

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC  
Centro Sócio Econômico  
Departamento de Economia e Relações Internacionais

TALES RENATO CUGLER FRANÇA

Instabilidades e Não-Linearidades no Mercado Financeiro: Um estudo da Teoria do Caos  
aplicada ao Mercado de Câmbio

Florianópolis, 2014

**TALES RENATO CUGLER FRANÇA**

Instabilidades e Não-Linearidades no Mercado Financeiro: Um estudo da Teoria  
do Caos aplicada ao Mercado de Câmbio

Monografia submetida ao curso de Ciências  
Econômicas da Universidade Federal de Santa  
Catarina como requisito obrigatório para a  
obtenção do grau de Bacharelado

**Orientador: Prof. Dr. Eraldo Barbosa  
Sérgio da Silva**

Florianópolis, 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS ECONÔMICAS

Tales Renato Cugler França

**INSTABILIDADES E NÃO-LINEARIDADES NO MERCADO FINANCEIRO: UM  
ESTUDO DA TEORIA DO CAOS APLICADA AO MERCADO DE CÂMBIO**

A Banca Examinadora resolveu atribuir a nota 7 ao estudante Tales Renato Cugler França na disciplina CNM 7107 – Monografia, pela apresentação deste trabalho.

Florianópolis, 4 de dezembro de 2014.

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Eraldo Barbosa Sergio da Silva  
Orientador

---

Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Griebeler  
Membro da Banca

---

Me. Elder Mauricio Silva  
Membro da Banca

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais, Solange, José França e a minha irmã Mônica pelo apoio que foi me dado desde o início até os dias de hoje, sendo na maioria das vezes compreensíveis com as minhas decisões.

Aos colaboradores da Fundação Certi onde realizei meu estágio e também a empresa Parmais, na qual ambos proporcionaram um conhecimento ímpar e auxiliaram-me muito profissionalmente.

Aos estudantes do curso de Ciências Econômicas da Universidade Federal de Santa Catarina, as pessoas que participaram das últimas gestões do CALE, em especial Carol, Emilly, Gabriela, Maicon, Lucas, Luciano, Ruan, Tamara, Tainam, Thiago e Willian.

Também aos professores pela atenção, apoio e ensinamentos recebidos, em especial ao professor Eraldo Barbosa Sergio da Silva, na qual me apoiou na elaboração desta pesquisa, esclarecendo dúvidas e prestando auxílio nas dificuldades encontradas.

Ao Bruno Smaniotto pela orientação, apoio nos momentos difíceis, amizade e incentivo durante a realização deste trabalho.

Aos colegas de apartamento Luiz Fernando e Marx Ribeiro pelo tempo que passamos juntos e pelo auxílio fornecido na fase final da elaboração desse trabalho.

Por fim, agradeço a minha namorada Elaine Gregório pelo companheirismo e compreensão comigo desde o momento que nos conhecemos.

*“March on, symbolic host! With step sublime.  
Up to the flaming bounds of Space and Time!  
There pause, until by Dickenson depicted,  
In two dimensions, we form may trace  
Of him whose soul, too large for vulgar space  
In n dimensions flourished unrestricted.”*

(James Clerk Maxwell)

## RESUMO

Durante os últimos séculos ocorreram significativas mudanças no pensamento sobre a dinâmica não-linear, principalmente a partir dos anos 60 com o advento e popularização de métodos computacionais. Desta forma, foi possível estudar melhor sistemas não-lineares, como por exemplo séries financeiras e econômicas. O objetivo deste trabalho é investigar se os mercados de câmbio apresentam dinâmica caótica. Para o desenvolvimento utilizou-se as séries históricas de taxa de câmbio provenientes do site do Federal Reserve. Elas serviram de dados de entrada do software Matlab, utilizando-se as seguintes taxas de câmbio, dólar/real, dólar/yuan, euro/dólar e libra/dólar. Posteriormente, foi calculado os retornos diários, e em cima dos retornos utilizou-se do método de informação mútua a média e dos falsos vizinhos para determinar respectivamente, a defasagem e a dimensão para reconstrução do espaço de fase. Com esses valores calculados tornou-se possível o cálculo dos expoentes máximo de Lyapunov através do método proposto por Rosenstein. Os resultados foram inconclusivos, pois os expoentes de Lyapunov não confirmam a hipótese de presença caótica nas séries históricas estudadas.

**Palavras-chave:** Teoria do Caos. Taxa de Câmbio. Não-linearidade

## ABSTRACT

During the last centuries significant changes occurred in thinking about non-linear dynamics. It occurred mainly from the 60s with the advent and popularization of computational methods. Thus, it was possible to better study nonlinear systems, such as financial and economic series. The objective of this study is to investigate if the currency markets exhibit chaotic dynamics. For the development of this work, we used the time series of the exchange rate from the Federal Reserve website, served as the input data of the software Matlab, and the following exchange rates: dollar/real, dollar/yuan, euro/dollar and pound/dollar. After that, the daily profits were calculated over the returns. We used the method of the average mutual information and the false neighbors test. Then, it was possible to calculate the maximum Lyapunov exponents using the method proposed by Rosenstein. The results were inconclusive because the Lyapunov exponents do not support the hypothesis of chaotic presence in the studied time series.

**Keywords:** Chaos theory. Exchange Rates. Nonlinearity

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Atrator borboleta de Lorenz. ....	17
Gráfico 2 - Gráfico das iterações do mapa logístico, com $x_0 = 0.7; r = 2.5$ e $n = 100$ . ....	19
Gráfico 3 - Gráfico das iterações do mapa logístico, com $x_0 = 0.7; r = 3.7$ e $n = 100$ . ....	19
Gráfico 4 - Gráfico cobweb para $x_0 = 0.7; r = 2.5$ e $n = 100$ . ....	20
Gráfico 5 - Gráfico cobweb para $x_0 = 0.7; r = 3.7$ e $n = 100$ . ....	21
Gráfico 6 - Gráfico da taxa de câmbio diária euro/dólar durante o período de 03/01/2000 até 30/09/2014. ....	30
Gráfico 7 - Gráfico dos retornos diários gerados da taxa de câmbio euro/dólar durante o período de 03/01/2000 até 30/09/2014. ....	31
Gráfico 8 - Gráfico gerado pelo método dos falsos vizinhos na série euro/dólar. ....	31
Gráfico 9 - Gráfico do maior expoente de Lyapunov na série euro/dólar. ....	32
Gráfico 10 - Gráfico da taxa de câmbio diária libra/dólar durante o período de 03/01/2000 até 30/09/2014. ....	33
Gráfico 11 - Gráfico dos retornos diários gerados da taxa de câmbio libra/dólar durante o período de 03/01/2000 até 30/09/2014. ....	33
Gráfico 12 - Gráfico gerado pelo método dos falsos vizinhos na série libra/dólar. ....	34
Gráfico 13 - Gráfico do maior expoente de Lyapunov na série libra/dólar. ....	34
Gráfico 14 - Gráfico da taxa de câmbio diária dólar/yuan durante o período de 03/01/2000 até 30/09/2014. ....	35
Gráfico 15 - Gráfico dos retornos diários gerados da taxa de câmbio dólar/yuan durante o período de 03/01/2000 até 30/09/2014. ....	36
Gráfico 16 - Gráfico gerado pelo método dos falsos vizinhos na série dólar/yuan. ....	36
Gráfico 17 - Gráfico do maior expoente de Lyapunov na série dólar/yuan. ....	37
Gráfico 18 - Gráfico da taxa de câmbio diária dólar/real durante o período de 03/01/2000 até 30/09/2014. ....	38
Gráfico 19 - Gráfico dos retornos diários gerados da taxa de câmbio dólar/real durante o período de 03/01/2000 até 30/09/2014. ....	38
Gráfico 20 - Gráfico gerado pelo método dos falsos vizinhos na série dólar/real. ....	39
Gráfico 21 - Gráfico do maior expoente de Lyapunov na série dólar/real. ....	39

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Séries históricas das taxas de câmbio.....	29
---	----

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>OBJETIVO GERAL E ESPECÍFICOS.....</b>	<b>12</b>
2.1	OBJETIVO GERAL.....	12
2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	12
<b>3</b>	<b>JUSTIFICATIVA.....</b>	<b>13</b>
<b>4</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>15</b>
4.1	A TRAJETÓRIA DOS ESTUDOS SOBRE A TEORIA DO CAOS.....	15
4.2	EQUAÇÃO DE LORENZ.....	16
4.3	MAY E O MAPA LOGÍSTICO.....	18
4.4	ENCONTRANDO EVIDÊNCIAS DE CAOS.....	21
4.5	O EXPOENTE DE LYAPUNOV.....	24
<b>5</b>	<b>METODOLOGIA.....</b>	<b>27</b>
<b>6</b>	<b>RESULTADOS.....</b>	<b>29</b>
6.1	DADOS.....	29
6.2	EURO.....	30
6.3	LIBRA.....	32
6.4	YUAN.....	35
6.5	REAL.....	37
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>40</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>41</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Na natureza é possível encontrar sistemas dinâmicos, um sistema ou agente econômico cujos estados mudam com o tempo. Pode-se citar como exemplos os modelos populacionais, o movimento de um pêndulo, o clima e o comportamento animal. A maioria destes sistemas encontrados não são lineares, mas podem apresentar comportamento determinístico.

O comportamento determinístico a princípio parece aleatório, porém, a partir do final do século XIX o interesse de pesquisadores foi despertado para identificar as suas reais causas. Desta forma, os estudiosos puderam averiguar se é possível antever-se aos eventos. Como por exemplo, a previsão de terremotos, um trabalho realizado por Goltz (1997).

Os movimentos nos mercados financeiros são estudados por economistas. É possível perceber que os preços dos ativos apresentam um comportamento não-linear, e o mesmo questionamento que usamos para a trajetória dos eventos na natureza pode ser utilizado aqui, estudando a possibilidade de seu comportamento não ser totalmente aleatório e apresentar traços de determinismo.

Visto a hipótese de que variação nos mercados financeiros pode apresentar traços de determinismo através de uma dinâmica caótica, no qual pôde-se observar nos trabalhos de Lebaron (1994), Da Silva (2001a) e Rodríguez et al. (2005). No trabalho apresentado por Demos (2014) foi utilizado dados do mercado de ações para tentar validar a presença de caos determinístico em séries financeiras como uma das hipóteses proposta.

Neste trabalho, o foco principal será a análise empírica das variações das taxas de câmbio dólar-real, dólar-yuan, euro-dólar e libra-dólar utilizando como método principal o cálculo dos expoentes máximo de Lyapunov para detectar a presença de caos determinístico nas séries históricas dessas taxas de câmbio.

## **2 OBJETIVO GERAL E ESPECÍFICOS**

### **2.1 OBJETIVO GERAL**

O objetivo principal deste trabalho é investigar se os mercados de câmbio apresentam dinâmica caótica.

### **2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

Os objetivos específicos são:

1. Apresentar a Teoria do Caos e seus principais modelos.
2. Investigar os dados empíricos das taxas de câmbio a partir da modelagem econômica com ênfase na Teoria do Caos.

### 3 JUSTIFICATIVA

Os mercados financeiros atraem muitos pesquisadores, isso acontece devido a sua dinâmica frenética, na qual produz uma grande quantidade de dados para serem estudados. Assim como encontrado em outras áreas, as qualidades não-lineares despertam interesse. Clyde e Osler (1997) relatam os principais estudos introdutórios na aplicação de métodos não-lineares nos preços dos ativos no mercado financeiro, através de algumas técnicas foi possível aferir evidências da dependência não-linear dos preços, como em Brock (1991) e Hsieh (1991).

Da Silva (2001a) apresenta a dificuldade encontrada na busca por evidências de comportamento caótico em estudos com dados econômicos e financeiros, colocando a não-linearidade como uma condição necessária, e também sendo preciso algo a mais para o que ocorra comportamento caótico.

Apesar dos entraves postos para detectar a presença de comportamento caótico em séries econômicas, é possível observar o crescimento nos últimos 25 anos dos estudos e o desenvolvimento das técnicas de previsão não-linear aplicada nesta área. Clyde e Osler (1997) demonstram através do trabalho realizado por Yang e Brorsen (1993) a tentativa e confirmação de fortes evidências de não-linearidade nos mercados futuros de câmbio e também caos determinístico na metade das observações analisadas.

Hsieh (1993) em seu estudo utilizando quatro paridades de contratos futuros de moeda, encontrou-se evidências não-lineares nas séries históricas analisadas e concluiu-se que a não linearidade é um resultado proveniente das variâncias condicionais previsíveis. Enquanto Rodriguez et al. (2005) encontraram evidências da presença de caos no movimento das taxas de câmbio, Kyrtsou et al. (2004) demonstraram através de modelos econômicos, utilizando o câmbio, que o comportamento futuro dos preços podem apresentar trajetórias caóticas.

Há, contudo, pouca justificativa teórica para supor que as equações que regem um determinado sistema serão lineares. Na verdade, como os analistas não-lineares, muitas vezes apontam, a concentração da linearidade gera a exclusão de todas as outras especificações funcionais, isso é como tomar uma aposta de que o animal não identificado na sala ao lado é um elefante, em vez de ser de alguma outra espécie de animal (CLYDE; OSLER, 1997, p. 492, tradução nossa).

A partir dos estudos apresentados acima, é possível inferir a possibilidade da presença de uma dinâmica não-linear nos preços dos ativos, e em alguns casos notou-se a presença de caos determinístico. Apesar dos indícios da presença de caos em séries financeiras Clyde e

Osler (1997) relataram a baixa justificativa teórica para encontrar equações lineares que determinam o comportamento de um sistema, por isso torna-se válida a busca por novos métodos para possibilitar a determinação do comportamento em séries financeiras.

## 4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 4.1 A TRAJETÓRIA DOS ESTUDOS SOBRE A TEORIA DO CAOS

Stewart (1991) em seu livro chamado “Será que Deus joga dados?” descreveu a trajetória histórica dos estudos que originaram a teoria do caos, apresentando os modelos clássicos de caos, demonstrando a importância dessa área de pesquisa e também a sua aplicação na natureza.

O caos é um tema recente, a última novidade. Mas sempre que um tópico recém-descoberto chega às manchetes científicas, constata-se que em algum lugar, no passado distante, havia pessoas que sabiam a respeito. De alguma maneira. A posteriori, torna-se com frequência mais fácil ver coisas que absolutamente não tinham tal clareza antes. O x da questão não é tanto saber algo, mas saber que se sabe algo. Isto é, avaliar que aquilo é importante, e ter um contexto onde situá-lo. Eras anteriores viram partes deste quadro – mas nunca as reuniram. Não tinham motivação para formular as questões certas, não tinham técnicas para encontrar as respostas. Viram detalhes isolados, nunca o Grande Quadro (STEWART, 1991, p. 247).

A partir do século XVII, com Galileu Galilei e depois com Isaac Newton, a compreensão da realidade ganha uma ótica nova, na qual através do estudo da mecânica de Newton foi possível verificar uma contribuição grande em diversas áreas de pesquisa, um exemplo disso foi a colaboração na resolução do problema dos dois corpos, que consistia em calcular a órbita de dois corpos sujeitos a ação gravitacional.

Quando é adicionado um terceiro corpo celeste neste sistema, as funções conhecidas não conseguiram resolver o problema. Antes do trabalho de Henri Poincaré, acreditava-se que no Sistema Solar os planetas repetiam diversas vezes as mesmas órbitas, com perturbações ínfimas resultante da ação de outros corpos celestes, mesmo que os movimentos apresentados pudessem parecer periódicos.

Buscando a solução de 4 famosos enigmas da matemática e da física, o Rei Óscar II da Suécia e Noruega promoveu um concurso científico, no qual a problemática era propor uma teoria válida sobre a estabilidade do Sistema Solar em grandes escalas de tempo, ou seja, estava vinculado ao problema da órbita de mais de 2 corpos que as equações de Newton não

conseguiram resolver. Poincaré (1890) apresentou uma possível solução a este problema e ganhou o concurso, apesar de conseguir a vitória, não foi possível chegar a solução final da problemática, porém resultou em avanços significativos na solução de equações diferenciais.

Poincaré (1890) descobriu que ao adicionar um terceiro corpo no sistema de órbitas irregulares, este possui uma dependência muito sensível as condições iniciais, sendo possível verificar a existência de uma complexidade dinâmica no problema estudado. Por falta de métodos computacionais na época ele não conseguiu avançar significativamente com seus estudos, mas com o desenrolar do século XX e a evolução dos computadores, o estudo nessa área foi aperfeiçoado, ficando conhecido como o estudo do caos.

Com o avanço tecnológico, a partir da utilização de computadores eletrônicos no século XX, possibilitou a resolução de sistemas com equações diferenciais de grandes períodos. Por isso, tornou-se mais viável a verificação e o aprofundamento no conhecimento em comportamentos caóticos.

O grande salto científico aconteceu em 1963, quando o meteorologista Edward Lorenz estudava as variáveis que afetam a atmosfera a partir de 12 equações diferenciais. Em um de seus estudos Lorenz resolveu continuar o cálculo a partir dos valores gerados pelo computador, e deixou-os com três casas decimais de algarismos significativos, ao invés de arredondá-lo como um número inteiro. Essa pequena alteração nas condições iniciais, geraram uma solução numérica diferente da calculada anteriormente, a partir desse momento ele percebeu que suas equações diferenciais apresentam um comportamento sensível às condições iniciais.

## 4.2 EQUAÇÃO DE LORENZ

Depois das descobertas de Poincaré no século XIX ocorreram estudos derivados da matemática e da física, apresentando vagamente resquícios do que seria exposto em 1963. Stewart (1991) relata que o trabalho apresentado por Lorenz (1963) derivou do estudo de Saltzman (1962) sobre o movimento de convecção gerado pela subida do ar quente, na qual consistia na formulação de equações para um tipo de convecção, esta pode ser estacionária quando o ar sobe de uma forma constante e lentamente ou não estacionária quando a atmosfera se move de maneira complexa, sendo assim o primeiro tipo seria mais fácil de prever devido a sua periodicidade.

Saltzman (1962) concluiu que o resultado apresentava flutuações não periódicas, podendo esta convecção não ser estacionária, com o ar quente subindo mais rápido. O que despertou o interesse de Lorenz (1963), este filtrou as variáveis que influenciavam na ocorrência do efeito em questão, ficando com apenas três. A partir desse filtro aplicado originou-se a famosa equação de Lorenz:

$$\frac{dx}{dt} = -10x + 10y$$

$$\frac{dy}{dt} = 28x - y - xz$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{8}{3}z + xy$$

É possível observar que  $x$ ,  $y$  e  $z$  são as três principais variáveis do sistema e devido aos seus produtos cruzados as equações diferenciais se tornam não-lineares,  $t$  é o tempo e  $\frac{d}{dt}$  taxa de variação com o tempo. Segundo Stewart (1991) as constantes 10 e  $8/3$  são os valores escolhidos inicialmente por Saltzman (1962), o número 28 não é colocado por acaso, pois é o valor que ocorre logo depois do início da convecção, quando o sistema está abaixo de 24,74 o estado é linear e estacionário.

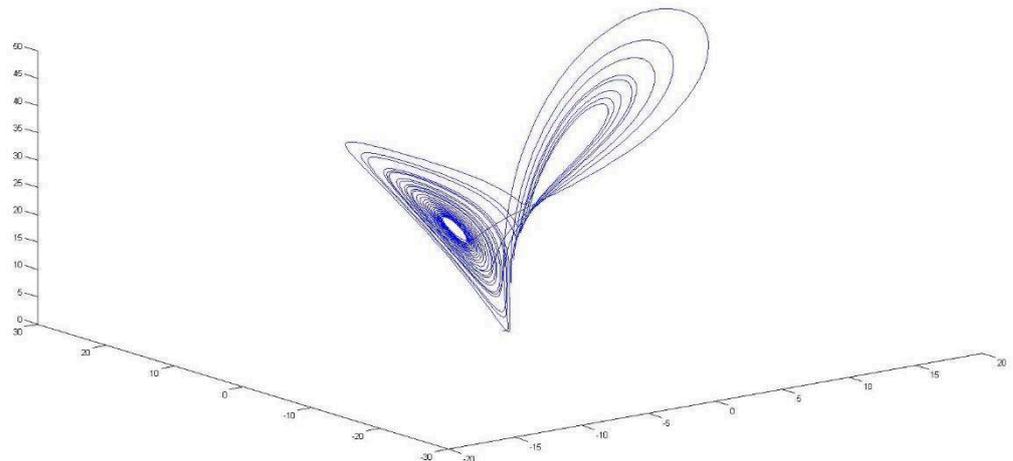


Gráfico 1 - Atrator borboleta de Lorenz.

Fonte: Elaboração própria, a partir da equação de LORENTZ, 1963.

A Figura 1 foi elaborada a partir da plotagem proposta por Lorenz (1963), na qual os eixos  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  são os valores para cada instante de tempo, o conjunto destes pontos

resultam em curvas em formato de “asas de borboleta”, devido a sensibilidade com as condições iniciais e o movimento aperiódico, o atrator borboleta de Lorenz apresenta sem dúvida um comportamento caótico. A analogia com a borboleta vem da pergunta proposta pelo autor, na qual indagava se o bater das asas de uma borboleta no Brasil geraria um tornado no Texas, ou seja, pequenas alterações no ar proveniente de um bater de asas, poderia gerar um comportamento futuro quase impossível, como um tornado.

#### 4.3 MAY E O MAPA LOGÍSTICO

Um exemplo clássico de caos foi observado em 1976, pelo biólogo Robert May quando estudava a dinâmica de crescimento populacional na natureza através de uma regra matemática conhecida como o mapa logístico, o qual está apresentado na equação abaixo, sendo que  $x_n$  corresponde ao número de indivíduos na  $n$ -ésima geração e  $r$  a taxa de crescimento da população. É bom salientar que May (1976) partiu da premissa que os animais teriam espaço para crescer, ausência de possíveis predadores e alimentos suficientes.

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

Essa equação a princípio pode parecer simples, e de fato ela é, mas a partir de um certo valor de  $r$ , é possível observar a presença de um comportamento caótico. Para isso é preciso determinar antes um ponto inicial,  $x_0$ , um valor de  $r$  fixo e realizar iterações com  $N$  períodos. As Figuras 2 e 3 apresentam a iteração da equação do mapa logístico variando apenas o  $r$ , na primeira utilizou o valor de 2.5 e na segunda 3.7, mantendo os demais parâmetros constantes.

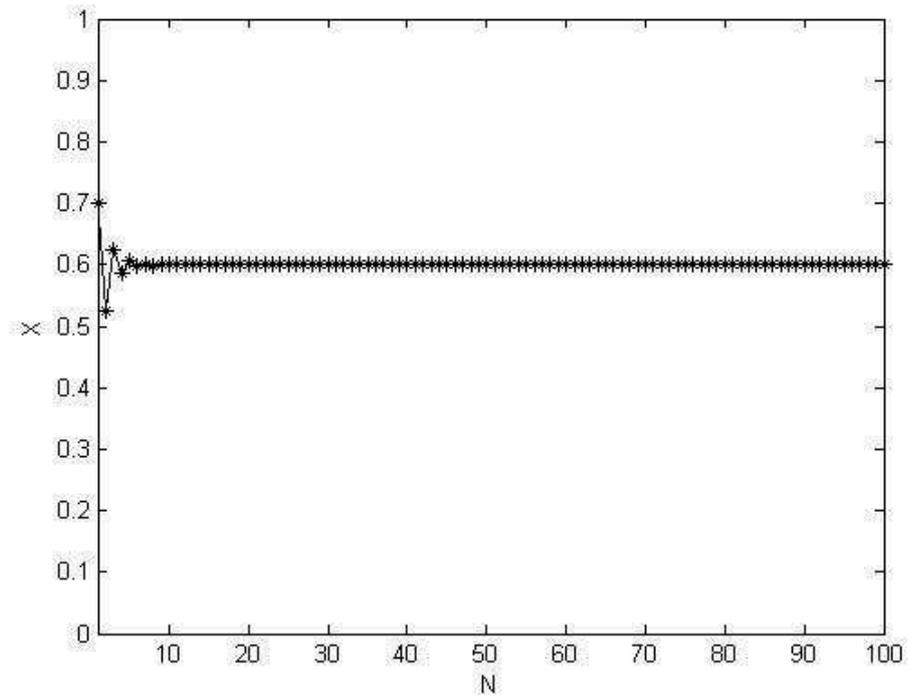


Gráfico 2 - Gráfico das iterações do mapa logístico, com  $x_0 = 0.7$ ;  $r = 2.5$  e  $n = 100$ .  
Fonte: Elaboração própria.

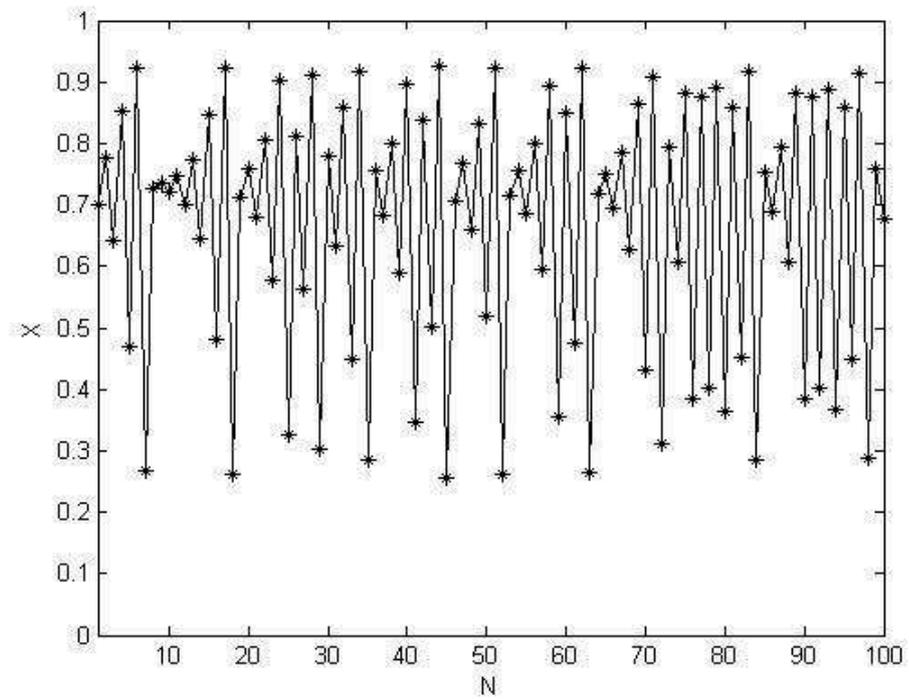


Gráfico 3 - Gráfico das iterações do mapa logístico, com  $x_0 = 0.7$ ;  $r = 3.7$  e  $n = 100$ .  
Fonte: Elaboração própria.

No Gráfico 2 ocorre uma pequena alteração inicial e posteriormente o sistema se estabiliza em um único ponto, já quando analisamos o Gráfico 3 nos deparamos com um comportamento caótico devido a alteração do parâmetro  $r$ .

Para compreender melhor a série temporal gerada pelo mapa logístico podemos construir um mapa de retorno, comumente chamado de *cobweb*, para isso é necessário a construção de uma diagrama de retorno com todos os valores obtidos na série, esse gráfico teria coordenadas  $x_n$  para o eixo das abcissas e  $x_{n+1}$  para o eixo da ordenadas, após isso é obtido uma parábola com concavidade para baixo e o vértice desta parábola possui correlação direta com  $r$ .

Segundo Dellajustina (2012), para a realização da construção do mapa *cobweb* é escolhido um valor qualquer de  $x_0$  compreendido entre 0 e 1, após isso é traçado uma reta perpendicular ao eixo  $x_n$  cruzando a parábola, o ponto de encontro obtido é correspondente a um valor de  $x_1$  no eixo  $x_{n+1}$ , posteriormente é passado uma reta horizontal por cima do ponto obtido, sendo preciso que o encontro da reta auxiliar seja em  $y = x$ , devido a sua simetria é possível encontrar o mesmo valor de  $x_1$  no eixo  $x_n$ . Realizando as iterações é obtido os Gráficos 4 e 5:

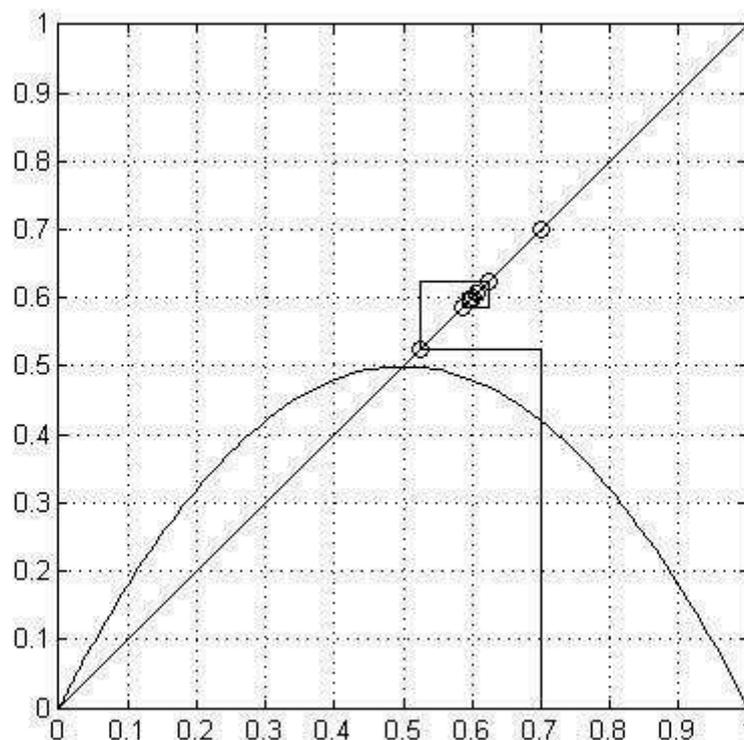


Gráfico 4 - Gráfico cobweb para  $x_0 = 0.7; r = 2.5$  e  $n = 100$ .  
Fonte: Elaboração própria, baseado em DELLAJUSTINA, 2012.

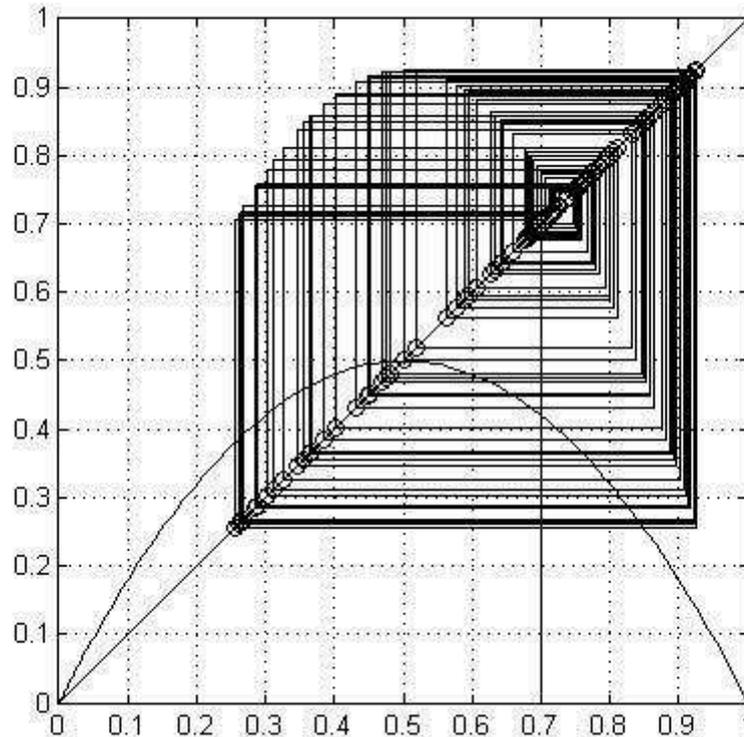


Gráfico 5 - Gráfico cobweb para  $x_0 = 0.7; r = 3.7$  e  $n = 100$ .  
 Fonte: Elaboração própria, baseado em DELLAJUSTINA, 2012

Nos Gráficos 4 e 5 é possível observar com mais clareza o comportamento caótico, quando em um gráfico tipo *cobweb* do mapa logístico é alterado somente o parâmetro  $r$ , de 2.5 para 3.7.

#### 4.4 ENCONTRANDO EVIDÊNCIAS DE CAOS

A realização de uma previsão precisa em economia é difícil de ser obtida, devido ao fato do objeto analisado sofrer grande influência de variáveis endógenas e exógenas, tornando a estimação de parâmetros complexa e impossibilitando estimar o comportamento de todas as

variáveis, mesmo assim uma previsão fidedigna pode ser obtida, utilizando uma margem de erro para englobar as variáveis não estimadas.

A taxa de câmbio por se tratar de um ativo financeiro, portanto dentro do universo da economia, não é diferente e também é impossível a realização de uma previsão precisa, conforme alega Chiaravalloti (2006) a teoria do caos e a da não-linearidade são meios utilizados nos modelos para diminuir a imprecisão, e quando possuem um grande grau de não-linearidade resultam em comportamentos dinâmicos e também em determinados casos caóticos.

Clyde e Osler (1997) estabelecem que os métodos utilizados na previsão de séries não-lineares não necessitam de observação ou mesmo de identificação das variáveis de estado do sistema, pois estão baseados em dois passos: Primeiro a reconstrução do espaço de fase, e segundo a realização de previsões através do espaço de fase. Cada uma dessas etapas pode ser aplicada através de uma variedade de técnicas.

A plotagem do espaço de fase é uma alternativa viável para representar os dados na maioria das séries temporais, pois essa técnica possibilita fornecer dados importantes para a análise futura de um sistema, conforme é observado em Gleick (1987), o estudo pode ser realizado a partir de três formas: um em função do espaço-tempo, em velocidade versus espaço-tempo ou na posição velocidade-espaço, o terceiro é conhecido como retrato de espaço de fase ou plotagem.

Quando é realizada a plotagem dos espaços de fase tanto em sistemas lineares quanto nos não-lineares, é possível observar os caminhos das trajetórias plotadas se repetindo com certo grau de periodicidade, possibilitando, assim, traçar formas simples, conhecidas como atratores. Gleick (1987) utiliza como exemplo de um atrator simples, o caminho percorrido por um pêndulo de um relógio, no qual possibilita a previsão da trajetória futura desse sistema. Além dos atratores simples, a plotagem do espaço de fases pode gerar atratores estranhos, munidos de padrões complexos, estes são encontrados e observados em sistemas caóticos.

Segundo Clyde e Osler (1997) os principais métodos utilizados para a reconstrução do espaço de fase são:

- atraso das coordenadas, desenvolvido por Takens (1981);
- coordenadas derivadas, desenvolvido por Packard (1980);
- decomposição do principal valor, desenvolvido por Broomhead e King (1987).

O principal método e mais simples de ser utilizado é o proposto por Takens (1981), Clyde e Osler (1997) relatam essa técnica como sendo o alicerce dos estudos mais recentes na

área, popularmente conhecida no mercado financeiro como análise técnica, ou seja, uma maneira alternativa de realizar uma análise não-linear.

Baseado no fato de que o espaço de fase real de um sistema dinâmico com variáveis de estado  $n$  podem geralmente ser reconstruído traçando uma variável observável associada ao sistema contra pelo menos  $2n$  de seus próprios valores defasados. Portanto a dimensão resultante deve ter no mínimo  $2n$ . A importância da definição da defasagem de tempo ( $\tau$ ) é apresentado por Clyde e Osler (1997) na citação abaixo:

Se tau for muito pequeno em cada coordenada, as trajetórias do espaço reconstituídas serão comprimidas ao longo da linha de identidade, o fenômeno é conhecido como redundância. Se a tau é muito grande, na presença de caos e ruído, a dinâmica de uma só vez tornar-se efetivamente uma relação causal, desconectando da dinâmica em um momento posterior (CLYDE; OSLER, 1997 apud CASDAGLI, 1990, p-58, tradução nossa).

Demos (2014) baseado nos estudos de Mantegna e Stanley (2000) coloca como o passo inicial dos pesquisadores financeiros em sistemas não-lineares a mensuração a dimensão (d) proposta no teorema de Takens (1981), para ter uma melhor estimativa, esta deve ser maior que 6, caso tenha valores abaixo de 3 pode ser encontrada uma dificuldade em diferenciar um processo caótico de um estocástico.

Para determinar a defasagem de tempo ( $\tau$ ) será aplicado na análise das taxas de câmbio escolhidas, o conceito de informação mútua a média, que foi introduzido por Shannon (1948), o qual consiste em adotar duas medidas entre  $a_i$  e  $b_j$  sorteadas de conjuntos de possíveis medidas A e B, ou seja, refere-se à quantidade de informação que pode ser aprendida a partir de  $a_i$  sobre a medida de  $b_j$  (ERBANO, 2004, p-27).

$$I_{AB} = \sum_{a_i, b_j} P_{AB}(a_i, b_j) \log_2 \left[ \frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_j)P_B(b_j)} \right]$$

A partir da equação acima pode-se calcular a informação mútua a média, onde  $P_{AB}$  é a densidade da probabilidade conjunta para A e B.  $P_A$  e  $P_B$  é a densidade da probabilidade unitária da medida A e B, respectivamente. Segundo Erbano (2004) essa função  $I_{AB}$  pode ser utilizada com uma função de auto correlação não linear, com isso é possível determinar quando os valores de  $a_i$  e  $b_j$  são suficientemente interdependente entre si para ser utilizado como vetor

defasado do tempo, mas não tão independente a ponto de não terem qualquer relação. O primeiro mínimo dessa função será utilizado como a defasagem de tempo ( $\tau$ ).

Enquanto para a determinação da dimensão ( $d$ ) será utilizado o método dos falsos vizinhos. Para cada ponto no espaço de fase reconstruído com uma dimensão de imersão  $d$  procura-se o vizinho mais próximo, aumentando  $d$  para  $d + 1$  e recalcula-se a distância entre os dois. Fazendo isso, os falsos vizinhos podem ser separados, continua-se o processo até a separação chegar a um valor crítico.

A dimensão de imersão ótima é aquela para a qual o número de falsos vizinhos tende a zero. Erban (2004) apresentou este método como simples e rápido, demonstrando vantagem na presença de dados de alta dimensão, como pode ser observado na citação abaixo:

Ao analisarmos os mesmos dados em uma dimensão inferior  $d < d_0$  estamos efetivamente eliminando eixos do sistema de coordenadas do espaço onde a dinâmica se desenvolve, um processo denominado projeção. Dessa forma, os pontos cujas coordenadas são completamente diferentes, mas que foram eliminadas pela projeção, podem se tornar falsos vizinhos no espaço  $d$  dimensional. (ERBANO, 2004, p-33)

O algoritmo necessário para a realização do método de informação mútua a média e dos falsos vizinhos globais no *software* Matlab podem ser encontrados, respectivamente em:

- [http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/37239-minimum-embedding-dimension/content/fnn\\_deneme.m](http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/37239-minimum-embedding-dimension/content/fnn_deneme.m)
- <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/880-mutual-average-information>

#### 4.5 O EXPOENTE DE LYAPUNOV

Segundo Rodríguez et al. (2005) um indicador utilizado para evidenciar a presença de caos em um sistema é o expoente máximo de Lyapunov. Ele é computado como a taxa média de convergência ou divergência exponencial de trajetórias que estão próximas umas das outras em uma fase do espaço e fornece informações sobre a instabilidade intrínseca das trajetórias do sistema.

Pela sua importância, uma série de estudos relacionados a este expoente foram realizadas, como nos trabalhos de Bajo-Rubio et al. (1992), Dechert e Gençay (1992), Gençay

(1996), Bask e Gençay (1998) e Rodríguez et al. (2005). Dentre eles se destaca o último, que propôs um novo método para a presença de caos baseado no comportamento dos expoentes de Lyapunov.

Rodríguez et al. (2005) justificam seu estudo no fato que diferentemente de um processo caótico onde o maior expoente Lyapunov é mais ou menos estável em relação ao tamanho da amostra, ou seja, demonstra um comportamento estacionário durante a ocorrência desse aumento, o maior expoente de um processo estocástico não se apresenta desta forma. Assim, os testes de Rodríguez et al. (2005) foram realizados estimando a distribuição empírica do maior expoente de Lyapunov, utilizando diferentes tamanhos de amostra e comparando suas médias. Com base nos resultados, Rodríguez et al. (2005) mencionam que o novo método proposto é bastante eficiente quando comparado a processos estocásticos (tanto linear quanto não-linear) sendo que para tamanhos de amostras grandes a potência do teste é um, enquanto que, para tamanhos de amostras pequenas ele diminui ocasionalmente.

Em contrapartida Resende e Zeidan (2008) apresentam em seu estudo a diferença entre o uso de testes em taxas de câmbio e nas expectativas de taxas de câmbio, pois muitos modelos apresentados resultam em comportamento caótico apenas no primeiro, e não nas expectativas. Para comprovar sua tese é citado como exemplos alguns estudos, como o de Barr e Campbell (1997) que exhibe um modelo de inflação onde é demonstrado quando as expectativas são adaptáveis, este pode apresentar um comportamento caótico para uma faixa de plausível de valores nos parâmetros, mas quando é utilizado expectativas racionais o comportamento caótico não é possível ser observado.

Em Kyrtsov et al. (2004) o movimento dos preços futuros das taxas de câmbio apresenta comportamento não-linear, e é indicado pelo autor a presença de determinismo caótico, enquanto De Grauwe e Dewachter (1993) e De Grauwe et al. (1995) desenvolvem um modelo capaz de gerar comportamento caótico nas taxas de câmbio, através da interação entre grafistas e fundamentalistas. Da Silva (2001) generaliza os resultados obtidos, e ainda propõe soluções com valores de parâmetros razoáveis para uma dinâmica caótica.

A partir do estudo de Rodríguez et al. (2005) foi possível inferir um comportamento caótico na dinâmica dos preços através da técnica de cálculo do máximo expoente de Lyapunov proposto por Rosenstein et al. (1993) junto com o novo método de *moving block bootstrap*.

Demos (2014) analisou dados dos *mini flash crashes* (quedas rápidas e repentinas) ocorridos em algumas ações do índice Dow Jones em 2010. Foi utilizado alguns tipos de estimadores estocásticos e considerou-se em uma de suas hipóteses a possibilidade da

ocorrência de um comportamento caótico determinando o movimento brusco no preço das ações, para a determinação da incidência de caos nessas séries. O autor adotou a mesma técnica de cálculo do expoente máximo de Lyapunov de Rodríguez et al. (2005), para validar sua hipótese utilizou-se 15 séries temporais de ações e 5 séries simuladas de modelos caóticos conhecidos.

Neste trabalho optou-se para determinar a presença de uma dinâmica caótica nas séries estudadas, pelo cálculo dos expoentes máximo de Lyapunov conforme inicialmente proposto por Rosenstein et al. (1993), a partir do algoritmo para o *software* Matlab encontrado no endereço abaixo:

- <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/38424-largest-lyapunov-exponent-with-rosenstein-s-algorithm>

## 5 METODOLOGIA

A metodologia é fundamental para ordenar as técnicas desenvolvidas por outros pesquisadores, e escolher as que melhor se encaixam no trabalho proposto. Lakatos e Marconi (1991) estabelecem a metodologia como um conjunto de atividades sistemáticas e racionais na qual possibilita o alcance de um determinado objetivo através de conhecimentos válidos e verdadeiros, é traçado um caminho a ser seguido, auxiliando o pesquisador e detectando possíveis erros que possam ocorrer durante a trajetória do estudo.

A metodologia é a lógica dos procedimentos científicos em sua gênese e em seu desenvolvimento, não se reduz portanto a uma metrologia ou tecnologia da medida dos fatos científicos. Para ser fiel a suas promessas, uma metodologia deve abordar as ciências sob o ângulo do produto delas - como resultado em forma de conhecimento científico - mas também como processo - como gênese desse próprio conhecimento. (Bruyne et al, 1977, p.29).

Como relatou Bruyne et al. (1977), a metodologia deve ter objetivo de apresentar os estudos a partir dos resultados obtidos utilizando determinada técnica científica, complementando esse pensamento, Gil (2002) coloca como fundamental na construção de uma hipótese, a observações dos problemas já estudados e a verificação se a hipótese proposta poderá utilizar as técnicas empreendidas em estudos anteriores.

Quando é observado os métodos mais empregados em economia e finanças, contidos em Wooldridge (2000) é possível inferir que os principais elementos da análise empírica de um determinado problema ocorrem a partir da especificação das equações que regem as variações no sistema estudado, posteriormente estima os parâmetros empregados nas equações através de uma regressão e em seguida são realizados testes para validar os resultados obtidos.

Para o desenvolvimento deste trabalho utilizou-se as séries históricas de taxa de câmbio provenientes da base de dados do Federal Reserve contida em: <http://www.federalreserve.gov/releases/h10/hist/>. Os dados serviram de entrada no *software* Matlab, utilizando a cotação de 4 moedas em relação ao dólar americano. Posteriormente foi calculado os retornos diários por meio da diferença do logaritmo do valor de fechamento diário das taxas de câmbio. Em cima desses resultados utilizou-se o método de informação mútua a média e o dos falsos vizinhos globais para estimar respectivamente a defasagem ( $\tau$ ) e a dimensão ( $d$ ). Com esses valores calculados tornou-se possível o cálculo dos expoentes máximo de Lyapunov através do método

proposto por Rosenstein et al. (1993). Os parâmetros  $\tau$ ,  $d$  e os expoentes máximo de Lyapunov foram calculados através de algoritmos no *software* Matlab apresentados anteriormente.

## 6 RESULTADOS

### 6.1 DADOS

Para a realização do estudo empírico do mercado de câmbio utilizou-se, conforme relatado na metodologia, 4 séries de taxas de câmbio diárias, sendo elas o euro, libra, yuan e real, todos em relação ao dólar americano no período compreendido entre 03/01/2000 até 30/09/2014, a partir da base de dados do Federal Reserve, conforme é possível observar detalhadamente na Tabela 1 abaixo:

Tabela 1 - Séries históricas das taxas de câmbio.

Série Cambial	Inicial	Final	Observações
Euro-Dólar	03/01/2000	30/09/2014	3.709
Libra-Dólar	03/01/2000	30/09/2014	3.708
Dólar-Yuan	03/01/2000	30/09/2014	3.705
Dólar-Real	03/01/2000	30/09/2014	3.709

Fonte: Elaboração própria, através da base de dados do Federal Reserve.

A partir dessas séries, foram plotados os gráficos dos preços em relação as observações e calculados os retornos diários pelo logaritmo dos valores do fechamento das taxas de câmbio a partir da fórmula:

$$r_t = \log\left(\frac{p_{t+1}}{p_t}\right)$$

Lembrando que o número de observações finais será n-1, por causa do cálculo dos retornos diários.

Nas próximas seções serão apresentados os gráficos plotados dos preços e dos retornos diários, os valores calculados para a defasagem  $\tau$ , a dimensão  $d$  obtida graficamente através do método de informação mútua a média e dos falsos vizinhos globais, respectivamente, e também o máximo expoente de Lyapunov pelo método inicialmente proposto por Rosenstein et al. (1993), caso observada a ocorrência desses expoentes positivos podemos confirmar a hipótese de comportamento caótico nas séries estudadas.

## 6.2 EURO

Ao analisar o Gráfico 6 de preços da taxa de câmbio euro/dólar é possível observar no início da série a valorização da moeda devido a consolidação da União Europeia até meados de 2008. Após, a crise mundial provoca uma desvalorização na moeda, gerando grandes oscilações nos períodos subsequentes conforme demonstra no Gráfico 7 dos retornos. A partir da análise empírica através do método de informação mútua a média, foi obtido  $\tau = 2.1749$ , sendo arredondado para  $\tau = 2$ . Como observa-se no Gráfico 8, a dimensão utilizada com a menor porcentagem de falsos vizinhos é  $d = 5$ , com esses parâmetros calculou-se o expoente máximo de Lyapunov no Gráfico 9, o qual não apresentou expoentes positivos e por isso não foi possível detectar a presença de caos na série.

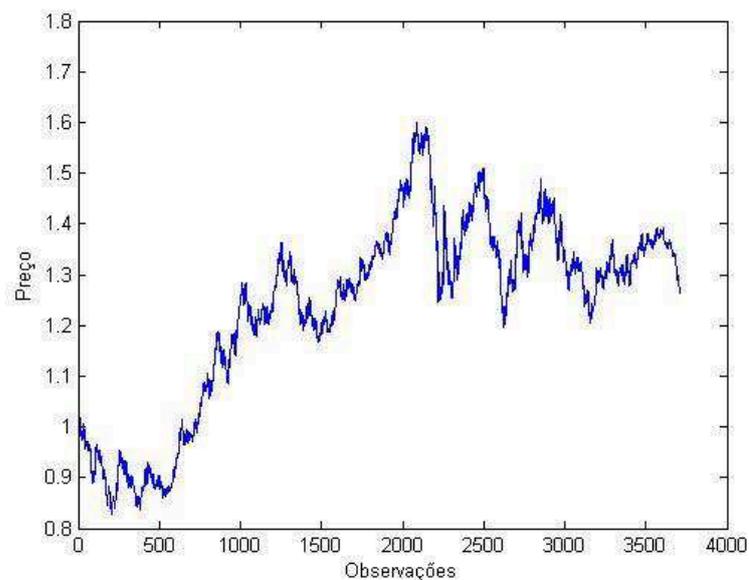


Gráfico 6 - Gráfico da taxa de câmbio diária euro/dólar durante o período de 03/01/2000 até 30/09/2014.  
Fonte: Elaboração própria, através da base de dados do Federal Reserve.

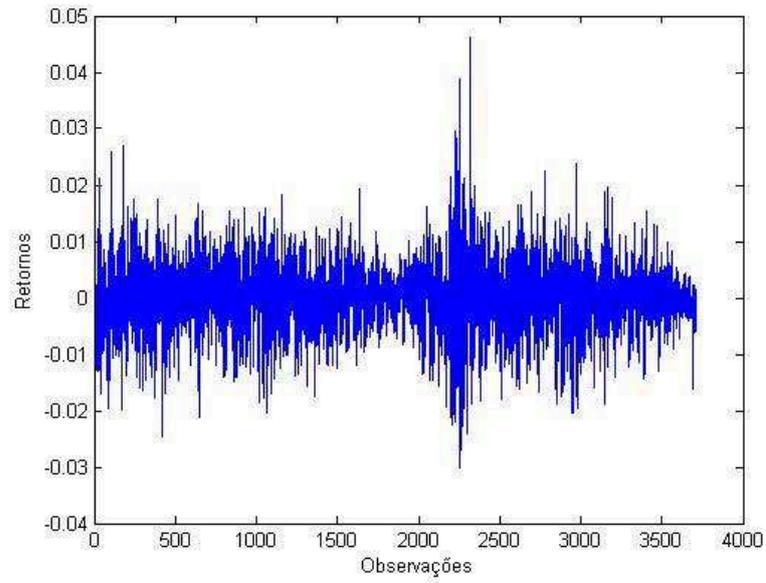


Gráfico 7 - Gráfico dos retornos diários gerados da taxa de câmbio euro/dólar durante o período de 03/01/2000 até 30/09/2014.

Fonte: Elaboração própria.

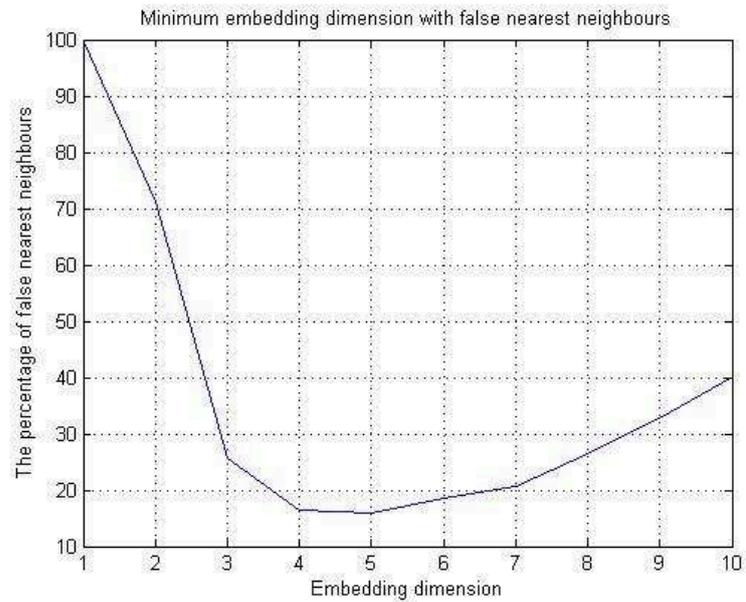


Gráfico 8 - Gráfico gerado pelo método dos falsos vizinhos na série euro/dólar.

Fonte: Elaboração própria.

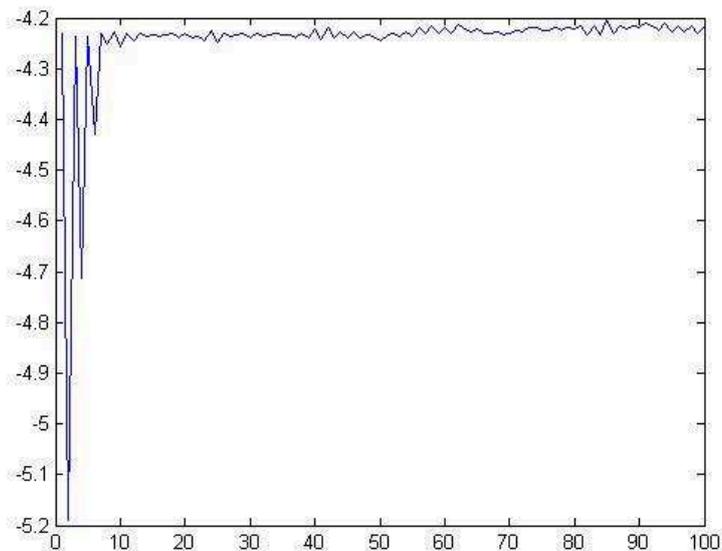


Gráfico 9 - Gráfico do maior expoente de Lyapunov na série euro/dólar.  
Fonte: Elaboração própria.

### 6.3 LIBRA

A partir da análise do Gráfico 10, é possível ver claramente a desvalorização dos preços da libra em relação ao dólar após a crise de 2008, com um comportamento parecido ao do euro/dólar, mas apresentando uma intensidade maior, como apresentada no Gráfico 11 dos retornos, essa similaridade acontece pois o Reino Unido, que tem a libra como moeda principal pertencer ao bloco da União Europeia, porém não adotou o euro. Na análise empírica para determinar a defasagem através do método de informação mútua a média obteve-se  $\tau = 1.7798$ , sendo arredonda para  $\tau = 2$ . No Gráfico 12 observa-se a dimensão com a menor porcentagem de falsos vizinhos é  $d = 4$ , com esses parâmetros calculou-se o expoente máximo de Lyapunov no Gráfico 13, o qual não apresentou expoentes positivos e por isso não foi possível detectar a presença de caos na série.

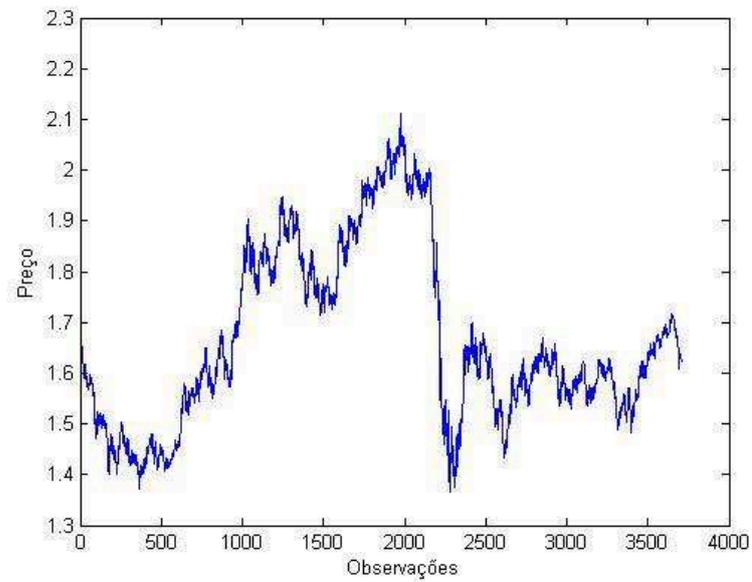


Gráfico 10 - Gráfico da taxa de câmbio diária libra/dólar durante o período de 03/01/2000 até 30/09/2014.  
Fonte: Elaboração própria, através da base de dados do Federal Reserve.

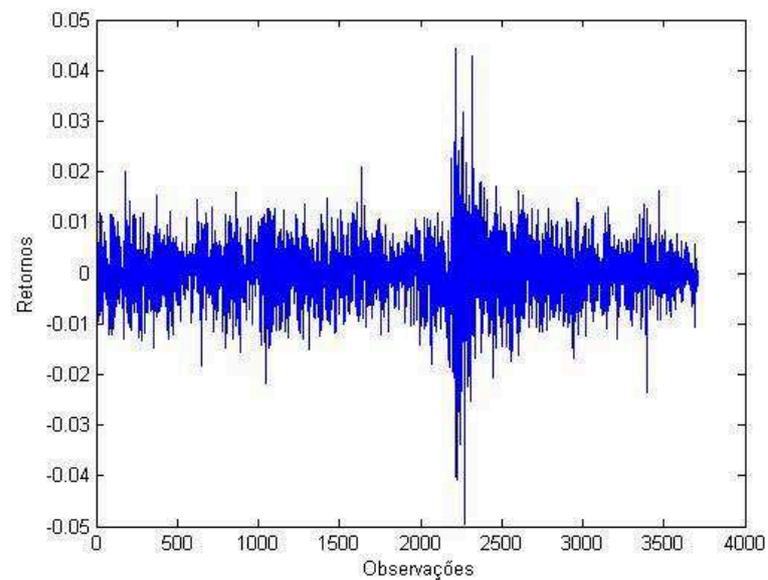


Gráfico 11 - Gráfico dos retornos diários gerados da taxa de câmbio libra/dólar durante o período de 03/01/2000 até 30/09/2014.  
Fonte: Elaboração própria.

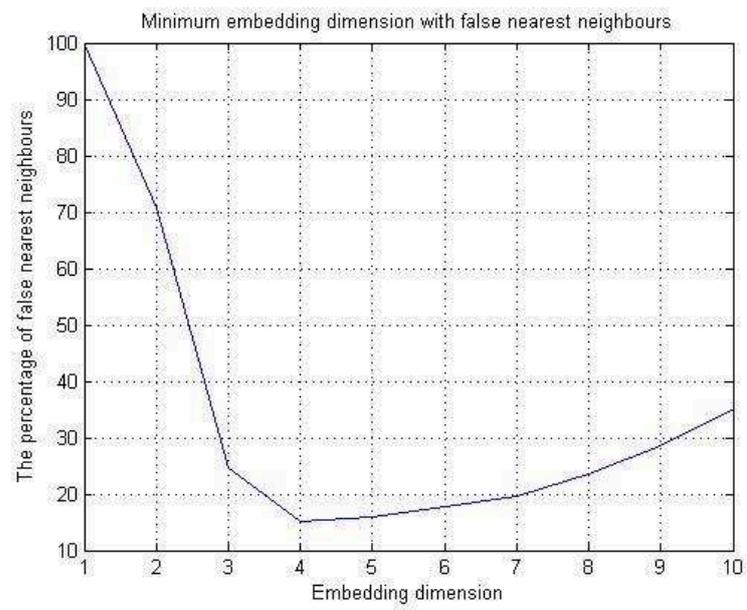


Gráfico 12 - Gráfico gerado pelo método dos falsos vizinhos na série libra/dólar.  
Fonte: Elaboração própria.

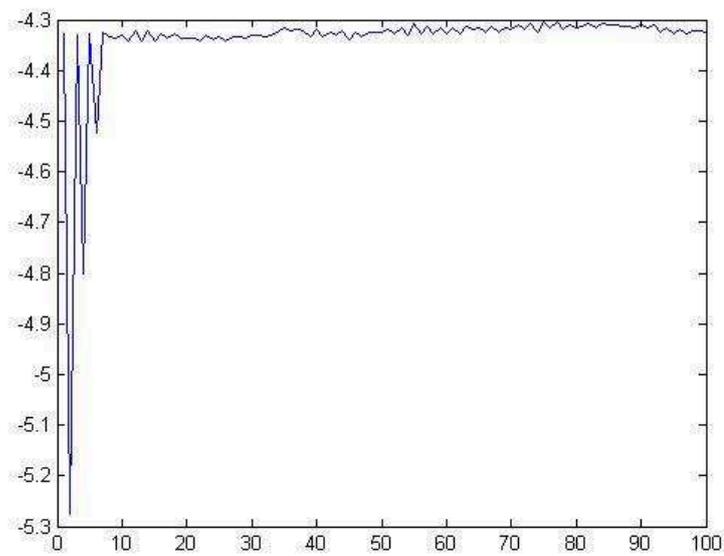


Gráfico 13 - Gráfico do maior expoente de Lyapunov na série libra/dólar.  
Fonte: Elaboração própria.

## 6.4 YUAN

Os Gráficos 14 e 15, apresentam respectivamente, os preços da taxa de câmbio dólar/yuan e dos retornos diários. Nessa série histórica observa-se uma singularidade ao comparar com as demais moedas analisadas, isso ocorre devido ao fato do Banco do Povo da China (PBOC), o banco central do país, controlar o câmbio fixando na primeira metade da série e depois utilizou de um sistema de bandas de flutuação. Matsushita et al. (2007) encontraram ao estudar durante o período de controle mais rígido da taxa, ou seja, no início da série analisada nesse trabalho, o Triângulo de Sierpinski. Essa é uma conhecida figura fractal elementar, que indica a presença do jogo do caos, devido a ação direta do PBOC para fixar o câmbio, mas após uma liberação maior da flutuação do câmbio por parte do governo, esta figura não foi mais encontrada.

Através do método de informação mútua a média foi determinada a defasagem, obtendo-se  $\tau = 0.7215$ , este foi arredondado para  $\tau = 1$ . No Gráfico 16 observa-se que com a dimensão utilizada, a menor porcentagem de falsos vizinhos é  $d = 6$ . Com esses parâmetros calculou-se os expoentes máximo de Lyapunov no Gráfico 17, o qual não apresentou expoentes positivos e, por isso, não foi possível detectar a presença de caos na série.

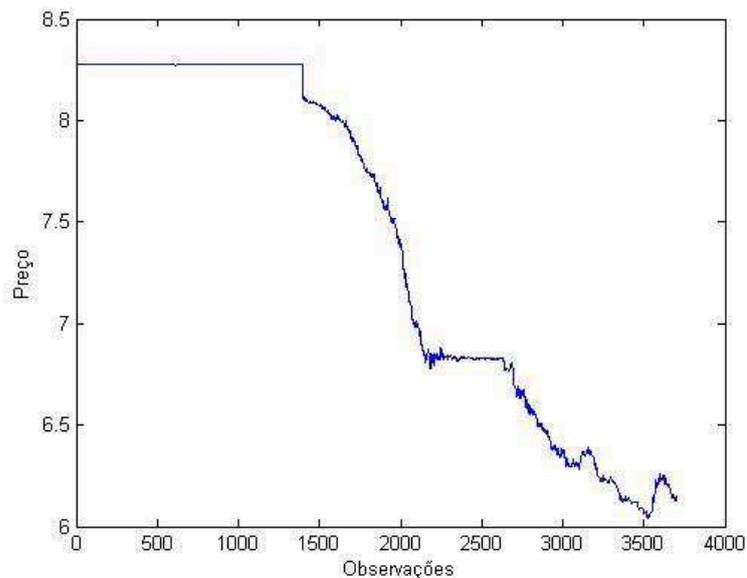


Gráfico 14 - Gráfico da taxa de câmbio diária dólar/yuan durante o período de 03/01/2000 até 30/09/2014. Fonte: Elaboração própria, através da base de dados do Federal Reserve.

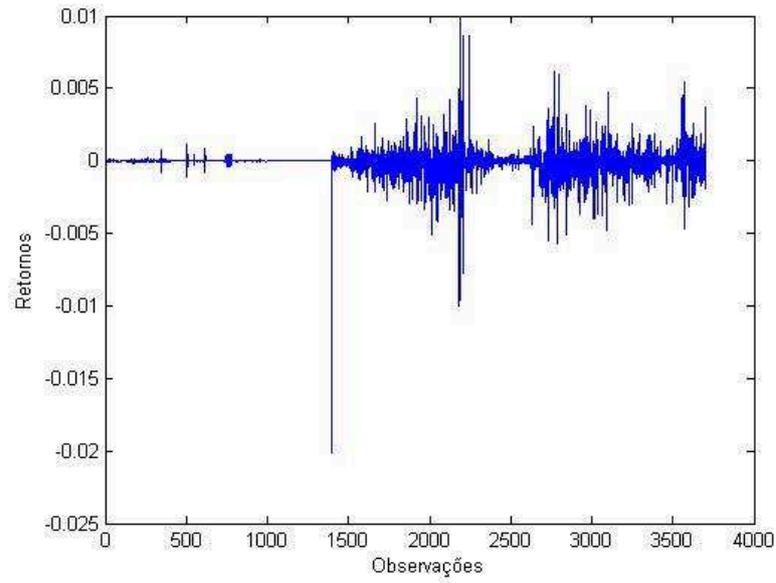


Gráfico 15 - Gráfico dos retornos diários gerados da taxa de câmbio dólar/yuan durante o período de 03/01/2000 até 30/09/2014  
Fonte: Elaboração própria.

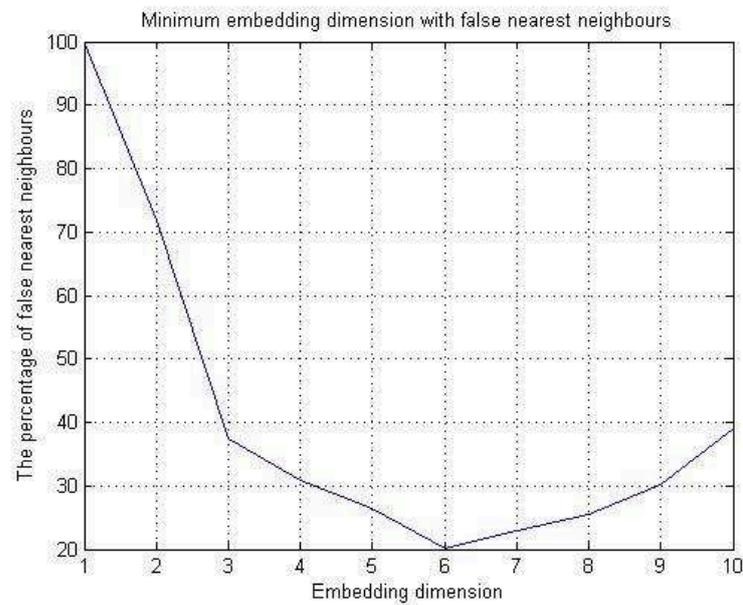


Gráfico 16 - Gráfico gerado pelo método dos falsos vizinhos na série dólar/yuan.  
Fonte: Elaboração própria.

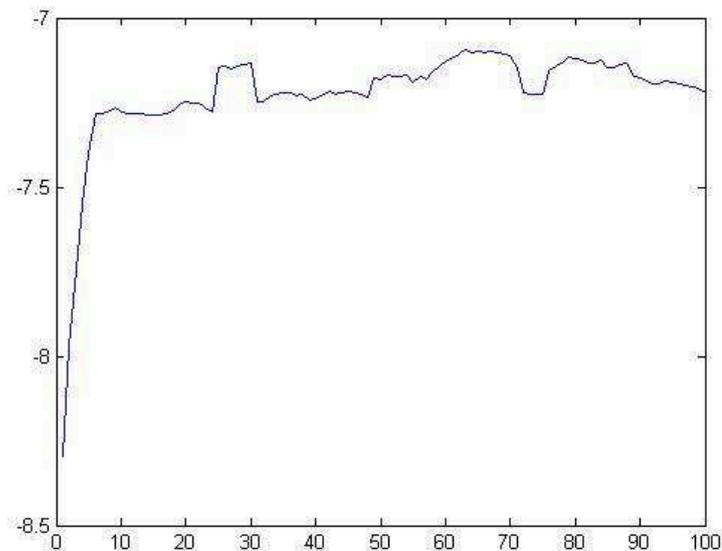


Gráfico 17 - Gráfico do maior expoente de Lyapunov na série dólar/yuan.  
Fonte: Elaboração própria.

## 6.5 REAL

O Gráfico 18 apresenta os preços da taxa de câmbio dólar/real, nele é possível observar no início da série uma alta repentina, a qual foi causada pela incerteza política nas eleições de 2002 no Brasil. Outro período de grande instabilidade na taxa de câmbio foi após a crise de 2008, como pode-se observar no Gráfico 19. Das moedas analisadas o real demonstrou a maior periodicidade de amplitude na oscilação dos retornos diários.

A determinação da defasagem na série ocorreu através do método de informação mútua a média, na qual obteve-se  $\tau = 1.5949$ , sendo arredondado para  $\tau = 2$ . No Gráfico 20 observa-se, com a dimensão utilizada, a menor porcentagem de falsos vizinhos é  $d = 5$ . Com esses parâmetros calculou-se os expoentes máximo de Lyapunov. No Gráfico 21, não foi observado expoentes positivos e, por isso, não foi possível detectar a presença de caos na série.

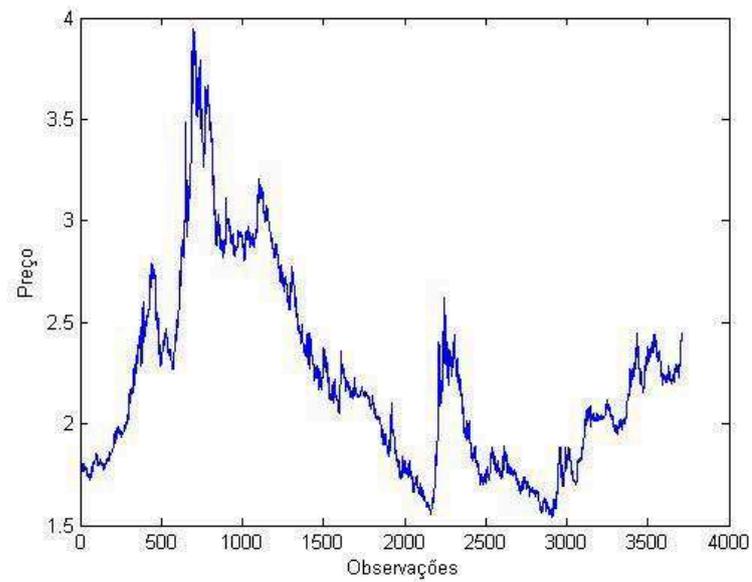


Gráfico 18 - Gráfico da taxa de câmbio diária dólar/real durante o período de 03/01/2000 até 30/09/2014.  
Fonte: Elaboração própria, através da base de dados do Federal Reserve.

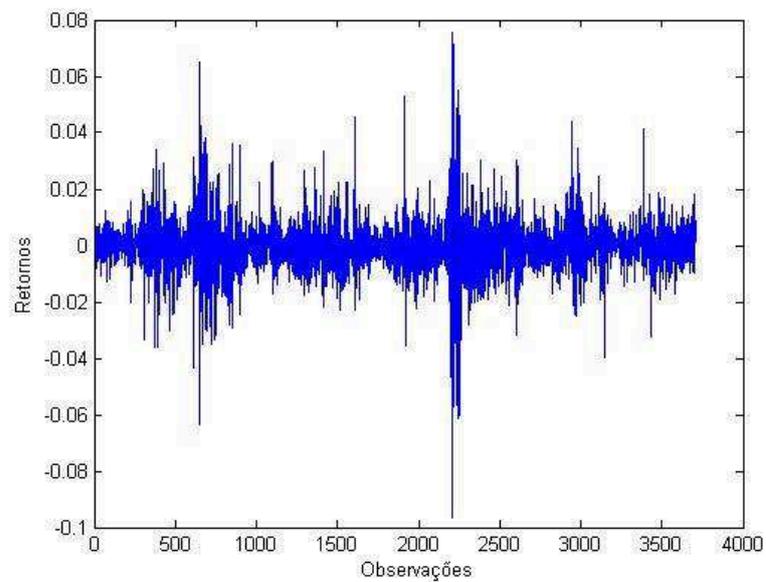


Gráfico 19 - Gráfico dos retornos diários gerados da taxa de câmbio dólar/real durante o período de 03/01/2000 até 30/09/2014.  
Fonte: Elaboração própria.

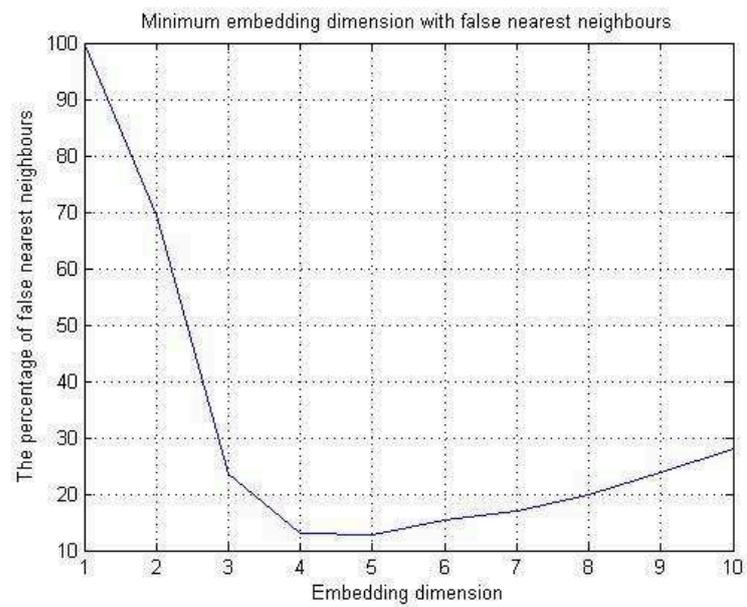


Gráfico 20 - Gráfico gerado pelo método dos falsos vizinhos na série dólar/real.  
 Fonte: Elaboração própria.

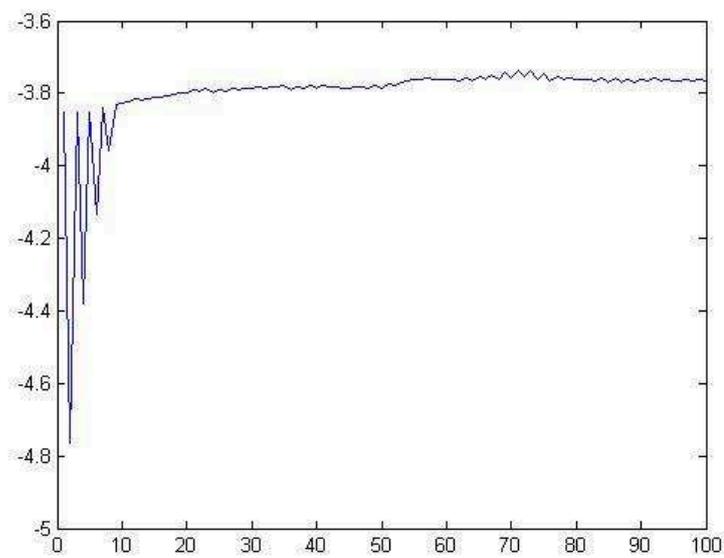


Gráfico 21 - Gráfico do maior expoente de Lyapunov na série dólar/real.  
 Fonte: Elaboração própria.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho cumpriu o objetivo de apresentar os principais modelos caóticos clássicos. Assim como as equações de Lorenz e o mapa logístico de May, o qual neste último foi possível demonstrar com clareza a dinâmica caótica através da construção de um gráfico *cobweb* e observar a mudança provocada no sistema quando um dos parâmetros iniciais é alterado.

Quanto à hipótese da presença de uma dinâmica caótica nas taxas de câmbio, foi utilizado o método do expoente máximo de Lyapunov através do algoritmo proposto inicialmente por Rosenstein et al. (1993), não foi possível inferir a presença de caos nas séries históricas das taxas de câmbio euro/dólar, libra/dólar/, dólar/yuan e dólar/real, mesmo aumentando as defasagens  $\tau$  e a dimensão  $d$ .

Uma plausível explicação para não ter sido detectada a presença de comportamento caótico neste trabalho, deve-se ao pequeno tamanho da amostra para análises desta magnitude, como explicado no novo método proposto por Rodríguez et al. (2005). Abrindo precedente para análises futuras aplicando esse método. Chamou-se a atenção os períodos relativos a crise de 2008, devido à grande turbulência apresentada e intervenção dos governos na economia. Seria de grande interesse a realização de estudos nessa área.

Demos (2014) utilizou a técnica proposta por Rodríguez et al. (2005) em dados de ações, sem obter êxito ao tentar validar a hipótese de presença caótica nessas séries financeiras, mas através da análise da entropia de Shannon abriu-se a possibilidade destas apresentarem comportamentos log-periódicos.

No geral, pode-se colocar que as taxas de câmbio apresentam um movimento parecido nas séries da libra/dólar e do euro/dólar, pois os países que adotam essas moedas como padrão tem sua economia atrelada a um grau elevado de desenvolvimento, e por isso, apresentam oscilações menores das observadas nas séries de dólar/ yuan e dólar/real.

## REFERÊNCIAS

ADRANGI, B. et al. Chaos in oil prices? Evidence from futures markets. **Energy Economics**, v. 23, n. 4, p. 405–425, jul. 2001.

BAJO-RUBIO, Oscar; FERNANDEZ-RODRIGUEZ, Fernando; SOSVILLA-RIVERO, Simon. Chaotic behaviour in exchange-rate series: First results for the Peseta—US dollar case. **Economics Letters**, v. 39, n. 2, p. 207-211, 1992.

BASK, Mikael; GENÇAY, Ramazan. Testing chaotic dynamics via Lyapunov exponents. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 114, n. 1, p. 1-2, 1998.

BARR, David G.; CAMPBELL, John Y. Inflation, real interest rates, and the bond market: A study of UK nominal and index-linked government bond prices. **Journal of Monetary Economics**, v. 39, n. 3, p. 361-383, 1997

BROCK, William A. Causality, Chaos, Explanation and Prediction in Economics and Finance. In: CASTI, J; A KARLQVIST, (Ed.). **Beyond Belief: Randomness, Prediction, and Explanation in Science**. Boca Raton: Crc Press, 1991. Cap. 10. p. 230-279.

BROCK, William A.; HSIEH, David Arthur; LEBARON, Blake Dean. **Nonlinear dynamics, chaos, and instability: statistical theory and economic evidence**. MIT press, 1991.

BROOKS, Christopher. Chaos in foreign exchange markets: a sceptical view. **Computational economics**, v. 11, n. 3, p. 265-281, 1998.

BROOKS, Christopher. Testing for non-linearity in daily sterling exchange rates. **Applied Financial Economics**, v. 6, n. 4, p. 307-317, 1996.

BROOMHEAD, D. S.; KING, Gregory P. Extracting qualitative dynamics from experimental data. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 20, n. 2, p. 217-236, 1986.

BRUYNE, Paul et al. **Dinâmica da pesquisa em ciências sociais: os polos da prática metodológica**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1977.

CARAIANI, P. Testing for nonlinearity and chaos in economic time series with noise titration. **Economics Letters**, v. 120, n. 2, p. 192–194, ago. 2013.

CHIARAVALLOTI, André de Moraes. **Análise Fractal da Moeda Chinesa, o yuan, contra o dólar americano**. 2006. Disponível em: <<http://tcc.bu.ufsc.br/Economia294018>>. Acesso em: 25 set. 2014.

COELHO, Leandro dos Santos; SANTOS, André Alves Portela; COSTA JR, Newton Carneiro Affonso da. Podemos prever a taxa de cambio brasileira? Evidência empírica utilizando inteligência computacional e modelos econométricos. **Gestão & Produção**, v. 15, n. 3, p. 635-647, 2008.

CLYDE, W. C.; OSLER, C. L. Charting: Chaos Theory in Disguise ? **The Journal of Futures Markets**, v. 17, n. 5, p. 489–514, 1997.

DA SILVA, Sergio. Chaotic Exchange Rate Dynamics Redux. **Open economies review**, v. 12, p. 281–304, 2001a.

DA SILVA, Sergio. Chaos and exchange rates. **Estudos Empresariais**, v. 6, n. 1, p. 9-15, 2001b.

DELLAJUSTINA, Fernanda Jaiara. **Estudo do mapa logístico**: 2012. Disponível em: <<http://www.mundofisico.joinville.udesc.br/arquivo.php?idArquivo=132>>. Acesso em: 05 out. 2014.

DEMOS, Guilherme do Livramento. **Modelos Estatísticos Alternativos para os Mini Flash Crashes**. 2014. 95 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Economia, Departamento de Economia e Relações Internacionais, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2014.

DE GRAUWE, Paul; DEWACHTER, Hans. A chaotic model of the exchange rate: the role of fundamentalists and chartists. **Open economies review**, v. 4, n. 4, p. 351-379, 1993.

DE GRAUWE, Paul. Alternative strategies towards monetary union. **European Economic Review**, v. 39, n. 3, p. 483-491, 1995.

ERBANO, Gabriel Hidequi. **Análise de Séries de Tempo Financeiras: Uma Aplicação da Teoria do Caos em Finanças Empíricas**. 2004. 73 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Economia, Fundação Getúlio Vargas, São Paulo, 2004.

FEDERAL RESERVE. **Foreign Exchange Rates**. Disponível em: <<http://www.federalreserve.gov/releases/h10/hist/>>. Acesso em: 06 out. 2014.

FEDERICI, Daniela; GANDOLFO, Giancarlo. **The Euro/Dollar exchange rate: Chaotic or non-chaotic?**. CESifo working paper: Monetary Policy and International Finance, 2011.

GARLAND, J.; BRADLEY, E. **On the importance of nonlinear modeling in computer performance prediction**. Advances in Intelligent Data Analysis XII. **Anais**.2013.

GENCAY, Ramazan; DECHERT, W. Davis. An algorithm for the Lyapunov exponents of an  $n$ -dimensional unknown dynamical system. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 59, n. 1, p. 142-157, 1992.

GENÇAY, Ramazan. A statistical framework for testing chaotic dynamics via Lyapunov exponents. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 89, n. 3, p. 261-266, 1996.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4 ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GLEICK, James. **Chaos: Making a new science**. Random House, 1997.

- GOLTZ, Christian; FRIEDMAN, Gerald M. **Fractal and chaotic properties of earthquakes**. New York: Springer, 1997.
- GOMES, E. F. G.; JUNIOR, K. M. Mercados Financeiros: Sistema Caótico ou Aleatório? **Revista de Economia**, v. 8, n. 1, p. 102–123, 2010.
- HANIAS, M. P.; CURTIS, P. G.; MYLONAKIS, I. The use of chaos theory predicting the EURIBOR index. **Investment Management and Financial Innovations**, v. 5, n. 4, p. 173–177, 2008.
- HÉNON, Michel. A two-dimensional mapping with a strange attractor. **Communications in Mathematical Physics**, v. 50, n. 1, p. 69-77, 1976.
- HOMMES, C. H.; MANZAN, S. Comments on “Testing for nonlinear structure and chaos in economic time series.” **Journal of Macroeconomics**, v. 28, n. 1, p. 169–174, mar. 2006a.
- HOMMES, C. H.; MANZAN, S. Testing for nonlinear structure and chaos in economic time series. **Journal of Macroeconomics**, v. 28, n. 1, p. 169–174, mar. 2006b.
- HSIEH, David A. Chaos and nonlinear dynamics: application to financial markets. **The journal of finance**, v. 46, n. 5, p. 1839-1877, 1991.
- JARSULIC, Marc. Profits, Cycles and Chaos. **The Jerome Levy Economics Institute Working Paper**, n. 20, 1989.
- KAMINSKI, Kathleen A.; WETZEL, T. Sterling; GUAN, Liming. Can financial ratios detect fraudulent financial reporting?. **Managerial Auditing Journal**, v. 19, n. 1, p. 15-28, 2004.
- KEMPR, J. New Methods and Understanding in Economic Dynamics ? An Introductory Guide to Chaos and Economics. **Economic Issues**, v. 2, n. 1, p. 1–26, 1997.
- KYRTSOU, Catherine; LABYS, Walter C.; TERRAZA, Michel. Noisy chaotic dynamics in commodity markets. **Empirical Economics**, v. 29, n. 3, p. 489-502, 2004.
- LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. **Fundamentos de metodologia científica**. São Paulo: Atlas, 1991.
- LEBARON, B. Chaos and nonlinear forecastability in economics and finance. **Philosophical Transactions: Physical Sciences and Engineering**, v. 348, n. 1688, p. 397–404, 1994.
- LEONTITSIS, Alexandros. **Mútual Average Information**. Disponível em: <<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/880-mutual-average-information>>. Acesso em: 07 out. 2014.
- LUX, Thomas; MARCHESI, Michele. Scaling and criticality in a stochastic multi-agent model of a financial market. **Nature**, v. 397, n. 6719, p. 498-500, 1999.
- LORENZ, Edward N. Deterministic nonperiodic flow. **Journal of the atmospheric sciences**, v. 20, n. 2, p. 130-141, 1963.

MANTEGNA, Rosario Nunzio et al. **An introduction to econophysics: correlations and complexity in finance**. Cambridge: Cambridge university press, 2000.

MATILLA-GARCÍA, M.; RUIZ MARÍN, M. A non-parametric independence test using permutation entropy. **Journal of Econometrics**, v. 144, n. 1, p. 139–155, maio 2008.

MATSUSHITA, R. et al. Fractal structure in the Chinese yuan / US dollar rate. **Economics Bulletin**, v. 7, n. 2, p. 1–13, 2003.

MATSUSHITA, Raul et al. The Chinese chaos game. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 378, n. 2, p. 427-442, 2007.

MAY, Robert M. et al. Simple mathematical models with very complicated dynamics. **Nature**, v. 261, n. 5560, p. 459-467, 1976.

MEDIO, Alfredo. Nonlinear dynamics and chaos part I: A geometrical approach. **Macroeconomic dynamics**, v. 2, n. 04, p. 505-532, 1998.

MIRWAIS. **Minimum embedding dimension**. Disponível em: <<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/37239-minimum-embedding-dimension>>. Acesso em: 14 out. 2014.

MIRWAIS. **Largest Lyapunov Exponent with Rosenstein's Algorithm**. Disponível em: <<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/38424-largest-lyapunov-exponent-with-rosenstein-s-algorithm>>. Acesso em: 18 out. 2014.

OLMEDA, I.; PEREZ, J. Non-Linear Dynamics and Chaos in the Spanish Stock Market. **Investigaciones Economicas**, v. XIX, n. 2, p. 217–248, 1995.

PACKARD, Norman H. et al. Geometry from a time series. **Physical review letters**, v. 45, n. 9, p. 712, 1980.

POINCARÉ, Henri. Sur une classe nouvelle de transcendentes uniformes. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, p. 313-366, 1890.

RESENDE, M.; ZEIDAN, R. M. Expectations and chaotic dynamics: Empirical evidence on exchange rates. **Economics Letters**, v. 99, n. 1, p. 33–35, abr. 2008.

RHODES, C.; MORARI, M. False-nearest-neighbors algorithm and noise-corrupted time series. **Physical Review E**, v. 55, n. 5, p. 6162–6170, maio 1997.

RODRIGUEZ, F. F.; RIVERO, S. S.; FÉLIX, J. A. Testing chaotic dynamics via Lyapunov exponents. **Journal of Applied Econometrics**, v. 20, n. 7, p. 911–930, dez. 2005.

ROSENSTEIN, Michael T.; COLLINS, James J.; DE LUCA, Carlo J. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 65, n. 1, p. 117-134, 1993.

ROWEIS, S. T.; SAUL, L. K. Nonlinear Dimensionality Reduction by Locally Linear Embedding. **Science, New Series**, v. 290, n. 5500, p. 2323–2326, 2000.

SALTZMAN, Barry. Finite amplitude free convection as an initial value problem-I. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 19, n. 4, p. 329-341, 1962.

SHANNON, Claude E. The mathematics theory of communication. **Bell Syst. Tech. J**, v. 27, p. 379-423, 1948.

STEWART, Ian. **Será que Deus joga dados?: a nova matemática do caos**. Rio de Janeiro: Zahar, 1991.

STEWART, Ian. **Em busca do infinito: uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos**. Rio de Janeiro: Zahar, 2014.

STROGATZ, Steven H. **Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology and chemistry**. Perseus publishing, 2001

TAKENS, Floris. Detecting strange attractors in turbulence. In: **Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980**. Springer Berlin Heidelberg, 1981. p. 366-381.

VIANA, Ricardo L. **Introdução à Dinâmica Não-Linear e Caos em Economia**. Curitiba: UFPR, 2012. Disponível em: <http://fisica.ufpr.br/viana/caos/livro.pdf>>. Acesso em: 15 out. 2014.

WIELAND, C.; WESTERHOFF, F. H. Exchange rate dynamics, central bank interventions and chaos control methods. **Journal of Economic Behavior & Organization**, v. 58, n. 1, p. 117–132, set. 2004.

WOLF, Alan et al. Determining Lyapunov exponents from a time series. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 16, n. 3, p. 285-317, 1985.

WOOLDRIDGE, J. M. **Introdução à Econometria: uma abordagem moderna**. São Paulo: Ceearge Learning, 2010.

YANG, Seung-Ryong; BRORSEN, B. Wade. Nonlinear dynamics of daily futures prices: conditional heteroskedasticity or chaos?. **Journal of Futures Markets**, v. 13, n. 2, p. 175-191, 1993.