Lindomar Duarte de Souza

Cônicas e Suas Propriedades Notáveis

Florianópolis-SC
2014

Lindomar Duarte de Souza

Cônicas e Suas Propriedades Notáveis

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção do grau de Mestre em Matemática com Área de Concentração PROFMAT-UFSC associado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Programa de Mestrado Profissional em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Celso Melchiades Doria

Florianópolis-SC

2014

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Souza, Lindomar Duarte de
Cônicas e Suas Propriedades Notáveis / Lindomar Duarte de Souza ; orientador, Celso Melchiades Doria - Florianópolis, SC, 2014.
64 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Inclui referências

1. Matemática. 2. Cônicas. 3. Elipse. 4. Hipérbole. 5. Parábola. I. Doria, Celso Melchiades. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

Lindomar Duarte de Souza

Cônicas e Suas Propriedades Notáveis

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Santa Catarina-UFSC, Área de Concentração PROFMAT-UFSC e aprovada em sua forma final pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática.

Trabalho aprovado. Florianópolis-SC, 13 de junho de 2014.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Celso Melchiades Doria
Orientador

Alda Dayana Mattos Mortari

Prof. Dra. Alda Dayana Mattos Mortari

Prof. Dr. Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa

Prof. Dr. Roberto Simoni

Agradecimentos

Agradeço à Universidade Federal de Santa Catarina e aos professores das disciplinas ministradas, pelo conhecimento compartilhado, tão necessário a nossa formação acadêmica. Agradeço à CAPES pelo incentivo financeiro e ao Professor Dr. Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa pelo acolhimento e gentil contribuição para o início e desenvolvimento deste trabalho. Por último, agradeço ao Professor Dr. Celso Melchiades Doria pela orientação, pelos esclarecimentos e pela atenção dispensada.

Resumo

Esta dissertação trata essencialmente com as formas geométricas conhecidas como cônicas: a elipse, a hipérbole e a parábola. O foco principal está na demonstração do Teorema de Dandelin-Quetelet, demonstrado na totalidade neste texto com a finalidade de obter as propriedades geométricas de cada cônica. Trabalha, também, a construção geométrica das cônicas e também as suas equações em coordenadas cartesianas. Destaca as aplicações das propriedades geométricas notáveis das cônicas. Apresenta, em apêndice, um plano de aula direcionado aos alunos do ensino médio, tendo a parábola como tópico e direcionada a sua identificação, construção e aplicção, em particular, a aplicação das propriedades dessa cônica na elaboração de faróis de automóveis e antenas parabólicas.

Palavras-chaves: Cônicas. Elipse. Hipérbole. Parábola. Propriedades.

Abstract

This dissertation deals mainly with the geometrical shapes known as conical: ellipse, hyperbole and parables. The main focus is in the Dandelin-Quetelet Theorem demonstration, shown in full in this text in order to obtain the geometrical properties of each conic. It also deals with the geometrical construction of the conical and with their equations in Cartesian coordinates. It highlights some notable applications of geometric properties of the conical. It also features in its appendix a lesson plan intended for high school students with a parabola as topic and targeted to the identification, the construction and the application of these properties to the implementation of the designing of automotive headlights and parabolic antennas.

Keywords: Conics. Ellipse. Hyperbola. Parabola. Properties.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

Dentro do planejamento escolar típico das escolas brasileiras, as cônicas figuram apenas no último ano do Ensino Médio. Não é uma extrapolação exagerada perceber que o estudo das cônicas é visto, atualmente, de uma maneira superficial, sem a atenção apropriada aos detalhes e contextualizações que podem se tornar extremamente relevantes para uma devida compreensão deste conteúdo na totalidade, especialmente se o aluno irá continuar os estudos de Matemática. Essa ideia é reforçada por Neto & Guimarães (2008, p.2):

> O ensino das cônicas no ensino médio no Brasil, provavelmente, não acontece para a maioria dos alunos. E, quando acontece, se restringe normalmente a um curto período (uma a duas semanas) no terceiro ano do ensino médio.

O principal propósito deste estudo é o de aprofundar o aparato teórico relativo às cônicas, de maneira que seja possível, ao final, produzir um plano de aula coerente tanto com a amplitude de conteúdo relativo às cônicas (mais especificamente, a parábola) quanto com nível dos alunos de uma turma de terceiro ano do Ensino Médio de uma escola pública, a fim de mostrar uma aplicação para a construção de faróis automotivos e antenas parabólicas.

Também damos atenção à construção geométrica das cônicas com lápis, régua e cordão. Essa seção está fundamentada, essencialmente, em dois trabalhos de COSTA (2007 & 2008), que discorrem amplamente tanto sobre o aspecto matemático quanto sobre o aspecto da construção. Demonstramos as equações reduzidas da Elipse, Hipérbole e Parábola através da interpretação geométrica e apresentamos as propriedades geométricas e suas aplicações práticas. Finalmente, observamos que o pré-requisito para este estudo consiste apenas de alguns conceitos básicos de Geometria Euclidiana e, sempre que possível, fazemos uso desses conceitos ou propriedades. Já as aplicações propriamente ditas vem a estimular o aprendizado tanto pela visualização quanto pelo estímulo que tais aplicações na realidade palpável dos alunos parece proporcionar ao aprendiz. Esse raciocínio, embora direcionado para outro objetivo, é discorrido por Machado (1998, p.65-74), ao informar que a tentência de "justificar a Matemática pelas aplicações práticas"é um discurso corriqueiro no dia a dia escolar, com grande impacto na percepção dos alunos em relação à própria Matemática teórica.

Quanto à organização, além desta introdução e das considerações finais, esta dissertação está dividida em outros quatro capítulos. O primeiro inicia por um breve histórico das cônicas, passando pelas principais definições e apresenta os teoremas Apolônio (sob um contexto histórico) e a versão moderna do teorema de Dandelin-Quetelet. Por fim, apresenta a construção geométrica das cônicas. O segundo capítulo concentra as atenções nas equacoes cartesianas das cônicas. O terceiro reserva-se à apresentação e demonstração das propriedades geométricas notáveis das cônicas[1]. O quarto e último capítulo concentra-se especialmente às aplicações práticas[2].

1 A saber: o termo notáveis é usado por COSTA,2008, p.46-55.

2 Referimo-nos aqui às aplicações para a construção de faróis automotivos e à construção de antenas parabólicas.

1 Cônicas - Aspectos Históricos, Definições e Construções

1.1 Aspectos Históricos

Embora as cônicas já apareçam em *Os elementos* de Euclides, Apolônio é o personagem com maior impacto na história das cônicas. Apolônio (aprox. 262 - 190 a.C.) nasceu na cidade de Perga, região da Panfília [1] e é creditado como o autor do tratado geométrico intitulado *As Cônicas*[2].

Em História da Matemática, Boyer (1974) indica que embora existam registros de precursores[3] de Apolônio, foi este quem tratou minuciosamente o estudo das cônicas, reforçando:

> "[...] mas assim como *Os Elementos* de Euclides substituíram textos elementares anteriores, assim em nível mais avançado o tratado sobre Cônicas de Apolônio derrotou todos os rivais no campo das secções cônicas, inclusive *As Cônicas* de Euclides, e na antiguidade nenhuma tentativa parece ter sido feita para aperfeiçoá-lo. Se a sobrevivência é uma medida de qualidade, *Os Elementos* de Euclides e *As cônicas* de Apolônio foram claramente as melhores obras em seus campos"(BOYER, 1974, p.106-107).

Apolônio, que foi contemporâneo de Arquimedes (aprox. 287-212 a.C) e de Euclides de Alexandria (aprox. 300 a.C), foi um dos três grandes matemáticos gregos da antigüidade. Além disso, Apolônio estudou com os discípulos de Euclides em Alexandria e foi um astrônomo notável, talvez ele, e não Euclides, "mereceu dos antigos o adjetivo de 'O grande Geômetra'"(BOYER, 1974, p.104-105, aspas do autor).

Não há grande consenso sobre quais trabalhos de Apolônio sobreviveram. O que podemos saber de sua obra, devemos, principalmente, à Papus de Alexandria (séc IV d.C.)[4]. Entretanto, há certo consenso de que sua obra prima é esta, intitulada apenas As Cônicas. Sabe-se que é composta por 8 volumes. Entretanto, da obra original, sobreviveram apenas 7 volumes, sendo 4 escritos em grego e 3 traduzidos para o árabe por Thabit Ibn Qurra (826 a 901) no século IX. Os três primeiros volumes são baseados em trabalhos de Euclides. Em 1.710, Edmund Halley traduziu os sete volumes para o latim e todas as demais traduções para as línguas modernas foram feitas a partir da tradução de Halley[5]

[1] Atual território da Turquia no Oriente Médio.
[2] Cf. BOYER, 1974, p.107.
[3] Manaecmo, Aristeu e o próprio Euclides.
[4] idem, p.104
[5] idem, p.106

Apolônio foi o matemático que estudou as seções cônicas de uma maneira mais minuciosa, gerando todas as cônicas de um único cone de duas folhas, simplesmente variando a inclinação do plano de interseção. Foi ele quem, além de ter estudado as retas tangentes e normais a uma cônica, introduziu os nomes parábola, elipse e hipérbole. Irineu Bicudo, em sua tradução para a língua portuguesa de *Os elementos* de Euclides informa: "Para concluir, é preciso lembrar que os nomes *elipse, hipérbole* e *parábola* são devidos não a Euclides ou a Aristeu, mas a Apolônio (BICUDO, In: EUCLIDES, 2009, p.59). O estudo das cônicas que precede Apolônio obtinha a elipse, a parábola e a hipérbole seccionando um cone circular reto com um plano perpendicular a uma geratriz do cone, obtendo esses três tipos distintos de curvas, conforme a seção meridiana do cone fosse um ângulo agudo, um ângulo reto ou um ângulo obtuso.

Foi apenas com Pierre de Fermat (1601-1665) que as cônicas foram descritas de maneira estritamente algébrica. Fermat aplicou uma transformação equivalente à atual rotação de eixos para reduzir uma equação do 2º grau à sua forma mais simplificada.

1.2 Definições

O Conceito de Cone

Em termos gerais, um cone é uma forma geométrica tridimensional delimitada, lateralmente, por todos os segmentos de reta entre uma curva fechada sobre uma base plana e um ponto externo à esse plano, e pela própria região plana delimitada por essa curva.

Considere um plano α e uma região formada por uma curva suave e fechada nesse plano. Considere, também, um ponto V fora desse plano α como na figura abaixo:

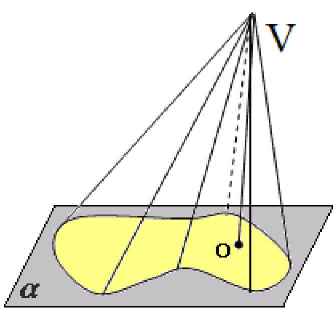

Figura 1 – Cone

Elementos do Cone

1. **Vértice** de um cone é o ponto V, onde se encontram todos os segmentos de reta da curva.

2. **Base** de um cone é a região plana delimitada no interior da curva, inclusive a própria curva.

3. **Diretriz** de um cone é a curva fechada que envolve a sua base.

4. **Geratriz** é qualquer segmento que tenha uma extremidade no vértice do cone e a outra na diretriz.

5. **Eixo** é o segmento de reta que passa pelo vértice V e pelo centro desta base, se este centro existir.

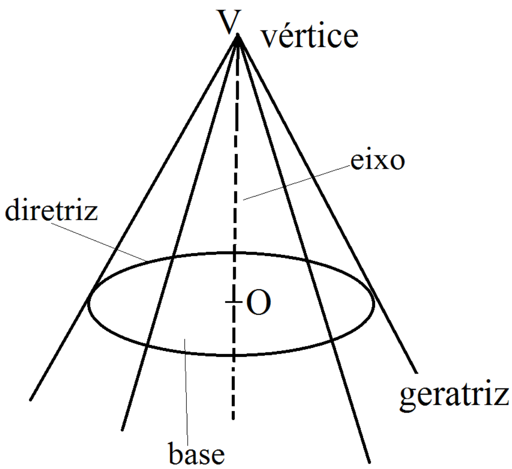

Figura 2 – Elementos do cone

Outra maneira para definir uma superfície cônica decorre da rotação entre duas retas, por exemplo, tome e e g como retas concorrentes num ponto V e não-perpendiculares. Se conservarmos fixa a reta e e fizermos g girar 360º em torno de e mantendo constante o ângulo entre estas retas, obtemos o que chamamos de superfície cônica. Assim, a reta g delimita duas superfícies circulares infinitas simétricas, separadas pelo vértice V, que são também denominadas folhas.[6] Esse tipo de construção para o cone também é denominado cone circular[7].

[6] Embora, usualmente, apresenta-se apenas uma das folhas, alguns desenhos desta dissertação apresetam a forma completa, com as duas folhas.

[7] Indicamos aqui essa nomenclatura por ser aquela utilizada posteriormente na demonstração do teorema de Dandelin-Quetelet.

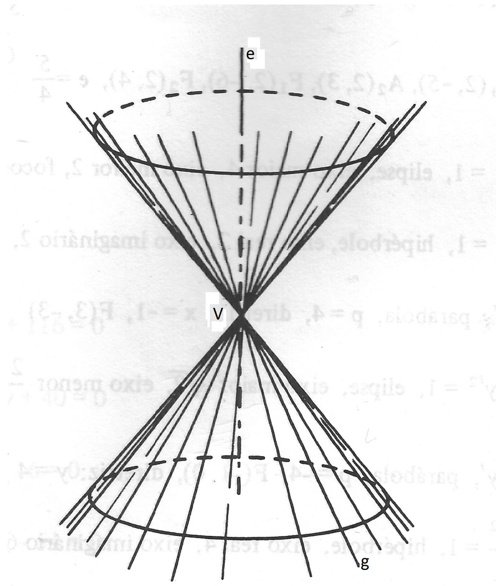

Figura 3 – Cone de duas folhas

Fonte: (STEINBRUCH, 1974, p.272)

Todas as intersecções formam o que foi definido anteriormente como a diretriz. Note, entretanto, que, como o ângulo entre as retas e e g é constante, é possivel seccionar essa região de quatro maneiras distintas. Sejam π_1, π_2, π_3 e π_4, planos transversais, satisfazendo as seguintes condições: o plano π_1 é perpendicular ao eixo e. O lugar geométrico dos pontos que estão na intersecção da região cônica com π_1, i.e., a diretriz, é uma circunferência.[8]

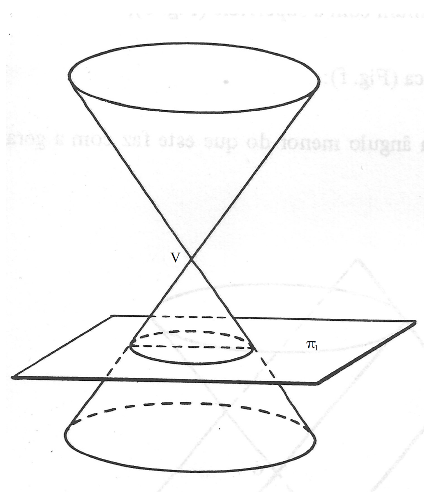

Figura 4 – Secção Circular

Fonte: (STEINBRUCH, 1974, p.273)

8 Nessas condições o cone é chamado de reto, i.e., o seu eixo faz um ângulo reto com a diretriz. Neste caso particular, seria também possível gerar este cone apenas rotacionando um triângulo retângulo em torno de um dos seus catetos, fazendo um cone de apenas uma folha.

O plano π_2 é paralelo a uma e somente uma das geratrizes. O lugar geométrico dos pontos que estão na intersecção da região cônica com π_2 é uma parábola.

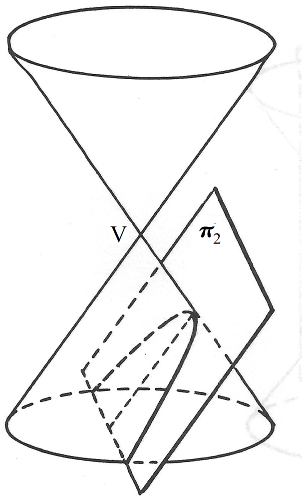

Figura 5 – Secção Parábola.

Fonte: STEINBRUCH, 1974, p.273.

O plano π_3 é paralelo ao eixo e, seccionando as folhas do cone; O lugar geométrico dos pontos que estão na intersecção da região cônica com π_3 é uma hipérbole.

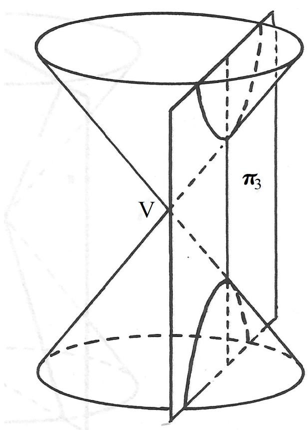

Figura 6 – Secção Hipérbole.

Fonte: STEINBRUCH, 1974, p.273

O plano π_4 é oblíquo ao eixo e, cortando apenas uma das folhas da superfície cônica. O lugar geométrico dos pontos que estão na intersecção da região cônica com π_4 é uma elipse.

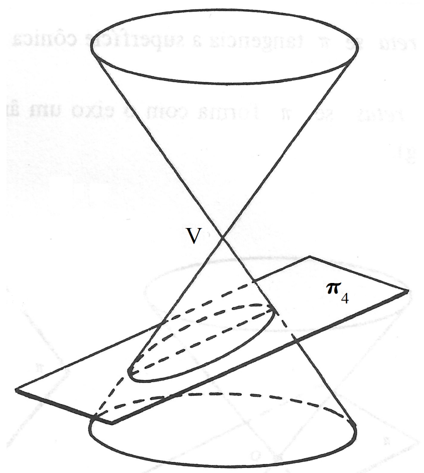

Figura 7 – Secção Elipse.

Fonte: STEINBRUCH, 1974, p.273

Cada lugar geométrico é uma curva sobre a superfície do cone. Daí o fato de serem chamadas, simplesmente, cônicas. Por outro lado, as cônicas também podem ser entendidas apenas como curvas no plano, uma vez que essas curvas se localizam na intersecção do cone com um plano específico para cada cônica. Essa constatação, de fato, é semelhante ao próprio enunciado do teorema de Apolônio.

A subseção a seguir concentra suas atenções ao aparato necessário para uma demonstração moderna do teorema de Apolônio conhecido por Teorema de Dandelin-Quetelet.

Um subproduto decorrente da demonstração é a propriedade que fornece subsídio para a construção das cônicas no plano fazendo uso apenas de lápis, régua, esquadro e cordão. Para tal, devemos relembrar uma propriedade das esferas (**PE**) que se mostra relevante para a demonstração do teorema de Dandelin-Quetelet.

Proposição

PE - Dada uma esfera, considere um ponto P externo a ela e duas retas quaisquer que têm este ponto em comum e são tangentes à esfera. Sejam A e B os pontos de contato de cada reta com a esfera. Então, as distâncias PA e PB são iguais.

Seja a esfera de centro O e raio r. E sejam A e B os pontos de tangência. Os triângulos $\triangle PAO$ e $\triangle PBO$ são congruentes, pois AO=r e BO=r e OP é lado comum. Logo, pelo caso LLA_o (lado, lado, ângulo oposto - LLA_o) de congruência de triângulos, $PA = PB$.

Demonstração

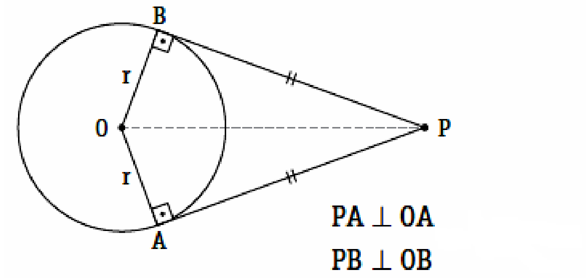

Figura 8 – Retas tangentes à esfera

1.3 Os Teoremas de Apolônio e Dandelin-Quetelet

Existem relações entre algumas distâncias nas cônicas envolvendo seus pontos. Essas relações são consequências diretas do Teorema de Apolônio.

Teorema de Apolônio

A seção de cone por um plano qualquer é: uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole, dependendo apenas do ângulo que esse plano faz com o eixo do cone[9]. Esse plano pode ser paralelo ao eixo (formando a hipérbole); oblíquo com o eixo e paralelo à uma das geratrizes (formando a parábola) e oblíquo ao eixo, cortando apenas uma das folhas (formando a elipse).

Nesta seção temos a intenção de apresentadar a demonstração feita pelo matemático belga Germinal Pierre Dandelin (1794-1847) , que é baseada nas esferas inscritas na superfície cônica de revolução, utilizadas anteriormente por Lambert Adolph Jacques Quetelet (1796-1874), outro matemático belga. Dandelin demonstra o Teorema de Apolônio partindo do uso de esferas inscritas no cone. Essa mudança de estruturação fornece uma nova perspectiva que facilita a visualição de certos conceitos das cônicas.

Teorema de Dandelin-Quetelet

A seção de um cone circular, por um plano tangente a uma esfera inscrita nesse cone, é uma cônica que tem foco no ponto de contato da esfera com o plano.

[9] O caso de perpendicularidade do eixo com o plano, formando, assim, uma circunferência, não será tratado como uma cônica no contexto deste trabalho

Demonstração

1^o caso: Elipse

Podemos inscrever ao cone duas esferas tangentes ao plano π_1 e que o tocam nos pontos F e F' (Figura 9). Estes pontos, em geral, são distintos e coincidem apenas quando o plano π_1 é paralelo à diretriz do cone. Quando este for o caso, os pontos na interseção de π_1 com o cone constituem uma circunferência, já que ele será paralelo ao plano da diretriz. Suponhamos F e F' distintos. Escolhendo um ponto P qualquer na interseção do cone com o plano, sejam Q e R os pontos onde a geratriz VP toca as duas esferas inscritas.

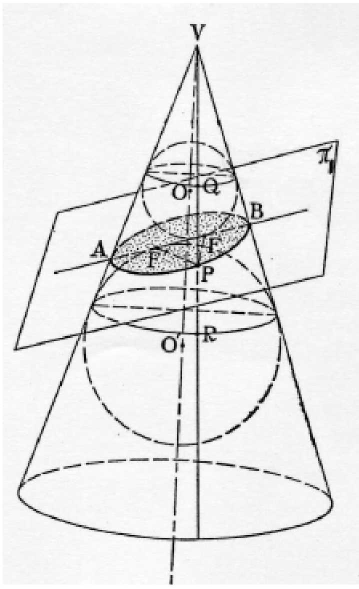

Figura 9 – Elipse

Fonte: COSTA, 2007, p.82.

Pela proposição **PE**, $PF = PQ$ e $PF' = PR$. Portanto,

$$PF + PF' = PQ + PR = QR \tag{1.1}$$

Mas, QR é um segmento de geratriz situado entre os pontos de contato do cone com as esferas. Seu comprimento é o mesmo, qualquer que seja o ponto P escolhido. Resulta, pois, que todo ponto na interseção do cone com o plano π_1 tem a propriedade de que a soma das suas distâncias a dois pontos fixos, F e F', é uma constante que não depende do ponto escolhido. O lugar geométrico dos pontos com esta propriedade é chamado de **elipse**. Os pontos F e F' são chamados de focos da elipse.

2^o caso: Parábola

Inscreve-se no cone uma esfera tangente a π_2 no ponto F (Figura 10).

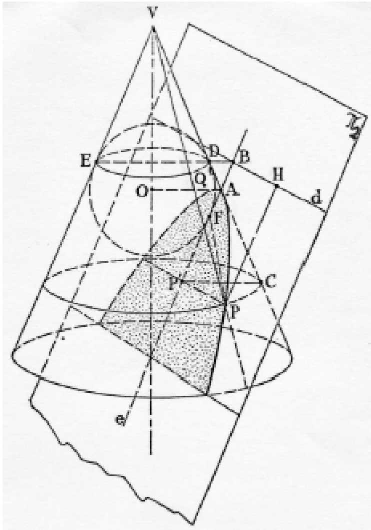

Figura 10 – Parábola

Fonte: COSTA, 2007, p.83.

Seja α o plano que contém o eixo do cone e transversal a π_2. Seja d a interseção de π_2 com o plano que contém a circunferência dos pontos de contato da esfera com o cone. Seja B a interseção do diâmetro desta circunferência, contido no plano α, com a reta d. Indiquemos pela letra e a reta na interseção do plano α com π_2. Sejam E e D a interseção do plano α com a circunferência dos pontos de contato da esfera com o cone. Considere também o ponto A, onde a reta e intercepta a geratriz VD. Tracemos pelo ponto P o plano paralelo à diretriz do cone e que corta a reta e no ponto P' e, a geratriz VD, no ponto C. Os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle AP'C$ são semelhantes ao triângulo $\triangle EVD$[10]. Como este é um triângulo isósceles, aqueles também são. Portanto, sendo

$$CD = CA + AD \tag{1.2}$$

e

$$P'B = P'A + AB \tag{1.3}$$

resulta que $CD = P'B$, pois $CA = P'A$ e $AB = AD$. Pela **PE**, como $PF = PQ = CD = P'B$, segue que $PF = P'B$. Seja H um ponto de d tal que PH e $P'B$ são segmentos iguais e paralelos. Temos que $PH = P'B = PF$. Pode-se concluir que todo ponto na interseção do plano π_2 com a superfície do cone está a uma mesma distância de um ponto fixo F e de uma reta fixa d. O lugar geométrico dos pontos com esta propriedade é chamado de **parábola**. O ponto F é chamado de foco e d de diretriz da parábola.

10 Caso de semelhança de triângulos AAA.

3^o caso: Hipérbole

Inscreve-se no cone duas esferas tangentes ao plano π_3 e que tocam este plano nos pontos F e F', como mostra a Figura 11.

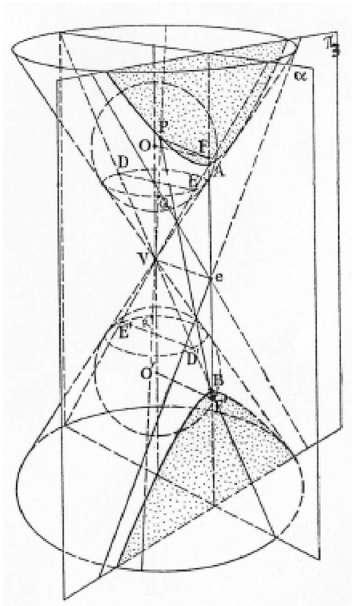

Figura 11 – Hipérbole

Fonte: COSTA, 2007, p.84.

Seja P um ponto qualquer na interseção do plano π_3 com a folha superior do cone. A geratriz VP é tangente às esferas nos pontos Q e R, de modo que $PF = PQ$ e $PF' = PR$, pela **PE**. Levando em conta que $PF' > PF$, a diferença $PF' - PF$ é positiva e obtemos:

$$PF' - PF = PR - PQ = QR \tag{1.4}$$

Qualquer que seja P, a distância QR tem sempre o mesmo valor constante. Escolhendo P na interseção do plano π_3 com a folha inferior do cone obtém-se $PF > PF'$ e a diferença $PF - PF'$ é positiva e igual a QR. Podemos incluir ambos os casos numa única expressão: $|PF' - PF|$ é uma constante que não depende do ponto P. Tem-se assim a seguinte propriedade: todo ponto na interseção do plano com a superfície do cone tem suas distâncias a dois pontos fixos F e F' satisfazendo $|PF' - PF| = k$, em que k é uma constante que não depende do ponto. O lugar geométrico dos pontos com esta propriedade é chamado de **hipérbole**. Os pontos F e F' são chamados de focos da hipérbole.

1.4 Construção Geométrica das Cônicas

Nesta seção abordaremos a construção geométrica da Elipse, da Parábola e da Hipérbole apenas com lápis, régua, esquadro e cordão, como indicamos na seção anterior. Tais construções possuem alto valor instrutivo na formação escolar, uma vez que esse tipo de manipulação (até certo ponto considerada "concreta") dos conceitos geométricos aqui abordados, aparenta estimular o aprendizado dos estudantes por desviar um pouco a atenção da carga matemática notacional para este aspecto mais prático. Visto que tais construções tem o caráter de procedimentos pré-estabelecidos, cabe ressaltar que todas as descrições que seguem estão amplamente baseadas no trabalho de COSTA (2007).

Construção Geométrica da Elipse

Escolha dois pontos, F_1 e F_2 sobre o plano. Fixe nesses pontos as extremidades de um cordão. Perceba que o comprimento do cordão deve ser maior que a distância entre os pontos F_1 e F_2; Além disso, perceba também que as extremidades do cordão possam girar sem se enrolar nesses pontos. Encoste uma ponta e, com ela, estique o cordão, como indica a Figura 12. Deslizando essa ponta e mantendo o cordão sempre esticado, traça-se uma curva fechada. Esta curva é uma elipse, pois a soma das distâncias F_1P e F_2P é igual ao comprimento do cordão, que é o mesmo, qualquer que seja P, de acordo com o resultado da seção 1.3.

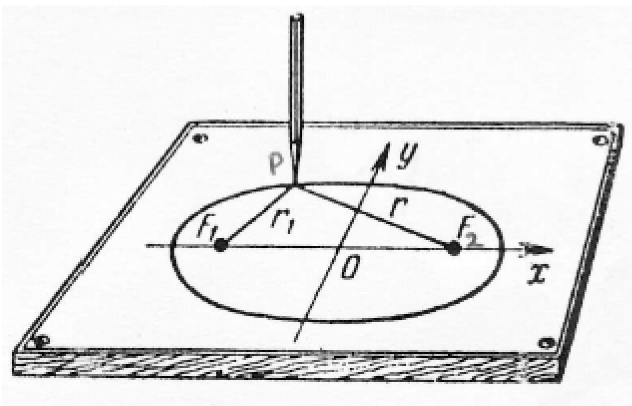

Figura 12 – Construção geométrica da elipse

Fonte: COSTA, 2007, p.85.

Construção Geométrica da Parábola

Trace uma reta x sobre o plano e, sobre ela, escolha um ponto O, a igual distância de dois outros pontos sobre a mesma reta [11]. Sejam eles A e F, como na Figura 13[12]. Trace pelo ponto A um segmento de reta auxiliar KL perpendicular à reta x. Em seguida, alinhe a borda de uma régua ao segmento KL e fixe-a nesta posição. Vale lembrar, aqui, que será necessário um esquadro. O menor cateto deve ser posicionado ao longo da borda da régua alinhada com KL. O cateto maior do esquadro, a partir de agora designado por NB, deve estar posicionado, inicialmente, sobre x. No vértice do ângulo $\angle B$, prende-se uma das pontas de um cordão cujo comprimento deve ser igual a NB. A outra ponta do cordão prende-se a F, onde mais uma vez deve poder girar sem se enrolar. Esticando o cordão com uma ponta, posicione-a inicialmente no ponto O. Em seguida, deslize o esquadro ao longo da régua e trace, ao longo do cateto NB, mantendo o cordão sempre esticado. Com este movimento, traça-se uma curva sobre o plano. A curva traçada é um arco de parábola. De fato, o comprimento do cordão é igual ao do cateto NB de maneira que, se M é um ponto sobre a curva, a distância FM é sempre igual à distância MN, de acordo com a definição da seção 1.3.

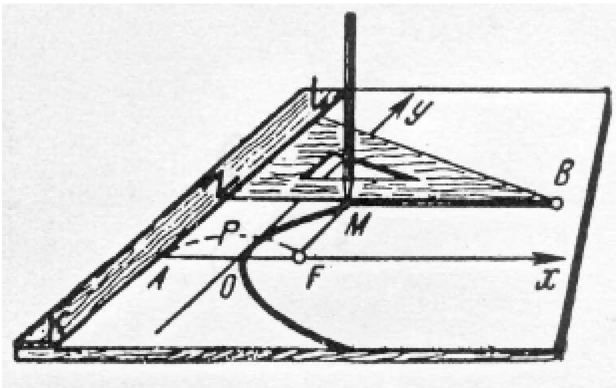

Figura 13 – Construção geométrica da parábola

Fonte: COSTA, 2007, p.85.

Construção Geométrica da Hipérbole

Trace uma reta x sobre um plano, como mostra a Figura 14. Marque sobre x os pontos F_1 e F_2. Em seguida, prenda uma das extremidades de uma régua a F_1 de modo que ela possa girar ao redor deste ponto. Na outra extremidade da régua, N, fixe a ponta de um cordão. A outra ponta, fixe-a no ponto F_2. O comprimento do cordão deve ser tal que a diferença entre o comprimento da régua e a do cordão seja igual à distância entre

11 Marque-os com auxílio de um compasso ou régua.

12 Note que seria possível iniciar por um segmento AF e encontrar a mediatriz para indicar como ponto O.

F_1 e F_2. Inicialmente, posicione a régua sobre a reta x. A ponta do lápis deverá estar sobre o ponto A, que é determinado pela intersecção da reta x com a curva que está sendo traçada. Em seguida, com o fio sempre esticado e a ponta do lápis encostada à régua, gira-se a régua ao redor do ponto F_1, para cima ou para baixo, enquanto desliza-se o lápis ao longo da borda da régua. A curva que se obtém é um ramo de hipérbole. Seja M um ponto qualquer da curva construída. Pela própria construção da Figura 14, temos que:

$$|F_1N - (F_2M + MN)| = F_1F_2. \tag{1.5}$$

Porém, $F_1N = F_1M + MN$. Obtém-se, assim, que $|F_1M - F_2M| = F_1F_2$ de acordo com a seção 1.3, já que, para todo M sobre a curva, a distância F_1F_2 permanece fixa.

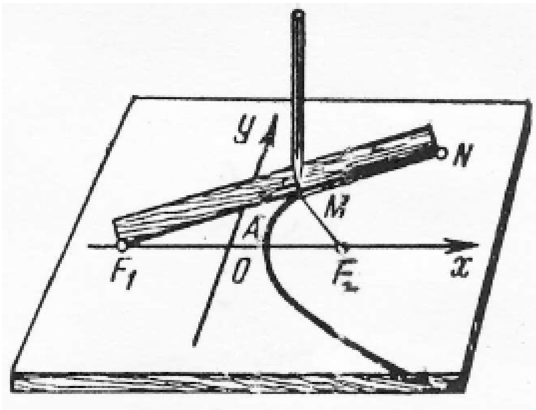

Figura 14 – Construção geométrica da hipérbole

Fonte: COSTA, 2007, p.86.

2 Equação das Cônicas em Coordenadas Cartesianas

Após essa abordagem visual da construção das cônicas, parece natural nos afastarmos de uma abordagem geométrica e partirmos para um enfoque mais analítico. Assim, na seção que segue, passamos a deduzir as equações cartesianas das cônicas. Esta seção está baseada no trabalho de SIQUEIRA & COSTA (2012).

2.1 Equação da Elipse

Seja P um ponto da elipse. Tome como eixo focal $2a$ a soma das distâncias dos focos F_1 e F_2 ao ponto P. Por conveniência, localize-o sobre o eixo das abcissas cartesianas[1] de maneira que o centro O esteja em $\frac{F_1+F_2}{2}$ e que O também seja a origem de um sistema de coordenadas cartesianas. Tome também, como eixo não-focal $2b$ e centro O, a distância perpendicular ao eixo focal, sobre a origem, até a intersecção com a própria elipse como indicado na Figura 15.

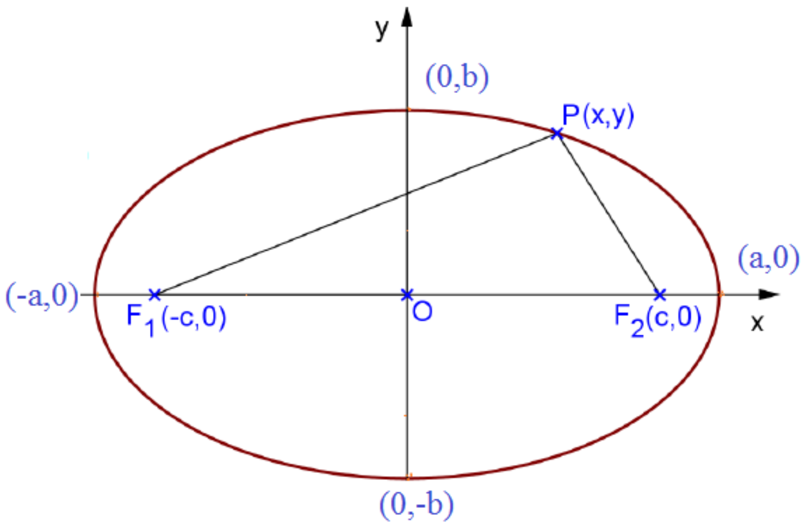

Figura 15 – Equação da elipse

Fonte: SIQUEIRA & COSTA, 2012, p.1.

Por definição, se P pertence à elipse então:

$$PF_1 + PF_2 = 2a. \tag{2.1}$$

[1] Forma Canônica da Elipse

Porém, as distâncias entre P e os focos F_1 e F_2 são:

$$PF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} e PF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{2.2}$$

Substituindo 2.2 em 2.1, obtém-se:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

ou seja,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{2.3}$$

Elevando-se ambos os membros de 2.3 ao quadrado, tem-se:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

Portanto,

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2.$$

Simplificando-se a última igualdade, tem-se:

$$4a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc.$$

Assim,

$$a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} = a^2 - xc. \tag{2.4}$$

Como $a^2 - xc > 0$ e elevando ao quadrado ambos os membros de 2.4, tem-se:

$$a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2. \tag{2.5}$$

Simplificando-se (2.5), obtém-se:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \tag{2.6}$$

Uma vez que na elipse vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$, pois, de fato, essa igualdade decorre do teorema de Pitágoras no triângulo retângulo em:

Pode-se, enfim, substituir $a^2 - c^2$ por b^2 em (2.6):

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \tag{2.7}$$

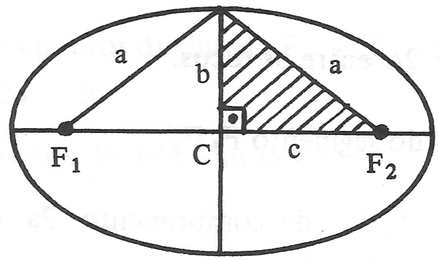

Figura 16 – Relação do triângulo retângulo na elipse

Fonte: STEINBRUCH, 1974, p.228.

Dividindo ambos os membros de (2.7) por a^2b^2, com $a^2b^2 \neq 0$ obtém-se:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que é a equação da elipse com eixos iguais a $2a$ e $2b$ e centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas.

2.2 Equação da Hipérbole

Seja um ponto P sobre a hipérbole de eixo focal igual a $2a$, mais uma vez sobre o eixo das abcissas e eixo não-focal igual a $2b$, com o centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas (Figura 17). Por definição, se P pertence à hipérbole, então:

$$PF_1 - PF_2 = 2a \tag{2.8}$$

Mas as distâncias entre P e os focos F_1 e F_2 são:

$$PF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \text{ e } PF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \tag{2.9}$$

Substituindo 2.9 em 2.8, obtém-se:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

, ou seja,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{2.10}$$

Elevando-se ambos os membros de 2.10 ao quadrado, tem-se:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2.$$

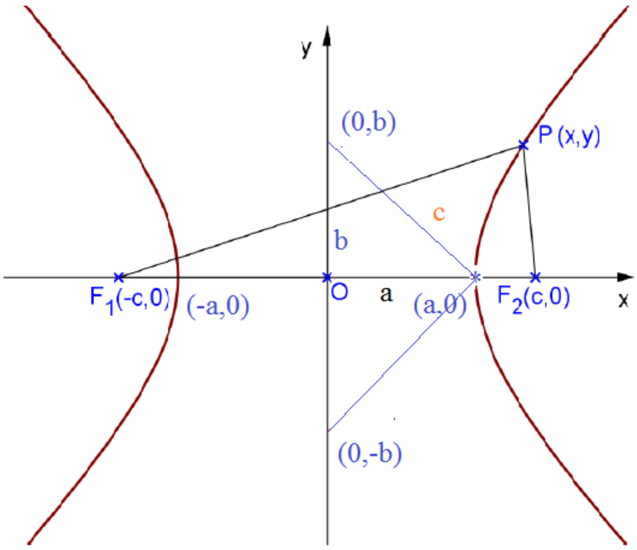

Figura 17 – Equação da hipérbole

Fonte: SIQUEIRA & COSTA, 2012, p.2.

Simplificando-se a última igualdade, tem-se:

$$4a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} = 4xc - 4a^2.$$

Como $4xc - 4a^2 > 0$, tem-se,

$$a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} = xc - a^2. \tag{2.11}$$

Elevando-se ao quadrado ambos os membros de 2.11, tem-se:

$$a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = x^2c^2 - 2a^2xc + a^4.$$

Portanto,

$$a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = x^2c^2 - 2a^2xc + a^4. \tag{2.12}$$

Simplificando-se 2.12, obtém-se:

$$x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4,$$

logo,

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \tag{2.13}$$

Uma vez que na hipérbole vale a relação $c^2 = a^2 + b^2$, pois, de fato, essa igualdade decorre do teorema de Pitágoras no triângulo retângulo como podemos perceber em:

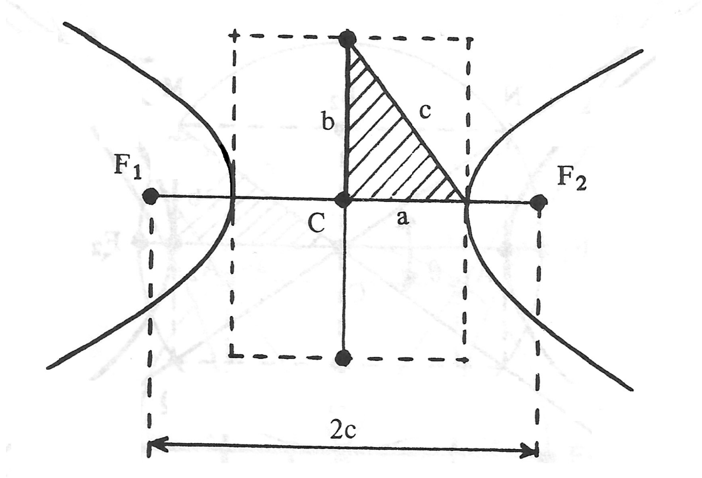

Figura 18 – Relação triângulo retângulo na hipérbole.

Fonte: STEINBRUCH, 1974, p.247.

Pode-se, então, substituir $c^2 - a^2$ por b^2 em 2.13:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2. \tag{2.14}$$

Dividindo ambos os membros de 2.14 por a^2b^2, obtém-se:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que é a equação da hipérbole com eixos iguais a $2a$ e $2b$, com o centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas.

2.3 Equação da Parábola

Seja um ponto P sobre a parábola de foco F_2 e diretriz γ, com o vértice na origem do sistema de coordenadas cartesianas e o eixo focal coincidente com o eixo das abcissas (Figura 16). Por definição, se P pertence à parábola, então:

$$PF_2 = dist(P, \gamma) = PS_2. \tag{2.15}$$

Porém, as distâncias entre P e F_2 e entre P e γ são dadas por:

$$PF_2 = \sqrt{(x-p)^2 + y^2} \text{ e } dist(P, \gamma) = x + p. \tag{2.16}$$

Observe que p é a distância do vértice à diretriz, conforme podemos ver na Figura 22.

Substituindo 2.16 em 2.15 e como $x + p > 0$, obtém-se:

$$x + p = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}. \tag{2.17}$$

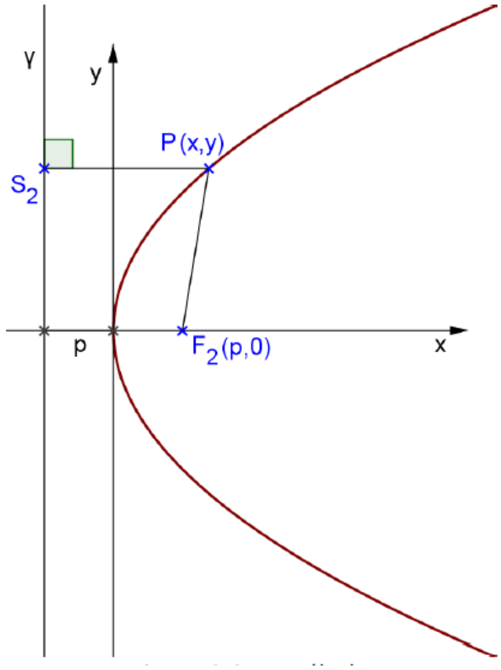

Figura 19 – Equação da parábola.

Fonte: SIQUEIRA & COSTA, 2012, p.4.

Elevando-se ao quadrado ambos os membros da equação 2.17 obtém-se:

$$(x + p)^2 = (x - p)^2 + y^2.$$

Portanto,

$$x^2 + 2xp + p^2 = x^2 - 2xp + p^2 + y^2.$$

Simplificando a equação acima, obtém-se:

$$2xp = -2xp + y^2.$$

Logo,

$$y^2 = 4xp$$

que é a equação da parábola com o vértice na origem e o eixo focal coincidente com o eixo x.

3 Propriedades Geométricas Notáveis das Cônicas

As cônicas, como são chamadas a elipse, a parábola e a hipérbole, possuem algumas propriedades geométricas que merecem nota. Nas próximas seções, iremos primeiramente enunciar as propriedades, em seguida vamos construir a equação da reta tangente à uma cônica, pois essa se faz necessária para enfim demonstrarmos as propriedades.

3.1 Propriedades

P1. Seja $P(x_0, y_0)$ um ponto da elipse com equação $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ (Figura 20) e focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. Os ângulos α e β que a reta r, tangente à elipse em P, faz, respectivamente, com as retas s, que passa nos pontos P e F_1, e t, que passa nos pontos P e F_2, são iguais.

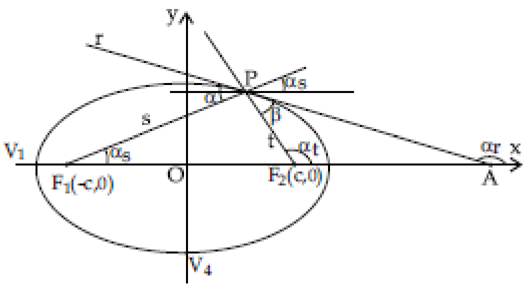

Figura 20 – Tangente à elipse

Fonte: COSTA, 2008, p.47.

P2. Seja $P(x_0, y_0)$ um ponto da parábola com a equação $y^2 = 4kx$, $k > 0$ (Figura 21). Seja s a reta que passa nos pontos P e $F(k, 0)$, o foco da parábola e r, a reta tangente à parábola no ponto P. Além disso, seja l, a reta $y = y_0$. Os ângulos α e β que a reta r, tangente à parábola em P, faz com as retas s e l, respectivamente, são iguais.

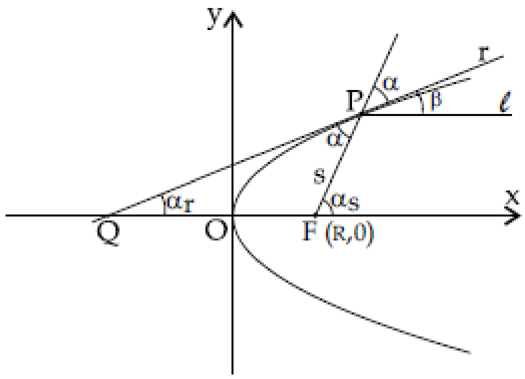

Figura 21 – Tangente à parábola

Fonte: COSTA, 2008, p.48.

P3. Se $P(x_0, y_0)$ é um ponto da hipérbole com equação $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ (Figura 22) e focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$, então os ângulos α e β que a reta s, tangente à hipérbole em P, faz, respectivamente, com as retas r, que passa nos pontos P e F_1, e t, que passa nos pontos P e F_2, são iguais.

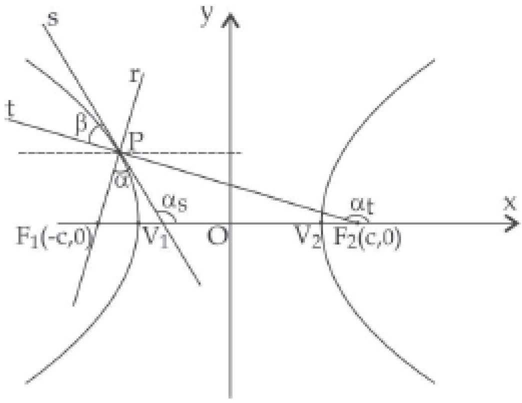

Figura 22 – Tangente à hipérbole.

Fonte: COSTA, 2008, p.49.

3.2 Equação da Reta Tangente a uma Cônica

As propriedades 1, 2 e 3, descritas acima, têm importantes aplicações práticas. Aliadas às propriedades de reflexão da luz e do som, elas são exploradas na construção de antenas e telescópios, e na construção de igrejas e auditórios. O objetivo deste capítulo é o de apresentar e provar estas propriedades geométricas utilizando as ideias da geometria analítica. Outras demonstrações são possíveis usando ou não ideias do cálculo diferencial.

Em primeiro lugar explicamos o procedimento geral para obter a equação da reta tangente a uma cônica. Seja, então, $P(x_0, y_0)$ um ponto da cônica. Se neste ponto a reta tangente for vertical, a equação da reta será $x = x_0$; se horizontal, $y = y_0$. Em outro ponto qualquer $P(x_0, y_0)$ da cônica, a equação de uma reta passando em P é $y - y_0 = m(x - x_0)$. O coeficiente angular m da reta tangente em P pode ser determinado isolando-se y na equação da reta e substituindo o resultado na equação da cônica. Obtemos, desse modo, uma equação em x da forma

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \tag{3.1}$$

cujas raízes são

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{\triangle}}{2A}. \tag{3.2}$$

O número $\triangle = B^2 - 4AC$ é o discriminante da equação e os coeficientes A, B e C dependem, em geral, de x_0, y_0 e de parâmetros próprios de cada cônica. Queremos que a raiz seja única e igual a x_0, a abcissa do ponto de tangência. Devemos impor, então:
$i)\triangle = 0$
$ii)x_0 = -\frac{B}{2A}$

Ambas as condições implicam em uma equação na incógnita m cujo valor, no entanto, pode ser obtido mais facilmente através da condição $ii)$. No que segue aplicamos esse procedimento a cada uma das cônicas.

Elipse

Consideremos a elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ (Figura 20). As retas tangentes aos vértices $V_1(-a, 0), V_2(a, 0), V_3(0, b)$ e $V_4(0, -b)$; $a, b > 0$, são as retas verticais $x = \pm a$, e as retas horizontais $y = \pm b$. Num outro ponto qualquer $P(x_0, y_0)$ obteremos a equação 3.1 com coeficientes

$$A = (b^2 + a^2m^2), \tag{3.3}$$

$$B = 2ma^2(y_0 - mx_0), \tag{3.4}$$

$$C = a^2(y_0 - mx_0)^2 - a^2b^2. \tag{3.5}$$

Substituindo a equação da reta $y = m(x - x_0) + y_0$, que passa em P, na equação da elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, obtem-se os coeficientes A, B e C:

$$b^2x^2 + a^2[m(x - x_0) + y_0]^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + a^2(mx - mx_0 + y_0)^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + a^2(m^2x^2 - m^2xx_0 + mxy_0 - m^2xx_0 + m^2x_0^2 - mx_0y_0 + mxy_0 - mx_0y_0 + y_0^2) = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + a^2(m^2x^2 - 2m^2xx_0 + 2mxy_0 + m^2x_0^2 - 2mx_0y_0 + y_0^2) = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + a^2m^2x^2 - 2a^2m^2xx_0 + 2a^2mxy_0 + a^2m^2x_0^2 - 2a^2mx_0y_0 + a^2y_0^2 = a^2b^2$$

$$(b^2 + a^2m^2)x^2 + (-2a^2m^2x_0 + 2a^2my_0)x + (a^2m^2x_0^2 - 2a^2mx_0y_0 + a^2y_0^2) = a^2b^2$$

$$(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2m(-mx_0 + y_0)x + a^2(m^2x_0^2 - 2mx_0y_0 + y_0^2) = a^2b^2$$

$$(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2m(y_0 - mx_0)x + a^2(y_0 - mx_0)^2 = a^2b^2$$

$$(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2m(y_0 - mx_0)x + a^2(y_0 - mx_0)^2 - a^2b^2 = 0$$

Substituindo as relações 3.3 e 3.4 na condição $ii)$, obtemos:

$$x_0 = -\frac{B}{2A}$$

$$x_0 = -\frac{2ma^2(y_0 - mx_0)}{2(b^2 + a^2m^2)}$$

$$x_0 = -\frac{a^2(y_0 - mx_0)m}{b^2 + a^2m^2}$$

cuja solução é

$$m = -\frac{x_0b^2}{y_0a^2} \tag{3.6}$$

A relação 3.6 é obtida da condição $i)\triangle = 0$. Assim,

$$B^2 - 4AC = 0$$

$$[2ma^2(y_0 - mx_0)]^2 - 4(b^2 + a^2m^2)[a^2(y_0 - mx_0)^2 - a^2b^2] = 0$$

$$4m^2a^4(y_0 - mx_0)^2 - 4(b^2 + a^2m^2)[a^2(y_0 - mx_0)^2 - a^2b^2] = 0$$

$$m^2a^4(y_0 - mx_0)^2 - (b^2 + a^2m^2)[a^2(y_0 - mx_0)^2 - a^2b^2] = 0$$

$$m^2a^4(y_0 - mx_0)^2 - (b^2 + a^2m^2)a^2[(y_0 - mx_0)^2 - b^2] = 0, \text{ com } a \neq 0$$

$$m^2a^2(y_0 - mx_0)^2 - (b^2 + a^2m^2)[(y_0 - mx_0)^2 - b^2] = 0$$

$$m^2a^2(y_0 - mx_0)^2 - b^2(y_0 - mx_0)^2 + b^4 - a^2m^2(y_0 - mx_0)^2 + a^2m^2b^2 = 0$$

$$-b^2(y_0 - mx_0)^2 + b^4 + a^2m^2b^2 = 0$$

$$-(y_0 - mx_0)^2 + b^2 + a^2m^2 = 0, \text{ com } b \neq 0$$

$$-(y_0^2 - 2y_0 m x_0 + m^2 x_0^2) + b^2 + a^2 m^2 = 0$$
$$-y_0^2 + 2y_0 m x_0 - m^2 x_0^2 + b^2 + a^2 m^2 = 0$$
$$(a^2 - x_0^2) m^2 + 2y_0 x_0 m + b^2 - y_0^2 = 0$$

Observe que, nesta útima igualdade, $\triangle = 0$. Isso implica que:

$$m = \frac{-2x_0 y_0}{2(a^2 - x_0^2)} \implies m = -\frac{x_0 y_0}{a^2 - x_0^2} \text{ ,com } a \neq x_0.$$

Substituindo o ponto $P(x_0, y_0)$ na equação da elipse, obtemos:

$$b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 = a^2 b^2$$
$$a^2 y_0^2 = a^2 b^2 - b^2 x_0^2$$
$$a^2 y_0^2 = b^2 (a^2 - x_0^2)$$

De onde segue que:

$$a^2 - x_0^2 = \frac{a^2 y_0^2}{b^2}.$$

Logo:

$$m = -\frac{x_0 y_0}{\frac{a^2 y_0^2}{b^2}} = -\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}.$$

Parábola

Na Figura 21 mostramos a parábola $y^2 = 4kx$, $k > 0$. No vértice O, a reta tangente é a reta vertical $x = 0$. Num outro ponto qualquer $P(x_0, y_0)$ obteremos a equação (1). Porém, no caso da parábola, os coeficientes são

$$A = m^2, \tag{3.7}$$

$$B = 2(y_0 - m x_0) m - 4k, \tag{3.8}$$

$$C = (y_0 - m x_0)^2. \tag{3.9}$$

Substituindo a equação da reta $y = m(x - x_0) + y_0$, que passa em P, na equação da parábola $y^2 = 4kx$, $k > 0$, obtem-se os coeficientes A, B e C:

$$[m(x-x_0)+y_0]^2 = 4kx$$

$$[mx-mx_0+y_0]^2 = 4kx$$

$$m^2x^2 - m^2xx_0 + mxy_0 - m^2xx_0 + m^2x_0^2 - mx_0y_0 + mxy_0 - mx_0y_0 + y_0^2 = 4kx$$

$$m^2x^2 - 2m^2xx_0 + 2mxy_0 + m^2x_0^2 - 2mx_0y_0 + y_0^2 = 4kx$$

$$m^2x^2 - 2m^2xx_0 + 2mxy_0 + m^2x_0^2 - 2mx_0y_0 + y_0^2 - 4kx = 0$$

$$m^2x^2 + [-2m^2x_0 + 2my_0 - 4k]x + [y_0^2 - 2mx_0y_0 + m^2x_0^2] = 0$$

$$m^2x^2 + [2(y_0 - mx_0)m - 4k]x + (y_0 - mx_0)^2 = 0.$$

Substituindo as relações 3.7 e 3.8 na condição ii), obtemos:

$$x_0 = -\frac{B}{2A}$$

$$x_0 = -\frac{2(y_0 - mx_0)m - 4k}{2m^2}$$

$$x_0 = -\frac{(y_0 - mx_0)m - 2k}{m^2},$$

cuja solução é

$$m = \frac{2k}{y_0}.. \tag{3.10}$$

A relação 3.10 é obtida da condição $i)\triangle = 0$. Assim,

$$B^2 - 4AC = 0$$

$$[2(y_0 - mx_0)m - 4k]^2 - 4m^2(y_0 - mx_0)^2 = 0$$

$$4m^4x_0^2 - 4m^3x_0y_0 + 8km^2x_0 - 4m^3x_0y_0 + 4m^2y_0^2 - 8kmy_0 + 8km^2x_0 - 8kmy_0 + 16k^2 + \\ + 8m^3x_0y_0 - 4m^4x_0^2 - 4m^2y_0^2 = 0$$

$$km^2x_0 - 8kmy_0 + 8km^2x_0 - 8kmy_0 + 16k^2 = 0$$

$$16kx_0m^2 - 16ky_0m + 16k^2 = 0$$

$$x_0m^2 - y_0m + k = 0$$

.

Observe que nesta última igualdade, $\triangle = 0$. Isso implica que:

$$m = -\frac{-y_0}{2x_0} \implies m = \frac{y_0}{2x_0}.$$

Substituindo o ponto $P(x_0, y_0)$ na equação da parábola, obtemos:

$$y_0^2 = 4kx_0.$$

De onde segue que:

$$x_0 = \frac{y_0^2}{4k}.$$

Logo:

$$m = \frac{y_0}{2\frac{y_0^2}{4k}} = \frac{2k}{y_0}.$$

Hipérbole

No caso da hipérbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ (Figura 22), as retas tangentes nos vértices $V_1(-a, 0)$ e $V_2(a, 0)$, $a, b > 0$, têm equações $x_0 = -a$ e $x = a$, respectivamente. Consideremos outro ponto $P(x_0, y_0)$ da hipérbole. Nesse caso, a equação (1) segue com os coeficientes

$$A = (b^2 - a^2m^2), \tag{3.11}$$

$$B = -2a^2m(y_0 - mx_0), \tag{3.12}$$

$$C = -a^2(y_0 - mx_0)^2 - a^2b^2. \tag{3.13}$$

Substituindo a equação da reta $y = m(x - x_0) + y_0$, que passa em P, na equação da hipérbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, obtém-se os coeficientes A, B e C:

$$b^2x^2 - a^2[m(x - x_0) + y_0]^2 = a^2b^2$$
$$b^2x^2 - a^2(mx - mx_0 + y_0)^2 = a^2b^2$$
$$b^2x^2 - a^2(m^2x^2 - m^2xx_0 + mxy_0 - m^2xx_0 + m^2x_0^2 - mx_0y_0 + mxy_0 - mx_0y_0 + y_0^2) = a^2b^2$$
$$b^2x^2 - a^2(m^2x^2 - 2m^2xx_0 + 2mxy_0 + m^2x_0^2 - 2mx_0y_0 + y_0^2) = a^2b^2$$
$$b^2x^2 - a^2m^2x^2 + 2a^2m^2xx_0 - 2a^2mxy_0 - a^2m^2x_0^2 + 2a^2mx_0y_0 - a^2y_0^2 = a^2b^2$$
$$(b^2 - a^2m^2)x^2 + (2a^2m^2x_0 - 2a^2my_0)x + (-a^2m^2x_0^2 + 2a^2mx_0y_0 - a^2y_0^2) = a^2b^2$$

$$(b^2-a^2m^2)x^2+[-2a^2m(y_0-mx_0)]x-a^2(y_0^2-2mx_0y_0+m^2x_0^2)=a^2b^2$$
$$(b^2-a^2m^2)x^2+[-2a^2m(y_0-mx_0)]x-a^2(y_0-mx_0)^2=a^2b^2$$
$$(b^2-a^2m^2)x^2+[-2a^2(y_0-mx_0)m]x-a^2(y_0-mx_0)^2-a^2b^2=0.$$

Substituindo as relações 3.11 e 3.12 na condição ii), obtemos:

$$x_0=-\frac{B}{2A}$$
$$x_0=-\frac{-2ma^2(y_0-mx_0)}{2(b^2-a^2m^2)}$$
$$x_0=\frac{a^2(y_0-mx_0)m}{b^2-a^2m^2}.$$

cuja solução é

$$m=\frac{x_0b^2}{y_0a^2}. \tag{3.14}$$

A relação 3.14 é obtida da condição $i)\triangle=0$. Assim,

$$B^2-4AC=0$$
$$[-2ma^2(y_0-mx_0)]^2-4(b^2-a^2m^2)[-a^2(y_0-mx_0)^2-a^2b^2]=0$$
$$4m^2a^4(y_0-mx_0)^2-4(b^2-a^2m^2)[-a^2(y_0-mx_0)^2-a^2b^2]=0$$
$$m^2a^4(y_0-mx_0)^2-(b^2-a^2m^2)[-a^2(y_0-mx_0)^2-a^2b^2]=0$$
$$m^2a^4(y_0-mx_0)^2-(b^2-a^2m^2)a^2[-(y_0-mx_0)^2-b^2]=0 \text{ com } a\neq 0$$
$$m^2a^2(y_0-mx_0)^2-(b^2-a^2m^2)[-(y_0-mx_0)^2-b^2]=0$$
$$m^2a^2(y_0-mx_0)^2+b^2(y_0-mx_0)^2+b^4-a^2m^2(y_0-mx_0)^2-a^2m^2b^2=0$$
$$b^2(y_0-mx_0)^2+b^4-a^2m^2b^2=0 \text{ com } b\neq 0$$
$$(y_0-mx_0)^2+b^2-a^2m^2=0$$
$$y_0^2-2y_0mx_0+m^2x_0^2+b^2-a^2m^2=0$$
$$(x_0^2-a^2)m^2-2y_0x_0m+b^2+y_0^2=0.$$

Observe que, nesta útima igualdade, $\triangle=0$. Isso implica que:

$$m=-\frac{-2x_0y_0}{2(x_0^2-a^2)} \implies m=\frac{x_0y_0}{x_0^2-a^2}.$$

Substituindo o ponto $P(x_0,y_0)$ na equação da hipérbole, obtemos:

$$b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2$$

$$a^2y_0^2 = b^2x_0^2 - a^2b^2$$

$$a^2y_0^2 = b^2(x_0^2 - a^2).$$

De onde segue que:

$$x_0^2 - a^2 = \frac{a^2y_0^2}{b^2}.$$

Logo

$$m = \frac{x_0y_0}{\frac{a^2y_0^2}{b^2}} = \frac{x_0b^2}{y_0a^2}.$$

3.3 Prova das Propriedades

A seguir, provamos as propriedades **P1**, **P2** e **P3**.

P1. Examinando a Figura 20, esta propriedade é imediata em alguns pontos especiais. Nos pontos $P = V_3(0, b)$ ou $P = V_4(0, -b)$ o triângulo é isósceles. Logo, pela geometria da figura obtemos $tg\alpha = tg\beta = \frac{b}{c}$, e nos pontos $P = V_1$ ou $P = V_2$, $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$. Consideremos, então, os demais casos.

Caso 1. $x_0 \neq c, -c$

Sejam s a reta que passa nos pontos $P(x_0, y_0)$ e $F_1(-c, 0)$, e α_s sua inclinação. Seu coeficiente angular é então $m_s = \dfrac{y_0}{x_0 + c}$. Seja r a reta tangente à elipse no ponto P e α_r sua inclinação. Seu coeficiente angular foi obtido na seção anterior: $m_r = -\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$. Pela figura, vê-se que $\alpha + \alpha_r = \pi + \alpha_s$, ou seja, $\alpha = \alpha_s - \alpha_r + \pi$, e, portanto, $tg\alpha = tg(\alpha_s - \alpha_r)$. Como

$$tg(\alpha_s - \alpha_r) = \frac{tg\alpha_s - tg\alpha_r}{1 + tg\alpha_s tg\alpha_r}$$

$$tg\alpha = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r}. \tag{3.15}$$

Substituindo os valores de mr e ms na fórmula 3.15 e simplificando, resulta

$$tg\alpha = tg(\alpha_r - \alpha_s) = \frac{a^2y_0^2 + b^2x_0^2 + b^2x_0c}{a^2y_0x_0 + ca^2y_0 - x_0y_0b^2} = \frac{b^2}{cy_0} \tag{3.16}$$

Para obter este último resultado usamos $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$ e $b^2 = a^2 - c^2$ no numerador e denominador, respectivamente. A reta t que passa nos pontos $P(x_0, y_0)$ e $F_2(c, 0)$ tem inclinação α_t e coeficiente angular $m_t = \dfrac{y_0}{x_0 - c}$. Considere o triângulo F_2PA onde se tem $\beta + \alpha_t + \pi - \alpha_r = \pi$. Segue disto que $\beta = \alpha_r - \alpha_t$ donde

$$tg\beta = \frac{m_r - m_t}{1 + m_r m_t}. \tag{3.17}$$

Substituindo os valores de m_r e m_t nesta última relação, deduz-se o resultado

$$tg\beta = \frac{b^2}{cy_0}. \tag{3.18}$$

Comparando 3.16 e 3.18, $\alpha = \beta$.

Caso 2. $x_0 = -c$

Neste caso, $y_0 = \dfrac{b^2}{a}$ e a reta s é vertical. Nesta situação $\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha_r$ e

$$tg\alpha = \frac{1}{m_r} = -\frac{a^2y_0}{b^2x_0} = \frac{a^2y_0}{b^2c} = \frac{a}{c}. \tag{3.19}$$

Pela geometria da figura, nesse caso, $\beta = \pi - \alpha_t + \alpha_r$, de onde $tg\beta = tg(\alpha_r - \alpha_t)$ de sorte que

$$tg\beta = \frac{m_r - m_t}{1 + m_r m_t} = \frac{b^2}{cy_0} = \frac{a}{c}. \tag{3.20}$$

Uma vez que ambas 3.19 e 3.20 são iguais à $\frac{a}{c}$, segue que $tg\alpha = tg\beta$. Portanto, $\alpha = \beta$.

P2. No ponto $O(0, 0)$, o vértice da parábola, $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$. Vejamos nos demais pontos.

Caso 1. $x_0 \neq 0$, e $x_0 \neq k$.

Sabemos que a reta tangente em P tem coeficiente angular $m_r = \frac{y_0}{2x_0}$. Seja l a reta $y = y_0$ cujo coeficiente angular é $m_l = 0$. Pela Figura 21, vê-se que $\beta = \alpha_r$ e, assim,

$$tg\beta = m_r = \frac{y_0}{2x_0}. \tag{3.21}$$

Quanto a α, observa-se que $\alpha = \alpha_s - \alpha_r$ e, assim,

$$tg\alpha = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r}. \tag{3.22}$$

A reta s tem coeficiente angular $m_s = \dfrac{y_0}{x_0 - p}$. Substituindo os valores de m_s e m_r na equação **??**, obtém-se o mesmo valor dado pela equação 3.21 seguindo-se que $\alpha = \beta$.

Caso 2. $x_0 = k$.

Como $y_0^2 = 4kx_0$, então $y_0 = \pm 2k$. Verifiquemos a propriedade no caso $y_0 = 2k$ em que a reta tangente tem coeficiente angular $m_r = \frac{y_0}{2x_0} = 1$. Sendo assim, $\beta = \alpha_r = \frac{\pi}{4}$. Somando os ângulos internos do triângulo retângulo QFP (pois na situação presente a reta s é vertical) resulta $\alpha_r + \alpha = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = \frac{\pi}{4}$. De forma análoga prova-se o resultado quando $y_0 = -2k$.

P3. Nos vértices da hipérbole esta propriedade é facilmente percebida com ângulos iguais $\frac{\pi}{2}$. Os demais casos são os seguintes:

Caso 1. $x_0 \neq c, -c$.

Seja r uma reta que passa nos pontos $P(x_0, y_0)$ e $F_1(-c, 0)$ (Figura 22). Esta reta tem coeficiente angular $m_r = \frac{y_0}{x_0+c}$. A reta tangente s, como já deduzimos, tem coeficiente angular:

$$m_s = \frac{x_0 y_0}{x_0^2 - a^2} = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}. \tag{3.23}$$

Pela geometria da figura vê-se que $\alpha = \alpha_s - \alpha_r$ de forma que $tg\alpha$ é dada pela equação 3.22. Substituindo os valores de m_r e m_s nesta relação e simplificando, obtemos:

$$\begin{aligned} tg\alpha &= tg(\alpha_s - \alpha_r) \\ &= \frac{b^2 x_0 c + b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2}{a^2 y_0 c + a^2 y_0 x_0 + x_0 y_0 b^2} \\ &= \frac{b^2}{c y_0}. \end{aligned}$$

Na obtenção deste último resultado usamos $b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2 = a^2 b^2$ e $b^2 = c^2 - a^2$ no numerador e denominador, respectivamente.

A reta t que passa nos pontos $P(x_0, y_0)$ e $F_2(c, 0)$ tem inclinação α_t e coeficiente angular $m_t = \frac{y_0}{x_0 - c}$. Além disso, $\beta = \alpha_t - \alpha_s$. Seguindo o procedimento anterior, resulta que $tg\beta = \frac{b^2}{c y_0}$. Assim, $tg\beta = tg\alpha$, logo, $\alpha = \beta$.

4 Algumas Aplicações das Cônicas

Como mencionado nos capítulos anteriores, uma ideia adjacente deste trabalho era a de apresentar um plano de aula direcionado aos alunos do terceiro ano do ensino médio de escolas públicas que trouxesse algumas aplicações das cônicas. Assim, separamos aqui algumas aplicações possíveis e plausíveis para o nível desses alunos.

O enfoque principal do capítulo que segue está nas chamadas propriedades de reflexão das cônicas, vistas comumente na construção de antenas parabólicas e faróis automotivos (no caso da parábola), a construção das chamadas "galerias de murmúrios"e dos espelhos de iluminação de consultórios odontológicos (caso da elipse) e dos telescópios de reflexão (caso da hipérbole). Tais propriedades essencialmente físicas são corolários dos resultados obtidos das propriedades geométricas. As utilizações principais repousam em duas características: 1. no fato de que todo raio partindo de um foco de uma hipérbole ou de uma elipse, ao incidir sobre a própria curva cônica, refletirá um raio que passará sobre o outro foco. 2. Todo raio partindo do foco de uma parábola, ao incidir sobre a própria parábola, refletirá raios paralelos ao eixo da parábola, independentemente, do ângulo entre esse raio e a curva. Essas propriedades geométricas, vinculadas às leis de reflexão da física:

1ª lei da reflexão
O raio de luz refletido e o raio de luz incidente, assim como a reta normal à superfície, pertencem ao mesmo plano, ou seja, são coplanares,

2ª Lei da reflexão
O ângulo de reflexão (r) é sempre igual ao ângulo de incidência (i), fornecem o subsídio técnico para a utilização das mesmas na construção de aparatos tecnológicos;

Embora todas essas aplicações possam não estar ao alcance direto dos alunos do final do ensino médio, a ideia é a de chamar-lhes a atenção para essas possíveis aplicações, ou seja, mostrar-lhes algo da matemática escolar realmente aplicado à matemática da engenharia, por exemplo. Este último capítulo, embora não apresente novos resultados, é essencial para a realização efetiva do plano de ensino proposto.

4.1 A aplicação da Parábola

Como visto, a parábola se caracteriza por ser uma curva com apenas um foco e possui a propriedade de que todo raio, partindo de seu foco, ao incidir sobre a própria parábola, refletirá raios paralelos ao seu eixo. Tal característica fornece uma gama de aplicabilidades no universo da Engenharia. Dentre essas aplicabilidades, uma das mais conhecidas, e que até mesmo carrega o nome da cônica, é a antena parabólica.

Figura 23 – Esboço de uma antena parábolica

Note que o posicionamento do receptor na haste central, encontra-se próximo ou exatamente no foco desse parabolóide[1]. Esse posicionamento implica que todo o sinal recebido na extensão da superfície antena é refletido diretamente para o foco, i.e., o receptor. Esse redirecionamento está diretamente ligado à propriedade refletora das parábolas; esta dita que a partir de um ponto qualquer tracemos um segmento de reta paralelo ao eixo da parábola. Tal segmento, eventualmente, encontra a parábola num ponto e, se a partir deste, traçarmos outro segmento que faça com a curva um ângulo igual ao do primeiro segmento, o segundo segmento passa, necessariamente, pelo foco, como ilustrado na figura a seguir:

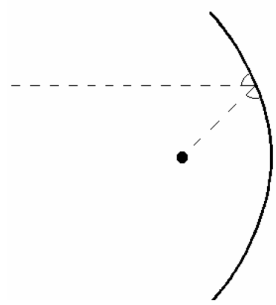

Figura 24 – Ângulo de reflexão da parábola

Fonte: http://www.mat.uc.pt/ jfqueiro/aplicacoes.pdf.

Para cada plano do parabolóide, tem-se uma parábola que se comporta da mesma maneira: recebe o sinal e o reflete para o foco, como pode ser visto a seguir:

[1] Parabolóide de revolução: uma superfície obtida através da rotação de uma parábola ao redor de seu eixo.

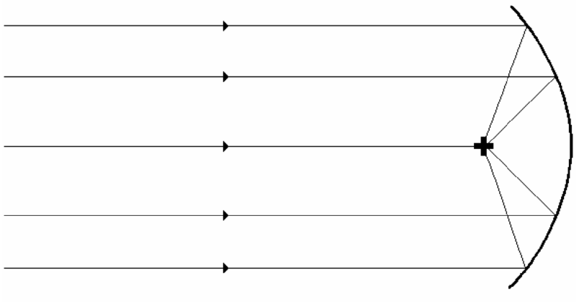

Figura 25 – Plano receptor parábolico

Fonte: http://www.mat.uc.pt/ jfqueiro/aplicacoes.pdf.

Outra aplicação das parábolas se encontra na fabricação dos faróis automotivos. O princípio de aplicação é o mesmo das antenas, mas de maneira reversa: no foco da parábola se encontra uma lâmpada que ilumina uma superfície parabolóide espelhada; esta, por sua vez, reflete os raios de luz paralelos ao seu eixo, como visto nas figuras a seguir:

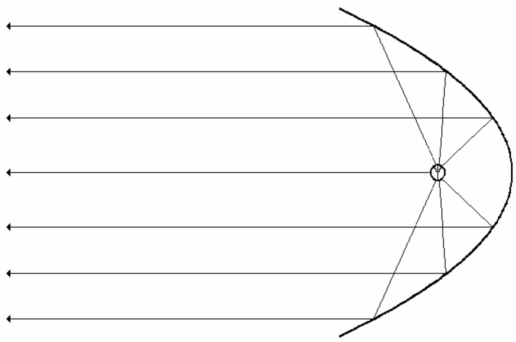

Figura 26 – Plano refletor parabólico

Fonte: http://www.mat.uc.pt/ jfqueiro/aplicacoes.pdf.

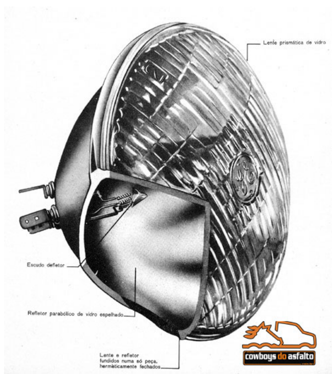

Figura 27 – Farol Parabólico

Fonte: http://www.cowboysdoasfalto.com.br.

4.2 A aplicação da Elipse

Diferente da parábola, a elipse e a hipérbole possuem dois focos. A propriedade de reflexão da elipse infere que, uma vez traçado um segmento de reta a partir de um dos focos e que este encontra a elipse num ponto da curva, se a partir desta intersecção, traçarmos outro segmento que faça com a curva um ângulo igual ao do primeiro segmento, o segundo segmento passa pelo outro foco, como podemos ver na figura a seguir:

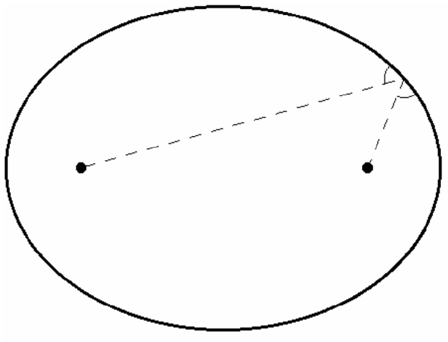

Figura 28 – Elipse e seus ângulos

Fonte: http://www.mat.uc.pt/ jfqueiro/aplicacoes.pdf.

Essa característica fornece outras aplicações para as elipses. Uma dessas são os dispositivos de iluminação dos dentistas. Esse tipo de lanterna consiste num jogo de espelhos com a forma de um elipsóide de rotação, ou seja, vários arcos de elipse e numa lâmpada que se coloca no foco mais próximo. A luz da lâmpada é emitida numa direção e refletida pelo espelho no outro foco, possibilitando que o dispositivo ilumine um ponto e não mais uma área, como no caso da parábola, ajustando-se melhor ao ofício do dentista.

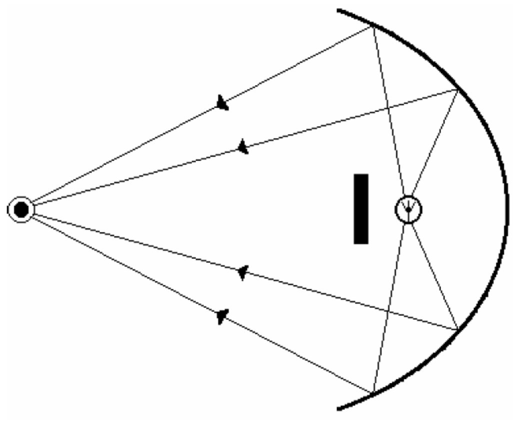

Figura 29 – Espelho elíptico

Fonte: http://www.mat.uc.pt/ jfqueiro/aplicacoes.pdf.

Outra aplicação das elipses é a propriedade de reflexão acústica da elipse. Esta pode ser encontrada em salas que possuem a forma de meio elipsóide (um elipsóide é um sólido que se obtém rodando uma elipse em torno do seu eixo, isto é, da reta definida pelos dois focos). Se duas pessoas se colocarem nos focos e uma delas falar, mesmo que o som seja extremamente fraco, a outra ouvirá perfeitamente, ainda que a sala tenha grandes dimensões e que haja outros ruídos. Existem salas deste tipo (às vezes chamadas "galerias de murmúrios") em vários edifícios públicos na Europa e nos Estados Unidos.

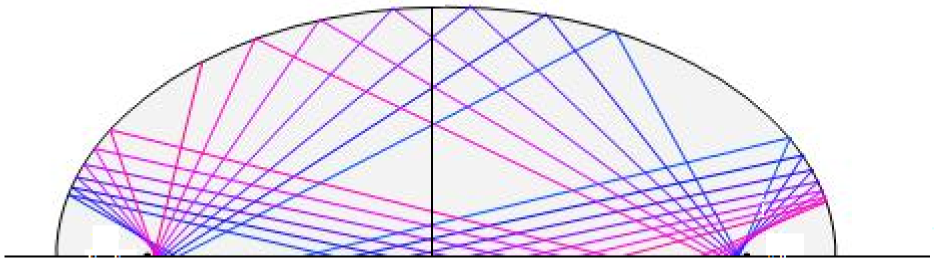

Figura 30 – Representação acústica

Fonte:
http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2011/02/propriedade-refletora-da-elipse.html.

Figura 31 – Grand Central Gallery

Fonte: http://www.historia.ro.

4.3 A aplicação da Hipérbole

A hipérbole é a cônica que se caracteriza por possuir dois ramos e dois focos. Já a propriedade de reflexão da hipérbole infere que, traçado um segmento de reta, a partir de um ponto qualquer, dirigido a um dos focos da hipérbole, este segmento encontra o correspondente ramo da hipérbole num ponto. Se a partir deste, for traçado outro segmento que faça com a curva um ângulo igual ao do primeiro segmento, o segundo segmento passa pelo outro foco, como mostra a figura a seguir:

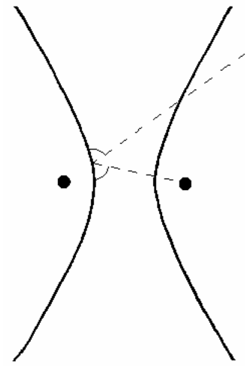

Figura 32 – Hipérbole e seus ângulos

Um exemplo de uma aplicação da hipérbole é o chamado *telescópio de reflexão*. Esse telescópio é constituído, basicamente, por dois espelhos: um maior, que é parabólico, e outro menor, que é hiperbólico. Os dois espelhos estão dispostos de maneira que além dos eixos coincidirem, o foco da parábola coincide com um dos focos da hipérbole, como mostra a figura a seguir:

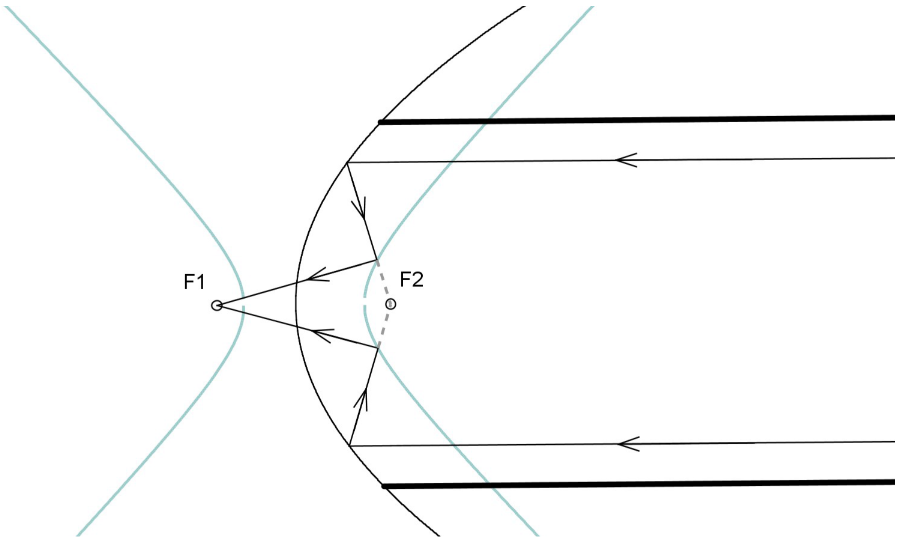

Figura 33 – Telescópio refletor (esquema de espelhos)

Fonte: SOUZA, 2008, p.35.

Quando os raios de luz refletem no espelho parabólico, pela propriedade de reflexão da parábola já vista, eles são direcionados ao foco. Porém, como o foco da parábola também é foco da hipérbole, pela propriedade de reflexão desta, os raios de luz refletem no espelho hiperbólico e seguem em direção ao outro foco da hipérbole. Os raios de luz passam através de um orifício no centro do espelho primário, atrás do qual está uma lente-ocular que permite corrigir ligeiramente a trajetória da luz, que chega finalmente aos olhos do observador ou à película fotográfica, como ilustrado na figura a seguir:

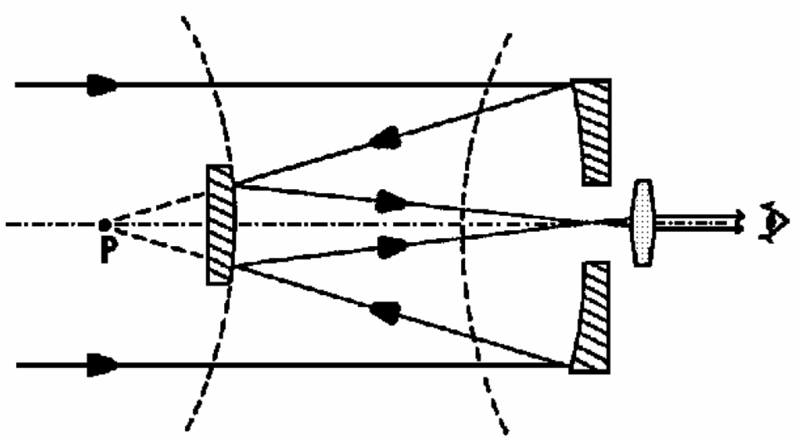

Figura 34 – Esquema Telescópio refletor

Fonte: http://www.mat.uc.pt/ jfqueiro/aplicacoes.pdf.

A vantagem deste tipo de telescópio consiste em possuir um comprimento menor do que os telescópios de refração (i.e., de lentes elípticas), porém com o mesmo poder de amplificação.

Considerações Finais

O recorte de conceitos e aplicações apresentados nesta dissertação, mostra-se quase que como um guia, um breve livro-texto que pode ser consultado como um suporte resumido para a elaboração de planos de aula específicos para cada uma das cônicas.

Evidenciamos, em primeiro lugar, o histórico e os primeiros matemáticos a tratarem do assunto. Apolônio foi o matemático que estudou as seções cônicas de uma maneira mais minuciosa, apenas alguns anos depois de Euclides, razão pela qual, o estudo das cônicas não esteve atrelado aos *Elementos*. Apolônio mostrou como gerar todas as cônicas a partir de um único cone de duas folhas, simplesmente variando a inclinação do plano de interseção, além de ter estudado as retas tangentes e normais a uma cônica. Foi ele, também, quem introduziu os nomes parábola, elipse e hipérbole.

Num contexto mais moderno, apresentamos, para cada uma das curvas, seus conceitos, elementos e, finalmente, suas propriedades, utilizando a definição de lugares geométricos e ferramentas da geometria cartesiana. As equações nas coordenadas cartesianas possibilitam a representação das cônicas no plano, que são, usualmente, o único contato dos alunos de ensino médio com as cônicas. Numa tentativa de esclarecer e de ampliar as possibilidades sobre esse tópico, procuramos aprofundar um aspecto específico sobre as cônicas. O resultado mais denso é a demonstração do Teorema de Dandelin-Quetelet. Tal teorema infere que a secção de um cone por um plano tangente a uma esfera inscrita nesse cone, é uma cônica que tem foco no ponto de contato da esfera com o plano. A demonstração desse teorema ultrapassa, e muito, o escopo do que seria possível apresentar aos respectivos alunos, entretanto, fornece uma visão mais ampla, necessária ao professor.

As cônicas também possuem propriedades geométricas notáveis, com inúmeras aplicações práticas. Destaca-se a importância do estudo das cônicas para o desenvolvimento de aspectos do conhecimento de algumas áreas, como na astronomia, na arquitetura e na engenharia. Ressalta-se que a elipse, a parábola e a hipérbole são curvas que possuem a propriedade de reflexão, como mostrado. Isso as tornam importantes em aplicações de produção científica de cunho comercial. Tais aplicações foram utilizadas como ponto de partida para a elaboração de um plano de aula que contemplasse tanto a maneira canônica de tratar as cônicas, quanto uma visão diferenciada que pudesse atrair a curiosidade dos alunos.

Enquanto recorte, vale dizer que esse trabalho poderia ser expandido com referências que envolvessem assuntos de teor mais avançado, contemplando até mesmo conteúdos especificamente de currículos universitários. Haveria margem para trabalhar com mais aspectos das cônicas, como, por exemplo, aplicações computacionais para a visualização.

Essa possibilidade ultrapassaria as possibilidades de conclusão no tempo hábil para a produção desta dissertação, mas pode servir de estímulo para pesquisas futuras.

Referências Bibliográficas

[1] AVILA, Geraldo. **A Hipérbole e os Telescópios.** IN: Revista do Professor de Matemática, V. 34, 1997, P. 22-27.

[2] BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática.**Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blucher, Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

[3] COSTA, G. A. T. F. da. **Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina no.4**, 2007.

[4] COSTA, G. A. T. F. da. **Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina no.5**, 2008.

[5] EUCLIDES, Os elementos. Tradução e introdução. Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP: 2009.

[6] LEHMANN, C. H. **Geometria Analítica.** Editora Globo, 2007.

[7] NETO, Francisco Q. & GUIMARÃES, Luiz Carlos. **Tradução comentada da obra 'novos elementos das seções cônicas' (Philippe de La Hire - 1679) e sua relevância para o ensino de matemática.** Anais do VI seminário de Pesquisa em Educação Matemática do Estado do Rio do Janeiro. Rio de Janeiro, 2008. Disponível em: <http://www.sbemrj.com.br/sbemrjvi/artigos/d6.pdf>. Acesso em: 20/05/2014.

[8] MACHADO, Nílson José. Matemática e a língua materna. São Paulo: Cortez, 1998.

[9] MINAKI, Camila R. & SODRÉ, Ulysses. **O Conceito de Cone**. Disponível em: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/cone/cone.htm> Acesso em: 10/04/2014.

[10] QUEIRÓ, João Filipe. **A elipse, a parábola e a hipérbole – propriedades e aplicações**. Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/ jfqueiro/aplicacoes.pdf> Acesso em: 30/04/2014.

[11] SATO, Jocelino. **Aspectos históricos e a importância das cônicas**. Disponível em: <http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/node2.html> Acesso em: 21/03/2014.

[12] SELZER, S. **Geometria Analitica Plana y Complementos de Algebra.** Editorial Construciones, Buenos Aires, 1948.

[13] SIMMONS, George F. **Cálculo com Geometria Analítica.** V. 2. Editora McGraw Hill, 1998.

[14] SIQUEIRA, Paulo Henrique & COSTA, Antonio Mochon. **Cônicas**. Disponível em: <http://www.degraf.ufpr.br/docs/conicas.pdf> Acesso em: 15/04/2014.

[15] SOUZA, Eric W. **Cônicas e Aplicações.** Monografia conclusiva do Curso de Especialização em Matemática para Professores. Belo Horizonte, Minas Gerais. Universidade Federal de Minas Gerais, 2008. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/ espec/monografiasPdf/monografia_eric.pdf>. Acesso em: 10/05/2014.

[16] STEINBRUCH, Alfredo & WINTERLE, Paulo. **Geometria analítica**. 2ªEdição. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

[17] SUVOROV, I. **Matemáticas Superiores.** Editorial Mir, Moscou, 1978.

[18] VALLADARES, Renato J. C. **Elipse, Sorrisos e Sussurros.** IN: Revista do Professor de Matemática, V. 36, 1998, P. 24-28.

[19] WAGNER, Eduardo. **Porque as antenas são parabólicas.** IN: Revista do Professor de Matemática, V. 33, 1997, P. 10-15.

Apêndice

PLANO DE AULA

ASSUNTO: Seções Cônicas

CONTEÚDO: A parábola

DURAÇÃO: 50 minutos

JUSTIFICATIVA

As Cônicas, a elipse, a parábola e a hipérbole, estão presentes em instrumentos e construções que utilizamos em nosso cotidiano. O motivo de se estudar as cônicas é o de de evidenciá-las apenas como lugar geométrico. Nesta aula, tentaremos articular além do lugar comum ao nos aprofundarmos não apenas nas particularidades de seus elementos principais, mas, também, em suas propriedades refletoras e de que maneira elas são aproveitadas pela sociedade, com exemplos em diversas áreas. Nessa aula, abordademos a parábola.

OBJETIVOS

- Identificar a parábola como lugar geométrico.
- Reconhecer componentes da parábola (foco e diretriz).
- Construir geometricamente a parábola.
- Identificar o uso das parábolas no cotidiano.

RECURSOS DIDÁTICOS

- Giz e quadro negro.
- Livro didático.
- Uma cartolina.
- Uma régua (esquadro).

- Um lápis.
- Um cordão.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Aula expositiva e dialogada. Iniciaremos a aula com o conceito de seções cônicas. Em seguida, será definido a parábola como lugar geométrico. Na continuação, faremos um experimento simples para a construção da parábola com régua, lápis, cordão e cartolina. Nesse momento, os alunos serão divididos em grupos. A ideia é verificar as características das parábolas nesse modelo experimental. Por fim, será abordado o uso das parábolas em instrumentos de nosso cotidiano como: faróis de automóveis e antenas parabólicas.

AVALIAÇÃO

A avaliação de caráter formativo será através da observação do aluno com relação a interesse, respeito e participação. Com relação a avaliação de caráter cognitivo, os alunos serão avaliados através de atividades (provas, trabalhos, apresentações etc.) que busquem refletir, em notas ou conceitos, o modo próprio de cada aluno compreender os conteúdos trabalhados.

REFERENCIAL TEÓRICO

COSTA, G. A. T. F. da. **Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina no.4**, 2007.

SILVA, Claudio Xavier da; FILHO, Benigno Barreto. **Matemática do Ensino Médio**. Volume 3. 2ª ed. São Paulo: FTD. 2005.

SIQUEIRA, Paulo Henrique & COSTA, Antonio Mochon. **Cônicas**.
Disponível em: <http://www.degraf.ufpr.br/docs/conicas.pdf> Acesso em: 15/04/2014.

Seções Cônicas

Dado um cone de folha dupla e um plano secante que não passa pelo vértice do mesmo, chamamos de seções cônicas ou, simplesmente, de cônicas à curva obtida através do corte do cone pelo plano. Dependendo de onde ocorre o corte, a cônica poderá ser classificada como uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola.

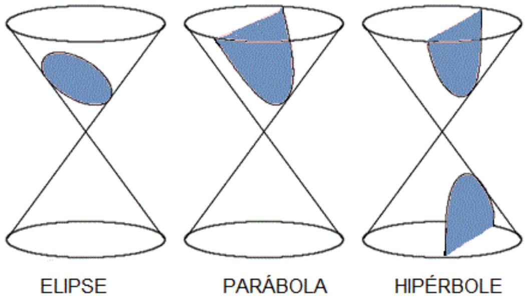

Figura 35 – Seções cônicas

Fonte: http://www.andremachado.org/artigos/905/secoes-conicas.html.

Caso o plano secante passe pelo vértice do cone, teremos uma degeneração, que poderá ser um ponto, uma reta, um par de retas concorrentes.

A parábola

Definição: a parábola é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de um ponto fixo chamado foco, que não pertence à uma reta, também fixa, chamada diretriz.

Seja F o foco e d a diretriz, na figura abaixo, se $PD = PF$, então P é um ponto da parábola de foco F e diretriz d.

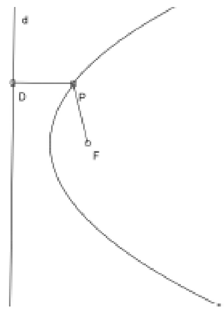

Figura 36 – A parábola.

Fonte: SIQUEIRA & COSTA, 2014, p.4.

Construção da parábola

Trace uma reta x sobre a cartolina e, sobre ela, escolha um ponto O, a igual distância de dois outros pontos sobre a mesma reta. Marque-os com auxílio de um compasso ou régua. Sejam eles A e F, como na Figura abaixo. Trace pelo ponto A a reta KL perpendicular à reta x. Em seguida, alinhe a borda de uma régua à reta KL e fixe-a nesta posição. Você precisará também de um esquadro. Seu menor cateto deve ser posicionado ao longo da borda da régua alinhada com KL. O cateto maior NB do esquadro deve estar posicionado, inicialmente, sobre x. No vértice do ângulo $\angle B$ prende-se uma das pontas de um cordão cujo comprimento deve ser igual a NB. A outra ponta do cordão prende-se a F onde deve poder girar sem enrolar-se. Esticando o cordão com a ponta de um lápis, posicione-o inicialmente no ponto O. Em seguida, deslize o esquadro ao longo da régua e a ponta do lápis, ao longo do cateto NB, mantendo o cordão sempre esticado. Com este movimento, traça-se uma curva sobre a cartolina. A curva traçada é um arco de parábola. De fato, o comprimento do cordão é igual ao do cateto NB de sorte que, se M é um ponto sobre a curva, a distância FM é sempre igual à distância MN.

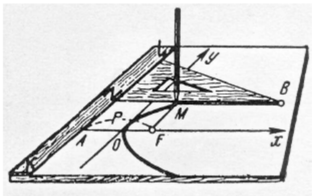

Figura 37 – Construção da parábola

Fonte: COSTA, 2007, p.85.

O uso da Parábola

A parábola é a melhor forma para construirmos antenas parabólicas e espelhos dos faróis de automóveis, por exemplo. A princípio, a forma parabólica é ideal, pois no caso das antenas parabólicas as ondas de rádio que se originam do espaço são muito fracas, devido à sua distância e, portanto, a parábola capta estas ondas em uma superfície relativamente grande e concentra em um único ponto (o foco). Desta forma os sinais (raios paralelos vindos do espaço) são amplificados.

Nos faróis dos carros e motos, o foco da parábola muda de funcionamento, com relação às antenas parabólicas (receptora), passando a ser origem dos raios luminosos. Os raios de luz então saem de forma paralela uns dos outros iluminando a região logo a frente dos automóveis.