

Flávia Caraiba de Castro

**QUANTIDADES INTENSIVAS: ANÁLISE DE UMA
INTERVENÇÃO COM ALUNOS DO 5º ANO DO ENSINO
FUNDAMENTAL**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT), da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Mestre em Educação Científica e Tecnológica.

Orientadora: Prof. Dr^a. Heloiza Barbosa
Coorientador: Prof. Dr. David Antonio da Costa.

Florianópolis
2014

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária
da UFSC.

Castro, Flávia Caraiba de Castro

QUANTIDADES INTENSIVAS: ANÁLISE DE UMA
INTERVENÇÃO COM ALUNOS DO 5º ANO DO ENSINO
FUNDAMENTAL / Flávia Caraiba de Castro Castro;
orientadora, Heloiza Helena de Jesus Barbosa
Barbosa; coorientador, David Antonio da Costa Costa.
- Florianópolis, SC, 2014.
253 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de
Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e
Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Educação
Científica e Tecnológica.

Inclui referências

1. Educação Científica e Tecnológica. 2. Ensino
de frações. 3. Conceito medida. 4. Quantidades
Intensivas. I. Barbosa, Heloiza Helena de Jesus
Barbosa. II. Costa, David Antonio da Costa. III.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de
Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica.
IV. Título.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
CENTRO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
CURSO DE MESTRADO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

**“Quantidades Intensivas: Análise de uma intervenção com
alunos do 5º Ano do Ensino Fundamental”**

Dissertação submetida ao
Colegiado do Curso de Mestrado
em Educação Científica e
Tecnológica em cumprimento
parcial para a obtenção do título
de Mestre em Educação Científica
e Tecnológica

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 21 de março de 2014

Heloiza Helena de Jesus Barbosa (Orientadora - EED/UFSC)


David Antonio da Costa (Co-orientador - MEN/CED/UFSC)

Aparecido dos Santos (Examinador - Univ. 9 de Julho)

Joseane de Pinto Arruda (Examinadora - CA/UFSC)

Claudia Glavam Duarte (Examinadora - CED/MEN/UFSC)

Cláudia Regina Flores (Suplente - CED/MEN/UFSC)


Carlos Alberto Marques

Coordenador do PPGECT



Flávia Caraíba de Castro

Florianópolis, Santa Catarina, 2014.

Aos meus avós Francisco Sales
Tavares de Castro e Marluce Godinho
de Castro (in memoriam).

AGRADECIMENTOS

Quero registrar minha gratidão a Deus por guiar meus passos e por todas as pessoas postas ao meu lado, uma vez que sem elas certamente eu não conseguiria ter realizado esta caminhada. Dentre essas pessoas, destaco e agradeço:

Ao meu pai Thelmo Luiz Godinho de Castro e a minha mãe Marineyde Lourença Caraiba, que não mediram esforços me incentivando na busca pelo conhecimento e com afeto souberam compreender minha ausência;

Aos familiares, dos quais sempre obtive muito carinho e força para prosseguir;

Ao Jonathan Faraco França e família, pela presença querida e compreensiva em todos os momentos;

À professora Dr. Heloiza Barbosa e ao professor Dr. David Antonio da Costa, pela orientação e dedicação para a realização desse estudo;

Aos professores que compuseram a banca, Aparecido dos Santos, Claudia Glavam Duarte e Joseane Pinto de Arruda.

Aos professores do mestrado, que contribuíram para meu desenvolvimento profissional e pessoal;

À Universidade Federal de Santa Catarina, pela oportunidade de crescimento, que com o apoio da CAPES, me concedeu bolsa-auxílio;

Ao Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Santa Catarina, que cooperou para a realização deste estudo;

Aos alunos da turma do 5º ano, sujeitos da pesquisa, que colaboraram para que este estudo fosse efetivado.

À Todos os meus carinhosos agradecimentos.

RESUMO

A presente dissertação teve por objetivo identificar quais as contribuições da compreensão do significado de medida, no contexto de quantidades intensivas, para a aprendizagem dos Números Racionais em sua representação fracionária para alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. O estudo propôs-se a responder a seguinte questão de pesquisa: “Ensinar frações considerando o significado de medida dentro do contexto de quantidades intensivas pode ter algum efeito para o alargamento do entendimento de outros significados de fração?” Para tanto, foi realizado um estudo com 24 alunos, advindos do Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Santa Catarina, que compuseram um grupo onde passou por uma intervenção que contemplou o significado medida, em contexto de quantidade intensiva. A fundamentação teórica da pesquisa contou com a Teoria dos Campos Conceituais proposta por Vergnaud (1988; 2001) e as ideias teóricas de Nunes *et al.* (2003) com relação aos diferentes significados da fração. A metodologia constou de um estudo quase experimental dividido em três etapas: a primeira, denominada etapa “A”, referiu-se à aplicação do pré-teste aos alunos que responderam individualmente. A segunda, chamada de etapa “B”, voltou-se para fase de intervenção, momento que individualmente foi ensinado o significado de medida no contexto de quantidades intensivas aos alunos. E por último, a etapa denominada “C” que se referiu à aplicação dos dois pós-testes. Os dados foram analisados dentro de dois momentos: um voltado à análise quantitativa em que se buscou relacionar os percentuais de acerto. O segundo momento referiu-se à análise dos dados do ponto de vista qualitativo,

visando identificar os tipos de erros cometidos pelos alunos, bem como analisar suas estratégias na resolução. Os resultados mostraram que o significado medida teve um papel importante na aprendizagem da fração pelos alunos e trouxe contribuições para o início da apropriação desse objeto. Dessa forma, foi possível encontrar efeitos distintos na aprendizagem de fração.

Palavras-chave: Fração, Quantidade intensiva, Medida.

ABSTRACT

This thesis aimed to identify the contributions of understanding the meaning of measurement, in the context of intensive amount, for learning the Rational Numbers in its fractional representation for students of the 5th year of elementary school. The study's purpose was to answer the following research question: "Teaching fractions considering the meaning of measurement, within the context of intensive amount, may have some effect for extending the understanding of other meanings of fraction?" To this end, a study was conducted with 24 students, coming from the *Escola de Aplicação* of the *Universidade Federal de Santa Catarina*, who formed a group which underwent an intervention that eye the significance measure, in the intensive amount context. The theoretical foundation of the research included the Conceptual Fields Theory proposed by Vergnaud (1988, 2001) and the theoretical ideas of Nunes *et al.* (2003) with respect to the different meanings of the fraction. The methodology consisted of a quasi-experimental study divided into three stages: the first one called stage "A", referred to the application of a pre-test in students that answered singly. The second one, called the stage "B", turned to the intervention phase, moment that singly was taught the meaning of measurement, in the context of intensive amount, to the students. And last step called "C" who referred the application of two post-tests. Data were analyzed in two stages: one related to quantitative analysis in which it was sought to relate the percentage of correct answers. The second point referred to analysis of data from a qualitative point of view, to identify the kinds of errors made by students, as well as to analyze their strategies in solving. The results showed that the meaning measure has an important role in

learning of fraction by students and brought contributions to the top of the ownership of that object. Thus, it was possible to find different effects on learning fraction.

Keywords: Fraction. Intensive amount. Measurement.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Campo Conceitual: Estruturas Multiplicativas.....	33
Figura 2- Conceito do significado Medida associado ao Campo conceitual de Vergnaud.	34
Figura 3-Exemplo da Questão 9.	64
Figura 4 - Desenho do experimento.....	81
Figura 5- Materiais disponibilizados para a resolução do problema 3.....	115
Figura 6. Materiais disponibilizados para a resolução do problema 4.	116
Figura 7. Questão 14 do pós-teste 1 resolvida pelo aluno com a estratégia E1.	178
Figura 8. Questão 5 do pós-teste 1 resolvida pelo aluno com a estratégia E2..	180
Figura 9. Questão 8 do pós-teste 1 resolvida pelo aluno com a estratégia E3..	181
Figura 10. Questão 7 do pós-teste 1 resolvida pelo aluno com a estratégia E4.	182
Figura 11. Questão 10 do pós-teste 1 resolvida pelo aluno com a estratégia E4.	183
Figura 12. Questão 15 do pós-teste 1 resolvida pelo aluno com a estratégia E5.	184
Figura 13. Questão 5 do pós-teste 1 resolvida pelo aluno com a estratégia E6.	184

LISTA DE QUADROS

Quadro 1- Distribuição das questões segundo o significado parte-todo, quociente, operador multiplicativo e a variável, presença ou não de figura.	82
Quadro 2 - Distribuição das questões segundo o significado medida e a variável, presença ou não de figura.	83
Quadro 3. Distribuição das questões segundo o significado número e a variável, presença ou não de figura.	83
Quadro 4. Apresentação das questões do pré-teste.	84
Quadro 5- Distribuição das questões segundo as situações abordadas e os materiais utilizados.	111
Quadro 6- Distribuição das questões segundo o significado parte-todo, quociente, operador multiplicativo e a variável, presença ou não de figura.	130
Quadro 7- Distribuição das questões segundo o significado medida e a variável, presença ou não de figura.	130
Quadro 8 - Distribuição das questões segundo o significado número e a variável, presença ou não de figura.	130
Quadro 9. Apresentação das questões do pós-teste.	131
Quadro 10- Distribuição das questões segundo o significado parte-todo, quociente, operador multiplicativo e a variável, presença ou não de figura.	154
Quadro 11- Distribuição das questões segundo o significado medida e a variável, presença ou não de figura.	154
Quadro 12 - Distribuição das questões segundo o significado número e a variável, presença ou não de figura.	155
Quadro 13 - Equivalência das questões (de 1 a 10) do pós-teste 1 com o pós-teste 2.	155
Quadro 14 - Equivalência das questões (de 11 a 18) do pós-teste 1 com o pós-teste 2.	155

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Descrição dos acertos das questões referentes aos 5 significados de fração no pré-teste.....	159
Tabela 2. Descrição dos acertos das questões referentes aos 5 significados de fração no pós-teste 1.....	162
Tabela 3 Descrição dos acertos das questões referentes aos 5 significados de fração no pós-teste 2.....	164

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1. Percentagem de acertos referentes aos cinco significados de fração no pré-teste e no pós-teste 1.....	163
Gráfico 2. Percentagem de acertos referentes aos cinco significados de fração no pré-teste, no pós-teste 1 e no pós-teste 2.....	165
Gráfico 3. Percentagem de acertos referentes às questões do significado partetodo com quantidade contínua sem figura (QCSF) e com figura (QCCF) e com quantidade discreta sem figura (QDSF) e com figura (QDCF).....	166
Gráfico 4. Percentagem de acertos referentes às questões do significado quociente com quantidade contínua sem figura (QCSF) e com figura (QCCF) e com quantidade discreta sem figura (QDSF) e com figura (QDCF).....	167
Gráfico 5. Percentagem de acertos do pré-teste referentes as questões do significado Quociente.	168
Gráfico 6. Percentagem de acertos do pós-teste 1 referentes às questões do significado Quociente.	169
Gráfico 8. Percentagem de acertos do pós-teste 2 referentes às questões do significado Quociente.	170
Gráfico 9. Percentagem de acertos referentes às questões do significado operador multiplicativo com quantidade contínua sem figura (QCSF) e com figura (QCCF) e com quantidade discreta sem figura (QDSF) e com figura (QDCF).....	170
Gráfico 10. Percentagem de acertos do pós-teste 1 referentes às questões do significado Operador Multiplicativo.	171
Gráfico 11. Percentagem de acertos do pós-teste 2 referentes às questões do significado Operador Multiplicativo.	172
Gráfico 12. Percentagem de acertos referentes às questões do significado número de reta numérica (Reta) e de desigualdades (Desig).	172
Gráfico 12. Percentagem de acertos referentes às questões do significado medida com quantidade extensiva sem figura (QESF) e com figura (QECF) e com quantidade intensiva sem figura (QISF) e com figura (QICF).	173
Gráfico 13. Percentagem média de acertos referentes às questões do pré-teste e pós-teste 1, segundo os cinco significados de fração (PT – parte-todo, QU – quociente, OM – operador multiplicativo, ME – medida e NU - número).	176

SUMÁRIO

CAPÍTULO I	15
<i>INTRODUÇÃO</i>	15
1.1 PROBLEMÁTICA.....	16
1.2 OBJETIVO E QUESTÃO DE PESQUISA	26
1.3 DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS DA DISSERTAÇÃO	29
CAPÍTULO II	31
<i>APOIO TEÓRICO DO ESTUDO</i>	31
2.1 INTRODUÇÃO	31
2.2 VERGNAUD: A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS	31
2.3 OS ESTUDOS DE TEREZINHA NUNES E PETER BRYANT...39	
CAPÍTULO III	43
<i>REVISÃO DA LITERATURA</i>	43
3.1. INTRODUÇÃO	43
3.2. PESQUISAS SOBRE ENSINO E APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS 43	
3.2.1. Referindo-se aos estudos voltados ao ensino, apresentamos:	44
3.2.2. Referindo-se aos estudos sobre aprendizagem, apresentamos:	49
3.2.3. Pesquisas sobre quantidades intensivas	70
CAPÍTULO IV	77
<i>MÉTODOLOGIA</i>	77
4.1. INTRODUÇÃO	77
4.2. DISCUSSÃO TEÓRICA METODOLÓGICA	77
4.3. SUJEITOS DA PESQUISA	78
4.4. MATERIAIS	80
4.4.1. Apresentação e descrição da etapa a.....	81
4.4.2. Apresentação e descrição da etapa b.....	109

4.4.3. Apresentação e descrição da etapa c.....	129
CAPÍTULO V	157
<i>ANÁLISE DOS DADOS</i>	157
5.1. INTRODUÇÃO	157
5.2. ANÁLISE QUANTITATIVA	158
5.2.1. Desempenho dos alunos nos instrumentos diagnósticos...	158
5.3. ANÁLISE QUALITATIVA	177
5.3.1. Estratégias encontradas nos instrumentos diagnósticos ..	178
5.3.2. Estratégias encontradas na intervenção de ensino	185
CAPÍTULO VI.....	197
<i>DISCUSSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS</i>	197
6.2 SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS	203
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	205

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

No trajeto percorrido ao longo dos anos como estudante, me deparei com grandes dificuldades na compreensão de alguns conteúdos matemáticos, dos quais o que mais se destacou foi o referente aos Números Racionais. Mais tarde, já na graduação, tive a oportunidade de participar do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência-PIBID, no qual pude presenciar muitas destas dificuldades em salas de aula do Ensino Médio, desencadeando muitas inquietações e reflexões.

Percebi, por exemplo, muita resistência, dos alunos, com os cálculos que envolviam os números racionais na sua representação fracionária. Observei que grande parte deles preferia trabalhar com números decimais, com aproximações, do que efetuar os algoritmos das operações com os números fracionários. Assim, surgiu a hipótese de que o problema da dificuldade em lidar com estes números não estava apenas nos algoritmos, mas na sua compreensão conceitual.

Com isso, comecei a busca por teorias que me ajudassem a pensar sobre a construção do conceito de número fracionário. Sendo meu desafio de tornar o ensino deste tema algo significativo para os alunos, buscando que esse conteúdo não se tornasse estranho ao cotidiano dos mesmos, fazendo da disciplina de Matemática algo familiar e importante na caminhada escolar.

Essa busca e o desejo em poder ajudar os alunos, quando for assumir uma sala de aula, foram fatores motivadores para ingressar no Programa de Pós Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), pois dessa forma, pude

dar continuidade às pesquisas de Terezinha Nunes, que versam sobre os números racionais, podendo assim, prosseguir para alcançar meu objetivo.

Desta forma, o presente estudo enfoca as quantidades intensivas, que são encontradas no significado medida, um dos significados propostos pela classificação apresentada por Nunes *et al* (2003), ao número racional em sua representação fracionária $\frac{a}{b}$, ($a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$), que chamaremos de fração, com o objetivo de fazer um estudo intervencionista com alunos de 5º ano do Ensino Fundamental.

1.1 PROBLEMÁTICA

Os números racionais em sua representação fracionária fazem parte dos conteúdos desenvolvidos pelas escolas a partir do 4º e 5º anos do Ensino Fundamental, e vêm sendo considerados, pela comunidade acadêmica, como um conteúdo problemático na aprendizagem da Matemática nos anos iniciais.

Behr, Lesh, Post e Silver (1983) ressaltam a importância das crianças entenderem as ideias contidas no número racional.

...sua importância pode ser vista a partir de uma variedade de perspectivas: (a) a partir de uma perspectiva prática, a capacidade de lidar com estes conceitos efetivamente melhora muito a habilidade de compreender e lidar com situações e problemas do mundo real, (b) a partir de uma perspectiva psicológica, os números racionais fornecem uma arena rica em que as crianças podem desenvolver e expandir suas estruturas mentais necessárias para o contínuo desenvolvimento intelectual, e (c) a partir de um ponto de vista matemático, o número racional

fornece a base sobre o entendimento de operações algébricas elementares a serem desenvolvidas mais tarde¹. (p.01)

Segundo Campos e Rodrigues (2007), a compreensão desses números em sua forma fracionária envolve uma variedade de aspectos que se configuram como obstáculos ao seu domínio, pois, apesar destes serem uma extensão do conjunto dos números naturais, as tentativas de estabelecer paralelos entre os procedimentos relacionados aos dois conjuntos ora são válidos, ora não são.

Por exemplo, na adição e na multiplicação: quando se pretende multiplicar duas frações, multiplicamos respectivamente, numeradores e denominadores, da mesma forma como faríamos caso estivéssemos trabalhando com números naturais. Isto não acontece quando estamos desenvolvendo a soma de duas frações, que neste caso, precisamos primeiramente convertê-las em frações com mesmos denominadores.

Nunes e Bryant (1997) afirmam que:

com as frações as aparências enganam. Às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações, e ainda assim, não as tem. Elas usam os termos fracionais certo; elas falam sobre frações coerentemente; elas resolvem alguns problemas fracionais, mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações, sem que ninguém perceba. (p.191)

¹ Tradução do Inglês feita pela autora deste estudo.

Nunes e Bryant (1997) também chamam a atenção para o fato de que, se o trabalho com o tema, números racionais em sua representação fracionária, for feito somente considerando o significado parte-todo, a compreensão de que o conjunto dos racionais é uma extensão do conjunto dos números naturais fica prejudicada. Afinal, para perceber essa extensão o aluno precisaria vivenciar situações em que a ideia da divisão é ampliada.

A vivência de situações problemas é justamente o que Gérard Vergnaud (1988; 1990; 1996) enfatiza na sua Teoria dos Campos Conceituais (TCC) ao abordar o processo de formação de conceitos. Para este autor, é através das experiências com um grande número de situações, nas quais os alunos utilizam repertórios de habilidades e ideias para reconhecer ou identificar as propriedades contidas nos objetos de estudos e em seguida representá-las simbolicamente, que os conceitos se forjam.

Portanto, se os alunos estão tendo uma vivência estreita e fortemente focada no significado parte-todo dos números fracionários, como afirma os estudos de Nunes e Bryant (1997), Nunes e Silva (2009) e diversos outros pesquisadores brasileiros (BEZERRA, 2001; CAMPOS, 2011; CANOVA, 2006; DAMICO, 2007; SILVA, 2007; GRILO, ALVES, 2010; NUNES, 2003; MERLINI, 2005; MOUTINHO, 2005; RODRIGUES, 2005; SANTOS, 2005; SANTOS, 2010; SILVA e LINS, 2011) que de um modo geral fazem uma crítica à forte tendência do ensino brasileiro em privilegiar alguns significados de fração em detrimento de outros, então, estes alunos estão em risco de desenvolver conceitos superficiais e incompletos dos números fracionários.

Este ponto foi realçado por Nunes e Bryant no seguinte trecho:

... quando as crianças resolvem tarefas experimentais sobre divisão e números racionais, elas se engajam em raciocinar sobre as situações. Em contraste, quando elas resolvem tarefas matemáticas em avaliações educacionais, elas veem a situação como um momento no qual elas precisam pensar em que operações fazer com os números, como usar o que lhes foi ensinado na escola; concentrando-se nas manipulações de símbolos, os alunos poderiam desempenhar em um nível mais baixo que teriam desempenhado se tivessem se preocupado mais com a situação problema. (NUNES e BRYANT, 1997, p. 212).

Talvez o fraco desempenho dos estudantes, documentado nos testes oficiais de avaliação da aprendizagem (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb)), pode estar relacionado com a complexidade inerente aos números fracionários, que quando não adequadamente conceituados e compreendidos através de diversas situações problemas que promovam o alargamento das ideias, os mesmos transformam-se em números com regras desconexas e sem sentido cujos resquícios acompanham o estudante durante sua vida acadêmica.

Os estudos desenvolvidos por Terezinha Nunes em quase vinte anos (NUNES e BRYANT, 1997; NUNES, 2003; NUNES, BRYANT, BARROS e SYLVA 2012; HOWE, NUNES e BRYANT 2010.) dentro deste tópico, apontam para a existência de pelo menos cinco significados de fração, os quais são: parte-todo, operador multiplicativo, quociente, medida e número. Já o ensino de fração no contexto educacional da Inglaterra – onde suas pesquisas são conduzidas através da Universidade de Oxford– não envolve compreensivamente estes

cinco significados, mas privilegia somente alguns significados prejudicando, assim, a compreensão conceitual mais ampla e flexível.

O mesmo problema de privilegiar determinados significados de número fracionário em detrimento de outros pode também ser notado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) adotados no Brasil, o qual sugere que no segundo ciclo do Ensino Fundamental (4^o e 5^o ano)² sejam trabalhados três significados: parte-todo, razão e quociente. E, somente no terceiro ciclo do Ensino Fundamental (6^o e 7^o ano), aconteça a introdução do significado de operador multiplicativo. O significado razão, trazido pelos PCN, segundo a classificação teórica de Keren³, dizem respeito às frações que são usadas como um índice comparativo entre duas grandezas, não existindo necessariamente uma relação com uma unidade ou um todo. Essa comparação, entre duas grandezas “a” e “b”, pode ser representada por “a: b”, “ $\frac{a}{b}$ ”, na qual se faz a leitura: “a” está para “b”. O significado relativo às medidas, tanto extensivas quanto intensivas não parece fazer parte dos parâmetros curriculares.

Vários estudos, que serão relatados posteriormente na revisão de literatura, preocupados com essa realidade fragmentária do ensino de frações, procuraram problematizar as inúmeras faces relacionadas ao ensino e a aprendizagem dos números racionais, na tentativa de identificar tais problemas e propor possíveis contribuições. Destaca-se no Brasil o projeto “A formação, desenvolvimento e ensino do conceito

² O Ensino Fundamental no Brasil está dividido em quatro ciclos: primeiro ciclo composto pelo 2^o e 3^o ano; segundo ciclo composto pelo 4^o e 5^o ano, terceiro ciclo composto pelo 6^o e 7^o ano e o quarto composto pelo 8^o e 9^o ano.

³ Kieren (apud Rodrigues, 2009) foi a primeira pesquisadora a propor que a construção do conceito de número fracionário deve levar em consideração diferentes interpretações e significados. Os quatro “subconstructos” propostos por essa autora são: quociente, operador, medida e razão, na qual o parte-todo estaria presente em todos os subconstructos.

de fração”, desenvolvido dentro do programa de cooperação entre a *Oxford University*, sob a coordenação de Terezinha Nunes, e o Programa de Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC-SP, coordenado pelas professoras Tania Campos e Sandra Magina, cujo objetivo é investigar a formação do conceito de fração considerando o ensino e a aprendizagem no Ensino Fundamental, Médio e Superior. O projeto deu origem, aparentemente, a duas teses e seis dissertações, às quais serão abordadas mais profundamente nos capítulos seguintes.

Como pode ser visto na situação supracitada, onde a supervalorização de alguns significados é exposta, temos duas situações. Primeiramente, enquanto o significado número, apesar de não fazer parte do currículo, está presente nas práticas em sala de aula, a situação do significado medida não é a mesma. Além disso, como já foi demonstrado por pesquisadores, esse significado é composto por dois tipos de quantidades: a quantidade extensiva, e a quantidade intensiva. Pesquisas mostram que quando abordadas em sala de aula, apenas uma parte de seu significado é abrangido, aquela que faz referência ao contexto de quantidades extensivas.

Segundo Nunes, Desli e Bell (2003),

algumas das ideias que mantemos firmemente sobre as quantidades se aplicam ao extensivo, mas não para quantidades intensivas. Por exemplo, a maioria de nós estaria pronta a concordar que, para qualquer quantidade, o conjunto é igual a soma das partes. No entanto, isto não se aplica às quantidades intensivas⁴. (p.652)

⁴ Tradução do Inglês feita pela autora deste estudo.

Os autores ressaltam que os pesquisadores há muito tempo são cientes da diferença entre as quantidades extensivas e intensivas, bem como sua importância para o ensino, e apontam que o ensino das quantidades intensivas é insignificante comparado com o ensino das quantidades extensivas. Enquanto na segunda são oportunizados, desde os anos iniciais de ensino, a manipulação, medida e razão, sobre a primeira nada dizem a respeito no currículo da disciplina de Matemática.

Piaget (1952) em seu livro *A concepção de Número da criança*, explicou essa diferença entre as quantidades. O mesmo definiu a quantidade extensiva como sendo “o nome dado a qualquer magnitude que é suscetível de adição real” (p. 244), como exemplo cita a massa, pois a massa que forma um corpo corresponde à soma das partes. E quanto à quantidade intensiva, definiu sendo "o nome de qualquer magnitude que não é suscetível de adição” (p. 244). Por exemplo, a temperatura, apresentando o exemplo clássico da adição de dois líquidos, no caso a água, contendo temperaturas distintas, nesse caso o todo não é igual a soma das partes.

A definição de quantidades intensivas proposta por Nunes, Nunes, Campos, Magina e Bryant (2009), ressalta que:

quando a medida de uma quantidade baseia-se na comparação de duas quantidades da mesma natureza e na lógica parte-todo, dizemos que a medida se refere a uma quantidade extensiva. As medidas baseadas na relação entre duas quantidades diferentes são medidas de quantidade intensivas. (p.148). quando vc cita a página acho que deve dizer de onde- veja com seu orientador

Os autores também diferenciam a lógica dessas duas quantidades.

A lógica das quantidades extensivas... baseia-se na relação parte-todo: portanto no raciocínio aditivo. A lógica das quantidades intensivas baseia-se numa relação entre duas quantidades: portanto no raciocínio multiplicativo. (p. 148).

Nunes, Desli e Bell (2003), argumentam que há dois tipos de quantidades intensivas. Um primeiro tipo que diz respeito às situações onde as variáveis são combinadas para formar um todo, e um segundo tipo, onde se referem a situações onde as variáveis permanecem separadas.

O primeiro tipo de quantidade intensiva, muitas vezes leva a uma experiência perceptiva que poderia servir de base para o aprendizado sobre estas quantidades na vida diária. Considere, por exemplo, o gosto. Se somarmos mais açúcar a um suco, o sabor é mais doce. Se a mistura torna-se muito doce, não há nenhuma maneira que nós poderemos retirar o açúcar já adicionado, mas podemos acrescentar mais suco, a fim de torná-lo menos doce⁵. (p. 658).

Os autores ressaltam que este tipo de experiência poderia criar a oportunidade para aprender sobre relações inversas quando a quantidade intensiva é uma junção de duas quantidades extensivas.

O segundo tipo de quantidade não pode ser ligada a tais experiências perceptivas, não há nenhuma experiência perceptiva de custo, por exemplo, e nós só podemos raciocinar sobre o valor pago e o

⁵ Tradução do Inglês feita pela autora deste estudo.

valor comprado, custo-benefício ⁶. (Ibidem, p. 658).

Pesquisas mais recente (HOWE, NUNES e BRYANT 2010; NUNES, BRYANT, BARROS e SYLVA 2012), têm trazido a tona a importância das crianças vivenciarem situações com as quantidades intensivas, relacionando as dificuldades do desenvolvimento do raciocínio proporcional com a falta de ênfase no ensino da mesma, reconhecendo, assim, o importante papel para o desenvolvimento cognitivo matemático de atividades que abordem essas quantidades.

O obstáculo básico à compreensão das quantidades intensivas reside na dificuldade que as crianças têm em PENSAR “relativamente”: de modo especial, quando as relações a serem consideradas são inversas. (NUNES, CAMPOS, MAGINA e BRYANT, 2009, p.148).

Problemas com esse pensar relativamente, seja nas relações diretas ou inversas, dizem respeito à relação de duas grandezas, que se ramificam em grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.

Duas grandezas são ditas diretamente proporcionais, quando o aumento de uma implica no aumento da outra, quando a redução de uma implica na redução da outra, satisfazendo a propriedade de que a razão entre elas seja sempre constante. Um exemplo desse tipo de grandeza pode ser visto na relação entre o valor pago e quantidade de pães, quanto mais pães, maior será o valor cobrado, quanto menos pães, menor o valor cobrado. Observe que quando dividimos o valor pago pela quantidade de pães obtemos sempre o mesmo valor, pois o preço

⁶ Tradução do Inglês feita pela autora deste estudo.

unitário do pão não muda (satisfazendo a propriedade da razão constante).

Já as grandezas inversamente proporcionais são aquelas quando o aumento de uma implica na redução da outra, quando a redução de uma implica no aumento da outra, satisfazendo a propriedade de que o produto entre as grandezas sempre será constante. Essa relação pode ser vista entre a velocidade e o tempo ao se percorrer um determinado percurso, pois quanto maior a velocidade média no percurso, menor será o tempo gasto. Quanto menor for a velocidade média, maior será o tempo gasto para este mesmo percurso. Quanto à propriedade, quando multiplicamos a velocidade média pelo tempo no percurso, obtemos sempre o mesmo valor, ou seja, o produto é sempre constante, no caso a distância.

Estando nítida a importância do aprofundamento de pesquisas nestas grandezas, em nosso trabalho focamos nas quantidades intensivas, considerando que as mesmas podem ser encontradas em várias situações, tais como: a densidade (diretamente proporcional à massa, inversamente proporcional ao volume), velocidade (diretamente proporcional a distância, inversamente proporcional ao tempo), temperatura (diretamente proporcional a energia calorífica, inversamente proporcional ao volume), solução (quantidade de soluto pela quantidade de solvente), lotação (quantidade de pessoas em relação ao espaço) entre outras. Em nosso estudo levamos em conta as situações de solução, velocidade⁷ e lotação.

⁷ Velocidade aqui será entendida como uma ideia intuitiva da relação diretamente proporcional a distância, inversamente proporcional ao tempo.

Nossa intenção nesta pesquisa, portanto, foi em identificar se ao ampliar a vivência de situações para englobar experiências com atividades escolares relacionadas ao significado medida, em contexto de quantidades intensivas, o qual não faz parte do currículo oficial, traz alguma contribuição à compreensão dos números racionais. Para isso, realizamos uma intervenção com controle de pré-teste e dois pós-testes, e analisamos o processo de formação de conceitos tendo como aporte teórico para tal a Teoria dos Campos Conceituais (TCC). Dessa forma, a Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Vergnaud (1988; 1990; 1996), bem como as pesquisas de Terezinha Nunes e Peter Bryant, estes últimos pesquisadores da Universidade de Oxford, Inglaterra, serviram de base teórico-metodológica na tessitura desta dissertação.

Em seguida, apresentaremos o objetivo e a questão de pesquisa deste estudo.

1.2 OBJETIVO E QUESTÃO DE PESQUISA

A partir do que apontam as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de frações, o presente estudo possuiu como objetivo investigativo uma intervenção com foco em situações com frações retratando o significado de medido em contexto de quantidades intensivas. O foco de análise situou-se, portanto, em verificar o efeito deste conhecimento na resolução de problemas, envolvendo outros significados de fração apresentados em pré-teste e pós-testes aplicados a alunos de uma turma de 5º ano.

O nosso problema de pesquisa, portanto, pode ser sintetizado em uma pergunta que orientou esta investigação:

Ensinar frações considerando o significado de medida dentro do contexto de quantidades intensivas pode ter algum efeito para o alargamento do entendimento de outros significados de fração?

Para isso, iniciamos investigando os conhecimentos prévios dos alunos referentes à fração em seus cinco significados, para depois proceder a uma intervenção de ensino focando no significado medida no contexto de quantidades intensivas.

Para tanto, foram levantados os conhecimentos que os alunos desta turma tinham a respeito do conceito de número racional na sua representação fracionária através de um pré-teste, contendo 18 questões sobre frações, considerando os seus diferentes significados: número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo.

Posteriormente a este levantamento inicial, foi desenvolvida uma intervenção, focada no significado medida no contexto de quantidades intensivas, composto por 10 problemas, seguida de um pós-teste, que foi composto também por 18 questões. Um segundo pós-teste foi realizado depois de um mês após a intervenção. Seu objetivo foi verificar se as crianças, após um período de tempo, continuavam a compreender os conceitos trabalhados na intervenção de ensino. As questões deste segundo pós-teste tiveram o mesmo caráter do pré-teste e do primeiro pós-teste, ou seja, perguntas focadas nos cinco significados de fração, também contendo o mesmo número de questões.

Os fatores de motivação desse tema de pesquisa tiveram a sua origem no baixo desempenho atingido pelos alunos, frente a problemas que envolvem esse importante conceito matemático que pode ser identificado na análise dos resultados do Saeb de 2011, o qual ressalta

em suas conclusões que o conceito de número racional precisa ser mais explorado, especialmente em situações práticas, de modo a adquirir significado para o aluno, bem como vem apontando as pesquisas sobre o tema. Outro fator motivacional para a realização deste estudo foi a crença que o ensino para a construção de conceitos por meio da vivência de situações problemas é relevante nos anos iniciais do ensino fundamental, porque proporciona um trabalho na área da matemática contextualizada. Esta crença contrapõe-se à ideia de ensino de matemática voltada para a aplicação de exercícios com a finalidade do treino dos algoritmos, propondo um trabalho que possibilite às crianças um pensamento lógico matemático ativo para a solução do problema, quer seja na modalidade oral, escrita ou outras estratégias de representação. Desta maneira, acreditamos que os resultados aqui apresentados podem contribuir com as pesquisas já feitas sobre o tema. Os resultados deste estudo foram analisados à luz da Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud. O uso de tal suporte teórico será detalhado nos capítulos seguintes.

Como objetivo geral deste estudo intencionamos:

identificar quais as contribuições da compreensão do significado de medida, no contexto de quantidades intensivas, para a aprendizagem dos Números Racionais em sua representação fracionária para alunos do 5º ano do Ensino Fundamental.

Quanto aos objetivos específicos, esperamos:

identificar as dificuldades dos alunos quanto aos cinco significados de fração e,

promover a compreensão do significado medida em contexto de quantidades intensivas.

1.3 DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS DA DISSERTAÇÃO

Para responder nossa questão de pesquisa e alcançar os objetivos propostos, organizamos este trabalho em seis capítulos. Nesta Introdução, entendida como Capítulo I, apresenta-se a problemática, evidenciando o objetivo, bem como algumas considerações sobre a importância do ensino de Frações e, por fim, é explicitada a questão de pesquisa. No capítulo II, é descrita a fundamentação teórica utilizada, com um breve relato sobre a formação do conceito à luz da Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud (1983; 1988; 1990). Apresenta-se também, os estudos de Nunes, Bryant (1997); Nunes *et al.* (2003) em relação ao ensino e aprendizagem do conceito de Fração e os cinco diferentes significados de fração: nNúmero, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo embasados nos estudos de Nunes *et al.* (2003).

No capítulo III, apresenta-se os estudos relevantes e correlatos com da pesquisa. No capítulo IV, é apresentada a metodologia usada na pesquisa, assim como os sujeitos do estudo, os materiais utilizados em cada uma das três etapas, bem como os procedimentos de sua realização.

No capítulo V, encontra-se a análise quantitativa (com os índices de acertos totais) e a análise qualitativa, que foi tomada como base a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) desenvolvida em

diferentes trabalhos de Gérard Vergnaud, na qual foram estabelecidas as estratégias de resolução utilizadas pelos alunos ao resolverem as questões apresentadas. Por fim, no capítulo VI, nossa questão de pesquisa é respondida e nossas conclusões são apresentadas, baseadas na análise dos resultados. Sendo ainda, nesse capítulo, são apresentadas as sugestões para futuras pesquisas.

CAPÍTULO II

APOIO TEÓRICO DO ESTUDO

2.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo foi estruturado em duas partes. A primeira fazendo referência à teoria de formação de conceitos proposta por Vergnaud (1990, 2001) conhecida como Teoria dos Campos Conceituais. E a segunda parte, fazendo referência aos cinco significados das frações, a partir da classificação proposta por Nunes *et al.* (2003), que se assume para este estudo.

2.2 VERGNAUD: A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) foi desenvolvida pelo professor e pesquisador Gérard Vergnaud (1988; 1990; 1996). Essa teoria oferece uma estrutura consistente às pesquisas sobre aprendizagem matemática, possibilitando estudar as filiações e rupturas entre conhecimentos, e as relações existentes entre os conceitos.

Define-se um campo conceitual pelo conjunto de situações, cuja compreensão necessita do domínio de vários conceitos de naturezas diferentes, de seus invariantes e por um conjunto de representações simbólicas.

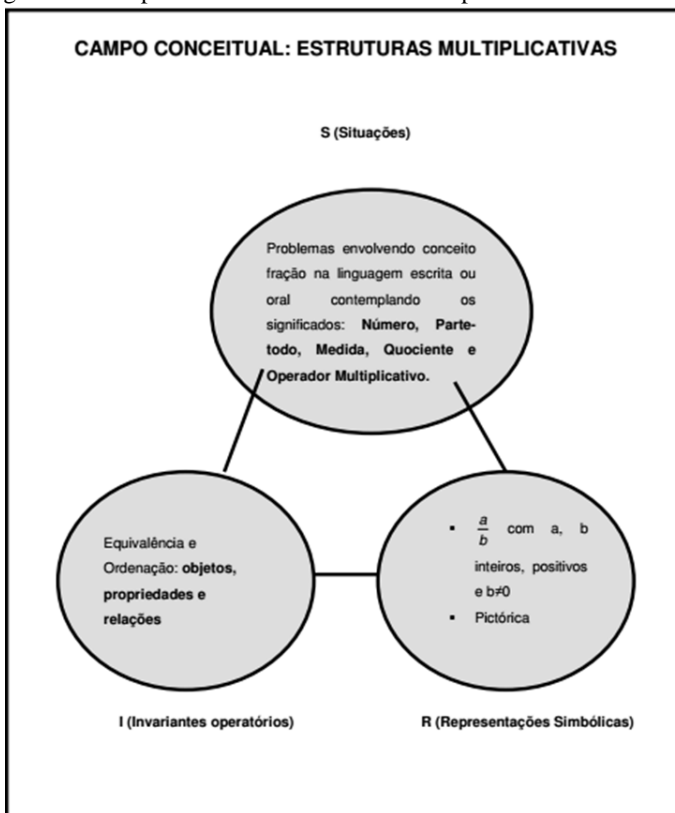
O estudo do desenvolvimento de um campo conceitual, segundo essa teoria, requer que o pesquisador veja um conceito como formado por uma terna de conjuntos (S, I, R), onde S representa um conjunto de situações que tornam o conceito significativo; I, por sua vez, representa

um conjunto de invariantes (objetos, propriedades e relações) que podem ser reconhecidas e usadas pelo sujeito para analisar e dominar essas situações e, finalmente, R representa um conjunto de representações simbólicas que podem ser usadas para pontuar e representar as situações e os procedimentos para lidar com eles.

A Teoria dos Campos Conceituais considera que existe uma série de fatores que influenciam e interferem na formação e no desenvolvimento dos conceitos e que o conhecimento conceitual deve emergir dentro de situações-problema. Assim no processo de aquisição de conhecimento, os conceitos matemáticos expressam seus sentidos a partir de uma variedade de situações que podem ser analisadas com a ajuda de um conjunto de conceitos.

A figura 1 representa o conjunto de situações (S), o conjunto de invariantes (I) e o conjunto de representações (R) e sua relação com os números fracionários.

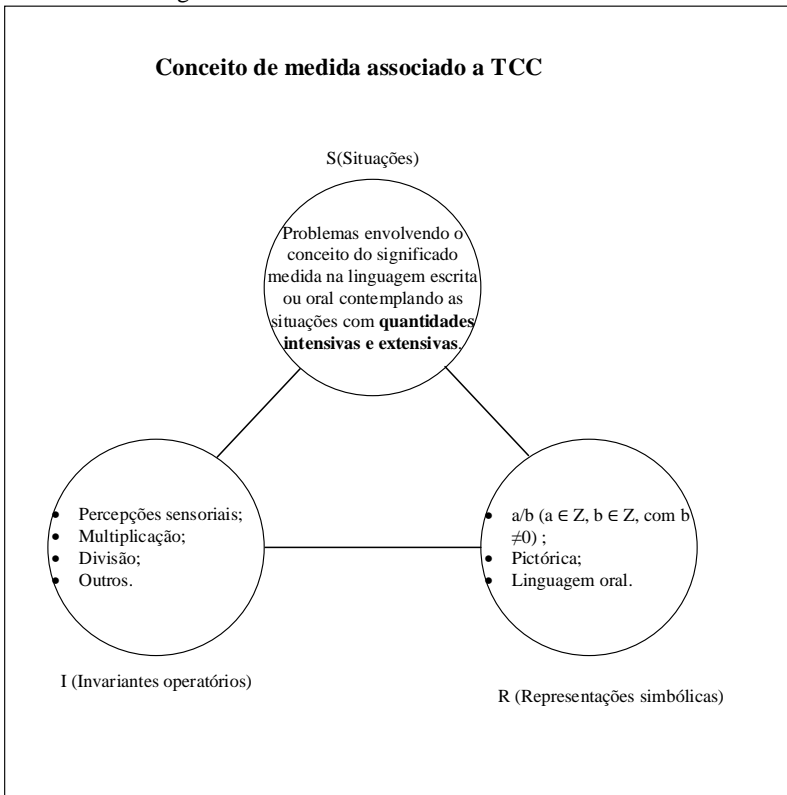
Figura 1 – Campo Conceitual: Estruturas Multiplicativas.



Fonte: Santos (2005).

Apresentada a figura 1, onde temos o esquema das estruturas multiplicativas associadas à TCC, exponho na figura 2 o significado medida, sistematizando a relação entre o objeto de pesquisa e a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

Figura 2 – Conceito do significado Medida associado ao Campo conceitual de Vergnaud.



Assim são apresentadas na figura acima, algumas considerações nas quais esclarece a complexidade do conceito do significado medida, a qual se evidencia quando ele é tomado na forma de terna (S, I, R).

Na TCC a construção de um conceito se dá através de uma “classe de situações”, pois são elas que dão sentido ao conceito. Esta classe é composta por diversas tarefas, problemas e atividades, correspondentes a um conceito específico, que desestabilizam o aluno para, assim, ocorrer a aprendizagem.

Dessa forma, se entende que um conjunto de situações e de problemas, teóricos ou práticos, envolvendo o significado medida, se for propostos aos alunos, contribuem para que este conceito adquira sentido para os mesmos. Dadas as situações (quantidades intensivas e extensivas), os alunos utilizarão suas competências para resolvê-las.

Nesta busca por estratégias de resolução, os alunos evocam seus conhecimentos anteriormente formados, sejam estes baseados em percepções sensoriais ou em entendimentos de operações aritméticas, como a multiplicação e a divisão. Este arsenal de conhecimentos anteriores organiza as formas de abordar determinados problemas demonstrados pelo aluno no processo de resolução. A conduta do aluno perante as situações e às escolhas dos conhecimentos usados, Vergnaud define como “esquema”, que geram as representações. As mesmas podem aparecer de várias formas, entre elas estão: $\frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$); pictórica e linguagem oral.

Para Vergnaud (1990), é através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para o sujeito. Nesse contexto, podemos distinguir duas classes de situações:

(i) em uma dessas classes o sujeito dispõe em seu repertório, em dado momento de seu desenvolvimento, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;

(ii) na outra o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e exploração, às hesitações, às tentativas frustradas que o levam, eventualmente, ao sucesso ou ao fracasso.

Vergnaud (1988; 1990; 1996) acrescenta que as competências e concepções são adquiridas pela criança por meio da formação de

esquemas. Para melhor entender o que vem a ser competência e sua relação com a concepção, é necessário primeiro entender o conceito de esquema.

O autor referido afirma que os esquemas são os procedimentos, as invariantes e as condutas organizadas por regras de ações sobre uma classe de situações dadas, isto é, a forma estrutural da atividade e está acompanhado ou de um conceito-em-ação ou de um teorema-em-ação.

O conceito-em-ação é uma invariante operatória com suas propriedades e definições, quando são manifestados geralmente são explícitos (VERGNAUD, 1988; 1990; 1996). Já os teoremas-em-ação aparecem de modo intuitivo e, na maioria das vezes, são implícitos. Estão relacionados com as estratégias utilizadas pelo sujeito no momento de solucionar situações-problema, sem que consiga explicitá-las ou justificá-las (VERGNAUD, 1988; 1990; 1996).

Portanto, os teoremas-em-ação indicam um caminho para se analisarem as estratégias intuitivas dos alunos e ajudá-los a transformar conhecimento intuitivo em conhecimento explícito.

Para Vergnaud (1988; 1990; 1996) as competências e as concepções dos alunos vão se desenvolvendo ao longo do tempo, por meio de experiências com um grande número de situações, tanto dentro quanto fora da escola. Em geral, quando se defronta com uma nova situação, o aluno usa o conhecimento desenvolvido em sua experiência em situações anteriores e tenta adaptá-lo à nova situação. Esse conhecimento tanto pode ser explícito, no sentido de que pode ser expresso de forma simbólica, quanto implícito, no sentido de que pode ser usado na ação, durante a qual o estudante escolhe as operações

adequadas, sem, contudo, conseguir expressar as razões dessa adequação.

Vergnaud (1988; 1990; 1996) considera que é a análise das tarefas matemáticas e o estudo da conduta do aluno, quando confrontado com essas tarefas, que nos permitem analisar sua competência. A conduta do aluno pode ser avaliada segundo três aspectos:

a) análise de acerto e erro, sendo considerado competente aquele que acerta;

b) análise do tipo de estratégia utilizada, podendo alguém ser mais competente que outro porque sua resolução foi mais econômica ou mais rápida, ou, ainda, mais refinada e,

c) análise da capacidade de escolher o melhor método para resolver um problema dentro de uma situação particular.

Dentre as muitas estruturas envolvidas na resolução de problemas, Vergnaud (1994) destaca duas: as aditivas e as multiplicativas. As estruturas aditivas são o conjunto das situações que implicam uma ou várias adições ou subtrações e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar tais situações como tarefas matemáticas. Já o campo multiplicativo, Vergnaud explica que o mesmo pode ser visto como um conjunto de conceitos e teoremas que possibilitam analisar operações como: funções lineares e não lineares, frações, proporção, razão e número racional, análise dimensional e espaço vetorial, ou mesmo, ser considerado como um conjunto de estratégias, formulações do pensamento e de representações.

Um conjunto de situações que requer uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação dessas operações; um conjunto com uma grande

quantidade de esquemas necessários para uma determinada situação⁸. (VERGNAUD, 1994, p.57).

Esta visão a cerca da complexidade do campo multiplicativo é também, de certa forma, corroborada por Nunes e Bryant (1997). Segundo estes autores, a construção das estruturas multiplicativas envolve a compreensão de adição, porém vai além dos conceitos e esquemas desenvolvidos nas estruturas aditivas. Aparentemente, a multiplicação está associada à ideia de adições repetidas, da mesma forma que a divisão parece estar associada à ideia de subtrações repetidas, porém a multiplicação e divisão envolvem outros conceitos e significados. O raciocínio multiplicativo não envolve situações de unir ou separar conjuntos, mas situações que os autores classificam como: situações de correspondência um-para-muitos; situações envolvendo relações entre variáveis; e situações envolvendo distribuição, divisão e cortes sucessivos.

A Teoria do Campo Conceitual parte do princípio de que as crianças constroem conhecimento à medida que pensam sobre o assunto, vivenciam diferentes situações reais e, sobretudo, quando são capazes de estabelecer relações do conteúdo estudado. Isto é, o sujeito vivencia uma prática educativa instigante, contextualizada e reflexiva.

Neste estudo, a TCC foi utilizada para entender as estratégias empregadas pelos sujeitos, alunos de uma turma de 5º ano do Ensino Fundamental, na realização das tarefas, analisando os seus erros e considerando seus conhecimentos prévios, pois como afirma Vergnaud (1988; 1990; 1996) um conceito não se desenvolve isoladamente, mas

⁸ Tradução do Inglês feita pela autora deste estudo.

em inter-relação com os outros conceitos, por meio de vários tipos de problemas e com a ajuda de várias expressões e simbolismos.

2.3 OS ESTUDOS DE TEREZINHA NUNES E PETER BRYANT

Tomando como base a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, Nunes (2003) apresenta a sua proposta de classificação de situações em que as frações são usadas. A proposta desta classificação equivale a uma teoria sobre a qual repousa uma análise detalhada dos raciocínios das crianças sobre frações. A classificação proposta por Nunes apresenta cinco significados de frações que serão descritos a seguir.

I. Fração com o significado Número

A ideia envolvida nesse significado é o da notação $\frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$) expressando um número na reta numérica, diferenciando as quantidades em maior, menor e igual ($>$, $<$ e $=$) ou ainda sua representação na notação decimal. Por exemplo: represente $\frac{1}{2}$ na reta numérica; represente 0,50 na reta numérica.

II. Fração com o significado Parte-Todo

A ideia presente nesse significado é a partição de um dado objeto em n partes, isto é, um todo dividido em partes iguais e que cada parte poderá ser representada como $\frac{1}{n}$, e que o procedimento da dupla

contagem (procedimento conhecido pelo processo de se contar tanto a parte colorida, para determinar o numerador, quanto o total de partes em que o todo foi dividido, para se determinar o denominador) dá conta de se chegar a uma resposta correta. Por exemplo: Uma barra de chocolate foi dividida em 4 partes iguais. João comeu 3 dessas partes. Que fração representa o que João comeu?

III. Fração com o significado Quociente

Esse significado está presente em situações associadas à ideia de partição, o quociente representa o tamanho de cada grupo quando se conhece o número de grupos a ser formado. Exemplo: Duas pizzas foram divididas igualmente para 3 pessoas. Quanto desta pizza recebeu cada uma?

A grande diferença entre os significados parte-todo e quociente é sutil, porém, pode representar duas situações bem diferentes. Primeiro, vamos pegar uma barra de chocolate, dividir em três pedaços e consumir dois desses pedaços, ou seja, consumir $\frac{2}{3}$ dela (Parte-Todo). Depois, vamos pegar duas barras de chocolate e dividir entre três pessoas, ou seja, $\frac{2}{3}$ (Quociente). Nesse exemplo é possível observar que ambas as situações referem-se à divisão, a singularidade do significado quociente é que a partição não diz respeito a um único todo.

IV. Fração com o significado Operador Multiplicativo

Esse significado está associado ao papel de transformação, isto é, uma ação que se deve imprimir sobre um número, transformando o seu valor nesse processo. Exemplo: Pedro tinha uma coleção de 30 soldadinhos de chumbo e deu a seu amigo $\frac{2}{3}$ dessa coleção. Com quantos soldadinhos de chumbo Pedro ficou?

V. Fração com o significado Medida

Estão presentes nesse significado duas visões. Uma relacionada à ideia de dividirmos uma unidade em partes iguais (subunidades), e verificarmos quantas dessas partes caberá naquele que se quer medir. Exemplo: Um tambor pode conter 11 litros de leite. Quantas canecas de 2 litros serão necessárias para encher esse tambor? Esse exemplo nos remete a medida referindo-se a quantidade extensiva (medida de quantidade de mesma natureza). A outra ideia refere-se às quantidades intensivas (medida de quantidades de naturezas diferentes). Um exemplo seria a mistura de um suco contido em uma jarra pequena (80% de concentrado e 20% de água) se despejássemos o suco contido em um copo (com a mesma concentração do anterior) em uma jarra maior. Qual seria a concentração total de concentrado no final da mistura?

Apresentada a classificação dos cinco significados, abraçamos os argumentos de Nunes e Bryant (1997) os quais afirmam que o ensino e a aprendizagem de frações, envolvem uma diversidade e complexidade de conceitos, e, que a prática educativa de privilegiar alguns em detrimento de outros, pode não ser benéfica para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. Diante do quadro classificatório, entendemos que a teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1990),

contribui significativamente para que possamos entender um pouco mais sobre estes conceitos matemáticos inter-relacionados e seus processos de formação.

CAPÍTULO III

REVISÃO DA LITERATURA

3.1. INTRODUÇÃO

Nesta seção, apresenta-se uma revisão de literatura focalizando alguns estudos que consideramos relevantes e cujos resultados contribuíram efetivamente para o desenvolvimento desse trabalho. Nesse sentido, os estudos que fazem parte da presente revisão, têm como enfoque principal a aquisição do conceito de número racional.

No entanto, o capítulo foi estruturado em duas seções: a primeira inicia-se com os trabalhos referentes ao ensino (voltados para formação e prática dos professores) e a aprendizagem dos números racionais (os quais têm como foco o aluno e seu desenvolvimento cognitivo), e a segunda seção apresenta os trabalhos referentes as quantidades intensivas.

3.2. PESQUISAS SOBRE ENSINO E APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS

Fazendo um levantamento de todos os trabalhos do projeto “*A formação, desenvolvimento e ensino do conceito de fração*”, desenvolvido pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Pontifícia Universidade Católica e São Paulo, PUC-SP e a Universidade de Oxford, Inglaterra, encontram-se seis dissertações e duas teses, sendo quatro os trabalhos voltados para o ensino (DAMICO, 2007; SILVA, 2007; CANOVA, 2006; SANTOS, 2005) e quatro voltados para a

aprendizagem (MERLINI, 2005; MOUTINHO, 2005; RODRIGUES, 2005; BEZERRA, 2001).

3.2.1. Referindo-se aos estudos voltados ao ensino, apresentamos:

Primeiramente, o estudo de Santos (2005) em que foi realizada uma análise das concepções de professores do Ensino Fundamental com base em problemas elaborados, que envolviam o conceito de fração. Assim em sua dissertação, intitulada “*O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental*”, se propôs a responder se há diferenças entre as concepções dos professores que atuam nos 1º e 2º ciclos (professores polivalentes) e no 3º ciclo (professores especialistas) do Ensino Fundamental, no que diz respeito ao conceito de fração. Se sim, quais? Se não, por quê? Os participantes desta pesquisa foram 67 professores que atuavam nos 1º, 2º, 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental, distribuídos em sete diferentes escolas da rede pública de São Paulo.

Para atender tais objetivos, Santos (2005) realizou um estudo diagnóstico que constou de dois momentos: no primeiro momento, foi solicitada aos professores a elaboração de seis problemas envolvendo o conceito de fração e no segundo momento, foi pedido para que resolvessem tais problemas. Os resultados obtidos demonstraram que, os professores, em modo geral, apresentaram uma tendência em valorizar a fração com o significado operador multiplicativo na elaboração dos problemas, e, na resolução, houve uma valorização dos aspectos procedimentais (algoritmo). Santos concluiu que não existe diferença significativa entre a concepção dos professores polivalentes e

especialistas, seja na elaboração ou na resolução de problemas de fração em seus diferentes significados, e que provavelmente, existe uma forte influência daquelas concepções construídas na Educação Básica.

Canova (2006), em sua dissertação, “*Crença, concepção e competência dos professores dos 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental em relação à fração*”, teve por objetivo identificar e analisar as crenças, concepções e competências dos professores que atuavam no 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental, no que diz respeito ao conceito de fração em seus quatro significados (parte-todo, operador multiplicativo, medida e quociente). Elaborou, para isso, um instrumento investigativo composto por 29 questões subdivididas em quatro partes (perfil; crenças; concepções e competências), o qual fora aplicado a 51 professores do Ensino Fundamental, distribuídos em três escolas da Rede Municipal da cidade de Osasco, tendo dois momentos. O primeiro, diz respeito à entrega dos questionários e o segundo, às entrevistas clínicas feitas com 10% da amostra.

Canova (2006) entende crença, concepção e competência como sendo:

as crenças, segundo Ponte (1992), são verdades pessoais que não se apoiam em experiências válidas, são criações livres da imaginação. As crenças não têm suporte empírico que as valide; As concepções, segundo o mesmo autor, têm uma natureza essencialmente cognitiva. São mantidas pelas convicções, são consensuais e têm procedimentos para valorizar sua validade. Para Vergnaud (1987), as concepções, na maioria das vezes, são traçadas nas expressões simbólicas - explícitas - por meio de problemas práticos e teóricos; As competências podem ser traçadas por meio da ação do sujeito frente a uma situação, Vergnaud (ibid). São conhecimentos e conceitos

implícitos, analisados como combinação de esquemas⁹. (p.20).

Os resultados mostraram que as crenças dos professores não são influenciadas pela sua prática docente, o mesmo não acontece para as concepções. Pois estas eram mais restritas entre os professores do 1º ciclo do que aos professores do 2º ciclo. Quanto à competência, Canova (2006) constatou que não houve desempenho equitativo entre os cinco significados da fração e os invariantes. Estas evidências levaram a pesquisadora a concluir que há a necessidade de se ampliar o campo conceitual desses professores com relação ao objeto fração.

Outra pesquisa que é relevante ser mencionada é a tese de Silva (2007) a qual teve como objetivo analisar fatores que podem interferir no desenvolvimento profissional de professores das primeiras séries do Ensino Fundamental, como resultado de uma formação continuada com a finalidade de discutir questões relacionadas à abordagem da representação fracionária de números racionais e seus diferentes significados. Para a coleta de dados, foram realizadas dezesseis sessões de quatro horas cada, das quais: três sessões foram destinadas à aplicação de uma avaliação diagnóstica; nove sessões foram dedicadas a estudos dos significados das frações e à vivência de metodologias diversificadas; uma das sessões foi dedicada à elaboração de uma sequência de trabalho pelos professores, a qual foi desenvolvida com seus alunos em sala de aula. As três sessões seguintes foram destinadas a entrevistas, sendo duas logo após a intervenção dos professores em suas

⁹ O termo “esquema” foi introduzido por Piaget para dar conta das formas de organização tanto das habilidades sensório-motoras como das habilidades intelectuais. (CANOVA, 2006, p. 20).

salas de aula, e a última sessão um ano após a intervenção, com o objetivo de verificar as reflexões feitas pelos docentes depois da pesquisa. Esta tese foi fundamentada teoricamente, tanto em teorias que versam sobre a formação de professores como em estudos que investigam questões didáticas sobre o objeto matemático: representação fracionária do número racional.

A tese de Silva (2007) teve como objetivo analisar fatores que podem interferir no desenvolvimento profissional de professores das primeiras séries do Ensino Fundamental, como resultado de uma formação continuada com a finalidade de discutir questões relacionadas à abordagem da representação fracionária de números racionais e seus diferentes significados. Para a coleta de dados, foram realizadas 16 sessões de 4 horas cada, das quais: 3 sessões foram destinadas à aplicação de uma avaliação diagnóstica; 9 sessões foram dedicadas a estudos dos significados das frações e à vivência de metodologias diversificadas; uma das sessões foi dedicada à elaboração de uma sequência de trabalho pelos professores, a qual foi desenvolvida com seus alunos em sala de aula. As 3 sessões seguintes foram destinadas a entrevistas, sendo 2 logo após a intervenção do professores em suas salas de aula, e a última sessão um ano após a intervenção, com o objetivo de verificar as reflexões feitas pelos docentes depois da pesquisa. Esta tese foi fundamentada teoricamente, tanto em teorias que versam sobre a formação de professores como em estudos que investigam questões didáticas sobre o objeto matemático: representação fracionária do número racional.

Em suas análises das informações obtidas, Silva (2007), identificou alguns fatores que podem exercer influência sobre o

processo de desenvolvimento profissional dos docentes. Um deles se refere às dificuldades relativas ao conhecimento matemático do professor. Suas conclusões apontam que para romper crenças e concepções dos professores sobre ensino e aprendizagem da Matemática e, em específico, do objeto matemático frações, é necessário um projeto de formação continuada ao longo da docência que viabilize constante reflexão sobre a prática, sobretudo em ambientes que propiciem um trabalho colaborativo. Ressalta que essas condições são fundamentais para o desenvolvimento profissional dos docentes.

Já Damico (2007) em sua tese investigou a formação inicial de professores de Matemática para o ensino dos números racionais no Ensino Fundamental. O universo da pesquisa foi composto por 346 estudantes de cursos de Licenciatura em Matemática (189 iniciantes e 157 concluintes) e 41 formadores de professores de duas universidades do ABC Paulista. A coleta de dados foi realizada por intermédio de cinco fontes, denominadas Instrumentos: Instrumento 1 (os alunos concluintes foram solicitados a criarem oito problemas envolvendo frações, com o objetivo de avaliar alunos do Ensino Fundamental; Instrumento 2 (os alunos concluintes resolveram os oito problemas que criaram); Instrumento 3 (todos os alunos, iniciantes e concluintes, foram submetidos a uma avaliação contendo vinte questões que versavam sobre conhecimentos fundamentais sobre números racionais); Instrumento 4 (entrevista interativa com 10% dos alunos concluintes participantes da pesquisa); Instrumento 5 (entrevista interativa com 41 professores). Foi optado por uma abordagem qualitativa de interpretação dos dados. Em função do grande volume de informações, a análise qualitativa sempre foi precedida por um resumo estatístico, com o

objetivo de mostrar a frequência com que cada categoria ou subcategoria foi observada. Quanto aos resultados, esses foram apresentados em três unidades de análise que abordaram, respectivamente: o conhecimento matemático (conceitual e processual) dos estudantes de licenciatura em Matemática em relação aos cinco subconstrutos ou significados das frações (parte-todo; operador; quociente ou divisão indicada; medida e coordenada linear); o conhecimento matemático e o PCK¹⁰ (*Pedagogical Content Knowledge or didactical knowledge*) em relação às operações básicas com frações (adição, multiplicação e divisão) e aos números racionais na formação universitária. E os mesmos apontam para o fato de que os estudantes para professores têm uma visão sincrética de números racionais. Há um acentuado desequilíbrio entre conhecimento conceitual e procedimental, com prevalência do procedimental, como também observa um baixo nível de conhecimento didático relacionado às formas de representação dos conteúdos, normalmente, ensinados no Ensino Fundamental que versam sobre números racionais (frações).

3.2.2. Referindo-se aos estudos sobre aprendizagem, apresentamos:

As pesquisas de Campos (2011), Grilo e Alves (2010) e Santos (2010) evidenciaram grandes dificuldades na aprendizagem de frações, em sua maioria, devido ao privilégio que se tem dado ao significado de parte-todo no ensino de frações.

¹⁰ Trazemos a expressão Conhecimento Pedagógico do Conteúdo ou Conhecimento Didático para um possível entendimento do termo em Inglês Pedagogical Content Knowledge or didactical knowledge (PCK).

Em relação ao Ensino Fundamental, os alunos desse nível de ensino apresentaram grandes problemas com a aprendizagem de frações. No entanto, a pesquisa de Campos (2011) nos mostra que uma intervenção nessa fase, levando em consideração situações de quociente, além da relação parte-todo, abre novos horizontes, evitando um problema maior na compreensão das frações, nos anos subsequentes de ensino. Nesta pesquisa, Campos analisou o nível de entendimento dos alunos de 4º e 5º ano do ensino fundamental, quanto ao conteúdo frações, a partir de uma intervenção realizada em sala de aula em uma escola da cidade de São Paulo. Neste trabalho, buscou-se investigar como esses alunos lidavam com os invariantes, equivalência e ordem, em situações quociente e parte-todo.

O estudo envolveu um total de 37 alunos e 2 professoras. Antes da intervenção foi realizada uma sessão de uma hora e meia, com as professoras, a fim de lhes apresentar os pressupostos da pesquisa. Assim, com a ajuda das duas professoras foram realizadas em cada classe três sessões, com o propósito de verificar o nível de compreensão dos alunos ao analisar problemas de frações em situações quociente e parte-todo. Durante a intervenção os alunos foram distribuídos em mesas com 4 alunos cada. Os problemas que compunham o protocolo de pesquisa foram apresentados por meio de slides em Power Point.

Os alunos resolviam os problemas individualmente, sem suporte de material concreto, onde registravam suas respostas primeiramente numa folha de papel e, após discussão com seu grupo, eles transcreviam a solução da tarefa numa transparência.

Caso não houvesse acordo e o grupo tivesse mais de uma solução, todas elas eram transcritas para a

transparência. Neste momento um aluno era escolhido pelo grupo para ser o relator do mesmo e dirigia-se à frente da classe, colocava sua transparência no retroprojetor e defendia a solução encontrada pelo grupo. Um debate coletivo era estabelecido para promover a aprendizagem colaborativa. (CAMPOS, 2011, p.04).

As sessões foram gravadas e filmadas, porém na análise, o filme foi descartado, dado às péssimas condições da imagem e som. As tarefas utilizadas foram retiradas do protocolo de pesquisa elaborado pela professora Terezinha Nunes e sua equipe na Universidade de Oxford e foram aplicadas, além do Brasil, em Portugal e na Inglaterra. Os resultados desta intervenção mostraram-se positivos. A resposta dos alunos à intervenção feita mostra como a experiência de trabalhar com situações de divisão em sala de aula, com o apoio de um mediador, pode promover novas reflexões sobre o conceito deste conteúdo matemático fazendo avançar a aprendizagem dos números racionais.

Em outro estudo, Santos (2010) propôs a responder, em sua dissertação, quais as possíveis contribuições do material concreto, aliado à metodologia de resolução de problemas, para a ensinagem¹¹ de frações a alunos de 5^a (quinta) série. Seu objetivo norteador foi a investigação das estratégias que os alunos de 5^a (quinta) série do Ensino Fundamental, utilizam frente a problemas que abordam o conceito de fração, segundo a classificação proposta por Nunes (2003) que envolve cinco significados: número, operador multiplicativo, medida, quociente

¹¹ O autor faz uso dessa expressão baseado no trabalho de (ANASTASIOU, 2003, p.15), que considera ensinagem sendo uma prática social complexa, evidenciada entre professor e aluno, englobando tanto a ação de ensinar quanto a de aprender, em um processo contratual, de parceria deliberada e consciente para o enfrentamento na construção do conhecimento escolar, decorrente de ações efetivadas na escola ou fora dela.

e parte-todo. Para responder tal pergunta de pesquisa, foi realizado um estudo diagnóstico em uma turma de 5^a (quinta) série do Ensino Fundamental, com 28 alunos (a faixa etária variou de 10 a 17 anos de idades, sendo que a maioria possuía 11 anos de idade, apenas três alunos tinham 10 anos e uma única aluna com 17 anos) dos quais foram analisadas as estratégias de 10 alunos. Para isso foi destinado quinze horas-aula para aplicação das atividades.

Sobre o uso dos materiais concretos em aulas de Matemática, Silva (2007) faz um alerta

... não basta abrir uma caixa cheia de pecinhas coloridas e deixar os alunos quebrarem a cabeça sozinhos. Alguns professores acreditam que o simples fato de usar o material concreto torna suas aulas “construtivistas” e que isso garante a aprendizagem. Muitas vezes, o estudante além de não entender o conteúdo trabalhado, não compreende porque o material está sendo usado. Ao levar o material concreto para a sala de aula, é preciso planejar e se perguntar se ele vai ajudar a classe a avançar em determinado conteúdo. (p. 20).

Afirma ainda, que:

Um ambiente com jogos, material concreto e livros pode despertar maior interesse nos alunos, pois eles poderão entrar em contato com os objetos em estudo, analisando-os e construindo conceitos. Ambientes assim podem contribuir para que o aluno descubra a matemática presente no material que estiver manuseando e explorando. E isso poderá despertar maior interesse e prazer em aprender matemática, pois como já é comprovado, nem tudo que se ensina em sala de aula se aprende, precisamos inovar. Pensando nisso, umas das formas mais acessíveis a todas as escolas, para que isso ocorra, é a implantação de um Laboratório de Matemática. (SILVA, p. 21).

Dessa forma entendemos que os materiais manipuláveis no ensino de matemática podem ter dois papéis, de facilitador e de complicador, tudo depende da escolha do professor, por isso o alerta dado, ressaltando a importância de se analisar bem o material a ser usado. No entanto a opção por um material deve propiciar “que o ensino de matemática cumpra o seu papel essencial: ensinar Matemática!” (PASSOS, 2006, *apud*, SILVA, 2007).

Os materiais utilizados no estudo de Santos (2010) foram: os blocos lógicos, blocos de frações, os discos de frações, régua de fração e o desenho. Inicialmente, foi distribuído o material concreto a todos os alunos participantes da pesquisa, para que eles pudessem explorar as formas e tamanhos, o material de que é feito e a quantidades de todas as peças do material em questão. Nessa dinâmica, trocaram as peças uns com os outros para que todos tivessem acesso ao material como um todo. Em um segundo momento, foi deixado que os alunos fizessem perguntas a respeito do material. Logo após, as respostas terem sido dadas, foi lançada uma situação problema, relacionado ao cotidiano e um tempo foi dado, onde os alunos expuseram como eles resolveram aquela situação. Feitas as suas explicações, a pesquisadora começou a associar a possível forma de resolução do problema usando o material que lhes foram fornecidos. Com isso, foi iniciada “uma caminhada de descobertas e associações entre o material, entre a situação-problema apresentada e a forma de resolvê-la, utilizando esse recurso didático”. (SANTOS, 2010).

Quanto à análise dos resultados (SANTOS, 2010), esta foi orientada pelos cinco significados das frações, ao qual foi empregada à

análise qualitativa de observações e anotações subsequentes de comentários, manifestações de dúvidas e perguntas em geral, formuladas pelos alunos, nessas aulas específicas de resolução de problemas. Nos resultados, constatou-se que não houve um desempenho equilibrado entre os cinco significados da fração, no sentido de que houve uma maior dificuldade nos significados número, medida e operador e menores em parte-todo e quociente. Quanto às estratégias de resolução dos problemas não houve uma regularidade, pois para um mesmo significado foram encontradas diferentes estratégias de resolução. Destacando nas conclusões que todas as estratégias utilizadas foram de grande valia no processo de ensinagem, porém sobressaíram aquelas nas quais foi utilizado o material concreto para o desenvolvimento do raciocínio do aluno. Ressaltou-se também, como na pesquisa de Nunes e Bryant (1997, p.191) que além das dificuldades apresentadas pelos alunos, o método de ensino que pouco se utiliza de situação cotidiana é baseado em apenas um dos significados de fração, geralmente o significado parte-todo.

Assim, finaliza Santos (2010):

...tudo que foi dito aponta para a necessidade de construirmos um método de ensino que vá ao encontro das dificuldades apresentadas pelos alunos ao se depararem com o conjunto dos números racionais e que possibilite aos educandos a plena compreensão do conceito de fração, abordando seus diferentes significados. Assim, esperamos que as dificuldades na aprendizagem sejam minimizadas e que o ensino de frações se torne mais eficiente. (p.35).

Estes resultados nos levam a acreditar que a abordagem que se faz do conceito de fração e seus significados nas aulas de matemática

não permite que o aluno construa um conceito alargado e profundo de fração. Além disso, o estudo descrito acima demonstrou ser bem adequado utilizar-se de situações problemas, como prevê a Teoria dos Campos Conceituais, para promover a experiência dos cinco significados aos alunos.

Complementando o estudo de Santos (2010), os pesquisadores, Grilo e Alves (2010), apresentam a utilização dos materiais concretos, porém, diferentemente do primeiro, seus estudos focam no entendimento que alunos de Pedagogia têm dos conceitos fracionários, considerando que os mesmos serão os professores de matemática das séries iniciais.(o sentido deste parágrafo está incompleto)

Dessa forma, Grilo e Alves (2010) apresentam o resultado de um trabalho realizado pelos acadêmicos do 6º período do curso de Licenciatura em Pedagogia, da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). O trabalho teve como objetivo desenvolver um estudo sobre a compreensão dos Números Racionais e suas operações, enfatizando a importância desse estudo como elemento facilitador no processo da aprendizagem e em compreender os Números Racionais a partir do uso do Tangram e do Material Dourado.

A iniciativa de investigar o assunto foi devido à deficiência que os acadêmicos do curso de Licenciatura em Pedagogia estavam tendo em relação à aprendizagem deste conteúdo. Por isso, a partir do que versa a literatura, partiram do pressuposto de que o conceito de número fracionário é difícil de ser abstraído, havendo a necessidade de o aluno manipular o material concreto para facilitar o entendimento.

Os números racionais na sua concepção de medida na representação fracionária e decimal

reportam uma problemática dos alunos que é a de não compreenderem os Números Racionais tanto no seu convívio escolar como no cotidiano. (GRILO; ALVES, 2010, p.07)

Foram criadas atividades tanto para a compreensão do conceito de fração, relação parte-todo, e equivalência, com a utilização do material concreto, como para compreender as suas operações. Nessa perspectiva a utilização do Tangran e do Material Dourado foi acompanhada de situações-problemas, as quais foram solucionadas com o auxílio desses materiais. A sugestão do trabalho com o Tangran e o Material Dourado teve por objetivo possibilitar ao aluno uma melhor apreensão das ideias construídas acerca desse material a fim de torná-lo mais útil, uma vez que, como apontam as pesquisas, a prática escolar está basicamente voltada para as técnicas de operacionalização, memorização e repetição do que foi estudado. Um dos resultados apresentados é que a simples manipulação de um determinado objeto não garante a construção de significados, pois os alunos de Pedagogia chegaram a conclusão que apesar da grande variedade de materiais concretos manipuláveis para o ensino de diversas áreas da matemática, ainda há controvérsias no que se refere a sua utilização devido a forma como os mesmos são empregados pelo professor. Neste sentido, ressaltam que o concreto e o abstrato não são fatores independentes, dessa forma, apenas o uso do concreto não seria suficiente para a compreensão dos conceitos.

Já o trabalho apresentado por Bezerra (2001), por exemplo, teve por objetivo investigar como ocorre a aquisição do conceito de número fracionário bem como de suas representações. A pesquisa foi dirigida a alunos da 3ª série do Ensino Fundamental, onde foi elaborada com o

intuito de introduzir o conceito de número fracionário e sua representação, limitando-se a abordar a fração como quociente e como parte-todo partindo da divisão com números naturais. Em todo o trabalho as quantidades contínuas e discretas foram contempladas.

Nesse contexto, propuseram uma abordagem diferente da convencional, observada em livros didáticos e no diaadia da vida escolar, escolhendo como princípio norteador uma sequência em que o aluno participasse da construção de seu conhecimento, pois como afirma Bezerra (2001) “a função do pesquisador é orientar a aprendizagem”. (p. 69). Para tanto, foi elaborado uma sequência de ensino abordando frações nos significados parte-todo e quociente, contemplando tanto quantidade contínua como quantidade discreta¹², considerando que o contato desses sujeitos, com o campo dos números racionais, fosse inédito. A pergunta de pesquisa que norteou este referido trabalho foi: “Como abordar os conteúdos relacionados ao número fracionário de forma que o aluno compreenda seu conceito e estabeleça a relação entre o número e sua representação?” (BEZERRA, 2001, p.02). Como procedimento metodológico, foi elaborado um instrumento-diagnóstico, sendo este aplicado a 39 alunos da 3ª série divididos em dois grupos: Grupo Experimental (GE), com 19 alunos e o Grupo de Controle (GC) com 29 alunos. Os participantes eram alunos de duas escolas da rede pública estadual da cidade de São Paulo. Dessa forma foram submetidos os grupos a dois testes individuais: um antes (pré-teste) da introdução dos conceitos de fração e outro (pós-teste) após terem tido contato com

¹² Uma quantidade é considerada contínua, quando o objeto pode ser dividido sucessivamente e não perder a sua característica de quando objeto inteiro. Por exemplo: uma pizza, por mais que se divida, não deixará de ser pizza. É diferente quando se trata das quantidades discretas, que quando divididas perdem sua característica, como no caso de uma pessoa, que deixará de ser uma pessoa.

esse conteúdo, no caso do grupo experimental. O grupo de controle não teve contato com o conteúdo em estudo. Em relação à sequência de ensino desenvolvida no grupo experimental, teve como ponto de partida as situações-problema, onde foram feitos paralelos com as situações significativas e desafiadoras para os alunos. Assim, a sequência foi elaborada por meio de atividades que privilegiam a construção do conceito via resolução de situações-problema (VERGNAUD, 1990; 1994) e processo de dupla contagem que induza a criança, com base no modelo parte-todo, no campo dos quocientes (CAMPOS, 1995 in Nunes; Bryant, 1997). Portanto, o estudo foi iniciado por questões práticas, relacionadas à operação de divisão do dia a dia das crianças, passando da manipulação (material concreto) para a representação pictórica (figura) e, posteriormente, à formalização escrita na forma $\frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$).

Quanto ao uso de recursos didáticos, foram usados alguns simples, baratos e de fácil acesso aos professores. Foi empregado papel cartão e cartolina com representações de diversas frações e materiais como bolinhas de gude, botões de camisa, figurinhas e palitos, entre outros, que foram manipulados nas próprias carteiras dos alunos. Foi feito também uso de recurso teatral, no qual as crianças representaram papéis de vendedores, compradores, caixa, juízes de avaliação dos resultados (conferencista dos cálculos), para os quais foram necessários recursos, tais como: o lápis, o papel, lápis e canetas coloridas, bem como alguns recursos didáticos manipulativos, como jogos de memória, tômbola, dominó, entre outros, cujo objetivo foi tornar a aprendizagem mais interessante e atrativa aos alunos.

A análise dos dados foi dividida em duas etapas, a primeira refere-se a uma análise quantitativa dos dados obtidos, observando o número de acertos obtidos em cada teste, em ambos os grupos e por aluno individualmente do Grupo de controle, bem como o desempenho frente aos objetivos propostos. A segunda refere-se à análise qualitativa em que observamos os procedimentos e erros empregados na representação do número fracionário, bem como nos esquemas de ação usados para resolver os problemas propostos. Baseando-se nas estratégias de resolução, foi observada a compreensão que cada aluno formulou com relação ao conceito do número fracionário e de sua representação (esta análise foi realizada apenas no Grupo experimental-GE).

Nos resultados quantitativos foram identificados que os dois grupos mantiveram-se com o mesmo percentual de acertos no pré-teste. E, por ter sido baixo o índice de acertos, este permitiu afirmar que ambos os grupos tiveram pouco ou nenhum contato com o conteúdo frações, do ponto de vista da escola.

Com relação ao pós-teste, houve diferença significativa entre o Grupo experimental e o Grupo de controle. O percentual de acerto do grupo experimental foi considerado satisfatório ou muito bom, se tomarmos por termômetro o patamar exigido pelo sistema escolar. O mesmo não se pode falar do grupo controle, o qual se manteve no mesmo percentual baixo de acertos.

Bezerra (2001) concluiu que uma sequência de ensino que privilegia a situação-problema interfere no contexto cultural e social da criança, influenciando efetivamente a formação do conceito de número fracionário e sua representação. As crianças encontram significados para

sua aprendizagem e apresentaram resultados satisfatórios na conceitualização desse campo numérico. Dessa forma em seus estudos as crianças compreenderam o novo número que lhes foi apresentado e conseguiram satisfatoriamente representá-lo com um menor número de erros, oferecendo pistas significativas sobre o processo de aquisição do conceito de fração, sendo a mais valiosa delas a de que o processo de construção dos conceitos de fração ganha força quando se inicia baseando-se na resolução de problemas advindos da realidade do aluno.

Subsequentemente, Merlini (2005), diante de problemas que abordam o conceito de fração, fez uma investigação com o objetivo de observar estratégias dos alunos de 5.^a e 6.^a séries do Ensino Fundamental (hoje, respectivamente 6^o e 7^o ano do Ensino Fundamental). Sua dissertação intitulada “O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5^a e 6^a série do Ensino Fundamental” procurou responder quais as estratégias de resolução desses alunos, de ambas as séries, frente a problemas que abordam o conceito de fração, no que diz respeito aos cinco significados da fração: número, parte-todo, operador multiplicativo, quociente e medida. Para isso, realizou um estudo diagnóstico com 120 alunos, sendo 60 da 5^a série e 60 da 6^a série do Ensino Fundamental, distribuídos em duas escolas da rede pública estadual da cidade de São Paulo.

Sua pesquisa foi composta por dois momentos, sendo o primeiro um questionário aplicado coletivamente e respondido individualmente pelos alunos, composto de 19 questões sendo que algumas dessas questões apresentaram mais de um item, perfazendo um total de 29 itens. Estes itens contemplavam questões referentes aos cinco

significados de fração, considerando as quantidades contínuas e discretas, bem como a apresentação de ícone (figura) e não ícone; e o segundo momento, as entrevistas clínicas em 12% da amostra.

Para a análise dos dados também foram dedicados dois momentos: o primeiro referente à análise quantitativa dos dados, detendo-se nos índices de acertos totais, de acertos por significado e de acertos por variáveis - quantidades contínuas e discretas, representação icônica e não icônica, além dos invariantes ordem e equivalência; a segunda etapa, referente à análise qualitativa dos resultados, baseou-se na resolução das questões propostas e, depois, na entrevista clínica, onde essa análise procurou identificar quais as estratégias utilizadas pelos alunos. Como o percentual geral de sucesso dos alunos pesquisados das duas séries foram baixos (aquém de 25%), optou-se por analisar as estratégias que resultaram em erro (insucesso).

Identificadas algumas dessas estratégias de resolução foram criadas nove categorias de análise, (E1-Relação Parte-parte; E2-Inversão do numerador com denominador; E3-Quociente remete para o Partetodo; E4-Interpretação da fração literalmente; E5-Desprezo da conservação da área; E6-Utilização dos dados do problema; E7-Denominador maior que numerador; E8-Números sobrepostos, e E9-Utilização de operação). O mesmo, também foi usado nas análises das respostas dos alunos obtidas nos questionário, bem como nas respostas obtidas nas entrevistas.

Nos resultados obtidos foi constatado que não houve, em nenhuma das duas séries pesquisadas, um desempenho justo entre os cinco significados da fração concluindo, novamente, que o modo do ensino do conceito fração abordado nas escolas privilegia alguns

significados (Parte-todo e Operador multiplicativo), em detrimento de outros, o que não garante que o aluno construa um conhecimento compreensivo desse conceito. Quanto às estratégias de resolução dos problemas não houve uma regularidade. Em outras palavras, para um mesmo significado foram encontradas diferentes estratégias de resolução, levando dessa forma a concluir que a abordagem que se fez do conceito de fração, não garante que o aluno construa o conhecimento desse conceito.

Concomitante com a pesquisa de Merlini (2005), a pesquisa de Moutinho (2005), intitulada “*Fração e seus diferentes significados um estudo com alunos das 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental*”, teve por objetivo identificar as concepções¹³ que esses alunos utilizam frente a problemas que abordam esse conceito. Para tanto, foi elaborado um instrumento-diagnóstico, o mesmo utilizado por Merlini (2005), sendo este aplicado a 65 alunos da 4ª série e 58 alunos da 8ª série do Ensino Fundamental distribuído em duas escolas da rede pública estadual da cidade de São Paulo.

Utilizando como pressuposto que, para se identificar as concepções que os alunos possam ter em relação aos cinco diferentes significados de fração, por meio da aplicação de um instrumento diagnóstico, deve-se desafiar o aluno em situações-problema nas quais devem variar em diversos aspectos. Foram distribuídas questões, de forma centrada nos diferentes significados abordados, utilizando-se de

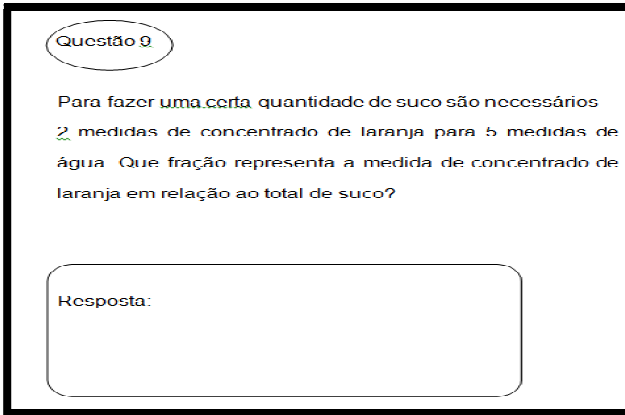
¹³ No estudo, entende-se que concepção refere-se ao conhecimento explícito do sujeito que é apresentada por representações simbólicas, assumidas pelo mesmo, tais como expressões orais ou escritas. Estas expressões podem retratar o estado que se encontra o conceito para o sujeito.

variáveis como: as quantidades contínuas e discretas, e a apresentação de ilustração e não ilustração.

No que diz respeito a análise dos dados, assim como Merlini (2005), Moutinho (2005) realizou dois tipos de análise, qualitativa e quantitativa. Primeiramente fora feita a análise quantitativa dos dados, onde foram analisados os índices de acertos totais, de acertos por significado abordado, por variáveis de pesquisa (quantidades contínuas e discretas e representação icônica e não icônica) e por questões que abordaram diretamente os invariantes da fração - ordem e equivalência. Em um segundo momento, foi feita a análise qualitativa dos resultados. Esta análise procurou identificar as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das questões propostas, em relação tanto aos significados, quanto às variáveis de pesquisa: icônica versus não icônica e quantidade contínua versus quantidade discreta. Em suas análises, ao retratar o significado medida, foi identificado que houve uma grande diferença entre as variáveis contínua icônica, sendo 45,38% o percentual de acertos, contra contínua não icônica, sendo 4,62%, o percentual de acertos. Em contrapartida, houve uma aproximação dos acertos nas questões que envolviam as variáveis discreta icônica, sendo 33,08% a porcentagem de acertos, e discreta não icônica com a porcentagem de 26,15% referentes aos acertos.

Mantendo a mesma análise que foi realizada nas ressalvas anteriores foi observado que os alunos obtiveram um índice quase nulo de acertos na Questão 9 (Figura 3), que abordou o significado Medida com variável contínua não icônica.

Figura 3-Exemplo da Questão 9.



Questão 9

Para fazer uma certa quantidade de suco são necessários 2 medidas de concentrado de laranja para 5 medidas de água. Que fração representa a medida de concentrado de laranja em relação ao total de suco?

Resposta:

Fonte: Montinho (2005).

Uma explicação para esse baixo desempenho pode ser encontrada nas ações necessárias para resolver a questão, onde Montinho (2005) argumenta que:

para se chegar na resposta, era necessário operar com os dados do problema, indo muito além da manipulação dos números apresentados para a “montagem” da resposta em forma de fração, pois o valor que representava a mistura seria encontrado pela soma das duas medidas, água e suco. (p. 140).

Dessa forma, a simples montagem da fração levou a maioria dos alunos a cometer um tipo de erro que foi denominado, “Relação Parte-parte”. Essa relação foi tratada na análise qualitativa, que seria referente à situação quando o aluno despreza o todo envolvido no problema e realiza a contagem das partes em destaque, procedendo

com a contagem das demais partes, não relacionando assim, as partes com o todo.

De modo geral, os resultados de Moutinho (2005) mostraram que os alunos da 4ª série demonstraram possuir a concepção parte-todo, como central para resolução dos problemas. Contrariamente, os alunos da 8ª, além desta, buscaram resolver os problemas com o uso mais intenso de operações, sem atingir um índice de acerto favorável, o que acabou resultando em desempenho menor do que a 4ª série. Ainda em suas conclusões, o autor alerta que há uma necessidade de se desenvolver um trabalho mais amplo do campo conceitual da fração, com base no uso de diferentes situações, utilizando os significados tratados por Nunes *et al.* (2003) no que tange às frações.

Rodrigues (2005), em sua dissertação “Números Racionais: Um estudo das concepções¹⁴ de alunos após o estudo formal” identificou aspectos do conceito de fração relativos aos significados parte-todo e quociente que permanecem não apropriados pelos alunos em fase de escolarização posterior ao ensino formal desses números. Seu trabalho, voltado à aprendizagem, se propôs a responder que aspectos do conceito de fração, nos significados parte-todo e quociente, permanecem sem serem apropriados por alunos de oitava série do Ensino Fundamental, terceira série do Ensino Médio e Ensino Superior na área de exatas, identificando também que ligações existem entre essas dificuldades e as deficiências, já apontadas por outras pesquisas, da prática pedagógica.

¹⁴ O estudo parte do pressuposto de que as concepções dos alunos não são estáticas e de que a construção dos conceitos se consolida ao longo do processo de escolarização, influenciado pelo amadurecimento, pelos conhecimentos e esquemas de que o indivíduo dispõe e pelas interações a que o sujeito está submetido.

Para tanto, foi elaborado um instrumento composto de 48 questões, envolvendo o conceito de fração nos significados parte-todo e quociente, em três níveis de dificuldade, aplicado a 13 alunos de 8ª série, 31 do 3º ano do Ensino Médio e 29 do Ensino Superior, na área de exatas.

Este trabalho mantém ligações estreitas com os trabalhos de Santos (2005), Merlini (2005) e Moutinho (2005), sobretudo dos dois últimos, que desenvolveram pesquisas correlatas aplicadas a públicos com graus de escolaridade diferentes, sendo que Rodrigues (2005), tomou como ponto de partida a ideia de manter a complementaridade entre os trabalhos e elaborar um instrumento de pesquisa que, embora adequado ao universo de estudo escolhido, mantivesse as atividades aplicadas por aqueles pesquisadores que fossem compatíveis com os objetivos desta pesquisa. Dessa forma, mantendo as mesmas variáveis das pesquisas de Merlini (2005) e Moutinho (2005), a forma icônica (com figuras que permitam auxiliar a resolução) ou não icônica em que as situações não são apresentadas, bem como a influência de se propor situações envolvendo quantidades discretas ou contínuas na resolução, foi elaborado um instrumento de pesquisa onde se contemplaram duas questões de cada tipo, fixando-se nos significados parte-todo e quociente, segundo a classificação proposta por Nunes (2003), entendendo que esses dois significados estão mais ligados que os outros à ideia primeira da construção do Número Racional.

É por meio desses significados que o conceito de fração costuma ser introduzido... Por isso, eles são responsáveis pela formação de concepções que podem perdurar por muito tempo no sujeito e, em alguns casos, constituírem-se em obstáculos

didáticos, no sentido atribuído por Brousseau (1998) ao termo. (RODRIGUES, 2005, p.67).

Segundo Brousseau (1983, *apud*, KARRER, 1999),

Os obstáculos didáticos são aqueles que nascem da escolha de estratégias de ensino. Neste caso, há a formação de conhecimentos errôneos ou mesmo incompletos, que representarão futuramente um obstáculo para o desenvolvimento de certo conceito. (p. 20);

O teste foi aplicado em um único encontro nos ensinos Superior e Médio e, em três encontros, na oitava série. Quanto aos procedimentos:

a) nos ensinos Superior e Médio foi distribuído, a cada aluno, o caderno número 1 e solicitado que o resolvesse em seu próprio ritmo, trocando-o pelos cadernos 2 e 3, à medida que terminasse o anterior. O tempo de resolução dos cadernos variou entre 25 e 45 minutos e, b) na oitava série, a aplicação foi feita em três sessões, em dias diferentes, com uma semana de intervalo entre elas, mantidas, em cada sessão, as mesmas condições da aplicação nos níveis Superior e Médio. (RODRIGUES, 2005, p.73)

As respostas foram analisadas, inicialmente, do ponto de vista quantitativo, em termos de percentuais de acertos. Os itens com baixos percentuais de acertos foram considerados pontos críticos e submetidos a uma análise qualitativa dos diferentes tipos de respostas apresentadas pelos sujeitos, visando identificar respostas típicas e compará-las, quando possível, às descritas pelos autores tomados como referência e associar suas prováveis causas às práticas pedagógicas mais comuns. Dessa forma os dados obtidos da análise qualitativa e quantitativa,

permitiram destacar alguns comportamentos predominantes nos sujeitos de pesquisa, são eles:

1. diante de situações em que fica a cargo do aluno estabelecer o referencial em que a questão deve ser respondida, em geral a resposta é fornecida tomando como referencial a maior coleção disponível, com pequena preocupação em relação à fixação desse referencial e uma tendência a evitar a fração imprópria, por mais enfáticas que sejam as indicações acerca do referencial desejado; 2. nas situações de quociente envolvendo quantidades discretas, há uma tendência da maioria dos alunos a usar, na resolução, a cardinalidade do conjunto a ser repartido, mesmo quando essa cardinalidade é dispensável. Essa linha de ação levou a uma maior porcentagem de erros na amostra considerada; 3. ainda nas situações de quociente envolvendo quantidades discretas, há uma resistência a assumir um número natural como uma fração, predominando respostas em que o sujeito sinaliza que percebe o que se pede, mas não explicita corretamente ou mesmo ignora a cardinalidade, em um processo semelhante à divisão de grandezas contínuas; 4. finalmente, nas situações de quociente, resolvidas por uma divisão entre um número natural e uma fração, um grande número de alunos que soube resolvê-la por procedimentos intuitivos, ou mesmo por outras estratégias, não foi capaz de explicitá-la em termos de operações com números racionais. (Idem, p 218).

Ainda nas análises, Rodrigues (2005) faz algumas observações, entre elas traz o significado medida.

A respeito do significado medida, que não foi objeto deste trabalho, é interessante destacar as ideias de Escolano e Gairín (2005), que chamam a atenção para o fato de que esse modelo tem, como característica principal, manter o referencial

associado à fração de maneira mais efetiva. As observações de Santos (2005), entretanto, destacam que esse é um dos significados que os professores menos consideram na elaboração de suas atividades. (p. 218).

A partir destas constatações, concluiu-se que, mesmo nesses níveis mais elevados de escolaridade, os alunos ainda apresentam dificuldades significativas sob três pontos: da compreensão do papel da unidade nos problemas envolvendo frações, das peculiaridades das situações, envolvendo grandezas discretas; e de aspectos mais abstratos da construção dos números racionais, como a inclusão dos inteiros e a explicação de soluções em termos operações com frações. Os dados coletados apontaram para o fato de que os estudantes de licenciatura têm uma visão sincrética dos números racionais. Há um acentuado desequilíbrio entre o conhecimento conceitual e procedimental, com prevalência do procedimental, como também se observa um baixo nível de conhecimento didático relacionado às formas de representação dos conteúdos normalmente ensinados no Ensino Fundamental que versam sobre Números Racionais, em sua forma fracionária.

Através dessa breve revisão de literatura sobre as pesquisas referentes ao ensino e aprendizagem, foi possível evidenciar que o viés de abordagem das pesquisas difere bastante. No entanto nenhuma apresenta preocupações quanto ao entendimento das quantidades intensivas. Visto que vários autores (HOWE; NUNES; BRYANT, 2010; NUNES; BRYANT; BARROS; SYLVA, 2012) vêm relacionando o papel das quantidades intensivas para o desenvolvimento cognitivo matemático de atividades que abordem essas quantidades.

3.2.3. Pesquisas sobre quantidades intensivas

Quanto aos trabalhos relacionados com o tema sobre o desenvolvimento das quantidades intensivas destacamos os estudos de Howe; Nunes; Bryant, (2010), Nunes; Desli; Bell, (2003) e Nunes; Campos; Magina; Bryant, (2009).

Nunes; Desli; Bell, (2003) em seu artigo intitulado *The development of children's understanding of intensive quantities*, retratam suas preocupações com desenvolvimento das quantidades extensivas e intensivas, onde apresentam que na Inglaterra, são oferecidas às crianças muitas oportunidades em seus primeiros anos de ensino, como a manipulação, medida e possibilidades de raciocínio sobre as quantidades extensivas. No entanto praticamente nenhuma, ou quase nenhuma oportunidade é dada para o desenvolvimento das quantidades intensivas.

Trazendo o contraste do ensino entre essas duas quantidades, é feita uma descrição de dois estudos. O primeiro diz respeito às dificuldades que as crianças encontram ao usar o raciocínio das relações inversas. O universo dessa pesquisa foi composto por 105 crianças, que frequentavam escolas em Londres, sendo que foram subdivididas em 3 grupos de 35 crianças por ano escolar. As idades foram: 2º Ano, com idade média de 6 anos e 7 meses (intervalo de 6 anos 1 mês a 6 anos e 11 meses); 3º Ano, com média idade 7 ano 7 meses (intervalo de 7 anos 2 meses a 7 anos e 11 meses); 4º Ano, com média de idade de 8 anos e 6 meses (intervalo de 8 anos 1 mês a 8 anos e 11 meses). As crianças foram entrevistadas individualmente por um pesquisador, onde lhe eram mostrados cartões com fotos para ilustrar as situações, e responder aos

problemas oralmente. Dessa forma o pesquisador anotava os obstáculos das crianças ao (tentarem) compreender as quantidades intensivas.

Esse estudo (NUNES; DESLI; BELL, 2003) mostrou que as crianças têm dificuldades em resolver problemas que requerem considerar as relações inversas entre quantidades diferentes. O estudo também mostra que não há diferença entre os dois tipos de quantidades, onde as quantidades extensivas se misturam para formar um todo, e fornecer um novo perceptual, com aqueles em que elas não formam um todo percentual. O mesmo concluiu que é possível que as dificuldades das crianças com quantidades intensivas fossem consequência da precisão em considerar as relações inversas, que nem sempre são envolvidos nas medidas de quantidades intensivas. Ao encerrarem o Estudo 1, os autores problematizaram o resultado como uma questão, ao qual introduzira o próximo estudo. Pode a dificuldade das quantidades intensivas ser explicada pela dificuldade de compreensão das relações inversas?

O segundo estudo dos mesmos autores (NUNES; DESLI; BELL, 2003), foi composto por dois objetivos: (1) para investigar se a dificuldade de compreensão das relações inversas pode explicar a dificuldade das crianças com quantidades intensivas e (2) para analisar as dificuldades das crianças com uma maior gama de quantidades intensivas do que a utilizada no Estudo 1. Este estudo retrata a dificuldade encontrada nas relações inversas encontradas nas quantidades intensivas. Um exemplo dado por eles para melhor entender a problemática foi o caso da velocidade (que é medida em quilômetros (distância) por hora (tempo)).

Em uma viagem, temos que quanto maior à distância, maior é a velocidade (relação direta),

enquanto para a mesma distância, quanto maior o tempo, menor será a velocidade (relação inversa). (NUNES; DESLI; BELL, 2003. p.662)

Ressaltam que o mesmo acontece com a densidade (que é definida como massa dividida pelo volume)

No caso da densidade: para o mesmo volume, quanto maior a massa, maior será a densidade (relação direta), enquanto para a mesma massa, quanto maior o volume, menor é a densidade (relação inversa). (NUNES; DESLI; BELL, 2003. p.662)

Assim fez parte do universo dessa pesquisa um total de 113 crianças (50 meninos e 63 meninas), em 3º e 4º anos do Ensino Fundamental. A faixa etária de 7 anos e 8 meses a 9 anos 7 meses, a média de idade foi de 8 anos e 6 meses.

Ao todo, o estudo foi composto por 18 problemas sobre quantidades intensivas, nove envolvendo relações diretamente proporcionais e nove envolvendo relações inversamente proporcionais. Os pesquisadores justificam a quantidade de perguntas, pois acreditam que quanto maior for o número de problemas maior a possibilidade de alcançarem os objetivos da pesquisa. No entanto eles alertam que esse tipo de pesquisa (com questionário) pode ser estressante para as crianças, e por isso as mais novas não fizeram parte do mesmo.

Uma mudança ocorrida nos problemas de custo foram as três diferentes formulações verbais: 'mais baratos', 'mais caro', e 'melhor valor'. Essa reformulação foi introduzida porque as expressões "barato" e "caro" poderiam ser relacionadas ao preço na vida cotidiana.

Os resultados mostraram que a dificuldade de compreender as quantidades intensivas não pode ser explicada pela dificuldade de pensar

nas relações inversamente proporcionais. Pois as crianças eram significativamente mais bem-sucedidas em itens que exigiam pensar sobre relações inversas quando todas as quantidades do problema eram quantidades extensivas, quando comparado a pensar na relação inversamente proporcional com quantidade intensiva no problema. Destacam também que há uma facilidade de ligarem um número a uma quantidade extensiva e que existe uma grande dificuldade com as crianças na hora de relacionarem os números com as quantidades intensivas.

Os autores sugerem que é possível explorar com as crianças as transformações realizadas em uma mistura, questionando e problematizando as mudanças em seu sabor, cor enfim, propiciando a experiência ao mesmo tempo em que as faz refletir sobre suas ações.

No artigo intitulado *Rational Number and Proportional Reasoning: Using Intensive Quantities to Promote Achievement in Mathematics and Science* de Howe; Nunes; Bryant, (2010), os autores fazem uma distinção entre as quantidades extensivas e intensivas, onde apresentam várias situações que simulam quantidades extensivas. O universo da pesquisa foi composto por 963 crianças escocesas com idade entre 7-12 anos, as quais foram convidadas a resolver problemas de quantidades intensivas.

Foram propostos quarenta e dois problemas de quantidade intensiva ao qual foram projetados para toda a turma. Cada problema envolveu uma história contextualizada e seguida de perguntas. O texto foi apoiado pelo estilo de desenho animado e ilustrações, produzidas em slides coloridos exibido em PowerPoint. Dessa forma eliminaram-se as

exigências de leitura, bem como um fator que pudesse causar uma má interpretação do problema.

Quanto aos resultados, essa pesquisa sugere duas conclusões mais amplas. Por um lado, eles indicam que o raciocínio com quantidades intensivas depende do nível intelectual do problema, e como as crianças se desenvolvem em toda a gama do estudo, com a idade tornam-se capazes de lidar com níveis mais elevados.

Por outro lado, os resultados também sugerem que o raciocínio com quantidades intensivas depende da relevância das variáveis direta e inversamente proporcionais. Pontuam também em suas conclusões que:

... as quantidades intensivas têm propriedades que exercem uma influência significativa sobre o desenvolvimento do raciocínio das crianças, mas estas propriedades têm sido tratadas como marginais em pesquisa com quantidades extensivas, e até agora têm sido pouco reconhecido em contextos intensivos. Além do mais, a maneira na qual as propriedades influenciam o desenvolvimento do raciocínio com quantidades intensivas podem, em alguns aspectos, pelo menos, ser específico para essas quantidades. Teorias atuais de raciocínio proporcional dentro da psicologia do desenvolvimento (e, na verdade, as teorias do raciocínio quantitativo em geral) são baseadas em evidências derivadas de contextos extensas. Com base nos resultados do presente estudo, sugere-se que, a menos quantidades intensivas também são levadas em conta, por meio de análise conceitual ainda maior de suas propriedades e de avaliação empírica de suas consequências, essas teorias serão inerentemente limitadas. (HOWE; NUNES; BRYANT, 2010. p. 325).

Várias já foram as investigações feitas, onde mostram a preocupação dos pesquisadores em tratar do tema frações com base nos

seus diferentes significados. Em comum, encontramos um alerta para as dificuldades dos alunos neste tema, que apontam ser consequência do modo como as frações são ensinadas. Em Merlini (2005), por exemplo, encontramos a ideia de fração como quociente entre dois números inteiros sendo pouco trabalhada em livros didáticos ao mesmo tempo em que os professores das séries iniciais parecem não realizar um trabalho efetivo com esse significado da fração.

É perceptível também que as situações de ensino mais frequentes são aquelas relativas à ideia de parte-todo, em que as áreas de retângulos ou de círculos são divididas em partes com superfícies iguais e a fração é nomeada como o número de partes pintadas sobre o número total de partes. Nunes; Bryant, (1997) afirmam que, em muitas vezes, as crianças são levadas a construir ideias com base na pura percepção ao invés de serem incentivadas a estabelecer relações lógicas-matemáticas nas situações envolvidas.

Essa valorização, como apresenta Merlini (2005), de alguns significados (Parte-todo e do Operador multiplicativo) em detrimento de outros, não garante que o aluno construa um compreensivo entendimento do conceito de fração, e, dessa forma, estabelece a necessidade de se abordar mais os outros significados. Como por exemplo, no caso deste projeto, o significado medida.

Muitas dessas pesquisas ainda estão sendo complementadas, onde passam a serem consideradas novas hipóteses e/ou novos sujeitos com outras faixas etárias, enfim, passam por modificações de modo a aprofundar o entendimento desse tema. Outras já vão ao encontro de novas temáticas que advém dessa problemática, como é o caso de trabalhos (HOWE; NUNES; BRYANT, 2010; NUNES; DESLI; BELL,

2003; NUNES; CAMPOS; MAGINA; BRYANT, 2009) voltados às quantidades intensivas.

Quanto aos avanços, temos um imenso caminho percorrido pelos pesquisadores frente a essa temática e o caminho ainda é grande para percorrer. No entanto, o que já fora percorrido nos trouxe subsídios suficientes para continuar uma caminhada significativa.

Dessa forma, a partir do que apontam as pesquisas sobre as quantidades intensivas, este estudo explora situações (solução, velocidade e lotação) com a intenção que provoquem nos alunos o questionamento e a problematização, propiciando dessa forma a experiência com esse tipo de quantidade.

CAPÍTULO IV

METODOLOGIA

4.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo, será descrito o desenho metodológico do estudo, cujo objetivo é identificar quais os efeitos da compreensão do significado de medida no contexto de quantidades intensivas, com o auxílio de materiais ilustrativos e manipulativos, tem para a aprendizagem dos Números Racionais em sua representação fracionária para alunos do 5º ano do Ensino Fundamental.

Ao discorrer sobre o estudo, é iniciada uma discussão teórico-metodológica e, na sequência, os sujeitos participantes. Este capítulo descreve, ainda, o material utilizado no que tange os instrumentos diagnósticos aplicados (pré-teste, e pós-testes) e a intervenção de ensino e por fim, a descrição do procedimento utilizado na aplicação dos instrumentos e no desenvolvimento da referida intervenção.

4.2. DISCUSSÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA

O estudo tem um caráter quase experimental, com objetivo de verificar o efeito do conhecimento de frações retratando o significado medida em contexto de quantidades intensivas na resolução de problemas envolvendo outros significados de fração, apresentados a alunos de 5º ano.

Nossos sujeitos foram alunos de uma turma de 5º ano do Ensino Fundamental (do período matutino), do Colégio de Aplicação da

Universidade Federal de Santa Catarina, onde foram realizadas seções coletivas e individuais com os alunos.

Como em nosso experimento utilizamos apenas um grupo, temos segundo Fiorentini e Lorenzato (2006), uma pesquisa de caráter quase experimental, que se caracteriza pela manipulação de um único grupo, ao qual serão aplicadas as etapas propostas. Já segundo Gil (1991), na pesquisa quase experimental não há comparação entre dois grupos, porque não há grupo de controle e a pesquisa é realizada com um único grupo, mudando-se apenas as condições do mesmo.

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006), os estudos experimentais caracterizam-se pela realização de experimentos¹⁵ que visam verificar a validade de determinadas hipóteses em relação fenômeno ou problema. Neste tipo de investigação, o papel do pesquisador é tentar reproduzir um fenômeno para observá-lo sob controle. Dessa forma, nossa pesquisa, enquadra-se nas pesquisas de caráter quase experimental, onde os estudos são feitos com uma variável independente, a qual é manipulada pelo pesquisador, operando com grupos de sujeitos escolhidos sem seu controle.

De acordo com a metodologia desta pesquisa, o grupo foi submetido tanto a um pré-teste como a dois pós-testes.

4.3. SUJEITOS DA PESQUISA

O Colégio de Aplicação – CA é um colégio experimental, de Ensino Fundamental e Médio, mantido pela Universidade Federal de

¹⁵ Entendemos por experimento aquela parte da investigação, na qual se manipulam certas variáveis e observam-se seus efeitos sobre outras.

Santa Catarina, a qual é integrada ao Centro de Ciências da Educação, onde se desenvolvem práticas e se produzem conhecimentos em função de uma melhor qualidade de ensino. Localiza-se no Campus Universitário Reitor João David Ferreira Lima, no Bairro Trindade, em Florianópolis, capital do Estado de Santa Catarina.

Assim, o CA objetiva “[...] o desenvolvimento de experiências pedagógicas e estágios supervisionados para os cursos de Licenciatura e Educação.” (UFSC, 2007, p. 2).

Conforme consta no Artigo 2º de seu Regimento Escolar, o CA tem por finalidade:

- I. servir de campo de observação, pesquisa, experimentação, demonstração e aplicação de métodos e técnicas de ensino, de acordo com a legislação vigente;
- II. proporcionar a prática de ensino aos acadêmicos dos cursos de Licenciatura e Educação e os estágios supervisionados do Centro de Ciências da Educação, de acordo com a Resolução nº 061/CEPE/96, podendo ainda atender solicitações pertinentes ao ensino Fundamental e Médio dos demais centros da Universidade Federal de Santa Catarina;
- III. desenvolver práticas e produzir conhecimentos em função de uma melhor qualidade de ensino, estendendo-os à comunidade;
- IV. formar cidadãos livres, conscientes e responsáveis e,
- V. instrumentalizar o educando para uma atuação crítica e produtiva no processo de transformação e construção consciente de uma sociedade justa, humanitária e igualitária. (UFSC, 2007, p. 2).

Atualmente sua estrutura organizacional é constituída de: Colegiado, Diretor Geral, Diretor de Ensino, Assessoria Pedagógica, Coordenadoria Administrativa, Supervisão Escolar, Orientação Educacional, Coordenadoria de Apoio Administrativo ao Ensino

Fundamental e Médio, Coordenadoria de Estágio, Coordenadoria de Pesquisa e Extensão, Coordenadoria de Comunicação, Divulgação e Eventos, Biblioteca, Secretaria Escolar, Corpo Docente, Corpo Discente e Serviço Técnico-Administrativo.

O CA foi construído em etapas, a partir da década de 1980, de acordo com a sua demanda. Atualmente, possui uma estrutura física com 7.200 m² de área construída.

Os alunos, como já mencionado anteriormente, são de uma turma do 5º ano do ensino fundamental, composta de 25 alunos, cuja faixa etária varia entre 10 e 11 anos.

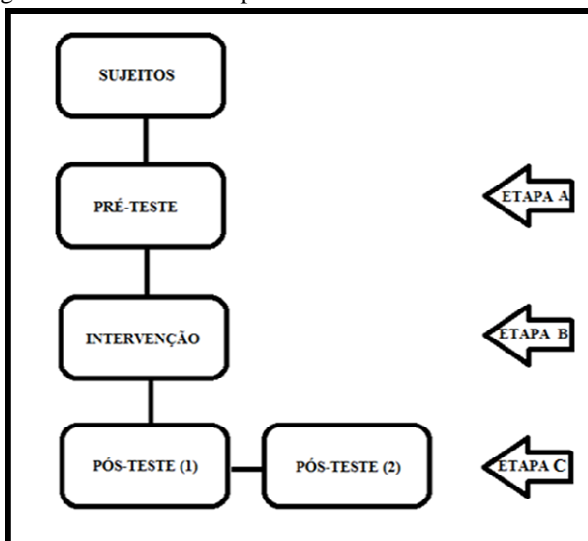
4.4. MATERIAIS

Podemos descrever o material utilizado na pesquisa, segundo as três etapas do estudo. As etapas “A” e “C” fazem referência aos instrumentos diagnósticos¹⁶ (pré-teste e dois pós-testes), e a etapa “B” diz respeito à intervenção que será realizada. Todas as etapas foram realizadas durante as aulas de Matemática.

O esquema abaixo é uma figura ilustrativa do experimento que será desenvolvido:

¹⁶ Ver anexo II, IV e V, pré-teste, pós-teste 1 e pós-teste 2.

Figura 4 – Desenho do experimento.



4.4.1. Apresentação e descrição da etapa a

Os materiais referentes a essa etapa, dizem-se respeito ao pré-teste, que teve como objetivo diagnosticar os conhecimentos dos alunos em relação aos cinco significados da fração. Essa coleta de dados foi feita na própria sala de aula, onde os problemas foram apresentados em data show, e os alunos tiveram uma aula, cerca de 50 minutos, para responderem as questões propostas, individualmente com o uso de lápis e borracha (não foi permitido o uso de qualquer material didático).

As questões do pré-teste abarcaram os cinco significados das frações, composto ao todo de 18 questões, sendo que para os significados parte-todo, quociente e operador multiplicativo foram designadas 4 questões, onde dentre essas, duas contemplaram quantidades contínuas, sendo uma com a presença de figura e outra com a ausência de figura, e outras duas as quantidades discretas nas mesmas

condições. Já os significados medida, também contemplaram 4 questões, no entanto duas foram relativas à quantidades intensivas, e outras duas às quantidades extensivas, onde em cada uma das quantidades tiveram uma questão com a presença da figura. Quanto ao significado número, foram representados por duas questões, retratando a representação dos números racionais na reta numérica e outra sobre a relação de desigualdades.

É importante deixar claro que, tanto as questões do pré-teste, quanto as questões dos dois pós-testes foram inspiradas nas pesquisas de Canova (2006), Malaspina (2007), Merlini (2005) e Moutinho (2005). As mesmas se utilizaram desses problemas para, dentre outras coisas, investigarem as estratégias utilizadas pelos alunos para resolver problemas que abordem a ideia de fração, em seus cinco significados, segundo a classificação teórica proposta por Nunes (2003).

Os quadros a seguir, mostram a distribuição das questões segundo o significado e as variáveis investigadas no pré-teste.

Quadro 1 – Distribuição das questões segundo o significado parte-todo, quociente, operador multiplicativo e a variável, presença ou não de figura.

Sig. \ Var.	Quant. Discretas	Quant. Contínuas	Presença de Figura
Parte-todo	3 e 4	1 e 2	2 e 4
Quociente	7 e 8	5 e 6	6 e 8
Operador	11 e 12	9 e 10	10 e 12

multiplicativo			
----------------	--	--	--

Quadro 2 – Distribuição das questões segundo o significado medida e a variável, presença ou não de figura.

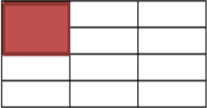
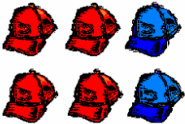
Var. Sig.	Quantidades extensivas	Quantidades intensivas	Presença de figura
Medida	13 e 14	15 e 16	14 e 16

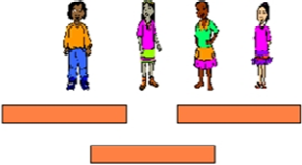
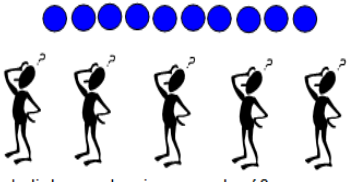
Quadro 3 – Distribuição das questões segundo o significado número e a variável, presença ou não de figura.



Var. Sig.	Reta numérica	Desigualdades	Presença de figura
Número	18	17	18



O pré-teste é constituído de dezoito questões, que apresentamos uma a uma, realizando uma discussão sobre as mesmas. Antes, para que o leitor tenha uma ideia geral do mesmo, apresentamos, no quadro abaixo, todas as questões, que são discutidas em seguida.

Quadro 4 – Apresentação das questões do pré-teste.

<p>1. Uma pizza foi dividida em 5 partes iguais. Joana comeu 3 dessas partes. Que fração representa o que Joana comeu</p>	<p>2. Observe a figura abaixo e responda qual a fração que representa a parte pintada da figura?</p> 
<p>3. No estojo de Rafael há 6 canetas, 2 azuis e 4 pretas. Que fração representa a quantidade de canetas pretas em relação ao total de canetas?</p>	<p>4. Numa loja de presentes há quatro bonés vermelhos e dois bonés azuis de mesmo tamanho. Que fração representa a quantidade de bonés azuis em relação ao total de bonés?</p> 

<p>5. Duas barras de chocolate foram divididas igualmente entre 3 crianças.</p> <p>a) Cada criança come um chocolate inteiro?</p> <p><input type="checkbox"/> SIM <input type="checkbox"/> NÃO</p> <p>b) Cada criança receberá pelo menos metade de 1 chocolate?</p> <p><input type="checkbox"/> SIM <input type="checkbox"/> NÃO</p> <p>c) Qual fração de chocolate cada criança receberá?</p>	<p>6. Foram divididas igualmente para quatro crianças, três barras de chocolate. Que fração de chocolate cada criança receberá?</p> 
<p>7. Marly tem 12 figurinhas e vai dividir igualmente com 4 colegas.</p> <p>a) Quantas figurinhas cada colega ganhará?</p> <p>b) Que fração representa esta divisão?</p>	<p>8. Tenho 10 bolinhas de gude e vou dividir igualmente para 5 crianças. Que fração representa esta divisão?</p> 

<p>9. Paulo partiu o chocolate e comeu $\frac{3}{4}$ dele. Desenhe o chocolate e mostre o quanto Paulo comeu.</p>	<p>10. Maria ganhou um chocolate e comeu $\frac{1}{4}$. Pinte a quantidade de chocolate que Maria comeu.</p> <div data-bbox="508 379 846 437" style="border: 1px solid black; height: 36px; width: 302px;"></div>
<p>11. Ana tem uma coleção de 24 bonecas. A coleção de sua prima é $\frac{1}{3}$ da sua. Quantas bonecas tem a prima de Ana?</p>	<p>12. Em uma loja que vende bolinhas de gude, restam apenas 12. Luiz ganhou $\frac{1}{3}$ dessas bolinhas de gude. Quantas bolinhas de gude Luiz ganhou?</p> <div data-bbox="557 852 788 995"></div>
<p>13. Na escola de Paulo foi feito um sorteio com 8 bilhetes para um passeio. Paulo tinha comprado 4 desses 8 bilhetes. Qual a chance de Paulo ser sorteado?</p>	<p>14. Qual a chance de tirar uma carta azul neste baralho?</p> <div data-bbox="512 1203 804 1347"></div>

<p>15. Para fazer certa quantidade de suco são necessários 2 medidas de água para 1 medida de concentrado de laranja. Que fração representa a medida da água em relação ao total de suco?</p>	<p>16. Para preparar uma jarra de refresco de uva, Cláudia necessita de um copo de concentrado de uva e um copo de água. Você pode escrever que fração representa o concentrado de uva em relação a mistura total?</p> 
<p>17. Compare as frações e complete as sentenças com os sinais de maior (>) menor (<) ou igual (=).</p> <p>a) $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$</p> <p>b) $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$</p> <p>c) $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$</p> <p>d) $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$</p>	<p>18. Encontre a posição dos números fracionários ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$) na reta numérica.</p> 

Questão 1

Uma pizza foi dividida em 5 partes iguais. Joana comeu 3 dessas partes. Que fração representa o que Joana comeu?

Esta questão aborda o significado parte-todo com quantidade contínua e sem presença de figura para retratar a situação. A questão

representa uma situação onde uma pizza foi dividida em 5 partes iguais sendo 3 dessas partes comida por Joana.

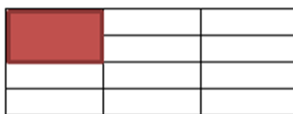
A quantidade contínua no significado parte-todo, segundo Moutinho (2005, p. 119) é bem explorada nos livros didáticos o que então nos leva a inferir que esse poderá ser o fator facilitador dessa questão. A ausência de figura pode ser um fator de complexidade, pois o aluno precisará imaginar ou desenhar a situação proposta.

Para a questão, as possibilidades de respostas poderiam ser:

- – 3 partes de pizza para um total de 5 partes, o que caracteriza o significado Parte-todo;
- – O aluno poderia ainda ter pensado de maneira correta, mas inverter o numerador com o denominador;
- – ou – O aluno ao responder dessa maneira poderia ter pensado em parte-parte, ou seja, as partes que Joana comeu tem (3 partes) em relação às partes que sobraram (2 partes), ou vice-versa.

Questão 2

Observe a figura abaixo e responda qual a fração que representa a parte pintada da figura?



Segundo Nunes; Bryant, (1997) só a percepção não dá conta. O item enfoca também o significado Parte-todo com quantidade contínua e apresenta ícone onde uma das partes pintadas corresponde a duas partes não pintadas e, portanto, a dupla contagem poderá não dar conta de responder corretamente.

Para que o aluno possa responder de maneira acertada este item, ele terá de comparar duas grandezas de mesma espécie, ou seja, analisar e perceber que a maior área pintada corresponde ao dobro das outras áreas. Assim, é possível que essa comparação seja o fator de complexidade, pois o aluno deve-se ater à conservação da área, ou seja, para que possa haver fração o todo deverá ser dividido em partes iguais.

Para a referida questão, as possibilidades de respostas, possíveis, entre outras, poderiam ser:

- $\frac{2}{12}$ 2 representando as partes pintadas e 12 representando o total de partes da figura. Para essa resposta podemos deduzir que houve o entendimento, por parte do aluno, da conservação da área, ou seja, a parte pintada equivale a duas partes da figura;
- $\frac{1}{6}$ 1 representando a parte pintada e 6 representando o total de partes da figura. Para essa resposta poderíamos inferir que houve o entendimento, por parte do aluno, porém diferente da possibilidade acima, a parte pintada equivale a uma parte da figura;

- $\frac{1}{11}$ 1 representando a parte pintada e 11 representando o total de partes da figura. Para esta resposta podemos inferir que não houve a conservação da área, ou seja, o aluno simplesmente utilizou a dupla contagem como se todas as áreas pintadas tivessem a mesma dimensão;
- $\frac{2}{10}$ ou $\frac{10}{2}$; $\frac{1}{10}$ ou $\frac{10}{1}$ Nesse tipos de resposta, podemos inferir que o aluno pode ter pensado na relação parte-parte, ou seja, 2 partes pintadas para 10 não pintadas, levando em conta que a maior parte pintada corresponde a duas partes da figura; ou ainda, também, pensando na relação parte-parte, mas o aluno pode não ter percebido a diferença de tamanho entre área pintada e não pintada.

Questão 3

No estojo de Rafael há 6 canetas, 2 azuis e 4 pretas. Que fração representa a quantidade de canetas pretas em relação ao total de canetas?

Esta questão aborda o significado Parte-todo com quantidade discreta e não apresenta figura. A situação representa um conjunto de 6 canetas, 2 azuis e 4 pretas, sendo a quantidade total de canetas do estojo, o denominador e a quantidade de canetas pretas o numerador.

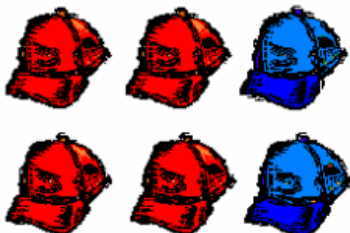
Na questão, temos como possibilidades as seguintes respostas:

- $\frac{4}{6}$ 4 canetas pretas em um total de total de 6 canetas, demonstrando, assim, que o aluno pode ter se utilizado da dupla contagem, o que caracteriza o significado Parte-todo;

- $\frac{2}{3}$ O aluno pode ter simplificado a fração $\frac{2}{6}$, dividindo o numerador e o denominador por 2, obtendo a fração $\frac{2}{3}$;
- $\frac{6}{4}$ ou $\frac{3}{2}$ O aluno poderia ainda ter pensado de maneira correta, mas inverter o numerador com o denominador, e teremos então respostas desse tipo;
- $\frac{2}{4}$ ou $\frac{4}{2}$ O aluno poderá responder de maneira equivocada pensando na relação Parte-parte, isto é, 2 canetas azuis para 4 canetas pretas, ou ainda, 4 canetas pretas para 2 canetas azuis.

Questão 4

Numa loja de presentes há 4 bonés vermelhos e 2 bonés azuis de mesmo tamanho. Que fração representa a quantidade de bonés azuis em relação ao total de bonés?



Esta questão aborda o significado Parte-todo com quantidade discreta e apresenta a figura que retrata tal situação. O significado Parte-todo é, geralmente, utilizado na introdução do conceito de fração. Trata-se de uma situação que pode empregar um tipo de contagem dupla - a

quantidade total de bonés, sendo o denominador e a quantidade de bonés azuis o numerador.

A quantidade discreta no significado parte-todo costuma ser pouco explorada nos livros didáticos, o que nos leva a inferir que esse pode ser o fator de complexidade da questão. Por outro lado, o ícone, pode ser um fator facilitador, pois ele retrata de maneira clara a situação proposta.

Nesta questão, esperamos, entre outras, as seguintes respostas:

- $\frac{2}{6}$ 2 bonés azuis para um total de 6 bonés, demonstrando assim, que o aluno pode ter se utilizado da dupla contagem, o que caracteriza o significado Parte-todo;
- $\frac{1}{3}$ Esta poderia ser uma possível resposta. Neste caso há duas possibilidades. A primeira é que o aluno poderia ter atribuído o significado de Operador Multiplicativo e nesse caso, ter pensado “que número multiplicado por 6 dá como resposta o número 2?” A segunda possibilidade é o aluno ter atribuído o significado Parte-todo e ter simplificado a fração $\frac{2}{6}$ chegando a $\frac{1}{3}$.
- $\frac{6}{2}$ ou $\frac{3}{1}$ O aluno poderia ainda ter pensado de maneira correta, mas inverter o numerador com o denominador, e teremos então respostas desse tipo;

- $\frac{2}{4}$ ou $\frac{4}{2}$ O aluno poderia responder de maneira equivocada pensando na relação parte-parte, isto é, 2 bonés azuis para 4 bonés vermelhos, ou ainda, 4 bonés vermelhos para 2 azuis.

Questão 5

Duas barras de chocolate foram divididos igualmente entre 3 crianças.

A) Cada criança come um chocolate inteiro? () SIM () NÃO

B) Cada criança receberá pelo menos metade de 1 chocolate?

() SIM () NÃO

C) Qual fração de chocolate cada criança receberá?

O significado envolvido nesta questão é o quociente, visto que é preciso dividir o número de chocolate pelo número de crianças para achar a fração que cada criança irá receber.

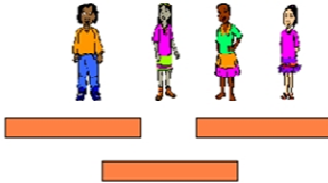
A questão apresenta três itens. Nos itens “a” e “b” acreditamos que os alunos não irão apresentar dificuldade para responder, uma vez que a figura é um facilitador nesta questão. Já no item “c” onde se pede a representação da divisão de chocolate por criança na forma de fração, acreditamos que a resposta não seja tão imediata como nos itens anteriores. A ideia de divisão geralmente não está ligada diretamente à ideia de fração. Para a divisão as pessoas procuram chegar a resultado de números inteiros, na maioria das vezes, e nunca representar como uma fração. Devem aparecer como algumas das respostas para o item “c”:

- $\frac{3}{4}$ 3 chocolates para 4 crianças, o que caracteriza o significado Quociente;

- — para essa resposta acreditamos que os alunos consideraram os três chocolates como sendo o todo, e foram dividindo até chegarem em uma quantidade de partes iguais para serem distribuídas igualmente para as quatro crianças;
- – para essa resposta acreditamos que os alunos consideraram os três chocolates como o todo, e foram dividindo até chegarem em uma quantidade de partes iguais para serem distribuídas igualmente para as quatro crianças.

Questão 6

Foram divididas igualmente para 4 crianças, 3 barras de chocolate. Que fração de chocolate cada criança receberá?



A questão enfoca o significado Quociente com quantidade contínua, utilizando a figura para representar a situação. O significado Quociente está presente nas situações, em que a divisão surge como uma estratégia para resolver um problema com a ideia de divisão, partilha. Conhecido o número do grupo a ser formado - 4 crianças - o quociente representa o tamanho de cada grupo $\frac{3}{4}$.

Algumas possibilidades de respostas poderiam ser:

- $\frac{3}{4}$ Para esta resposta, podemos inferir que o aluno pensou na fração com significado de Quociente, ou seja, 3 chocolates para

4 crianças, o que retrata claramente duas grandezas distintas (chocolates e crianças) caracterizando, assim, o significado Quociente;

- $\frac{4}{3}$ Nesta resposta, podemos inferir que o aluno pensou de maneira correta, mas inverteu o numerador com o denominador;
- $\frac{1}{4}$ Nesta resposta, o aluno poderia ter pensado em Operador multiplicativo, ou seja, não importa a quantidade de chocolate a ser dividido, cada criança receberá a quarta parte dessa quantidade.

Questão 7

Marly tem 12 figurinhas e vai dividir igualmente com 4 colegas.

A) Quantas figurinhas cada colega ganhará?

B) Que fração representa esta divisão?

Essa questão enfoca o significado Quociente com quantidade discreta, sem a figura para representar a situação. O item “a”, quando se pergunta quantas figurinhas cada colega ganhará, é para se certificar que o aluno entendeu o problema como uma situação de divisão.

Algumas respostas esperadas para esse item “b” são:

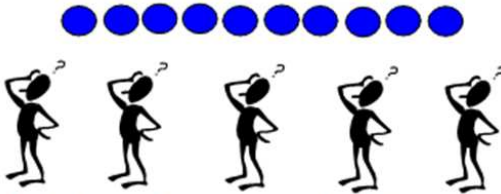
- $\frac{12}{4}$ 12 figurinhas distribuídos igualmente entre 4 colegas. Essa resposta caracteriza o significado Quociente;
- $\frac{3}{12}$ para essa resposta pode-se pensar que o aluno utilizou a resposta do item “a”. Neste caso a resposta nos remete ao

significado Parte-todo, ou seja, cada colega terá 3 figurinhas do total de 12;

- – nesse caso pode-se inferir que o aluno poderia estar pensando no significado Operador multiplicativo, ou seja, não importa a quantidade de figurinhas a serem distribuídas, pois cada colega irá receber – do total de figurinhas;
- — para essa resposta o aluno pensou de maneira correta, mas inverte o denominador pelo numerador, acreditando que o denominador tem que ser sempre maior que o numerador.

Questão 8

Tenho 10 bolinhas de gude e vou dividir igualmente para 5 crianças. Que fração representa esta divisão?



Esta questão enfoca o significado Quociente com quantidade discreta, utilizando a figura para representar o conjunto de bolinhas de gude a serem divididas às cinco crianças. Acreditamos que o fator de complexidade resida na formalização da resposta, pois, normalmente, o aluno não faz a conexão entre fração e divisão. Isso pode ocorrer pelo fato do conceito de fração estar, para o aluno, intrinsecamente mais ligado ao significado Parte-todo, uma vez que, usualmente, é por esse

significado que se inicia o conceito de fração. Outro fator de complexidade pode ser o fato de estarmos lidando com quantidades discretas que, geralmente, é pouco explorado nos livros didáticos.

Algumas possibilidades de respostas esperadas

- $\frac{10}{5}$ Para esta resposta podemos inferir que o aluno pensou na fração com significado de quociente, ou seja, 10 bolinhas de gude para 5 crianças, o que retrata claramente duas grandezas distintas, caracterizando, assim, o significado Quociente;
- $\frac{5}{10}$ O aluno poderá responder invertendo o numerador com o denominador. É possível que um dos fatores dessa inversão seja o fato que o aluno está mais familiarizado com frações de numeradores menores que os denominadores (frações próprias), comumente encontrada nas situações de Parte-todo;
- $\frac{2}{10}$ Nesta resposta, podemos inferir que, se o aluno sabe que serão duas bolinhas de gude para cada criança, ele poderá ter se utilizado desse dado para responder de tal forma. Dessa maneira a resposta poderia nos remeter ao significado Parte-todo, ou seja, cada criança receberá 2 das 10 bolinhas de gude;
- $\frac{10}{2}$ O aluno poderá responder invertendo o numerador com o denominador;
- $\frac{1}{5}$ Nesta resposta podemos inferir que, o aluno poderia ter pensado em Operador multiplicativo, ou seja, não importa a

quantidade de bolinhas de gude a serem divididas, pois, o que cada uma das 5 crianças receberá equivale a $\frac{1}{5}$ do total de bolinhas de gude.

Questão 9

Paulo partiu o chocolate e comeu $\frac{3}{4}$ dele. Desenhe o chocolate e mostre o quanto Paulo comeu.

A questão enfoca o significado Operador multiplicativo com quantidade contínua, e não apresenta a figura, o que acreditamos ser um complicador na hora do aluno responder a questão.

O significado Operador multiplicativo nessa questão propõe-se a delimitar a quantidade de chocolate que Paulo comeu, ou seja, reduz o inteiro partido em 4 partes iguais, e 3 partes já consumidas.

Uma das possibilidades de resposta do aluno é a que ele desenhe uma figura retangular e pinte, ou delimite de alguma forma, o que possa corresponder a 3 das 4 partes do chocolate inteiro.

Questão 10

Maria ganhou um chocolate e comeu $\frac{3}{4}$. Pinte a quantidade de chocolate que Maria comeu.



A questão enfoca o significado Operador multiplicativo com quantidade contínua, apresentando a figura que será usada para a

resposta do aluno, pois é sobre a figura que o aluno deverá pintar a parte correspondente a $\frac{2}{5}$.

O significado Operador multiplicativo nessa questão propõe-se a delimitar a quantidade de chocolate que Maria comeu, ou seja, reduz o inteiro partido em 5 partes iguais, em 2 partes já consumidas.

Partindo do pressuposto que, geralmente, o conceito de fração é introduzido e trabalhado com figuras geométricas (retângulos, círculos) que representam chocolate, pizza; entendemos que essa figura seja tida como fator facilitador para a compreensão dessa questão pelo aluno.

Uma das possibilidades de resposta do aluno é a que ele pinte, ou delimite de alguma forma, o que possa corresponder a 2 das 5 partes do chocolate inteiro.

Questão 11

Ana tem uma coleção de 24 bonecas. A coleção de sua prima é $\frac{2}{3}$ da sua. Quantas bonecas tem a prima de Ana?

A questão está associada ao significado de Operador multiplicativo, com quantidade discreta e não apresenta figura que retrate a situação proposta. O significado Operador multiplicativo exerce o papel de transformação, isto é, a representação de uma ação que deve imprimir sobre um número ou uma quantidade, transformando seu valor nesse processo. Conceber a fração como um Operador multiplicativo é admitir que a fração $\frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$) em quantidades discretas atua como um multiplicador. Relacionamos a quantidade discreta por se tratar de bonecas.

A questão pede ao aluno que baseado em uma coleção de 24 bonecas, calcule $\frac{2}{3}$ dessa coleção. O cálculo poderá ser feito multiplicando 24 por 2 e, em seguida, dividindo esse produto por 3. Entendemos que o fator de complexidade da questão é saber por qual termo da fração deve-se dividir o 24, se pelo denominador 3 ou se pelo numerador 2, mesmo sendo uma questão explorada em sala de aula não descartamos o fato do aluno pensar como Parte-todo. Caso ele faça o desenho das bonecas da seguinte maneira: (S representa o possível desenho do aluno)

S S S S S S S S

S S S S S S S S

S S S S S S S S

e pense que cada linha representa $\frac{1}{3}$, a soma das três linhas dará a resposta correta (16 bonecas).

Elegemos algumas das possíveis respostas que podemos encontrar:

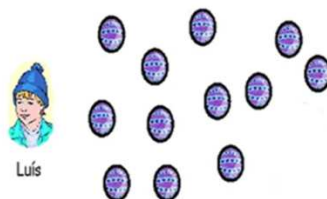
- 16, supondo que o aluno pensou na multiplicação de 24 por 2 e a divisão do resultado desse produto por 3;
- 36, esta poderá ser uma das respostas, pois, como descrevemos, anteriormente, o aluno poderá não saber por qual termo da fração ele deverá multiplicar, se pelo numerador ou denominador. Assim sendo, ele poderá pensar em $(24 \times 3) : 2$. Todavia, essa resposta poderá ser descartada ou não pelo aluno, afinal Ana não poderá dar uma quantidade maior de bonecas do que possui;

- 8, para essa resposta, podemos inferir que o aluno fez apenas a divisão de 24 por 3 (denominador), desprezando o numerador 2;
- 12, em relação a essa resposta, o que podemos concluir, é que o aluno poderá ter dividido 24 por 2 (numerador) e desprezado o 5 (denominador).

Questão 12

Em uma loja que vende bolinhas de gude, restam apenas 12.

Luís ganhou – dessas bolinhas de gude. Quantas bolinhas de gude Luís ganhou?



Essa questão aborda o significado de Operador multiplicativo, com quantidade discreta e apresenta a figura que retrata a situação proposta. A questão pede ao aluno que baseado na coleção de 12 bolinhas de gude, ele calcule – desta coleção. Este cálculo poderá ser feito, multiplicando 12 por 2 e, em seguida dividindo esse produto por 3. Acreditamos que o fator de complexidade dessa questão seja saber, por qual termo da fração deve-se dividir o 12 (quantidade de bolinhas de gude), se pelo denominador 3 ou se pelo numerador 2, mesmo sendo uma questão muito explorada em sala de aula.

Elegemos algumas das possíveis respostas que podemos encontrar:

- 8, para esta resposta, podemos concluir que o aluno possa ter pensado na multiplicação 12 por 2 e depois, com o resultado desse produto, feito a divisão por 3 resultando o valor de 8;
- 18, esta poderá ser uma das respostas, pois como descrevemos anteriormente o aluno poderá não saber, por qual termo da fração ele deverá multiplicar, se pelo numerador ou denominador. Assim sendo, ele poderá pensar em $(12 \times 3) : 2$. Todavia, essa resposta poderá ser descartada pelo aluno, afinal o aluno poderá perceber que Luís não poderá dar uma quantidade maior de bolinhas de gude do que possui;
- 4, para esta resposta, podemos deduzir que o aluno fez apenas a divisão de 12 por 3, desprezando o numerador 2;
- 6, em relação a esta resposta, podemos entender que o aluno poderá ter dividido 12 por 2 (numerador) e desprezado o 3 (denominador).

Questão 13

Na escola de Paulo foi feito um sorteio com 8 bilhetes para um passeio. Paulo tinha comprado 4 desses 8 bilhetes. Qual a chance de Paulo ser sorteado?

Esta questão aborda o significado Medida com quantidade discreta e não apresenta a figura. O significado Medida dessa questão

deve-se ao fato da fração referir-se a quantidades intensivas, nas quais a quantidade é medida pela relação entre duas variáveis - total de bilhetes da rifa e bilhetes comprados. A probabilidade do evento é medida pelo quociente do número de casos favoráveis - bilhetes comprados - dividido pelo número de casos possíveis - total de bilhetes da rifa, portanto, a probabilidade do evento varia de 0 a 1, e o valor com o qual trabalhamos é fracionário. Trata-se de quantidade discreta, pois se refere a bilhetes de uma rifa, e, além disso, a questão não possui figura que represente a situação.

As respostas que esperamos para essa questão são:

- $\frac{4}{8}$ para esta resposta, podemos concluir que o aluno pode ter pensado fração com o significado de medida, ou seja, do total de bilhetes qual a chance que Pedro terá para ganhar;
- $\frac{8}{4}$ para esta resposta, podemos inferir que o aluno pode ter pensado de maneira correta, mas fez a inversão entre o numerador e o denominador;
- $\frac{1}{2}$ para esta resposta, podemos entender que o aluno pode ter feito a simplificação da fração dividindo o numerador e denominador por 4.
- $\frac{2}{1}$ com relação a esse tipo de resposta podemos inferir que o aluno pode ter invertido o denominador com o denominador.

- 50% poderíamos concluir que o aluno pensaria na forma mais usual de se representar uma probabilidade, em percentagem.

Questão 14

Qual a chance de tirar uma carta azul neste baralho?



A questão envolve o significado medida e apresenta figura para retratar a situação. O significado medida nesta questão refere-se a quantidades extensivas, nas quais a quantidade é medida pela relação de duas variáveis. A probabilidade de um evento é medida pelo quociente número de casos favoráveis, 2 cartas brancas, dividido pelo número de casos possíveis, total de 5 cartas. Portanto, a probabilidade de um evento varia de 0 a 1 e a maioria dos valores com os quais trabalhamos, é fracionária. O objetivo da questão é que o aluno utilize a figura para conseguir chegar à solução do problema.

Nesta questão, é possível encontrar as seguintes respostas:

- – para este tipo de resposta, acreditamos que o aluno utilizou-se da fração com o significado de medida, ou seja, a chance de tirar carta azul neste baralho é de 3 em 5.
- – acreditamos que o aluno pensou certo, mas fez a inversão do numerador com o denominador.

Questão 15

Para fazer certa quantidade de suco são necessários 2 medidas de água para 1 medida de concentrado de laranja. Que fração representa a medida da água em relação ao total de suco?

A questão aborda o significado Medida com quantidade contínua e não apresenta figura. O significado Medida dessa questão envolve fração por se referir a quantidades intensivas, - concentrado de laranja e água - ou seja, para conseguir um determinado sabor do suco, misturamos 1 parte de concentrado de laranja e 2 partes de água. A receita, o sabor do suco, é medida pela razão 1 para 2, que pode ser representada como sendo $\frac{1}{2}$ (relação parte-parte). Consideramos quantidade contínua por se tratar de água e concentrado de laranja.

Para responder a questão, o aluno deverá somar as quantidades de concentrado de laranja e água para obter a quantidade total do suco (denominador da fração), para a partir de então chegar à resposta correta $\frac{1}{3}$.

Na questão, poderemos ter como possibilidades as seguintes respostas:

- $\frac{1}{3}$ para esta possível resposta, podemos inferir que o aluno pensou na quantidade de concentrado de laranja em relação ao suco como um todo, ou seja, 1 parte de concentrado de laranja somadas com 2 partes de água totalizando 3 partes de suco;
- $\frac{3}{1}$ esta fração poderá aparecer como resposta, pois o aluno poderá ter pensado de maneira coerente, mas, na formalização da resposta inverter o numerador com o denominador;

- $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{5}$ – estas duas possíveis respostas podem aparecer, assim, inferir que o aluno tenha pensado em parte-parte, 2 partes de concentrado de laranja para 5 partes de água ou vice-versa.

Questão 16

Para preparar uma jarra de refresco de uva, Cláudia necessita de um copo de concentrado de uva e um copo de água. Você pode escrever que fração representa o concentrado de uva em relação à mistura total?



A questão envolve o significado medida com quantidade contínua e apresenta figura para retratar a situação. O significado medida desta questão envolve fração por se referir a quantidades intensivas - concentrado de uva e água, isto é, para obter o suco, o aluno terá que misturar 2 copos de água para 1 copo de concentrado de uva. Além disso, essa quantidade nos remete à ideia de fração, considerando que o todo (o suco) é constituído de 3 partes, sendo $\frac{1}{3}$ a fração que corresponde à medida de concentrado de uva no suco e $\frac{2}{3}$ a fração que representa a medida de água no suco.

Nesta questão esperamos, entre outras, as seguintes respostas:

- – para esta possível resposta, podemos imaginar que o aluno pensou na quantidade de concentrado de uva em relação ao suco como um todo, ou seja, 1 parte de concentrado de uva somadas com 2 partes de água e totalizando 3 partes de suco;

- $\frac{3}{1}$ esta também poderá aparecer como resposta, pois o aluno poderá ter pensado de maneira coerente, mas na formalização da resposta ter invertido o numerador com o denominador;
- $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{1}$ estas duas possíveis respostas podem aparecer, e podemos inferir que o aluno tenha pensado em Parte-parte, ou seja, 1 parte de concentrado de uva para 2 partes de água ou vice-versa.

Questão 17

Compare as frações e complete as sentenças com os sinais de maior (>) menor (<) ou igual (=).

A) $\frac{2}{5}$ — $\frac{3}{5}$

B) $\frac{1}{3}$ — $\frac{2}{6}$

C) $\frac{7}{20}$ — $\frac{7}{10}$

D) $\frac{1}{2}$ — $\frac{5}{10}$

Nessa questão é focalizado o significado Número, onde é visto a relação entre as quantidades, em maior, menor e igual (>, < ou =).

Esperamos, entre outras, as seguintes respostas:

para a letra A):

- $\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$,

para a letra B):

- $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$,

para a letra C):

- $\frac{7}{20} < \frac{7}{10}$;

para a letra D):

- $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$.

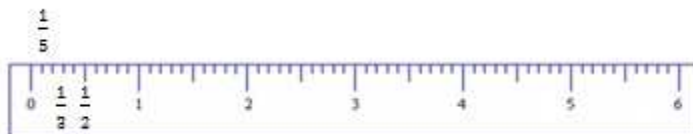
Para essas respostas podemos pensar que o aluno saiba a quantidade que esses números representam, ou até mesmo que fazem relação com sua localização na reta numérica. Qualquer outra resposta dada representaria a incompreensão do aluno com o significado de número da fração.

Questão 18

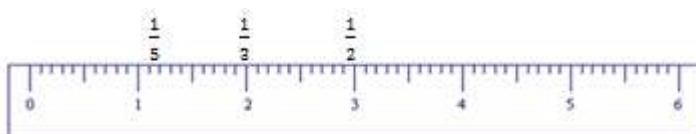
Encontre a posição dos números fracionários $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} e \frac{1}{5})$ na reta numérica.



Esta questão focaliza o significado Número com quantidade contínua com a presença de figura. Decorre dessa interpretação, perceber que a notação $\frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$) representa em alguns casos, um número na reta numérica. Consideramos quantidade contínua por ser um número que pode ser representado na reta numérica. A figura está representando uma reta numérica (régua) e as respostas, ou seja, as frações serão indicadas nessa figura. Esperamos encontrar muitas respostas diferentes. Entre elas devem aparecer:



Esta resposta expressa de maneira correta a localização dos pontos $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$ na reta numérica, dessa forma entende-se que o aluno reconheça a fração, como um número e não uma superposição de dois números naturais. Deve saber também que $\frac{1}{5} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.



Com essa resposta poderemos concluir que o aluno considerou a reta numérica como um todo, um inteiro, e a metade desse segmento estará localizado no ponto 3, $\frac{1}{3}$ desse seguimento localizado no ponto 2 e $\frac{1}{5}$ localizado um pouco após o número 1, já que o resultado de 6 dividido por 5, é igual a 1,2.

- Existe também a possibilidade de $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ não estarem nessa sequência na reta numérica, o que nos sugere que o aluno não conhecia o valor de cada ponto, ou seja, que $\frac{1}{5} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.

4.4.2. Apresentação e descrição da etapa b

O material da intervenção de ensino constou de um caderno contendo 10 situações-problema envolvendo o significado medida, contemplando as situações envolvendo problemas de solução, velocidade e lotação.

Para a resolução dos problemas apresentados, foram disponibilizados aos alunos os materiais manipulativos os quais se constituem de: bonecos, carrinhos, copos descartáveis de 250 ml, garrafas pet de 2 litros e solutos (açúcar e concentrado de suco).

A dinâmica utilizada foi a seguinte:

- o aluno era chamado em sala de aula para uma sala reservada;
- em seguida era feita a apresentação do material ao aluno, onde eram dadas informações a respeito da quantidade de questões e quanto ao material manipulativo;
- feito isso, o aluno realizava a leitura da questão, sendo respondida com a ajuda da pesquisadora quando necessário. (A pesquisadora em frente a uma resposta considerada incorreta fazia questionamentos quanto à resposta dada, levando o aluno a pensar e refletir) e,
- quando o problema não apresentava figura, a pesquisadora orientava qual material utilizar na devida questão.

A tabela a seguir, mostra a distribuição das questões quanto às situações problemas (solução, velocidade e lotação) abordadas e aos materiais utilizados, ilustrativos e manipulativos.

Quadro 5 – Distribuição das questões segundo as situações abordadas e os materiais utilizados.

Situação Material	Manipulativo	Ilustrativo
Velocidade	3 e 4	10
Solução	1 e 2	7 e 9
Lotação	5	6 e 8

Como pode ser visto na tabela acima, as questões que abordaram a situação de velocidade são as de número 3, 4 e 10, sendo que as questões 3 e 4 foram utilizados materiais manipulativos e a questão 10 contou com o auxílio de figura. Para a situação de solução temos as questões 1, 2, 7 e 9, sendo utilizado como auxílio nas questões 1 e 2 o material manipulativo, e nas questões 7 e 9 materiais ilustrativos. Completando com a situação de lotação com as questões 5, 6 e 8, sendo a questão 5 utilizado o material manipulativo e as questões 6 e 8 materiais ilustrativos.

Apresentamos os problemas a seguir, realizando uma discussão sobre os mesmos.

Problema 1

Em dois copos de tamanho iguais, adicionamos $\frac{1}{2}$ copo de água e $\frac{1}{2}$ copo de concentrado de suco. Agora vamos misturar um pouco de açúcar. No primeiro copo vamos colocar uma colher de açúcar e no segundo copo vamos colocar duas colheres de açúcar.

Pergunta-se:

a) os dois copos de suco terão o mesmo gosto? Se sua resposta for não, qual será a diferença entre eles?

b) agora vamos fazer os mesmos sucos usando 1 copo de água para cada receita. Quantas colheres de açúcar precisará colocar em cada suco para que o gosto permaneça o mesmo?

Esse problema envolve a quantidade intensiva na situação de solução, sem a presença de figura, onde são apresentadas 3 variáveis distintas (água, açúcar e concentrado de suco), sendo duas delas constantes (água e o concentrado de suco) variando somente uma (açúcar). Nele foram disponibilizados copos descartáveis, açúcar, concentrado de suco e água. Com essa questão acreditamos que o aluno comece a pensar sobre a relação de proporção que existe entre as receitas.

As respostas que pretendemos chegar junto ao aluno são:

- para a alternativa “a”, esperamos que o aluno sinta a diferença, por meio do paladar, e responda que os sucos não terão o mesmo gosto, e que a diferença entre eles é a doçura e,
- para a alternativa “b” esperamos que o aluno compreenda que quando aumentamos um ingrediente da receita, para que o gosto continue o mesmo, todos os outros ingredientes tem que ser aumentados na mesma proporção. Sendo assim, como são duas receitas, na primeira, esperamos que os alunos coloquem 1 copo de água, 1 copo de concentrado e 2 colheres de açúcar, e na segunda receita, 1 copo de água, 1 copo de concentrado e 4 colheres de açúcar.

Problema 2

Em um copo adicionamos $\frac{1}{3}$ do copo de água e $\frac{2}{3}$ do copo de concentrado de suco. No outro copo adicionamos $\frac{2}{3}$ de água e $\frac{1}{3}$ de concentrado de suco. No primeiro copo adicionamos duas colheres de açúcar e no segundo copo adicionamos duas colheres de açúcar.

a) Os dois copos de suco terão o mesmo gosto? Se sua resposta for não, qual será a diferença entre eles?

b) Agora vamos fazer os mesmos sucos usando 2 copos de água para cada receita. Quantas colheres de açúcar precisará colocar em cada suco para que o gosto permaneça o mesmo?

Esse problema também envolve a quantidade intensiva na situação de solução, sem a presença de figura, onde são apresentadas 3 variáveis distintas (água, açúcar e concentrado de suco), porém, apenas uma delas é constantes (açúcar) variando então as outras (água e o concentrado de suco). Nele foram disponibilizados copos descartáveis, açúcar, concentrado de suco e água. Com essa questão acreditamos que o aluno perceba a relação de proporção que existe entre as receitas.

As respostas que pretendemos chegar junto ao aluno são:

- para a alternativa “a”, esperamos que o aluno sinta a diferença, por meio do paladar, e responda que os sucos não terão o mesmo gosto, e que a diferença entre eles é a relação concentrado de suco por água e,
- para a alternativa “b” esperamos que o aluno compreenda que quando aumentamos um ingrediente da receita, para que o gosto continue o mesmo, todos os outros ingredientes tem que serem

aumentados na mesma proporção. Sendo assim, como são duas receitas, na primeira, esperamos que os alunos coloquem 2 copos de água, 4 copos de concentrado e 12 colheres de açúcar, e na segunda receita, 2 copos de água, 1 copo de concentrado e 6 colheres de açúcar.

Problema 3

Temos dois carros, o carro amarelo e o carro vermelho. O carro amarelo atinge a linha de chegada depois de 82min. O carro vermelho atinge a linha de chegada também depois de 82min.

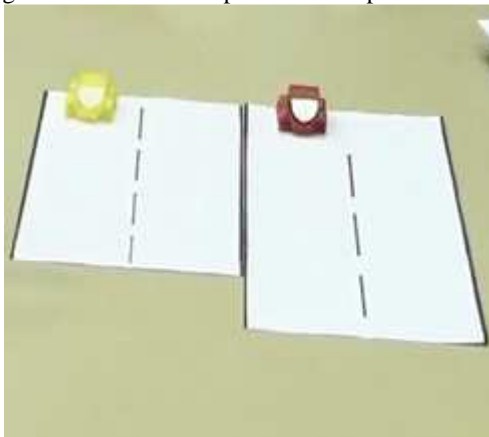
Pergunta-se:

a) Será que um carro é mais rápido do que o outro? Por quê?

b) Se o carro amarelo e o carro vermelho andarem no mesmo ritmo, o tempo de chegada vai ser o mesmo para os dois carros? Por quê?

Esse problema também envolve a quantidade intensiva na situação de velocidade, sem a presença de figura, onde são apresentadas as variáveis “distância do percurso”, “tempo gasto” e “velocidade do carro”, sendo a variável “tempo gasto” constante no item “a” e a variável “velocidade do carro” constante no item “b”. Nele foram disponibilizados dois carrinhos em miniatura (um amarelo e um vermelho) e duas pistas de tamanhos distintos, como mostra a figura a seguir.

Figura 5 – Materiais disponibilizados para a resolução do problema 3.



Com essa questão acreditamos que o aluno comece a pensar sobre a relação de proporção que existe entre a distância e o tempo (sobre a velocidade).

As respostas que pretendemos chegar junto ao aluno são:

- para a alternativa “a”, esperamos que o aluno veja a diferença de distâncias e responda que um carro é mais rápido que o outro, e que isso ocorre porque um carro percorre uma distância maior que o outro em um mesmo período de tempo e,
- para a alternativa “b” esperamos que o aluno compreenda que quando os carros estiverem no mesmo ritmo (mesma velocidade) esses carros percorreram em tempos iguais distâncias iguais. Sendo assim, como são pistas de tamanhos distintos, esperamos que os alunos respondam que não e que mostre que o carrinho da pista menor leva menos tempo para chegar à linha de chegada.

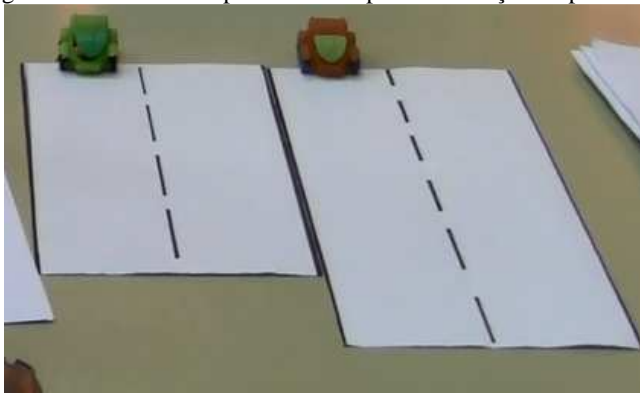
Problema 4

Dois carros estão em uma faixa. O carro laranja e o carro verde. O carro laranja leva 15 minutos para chegar até a linha de chegada, já o carro verde leva 20 minutos.

- a) Será que um carro é mais rápido do que o outro? Por quê?*
- b) Se o carro laranja sair 2 minutos depois do carro verde, eles irão se encontrar antes de cruzarem a linha de chegada? Por quê?*

Esse problema também envolve a quantidade intensiva na situação de velocidade, sem a presença de figura, onde são apresentadas as variáveis “distância do percurso”, “tempo gasto” e “velocidade do carro”, sendo a variável “distância do percurso” constante. Nele foram disponibilizados dois carrinhos em miniatura (um laranja e um verde) e duas pistas de tamanhos iguais.

Figura 6 – Materiais disponibilizados para a resolução do problema 4.



Com essa questão acreditamos que o aluno compreenda a relação de proporção que existe entre a distância e o tempo (velocidade).

As respostas que pretendemos chegar junto ao aluno são:

- para a alternativa “a”, esperamos que o aluno veja a diferença de tempos e responda que um carro é mais rápido que o outro, e que isso ocorre porque um carro percorre a mesma distância em um tempo menor e,
- para a alternativa “b” esperamos que o aluno compreenda que quando os carros estiverem no mesmo ritmo (mesma velocidade) esses carros percorreram em tempos iguais distâncias iguais. Sendo assim, como são pistas de tamanhos iguais, esperamos que os alunos respondam que sim e que mostre que os carrinhos alcançaram juntos a linha de chegada.

Problema 5

Paulo receberá 20 amigos em seu apartamento. Para subir até o apartamento de Paulo é necessário que todos subam o elevador, que tem capacidade máxima de 6 pessoas.

a) Quantas viagens de elevador serão necessárias para todos os amigos de Paulo chegarem ao seu apartamento?

b) Em algumas dessas viagens irá sobrar lugar? Se sim, quantos?

c) Se a quantidade máxima permitida no elevador fosse somente 5 pessoas, quantas viagens seriam feitas de elevador, para que todos chegassem no apartamento de Paulo?

Esse problema envolvendo a quantidade intensiva na situação de lotação, sem a presença de figura, apresenta as variáveis “número de amigos”, “capacidade máxima do elevador” e “número de viagens”, sendo a variável “capacidade máxima do elevador” constante. Nele foram disponibilizados 20 bonecos, representando os amigos de Paulo, e um recipiente para representar o elevador. Com essa questão acreditamos que o aluno comece a pensar sobre uma relação de proporção existente entre o número de pessoas e o número de viagens.

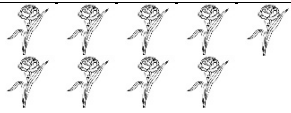
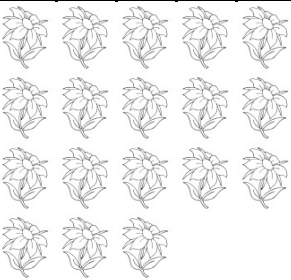

As respostas que pretendemos chegar junto ao aluno são:

- para a alternativa “a”, esperamos que o aluno preencha o recipiente com grupos de 6 bonecos e depois esvazie o recipiente, de forma a representar os amigos de Paulo subindo de elevador. Esperamos que o aluno repita o processo até que todos os bonecos tenham passado pelo recipiente uma única vez. Espera-se que o aluno conte o número de vezes que o elevador subiu e responda que são necessárias 4 viagens de elevador para que todos os amigos de Paulo cheguem ao apartamento;
- para a alternativa “b” esperamos que o aluno perceba que colocando 6 bonecos em cada viagem de elevador, na última viagem há somente dois bonecos no recipiente, sobre 4 lugares de elevador. Sendo assim, esperamos que os alunos respondam que em uma das viagens sobraram 4 lugares e, para a alternativa “c” esperamos que o aluno repita o processo do item “a”, porém colocando 5 bonecos em cada viagem de elevador, ao invés de 6. Sendo assim, esperamos que os alunos respondam que seriam feitas 4 viagens.

Problema 6

Um Jardineiro deseja fazer canteiros com 9 flores em cada.

Para isso o jardineiro possui 9 cravos, 18 margaridas e 27 rosas.

Flores	Quantidades
Cravos	
Margaridas	
Rosas	

- a) *Quantos canteiros o jardineiro poderá fazer usando todas as suas flores?*
- b) *Se o jardineiro usasse somente as rosas, com quantidades iguais em cada canteiro, quantas rosas ele teria em cada canteiro?*




Esse problema sobre quantidade intensiva que envolve a situação de lotação, com a presença de figura, onde são apresentadas as variáveis “número de canteiros”, “número de flores” e “limite de flores em cada canteiro”, sendo a variável “limite de flores em cada canteiro” constante. Com essa questão acreditamos que o aluno pense na relação que existe entre o “número de canteiros” e o “número de flores”.

As respostas que pretendemos chegar junto ao aluno são:

- para a alternativa “a”, esperamos que o aluno perceba que o número de canteiros é o número total de flores dividido pelo limite de flores em cada canteiro. Com isso, esperamos que os alunos respondam que o jardineiro poderá fazer 6 canteiros e,
- para a alternativa “b” esperamos que o aluno pense nas quatro possibilidades, que são, 1 canteiro com 27 rosas, 3 canteiros com 9 rosas, 9 canteiros com 3 rosas e 27 canteiros com 1 rosa.

Problema 7

Minha melhor receita para o suco de limão é mostrado nesta tabela.

Água	Limão	Açúcar
1 copo 	1/2 copo 	2 colheres 

Para que o gosto continue o mesmo:

- a) *quantas colheres de açúcar você tem que usar para um copo de limão?*

- b) quantos colheres de açúcar você tem que usar para 1 copo de limão e meio?*
- c) quantos colheres de açúcar você tem que usar para dois copos de limões?*
- d) qual a quantidade de copos de limão e de água que deverá ser utilizada se você só tiver uma colher de açúcar?*
- e) por favor, você pode terminar a frase: "Cada vez que você adicionar um copo de limão, você deve adicionar _____ colheres de açúcar".*

Esse problema também envolve a quantidade intensiva na situação de solução, com a presença de figura, onde são apresentadas 3 variáveis distintas (copo de água, colher de açúcar e copo de limão). Com essa questão acreditamos que o aluno perceba a relação de proporção que existe entre os ingredientes do suco.

As respostas que pretendemos chegar junto ao aluno são:




- para a alternativa “a”, esperamos que o aluno perceba que o ingrediente limão foi dobrado e que os outros ingredientes precisam ser dobrados também. Logo, esperamos que os alunos respondam 4 colheres de açúcar;
- para a alternativa “b” esperamos que o aluno perceba que o ingrediente limão foi triplicado e que os outros ingredientes precisam ser triplicados também. Logo, esperamos que os alunos respondam 6 colheres de açúcar;
- para a alternativa “c” esperamos que o aluno perceba que o ingrediente limão foi quadruplicado e que os outros ingredientes







precisam ser quadruplicados também. Logo, esperamos que os alunos respondam 8 colheres de açúcar;

- para a alternativa “d” esperamos que o aluno perceba que o ingrediente colher de açúcar foi reduzido a metade e que os outros ingredientes precisam ser reduzidos a metade também. Logo, esperamos que os alunos respondam $\frac{1}{2}$ copo de água e $\frac{1}{4}$ copo de limão e,
- para a alternativa “e” esperamos que o aluno perceba que o ingrediente limão foi dobrado na frase e que os outros ingredientes precisam ser dobrados também. Logo, esperamos que os alunos respondam 4 colheres de açúcar.

Problema 8

Os parentes de Jonathan foram visitá-lo, só que para isso eles tinham que atravessar um grande rio. Na primeira visita vão 20 parentes. Eles irão usar 5 barcos para atravessar o rio. Na segunda vez, vão 16 parentes e utilizam quatro barcos.

	1° visita	2° visita	3° visita
Quantidade de parentes			

Quantidade de barcos			
			
			

Pergunta-se:

a) *Na segunda visita os barcos vão mais cheios que a primeira visita? Mais vazios? Ou com quantidades iguais de parentes? Assinale a resposta correta.*

Mais cheio	Quantidades iguais	Mais vazio

b) *A terceira vez que os parentes irão visitar Jonathan apenas 10 deles pode ir. Eles usam dois barcos. Os barcos são mais cheios, mais vazios ou com quantidades iguais de parentes, comparado a primeira visita? Assinale a resposta correta.*

Mais cheio	Quantidades iguais	Mais vazio

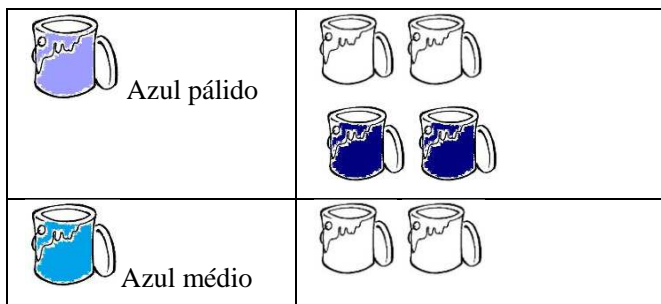
Esse problema sobre quantidade intensiva que envolve a situação de lotação, com a presença de figura, onde são apresentadas as variáveis “número de parentes visitando”, “número de parentes no barco” e “número de barcos”. Com essa questão acreditamos que o aluno pense na relação que existe entre o “número de barcos” e o “número de parentes no barco”.

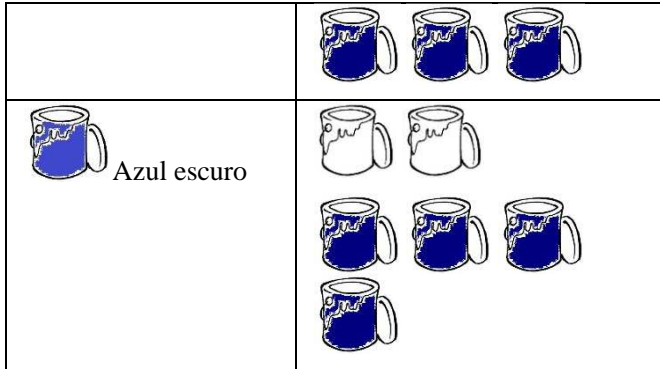
As respostas que pretendemos chegar junto ao aluno são:

- para a alternativa “a”, esperamos que o aluno perceba que o número de parentes em cada barco é o número de parentes visitando dividido pelo número de barcos, resultando em 4 parentes por barco. Com isso, esperamos que os alunos respondam que os barcos possuem quantidades iguais na primeira e na segunda visita e,
- para a alternativa “b” esperamos que o aluno perceba que o número de parentes em cada barco é o número de parentes visitando dividido pelo número de barcos, resultando em 5 parentes por barco na terceira visita. Com isso, esperamos que os alunos respondam que os barcos são mais cheios na terceira visita que na primeira.

Problema 9

Pedro é um pintor que gosta muito de misturar as cores. Suas preferidas são três tons de azul, o azul pálido, o azul médio e o azul escuro. Para fazer o azul pálido ele usa 2 latas de tinta branca e 2 latas de tinta azul marinho. Para fazer o azul médio, ele usa duas latas de tinta branca e três latas de tinta azul marinho. E para fazer o azul escuro, ele usa duas latas de tinta branca e 4 latas de tinta azul marinho.





Pedro precisa pintar uma sala muito grande com todos os três tons de azul. Ele faz muito das três cores.

- a) *Você pode assinalar o tom de azul que ele terá quando misturar 100 latas de tinta branca com 100 latas de tinta azul marinho?*

<i>Pálido</i>	<i>Médio</i>	<i>Escuro</i>
---------------	--------------	---------------

- b) *Você pode assinalar o tom de azul que ele terá quando misturar 10 latas de tinta branca com 20 latas de tinta azul marinho?*

<i>Pálido</i>	<i>Médio</i>	<i>Escuro</i>
---------------	--------------	---------------

- c) *Você pode assinalar o tom de azul que ele terá quando misturar 120 latas de tinta branca com 180 latas de tinta azul marinho?*

<i>Pálido</i>	<i>Médio</i>	<i>Escuro</i>
---------------	--------------	---------------

- d) *Você pode assinalar o tom de azul que ele terá quando misturar 500 latas de tinta branca com 1000 latas de tinta azul marinho?*

<i>Pálido</i>	<i>Médio</i>	<i>Escuro</i>
---------------	--------------	---------------

- e) *Você pode assinalar o tom de azul que ele terá quando ele misturar 40 latas de tinta branca com 60 latas*

<i>Pálido</i>	<i>Médio</i>	<i>Escuro</i>
---------------	--------------	---------------

Esse problema também envolve a quantidade intensiva na situação de solução, com a presença de figura, onde são apresentadas 3 variáveis distintas (número de latas de tinta azul marinho, número de latas de tinta branca e tom da tinta). Com essa questão acreditamos que o aluno perceba a relação que existe entre as latas de tinta e o tom de azul obtido.

As respostas que pretendemos chegar junto ao aluno são:

- para a alternativa “a”, esperamos que o aluno perceba que as latas de tinta misturadas estão em mesma quantidade, assim como na mistura para obter o tom azul pálido. Logo, esperamos que os alunos escolham o tom pálido como resposta;
- para a alternativa “b” esperamos que o aluno perceba que o número de latas de tinta azul é o dobro do de latas de tinta branca, assim como na mistura de tom azul escuro. Logo, esperamos que os alunos escolham o tom escuro como resposta;
- para a alternativa “c” esperamos que o aluno perceba que o número de latas misturadas é igual ao da mistura de tom médio

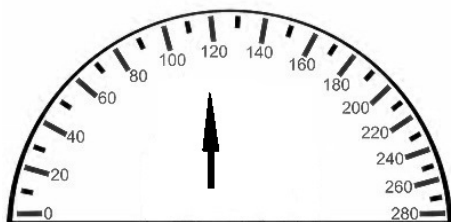
multiplicado por 60. Logo, esperamos que os alunos escolham o tom médio como resposta.;

- para a alternativa “d” esperamos que o aluno perceba que o número de latas misturadas é igual ao da mistura de tom escuro multiplicado por 250. Logo, esperamos que os alunos escolham o tom escuro como resposta e,
- para a alternativa “e” esperamos que o aluno perceba que o número de latas misturadas é igual ao da mistura de tom médio multiplicado por 20. Logo, esperamos que os alunos escolham o tom médio como resposta.

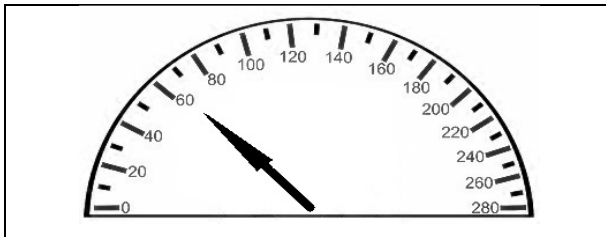
Problema 10 pq tá sublinhado??

Um automóvel percorre 120 km (quilômetros), de uma cidade para outra, de forma que quando ele gasta:

1 hora, o velocímetro do carro marca 120 km/h.

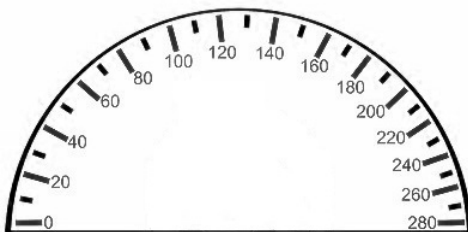


2 horas, o velocímetro do carro marca 60 km/h.

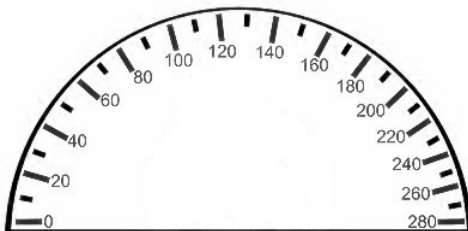


Pergunta-se: pq tá sublinhado??

- a) Em 3 horas, o velocímetro do carro vai marcar quantos km/h? Indique abaixo, onde o velocímetro estará marcando.



- b) Em $\frac{1}{2}$ hora, o velocímetro do carro vai marcar quantos km/h? Indique abaixo, onde o velocímetro estará marcando.



Esse problema envolve a quantidade intensiva na situação de velocidade, com a presença de figura. Tal problema apresenta as variáveis “distância percorrida”, “tempo gasto” e “velocidade do carro”, sendo que a variável “distância percorrida” é constante. Com esse problema acreditamos que o aluno compreenda melhor a relação de proporção que existe entre a distância e o tempo (a velocidade).

As respostas que pretendemos chegar junto ao aluno são:

- para a alternativa “a”, esperamos que o aluno compreenda que a velocidade é uma relação entre a distância percorrida (120km) e o tempo gasto (3 horas), respondendo que o carro tem velocidade de 40 km/h e desenhe uma seta na figura apontando para o número “40” e,
- Para a alternativa “b” esperamos que o aluno compreenda que a velocidade é uma relação entre a distância percorrida (de 120 km) e tempo gasto ($\frac{1}{2}$ hora), respondendo que o carro tem velocidade de 240 km/h e desenhe uma seta na figura apontando para o número “240”.

4.4.3. Apresentação e descrição da etapa c

O pós-teste 1 e o pós-teste 2, são constituídos por 18 questões de mesmo caráter do pré-teste, perguntas focadas nos cinco significados de fração, o qual tem como objetivo a coleta de dados, onde se possa analisar o rendimento das crianças, quanto aos cinco significados de fração, de modo que permitam analisar se houve alguma alteração após a intervenção. Sendo o pós-teste 1 aplicado em um encontro, logo após o término da intervenção e o pós-teste 2 aplicado em duas semanas após a intervenção.

Os quadros a seguir mostram a distribuição das questões segundo o significado e as variáveis investigadas no pós-teste 1.

Quadro 6 – Distribuição das questões segundo o significado parte-todo, quociente, operador multiplicativo e a variável, presença ou não de figura.

Var. Sig.	Quant. Discretas	Quant. Contínuas	Presença de Figura
Parte-todo	8 e 12	1 e 11	1 e 8
Quociente	9 e 10	2 e 13	10 e 13
Operador multiplicativo	4 e 6	7 e 14	6 e 7

Quadro 7 – Distribuição das questões segundo o significado medida e a variável, presença ou não de figura.


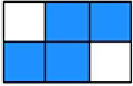


Var. Sig.	Quantidades extensivas	Quantidades intensivas	Presença de figura
Medida	3 e 15	17 e 18	3 e 18



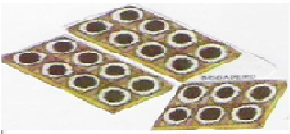

Quadro 8 – Distribuição das questões segundo o significado número e a variável, presença ou não de figura.


Var. Sig.	Reta numérica	Desigualdades	Presença de figura
Número	5	16	5

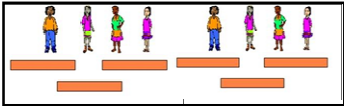
Apresentamos um quadro abaixo com as questões contidas no pós-teste 1, que é constituído de dezoito questões, realizando, em seguida, uma discussão sobre as mesmas.










Quadro 9. Apresentação das questões do pós-teste.

<p>1. Responda qual a fração que representa as partes pintadas de cada da figura.</p> <p>a)  _____</p> <p>b)  _____</p> <p>c)  _____</p>	<p>2. Em uma festa foram distribuídos igualmente 3 bolos, em pedaços iguais para 7 crianças, e em outra festa, foram distribuídos igualmente 9 bolos, em pedaços iguais, para 21 crianças. Considerando que os bolos das duas festas são iguais, todas as crianças receberam a mesma quantidade de bolo?</p> <p><input type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não</p> <p>Descreva como você chegou nessa conclusão.</p>
<p>3. Jogando apenas uma vez um dado de 6 faces, qual a fração que representa a chance de tirar o número 3?</p> 	<p>4. Em uma gincana, os três primeiros alunos que terminassem as tarefas ganhariam um número de bolas, do total de 35, conforme a classificação. Paulo ganhou — das bolas, Daniel — e Thiago —.</p> <p>a) Quem chegou em 1º, 2º e 3º</p>

	<p>lugar respectivamente?</p> <p>b) Qual a quantidade de bolas que Paulo, Daniel e Thiago ganharam?</p>
<p>5. Identifique as frações $\frac{1}{2}$. — e — na reta numérica abaixo:</p> 	<p>6. Rodrigo gostaria de abrir uma mecânica. Para isso ele precisa de — das ferramentas a baixo. Quantas ferramentas ele precisa?</p> 
<p>7. Em uma festa, Marina, que adorava doces, comeu — dos brigadeiros apresentados abaixo. Quantos brigadeiros, ao todo, Marina comeu?</p> 	<p>8. Para enfeitar uma pequena árvore de Natal, Patrícia usou 10 bolinhas. Como mostra a figura abaixo. Que fração representa a quantidade de bolinhas amarelas em relação ao total de bolinhas?</p> 

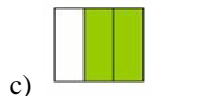
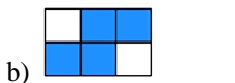
<p>9. Fernanda tem 27 vasos de violeta para distribuir igualmente entre 9 salas. Ana também irá decorar outras 6 salas e possui 24 vasos de violeta para serem distribuídos igualmente entre elas.</p> <p>a) As salas de Fernanda e de Ana terão a mesma quantidade de vasos? Descreva como você chegou nessa conclusão.</p> <p>b) Que fração representa a quantidade de vasos distribuídos em cada sala de Fernanda?</p> <p>c) Que fração representa a quantidade de vasos distribuídos em cada sala de Ana?</p>	<p>10. Tenho 10 coelhos para serem distribuídos igualmente em 2 viveiros.</p>  <p>a) Quantos coelhos terão cada viveiro?</p> <p>b) Que fração representa essa divisão?</p>
---	---

<p>11. Uma pizza foi dividida em 10 partes iguais. Joana comeu 6 dessas partes. Que fração representa o que Joana comeu?</p>	<p>12. Na bolsa de Paulo há 12 pirulitos, 4 de sabor morango e 8 de sabor cereja. Que fração representa a quantidade de pirulitos sabor cereja em relação ao total de pirulitos?</p>
<p>13. Foram divididas igualmente para 8 crianças, 6 barras de chocolate. Que fração de chocolate cada criança receberá?</p> 	<p>14. Paulo partiu o chocolate e comeu – dele. Desenhe o chocolate e mostre o quanto Paulo comeu.</p>
<p>15. Dentro de um saco tem 12 bolas coloridas, sendo que 4 são roxas, 3 azuis e 5 amarelas. Qual a chance de se tirar de primeira uma bola azul? Explique.</p>	<p>16. Compare as frações e complete as sentenças com os sinais de maior (>) menor (<) ou igual (=).</p> <p>a) – __ –</p> <p>b) – __ –</p> <p>c) – __ –</p> <p>d) – __ –</p>

<p>17. Fernanda e Marcela estão fazendo suas bebidas. Fernanda utiliza 4 xícaras de concentrado de abacaxi e 12 xícaras de água. Marcela utiliza 8 xícaras de concentrado de abacaxi e 16 copos de água. Será que as duas bebidas terão o mesmo gosto? Se não tiverem o mesmo gosto, qual será a diferença entre elas?</p>	<p>18. Pedro faz uma mistura utilizando suco de laranja e água, do jeito que ele gosta. Sua receita secreta é feita com três copos de suco de laranja para seis copos de água. Quando Pedro foi fazer sua mistura, olhou na geladeira e só havia um copo de suco de laranja. Quantos copos de água que ele deve usar para que a sua mistura fique do jeito que ele gosta?</p> <table border="1" data-bbox="576 813 927 938"> <thead> <tr> <th colspan="2">Receita de Pedro</th> </tr> <tr> <th>Quantidade de suco de laranja</th> <th>Quantidade de água</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>?</td> </tr> </tbody> </table>	Receita de Pedro		Quantidade de suco de laranja	Quantidade de água				?
Receita de Pedro									
Quantidade de suco de laranja	Quantidade de água								
									
	?								

Questão 1

Responda qual a fração que representa as partes pintadas de cada da figura.



Esta questão aborda o significado Parte-todo com quantidade discreta e apresenta 3 figuras que retratam tal situação. O significado??. Trata-se de uma situação que pode empregar um tipo de contagem dupla

- a quantidade total de partes em que a figura é dividida, sendo o denominador e a quantidade total de partes pintadas, sendo o numerador.

Esperamos, entre outras, as seguintes respostas:

- $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{6}$ e $\frac{2}{3}$ respectivamente, demonstrando assim, que o aluno pode ter se utilizado da dupla contagem, o que caracteriza o significado Parte-todo;
- $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{3}$ respectivamente, esta poderia ser uma possível resposta. A letra b tem a possibilidade de o aluno ter atribuído o significado Parte-todo e ter simplificado a fração $\frac{4}{6}$ chegando a $\frac{2}{3}$;
- $\frac{3}{1}$, $\frac{6}{4}$ e $\frac{3}{2}$ o aluno poderia ainda ter pensado de maneira correta, mas inverter o numerador com o denominador, e teremos então respostas desse tipo e,
- $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{2}$ e $\frac{2}{1}$ ou $\frac{4}{2}$ o aluno poderá responder de maneira equivocada pensando na relação parte-parte, isto é, o denominador sendo representado pelo número de partes não pintadas e o numerador representado pelo número de partes pintadas.

Questão 2

Em uma festa foram distribuídos igualmente 3 bolos, em pedaços iguais para 7 crianças, e em outra festa, foram distribuídos igualmente 9 bolos, em pedaços iguais, para 21 crianças. Considerando

que os bolos das duas festas são iguais, todas as crianças receberam a mesma quantidade de bolo?

Sim

Não

Descreva como você chegou nessa conclusão.

O significado envolvido nesta questão é o quociente, visto que é preciso fazer a relação de equivalência entre as frações que representam a divisão do bolo em cada festa.

Esperamos, entre outras, as seguintes respostas:

- sim. O aluno poderá responder pensando na relação de equivalência entre as frações que representam o total de bolos em relação ao total de pessoas. Na primeira festa temos a fração $\frac{1}{2}$ e na segunda festa a fração $\frac{1}{3}$,
- não. O aluno pode não ter pensado na relação de equivalência entre as situações apresentadas no problema.

Questão 3

Jogando apenas uma vez um dado de 6 faces, qual a fração que representa a chance de tirar o número 3?



A questão envolve o significado medida e apresenta figura para retratar a situação. O significado medida nesta questão refere-se a quantidades extensivas, nas quais a quantidade é medida pela relação de duas variáveis. A probabilidade de um evento é medida pelo quociente

número de casos favoráveis, 6 faces do dado, dividido pelo número de casos possíveis, total de 1 face. Portanto, a probabilidade de um evento varia de 0 a 1 e a maioria dos valores, com os quais trabalhamos, é fracionária. O objetivo da questão é que o aluno utilize a figura para conseguir chegar à solução do problema.

Nesta questão, é possível encontrar as seguintes respostas:

- $\frac{1}{6}$ para esta resposta, podemos inferir que o aluno possa ter pensado na relação da quantidade de faces do dado e a quantidade de faces que satisfazem a questão;
- $\frac{6}{1}$ o aluno poderá responder invertendo o numerador com o denominador;
- $\frac{3}{6}$ nesta resposta, podemos concluir que o aluno se utilizou dos números que aparecem no problema e,
- $\frac{6}{3}$ ou 2 o aluno poderá ter o pensamento citado acima, porém invertendo o numerador com o denominador, obtendo assim um número inteiro, 2.

Questão 4

Em uma gincana, os três primeiros alunos que terminassem as tarefas ganhavam um número de bolas, do total de 35, conforme a classificação. Paulo ganhou $\frac{4}{14}$ das bolas, Daniel $\frac{1}{7}$ e Thiago $\frac{4}{7}$.

a) *Quem chegou em 1º, 2º e 3º lugar respectivamente?*

b) Qual a quantidade de bolas que Paulo, Daniel e Thiago ganharam?

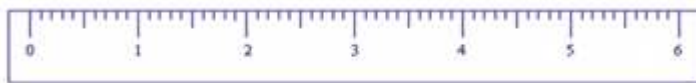
Esta questão aborda o significado operador multiplicativo (contínuo).

Esperamos, entre outras, as seguintes respostas:

- Thiago em primeiro lugar com 20 bolas, Paulo em segundo lugar com 10 bolas e Daniel em terceiro lugar com 5 bolas. O aluno operou os dados contidos no problema fazendo o cálculo de $\frac{4}{14}$ de 35, $\frac{1}{7}$ de 35 e $\frac{4}{7}$ de 35, interpretado de forma correta os resultados e,
- o aluno ter feito as operações necessária e não ter interpretado de forma correta os resultados obtidos fazendo outra sequência de colocação.

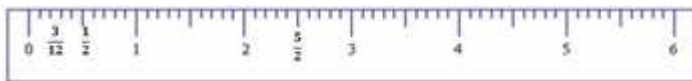
Questão 5

Identifique as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{12}$ e $\frac{5}{2}$ na reta numérica abaixo:

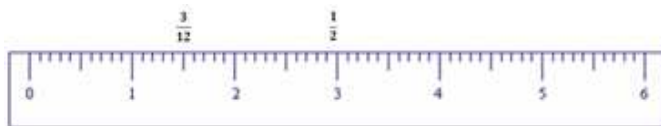


Esta questão aborda o significado Número com quantidade contínua com a presença de figura. Decorre dessa interpretação, perceber que a notação $\frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$) representa em alguns casos, um número na reta numérica. Consideramos quantidade contínua por ser um número que pode ser representado na reta numérica.

Esperamos encontrar muitas respostas diferentes. Entre elas devem aparecer:



- Esta resposta expressa de maneira correta a localização dos pontos $\frac{3}{12}$ e $\frac{1}{2}$ na reta numérica, dessa forma entende-se que o aluno reconheça a fração, como um número e não uma superposição de dois números naturais. Deve saber também que $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.



- Com essa resposta poderemos inferir que o aluno considerou a reta numérica como um todo, um inteiro, e a metade desse segmento estará localizado no ponto 3, $\frac{1}{2}$ desse seguimento localizado no ponto 1,5 considerando 12 pedaços de 0,5;

- Existe também a possibilidade de $\frac{3}{12}$ e $\frac{1}{2}$ não estarem nessa sequência na reta numérica, o que nos sugere que o aluno não conhecia o valor de cada ponto, ou seja, que $\frac{3}{12} > \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$.

Questão 6

Rodrigo gostaria de abrir uma mecânica. Para isso ele precisa de - das ferramentas a baixo. Quantas ferramentas ele precisa?



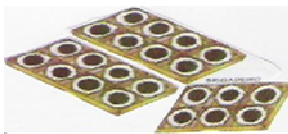
Esta questão aborda o significado Operador multiplicativo em quantidade discreta com a presença do ícone.

Algumas respostas que esperamos encontrar são:

- 4, o aluno irá multiplicar a fração que se refere à quantidade de ferramentas que Rodrigo precisa pelo número total de ferramentas representadas, obtendo como resultado 4 ferramentas;
- –, outra maneira seria o aluno perceber que a fração – pode ser simplificada e não entender o que ela representa (metade do total de ferramentas).

Questão 7

Em uma festa, Marina, que adorava doces, comeu — dos brigadeiros apresentados abaixo. Quantos brigadeiros, ao todo, Marina comeu?



Essa questão enfoca o significado Operador multiplicativo com quantidade contínua e apresenta figura. Queremos destacar a quantidade de brigadeiros que Marina comeu, ou seja, por meio de uma ação transformar a quantidade de doces.

Esperamos, entre outras, as seguintes respostas:

- 18, para essa resposta o aluno demonstra ter usado o significado Operador multiplicativo, ou seja, — do total de 22 brigadeiros. Pode também ter dividido os brigadeiros em 2 conjuntos de 11 e ter tirado 9 brigadeiros de cada conjunto, assim pensando no significado Parte-todo;
- 9, para essa resposta o aluno não associou a quantidade total de brigadeiros à fração dada no enunciado e acaba respondendo que a quantidade de brigadeiros que Marina comeu foram 9.

Questão 8

Para enfeitar uma pequena árvore de Natal, Patrícia usou 10 bolinhas. Como mostra a figura abaixo. Que fração representa a quantidades de bolinhas amarelas em relação ao total de bolinhas?



Está presente nesta questão o significado Parte-todo de quantidades discretas e com a presença de ícone.

Algumas respostas, dentre outras, que podem aparecer são:

- — 3, bolinhas amarelas para o total de 10 bolinhas, demonstrando assim que o aluno pode ter se utilizado da dupla contagem, o que caracteriza o significado Parte-todo;
- —, pode ter pensado da maneira correta, mas acaba trocando o numerador pelo denominador;

- $\frac{3}{7}$ ou $\frac{7}{10}$, para essa resposta o aluno está pensando na relação parte-parte, ou seja, total de bolinhas amarelas para o total de bolinhas vermelhas, ou vice-versa.

Questão 9

Fernanda tem 27 vasos de violeta para distribuir igualmente entre 9 salas. Ana também irá decorar outras 6 salas e possui 24 vasos de violeta para serem distribuídos igualmente entre elas.

a) As salas de Fernanda e de Ana terão a mesma quantidade de vasos? Descreva como você chegou nessa conclusão.

b) Que fração representa a quantidade de vasos distribuídos em cada sala de Fernanda?

c) Que fração representa a quantidade de vasos distribuídos em cada sala de Ana?

Esta questão focaliza o significado Quociente com quantidade discreta não icônica. As respostas do item “a”, onde é feita a pergunta se as salas de Fernanda e Ana terão a mesma quantidade de vasos.

Esperamos, entre outras, as seguintes respostas para os itens sucessivamente:

- $\frac{27}{9}$ e $\frac{24}{6}$, para essa resposta pode-se concluir que o aluno pensou na fração com o significado Quociente. Ele associou a divisão feita no item “a” com a fração solicitada nos itens “b” e “c”;
- $\frac{9}{27}$ e $\frac{6}{24}$, neste caso o aluno pensou de maneira correta, mas trocou o denominador pelo numerador.

Questão 10

Tenho 10 coelhos para serem distribuídos igualmente em 2 viveiros.

a) Quantos coelhos terão cada viveiro?

b) Que fração representa essa divisão?



Esta questão tem como intuito focar o significado Quociente de quantidade discreta com a presença de figura. O item “a”, quando se pergunta quantos coelhos terão em cada viveiro, é para se certificar que o aluno entendeu o problema como uma situação de divisão, sendo este desconsiderado na quantificação dos dados.

Algumas respostas esperadas para esse item “b” são:

- — 10 coelhos distribuídos igualmente entre dois viveiros. Essa resposta caracteriza o significado Quociente;
- — ,para essa resposta pode-se pensar que o aluno utilizou a resposta do item “a”. Neste caso a resposta nos remete ao significado Parte-todo, ou seja, cada viveiro terá 5 coelhos do total de 10;

- $\frac{1}{2}$, nesse caso pode-se inferir que o aluno poderia estar pensando no significado Operador multiplicativo, ou seja, não importa a quantidade de coelhos a serem distribuídos, pois cada viveiro irá receber $\frac{1}{2}$ do total de coelhos;
- 10, para essa resposta o aluno pensou de maneira correta, mas inverte o denominador pelo numerador, acreditando que o denominador tem que ser sempre maior que o numerador.

Questão 11

Uma pizza foi dividida em 10 partes iguais. Joana comeu 6 dessas partes. Que fração representa o que Joana comeu?

Esta questão tem como enfoque o significado Parte-todo de quantidade contínua sem a presença de figura.

Algumas respostas esperadas são:

- $\frac{6}{10}$ de pizza. Essa resposta caracteriza o significado Parte-todo;
- $\frac{3}{5}$ de pizza, esta poderia ser uma possível resposta. A questão tem a possibilidade de o aluno ter atribuído o significado Parte-todo e ter simplificado a fração $\frac{6}{10}$ chegando a $\frac{3}{5}$;
- $\frac{10}{6}$, o aluno poderia ainda ter pensado de maneira correta, mas inverteu o numerador com o denominador, e teremos então respostas desse tipo;

- $\frac{6}{4}$; o aluno poderá responder de maneira equivocada pensando na relação parte-parte, isto é, o denominador sendo representado pelo número de partes comidas e o numerador representado pelo número de partes não comidas.

Questão 12

Na bolsa de Paulo há 12 pirulitos, 4 de sabor morango e 8 de sabor cereja. Que fração representa a quantidade de pirulitos sabor cereja em relação ao total de pirulitos?

Esta questão tem enfoque no significado Parte-todo de quantidade discreta sem a presença de figura.

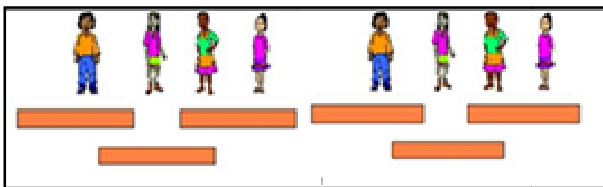
Algumas respostas esperadas são:

- $\frac{8}{12}$ de pirulitos. Essa resposta caracteriza o significado Parte-todo;
- $\frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$ de pirulitos, esta poderia ser uma possível resposta. A questão tem a possibilidade de o aluno ter atribuído o significado Parte-todo e ter simplificado a fração $\frac{8}{12}$ chegando a $\frac{4}{6}$ ou a $\frac{2}{3}$;
- $\frac{4}{12}$, o aluno poderia ainda ter pensado de maneira correta, mas confundido o sabor cereja com o sabor morango, e teremos então respostas desse tipo;

- — , o aluno poderia ainda ter pensado de maneira correta, mas inverteu o numerador com o denominador, e teremos então respostas desse tipo;
- – , o aluno poderá responder de maneira equivocada pensando na relação parte-parte, isto é, o denominador sendo representado pelo número de pirulitos sabor morango e o numerador representado pelo número de pirulitos sabor cereja.

Questão 13

Foram divididas igualmente para 8 crianças, 6 barras de chocolate. Que fração de chocolate cada criança receberá?



A questão enfoca o significado Quociente com quantidade contínua e utiliza a figura para representar a situação. Conhecido o número do grupo a ser formado - 8 crianças - o quociente representa o tamanho de cada grupo -.

Algumas possibilidades de respostas poderiam ser:

- – , para esta resposta, podemos inferir que o aluno pensou na fração com significado de Quociente, ou seja, 6 chocolates para 8 crianças, o que retrata claramente duas grandezas distintas (chocolates e crianças) caracterizando, assim, o significado Quociente;

- $\frac{8}{6}$, nesta resposta, podemos inferir que o aluno pensou de maneira correta, mas inverteu o numerador com o denominador;
- $\frac{3}{4}$, nesta resposta, o aluno poderia ter pensado em Operador multiplicativo, ou seja, não importa a quantidade de chocolate a ser dividido, cada criança receberá a quarta parte dessa quantidade.

Questão 14

Paulo partiu o chocolate e comeu $\frac{6}{8}$ dele. Desenhe o chocolate e mostre o quanto Paulo comeu.

Esta questão envolve o significado operador multiplicativo para números racionais representados na forma fracionária, ou seja, nestas questões, a fração exerce um papel de transformação, isto é, trata-se da representação de uma ação que se deve imprimir sobre certa quantidade, transformando seu valor.

O significado Operador multiplicativo nessa questão propõe-se a delimitar a quantidade de chocolate que Paulo comeu, ou seja, reduz o inteiro partido em 8 partes iguais, e 6 partes já consumidas.

Uma das possibilidades de resposta do aluno é a que ele desenhe uma figura retangular e pinte, ou delimite de alguma forma, o que possa corresponder a 6 das 8 partes do chocolate inteiro.

Questão 15

Dentro de um saco tem 12 bolas coloridas, sendo que 4 são roxas, 3 azuis e 5 amarelas. Qual a chance de se tirar de primeira uma bola azul? Explique.

Esta questão refere-se ao significado medida, com quantidade discreta e não utiliza figura para apresentar a situação. O significado medida desta questão envolve fração e refere-se a quantidades extensivas, nas quais a quantidade é medida pela relação de duas variáveis. A probabilidade de um evento é medida pelo quociente número de casos favoráveis, dividido pelo número de casos possíveis. Portanto, a probabilidade de um evento varia de 0 a 1 e a maioria dos valores com os quais trabalhamos, é fracionária. O objetivo da questão é que o aluno com base na descrição do problema consiga chegar à solução.

Nesta questão, é possível encontrar, entre outras, as seguintes respostas:

- $\frac{3}{12}$, para obter esta resposta, acreditamos que o aluno utilizou-se da fração com o significado de medida, ou seja, a chance de tirar 3 bolas azuis do saquinho;
- $\frac{12}{3}$, acreditamos que ao aluno pensou certo, mas fez a inversão do numerador com o denominador;
- $\frac{1}{4}$, este tipo de resposta acreditamos que o aluno pode ter simplificado a fração e,

- $\frac{4}{1}$, acreditamos que para este tipo de resposta, o aluno tenha usado a ideia anterior, porém invertido o numerador com o denominador.

Questão 16

Compare as frações e complete as sentenças com os sinais de maior (>) menor (<) ou igual (=).

a) $\frac{3}{5} \text{ — } \frac{4}{5}$

c) $\frac{7}{20} \text{ — } \frac{7}{10}$

b) $\frac{2}{3} \text{ — } \frac{4}{6}$

d) $\frac{10}{20} \text{ — } \frac{5}{10}$

Nessa questão é enfocado o significado Número, onde é visto a relação entre as quantidades, em maior, igual ou menor (< , = ou >).

Esperamos, entre outras, as seguintes respostas:

item a):

- $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$;

item b):

- $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$;

item c):

- $\frac{7}{20} < \frac{7}{10}$;

item d):

- $\frac{10}{20} = \frac{5}{10}$.

Para essas respostas podemos concluir que o aluno saiba a quantidade que esses números representam, ou até mesmo que fazem relação com sua localização na reta numérica. Qualquer outra resposta

dada representaria a incompreensão do aluno com o significado de número da fração.

Questão 17

Fernanda e Marcela estão fazendo suas bebidas. Fernanda utiliza 4 xícaras de concentrado de abacaxi e 12 xícaras de água. Marcela utiliza 8 xícaras de concentrado de abacaxi e 16 copos de água. Será que as duas bebidas terão o mesmo gosto? Se não tiverem o mesmo gosto, qual será a diferença entre elas?




A questão envolve o significado medida com quantidade contínua e não apresenta figura para retratar a situação. O significado medida desta questão envolve fração por se referir a quantidades intensivas - concentrado de abacaxi e água, isto é, para obter o suco, Fernanda mistura 4 xícaras de concentrado de suco para 12 xícaras de água e Marcela mistura 8 xícaras de concentrado de suco para 16 xícaras de água. Além disso, essa quantidade nos remete à ideia de fração, considerando que o todo (o suco) é constituído de 16 partes para Fernanda e de 24 partes para Marcela, sendo a fração que corresponde à medida de concentrado de abacaxi no suco igual a $\frac{4}{16}$ para Fernanda e igual a $\frac{8}{24}$ para Marcela. A fração que corresponde à medida de água no suco é $\frac{12}{16}$ para Fernanda e a $\frac{16}{24}$ para Marcela. Se compararmos as frações, verificamos que a fração de concentrado de abacaxi é maior para Marcela e que a fração de água é maior para Fernanda. Dessa forma obtém-se que o suco de Marcela é mais forte.

Nesta questão esperamos, entre outras, as seguintes respostas:

- “não, o suco de Marcela será mais forte” ou “não, o suco de Fernanda será mais fraco”. Acreditamos que se o aluno der esta resposta, ele terá entendido o significado medida contido na questão;
- “não, o suco de Fernanda será mais aguado”. Acreditamos que se o aluno der esta resposta, ele terá entendido o significado medida contido na questão, tendo o aluno possivelmente feito a comparação apenas com as frações de água;
- “sim”, tal resposta remeterá que o aluno não compreendeu o significado medida contido nesta questão e
- outras respostas, associadas à resposta “Sim”, podem vir a aparecer, porém remeterá que o aluno não compreendeu completamente o significado medida contido nesta questão.

Questão 18

Pedro faz uma mistura utilizando suco de laranja e água, do jeito que ele gosta. Sua receita secreta é feita com três copos de suco de laranja para seis copos de água. Quando Pedro foi fazer sua mistura, olhou na geladeira e só havia um copo de suco de laranja. Quantos copos de água que ele deve usar para que a sua mistura fique do jeito que ele gosta?

Receita de Pedro	
Quantidade de suco de laranja	Quantidade de água
	
	?

A questão envolve o significado medida com quantidade contínua e apresenta a figura para retratar a situação. O significado medida desta questão envolve fração por se referir a quantidades intensivas - concentrado de laranja e água, isto é, para obter o suco, Pedro teve que misturar três copos de concentrado de suco para seis copos de água. Além disso, essa quantidade nos remete à ideia de fração, considerando que o todo (o suco) é constituído de 9 partes, sendo $\frac{3}{9}$ a fração que corresponde à medida de concentrado de laranja no suco e $\frac{6}{9}$, a fração que corresponde à medida de água no suco. Já no segundo suco, o todo é constituído de $1\frac{1}{2}$, sendo $\frac{1}{2}$ copo de concentrado de suco de laranja e 1 copo de água, pois a quantidade de água é o dobro da quantidade de concentrado.

Nesta questão esperamos, entre outras, as possíveis respostas:

- 1 copo de água para $\frac{1}{2}$ copo de concentrado de suco.

Acreditamos que se o aluno der esta resposta, ele terá entendido o significado medida contida na questão;

- $\frac{1}{2}$ copo de concentrado de suco para 1 copo de água. Acreditamos que o aluno possa ter confundido a quantidade de solvente e soluto e,
- outras respostas podem vir a aparecer, porém remeterá que o aluno não compreendeu o significado medida contido nesta questão.

Os quadros a seguir, mostram a distribuição das questões segundo o significado e as variáveis investigadas no pós-teste 2.

Quadro 10 – Distribuição das questões segundo o significado parte-todo, quociente, operador multiplicativo e a variável, presença ou não de figura.

Var. Sig.	Quant. Discretas	Quant. Contínuas	Presença de Figura
Parte-todo	9 e 12	3 e 7	3 e 12
Quociente	4 e 14	1 e 16	14 e 16
Operador multiplicativo	5 e 8	10 e 11	8 e 10

Quadro 11 – Distribuição das questões segundo o significado medida e a variável, presença ou não de figura.

Var. Sig.	Quantidades extensivas	Quantidades intensivas	Presença de figura
Medida	2 e 13	15 e 18	2 e 18

Quadro 12 – Distribuição das questões segundo o significado número e a variável, presença ou não de figura.

Sig. \ Var.	Reta numérica	Desigualdades	Presença de figura
Número	6	17	6

As questões do pós-teste 2 não serão discutidas, pois são constituídas das mesmas questões apresentadas e discutidas no pós-teste 1, mudando apenas seus valores e ordem. O quadro a seguir mostra essa equivalência das questões.

Quadro 13 – Equivalência das questões (de 1 a 10) do pós-teste 1 com o pós-teste 2.

Questões correspondentes										
Pós-teste 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pós-teste 2	3	1	2	5	6	8	10	12	4	14

Quadro 14 – Equivalência das questões (de 11 a 18) do pós-teste 1 com o pós-teste 2.

Questões correspondentes								
Pós-teste 1	11	12	13	14	15	16	17	18
Pós-teste 2	7	9	16	11	13	17	15	18

CAPÍTULO V

ANÁLISE DOS DADOS

5.1. INTRODUÇÃO

No presente capítulo, apresentamos a análise dos dois momentos da pesquisa: o primeiro trata dos instrumentos-diagnósticos e o segundo analisa a intervenção de ensino.

No que diz respeito aos instrumentos-diagnósticos (pré-teste, pós-teste 1 e pós-teste 2) analisamos sob dois aspectos: quantitativo e qualitativo. O primeiro, quantitativo, inicia pela análise do desempenho dos alunos, segundo os diferentes significados da fração - Parte-todo (PT), Quociente (QU), Operador Multiplicativo (OM), Medida (ME) e Número (NU). O segundo analisamos o desempenho dos sujeitos segundo o significado medida.

No que tange ao aspecto qualitativo, este se refere à observação das estratégias e dos esquemas de ação utilizados pelos alunos no momento da resolução dos problemas e às variáveis empregadas como procedimento de resolução, tanto no que diz respeito aos testes-diagnóstico quanto à intervenção de ensino. A análise dessas estratégias nos permitirá categorizar os procedimentos de resolução, segundo a classificação teórica dos campos conceituais de Vergnaud, utilizados pelos alunos frente às situações apresentadas.

A pretensão da pesquisa, ao apresentar seus resultados, não é qualificar qual é o “melhor” ou “pior” significado para ensinar o conceito de fração. Também não temos a pretensão de generalizar nossos resultados para além do universo pesquisado, pois temos consciência de que se trata de um estudo com um pequeno número de sujeitos.

Acreditamos, no entanto, que nossos resultados poderão trazer contribuições significativas para a discussão acadêmica sobre a participação que o significado medido tem no que diz respeito à construção do conceito de fração em crianças do 5º ano do Ensino Fundamental.

5.2. ANÁLISE QUANTITATIVA

Antes de iniciarmos esta primeira parte da análise, cabe lembrar que nossos testes foram aplicados em uma turma de 5ª ano do Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Santa Catarina.

Nesta turma havia 25 alunos, e como mencionamos anteriormente no capítulo metodológico, nesse único grupo foram aplicados os instrumentos diagnósticos e a intervenção.

5.2.1. Desempenho dos alunos nos instrumentos diagnósticos

Ressaltamos que, para a análise quantitativa, não destacaremos as questões que foram deixadas em branco pelos alunos, visto que esse percentual foi pequeno, o que mostra que, de fato, houve empenho por parte dos alunos em responder às questões propostas.

Os dados da Tabela 1, a seguir, apresentam os resultados obtidos dos alunos no pré-teste com o percentual de acerto segundo a classificação dos cinco significados. Porém, antes de analisar os dados nela contidos, faz-se necessário esclarecer os cálculos que fizemos para chegar aos valores nela expressos. As dezoito questões do pré-teste foram subdivididas totalizando 26 itens. Consideramos como item as

alternativas a, b e, c, sucessivamente. Assim, o número 624 significa que multiplicamos o número de itens (26) pelo número de alunos considerados (24). Portanto, 624 significam a possibilidade total de acertos ou 100%. Os valores percentuais tiveram suas casas decimais arredondadas de acordo com os critérios estatísticos.

O pré-teste teve duas questões de significado número, como apresentado no capítulo anterior, porém, as questões foram divididas em itens, totalizando 7 itens. Assim, para o significado número a possibilidade de acertos foi de 168 (24 vezes 7).

Quanto às questões de significado quociente, uma das quatro questões foi dividida em três itens e outra foi dividida em dois itens, totalizando 7 possibilidades de acertos por aluno. Dessa forma, o máximo de acertos das questões de significado quociente também foi de 168.

Com relação aos outros significados, não houve divisão das questões em itens, possibilitando 96 acertos em cada significado.

Tabela 1 – Descrição dos acertos das questões referentes aos 5 significados de fração no pré-teste.

Alunos do 5º ano “C” (24 ¹⁷)	Parte- Todo	Quociente	Op. Mult.	Medida	Número	Total de acertos
Acertos	85 de 96	99 de 168	67 de 96	57 de 96	81 de 168	389 de 624
%	88,54	58,92	69,79	59,38	48,21	64,97

¹⁷ O número total de alunos matriculados na turma do 5º ano “C” são 25, mas uma aluna por motivos de saúde ficou o período da pesquisa afastada da sala de aula, sendo assim, considerados nesta pesquisa apenas 24 alunos.

Os dados da Tabela 1, portanto, exibem um índice geral de acerto no pré-teste de 389 respostas corretas das 624 respostas possíveis. Ou seja, houve 64,97% de acertos.

Este percentual quando olhado isoladamente parece não representar uma grande problemática, haja vista que o mesmo indica que os alunos acertaram mais da metade das questões do pré-teste. Entretanto, quando olhado em conjunto com a complexa classificação de cinco significados de fração, percebe-se um desequilíbrio no entendimento e performance dos alunos. Isto é, os alunos tiveram um maior índice de acertos durante o pré-teste no significado Parte-Todo no qual eles acertaram 88,54% das questões. O resultado pode estar atrelado ao fato de que, geralmente por esse significado, o conceito de fração é inserido no contexto escolar.

Este resultado está de acordo com as pesquisas anteriores que evidenciaram dificuldades na aprendizagem de frações, exceto na aprendizagem do significado parte-todo (Bezerra, 2001; Merlini, 2005; Moutinho, 2005; Rodrigues, 2005; Santos, 2005; entre outros). Isto pode estar relacionado ao privilégio que se tem dado ao significado de parte-todo no ensino de frações como já relatados em algumas pesquisas (Merlini, 2005; Moutinho, 2005; Rodrigues, 2005) que apontaram um índice maior de acertos no significado parte-todo e uma percentagem menor de acerto no significado número.

Na presente pesquisa, os sujeitos também apresentaram dificuldades com o significado número como pode ser visto nos resultados do pré-teste da Tabela 1. No significado número, os alunos obtiveram 81 respostas certas entre as 168 respostas possíveis, o que perfaz um percentual de acerto de 48,21%.

No significado medida, que é o foco desta investigação, os alunos demonstraram um desempenho mediano no pré-teste acertando 59,38% das questões, mas significativamente inferior ao desempenho apresentado no significado parte-todo.

Ainda no pré-teste, os alunos demonstraram ter um entendimento melhor da operação multiplicativa envolvida em fração do que da operação de divisão, como pode ser visto nos resultados de 71,67% de acertos no significado operador multiplicativo em contraste com 60,11% no significado quociente.

Após o pré-teste, os alunos participaram da intervenção que teve como foco o significado medida no contexto das quantidades intensivas. Desenvolvemos a intervenção considerando que nem o significado medida e nem as quantidades intensivas são usualmente presentes no ensino de fração que acontece nas salas de aula do ensino básico. E ainda, que o entendimento deste significado neste contexto quantitativo pode trazer benefícios para um profundo entendimento de fração.

Posterior à intervenção, os alunos participaram de um primeiro pós-teste. Os dados da Tabela 2, a seguir, apresentam os resultados obtidos dos alunos no pós-teste 1, com o percentual de acerto segundo a classificação dos cinco significados. As questões de significado quociente, medida e número tiveram a mesma divisão de itens que o pré-teste, resultando nas possibilidades de acertos de 168, 96 e 168, respectivamente.

Com relação ao significado parte-todo teve uma das quatro questões divididas em três itens, resultando em 144 possibilidades de acertos (6 vezes 24). Houve também a divisão, em dois itens, de uma

das questões de significado operador multiplicativo possibilitando 120 acertos (5 vezes 24).

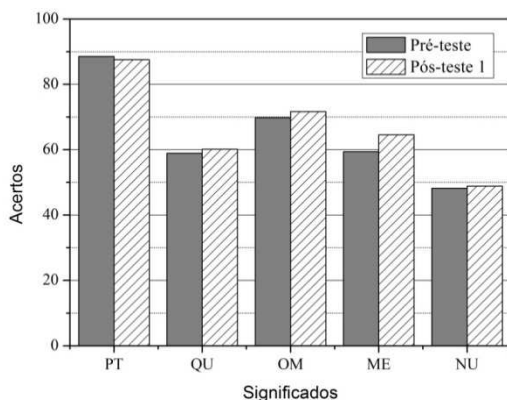
Tabela 2 – Descrição dos acertos das questões referentes aos 5 significados de fração no pós-teste 1.

Alunos do 5º ano “C” (24)	Parte- Todo	Quociente	Op. Mult.	Medida	Número	Total de acertos
Acertos	126 de	101 de	86 de	62 de	82 de	457 de
	144	168	120	96	168	696
%	87,50	60,11	71,67	64,58	48,81	65,66

Os dados da Tabela 2 exibem um índice geral de acertos de 457 respostas corretas das 696 respostas possíveis. Ou seja, houve um percentual de 65,66% de acertos. Novamente, os alunos tiveram um maior índice de acertos no significado parte-todo (87,50%), assim como mostrou a análise do pré-teste.

Para uma melhor visualização dos dados comparativos entre pré-teste e pós-teste, aplicado logo depois da realização da intervenção, ver Gráfico 1 abaixo.

Gráfico 1 – Percentagem de acertos referentes aos cinco significados de fração no pré-teste e no pós-teste 1.



Como pode ser observado, houve um crescimento no desempenho dos alunos em todos os significados logo após a intervenção. Este crescimento é tímido nos significados quociente, operador multiplicativo e número, não chegando a atingir valores estatisticamente significantes. Mas, mostra-se mais expressivo no significado medida, o qual foi o foco da intervenção. No significado medida o crescimento foi de aproximadamente 5%.

As implicações deste resultado serão discutidas posteriormente, mas o mesmo indica uma direção positiva de melhora no desempenho dos alunos após participarem de atividades que focam no significado medida em contexto de quantidades intensivas.

Com um intervalo de tempo de quase duas semanas, depois de realizado o primeiro pós-teste, os alunos participaram do segundo pós-teste com o objetivo de verificar a durabilidade dos benefícios alcançados. Os dados da Tabela 3, a seguir, apresentam os resultados obtidos dos alunos no pós-teste 2, com o percentual de acerto segundo a

classificação dos cinco significados. A divisão de itens foi a mesma que no primeiro pós-teste.

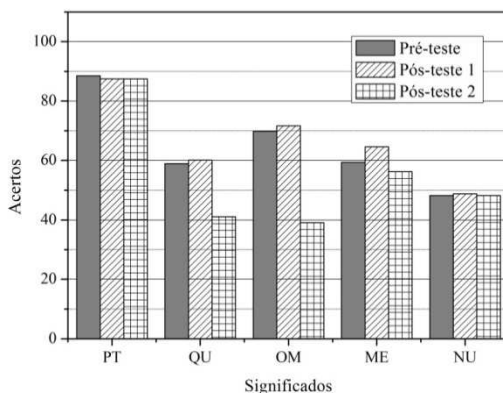
É importante ressaltar que o segundo pós-teste foi realizado na última semana de aula dos alunos antes do final de ano e das férias escolares. Neste momento os alunos estavam pouco interessados em fazer o teste. Mas este foi o único momento possível considerando a agenda da escola e da pesquisadora.

Tabela 3 – Descrição dos acertos das questões referentes aos 5 significados de fração no pós-teste 2.

Alunos do 5º ano “C” (24)	Parte- Todo	Quociente	Op. Mult.	Medida	Número	Total de acertos
Acertos	126 de 144	69 de 168	47 de 120	54 de 96	81 de 168	377 de 696
%	87,50	41,07	39,10	56,25	48,21	54,17

Como pode ser visto nos dados da Tabela 3, houve um declínio no desempenho dos alunos. O índice geral de acerto foi de 377 respostas corretas das 696 respostas possíveis, ou seja, somente 54,17% de acertos. Os índices do significado parte-todo, assim como o pré-teste e o pós-teste 1, se mostraram maior que os demais perfazendo um total de 87,50%.

Gráfico 2 – Percentagem de acertos referentes aos cinco significados de fração no pré-teste, no pós-teste 1 e no pós-teste 2.

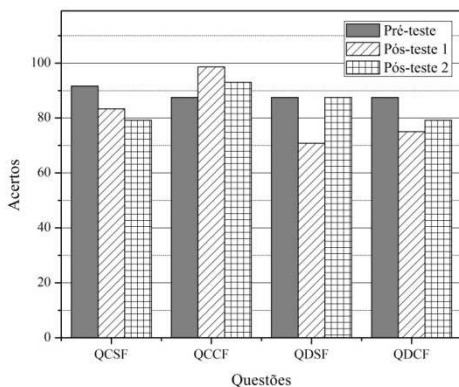


Em seguida mostraremos o desempenho dos alunos participantes deste estudo em cada significado de fração analisado considerando os resultados do pré-teste, pós-teste 1 e pós-teste 2. Também evidenciaremos o papel do uso de ilustrações icônicas para auxiliar na resolução dos problemas apresentados contendo diferentes tipos de quantidades, tais como quantidades contínuas, quantidades discretas, quantidades intensivas e quantidades extensivas.

Dessa forma,, nas seções que se seguem utilizaremos as seguintes siglas: quantidade contínua sem figura (QCSF); quantidade contínua com figura (QCCF); quantidade discreta sem figura (QDSF) e quantidade discreta com figura (QDCF).

1) Significado Parte-Todo:

Gráfico 3 – Percentagem de acertos referentes às questões do significado parte-todo com quantidade contínua sem figura (QCSF) e com figura (QCCF) e com quantidade discreta sem figura (QDSF) e com figura (QDCF).



A observação do Gráfico 3 mostra que há pequena variação das percentagens de acertos das questões referentes ao significado parte-todo entre as diferentes questões do pré-teste. Tal resultado indica um entendimento mais homogêneo do significado parte-todo, tanto referente às quantidades contínuas quanto às quantidades discretas.

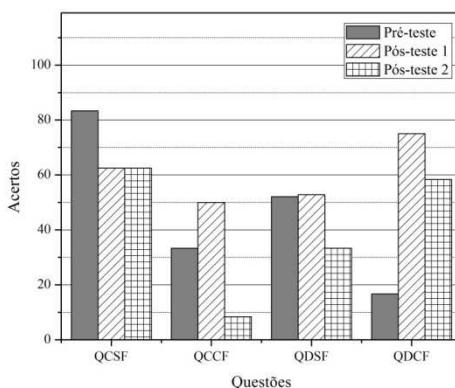
Já no primeiro pós-teste, as questões de quantidades contínuas tiveram um percentual médio 24,76% maior que as questões de quantidades discretas. O resultado do pós-teste 1, diferentemente do pré-teste, indica que a presença de figura ilustrativa foi um agente facilitador, sendo que para as questões de quantidade contínua tiveram um aumento de 18,33% da questão sem figura para a questão com figura e as questões de quantidade discreta tiveram um aumento de 5,88%.

Com relação ao segundo pós-teste, houve uma diferença de apenas 3,33% entre a média de acertos das questões de quantidades contínuas e as questões de quantidades discretas. Com relação à presença de figura, em quantidades contínuas, houve um aumento de

17,54% da questão sem figura para a questão com figura, semelhante ao primeiro pós-teste. Porém, as questões de quantidade discreta tiveram uma queda de 10,53% da questão sem figura para a questão com figura. Dessa forma, nas questões quantidades contínuas a figura foi um agente facilitador e em quantidades discretas os alunos apresentaram dificuldade com a presença de figura.

2) Significado Quociente:

Gráfico 4 – Percentagem de acertos referentes às questões do significado quociente com quantidade contínua sem figura (QCSF) e com figura (QCCF) e com quantidade discreta sem figura (QDSF) e com figura (QDCF).



No significado quociente o Gráfico 4 mostra uma diferença 69,70% entre as questões referentes às quantidades contínuas e as referentes às quantidades discretas do pré-teste. Já no pós-teste 1, essa diferença foi de 13,58% e no pós-teste 2 foi de 29,41%.

Com relação à presença de figura, apenas as questões de quantidades discretas do pós-teste 1 e do pós-teste 2 indicaram a figura

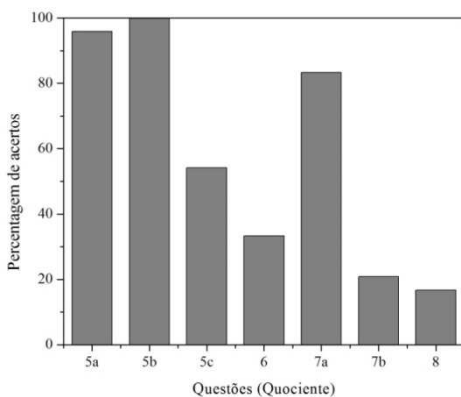
como agente facilitador, apresentando um aumento de 42,11% e de 75,00%, respectivamente.

Apesar do aumento do percentual médio de acertos, a questão de quantidade contínua sem figura apresentou uma queda de 25% tanto do pré-teste para o pós-teste 1 quanto do pré-teste para o pós-teste 2.

Outra questão que teve uma variação relevante foi a de quantidade discreta com figura, que obteve um aumento de 350% do pré-teste para o pós-teste 1 e de 250% do pré-teste e pós-teste 2.

Em se tratando das questões de quociente é relevante apresentar os acertos referentes a cada item das questões em que houve divisão. Tais resultados são apresentados no Gráfico 5, conforme a seguir.

Gráfico 5 – Percentagem de acertos do pré-teste referentes às questões do significado Quociente.

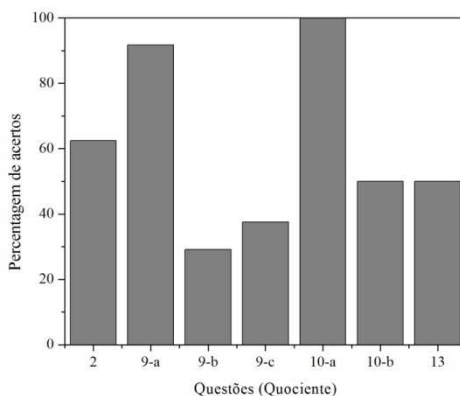


Os resultados do Gráfico 5 indicam que em se tratando do significado de quociente, grande parte dos alunos consegue realizar a operação de divisão a qual a questão se refere, como indicam os

números de acertos dos itens 5a, 5b 7a, nos quais é necessário saber o resultado da operação de divisão para responder corretamente a questão. Porém, as questões que pedem para representar a divisão na forma de fração (item 5c e 7b e questões 6 e 8) tiveram um baixo percentual de acerto, todas abaixo de 60% de acertos. Tais resultados indicam que os alunos compreendem os problemas de significado quociente, mas apresentam dificuldade em expressar a fração que representa o problema.

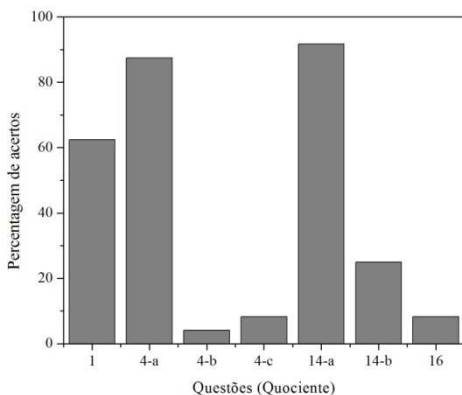
No pós-teste 1 essa dificuldade dos alunos em expressar uma divisão na forma de fração também é evidenciada nas questões 9 e 10, como mostra o Gráfico 6. Porém, não houve nenhuma questão com menos de 25% de acertos.

Gráfico 6 – Percentagem de acertos do pós-teste 1 referentes às questões do significado Quociente.



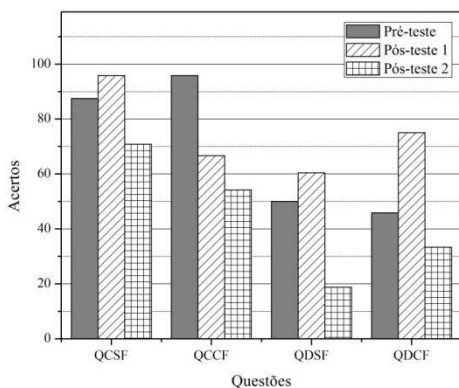
Já no pós-teste 2 (Gráfico 7), a dificuldade dos alunos em expressar uma divisão na forma de fração é ainda mais evidente, obtendo em alguns itens menos de 10% de acerto.

Gráfico 7 – Percentagem de acertos do pós-teste 2 referentes às questões do significado Quociente.



3) Significado Operador Multiplicativo

Gráfico 8 – Percentagem de acertos referentes às questões do significado operador multiplicativo com quantidade contínua sem figura (QCSF) e com figura (QCCF) e com quantidade discreta sem figura (QDSF) e com figura (QDCF).



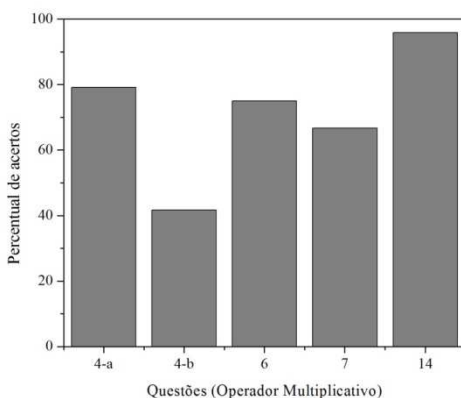
Com relação às questões de significado operador multiplicativo (Gráfico 8), houve um melhor desempenho nas questões de quantidade contínua, tanto no pré-teste (91,30% mais acertos) quanto nos pós-teste

1 (20% mais acertos) e pós-teste 2 (140% mais acertos). Mas, após a intervenção, os alunos obtiveram um melhor desempenho com as quantidades discretas.

Quanto à presença de figura, o papel de agente facilitador é evidenciado nas questões de quantidade contínua do pré-teste e nas questões de quantidade discreta do pós-teste 1 e do pós-teste 2. O aumento foi de 9,52% no pré-teste, de 24,14% no pós-teste 1 e de 77,78% no pós-teste 2.

O Gráfico 9 apresenta os resultados do pós-teste 1, apontando o percentual de acertos dos itens a e b da questão 4. O desempenho dos alunos em tal questão pode ser um indício de que uma parte considerável dos alunos consegue comparar os valores de fração, mas tem dificuldade em realizar a operação de multiplicação entre uma fração e um número inteiro.

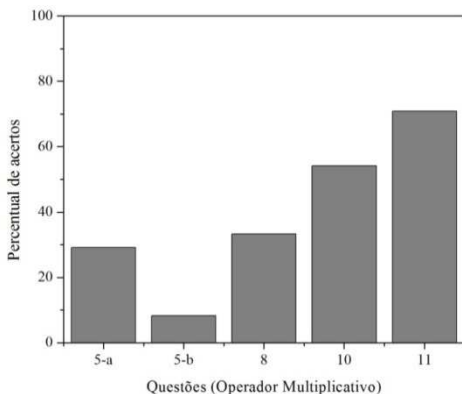
Gráfico 9 – Percentagem de acertos do pós-teste 1 referentes às questões do significado Operador Multiplicativo.



O Gráfico 10 apresenta os resultados do pós-teste 2. O desempenho dos alunos na questão 5 também pode ser um indício de

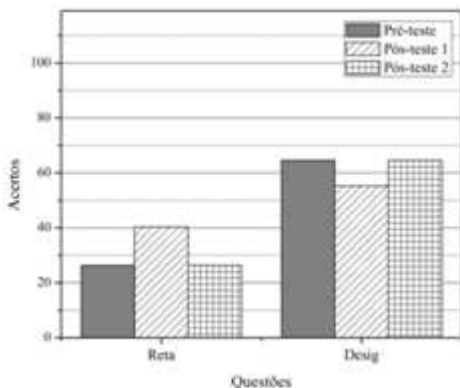
que uma parte dos alunos consegue comparar os valores de fração, mas tem dificuldade em realizar a operação de multiplicação entre uma fração e um número inteiro. Porém, o item a da questão 5 também indica que uma parte dos alunos também tem dificuldade em comparar valores de fração.

Gráfico 10 – Percentagem de acertos do pós-teste 2 referentes às questões do significado Operador Multiplicativo.



4) Significado Número:

Gráfico 11 – Percentagem de acertos referentes às questões do significado número de reta numérica (Reta) e de desigualdades (Desig).

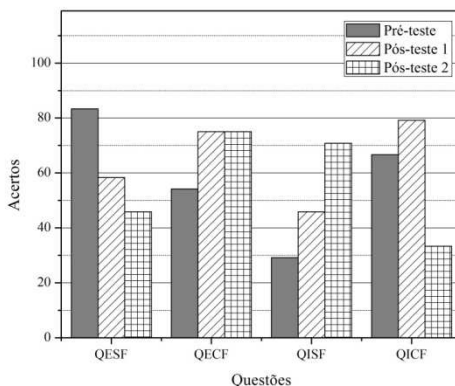


Em relação às questões de significado número (Gráfico 11), o percentual de acertos médio do primeiro pós-teste teve um aumento de 4,99%, com relação ao desempenho dos alunos no pré-teste, porém o desempenho dos alunos no pós-teste 2 foi igual ao do pré-teste. O percentual de acertos médio nos itens de reta numérica apresentou um aumento de 52,63%, indicando uma possível melhoria causada pela intervenção (etapa B). Porém, houve uma queda de 14,51% do percentual de acertos médio nas questões de desigualdades.

Este significado foi o que os alunos demonstraram ter mais dificuldades. Este resultado está em consonância com outros estudos que também evidenciaram baixo desempenho dos alunos neste significado especificamente (BEZERRA, 2001; CANOVA, 2006; MALASPINA, 2007; entre outros).

5) Significado Medida:

Gráfico 12 – Percentagem de acertos referentes às questões do significado medida com quantidade extensiva sem figura (QESF) e com figura (QECF) e com quantidade intensiva sem figura (QISF) e com figura (QICF).



Em se tratando do significado medida (Gráfico 12), a média de acertos das questões de quantidades intensivas do pré-teste foi 30,30% menor que a média de acertos das questões de quantidades extensivas. Já no primeiro pós-teste, o percentual de acertos de quantidades intensivas foi 6,25% menor que o percentual de acerto de quantidade extensiva e, 30,43% maior que o percentual de acertos obtido nas questões de quantidades intensivas do pré-teste. Tal resultado indica que os alunos assimilaram o conhecimento construído durante o período de intervenção.

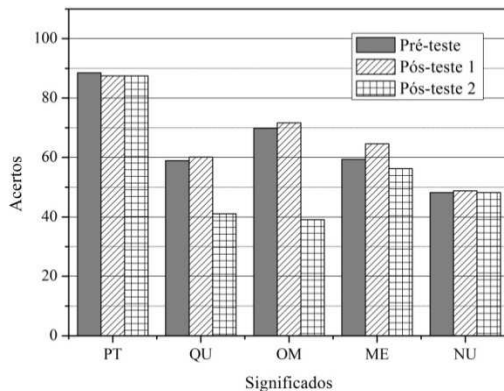
No segundo pós-teste houve uma queda de 16,67% do percentual de acertos de quantidade intensiva do pós-teste 1 para o pós-teste 2. Porém, em se tratando de quantidade intensiva, o resultado foi 8,70% superior ao do pré-teste. Dessa forma, há um indício de que parte dos alunos manteve o conhecimento construído durante o período de intervenção.

Com relação à presença de figura, tal recurso, teve um papel facilitador nas questões de quantidades extensivas do primeiro e do segundo pós-teste e nas questões de quantidades intensivas do pré-teste e do pós-teste 1. A presença de figura representou um aumento de respectivamente 28,57%, 63,63%, 128,57% e 72,73%.

Sumarizando esta análise quantitativa podemos fazer as seguintes inferências. Com relação ao desempenho geral dos alunos, houve uma melhora pouco significativa do pré-teste para o pós-teste 1, como pode-se observar no Gráfico 13 e na seção 5.2.1. Houve uma melhora um pouco mais expressiva no percentual de acertos das questões de significado medida. Com relação aos outros significados,

apenas o significado parte-todo apresentou uma queda no desempenho. Apesar disso, o significado parte-todo apresentou um desempenho consideravelmente superior aos outros quatro significados de fração, evidenciando o privilégio que se tem dado ao significado de parte-todo no ensino de frações.

Gráfico 13 – Percentagem média de acertos referentes às questões do pré-teste e pós-teste 1, segundo os cinco significados de fração (PT – parte-todo, QU – quociente, OM – operador multiplicativo, ME – medida e NU - número).



O significado número, apesar de apresentar alguma melhora (1,24%), obteve o pior desempenho dentre os cinco significados podendo ser um indicativo de que seja necessário destacar um pouco mais o significado número no ensino de fração. Além disso, o resultado do pós-teste 2 foi igual ao do pré-teste sendo um indício de que, em se tratando do significado número, a intervenção não teve efeito longitudinal.

Quanto aos significados Quociente e Operador Multiplicativo, houve um aumento de desempenho do pré-teste para o pós-teste 1 de apenas 0,32% e 2,69% respectivamente. Tal resultado indica que a intervenção não teve efeito no aprendizado dos significados de frações quociente e operador multiplicativo.

O desempenho dos alunos do primeiro para o segundo pós-teste teve uma queda de 31,68% para o significado quociente e de 45,44%

para o significado operador multiplicativo. Tal resultado indica que a aprendizagem dos alunos não teve um efeito longitudinal.

Com relação ao significado medida, o desempenho dos alunos teve um aumento de 8,76%. Esse resultado pode representar uma melhoria causada pelo período de intervenção. Apesar disso, o desempenho no segundo pós-teste teve uma queda de 12,90%, podendo indicar que a intervenção não teve um efeito longitudinal.

Com relação ao desempenho dos alunos no pós-teste 2, acreditamos que parte da queda de desempenho tenha sido causada pelo fato de que tal teste foi realizado na última semana de aula, semana esta em que os alunos costumam estar ansiosos pelo início do período de férias. No pós-teste 2, muitos alunos deixaram de realizar os cálculos necessários para responder as questões, resultando uma maior incidência de erros.

Apesar do ocorrido no pós-teste 2, o significado parte-todo manteve o percentual de acertos do pós-teste 1, o que pode indicar uma facilidade dos alunos em resolver questões de significado parte-todo e uma consolidação do conhecimento dos alunos com relação a esse significado.

5.3. ANÁLISE QUALITATIVA

Na seção anterior, realizamos a análise quantitativa dos resultados, cujo principal parâmetro foi o número de acertos que os alunos obtiveram quando responderam os instrumentos-diagnósticos.

Na presente seção, realizamos uma análise da qualidade dos tipos de resolução e das estratégias utilizadas pelos sujeitos, baseados na

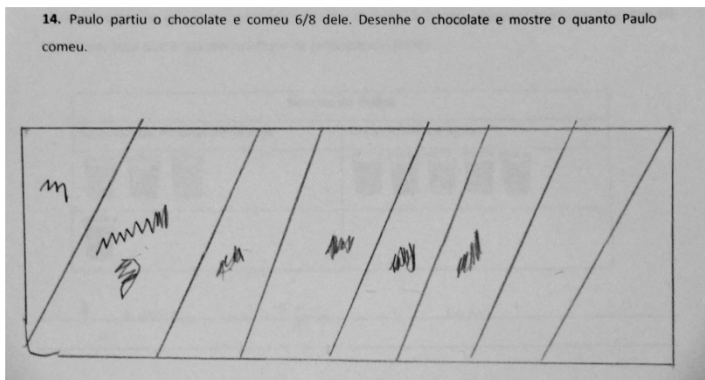
TCC, frente aos testes-diagnóstico (pré-teste, pós-teste 1 e pós-teste 2), que abordam as situações que compreendem os problemas envolvendo os cinco significados de fração e a intervenção de ensino cuja situação abordada foi o significado de medida, abrangendo somente a quantidade intensiva. Desta forma, decidimos agrupar algumas dessas estratégias que os levaram ao insucesso nas questões (onde o sujeito não dispunha de todas as competências necessárias), criando categorias. A seguir abordamos as seis categorias, definindo-as e colocando, para cada uma delas, a possível estratégia utilizada pelos alunos para que possa justificá-las.

5.3.1. Estratégias encontradas nos instrumentos diagnósticos

E1 - Realizar uma divisão de uma quantidade contínua, desprezando a conservação das áreas na figura e repartindo as partes, segundo um critério aleatório.

Essa categoria refere-se à estratégia utilizada pelo aluno em que um requisito fundamental da fração é desprezado, o todo dividido em partes iguais. Tal erro foi encontrado em questões que o aluno precisava representar uma fração em um desenho, como mostra a Figura 7. Nessa situação o aluno divide o todo em formas geométricas e áreas distintas.

Figura 7 – Questão 14 do pós-teste 1 resolvida pelo aluno com a estratégia E1.



Esta estratégia de resolução também foi constatada nos estudos de Campos *et al.*(1995) citada por Nunes; Bryant, (1997).

Em seus estudos, Campos *et al.* (1995) mostrou que a introdução da fração pelo modelo Parte-todo simplesmente induz os alunos aplicar um procedimento de dupla contagem sem necessariamente entender o significado da fração. Os resultados dos estudos de Campos confirmam a suspeita de que os alunos podem usar a linguagem das frações sem compreender completamente sua natureza.

Os alunos que utilizaram a estratégia E1 não evocaram o invariante operatório (I) proporção (necessário para a resolução do problema), gerando uma representação simbólica (R) errada (figura dividida em partes com áreas distintas).

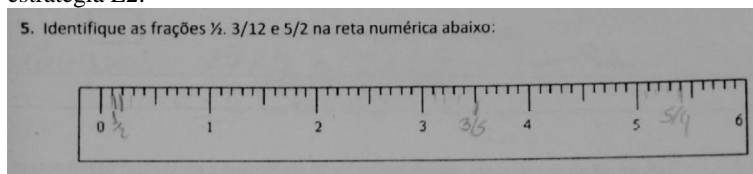
E2- Relacionar um número fracionário na forma $\frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$) como sendo um número decimal na forma a,b .

Nesse caso o aluno demonstra não conhecer o número racional na forma de fração, não reconhecendo a fração como sendo uma forma de representar uma divisão.

A estratégia E2 ocorre quando o aluno não conhece a representação simbólica $\frac{a}{b}$ (R), levando-o a identificar a situação (S) de maneira equivocada e consequentemente se utilizando dos invariantes operatórios (I) inadequados (equivalência entre a forma fracionária $\frac{a}{b}$ com a forma decimal).

A Figura 8 apresenta um caso em que o aluno utilizou as frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{5}{4}$ como sendo os números 3,5 e 5,4. Nessa ocasião, o aluno cometeu erro ao utilizar a estratégia E2 e utilizou frações diferentes das fornecidas pelo enunciado.

Figura 8 – Questão 5 do pós-teste 1 resolvida pelo aluno com a estratégia E2.



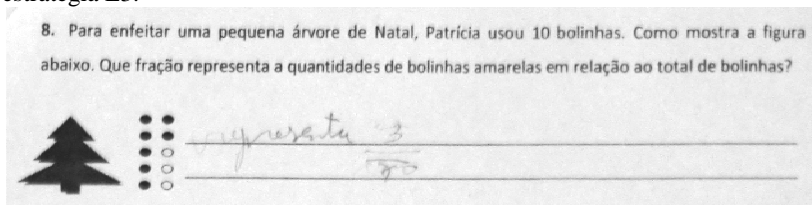
A estratégia E2 foi principalmente identificada em questões de significado número de reta numérica. Ao trabalharem com uma régua, os alunos apresentaram dificuldade de associar a fração a um número racional decimal, criando suas próprias regras para associar a fração com um ponto da reta.

E3- É aquela estratégia na qual o aluno despreza o todo envolvido, fazendo contagem das partes, sem relacioná-las com o todo.

Um exemplo que justifica essa estratégia é o da situação-problema descrita na Figura 9. Nesse caso, o aluno utilizou as partes do problema (3 bolinhas e 7 bolinhas) e ignorou o todo (10 bolinhas). Tal

erro pode estar associado a uma dificuldade de trabalhar com elementos de natureza distinta (bolinhas de cores diferentes), tendo o aluno problemas para identificar o todo.

Figura 9 – Questão 8 do pós-teste 1 resolvida pelo aluno com a estratégia E3.



Esse tipo de estratégia também foi observado por Merlini (2005), em quantidades contínuas e em quantidades discretas. Merlini aponta que o aluno realizou a contagem da parte em destaque e, em seguida, fez a contagem das demais partes, ignorando o todo.

Na estratégia E3, o aluno apresenta dificuldade de identificar o problema (S), desprezando o todo e se utilizando de uma forma equivocada da relação entre objetos (I), gerando o símbolo (R) inadequado.

E4- Compreende a estratégia em que o aluno inverte o numerador pelo denominador, porque entende que o numerador não pode ser maior que o denominador.

Tal estratégia (E4) refere-se à inversão da posição do numerador pela do denominador em casos em que a fração representa um número maior que um. Esse tipo de erro é muito comum entre as crianças, conforme apresentou os resultados de Bezerra (2001), Merlini (2005) e Moutinho (2005), e pode estar relacionado à ênfase dada ao significado

parte-todo, pois, ao associar a fração como sendo um todo dividido em “N” partes, não pode haver um número maior de partes do que o todo. Com isso, o aluno acaba invertendo a fração para não haver mais partes que o todo.

O aluno que utiliza a estratégia E4 evoca um teorema em ação errado (que o numerador não pode ser maior que o denominador). Tal teorema é provavelmente formado pelas situações (S) vivenciadas pelo aluno, em que a condição errônea é satisfeita.

Ao vivenciar uma situação em que a propriedade é desrespeitada, o aluno adequa a representação simbólica (inverte o numerador com o denominador) para que o teorema em ação seja respeitado.

A Figura 10 apresenta uma situação em que a estratégia E4 foi adotada. Nessa ocasião, o aluno sabe realizar a divisão, mas ao pedir que a divisão seja representada na forma de fração o aluno inverte o numerador com o denominador.

Figura 10 – Questão 7 do pós-teste 1 resolvida pelo aluno com a estratégia E4.

7. Marly tem 12 figurinhas e vai dividir igualmente com 4 colegas.


A) Quantas figurinhas cada colega irá ganhar? 3 figurinhas

B) Que fração representa esta divisão? $\frac{4}{12}$

A situação em que ocorre a inversão também é encontrada na Figura 11. Nesse caso, há uma figura indicando que o todo é composto por 10 coelhos e o aluno escreve a fração com o todo no denominador (como ocorre em questões de parte-todo).

Figura 11 – Questão 10 do pós-teste 1 resolvida pelo aluno com a estratégia E4.

10. Tenho 10 coelhos para serem distribuídos igualmente em 2 viveiros.



a) Quantos coelhos terão cada viveiro? terão 5 coelhos

b) Que fração representa essa divisão? 2/10

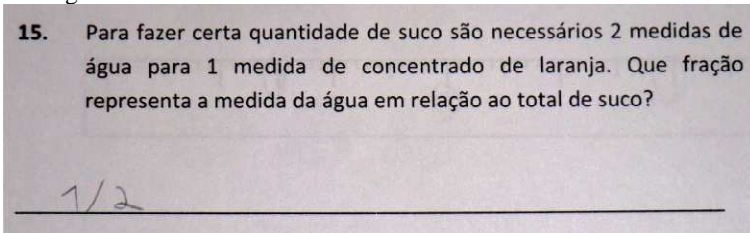
E5- Compreende a estratégia em que o aluno elabora sua resposta com dados contidos no enunciado e/ou parte da resposta da referida questão.

Essa estratégia é muito semelhante à estratégia E3 (relação parte-parte), porém, a estratégia E5 ocorre em situações em que o todo não aparece explícito, nesse caso, o aluno utiliza os dados do problema ou até mesmo parte da resposta da questão.

Na estratégia E5, o aluno apresenta dificuldade de evocar os invariantes operatórios (I) adequados, recorrendo então, a relação entre objetos errada e em seguida gerando o símbolo (R) inapropriado.

A Figura 12 exemplifica o caso em que o aluno utiliza os dados do problema de maneira errada. Nessa ocasião, o aluno não conseguiu identificar que o total de suco é a soma das medidas de água com a medida de concentrado de laranja. Sendo assim, o aluno utilizou os dois dados que conseguiu identificar no problema (medidas de água e medida de laranja), apresentando a resposta -.

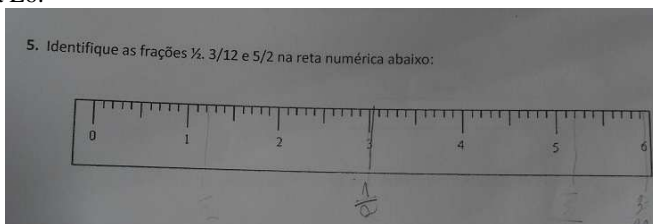
Figura 12 – Questão 15 do pós-teste 1 resolvida pelo aluno com a estratégia E5.



Esse tipo de erro também pode estar associado a uma dificuldade de trabalhar com elementos de natureza distinta, tendo o aluno problemas para identificar o todo. Essa estratégia ocorreu principalmente no pré-teste e no segundo pós-teste, indicando que a intervenção teve um efeito de curto prazo na forma de o aluno identificar frações.

E6- Compreende a estratégia em que o aluno desconsidera a numeração contida na reta numérica e a considera como uma figura. Encontramos essa estratégia em problemas do significado número, onde os alunos ao invés de posicionar o número fracionário solicitado no problema, utilizando a referência numérica contida na régua, dividiam a figura, conforme lhe fosse conveniente, e assim encontravam a posição que consideravam correta, como mostra a figura a seguir.

Figura 13 – Questão 5 do pós-teste 1 resolvida pelo aluno com a estratégia E6.



Esse tipo de erro pode está associado aos alunos estarem acostumados a encontrarem a posição do número fracionário em uma determinada figura, (cujo procedimento de resolução exigia dividir a figura em partes iguais e depois de feito isso, encontrar a posição do número desejado). Com os problemas referentes à reta numérica o procedimento muda (as divisões da figura já são dadas, bastando o aluno posicionar o número fracionário solicitado). Por exemplo, no problema de número 5 do pós-teste 1(Figura 13), era solicitado para encontrar a posição do número $\frac{1}{2}$ na figura dada (a figura representava uma régua). A estratégia realizada pelo aluno foi de repartir a figura ao meio posicionando o número $\frac{1}{2}$ na metade da figura, ou seja, na metade da régua.

Os alunos que utilizaram a estratégia E6 provavelmente não vivenciaram (ou não recordaram ter vivenciado) uma situação (S) em que uma régua é utilizada. Sendo assim, esses alunos evocaram invariantes operatórios (I) de situações, já vivenciadas, semelhantes ao novo problema (dividir a figura em partes iguais e encontrar a posição do número desejado).

5.3.2. Estratégias encontradas na intervenção de ensino

A intervenção de ensino, como mencionado no capítulo IV, contemplou três situações com quantidades intensivas (solução, velocidade e lotação), sendo utilizados como auxílio dois tipos de materiais, os ilustrativos e a os manipulativos, como mostrado na tabela 4. A seguir, apresentamos as principais estratégias utilizadas pelos alunos ao resolverem os problemas em cada uma dessas situações.

S1- Situação solução

As questões que contemplavam essa situação são as de número 1, 2, 7 e 9, sendo as questões 1 e 2 com o auxílio do material manipulativo e as questões 7 e 9 com o material ilustrativo.

A questão 1 envolve a quantidade intensiva, sem a presença de figura, onde são apresentadas 3 variáveis distintas (água, açúcar e concentrado de suco), sendo duas delas constantes (água e o concentrado de suco) variando somente uma (açúcar). Foram disponibilizados copos descartáveis, açúcar, concentrado de suco e água. Com essa questão acreditávamos que o aluno pensasse sobre a relação de proporção que existia entre as receitas.

Para a alternativa “a”, todos os alunos conseguiram sentir a diferença, por meio do paladar, e responderam que os sucos não tinham o mesmo gosto, e que a diferença entre eles é a doçura.

Para a alternativa “b” os alunos compreenderam que quando aumentamos um ingrediente da receita, para que o gosto continuasse o mesmo, todos os outros ingredientes tinham que ser aumentados na mesma proporção, e responderam para a primeira receita: 1 copo de água, 1 copo de concentrado e 2 colheres de açúcar, já na segunda receita, 1 copo de água, 1 copo de concentrado e 4 colheres de açúcar.

Dessa forma não foram encontradas dificuldades, por parte dos alunos, na referida questão. Acreditamos que isso tenha ocorrido por se tratar de uma questão que envolva a fração $\frac{1}{2}$, e a relação proporcional existente tenha sido de uma grandeza inteira.

A questão 2 foi bem parecida com a de número 1, porém envolvendo a fração $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$, onde foram apresentadas 3 variáveis distintas (água, açúcar e concentrado de suco), porém, apenas uma delas é

constante (açúcar) variando então as outras duas (água e o concentrado de suco). Nessa questão foram disponibilizados copos descartáveis, açúcar, concentrado de suco e água. Com essa questão acreditamos que o aluno perceba a relação de proporção que existe entre as receitas.

Para a alternativa “a”, os alunos apresentaram dificuldades quanto a encontrar a localização das frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$, mas conseguiram com a intervenção da pesquisadora preparar a receita. A pesquisadora nessa situação pediu para os alunos que tinham essa dificuldade, para explicar como haviam encontrado a fração $\frac{1}{2}$, na questão anterior, a maioria respondeu que tinha dividido o copo ao meio. Dessa forma, a mesma dividia o copo em três partes iguais e explicava que cada parte dividida representava $\frac{1}{3}$, duas partes $\frac{2}{3}$ e a terceira parte $\frac{3}{3}$. Finalizado a receita, os alunos conseguiram sentir a diferença, por meio do paladar, e responderam que os sucos não tinham o mesmo gosto.

Na alternativa “b” muitos alunos já não apresentaram dificuldades quanto à localização do $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$, porém tiveram dificuldades de resolverem o problema. Nessa situação, a pesquisadora sugeriu para os alunos que repetissem as receitas originais até adicionar um total de dois copos de água ($\frac{6}{3}$) em cada. Foi sugerido aos alunos também que contassem o número de vezes que a receita foi repetida. Com isso, foi explicado aos alunos que as receitas foram multiplicadas pelo número de vezes contadas (6 para a primeira receita e 3 para a segunda receita) e consequentemente todos os ingredientes foram multiplicados por esse número. Assim, os alunos conseguiram responder que a primeira receita precisava de 12 colheres de açúcar (6 vezes 2) e que a segunda receita precisava de 6 colheres de açúcar (3 vezes 2).

A questão 7 envolve a quantidade intensiva, com a presença de figura. Nessa questão os alunos precisam utilizar o conhecimento construído nas questões 1 e 2, mas sem usar o material manipulativo.

Os alunos responderam com facilidade os itens “a” (4 colheres), “b” (6 colheres) e “c” (8 colheres), porém, tiveram dificuldades em responder o item “d”. Nesse caso, a pesquisadora verificou que os alunos haviam entendido que a receita foi reduzida a metade e que os alunos estavam com problema em obter a metade de $\frac{1}{2}$. Assim, a pesquisadora recorreu a um exemplo dado em sala de aula em que foram produzidas fichas de frações com mesmo tamanho. No exemplo, foi atribuída uma fração a cada ficha, sendo a ficha dividida de acordo com a fração atribuída. Com isso, a pesquisadora utilizou a ficha de fração $\frac{1}{2}$ (dividida em duas partes) e perguntou com quantas partes a ficha ficaria se cada parte for dividida ao meio. Os alunos responderam então que a ficha ficaria com 4 partes e entenderam que a metade de $\frac{1}{2}$ é $\frac{1}{4}$. Após isso, os alunos conseguiram responder o último item da questão.

A questão 9 envolve a quantidade intensiva, com a presença de figura. Nessa questão os alunos precisam utilizar o conhecimento construído nas questões 1, 2, e 7, mas sem usar o material manipulativo. Tal questão permite que os alunos utilizem os conceitos construídos nas outras questões de solução em situações diferentes da de produção de suco.

Os alunos apresentaram uma dificuldade inicial para compreender o problema. Após alguns minutos lendo a questão eles conseguiram identificar que a cor azul pálido era obtida utilizando a mesma quantidade de tinta branca e tinta azul marinho. Os alunos

também identificaram que na mistura de tinta azul escuro a quantidade de latas de tinta azul marinho era o dobro da de tinta branca.

Os alunos então conseguiram responder corretamente e com facilidade os itens da questão. Os itens em que as latas de tinta azul marinho tinham a mesma quantidade de latas de tinta branca foram respondidos com a cor azul pálido. Nos itens em que a cor azul marinho era o dobro da cor branca foi obtida a cor azul escuro como resposta. Nos outros casos os alunos responderam como sendo médio.

Para complementar a pesquisadora explicou que no tom azul médio há $\frac{3}{2}$ vezes mais tinta azul marinho que tinta branca.

Nas questões 1 e 2 foram utilizados materiais manipulativos, o que propiciou ao aluno, além do invariante de proporção, também o de percepção sensorial (sentir o sabor dos ingredientes), incomum dentro da sala de aula. Já nas questões 7 e 9 o aluno precisou se utilizar de conceitos-em-ação de proporção.

S2- Situação velocidade

As questões que contemplam essa situação são as de número 3, 4 e 10, sendo as 3 e 4 com o auxílio do material manipulativo e a questão 10 com o material ilustrativo.

A questão 3 envolve a quantidade intensiva, sem a presença de figura, onde são apresentadas as variáveis “distância do percurso”, “tempo gasto” e “velocidade do carro”. Nessa questão foram disponibilizados dois carrinhos em miniatura (um laranja e um verde) e duas pistas de tamanhos distintos. Com essa questão acreditávamos que o aluno começasse a pensar sobre a relação de proporção que existe entre a distância e o tempo (sobre a velocidade).

Para a alternativa “a”, todos os alunos apresentaram dificuldade. Os alunos não tinham confiança ao responder. A pesquisadora explicou então o enunciado de toda a questão, utilizando os recursos manipulativos, de forma que os alunos pudessem entender a relação entre tempo, distância e velocidade.

Já na alternativa “b”, como os alunos já haviam compreendido a questão e as relações entre as variáveis do problema, responderam o item com facilidade.

Com relação à questão 4, também é envolvida a quantidade intensiva, sem figura. Tal questão utiliza as mesmas variáveis que a questão 3, porém, a distância é a mesma para o carro laranja e para o carro verde. Na quarta questão da intervenção foram também disponibilizados dois carrinhos em miniatura (um laranja e um verde), mas foi disponibilizada apenas uma pista. Com essa questão, acreditávamos que o aluno começasse a identificar outras formas de trabalhar a relação de proporção existente entre a distância e o tempo (sobre a velocidade).

Para as alternativas da questão, como os alunos já haviam compreendido a questão e as relações entre as variáveis do problema, houve facilidade em responder tanto o item “a” como o item “b”.

Já a questão 10 envolve a quantidade intensiva, com a presença de figura. Nessa questão é apresentada a relação de proporção existente entre a distância e o tempo (sobre a velocidade) de uma maneira diferente das questões 3 e 4.

Nessa última questão, muitos alunos responderam “30km/h” no item “a”, ao invés de “40km/h”. Ao perguntar o motivo dessa resposta, tais alunos responderam que ao aumentar o tempo gasto em uma hora o

enunciado indicava que a velocidade reduzia a metade. Dessa forma, os alunos haviam entendido que, ao aumentar mais uma hora, a velocidade reduzia novamente à metade.

Aos alunos que erraram o item “a” da questão 10, a pesquisadora explicou que a velocidade é a distância percorrida (120 km) dividida pelo tempo gasto. Foi explicado então que ao percorrer 120 km em uma hora a velocidade seria de 120 km/h e ao gastar duas horas a velocidade passaria a ser 60 km/h ($120\text{km}/2\text{h}$).

No item “b” os alunos não tiveram dificuldades, já faziam a conta direto ($120\text{ km}/3\text{h}$) e respondiam 40 km/h. Já no item “c” os alunos não tinham certeza de que operação realizar, tendo novamente a intervenção da pesquisadora. Dessa forma, a mesma explicou que agora se tratava da metade de uma hora. Muitos alunos já falavam que seria metade do que dava quando se tratava de uma hora ($(120\text{ km}/2\text{h})/2 = \frac{60}{2} = 30$). Com isso, os alunos responderam corretamente os itens da última questão da intervenção.

Nas questões 3 e 4 os alunos tiveram o auxílio do material manipulativo, o que propiciou aos mesmos a percepção sensorial da situação (ver os carros em movimento, bem como a extensão das pistas). Já na questão 10, os alunos fizeram uso da ilustração, sendo usado o invariante de proporção e divisão.

S3- Situação lotação

As questões que contemplavam essa situação são as de número 5, 6 e 8, sendo a questão 5 com o auxílio do material manipulativo e as questões 6 e 8 com o material ilustrativo.

A questão de número 5 envolveu a quantidade intensiva sem a presença de figura, apresentando como variáveis o “número de amigos”, “capacidade máxima do elevador” e “número de viagens”, sendo a variável “capacidade máxima do elevador” constante. Foram utilizados como auxílio 20 bonecos, representando os amigos de Paulo, e um recipiente para representar o elevador.

Com essa questão acreditávamos que o aluno começasse a pensar sobre uma relação de proporção existente entre o número de pessoas e o número de viagens.

As respostas que pretendemos chegar junto ao aluno são:

Na alternativa “a” muitos alunos, após a leitura da questão já respondiam 3 viagens, fazendo mentalmente a conta ($\frac{20}{6} = 3$ e sobra 2). A pesquisadora intervia pedindo para que o aluno verificasse o resultado utilizando o material que foi disponibilizado. Com a utilização dos mesmos, os alunos percebiam a existência dessa sobra e que era necessário mais uma viagem de elevador para que todos os amigos de Paulo subissem. Os alunos que logo já se utilizavam dos materiais e respondiam 4 viagens, a pesquisadora intervia perguntando se teria uma outra forma de resolver o problema sem a ajuda do material, as crianças respondiam que sim, era somente fazer a divisão de 20 por 6, que daria 3 só que sobrariam 2, precisando assim o elevador subir mais uma vez, totalizando 4 viagens. Já na alternativa “b” os alunos responderam direto que sobrariam 4 alunos, pois na conta feita anteriormente sobrariam 2 lugares, sendo que tinha 6 lugares, logo de dois para 6, ficam vagos 4 lugares. Na alternativa “c” a maioria dos alunos repetiram o processo do item “a”, porém colocando 5 bonecos em cada viagem de elevador,

ao invés de 6, respondendo que seriam feitas 4 viagens e que dessa vez não sobriam vagas.

A questão número 6 envolveu a quantidade intensiva com a presença de figura, onde são apresentadas as variáveis “número de canteiros”, “número de flores” e “limite de flores em cada canteiro”, sendo a variável “limite de flores em cada canteiro” constante. Com essa questão acreditávamos que o aluno pensasse na situação lotação sem utilizar o material manipulativo.

Na alternativa “a” alguns alunos utilizavam as figuras para contar quantos canteiros poderiam ser feito. Outros alunos apenas dividiam os números dados no enunciado (9 cravos, 18 margaridas e 27 rosas) por nove e depois somavam os resultados das divisões. Para os alunos que apresentaram dificuldade, a pesquisadora perguntou quantas flores o jardineiro possuía e os alunos responderam “54 flores”. Em seguida, foi perguntado a esses alunos quantas flores o jardineiro desejava colocar em cada canteiro e tais alunos responderam “9 flores”. A pesquisadora explicou então que o número de canteiros era o total de flores dividido pelo número de flores em cada canteiro.

Na alternativa “b” os alunos ficaram inicialmente confusos. Ao perceber isso, a pesquisadora pedia para que os alunos lessem o enunciado novamente, mas com mais calma. Após isso, se o aluno ainda apresentasse dificuldade, a pesquisadora realizava uma série de perguntas de forma que o aluno conseguisse resolver a questão por meio da resposta das perguntas que ela fazia.

A questão número 8 envolveu a quantidade intensiva com a presença de figura, onde são apresentadas as variáveis “número de parentes visitando”, “número de parentes no barco” e “número de

barcos”. Com essa questão acreditávamos que o aluno pensasse em outros casos em que o conceito construído nas questões de situação lotação pudesse ser utilizado.

No item “a” alguns alunos respondiam rapidamente de forma errada. Nesse caso, a pesquisadora perguntava como o aluno havia encontrado a resposta. Após isso, os alunos percebiam que haviam respondido errado. Caso o aluno não conseguisse responder a questão, a pesquisadora perguntava quantas pessoas utilizavam cada barco. Os alunos então conseguiram responder corretamente a questão.

Ao se depararem com o item “b”, os alunos conseguiam responder com facilidade a questão.

Nas questões que abordaram essa situação, de modo geral, foi necessário que os alunos se utilizassem dos invariantes de divisão.

Percebeu-se, neste processo de intervenção, que os alunos apresentaram diversas dificuldades em lidar com os problemas envolvendo o significado medida no contexto de quantidade intensiva. Notou-se uma falta de familiaridade dos mesmos com os problemas e com a demanda do pensamento lógico pelo significado medida. Ou seja, neste significado os alunos não tem uma estratégia de resolução com o registro espacial de um todo que foi dividido em partes, como acontece com os outros significados de fração. No significado medida demanda pensar em termos proporcionais, como também, é preciso pensar em termos de três variáveis conjuntamente. Pode-se notar como esta demanda do significado medida enriquece a compreensão dos números racionais e tem a possibilidade de influenciar positivamente outros significados de fração. Talvez com uma intervenção de longa duração ou com um programa de ensino que tenha um foco no significado medida,

no contexto de quantidades intensivas, possa trazer maiores e melhores resultados.

Tanto nas estratégias encontradas nos instrumentos diagnósticos quanto nas estratégias encontradas na intervenção, levamos em consideração Vergnaud, (1996), onde afirma que a construção do conhecimento pelo aprendiz não é um processo linear. Ao contrário, é complexo, tortuoso, demorado com avanços e retrocessos, continuidades e rupturas.

Sendo assim, ao retomar o conceito de medida associado à TCC, temos que os problemas envolvendo o conceito do significado de medida apresentado na linguagem escrita, contemplando as situações com quantidades intensivas (S), evocaram nos alunos percepções sensoriais (principalmente nos problemas que abarcavam a situação solução) bem como a multiplicação e a divisão (nos problemas que abordaram as situações de solução, velocidade e lotação) onde tinham como pano de fundo a relação de proporção (I). Ao final, esses invariantes operatórios, geraram as representações (na forma fracionária $\frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$), na forma decimal e na forma de figuras ilustrativas (pictórica) (R), as quais foram aqui analisadas.

Dessa forma, organizamos esses problemas com a intenção de propiciar a aprendizagem dos alunos, dos cinco significados de fração, proposta por Nunes *et al.* (2003), trabalhando o significado medida, no contexto das quantidades intensivas, porém estamos cientes de que cada aluno tem seu tempo, e a construção e a apropriação de um conceito são processos lentos que exigem fôlego que estendem-se aos longos dos anos.

CAPÍTULO VI

DISCUSSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, procedemos às conclusões obtidas, após a aplicação de uma intervenção de ensino, seguido dos resultados analisados com base na aplicação de dois instrumentos diagnósticos, o pré-teste aplicado, antes da intervenção e o pós-teste aplicado, após o desenvolvimento da mesma. Iniciamos com uma síntese das principais conclusões obtidas, em seguida respondendo à nossa questão de pesquisa e, finalmente, tratamos da apresentação de nossas sugestões às futuras pesquisas dentro do tema.

Nosso trabalho teve como objetivo identificar quais as contribuições da compreensão do significado de medida, para a aprendizagem dos Números Racionais em sua representação fracionária para alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, considerando o contexto de quantidades intensivas. Era nosso objetivo também identificar as dificuldades dos alunos quanto aos cinco significados de fração bem como promover a compreensão do significado medida em contexto de quantidades intensivas.

Tomando-se como base as análises dos dados realizados, podemos afirmar que uma intervenção de ensino que interfere no contexto cultural e social da criança (NUNES, 1998) e privilegia a situação-problema (VERGNAUD 1988; 1990) apresentando atividades significativas e desafiadoras para as crianças, de fato influencia efetivamente na formação do conceito de medida.

As crianças encontram significados para sua aprendizagem e apresentam resultados satisfatórios na conceitualização desse

significado. Nossos resultados indicam que as crianças compreenderam essas novas situações (solução, lotação e velocidade) que lhes foram apresentadas e conseguiram satisfatoriamente representá-las com um menor número de erros. As constatações, observadas no início deste estudo de que havia problemas e dificuldades no processo construção do conceito de fração, embora empíricas, propiciaram a busca de respostas para esse conteúdo, assim, demos início a nosso trabalho investigativo.

Construímos uma intervenção de ensino com vários problemas, considerando os resultados das pesquisas já realizadas, descritas na revisão de literatura, buscando dessa forma a compreensão do significado medida, em contexto das quantidades intensivas.

Durante a aplicação dos instrumentos diagnósticos, tivemos o apoio da professora da classe, que procurou garantir o respeito dos alunos para o bom desempenho deles e da realização dos testes.

No capítulo V, apresentamos os comentários gerais sobre a aplicação da intervenção e a análise dos resultados do pós-teste 1 e 2, sob a ótica quantitativa e qualitativa. Partindo dessas informações, acreditamos que a abordagem de nossa intervenção favoreceu a construção do conceito de medida, no contexto das quantidades intensivas, ainda que de forma introdutória. Isto porque, apesar das dificuldades apresentadas durante a aplicação de nossa intervenção, os alunos obtiveram sucesso em diversos aspectos. Essa afirmação é pertinente tendo em vista o percentual de crescimento observado, tendo um aumento de 8,76%, (em relação ao pré-teste e ao pós-teste 1).

Realizando uma avaliação crítica de nosso estudo, notamos que em certos pontos poderíamos aperfeiçoá-lo. Se ampliássemos as situações abordadas, trabalharíamos melhor certos aspectos que,

provavelmente, levariam a obtenção de melhores resultados em determinadas questões. Acreditamos que seria válido trabalhar com um número maior de problemas, pois garantiriam ao aluno a possibilidade de interagir mais com este tipo de exercício, proporcionando-lhe habilidades e instrumentos de raciocínio matemático. Por fim, se pudéssemos explorar ainda mais os recursos manipulativos e ilustrativos, os erros que os alunos cometeram nas resoluções do pós-teste, poderiam ser minimizados.

No início deste estudo, levantamos certas dificuldades encontradas em relação ao ensino e aprendizagem de fração, no que diz respeito ao professor e aluno. Pautados nestes estudos, sugerimos que essas dificuldades poderiam ser minimizadas por um trabalho que privilegiasse o ensino de fração, a partir de diversos contextos, que entre eles, fossem explorando as quantidades intensivas.

O interesse para tal pesquisa se deu ao nos depararmos com o baixo desempenho dos alunos frente ao entendimento de fração em geral. Os estudos empíricos revisados abordaram dificuldades com alguns significados isoladamente, como o significado número e operador multiplicativo (CAMPOS, 2011; GRILO, ALVES, 2010; SANTOS, 2010). Mas nenhum estudo especificamente voltou-se para o significado medida no contexto das quantidades intensivas. Esta lacuna provocou o surgimento da seguinte questão de pesquisa: Ensinar frações considerando o significado de medidas dentro do contexto de quantidades intensivas pode ter algum efeito para o alargamento do entendimento de outros significados de fração?

Antes de responder à questão, é preciso informar que nosso estudo foi realizado com uma amostra não aleatória, envolvendo uma

quantidade pequena de alunos (24 alunos). Portanto, embora tenhamos tratado os dados estatisticamente e nossa amostra tenha sido retirada de uma população do Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Santa Catarina (escola que faz as matrículas via sorteio, sendo assim, composta por alunos advindos tanto da rede pública quanto da rede privada), sabemos que não possuímos dados suficientes que nos permitam extrapolar, para além de nossa população.

Ainda assim, nos sentimos confortáveis para pensar que nossos resultados, muito provavelmente, contribuam para dar pistas sobre a participação do significado de medida, no contexto das quantidades intensivas no que diz respeito à construção do conceito de fração. Face aos resultados e restringindo-nos sempre aos limites de nossa amostra, defendemos a ideia de que é possível reconhecer que o significado de medida, em contexto das quantidades intensivas, teve um papel importante na aprendizagem da fração pelos alunos. A partir da análise dos resultados, foi possível encontrar efeitos distintos na aprendizagem de fração.

A fração com o significado parte-todo foi o significado que os alunos apresentaram mais facilidade, não tendo muita diferença percentual, quando comparado o pré-teste aos dois pós-testes. Já os significados quociente, operador multiplicativo e número tiveram uma oscilação considerável quando comparados aos testes diagnósticos. Houve um melhor aproveitamento no pós-teste 1 e um declínio no pós-teste 2.

O bom desempenho dos alunos no significado parte-todo já era esperado, considerando o elevado número de estudos que haviam documentado este comportamento. No entanto, é importante ressaltar

que mesmo tendo uma aprendizagem focada no significado parte-todo, em detrimento dos outros significados de fração, os alunos não conseguem transferir ou generalizar a compreensão de “todo” para outras situações significativas não aditivas, como é o caso do contexto medida. No problema de identificar a fração correspondente à porção de água no suco (todo) em duas partes água e uma de concentrado, os alunos expressaram grande dificuldade porque não conseguiam perceber o todo. Isto quer dizer que, mesmo o conceito de “todo”, o qual é grandemente enfatizado no ensino de matemática sobre os números racionais, não é solidamente construído. Isto é um forte indicador de que o ensino de matemática ainda se funda em firmar procedimentos e não a formação de conceitos.

Quanto às dificuldades presentes no significado número, estas carecem de explicação. Talvez uma possibilidade de explicá-las esteja presente nas dificuldades dos alunos em perceber a relação de divisão existente entre o numerador e o denominador, tratando o mesmo como uma superposição de dois números naturais. Canova (2006) em sua pesquisa atribui uma hipótese para tal problema:

... é que questões como essas apresentadas para o significado número são pouco exploradas e quando trabalhadas se apresentam em um quadro restrito de exemplos/atividades. (p.186)

A dificuldade encontrada nesse significado já foi relatada em várias outras pesquisas (BEZERRA, 2001; CANOVA, 2006; MALASPINA, 2007; SANTOS, 2005; entre outros) as quais vem atribuindo essa dificuldade a equivalência de fração. Por exemplo, se o aluno soubesse que $\frac{10}{20}$ equivale a $\frac{5}{10}$ a resposta dada na questão, 16d do

pós-teste 1, seria o sinal de igualdade (=). O mesmo problema se atribui às dificuldades encontradas nas questões referentes aos problemas que abordaram a reta numérica. Por exemplo, se o aluno sabe onde se localiza o número decimal 1,5 e sabe também que esse número é equivalente a $\frac{3}{2}$, então por transitividade ele saberia onde se localiza $\frac{3}{2}$.

Ainda referente a problemas desse tipo, Santos (2005) complementa:

Deverá perceber ainda, que todo número tem um ponto correspondente na reta numérica e que sua localização depende do princípio de ordenação (invariante), isto é, $\frac{2}{3}$ é um número compreendido entre 0 e 1. (p.39)

Outro resultado relevante deste estudo foi o papel facilitador que as figuras ilustrativas tiveram em algumas situações. Podemos explicar este achado considerando os resultados nos três testes diagnósticos apresentados no Gráfico 9, onde é evidenciado nas questões de quantidade contínua do pré-teste e nas questões de quantidade discreta do pós-teste 1 e do pós-teste 2. O fato de o problema ter ou não a ilustração, não favorecia, no início (pré-teste), o acerto dos alunos. Por outro lado, no pós-teste 1 e no pós-teste 2, após a intervenção, essa variável passou a interferir de forma positiva no desempenho dos alunos ao resolverem os problemas. Esse resultado está em alinhamento com o apresentado pela pesquisa de Malaspina (2007), onde diz que:

...os alunos tinham mais sucesso ao resolver problemas nos quais os ícones estavam presentes, do que naquelas situações em que não havia representações icônicas. (p. 162)

Desta forma, observando o crescimento dos alunos após a intervenção recebida e restringindo-se sempre ao limite de nossa amostra, os resultados parecem indicar que apresentar o significado de medida no contexto de quantidades intensivas aos alunos na fase de construção do conceito de fração, amplia o campo conceitual das frações, bem como auxilia a compreensão dos outros significados da fração.

Finalmente, ao refletirmos sobre o fechamento deste estudo e tendo respondido nossa questão de pesquisa, temos a convicção de que se faz necessário um trabalho mais consistente em relação ao significado de medida, em contexto de quantidade intensiva, visto que nossa intervenção trabalhou com poucas situações, devido ao pouco tempo disponível para a realização da mesma.

6.2 SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

Acreditamos que nosso estudo poderá trazer contribuições significativas para a discussão científica sobre a participação que o significado medida, em contexto de quantidade intensiva, exerce no que diz respeito à construção do conceito de fração em crianças de 5º ano do Ensino Fundamental. Assim, a partir de nossa conclusão, podemos fazer algumas sugestões para realização de futuros estudos que objetivem investigar sobre a aprendizagem de fração. Destacamos duas sugestões de pesquisa com intervenção no Ensino Fundamental.

Tendo em vista as observações feitas nas análises dos instrumentos diagnósticos, deste estudo, a primeira sugestão para futuros estudos seria uma análise desta intervenção com o caráter

longitudinal. Uma segunda possibilidade seria realizar uma pesquisa considerando a quantidade intensiva, abordando um número maior de turmas bem como das situações apresentadas.

REFERÊNCIAS

BEHR, M.; LESH, R.; POST, T.; SILVER, E. Rational Numbers Concepts. In: Lesh, R.; Landau, M. **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes**, New York: Academic Press. 1983, p. 91-125.

BEZERRA, F. J. **Introdução do Conceito de Número Fracionário e de suas Representações: Uma abordagem criativa para sala de aula**. 2001. 206 f.. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, DF, 1997.

BROUSSEAU (1983) **Les Obstacles Épistémologiques et les problèmes en mathématiques**. In: KARRER, Monica Logaritmos Proposta de uma sequência de ensino utilizando a calculadora. 1999. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

CAMPOS T. M. M., RODRIGUES W. R. A idéia de unidade na construção do conceito do número racional. **REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática**. v. 2.4, p. 68-93, UFSC, 2007.

CAMPOS, Tânia M. M.. **Sobre o ensino e aprendizagem de frações**. In: XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, 2011, Recife. Anais XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, 2011.

CAMPOS, Tânia M. M. ; MAGINA, Sandra Maria Pinto ; NUNES, T ; HOYLES, C ; NOSS, R ; HEALY, Lulu . **Relatório do projeto de Cooperação Internacional Computadores e Educação Matemática entre a PUC-SP e Universidade de Londres financiado pelo CNPq/Conselho Britânico**. 1995.

CANOVA, R. F. **Crença, Concepção e Competência dos Professores do 1º e 2º Ciclos do Ensino Fundamental com Relação à Fração**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

DAMICO, A. **Uma investigação sobre a formação inicial de Professores de Matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental.** 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: Percursos Teóricos e Metodológicos** – Campinas-SP, 2006.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 3ª. ed. São Paulo: Atlas, 1991.

GRILO, J. S. P.; ALVES, J. S. **Números Racionais e o uso Materiais Manipuláveis: Resultados de uma Experiência.** In: ENCONTRO PARAIBANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. VI, 2010. Monteiro-PB. Anais EPBEM, 2010.

HOWE, C., NUNES, T. BRYANT, P. Intensive quantities: Why they matter to developmental research. **British Journal of Developmental Psychology**, 28, 307–329, 2010.

HOWE, C., NUNES, T., BRYANT, P., BELL, D., DESLI, D. Intensive quantities: Towards their recognition at primary school level. **British Journal of Educational Psychology.** Monograph Series II, Number 7 – Understanding number development and difficulties, 101–118, 2010.

MALASPINA, M. C. O. **O início do ensino de Fração: uma intervenção com alunos de 2ª série do Ensino Fundamental.** 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

MERLINI, V. L. **O Conceito de Fração em seus diferentes significados: Um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental.** 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

MOUTINHO, L. V. **Fração e seus diferentes significados: um estudo com alunos das 4ª e 8ª séries do ensino fundamental.** 2005.

Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

NUNES, T. . **Developing children's minds through literacy and numeracy**. An inaugural lecture. London: Institute of Education, 1998.

NUNES, M. F., SILVA, F. A. F. **Os significados do conceito de fração: um estudo diagnóstico com alunos do 8º ano do ensino fundamental**. 2009. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade Estadual de Alagoas, Arapiraca.

NUNES, T. *et al.* **The effect of situations on children's understanding of fractions**. In: BRITISH SOCIETY FOR RESEARCH ON THE LEARNING OF MATHEMATICS. 2003.

NUNES, T. e BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, T., BRYANT, P., BARROS, R., e SYLVA, K. The relative importance of two different mathematical abilities to mathematical achievement. **British Journal of Educational Psychology**, p. 136–156, 2012.

NUNES, T.; CAMPOS, T.M.M.; MAGINA, S.; BRYANT, P. **Educação Matemática, Números e operações Numéricas** - 2º Edição. São Paulo: Cortez. 2009.

NUNES, T., DESLI, D., e BELL, D. The development of children's understanding of intensive quantities. **International Journal of Educational Research**, 39, p. 652–675, 2003.

PIAGET, J. **The child's conception of number**. London: Routledge e Kegan Paul, 1952.

RODRIGUES, W. R. **Números Racionais: Um estudo das Concepções de alunos após o Estudo Formal**. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SANTOS, A. **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental.** 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SANTOS, P. C. A. **Uso do Material Concreto: Um Fator Facilitador da Ensinoagem.** 2010. Dissertação (Mestrado profissionalizante de Física e Matemática) - Centro Universitário Franciscano, Rio grande do Sul.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico.** São Paulo: Cortez, 2000.

SILVA, Angélica Fontoura Garcia. **O desafio do desenvolvimento profissional docente: Análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do Ensino Fundamental, tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem das frações.** 2007. Tese (Doutorado Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SILVA, F. A. F.; LINS, M.. **A construção do conceito de fração: um estudo comparativo entre alunos do 1º ano do Ensino Médio e alunos do 8º ano do Ensino Fundamental.** In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. XV, 2011, Campina Grande. Anais EBRAPEM Campina Grande: 2011.

SPINILLO, A.; BEZERRA, Francisco J. B.; MAGINA, S. M. P. Como desenvolver a compreensão da criança sobre fração? Uma experiência de ensino. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, v. 90, p. 411-432, 2009.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA. Colégio de Aplicação. Regimento Escolar: Organização didática. Florianópolis, 2007.

VERGNAUD, Gérard. (1988). Multiplicative Conceptual Field. What and Why? In: HAREL, Guershon; CONFREY, Jere (Orgs.). **The development of multiplicative reasoning in the learning of**

mathematics. New York: State University of New York Press, p. 41-59, 1994.

VERGNAUD, Gérard. (1990) **La théorie des champs conceptuels** In: JUNIOR, M. F. R.; CUSTÓDIO, J. F. A teoria dos campos conceituais de vergnaud: considerações para propostas de inserção da física moderna no ensino médio. IV ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, 2003.

VERGNAUD, G. (1994). **Multiplicative conceptual field: what and why?** MOREIRA, Marco Antonio. A teoria dos campos conceituais de vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. Investigações em Ensino de Ciências, p. 7-29, 2002

VERGNAUD, Gérard. (1996) **A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos** In: JUNIOR, M. F. R.; CUSTÓDIO, J. F. A teoria dos campos conceituais de vergnaud: considerações para propostas de inserção da física moderna no ensino médio. IV ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, 2003.

ANEXOS

ANEXO I (Termo de Consentimento)

TERMO DE CONSENTIMENTO

Rua Servidão Corinthians, 193

Pantanal, Florianópolis - SC

Queridos Pais,

Eu me chamo **Flávia Caraiba de Castro** e estou fazendo um estudo pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). O estudo que eu estou conduzindo visa identificar quais as contribuições das quantidades intensivas, para a aprendizagem dos Números Racionais. Eu gostaria que seu filho ou sua filha participasse do meu projeto de estudo que se realizará no **Colégio de Aplicação-CA da Universidade Federal de Santa Catarina– UFSC**.

O meu projeto de estudos consistirá de 3 partes. Na primeira parte será aplicado um pré-teste durante a aula de Matemática, onde todos os alunos da sala de seu filho ou de sua filha, isto é os que tiverem a autorização dos pais, responderão a 18 problemas que envolverão frações. O objetivo é determinar o que o seu filho ou filha sabe sobre frações.

Na segunda parte, haverá uma seção individual com seu filho ou filha, com duração de aproximadamente 30 a 45 minutos. Nessa parte será realizada uma atividade, onde seu filho ou filha será levado para uma sala reservada, onde participará de uma atividade que proporcione a eles pensarem intuitivamente sobre problemas de proporção e solução, isto é problemas que contemplem as quantidades intensivas, onde terá o auxílio de matérias ilustrativos e manipulativos. Assim serão

retirados a cada aula de Matemática 1 ou dois alunos (dependendo de quanto tempo cada um vai levar), até que todos participem dessa atividade. O objetivo é proporcionar uma situação onde as crianças possam pensar nas relações das quantidades intensivas. Na terceira etapa será aplicado um pós-teste durante a aula de Matemática, que contemplará 10 problemas parecidos com os que foram discutidos na intervenção, e para finalizar, será aplicado um segundo pós-teste, depois de aproximadamente um mês de intervalo entre o primeiro pós-teste que contemplará 18 problemas parecidos com o do pré-teste.

A professora _____
_____ sabe do meu projeto de estudos e permitirá que eu faça a etapa da intervenção em uma sala quieta, ou em algum outro espaço na escola onde o seu filho ou filha se sentir mais confortável. Mas, antes de fazer as etapas com as crianças, eu visitarei a sala de aula e me apresentarei, assim o seu filho ou filha terá oportunidade de conhecer-me e eu de conhecê-los.

Devido as crianças gostarem muito de fazerem experiências, manusear objetos, olharem figuras e interagirem com seus colegas, eu não antecipo nenhuma situação de risco ou desconforto que seu filho ou filha possa experimentar participando desse projeto de estudos. A participação das crianças é voluntária. Portanto, se o seu filho ou filha se cansarem durante as etapas ou se eles não quiserem os objetos oferecidos, eles podem parar com a participação em qualquer momento e voltar para as suas atividades na sala de aula normalmente. É esperado que a participação das crianças neste estudo traga vários benefícios para a aprendizagem, entre os quais eu ressalto dois: 1) o aumento do gosto pela matemática, e 2) sabendo o quê as crianças sabem sobre frações ,

professores terão maiores condições de melhor ensina-las. O resultado da participação de seu filho ou filha neste estudo não será associado com seus nomes e toda e qualquer informação relacionada a identificação das crianças será confidencialmente mantida.

A sua autorização para que seu filho ou filha participe deste estudo é voluntária e pode ser cancelada a qualquer momento sem medo de penalizações ou perda de benefícios.

Caso você autorize o seu filho ou filha à participar do meu projeto sobre conhecimentos e aprendizagem da matemática, por favor assine a cópia e devolva-a para a professora _____ ainda esta semana. Se você tiver alguma dúvida ou pergunta sobre o projeto de estudos, você pode me contatar ligando para o meu número **(48) 9607-4880** ou enviando um e-mail para mim flaviacaraiba@hotmail.com ou ainda enviando um bilhete para escola com o seu filho ou filha.

Muito obrigada por sua ajuda e contribuição.

Sinceramente,

Flávia Caraiba de Castro

Eu,

_____ autorizo que meu filho(a)
_____ particip

e do projeto de estudos sobre as contribuições das quantidades intensivas, para a aprendizagem dos Números Racionais, conduzido por Flavia Caraiba de Castro de acordo com as circunstâncias descritas no termo de consentimento. Minha assinatura abaixo significa que eu li e entendi as informações contidas no termo de consentimento e que eu concordo em participar do referido estudo, como também atesto que recebi cópia do termo de consentimento.

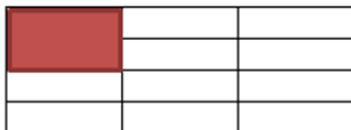
(Assinatura)

(Data)

ANEXO II (Problemas (pré-teste))

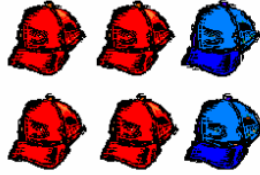
1. Uma pizza foi dividida em 5 partes iguais. Joana comeu 3 dessas partes. Que fração representa o que Joana comeu?

2. Observe o desenho abaixo e responda qual a fração que representa as partes pintadas da figura?



3. No estojo de Rafael há 6 canetas, 2 azuis e 4 pretas. Que fração representa a quantidade de canetas pretas em relação ao total de canetas?

4. Numa loja de presentes há 4 bonés vermelhos e 2 bonés azuis de mesmo tamanho. Que fração representa a quantidade de bonés azuis em relação ao total de bonés?



5. Duas barras de chocolate foram divididos igualmente entre 3 crianças.

a) Cada criança como um chocolate inteiro?

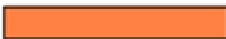
() SIM () NÃO

b) Cada criança recebera pelo menos metade de 1 chocolate?

() SIM () NÃO

c) Qual fração de chocolate cada criança receberá?

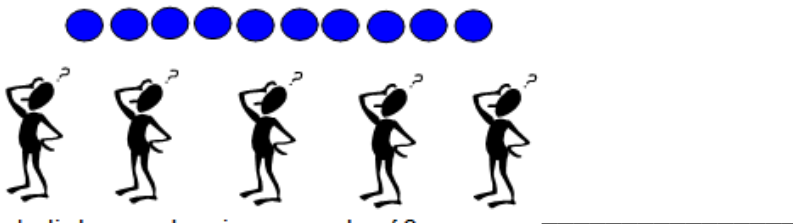
6. Foram divididas igualmente para 4 crianças, 3 barras de chocolate. Que fração de chocolate cada criança receberá?



7. Marly tem 12 figurinhas e vai dividir igualmente com 4 colegas.

- a) Quantas figurinhas cada colega ganharão? _____
b) Que fração representa esta divisão? _____

8. Tenho 10 bolinhas de gude e vou dividir igualmente para 5 crianças. Que fração representa esta divisão?



9. Paulo partiu o chocolate e comeu $\frac{3}{4}$ dele. Desenhe o chocolate e mostre o quanto Paulo comeu. Que fração representa o que Paulo comeu em relação ao total de chocolate?

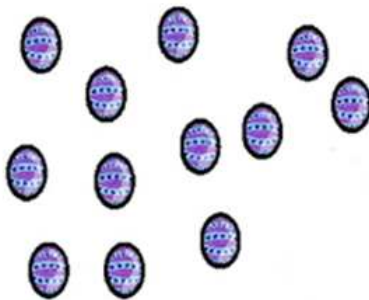
10. Maria ganhou um chocolate e comeu $\frac{2}{5}$. Pinte a quantidade de chocolate que Maria comeu.

11. Ana tem uma coleção de 24 bonecas. A coleção de sua prima é $\frac{2}{3}$ da sua. Quantas bonecas tem a prima de Ana?
-

12. Em uma loja que vende bolinhas de gude, restam apenas 12. Luiz ganhou $\frac{2}{3}$ dessas bolinhas de gude. Quantas bolinhas de gude Luiz ganhou?



Luís



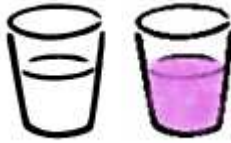
13. Na escola de Paulo foi feito um sorteio com 8 bilhetes para um passeio. Paulo tinha comprado 4 desses 8 bilhetes. Qual a chance de Paulo ser sorteado?

14. Qual a chance de tirar uma carta azul neste baralho?



15. Para fazer certa quantidade de suco são necessários 2 medidas de água para 1 medida de concentrado de laranja. Que fração representa a medida da água em relação ao total de suco?

16. Para preparar uma jarra de refresco de uva, Cláudia necessita de um copo de concentrado de uva e um copo de água. Você pode escrever que fração representa o concentrado de uva em relação a mistura total?



17. Compare as frações e complete as sentenças com os sinais de maior (>) menor (<) ou igual (=).

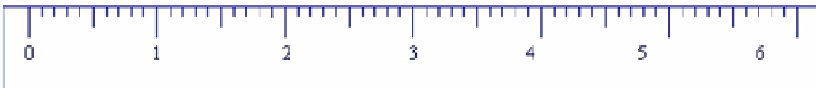
a) $\frac{2}{5}$ ___ $\frac{3}{5}$

b) $\frac{1}{3}$ ___ $\frac{2}{6}$

c) $\frac{7}{20}$ ___ $\frac{7}{10}$

d) $\frac{1}{2}$ ___ $\frac{5}{10}$

18. Encontre a posição dos números fracionários ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$) na reta numérica.



ANEXO III (Caderno de problemas (intervenção))**CADERNO DE PROBLEMAS**

Nº _____

Meu nome é: _____

A data de hoje é: ____/____/____

Meu aniversário é em: _____

Estou com _____ anos de idade.

Problema 1.

Em dois copos de tamanho iguais, adicionamos $\frac{1}{2}$ copo de água e $\frac{1}{2}$ copo de concentrado de suco. Agora vamos misturar um pouco de açúcar. No primeiro copo vamos colocar uma colher de açúcar e no segundo copo vamos colocar duas colheres de açúcar.

Pergunta-se:

- a) Os dois copos de suco terão o mesmo gosto? Se sua resposta for não, qual será a diferença entre eles?

- b) Agora vamos fazer o mesmo suco da primeira receita. Invés de usarmos $\frac{1}{2}$ copo de água, vamos usar 1 copo de água. Qual a quantidade de concentrado de suco e de colheres de açúcar será preciso colocar para que o gosto permaneça o mesmo?

Problema 2.

Em um copo adicionamos $\frac{1}{3}$ do copo de água e $\frac{2}{3}$ do copo de concentrado de suco. No outro copo adicionamos $\frac{2}{3}$ de água e $\frac{1}{3}$ de concentrado de suco. No primeiro copo adicionamos duas colheres de açúcar e no segundo copo adicionamos duas colheres de açúcar.

- a) Os dois copos de suco terão o mesmo gosto? Se sua resposta for não, qual será a diferença entre eles?

- b) Agora vamos fazer o mesmo suco da segunda receita. Invés de usarmos $\frac{1}{2}$ copo de água, vamos usar 2 copo de água. Qual a quantidade de concentrado de suco e de colheres de açúcar será preciso colocar para que o gosto permaneça o mesmo?

Problema 3.

Temos dois carros, o carro vermelho e o carro amarelo. O carro amarelo atinge a linha de chegada depois de 82min. O carro vermelho atinge a linha de chegada também depois de 82min.

Pergunta-se:

- a) Será que um carro é mais rápido do que o outro? Por quê?

- b) Se o carro amarelo e o carro vermelho andarem no mesmo ritmo, o tempo de chegada vai ser o mesmo para os dois carros? Por quê?

Problema 4.

Dois carros estão em uma faixa. O carro vermelho e o carro amarelo. O carro vermelho leva 15 minutos para chegar até a linha de chegada, já o carro amarelo leva 20 minutos.

- a) Será que um carro é mais rápido do que o outro? Por quê?

- b) Se o carro vermelho sair 2 minutos depois do carro amarelo, eles irão se encontrar antes de cruzarem a linha de chegada? Por quê?

Problema 5.

Paulo receberá 20 amigos em seu apartamento. Para subir até o apartamento de Paulo é necessário que todos subam o elevador, que tem capacidade máxima de 6 pessoas.

Pergunta-se:




- a) Quantas viagens de elevador serão necessárias para todos os amigos de Paulo chegar ao seu apartamento?

- b) Em algumas dessas viagens irá sobrar lugar? Se sim, quantos?

- c) Se a quantidade máxima permitida no elevador fossem somente 5 pessoas, quantas viagens seriam feitas de elevador, para que todos chegassem no apartamento de Paulo?

Problema 6.

Um Jardineiro deseja fazer canteiros com 9 flores em cada. Para isso o jardineiro possui 9 cravos, 18 margaridas e 27 rosas.

Flores	Quantidades
Cravos	
Margaridas	
Rosas	




Pergunta-se:

- a) Quantos canteiros o jardineiro poderá fazer?

- b) Se todos os canteiros tiverem o mesmo número de rosas, quantas rosas irão ter em cada canteiro?

Problema 7.

Minha melhor receita para o suco de limão é mostrado nesta tabela.

Água	Limão	Açúcar
1 copo 	1\2 copo 	2 colheres 




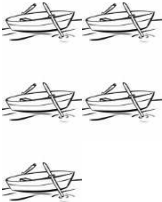


Para que o gosto continue o mesmo:

- Quantos colheres de açúcar você tem que usar para um copo de limão? _____
- Quantos colheres de açúcar você tem que usar para 1 copo de limão e meio? _____
- Quantos colheres de açúcar você tem que usar para dois copos de limões? _____
- Qual a quantidade de copos de limão e de água que deverá ser utilizada se você só tiver uma colher de açúcar? _____

Por favor, você pode terminar a frase: "Cada vez que você adicionar um copo de limão, você deve adicionar _____ colheres de açúcar".

Problema 8.

Os parentes de Jonathan foram visita-lo, só que para isso elestinham que atravessar um grande rio. Na primeira visita vão 20 parentes. Eles irão usar 5 barcos para atravessar o rio. Na segunda vez, vão 16 parentes e utilizam quatro barcos.

	1° visita	2° visita	3° visita
Quantidade de parentes			
Quantidade de barcos			

Pergunta-se:

- a) Na segunda visita os barcos vão mais cheios que a primeira visita? Mais vazios? Ou com quantidades iguais de parentes? Assinale a resposta correta.


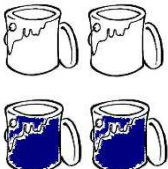

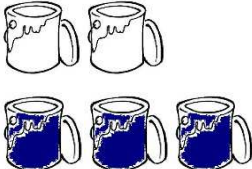

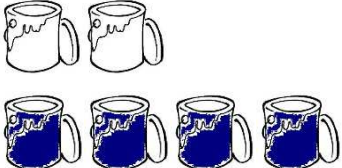
Mais cheio	Quantidades iguais	Mais vazio
------------	--------------------	------------

- b) A terceira vez que os parentes irão visitar Jonathan apenas 10 deles pode ir. Eles usam dois barcos. Os barcos são mais cheios, mais vazios ou com quantidades iguais de parentes, comparado a primeira visita? Assinale a resposta correta.

Mais cheio	Quantidades iguais	Mais vazio
------------	--------------------	------------

Problema 9.

Pedro é um pintor que gosta muito de misturar as cores. Suas preferidas são três tons de azul, o azul pálido, o azul médio e o azul escuro. Para fazer o azul pálido ele usa 2 latas de tinta branca e 2 latas de tinta azul marinho. Para fazer o azul médio, ele usa duas latas de tinta branca e três latas de tinta azul marinho. E para fazer o azul escuro, ele usa duas latas de tinta branca e 4 latas de tinta azul marinho.

 <p>Azul pálido</p>	
 <p>Azul médio</p>	
 <p>Azul escuro</p>	

Pedro precisa pintar uma sala muito grande com todos os três tons de azul. Ele faz muito das três cores.

- a) Você pode assinalar o tom de azul que ele terá quando misturar 100 latas de tinta branca com 100 latas de tinta azul marinho?

Pálido	Médio	Escuro
--------	-------	--------

- b) Você pode assinalar o tom de azul que ele terá quando misturar 10 latas de tinta branca com 20 latas de tinta azul marinho?

Pálido	Médio	Escuro
--------	-------	--------

- c) Você pode assinalar o tom de azul que ele terá quando misturar 120 latas de tinta branca com 180 latas de tinta azul marinho?

Pálido	Médio	Escuro
--------	-------	--------

- d) Você pode assinalar o tom de azul que ele terá quando misturar 500 latas de tinta branca com 1000 latas de tinta azul marinho?

Pálido	Médio	Escuro
--------	-------	--------

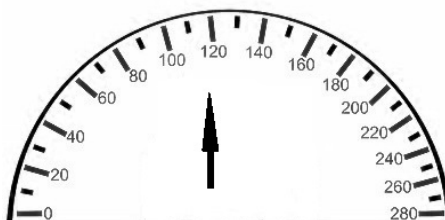
- e) Você pode assinalar o tom de azul que ele terá quando ele misturar 40 latas de tinta branca com 60 latas de tinta azul marinho?

Pálido	Médio	Escuro
--------	-------	--------

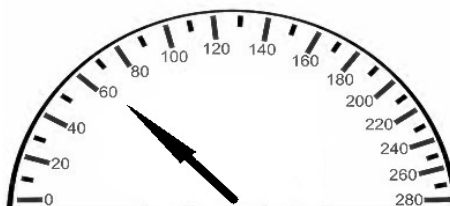
Problema 10.

Um automóvel percorre 120 km, de uma cidade para outra, de forma que quando ele gasta: (Km=quilômetro, h=hora)

1 hora, o velocímetro do carro marca 120 km/h.



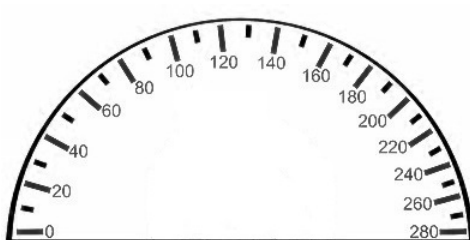
2 horas, o velocímetro do carro marca 60 km/h.



Pergunta-se:

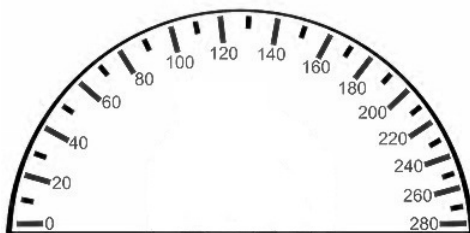
- a) Em 3 horas, o velocímetro do carro vai marcar quantos km/h? _____

Indique abaixo, onde o velocímetro estará marcando.



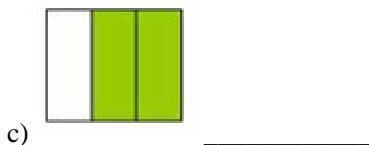
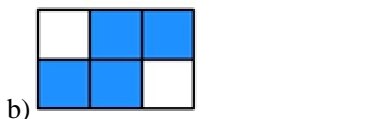
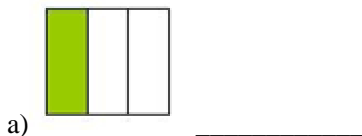
- b) Em $\frac{1}{2}$ hora, o velocímetro do carro vai marcar quantos km/h? _____

Indique abaixo, onde o velocímetro estará marcando.



ANEXO IV (Problemas (pós-teste 1))

1. Responda qual a fração que representa as partes pintadas de cada da figura.



2. Em uma festa foram distribuídos igualmente 3 bolos, em pedaços iguais para 7 crianças, e em outra festa, foram distribuídos igualmente 9 bolos, em pedaços iguais, para 21 crianças. Considerando que os bolos das duas festas são iguais, todas as crianças receberam a mesma quantidade de bolo?

Sim Não

Descreva como você chegou nessa conclusão:

3. Jogando apenas uma vez um dado de 6 faces, qual a fração que representa a chance de tirar o número 3? _____

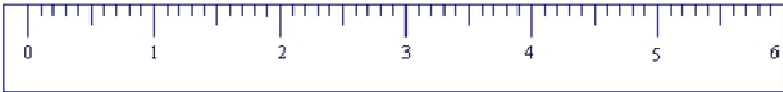


4. Em uma gincana, os três primeiros alunos que terminassem as tarefas ganhariam um número de bolas, do total de 35, conforme a classificação. Paulo ganhou $\frac{4}{14}$ das bolas, Daniel $\frac{1}{7}$ e Thiago $\frac{4}{7}$.

a) Quem chegou em 1º, 2º e 3º lugar respectivamente?

b) Qual a quantidade de bolas que Paulo, Daniel e Thiago ganharam?

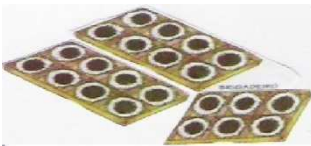
5. Identifique as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{12}$ e $\frac{5}{2}$ na reta numérica abaixo:



6. Rodrigo gostaria de abrir uma mecânica. Para isso ele precisa de $\frac{3}{6}$ das ferramentas a baixo. Quantas ferramentas ele precisa?



7. Em uma festa, Marina, que adorava doces, comeu $\frac{9}{11}$ dos brigadeiros apresentados abaixo. Quantos brigadeiros, ao todo, Marina comeu?



8. Para enfeitar uma pequena árvore de Natal, Patrícia usou 10 bolinhas. Como mostra a figura abaixo. Que fração representa a quantidade de bolinhas amarelas em relação ao total de bolinhas?



9. Fernanda tem 27 vasos de violeta para distribuir igualmente entre 9 salas. Ana também irá decorar outras 6 salas e possui 24 vasos de violeta para serem distribuídos igualmente entre elas.
- a) As salas de Fernanda e de Ana terão a mesma quantidade de vasos?

Sim. Descreva como você chegou nessa conclusão.

Não. Descreva como você chegou nessa conclusão.

- b) Que fração representa a quantidade de vasos distribuídos em cada sala de Fernanda?

- c) Que fração representa a quantidade de vasos distribuídos em cada sala de Ana?

10. Tenho 10 coelhos para serem distribuídos igualmente em 2 viveiros.



a) Quantos coelhos terão cada viveiro?

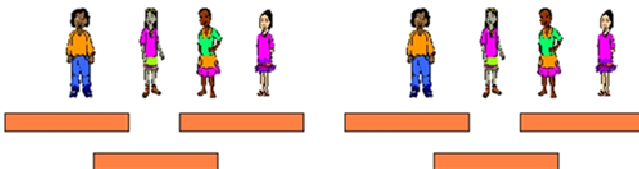
b) Que fração representa essa

divisão? _____

11. Uma pizza foi dividida em 10 partes iguais. Joana comeu 6 dessas partes. Que fração representa o que Joana comeu?

12. Na bolsa de Paulo há 12 pirulitos, 4 de sabor morango e 8 de sabor cereja. Que fração representa a quantidade de pirulitos sabor cereja em relação ao total de pirulitos?

13. Foram divididas igualmente para 8 crianças, 6 barras de chocolate. Que fração de chocolate cada criança receberá?



14. Paulo partiu o chocolate e comeu $\frac{6}{8}$ dele. Desenhe o chocolate e mostre o quanto Paulo comeu.

15. Dentro de um saco tem 12 bolas coloridas, sendo que 4 são roxas, 3 azuis e 5 amarelas. Qual a chance de se tirar de primeira uma bola azul? Explique.

16. Compare as frações e complete as sentenças com os sinais de maior ($>$) menor ($<$) ou igual ($=$).

a) $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$

c) $\frac{7}{20}$ $\frac{7}{10}$




b) $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{6}$

d) $\frac{10}{20}$ $\frac{5}{10}$

17. Fernanda e Marcela estão fazendo suas bebidas. Fernanda utiliza 4 xícaras de concentrado de abacaxi e 12 xícaras de água. Marcela utiliza 8 xícaras de concentrado de abacaxi e 16 copos

de água. Será que as duas bebidas terão o mesmo gosto? Se não tiverem o mesmo gosto, qual será a diferença entre elas?

- 18.** Pedro faz uma mistura utilizando suco de laranja e água, do jeito que ele gosta. Sua receita secreta é feita com três copos de suco de laranja para seis copos de água. Quando Pedro foi fazer sua mistura, olhou na geladeira e só havia um copo de suco de laranja. Quantos copos de água que ele deve usar para que a sua mistura fique do jeito que ele gosta?

Receita de Pedro	
Quantidade de suco de laranja	Quantidade de água
	
	?

ANEXO V (Problemas (pós-teste 2))

1. Uma pizzaria entregou duas pizzas cortadas igualmente em 8 pedaços em uma casa com 8 pessoas. Em outra casa, com 12 pessoas, foram entregues 3 pizzas cortadas em 8 pedaços.

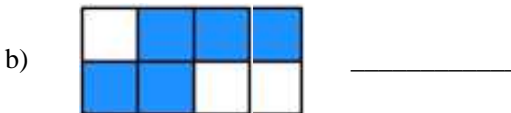
Considerando que ninguém deixou de comer, nas duas casas, todas as pessoas receberam a mesma quantidade de fatias de pizza?

Sim Não

Descreva como você chegou nesse resultado

2. Jogando apenas uma vez um dado de 6 faces, qual a fração que representa a chance de tirar um número par? _____

3. Responda qual a fração que representa as partes pintadas em cada da figura.





4. Fernanda tem 21 vasos de violeta para distribuir igualmente entre 7 salas. Ana também irá decorar outras 5 salas e possui 20 vasos de violeta para serem distribuídos igualmente entre elas.

a) As salas de Fernanda e de Ana terão a mesma quantidade de vasos?

Sim

Não

Descreva como você chegou nesse resultado

b) Que fração representa a quantidade de vasos distribuídos em cada sala de Fernanda? _____

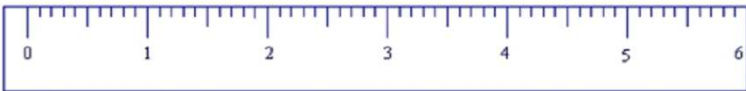
c) Que fração representa a quantidade de vasos distribuídos em cada sala de Ana? _____

5. Em uma gincana, os três primeiros alunos que terminassem as tarefas ganhavam um número de bolas, do total de 42, conforme a classificação. Paulo ganhou $\frac{4}{12}$ das bolas, Daniel $\frac{1}{6}$ e Thiago $\frac{3}{6}$.

a) Quem chegou em 1º, 2º e 3º lugar respectivamente?

b) Qual a quantidade de bolas que Paulo, Daniel e Thiago ganharam?

6. Identifique as frações $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{10}$ e $\frac{3}{2}$ na reta numérica abaixo:



7. Um chocolate foi dividido em 8 partes iguais. Maria comeu 5 dessas partes. Que fração representa o que sobrou do chocolate?

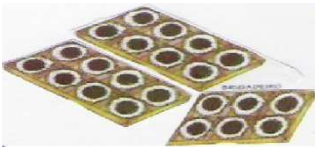
8. Rodrigo gostaria de abrir uma mecânica. Para isso ele precisa de $\frac{3}{6}$ das ferramentas a baixo.



Quantas ferramentas ele precisa? Descreva como você chegou a esse resultado.

-
-
9. Na bolsa de Paulo há 12 pirulitos, 5 de são de sabor morango, e 7 de sabor cereja. Que fração representa a quantidade de pirulitos sabor morango em relação ao total de pirulitos? Descreva como você chegou a esse resultado.

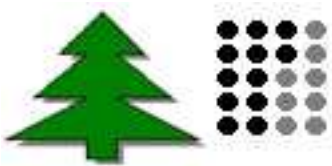
-
-
-
10. Em uma festa, Marina, que adorava doces, comeu $\frac{7}{11}$ dos brigadeiros apresentados abaixo.



Quantos brigadeiros, ao todo, Marina comeu? Descreva como você chegou a esse resultado.

-
-
-
11. A mãe de Paulo fez um bolo e Paulo comeu $\frac{7}{10}$ dele. Desenhe o bolo e mostre o quanto Paulo comeu.

12. Para enfeitar uma pequena árvore de Natal, Patrícia usou 20 bolinhas. Como mostra a figura abaixo:



Que fração representa a quantidade de bolinhas pretas em relação ao total de bolinhas? Descreva como você chegou a esse resultado.

13. Se dentro de um saco tem 15 bolas coloridas, sendo que 5 são verdes, 4 azuis e 6 vermelhas, qual a chance de se tirar de primeira uma bola verde? Descreva como você chegou a esse resultado.

14. Tenho 20 coelhos para serem distribuídos igualmente em 4 viveiros.

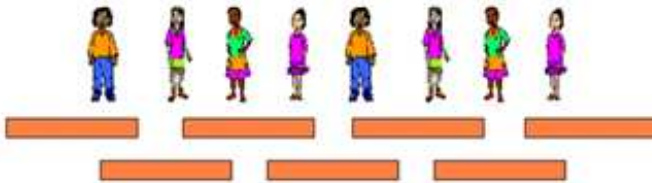


a) Quantos coelhos terão cada viveiro?

b) Que fração representa essa divisão?

- 15.** Fernanda e Marcela estão fazendo suas bebidas. Fernanda utilizou 3 xícaras de concentrado de abacaxi e 10 xícaras de água. Marcela usa 6 xícaras de concentrado de abacaxi e 15 copos de água. Será que as duas bebidas tem o mesmo gosto ou não? Responda como chegou a essa conclusão.

- 16.** Foram divididas igualmente para 8 crianças, 7 barras de chocolate. Que fração de chocolate cada criança receberá?



17. Compare as frações e complete as sentenças com os sinais de maior (>) menor (<) ou igual (=).




a) $\frac{2}{5}$ ___ $\frac{3}{5}$

c) $\frac{5}{8}$ ___ $\frac{5}{16}$

b) $\frac{1}{2}$ ___ $\frac{4}{8}$

d) $\frac{6}{10}$ ___ $\frac{3}{5}$

18. Pedro faz uma mistura, utilizando suco de laranja e água, do jeito que ele gosta. Sua receita secreta é feita de duas medidas de suco de laranja para cinco medidas de água. Quando Pedro foi fazer sua mistura, olhou na geladeira e só havia meia medida de suco de laranja. Quantas medidas de água que ele deve usar para que a sua mistura fique do jeito que ele gosta?

Receita de Pedro	
Quantidade de suco de laranja	Quantidade de água
	
	?

Descreva como você chegou nesse resultado
