epsilon_i}. \tag{4.83}$$

Variando a expressão (4.79) mantendo constantes os números de partículas,

$$\begin{aligned} d\mathcal{P} &= \mathcal{S}dT - d\mathcal{E} + \sum_{i=p,n,e} \rho_i d\mu_i \\ &= \left(\mathcal{E} + \mathcal{P} - \sum_{i=p,n,e} \rho_i \mu_i \right) \frac{dT}{T} - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial M^*} dM^* + \sum_{i=p,n,e} \rho_i d\mu_i \\ &= \left(\mathcal{E} + \mathcal{P} - \sum_{i=p,n,e} \rho_i \mu_i \right) \frac{dT}{T} + \rho_s g_s d\phi + \sum_{i=p,n,e} \rho_i d\mu_i. \end{aligned} \tag{4.84}$$

Onde utilizamos novamente a relação (4.79) para reescrever $\mathcal{S}$ e as definições (4.71), (4.80) e (4.82) para calcular $\partial\mathcal{E}/\partial M^* = \rho_s$.

Podemos obter uma outra expressão para $d\mathcal{P}$ através da conservação do TEMH, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Nós já obtivemos o TEMH para o campo escalar e para os campos vetoriais.

Para escrever o TEMH completo nos falta saber apenas qual é a contribuição dos campos fermiônicos. Entretanto, dada as aproximações que estamos empregando (campo médio e Thomas-Fermi), o TEMH destes campos tem a mesma forma que o TEMH de um fluido perfeito,

$$T_{\psi}^{\mu\nu} = (\mathcal{E} + \mathcal{P})\, u^{\mu}u^{\nu} - g^{\mu\nu}\mathcal{P}. \tag{4.85}$$

Então, utilizando (3.13), (3.20), (4.85) e as devidas substituições,

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu} &= T_{\psi}^{\mu\nu} + T_{\phi}^{\mu\nu} + T_{\omega}^{\mu\nu} + T_{\rho}^{\mu\nu} + T_{\gamma}^{\mu\nu} \\
&= (\mathcal{E} + \mathcal{P})\, u^{\mu}u^{\nu} - g^{\mu\nu}\mathcal{P} \\
&\quad + \nabla^{\mu}\phi\nabla^{\nu}\phi - g^{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}\nabla_{\alpha}\phi\nabla^{\alpha}\phi - \frac{1}{2}m_s^2\phi^2 - U(\phi)\right] \\
&\quad + \Omega^{\mu\alpha}\Omega_{\alpha}{}^{\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}\Omega_{\alpha\beta}\Omega^{\alpha\beta} + m_{\upsilon}^2\left(V^{\mu}V^{\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}V_{\alpha}V^{\alpha}\right) \\
&\quad + B^{\mu\alpha}B_{\alpha}{}^{\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}B_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta} + m_{\rho}^2\left(b^{\mu}b^{\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}b_{\alpha}b^{\alpha}\right) \\
&\quad + F^{\mu\alpha}F_{\alpha}{}^{\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{4.86}$$

Sua divergência covariante é, de (C),

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = \nabla_{\mu}\left[(\mathcal{E} + \mathcal{P})\, u^{\mu}u^{\nu}\right] - \nabla^{\nu}\mathcal{P} + g_s\rho_s\nabla^{\nu}\phi \\
+ g_{\upsilon}j_{\mu}^{B}\Omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\rho}j_{\mu}^{3}B^{\mu\nu} + \mathrm{e}j_{\mu}^{ch}F^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{4.87}$$

E de $\nabla_{\mu}T_1^{\mu} = 0$ obtemos a seguinte expressão para a pressão,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}' = -\frac{1}{2}(\mathcal{E} + \mathcal{P})\,\nu' + g_s\rho_s\phi' - e^{-\nu/2}g_{\upsilon}\rho_B V_0' \\
-\frac{1}{2}e^{-\nu/2}g_{\rho}\rho_3 b_0' - e^{-\nu/2}\mathrm{e}\rho_{ch}A_0'.
\end{aligned} \tag{4.88}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
d\mathcal{P} = -\frac{1}{2}(\mathcal{E} + \mathcal{P})\, d\nu + g_s\rho_s d\phi - e^{-\nu/2}g_{\upsilon}\rho_B dV_0 \\
-\frac{1}{2}e^{-\nu/2}g_{\rho}\rho_3 db_0 - e^{-\nu/2}\mathrm{e}\rho_{ch}dA_0.
\end{aligned} \tag{4.89}$$

Subtraindo (4.89) de (4.84),

$$\begin{aligned}
(\mathcal{E} + \mathcal{P})\left(\frac{dT}{T} + \frac{d\nu}{2}\right) + \sum_{i=p,n,e}\rho_i\left(d\mu_i - \mu_i\frac{dT}{T}\right) + \\
e^{-\nu/2}g_{\upsilon}\rho_B dV_0 + \frac{1}{2}e^{-\nu/2}g_{\rho}\rho_3 db_0 + e^{-\nu/2}\mathrm{e}\rho_{ch}dA_0 = 0.
\end{aligned} \tag{4.90}$$

R. Tolman demonstrou que uma distribuição esfericamente simétrica e em equilíbrio térmico, sujeita a interação gravitacional, deve satisfazer [21],

$$\frac{dT}{T} + \frac{d\nu}{2} = 0. \tag{4.91}$$

Podemos usar esta relação em (4.90) para obter,

$$\sum_{i=p,n,e} \rho_i \left(d\mu_i + \mu_i \frac{d\nu}{2} \right) + e^{-\nu/2} g_\upsilon \rho_B dV_0 + \frac{1}{2} e^{-\nu/2} g_\rho \rho_3 db_0 + e^{-\nu/2} \mathrm{e} \rho_{ch} dA_0 = 0,$$
$$\sum_{i=p,n,e} \rho_i d\left(e^{\nu/2} \mu_i \right) + g_\upsilon \rho_B dV_0 + \frac{1}{2} g_\rho \rho_3 db_0 + \mathrm{e} \rho_{ch} dA_0 = 0. \tag{4.92}$$

O termo entre parênteses, $e^{\nu/2}\mu_i$, pode ser escrito em função dos autovalores da equação de Dirac. Usando (4.76)-(4.78) e $\mu_i = \epsilon_i(k = k_{F_i})$,

$$e^{\nu/2}\mu_p = E_p^F - g_\upsilon V_0 - \frac{1}{2} g_\rho b_0 - \mathrm{e}A_0, \tag{4.93}$$
$$e^{\nu/2}\mu_n = E_n^F - g_\upsilon V_0 + \frac{1}{2} g_\rho b_0, \tag{4.94}$$
$$e^{\nu/2}\mu_e = E_e^F + \mathrm{e}A_0. \tag{4.95}$$

Onde $E_i^F \equiv E_i(k = k_{F_i})$. A equação (4.92) fica, então,

$$\sum_{i=p,n,e} \rho_i dE_i^F = 0. \tag{4.96}$$

O que resulta na constância dos E_i^F para as três espécies de férmions[4],

$$E_p^F = e^{\nu/2}\mu_p + g_\upsilon V_0 + \frac{1}{2} g_\rho b_0 + \mathrm{e}A_0 = \text{constante}, \tag{4.97}$$
$$E_n^F = e^{\nu/2}\mu_n + g_\upsilon V_0 - \frac{1}{2} g_\rho b_0 = \text{constante}, \tag{4.98}$$
$$E_e^F = e^{\nu/2}\mu_e - \mathrm{e}A_0 = \text{constante}. \tag{4.99}$$

Impondo a condição de equilíbrio β, $E_n^F = E_p^F + E_e^F$, obtemos,

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e + e^{-\nu/2} g_\rho b_0. \tag{4.100}$$

4.6 Equações constituintes

Com isso, possuímos todas as equações necessárias para descrever uma distribuição esférica de prótons, nêutrons e elétrons sujeitos às interações nuclear forte, eletromagnética e gravitacional, em equilíbrio β à temperatura $T = 0$. De (2.35), (2.36), (4.67)-(4.70),

[4] Utilizamos neste trabalho uma notação diferente da usualmente adotada na literatura da área. As quantidades E_i^F correspondem, em notação usual, à μ_i. E as quantidades μ_i, na notação deste trabalho, são dadas por $\mu_i = \sqrt{M_i^* + \mathbf{k}_F^2}$.

(4.97)-(4.100), obtemos o sistema de equações que deve ser satisfeito,

$$e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\lambda'}{r}\right)-\frac{1}{r^2}=8\pi T_0^0, \tag{4.101}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\nu'}{r}\right)-\frac{1}{r^2}=8\pi T_1^1, \tag{4.102}$$

$$\phi''+\left(\frac{2}{r}+\frac{\nu'-\lambda'}{2}\right)\phi'=e^{\lambda}\left(m_s^2\phi+\frac{\partial U}{\partial\phi}-g_s\rho_s\right), \tag{4.103}$$

$$V_0''+\left(\frac{2}{r}-\frac{\nu'+\lambda'}{2}\right)V_0'=e^{\lambda}\left(m_v^2V_0-g_vj_0^B\right), \tag{4.104}$$

$$b_0''+\left(\frac{2}{r}-\frac{\nu'+\lambda'}{2}\right)b_0'=e^{\lambda}\left(m_\rho^2\rho_0-\frac{1}{2}g_\rho j_0^3\right), \tag{4.105}$$

$$A_0''+\left(\frac{2}{r}-\frac{\nu'+\lambda'}{2}\right)A_0'=-\mathrm{e}e^{\lambda}j_0^{ch}, \tag{4.106}$$

$$e^{\nu/2}\mu_p+g_vV_0+\frac{1}{2}g_\rho b_0+\mathrm{e}A_0=\text{constante}, \tag{4.107}$$

$$e^{\nu/2}\mu_n+g_vV_0-\frac{1}{2}g_\rho b_0=\text{constante}, \tag{4.108}$$

$$e^{\nu/2}\mu_e-\mathrm{e}A_0=\text{constante}, \tag{4.109}$$

$$\mu_p+\mu_e+e^{-\nu/2}g_\rho b_0=\mu_n. \tag{4.110}$$

Com,

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \mathcal{E}+\frac{1}{2}e^{-\lambda}\phi'^2+\frac{1}{2}m_s^2\phi^2+U(\phi) \\ &+\frac{1}{2}e^{-(\nu+\lambda)}(V_0')^2+\frac{1}{2}e^{-\nu}m_v^2(V_0)^2 \\ &+\frac{1}{2}e^{-(\nu+\lambda)}(b_0')^2+\frac{1}{2}e^{-\nu}m_\rho^2(b_0)^2 \\ &+\frac{1}{2}e^{-(\nu+\lambda)}(A_0')^2, \end{aligned} \tag{4.111}$$

$$\begin{aligned} T_1^1 &= -\mathcal{P}-\frac{1}{2}e^{-\lambda}\phi'^2+\frac{1}{2}m_s^2\phi^2+U(\phi) \\ &+\frac{1}{2}e^{-(\nu+\lambda)}(V_0')^2-\frac{1}{2}e^{-\nu}m_v^2(V_0)^2 \\ &+\frac{1}{2}e^{-(\nu+\lambda)}(b_0')^2-\frac{1}{2}e^{-\nu}m_\rho^2(b_0)^2 \\ &+\frac{1}{2}e^{-(\nu+\lambda)}(A_0')^2. \end{aligned} \tag{4.112}$$

Capítulo 5

Considerações finais

Nesta dissertação, obtivemos as equações que devem ser satisfeitas pelos campos do modelo efetivo $\sigma-\omega-\rho$ no interior de uma estrela de nêutrons num espaço-tempo curvo, estático e com simetria esférica (4.101-4.110). Para isso, desenvolvemos no capítulo 2 o formalismo básico da relatividade geral e um procedimento para estender um modelo arbitrário, formulado através de uma Lagrangeana compatível com a relatividade restrita, para um espaço-tempo com uma curvatura qualquer. Na seção 2.2, deduzimos as equações que a métrica correspondente a esta curvatura deve satisfazer. No capítulo 3, discutimos as características dos principais tensores energia-momento utilizados em teoria de campos e por que o TEMH é necessário para o tratamento adequado das equações de Einstein. Calculamos este tensor para dois campos de interesse, o escalar e o vetorial, e discutimos qual é a contribuição ao TEMH causada pela introdução de termos de interação. No capítulo 4, deduzimos as equações de Euler-Lagrange dos campos do modelo $\sigma-\omega-\rho$ no espaço-tempo curvo, estático e esfericamente simétrico, através das aproximações de campo médio e Thomas-Fermi à temperatura $T = 0$ e do negligenciamento do mar de Dirac. Além disso, obtivemos as relações que devem ser satisfeitas pelos potenciais químicos das diferentes espécies de férmions para garantir o equilíbrio termodinâmico e o equilíbrio β.

5.1 Sugestões para pesquisas futuras

Nos concentramos nos desenvolvimentos formais necessários para a descrição da matéria estelar num contexto completamente consistente com a relatividade geral. Devido ao elevado grau de recorrência das equações obtidas, a extração de qualquer tipo de informação delas sem uma resolução numérica direta é quase impossível. Portanto, acreditamos que uma continuação natural deste trabalho é a resolução numérica do sistema de equações (4.101-4.110), a fim de analisar de maneira quantitativa qual é o efeito da inclusão direta da interação gravitacional em características como, por exemplo, a relação raio-massa e a distribuição fermiônica.

Caso o efeito de separação fermiônica demonstrado por Ruffini et al [15] seja grande o suficiente, pode ser interessante considerar uma estrela em rotação e a inclusão de um campo magnético. Acreditamos que o formalismo apresentado neste trabalho foi exposto de maneira geral o suficiente para permitir estes tipos de generalização e a adoção de simetrias menos restritivas.

Apêndice A

Deduções envolvendo variações

A.1 $\delta g_{\mu\nu} \rightarrow \delta g^{\mu\nu}$

Muitas vezes é útil escrever a variação da métrica em função da variação de sua inversa e vice-versa. Podemos fazer isto notando que,

$$\delta^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\alpha} g_{\nu\alpha}. \tag{A.1}$$

Como o delta de Kronecker não é afetado por variações,

$$\begin{aligned} \delta\left(\delta^{\mu}_{\nu}\right) = g^{\mu\alpha}\delta g_{\nu\alpha} + g_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\alpha} = 0, \\ g^{\mu\alpha}\delta g_{\nu\alpha} = -g_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\alpha}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Contraindo ambos os lados desta equação com $g_{\mu\beta}$,

$$\begin{aligned} g_{\mu\beta} g^{\mu\alpha}\delta g_{\nu\alpha} &= -g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\alpha}, \\ \delta^{\alpha}_{\beta}\delta g_{\nu\alpha} &= -g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\alpha}, \\ \delta g_{\nu\beta} &= -g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\alpha}. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Renomeando índices, obtemos,

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}\delta g^{\alpha\beta}. \tag{A.4}$$

Da mesma maneira, podemos obter uma expressão para $\delta g^{\mu\nu}$,

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}\delta g_{\alpha\beta}. \tag{A.5}$$

A.2 $\delta\left(\sqrt{-g}\right)$

Para este cálculo, podemos nos aproveitar da seguinte propriedade do determinante, não nulo, de uma matriz M,

$$\ln\left(\det M\right) = \mathrm{Tr}\left(\ln M\right). \tag{A.6}$$

Tomando a variação desta expressão,

$$\frac{1}{\det M}\delta\left(\det M\right) = \mathrm{Tr}\left(M^{-1}\delta M\right). \tag{A.7}$$

Se substituirmos M por $g_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{g}\delta g &= g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu},\\ \delta g &= g g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{A.8}$$

Com isso, podemos obter $\delta\left(\sqrt{-g}\right)$,

$$\begin{aligned}\delta\left(\sqrt{-g}\right) &= -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta g\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(-g\right) g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{A.9}$$

A.3 δR

O cálculo de δR não é tão trivial, já que sua definição contém vários símbolos de Christoffel, que são uma combinação da métrica e de suas derivadas parciais. Começamos escrevendo,

$$\begin{aligned}\delta R &= \delta\left(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\right)\\ &= \delta\left(g^{\mu\nu}\right)R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{A.10}$$

Usando (A.5), podemos reescrever o primeiro termo de (A.10) em função de $\delta g_{\mu\nu}$,

$$\delta R = -R^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}. \tag{A.11}$$

Através da definição do tensor de Ricci, (2.15), escrevemos sua variação como,

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu} &= \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} - \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} + \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\delta\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\\ &= \partial_\nu\left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\right) - \partial_\alpha\left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right) - \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\\ &\quad + \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\delta\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}.\end{aligned} \tag{A.12}$$

Essa expressão pode ser simplificada se notarmos que, mesmo que $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ não seja um tensor, sua variação, sendo uma diferença de duas conexões afim, o é [5]. Podemos então tomar sua derivada covariante,

$$\nabla_{\gamma}\left(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\right) = \partial_{\gamma}\left(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\right) + \Gamma^{\lambda}_{\gamma\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\mu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}. \tag{A.13}$$

Empregando (A.13), podemos reescrever as derivadas parciais contidas em $\delta R_{\mu\nu}$ e, depois de alguma manipulação algébrica e vários cancelamentos, obtemos,

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\nu}\left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\right) - \nabla_{\alpha}\left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right). \tag{A.14}$$

Substituindo (A.14) em (A.11) e utilizando a compatibilidade da métrica com a derivada covariante,

$$\begin{aligned}\delta R &= -R^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\left[\nabla_{\nu}\left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\right) - \nabla_{\alpha}\left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right)\right] \\ &= -R^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + \nabla_{\nu}\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\right) - \nabla_{\alpha}\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right).\end{aligned} \tag{A.15}$$

Renomeando índices mudos,

$$\delta R = -R^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + \nabla_{\mu}\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\lambda} - g^{\nu\lambda}\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\right). \tag{A.16}$$

Apêndice B

$\nabla_\mu \xi^\mu = 0$

Tomando a divergência covariante da equação (4.29),

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \Xi^{\nu\mu} + m^2 \nabla_\mu \xi^\mu - \nabla_\mu j^\mu = 0. \tag{B.1}$$

O último termo da equação acima é identicamente nulo, visto que a corrente deve ser conservada. O primeiro termo pode ser reescrito da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \nabla_\nu \Xi^{\mu\nu} &= \nabla_\mu \nabla_\nu \nabla^\nu \xi^\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu \nabla^\mu \xi^\nu \\ &= \nabla_\mu \nabla_\nu \nabla^\nu \xi^\mu - \nabla_\nu \nabla_\mu \nabla^\nu \xi^\mu \\ &= \left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right] \nabla^\nu \xi^\mu. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Para um tensor arbitrário, de ordem (2,0), temos,

$$\left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right] \tau^{\alpha\beta} = -R^\alpha_{\lambda\mu\nu} \tau^{\lambda\beta} - R^\beta_{\lambda\mu\nu} \tau^{\alpha\lambda}. \tag{B.3}$$

$R^\alpha_{\lambda\mu\nu} \equiv \Gamma^\alpha_{\lambda\nu,\mu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\mu,\nu} + \Gamma^\kappa_{\lambda\nu}\Gamma^\alpha_{\kappa\mu} - \Gamma^\kappa_{\lambda\mu}\Gamma^\alpha_{\kappa\nu}$ é o tensor de Riemann. Aplicando esta definição à (B.2) e observando que a contração do índice contravariante do tensor de Riemann com seu segundo índice covariante é o tensor de Ricci, obtemos,

$$\begin{aligned} \left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right] \nabla^\nu \xi^\mu &= -R_{\lambda\mu} \nabla^\lambda \xi^\mu + R_{\lambda\nu} \nabla^\nu \xi^\lambda \\ &= -R_{\lambda\mu} \nabla^\lambda \xi^\mu + R_{\lambda\mu} \nabla^\lambda \xi^\mu \\ &= 0. \end{aligned} \tag{B.4}$$

Onde utilizamos a simetria do tensor de Ricci. Aplicando este resultado à (B.1), obtemos[1],

$$\nabla_\mu \xi^\mu = 0. \tag{B.5}$$

[1] Observe que isso não é válido para o campo eletromagnético, pois ele possui massa nula. Entretanto, podemos adotar uma escolha de *gauge* que satisfaça $\nabla_\mu A^\mu = 0$.

Apêndice C

$\nabla_\mu T^{\mu\nu}$

Para chegar à expressão (4.87), é preciso calcular a divergência covariante dos TEMH de cada um dos campos. A divergência do TEMH do campo escalar é,

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu T_\phi^{\mu\nu} &= \nabla_\mu\left(\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi\right) - g^{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}\nabla_\mu\left(\nabla_\alpha\phi\nabla^\alpha\phi\right) - \frac{1}{2}m_s^2\nabla_\mu\left(\phi^2\right) - \nabla_\mu U(\phi)\right] \\
&= \nabla_\mu\left(\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi\right) - g^{\mu\nu}\left[\left(\nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\right)\nabla_\alpha\phi - m_s^2\phi\nabla_\mu\phi - \frac{\partial U(\phi)}{\partial\phi}\nabla_\mu\phi\right].
\end{aligned} \tag{C.1}$$

Podemos reescrever os dois últimos termos dessa equação com o auxílio da equação de Euler-Lagrange do campo escalar. Se multiplicarmos a equação (4.62) por $\nabla_\mu\phi$, obtemos,

$$\left(\nabla_\alpha\nabla^\alpha\phi\right)\nabla_\mu\phi + m_s^2\phi\nabla_\mu\phi + \frac{\partial U(\phi)}{\partial\phi}\nabla_\mu\phi = g_s\rho_s\nabla_\mu\phi. \tag{C.2}$$

Isolando os termos de massa e do potencial e substituindo-os em (C.1),

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu T_\phi^{\mu\nu} &= \nabla_\mu\left(\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi\right) - g^{\mu\nu}\left[\left(\nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\right)\nabla_\alpha\phi + \left(\nabla_\alpha\nabla^\alpha\phi\right)\nabla_\mu\phi - g_s\rho_s\nabla_\mu\phi\right] \\
&= \nabla_\mu\left(\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi\right) - \left(\nabla^\alpha\nabla^\nu\phi\right)\nabla_\alpha\phi - \left(\nabla_\alpha\nabla^\alpha\phi\right)\nabla^\nu\phi + g_s\rho_s\nabla^\nu\phi \\
&= \nabla_\mu\left(\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi\right) - \nabla_\alpha\left(\nabla^\alpha\nabla^\nu\phi\right) + g_s\rho_s\nabla^\nu\phi \\
&= g_s\rho_s\nabla^\nu\phi.
\end{aligned} \tag{C.3}$$

Na passagem da segunda para a terceira linha utilizamos o fato de que derivadas covariantes agindo num campo escalar comutam entre si.

De maneira análoga, podemos utilizar as equações de movimento dos campos vetoriais para encontrar $\nabla_\mu T_\xi^{\mu\nu} = j_\xi^\nu$.

Referências Bibliográficas

[1] N.K. Glendenning. *Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics, and General Relativity*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer New York, 2000.

[2] W. Baade and F. Zwicky. Remarks on Super-Novae and Cosmic Rays. *Physical Review*, 46:76–77, July 1934.

[3] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff. On Massive Neutron Cores. *Physical Review*, 55:374–381, February 1939.

[4] M. Rotondo, J. A. Rueda, R. Ruffini, and S.-S. Xue. The self-consistent general relativistic solution for a system of degenerate neutrons, protons and electrons in β-equilibrium. *Physics Letters B*, 701:667–671, July 2011.

[5] Sean Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Benjamin Cummings, 2003.

[6] P. A. M. Dirac. *General Theory of Relativity*. 1996.

[7] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, and A. N. Lasenby. *General Relativity*. February 2006.

[8] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. 1973.

[9] R. M. Wald. *General relativity*. 1984.

[10] T. Padmanabhan. *Gravitation: Foundations and Frontiers*. January 2010.

[11] J. D. Walecka. *Introduction to General Relativity*. World Scientific, 2007.

[12] S. Weinberg. *Gravitation and cosmology*. John Wiley and Sons, New York, 1972.

[13] F.J. Belinfante. On the current and the density of the electric charge, the energy, the linear momentum and the angular momentum of arbitrary fields. *Physica*, 7(5):449 – 474, 1940.

[14] L. Rosenfeld. *Sur le tenseur d'impulsion-énergie*. Acad. R. de Belgique. Classe des sciences. Mémoires. Coll. in-8". Palais des académies, 1940.

[15] R. Belvedere, D. Pugliese, J. A. Rueda, R. Ruffini, and S.-S. Xue. Neutron star equilibrium configurations within a fully relativistic theory with strong, weak, electromagnetic, and gravitational interactions. *Nuclear Physics A*, 883:1–24, June 2012.

[16] Brian D. Serot and John Dirk Walecka. The Relativistic Nuclear Many Body Problem. *Adv.Nucl.Phys.*, 16:1–327, 1986.

[17] J. Boguta and A.R. Bodmer. Relativistic calculation of nuclear matter and the nuclear surface. *Nuclear Physics A*, 292(3):413 – 428, 1977.

[18] R. C. R. de Lima, S. S. Avancini, and C. Providência. Effect of strong magnetic fields on the nuclear "pasta" phase structure. *Phys. Rev. C*, 88:035804, Sep 2013.

[19] N. D. Birrell and P. C. W. Davies. *Quantum Fields in Curved Space.* April 1984.

[20] Dieter R. Brill and John A. Wheeler. Interaction of neutrinos and gravitational fields. *Rev. Mod. Phys.*, 29:465–479, Jul 1957.

[21] Richard C. Tolman. On the weight of heat and thermal equilibrium in general relativity. *Phys. Rev.*, 35:904–924, Apr 1930.