Universidade Federal de Santa Catarina

A Solução de Douglas-Radó do Problema de Plateau

Trabalho de Conclusão de Curso

Luiz Gustavo Cordeiro

Orientador: Ivan Pontual Costa e Silva

Florianópolis

2013

Luiz Gustavo Cordeiro

A Solução de Douglas-Radó do Problema de Plateau

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção do grau de Bacharel em Matemática e Computação Científica.

Universidade Federal de Santa Catarina

Orientador: Ivan Pontual Costa e Silva

Florianópolis
2013

Esta monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática - Habilitação Bacharelado em Matemática e Computação Científica, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 29/CCM/2013.

Prof. Nereu Estanislau Burin
Professor da disciplina

Banca examinadora:

Prof. Ivan Pontual Costa e Silva
Orientador

Prof. Jáuber Cavalcante de Oliveira

Prof. Martin Weilandt

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço aos meus pais, José e Rose, pelo apoio e incentivo durante todos estes anos. Agradeço também ao meu irmão José pelas longas conversas sobre a vida, o universo, e tudo mais.

Agradeço à minha namorada Gabriela pelo conforto e ajuda sempre que necessário, e principalmente por ficar ao meu lado durante os momentos mais difíceis.

Agradeço ao meu orientador, professor Ivan Pontual Costa e Silva, por ter me iniciado no mundo da Matemática e pelo enorme incentivo durante toda a graduação. Os inúmeros conselhos que me foram dados durante todos esses anos servirão de guia tanto dentro quanto fora do ambiente acadêmico.

Agradeço aos professores Jáuber Cavalcante de Oliveira e Martin Weilandt por terem aceitado o convite para fazer parte da banca examinadora deste trabalho e terem lhe dedicado tempo e paciência.

Por fim, agradeço também aos diversos professores e colegas que estiveram presentes durante a minha graduação nos mais diversos momentos.

Sumário

Introdução

Superfícies mínimas são um objeto de estudo importante em geometria. Um possível modo de visualizar uma superfície mínima é o seguinte: se mergulharmos um pedaço de arame fechado em uma solução de sabão e o retirarmos (cuidadosamente), as tensões envolvidas fazem com que a a superfície descrita pela membrana de sabão obtida minimize (relativamente) a área entre as possíveis superfícies com o bordo dado pelo arame. Uma tal superfície é um exemplo de uma superfície mínima.

Devido aos diversos estudos e experimentos realizados pelo físico Joseph Plateau (1801-1883) acerca de tensões superficiais, incluindo a constatação do fato descrito acima, o problema de determinar uma superfície que possua a menor área entre aquelas que têm o bordo dado por uma curva de Jordan Γ prescrita é conhecido como *Problema de Plateau*.

Este problema, inicialmente proposto por Lagrange (1736-1813) em 1760, só foi satisfatoriamente resolvido por volta de 1930, quando Tibor Radó (1895-1965) e Jesse Douglas (1897-1965) chegaram independentemente a suas soluções, assumindo que as superfícies em questão possuem a topologia do disco. Em 1936, Douglas foi premiado com a medalha Fields pelos seus trabalhos sobre o Problema de Plateau.

Neste trabalho, discutiremos a resolução dada por Douglas e Radó. O primeiro problema que devemos considerar é dar uma formulação matematicamente precisa do problema, especificando o tipo de regularidade, topologia, etc., que as superfícies admissíveis para o problema devem ter. Para isso, o trabalho foi separado em três partes: a primeira parte visa a dar os conceitos e resultados básicos necessários para a formulação e resolução do problema; na segunda parte, estudamos espaços de Sobolev e suas propriedades; na terceira parte é construída a solução do problema. Concretamente, analisamos a relação do problema de Plateau com o *Problema de Dirichlet*, no qual procuramos minimizar a energia entre funções com valor de bordo fixado.

Para uma leitura ideal deste trabalho, é preciso que o leitor possua certa familiaridade com conceitos de Topologia geral, Análise em $\mathbb{R}^n$ – incluindo integração à Lebesgue – e Variável Complexa. Alguns conceitos básicos de Álgebra Linear também são necessários.

No primeiro capítulo são apresentados os espaços vetoriais topológicos. A teoria é apresentada de modo a dar resultados que possam ser facilmente aplicados nos capítulos posteriores.

A seguir, no segundo capítulo são discutidos espaços vetoriais topológicos localmente convexos. Os principais teoremas, que serão amplamente utilizados posteriormente, são os teoremas de separação de Hahn-Banach e de compacidade de Banach-Alaoglu. Na última seção, é discutido o conceito de limite direto, que é necessário no estudo de distribuições.

No terceiro capítulo restringimos alguns resultados dos capítulos anteriores para espaços de Banach. Na última seção, o teorema de Banach-Alaoglu é utilizado para provar o "Método Direto do Cálculo das Variações", um teorema de minimização cujas hipóteses são facilmente verificadas no problema de Dirichlet.

Na segunda parte, são estudados os espaços de Sobolev. No quarto capítulo são definidos estes espaços. O problema de Plateau, do modo que vamos propor, pergunta sobre a existência de um minimizante para a área num espaço de Sobolev do tipo $W^{1,2}$.

No quinto capítulo é demonstrado o Princípio do Máximo, um resultado que é utilizado para analisar de que forma as condições de fronteira de certos problemas (como os de Dirichlet e de Plateau) controlam o comportamento de soluções no interior do domínio.

Por fim, na última parte do trabalho são dadas as formulações precisas dos problemas de Dirichlet e Plateau. Esta parte está dividida em dois capítulos, nos quais são enunciados e demonstrados os teoremas que provam a existência de soluções para cada um dos problemas, respectivamente. Uma cuidadosa análise da relação existente entre esses problemas é dada no começo do capítulo sobre o problema de Plateau.

Um breve apêndice está incluído no final do trabalho, no qual estão enunciados os principais resultados sobre espaços L^p que são utilizados ao longo do texto.

Parte I

Preliminares: Análise Funcional

1 Espaços Vetoriais Topológicos

Neste capítulo serão discutidos os espaços vetoriais topológicos e suas propriedades, de modo similar ao que é feito na referência [1], incluindo breves discussões sobre quocientes, transformações lineares e um teorema de extensão.

1.1 Generalidades

Por todo este trabalho, o símbolo $\mathbb{K}$ denotará qualquer um dos corpos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ munidos de suas topologias usuais, a menos de menção explícita em contrário. Dado um espaço topológico $\mathcal{S}$ e um subconjunto $A \subseteq \mathcal{S}$, denotaremos por $\operatorname{int}(A)$ e $\operatorname{cl}(A)$ o interior e o fecho de A, respectivamente.

Definição 1.1. Um *espaço vetorial topológico* (EVT) é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial $\mathbb{V}$ munido de uma topologia na qual a soma e a multiplicação por escalar,

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{V} \times \mathbb{V} & \to & \mathbb{V} \\ & (x, y) & \mapsto & x + y \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K} \times \mathbb{V} & \to & \mathbb{V} \\ & (\alpha, x) & \mapsto & \alpha x, \end{array}$$

são funções contínuas.

Exemplo 1.2. $\mathbb{K}$, munido das operações e topologia usuais, é, trivialmente, um EVT.

Exemplo 1.3. Sejam $\mathbb{E}$ um espaço vetorial e $\|.\| : x \in \mathbb{E} \mapsto \|x\| \in [0, \infty)$ uma *norma*, isto é, uma função que satisfaz, para todos $x, y \in \mathbb{E}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$,

(i) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$;

(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

(iii) $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

Então $d : (x, y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E} \mapsto \|x - y\| \in [0, \infty)$ define uma métrica em $\mathbb{E}$, que induz, por sua vez, uma topologia τ_d em $\mathbb{E}$.

O espaço $(\mathbb{E}, \|.\|)$ é chamado de *espaço normado*. Quando não houver ambiguidade, nos referiremos somente a $\mathbb{E}$ como espaço normado. Neste caso, sempre consideraremos $\mathbb{E}$ munido da topologia τ_d, de modo que $\mathbb{E}$ é um EVT. De fato, a continuidade da adição segue facilmente de (ii), enquanto a continuidade da multiplicação segue de (i) e (ii).

Um estudo mais detalhado de espaços normados é feito no capítulo 3.

Exemplo 1.4. Se $\{\mathbb{V}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família de EVTs, então $\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{V}_\lambda$ é um EVT, quando munido da topologia produto. Em particular, $\mathbb{K}^n$ é um EVT para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dados subconjuntos X e Y de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial $\mathcal{V}$ e $I \subseteq \mathbb{K}$, denotaremos

$$X + Y = \{x + y : x \in X,\ y \in Y\} \qquad \text{e} \qquad I \cdot X = \{\alpha x : \alpha \in I,\ x \in X\}.$$

No caso de $X = \{x\}$ ser um conjunto unitário, denotaremos $x + Y = \{x\} + Y$, e de modo análogo quando Y ou I forem unitários. Assim, um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$ é exatamente um subconjunto $\mathcal{W}$ não vazio tal que $\mathcal{W} + \mathbb{K} \cdot \mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}$.

Observação 1.5. *Lembre-se que uma função $f : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ entre espaços topológicos é contínua se, e somente se, para todo subconjunto $E \subseteq \mathcal{S}_1$, tem-se que $f(cl(E)) \subseteq cl(f(E))$. Utilizando a notação introduzida acima, a continuidade das operações em um EVT $\mathbb{V}$ implica que para todos os subconjuntos $X, Y \subseteq \mathbb{V}$ e $I \subseteq \mathbb{K}$, tem-se que*

$$cl(X) + cl(Y) \subseteq cl(X + Y) \qquad e \qquad cl(I) \cdot cl(X) \subseteq cl(I \cdot X).$$

Dado $a \in \mathbb{V}$, a *translação* $T_a : x \in \mathbb{V} \mapsto a + x \in \mathbb{V}$ é um homeomorfismo, pois é a composta da aplicação (obviamente contínua) $x \in \mathbb{V} \mapsto (a, x) \in \mathbb{V} \times \mathbb{V}$ com a soma, e sua inversa é T_{-a}, também uma translação, e logo contínua. Desta forma, as vizinhanças de $a \in \mathbb{V}$ têm a forma $a + U$, onde U é uma vizinhança da origem. Note também que, como $X + Y = \bigcup_{x \in X} (x + Y)$, se Y for aberto, então $X + Y$ também o é.

Uma *base local* para um EVT $\mathbb{V}$ é uma coleção $\mathscr{B}$ de vizinhanças de 0 tal que, para todo aberto $U \subseteq \mathbb{V}$ contendo 0 existe $V \in \mathscr{B}$ tal que $V \subseteq U$. Assim, qualquer base local de $\mathbb{V}$ caracteriza sua topologia, pois os abertos são exatamente as uniões de translações de elementos de $\mathscr{B}$.

A seguinte nomenclatura será utilizada pelo restante do texto.

Definição 1.6. Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $X \subseteq \mathcal{V}$. X é dito ser

(a) *convexo*, se para todo $t \in [0, 1]$ tivermos $t \cdot X + (1 - t) \cdot X \subseteq X$;

(b) *balanceado*, se para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ com $|\alpha| \leq 1$ tivermos $\alpha \cdot X \subseteq X$.

Se $\mathbb{V}$ é um EVT, um subconjunto $Y \subseteq \mathbb{V}$ é dito ser

(c) *limitado*, se para toda vizinhança U da origem existir um número $t > 0$ tal que $Y \subseteq t \cdot U$.

Se todos os elementos de uma base local $\mathscr{B}$ para o EVT $\mathbb{V}$ forem balanceados, convexos ou limitados, $\mathscr{B}$ será dita balanceada, convexa ou limitada, respectivamente

Se $\mathscr{B}$ é uma base local para um EVT $\mathbb{V}$, um subconjunto $X \subseteq \mathbb{V}$ é limitado se, e somente se, para todo $U \in \mathscr{B}$ existir $t > 0$ tal que $X \subseteq t \cdot U$.

Definição 1.7. Um EVT $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{K}$ é dito ser

(a) *metrizável*, se existe uma métrica $\rho : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ *invariante (por translações)* – isto é, para todos $x, y, z \in \mathbb{V}$, $\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)$ – que induz a topologia de $\mathbb{V}$;

(b) *localmente convexo* (resp. *localmente limitado*) se possuir uma base local convexa (resp. limitada).

Exemplo 1.8. Seja $(\mathbb{E}, \|.\|)$ um espaço normado (ver Exemplo 1.3), e seja d a métrica induzida por $\|.\|$. O conjunto $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{E} : \|x\| < 1\} = \{x \in \mathbb{E} : d(x, 0) < 1\}$ é chamado de *bola aberta unitária* de $\mathbb{E}$. Note que $\mathcal{B}$ é aberto e que para todo $r > 0$, $r \cdot \mathcal{B} = \{x \in \mathbb{E} : d(x, 0) < r\}$, logo

$$\mathscr{B} := \{r \cdot \mathcal{B} : r > 0\}$$

é uma base local para $\mathbb{E}$.

Neste contexto, os subconjuntos de $\mathbb{E}$ limitados relativamente à métrica d coincidem com aqueles limitados em $\mathbb{E}$ como EVT. Para ver isso, basta notar que $X \subseteq \mathbb{E}$ é limitado relativamente a d se, e somente se, existe $r > 0$ tal que para todo $x \in X$, $d(x, 0) < r$, ou seja, $X \subseteq r \cdot \mathcal{B}$. Em particular, $\mathscr{B}$ é uma base local limitada.

Além disso, dado $r > 0$, temos que, para todos $x, y \in r \cdot \mathcal{B}$ e $t \in [0, 1]$,

$$\|tx + (1 - t)y\| \leq |t| \, \|x\| + |1 - t| \, \|y\| < tr + (1 - t)r = r,$$

donde $r \cdot \mathcal{B}$ é convexa.

Portanto, $\mathbb{E}$ é um EVT localmente convexo e localmente limitado.

Teorema 1.9. *Seja $\mathbb{V}$ um EVT.*

(a) Se $X, Y \subseteq \mathbb{V}$, então $cl(X) + cl(Y) \subseteq cl(X + Y)$;

(b) Se $\mathcal{W}$ é subespaço de $\mathbb{V}$, então $cl(W)$ também o é;

(c) Se $C \subseteq \mathbb{V}$ é convexo, então $int(C)$ e $cl(C)$ também o são;

(d) Se $B \subseteq \mathbb{V}$ é balanceado, então $cl(B)$ também o é. Se $0 \in int(B)$, então $int(B)$ também é balanceado.

Demonstração. Como visto na Observação 1.5, os itens (a) e (b) são consequências diretas da continuidade das operações em $\mathbb{V}$.

(c) Dado $t \in [0, 1]$, a aplicação $(x, y) \in \mathbb{V} \times \mathbb{V} \mapsto tx + (1 - t)y \in \mathbb{V}$ é contínua. Disto obtemos $t \cdot \mathrm{cl}\,(C) + (1 - t) \cdot \mathrm{cl}\,(C) \subseteq \mathrm{cl}\,(t \cdot C + (1 - t) \cdot C) \subseteq \mathrm{cl}\,(C)$, e portanto $\mathrm{cl}\,(C)$ é convexo.

Agora, se $t \in [0, 1]$, então $t \cdot \mathrm{int}\,(C) + (1 - t) \cdot \mathrm{int}\,(C)$ é um aberto contido em C, logo $t \cdot \mathrm{int}\,(C) + (1 - t) \cdot \mathrm{int}\,(C) \subseteq \mathrm{int}\,(C)$. Portanto $\mathrm{int}\,(C)$ é convexo.

(d) Novamente pela Observação 1.5, seja $I = \{\alpha \in \mathbb{K} : |\alpha| \leq 1\}$. Então $I \cdot \mathrm{cl}\,(B) = \mathrm{cl}\,(I) \cdot \mathrm{cl}\,(B) \subseteq \mathrm{cl}\,(I \cdot B) \subseteq \mathrm{cl}\,(B)$, e portanto $\mathrm{cl}\,(B)$ é balanceado.

Note agora que, supondo que B é balanceado, então $\bigcup_{0<|\alpha|\leq 1} \alpha \cdot \mathrm{int}\,(B)$ é um conjunto aberto contido em B, logo $\bigcup_{0<|\alpha|\leq 1} \alpha \cdot \mathrm{int}\,(B) \subseteq \mathrm{int}\,(B)$. Se $0 \in \mathrm{int}\,(B)$, então $\bigcup_{0\leq|\alpha|\leq 1} \alpha \cdot \mathrm{int}\,(B) \subseteq \mathrm{int}\,(B)$, e portanto $\mathrm{int}\,(B)$ é balanceado. $\square$

Teorema 1.10. *Seja $U \subseteq \mathbb{V}$ uma vizinhança de 0. Existe uma vizinha balanceada V de 0 tal que $V \subseteq U$. Se U for convexo, V pode ser tomada convexa.*

Demonstração. Como a multiplicação por escalar é contínua, existem $\delta > 0$ e uma vizinhança W da origem tais que se $|\alpha| < \delta$, então $\alpha \cdot W \subseteq U$. Então $Z := \bigcup_{0<|\alpha|<\delta} \alpha \cdot W$ é uma vizinhança balanceada de 0 e $Z \subseteq U$. Isto prova a primeira parte.

Suponha agora que U é convexo, e seja Z como acima. Seja $O := \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha \cdot U$. Como O é convexo, $\operatorname{int}(O)$ também o é. Vamos mostrar que O é balanceado. Seja $|\gamma| \leq 1$. Tome $r \in [0,1]$ e $\beta \in \mathbb{K}$ com $|\beta| = 1$ tais que $r\beta = \gamma$. Então

$$\gamma \cdot O = r \bigcap_{|\alpha|=1} (\beta\alpha) \cdot U = r \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha \cdot U = r \cdot O.$$

Novamente, como O é convexo e contém 0, então $r \cdot O \subseteq O$, logo O é balanceado.

Como Z é balanceado, $Z = \alpha \cdot Z$ quando $|\alpha| = 1$, e portanto $Z \subseteq O$. Segue que $0 \in \operatorname{int}(O)$, e $\operatorname{int}(O)$ também é balanceado, logo $V := \operatorname{int}(O)$ é uma vizinhança com as propriedades desejadas. $\square$

1.2 Transformações Lineares Contínuas

Lembre-se que uma *transformação linear* entre $\mathbb{K}-$espaços vetoriais $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ é uma aplicação $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ satisfazendo, para todos $\alpha \in \mathbb{K}$ e $x, y \in \mathcal{V}$,

$$T(x + \alpha y) = Tx + \alpha Ty.$$

Teorema 1.11. *Sejam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ EVTs e $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ uma transformação linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) T é contínua;

(b) T é contínua em 0.

Caso $\mathbb{W}$ seja localmente limitado (em particular, se $\mathbb{W} = \mathbb{K}$), então estas afirmações são equivalentes a

(c) $T(V)$ é limitado para alguma vizinhança V de 0.

Demonstração. (a) obviamente implica (b). Reciprocamente, se T é contínua em 0, sejam $x \in \mathbb{V}$ e $A \subseteq \mathbb{W}$ uma vizinhança de Tx. Então $A - Tx$ é uma vizinhança de 0 em $\mathbb{W}$, e portanto existe $U \subseteq \mathbb{V}$ vizinhança de 0 tal que $T(U) \subseteq A - Tx$, e então $x + U$ é uma vizinhança de x satisfazendo $T(x + U) \subseteq A$. Portanto T é contínua.

Suponha agora que $\mathbb{W}$ é localmente limitado. Claramente (b) implica (c). Para a recíproca, se V é uma vizinhança de 0 tal que $T(V)$ é limitado, então, dada uma vizinhança B de $0 \in \mathbb{W}$, seja $\alpha > 0$ tal que $T(V) \subseteq \alpha \cdot B$. Então $\alpha^{-1} \cdot V$ é uma vizinhança de 0 com $T(\alpha^{-1} \cdot V) \subseteq B$. Isso mostra a implicação (c)$\Rightarrow$(b). $\square$

Dados $\mathbb{K}$-espaços vetoriais $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$, o espaço das funções lineares de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{W}$ será denotado por $L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Elementos de $L(\mathcal{V}, \mathbb{K})$ serão ditos *funcionais lineares*. $L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com as operações definidas ponto a ponto, isto é, se $T, S \in L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, definimos $T + S, \alpha T \in L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ pondo, para todo $x \in \mathcal{V}$,

$$(T + S)(x) = Tx + Sx \quad \text{e} \quad (\alpha T)x = \alpha \cdot (Tx).$$

No caso de $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ serem EVTs, $\mathscr{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ denotará o subespaço de $L(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ consistindo das funções lineares contínuas de $\mathbb{V}$ em $\mathbb{W}$.

Uma família $\mathscr{T} \subseteq L(\mathcal{V}, \mathbb{K})$ de funcionais lineares num espaço vetorial $\mathcal{V}$ é dita ser *separante* se para todo $x \in \mathcal{V}$ não-nulo existir $T \in \mathscr{T}$ tal que $Tx \neq 0$.

Vamos mostrar um resultado sobre extensões de funcionais lineares. Para isso, necessitamos do conceito de completude para EVTs.

Definição 1.12. Se $\mathbb{V}$ é um EVT, uma net $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathbb{V}$ é dita ser uma *net de Cauchy* se para cada vizinhança V de 0 existe um $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que se $\mu, \eta \geq \lambda_0$, então $x_\mu - x_\eta \in V$. *Sequências de Cauchy* são sequências que são nets de Cauchy.

$\mathbb{V}$ é dito ser *completo* se toda net de Cauchy convergir.

O leitor não deve encontrar dificuldades em provar a seguinte proposição.

Proposição 1.13. *Seja $\{\mathbb{V}_i : i \in I\}$ uma família de EVTs. Então $\prod_{i \in I} \mathbb{V}_i$ é completo se, e somente se, cada $\mathbb{V}_i$ o é.*

A continuidade da soma implica, por exemplo, que toda net convergente em $\mathbb{V}$ é net de Cauchy. Também é fácil verificar que funções lineares contínuas preservam nets de Cauchy.

Dada uma base local $\mathscr{B}$ para um EVT $\mathbb{V}$, sempre consideramos $\mathscr{B}$ como um conjunto dirigido pela inclusão inversa: $U \leq V$ quando $V \subseteq U$.

Teorema 1.14. *Dada uma base local $\mathscr{B}$ de $\mathbb{V}$, o espaço $\mathbb{V}$ é completo se, e somente se, toda net da forma $\{x_U\}_{U \in \mathscr{B}}$ que seja de Cauchy também seja convergente.*

Demonstração. Suponha que toda net de Cauchy da forma $\{x_U\}_{U \in \mathscr{B}}$ convirja em $\mathbb{V}$. Seja $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma net de Cauchy. Para cada $U \in \mathscr{B}$, tome $\eta^U \in \Lambda$ tal que $x_\lambda - x_\mu \in U$ sempre que $\lambda, \mu \geq \eta^U$.

Defina $y_U = x_{\eta^U}$. Pela continuidade da soma em $\mathbb{V}$ (e como Λ é dirigido), segue facilmente que $\{y_U\}_{U \in \mathscr{B}}$ é net de Cauchy e portanto converge para algum $y \in \mathbb{V}$. Novamente pela continuidade da soma e pela definição dos η^U, a net inicial $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge para y. $\square$

Corolário 1.15. *Se $\mathbb{V}$ é um EVT que tem uma base local enumerável, então $\mathbb{V}$ é completo se, e somente se, toda sequência de Cauchy em $\mathbb{V}$ converge.*

Seja agora $\mathbb{V}$ um espaço metrizável cuja topologia é induzida por uma métrica invariante d. Uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{V}$ é de Cauchy se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existir $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq N_0$ então $d(x_n - x_m, 0) < \varepsilon$. Por invariância de d, isso equivale a dizer que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Portanto, a noção dada de sequência de Cauchy coincide com a noção usual para espaços métricos.

Dado $x \in \mathbb{V}$, como o conjunto $\{x + V : V \in \mathscr{B}\}$ é base de vizinhanças para x, segue que um ponto x pertence ao fecho de um subconjunto $X \subseteq \mathbb{V}$ se, e somente se, existe uma net $\{x_V\}_{V\in\mathscr{B}}$ tais que $x_V \in X \cap (x + V)$ para todo $V \in \mathscr{B}$. Mais ainda, uma função f de $\mathbb{V}$ a um espaço topológico $\mathcal{S}$ é contínua se, e somente se, para toda net da forma $\{x + y_V\}_{V\in\mathscr{B}}$ com $y_V \in V$ tem-se que a net $\{f(x + y_V)\}_{V\in\mathscr{B}} \subseteq \mathcal{S}$ converge para $f(x)$.

Teorema 1.16. *Sejam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ EVTs e suponha que $\mathbb{W}$ seja completo e Hausdorff. Sejam $\mathbb{M}$ um subespaço de $\mathbb{V}$ (munido da topologia induzida) e $T \in \mathscr{L}(\mathbb{M}, \mathbb{W})$.*

Existe uma única aplicação $\widetilde{T} \in \mathscr{L}(cl(\mathbb{M}), \mathbb{W})$ que estende T. Além disso, a associação $T \mapsto \widetilde{T}$ é linear.

Demonstração. Seja $\mathscr{B}$ base local qualquer para $\mathbb{V}$. Primeiramente, tome $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ e $\{y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ nets em $\mathbb{M}$ convergindo para um mesmo ponto $x \in \mathrm{cl}(\mathbb{M})$. Pela continuidade de T, é fácil ver que $\{Tx_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ e $\{Ty_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ são nets de Cauchy em $\mathbb{W}$, e portanto convergem, digamos para z e w, respectivamente.

Dada uma vizinhança A de 0 em $\mathbb{W}$, tome U vizinhança de 0 em $\mathbb{V}$ tal que se $v \in \mathbb{M} \cap U$ então $Tv \in A$. Existem $\lambda \in \Lambda$ e $\gamma \in \Gamma$ tais que $z - Tx_\lambda, Ty_\gamma - w \in V$ e $x_\lambda - y_\gamma \in U$, logo

$$z - w = (z - Tx_\lambda) + T(x_\lambda - y_\gamma) + (Ty_\gamma - w) \in A + A + A.$$

Isso mostra que $z - w$ pertence a toda vizinhança de 0. Como $\mathbb{W}$ é Hausdorff, concluímos que $z = w$.

Defina então $\widetilde{T} : \mathrm{cl}(\mathbb{M}) \to \mathbb{W}$ pondo $\widetilde{T}(x) = \lim_{\lambda\in\Lambda} Tx_\lambda$ para toda net $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathbb{M}$ convergindo para x. A discussão acima mostra que $\widetilde{T}$ está bem definida em $\mathrm{cl}(\mathbb{M})$. A continuidade das operações em $\mathbb{V}$ e em $\mathbb{W}$ implica que $\widetilde{T}$ é linear.

Para mostrar que $\widetilde{T}$ é contínua, seja $\{y_V\}_{V\in\mathscr{B}}$ net com $y_V \in \mathrm{cl}(\mathbb{M}) \cap V$. Tome, para cada $V \in \mathscr{B}$, uma net $\left\{z_V^U\right\}_{U\in\mathscr{B}} \subseteq \mathbb{M}$ convergindo para y_V com $z_V^U \in \mathbb{M} \cap (y_V + U)$.

Considere o conjunto dirigido $\mathscr{B} \times \mathscr{B}$, com a *direção produto*: $(V_1, U_1) \leq (V_2, U_2)$ quando $V_2 \subseteq V_1$ e $U_2 \subseteq U_1$. Para todos $U, V \in \mathscr{B}$, temos que

$$z_V^U = (z_V^U - y_V) + y_V \in U + V,$$

e portanto $\left\{z_V^U\right\}_{(U,V)\in\mathscr{B}\times\mathscr{B}}$ converge para 0. Pela definição de $\widetilde{T}$, $0 = \widetilde{T}0 = \lim_{U,V\in\mathscr{B}} Tz_V^U$, e $\widetilde{T}y_V = \lim_{U\in\mathscr{B}} Tz_V^U$.

Dada uma vizinhança A de 0 em $\mathbb{W}$, existem $U_0, V_0 \in \mathscr{B}$ tais que se $U \subseteq U_0$ e $V \subseteq V_0$ então $z_V^U \in A$. Dado um tal $V' \subseteq V_0$, escolha $U' \subseteq U_0$ tal que $\widetilde{T}y_{V'} - Tz_{V'}^{U'} \in A$. Assim,

$$\widetilde{T}y_{V'} = (\widetilde{T}y_{V'} - Tz_{V'}^{U'}) + Tz_{V'}^{U'} - \widetilde{T}x \in A + A.$$

Isso mostra que $\left\{\widetilde{T}y_V\right\}_{V\in\mathscr{B}}$ converge para 0, e portanto $\widetilde{T}$ é contínua. A unicidade segue do fato de $\mathbb{W}$ ser Hausdorff e $\mathbb{M}$ ser denso em $\mathrm{cl}\,(\mathbb{M})$. A definição também deixa claro (tomando nets constantes) que $\widetilde{T}$ estende T. A linearidade de $T \mapsto \widetilde{T}$ vem da unicidade. □

1.3 Seminormas e Convexidade Local

Nesta seção serão discutidos alguns resultados básicos que relacionam seminormas e convexidade local. Um estudo mais aprofundado deste assunto é feito no capítulo 2.

No que segue, se X é um conjunto e $\mathscr{F} = \{f_\lambda : X \to \mathcal{S}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é uma família de funções tais que cada S_λ é um espaço topológico, a *topologia (fraca) induzida por* $\mathscr{F}$ é a topologia mais fraca em X para a qual cada f_λ é contínua.

Definição 1.17. Uma *seminorma* num espaço vetorial $\mathcal{V}$ sobre $\mathbb{K}$ é uma aplicação $p : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ satisfazendo, para todos $x, y \in \mathcal{V}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$,

(i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$;

(ii) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

Nota-se que se se $p(x) = 0$ implicar $x = 0$, então p é uma norma (veja o Exemplo 1.3).

Uma família $\mathscr{P}$ de seminormas num espaço $\mathcal{V}$ é dita ser *separante* se para cada $x \in \mathcal{V}$ não-nulo existir $p \in \mathscr{P}$ tal que $p(x) \neq 0$.

Exemplo 1.18. A função módulo $|.| : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ é uma seminorma em $\mathbb{K}$. Se $T : \mathcal{V} \to \mathbb{K}$ é uma transformação linear então $|T| : x \in \mathcal{V} \mapsto |Tx| \in \mathbb{R}$ é uma seminorma em $\mathcal{V}$.

Exemplo 1.19. Seja X um conjunto qualquer e considere o conjunto $\mathbb{K}^X$ das funções de X com valores em $\mathbb{K}$ munido das operações ponto a ponto. Assim, $\mathbb{K}^X$ é um espaço vetorial. Dado $x \in X$, a aplicação $p_x : f \in \mathcal{V} \mapsto |f(x)| \in \mathbb{R}$ é uma seminorma em $\mathcal{V}$.

Exemplo 1.20. Seja $\mathcal{S}$ um espaço topológico, e seja $C(\mathcal{S})$ o conjunto das funções contínuas de $\mathcal{S}$ a $\mathbb{K}$. É claro que $C(\mathcal{S})$ é subespaço de $\mathbb{K}^{\mathcal{S}}$. Para cada compacto $K \subseteq \mathcal{S}$, a aplicação $p_K : f \in C(\mathcal{S}) \mapsto \sup_{x\in K} |f(x)| \in \mathbb{R}$ é uma seminorma em $C(\mathcal{S})$.

Teorema 1.21. *Seja p uma seminorma em um espaço vetorial $\mathcal{V}$. Então*

(a) $p(0) = 0$;

(b) Dados $x, y \in \mathcal{V}$, $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$;

(c) $p(\mathcal{V}) \subseteq [0, \infty)$;

(d) $p^{-1}(0)$ é um subespaço de $\mathcal{V}$;

(e) A "bola aberta associada a p", $B = \{x \in \mathcal{V} : p(x) < 1\}$, é convexa e balanceada.

Demonstração. Provemos somente o item (e) (os outros são simples). Se $x, y \in B$ e $t \in [0,1]$, então $p(tx+(1-t)y) \leq tp(x)+(1-t)p(y) < t+(1-t) = 1$, logo $tx+(1-t)y \in B$. Se $x \in B$ e $|\alpha| \leq 1$, então $p(\alpha x) = |\alpha| p(x) < 1$, logo $\alpha x \in B$. Portanto, B é convexa e balanceada. □

Teorema 1.22. *Seja p uma seminorma no EVT $\mathbb{V}$. São equivalentes:*

(a) p é contínua;

(b) p é contínua em 0;

(c) $B = \{x \in \mathbb{V} : p(x) < 1\}$ é aberto em $\mathbb{V}$.

Demonstração. A implicação (a)⇒(c) é óbvia, enquanto (b)⇒(a) segue do item (b) do teorema anterior e (c)⇒(b) segue da igualdade

$$\{x \in \mathbb{V} : p(x) < \varepsilon\} = \varepsilon B,$$

válida para todo $\varepsilon > 0$. □

O seguinte teorema mostra de que modo uma família de seminormas induz uma topologia localmente convexa em um espaço vetorial.

Teorema 1.23. *Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial e $\mathscr{P}$ uma família de seminormas em $\mathcal{V}$. Para cada $p \in \mathscr{P}$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ considere o conjunto*

$$V(p,n) = \left\{x \in \mathcal{V} : p(x) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Seja $\mathscr{B}$ a coleção das interseções finitas de conjuntos $V(p,n)$. Então $\mathscr{B}$ é uma base local balanceada e convexa para uma topologia em $\mathcal{V}$ que o torna um espaço vetorial topológico localmente convexo, denotado por $(\mathcal{V}, \mathscr{P})$, satisfazendo:

(a) Cada $p \in \mathscr{P}$ é contínua;

(b) Um subconjunto $E \subseteq \mathcal{V}$ é limitado se, e somente se, toda $p \in \mathscr{P}$ é limitada em E;

(c) $(\mathcal{V}, \mathscr{P})$ é Hausdorff se, e somente se, $\mathscr{P}$ é separante;

(d) Uma net $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge para 0 se, e somente se, $\{p(x_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge para 0 para todo $p \in \mathscr{P}$.

Além disso, esta é a topologia mais fraca em $\mathcal{V}$ que o faz um EVT no qual cada $p \in \mathscr{P}$ é contínua.

Demonstração. Seja τ a coleção de subconjuntos de $\mathcal{V}$ que são uniões de translações de elementos de $\mathscr{B}$. Então $\varnothing, \mathcal{V} \in \tau$ e τ é fechado por uniões arbitrárias, e é fácil verificar (utilizando a subatividade das seminormas) que τ é fechado por interseções finitas, pela definição de $\mathscr{B}$. Portanto, τ é uma topologia invariante por translações em $\mathcal{V}$, e $\mathscr{B}$ é uma base local cujos elementos são balanceados e convexos.

Vamos mostrar que a soma é contínua. Seja $U = V(p_1, n_1) \cap \cdots \cap V(p_N, n_N) \in \mathscr{B}$ ($p_i \in \mathscr{P}$, $n_i \in \mathbb{N}$). Tomando $W = V(p_1, 2n_1) \cap \cdots \cap V(p_N, 2n_N) \in \mathscr{B}$, a subaditividade das p_i mostra que $W + W \subseteq U$. Portanto a soma é contínua em $(0, 0)$ e, como as translações são homeomorfismos, a soma é contínua em $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$.

Vamos mostrar que a multiplicação é contínua. Sejam $x_0 \in \mathcal{V}$ e $\alpha_0 \in \mathbb{K}$. Tome $U, W \in \mathscr{B}$ da forma acima. Existe então $s > 0$ tal que $x_0 \in sW$. Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $1/m \leq s/(1 + |\alpha_0|s)$. Se $y \in x_0 + (1/m)W$ e $|\beta - \alpha_0| < 1/s$ então

$$\beta y - \alpha_0 x_0 = \beta(y - x_0) + (\beta - \alpha_0)x_0 \in (\beta/m)W + (\beta - \alpha_0)sW \subseteq W + W \subseteq U,$$

pois W é balanceado e $|\beta/m| < 1$. Portanto, a multiplicação é contínua (visto que $(1/m)W \in \mathscr{B}$).

Como os elementos de $\mathscr{B}$ são (balanceados e) convexos, $\mathcal{V}$ munido desta topologia é um espaço vetorial topológico localmente convexo.

(a) Basta notar que os conjuntos da forma $V(p, 1)$ são abertos, e portanto toda $p \in \mathscr{P}$ é contínua (em 0).

(b) Se $E \subseteq \mathcal{V}$ é limitado, então para todo $p \in \mathscr{P}$, existe $C > 0$ tal que $E \subseteq CV(p, 1)$, ou equivalentemente, $p(x) < C$ para todo $x \in E$. Portanto toda $p \in \mathscr{P}$ é limitada em E.

    Reciprocamente, se E satisfaz a esta condição, tome $U = V(p_1, n_1) \cap \cdots \cap V(p_N, n_N) \in \mathscr{B}$. Para cada i existe $C_i > 0$ tal que $p_i(x) < C_i$ para todo $x \in E$. Se $K = \max_{1 \leq i \leq N} C_i n_i$, então $E \subseteq KU$. Portanto E é limitado.

(c) Se $\mathcal{V}$ é Hausdorff, então para todo $x \neq 0$ existe U da forma acima tal que $0 \notin x + U$. Em particular, $p_1(x) \neq 0$, portanto $\mathscr{P}$ é separante.

    Reciprocamente, se $\mathscr{P}$ é separante e $x \neq y$, basta tomar $p \in \mathscr{P}$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $1/n < p(x - y)$. Assim, $(x + V(p, 2n)) \cap (y + V(p, 2n)) = \varnothing$.

(d) Segue diretamente do fato de $\mathscr{B}$ ser base local. $\square$

Observação 1.24. *Dado $x \in \mathcal{V}$, uma base de abertos para x em $(\mathcal{V}, \mathscr{P})$ é dada pelas intersecções finitas de conjuntos da forma*

$$x + V(p, n) = \left\{ y \in \mathcal{V} : p(x - y) < \frac{1}{n} \right\}$$

para $p \in \mathscr{P}$, $n \in \mathbb{N}$.

Definição 1.25. Um EVT $\mathbb{V}$ é *normável* se for Hausdorff e se existir uma seminorma p em $\mathbb{V}$ tal que sua topologia é induzida por $\{p\}$ (Neste caso, pelo Teorema 1.23(c), esta será imediatamente uma norma).

Pela Observação 1.24, se um EVT $\mathbb{V}$ tem a topologia induzida por uma norma q, então a topologia é induzida da métrica $d(x, y) = q(x - y)$. Portanto, a construção feita no Exemplo 1.3 é um caso particular desta construção geral.

De fato, se um EVT Hausdorff tem a topologia induzida por um conjunto finito $\{p_1, \ldots, p_n\}$ de seminormas, então $\mathbb{V}$ é normável (por exemplo, $\|.\| := p_1 + \cdots p_n$ define uma norma que induz sua topologia).

Observação 1.26. *A topologia descrita no teorema anterior* não é *a topologia fraca em $\mathcal{V}$ induzida por $\mathscr{P}$ em geral. Por exemplo, a topologia fraca induzida em $\mathbb{R}$ pela norma usual (módulo) tem uma base dada pelos conjuntos $(-b, -a) \cup (a, b)$, $a < b \in \mathbb{R}$. As translações não são contínuas nesta topologia, logo a soma também não é contínua.*

Por outro lado, verifica-se sem dificuldades que a topologia descrita no teorema é, na verdade, a menor topologia em $\mathcal{V}$ para a qual as seminormas $p \in \mathscr{P}$ e as translações T_a, $a \in \mathcal{V}$, são contínuas.

Exemplo 1.27. Seja $\mathcal{S}$ um espaço topológico Hausdorff localmente compacto. Consideraremos em $C(\mathcal{S})$ a topologia induzida pelas seminormas $p_K : f \in C(\mathcal{S}) \mapsto \sup_{x \in K} |f(x)|$, para $K \subseteq \mathcal{S}$ compacto (conforme o Exemplo 1.20), chamada de *topologia de convergência uniforme em compactos*.

Vamos mostrar que $C(\mathcal{S})$ é completo. Seja $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma net de Cauchy em $C(\mathcal{S})$, ou seja, para todo compacto $K \subseteq \mathcal{S}$ e para todo $\varepsilon > 0$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que para todos $\mu, \eta \geq \lambda_0$ e para todo $x \in K$, vale

$$|f_\mu(x) - f_\eta(x)| < \varepsilon.$$

Os argumentos usuais de convergência mostram que a net $\{(f_\lambda|_K)\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge uniformemente para uma função contínua $f_K : K \to \mathbb{K}$. Além disso, se K e L são compactos não disjuntos, então $(f_K)\,|_{(K \cap L)} = (f_L)\,|_{(K \cap L)}$. Defina

$$f : x \in \mathcal{S} \mapsto f_{\{x\}}(x) \in \mathbb{K}.$$

Então $f|_K = f_K$ para todo $K \subseteq \mathcal{S}$ compacto. Como $\mathcal{S}$ é localmente compacto, então f é contínua e $f_\lambda \to f$ na topologia de convergência uniforme em compactos. Portanto, $C(\mathcal{S})$ é completo.

Exemplo 1.28. Seja X um conjunto e considere em $\mathbb{K}^X$ a seminorma $p_x : f \in \mathbb{K}^X \mapsto |f(x)| \in \mathbb{R}$, para cada $x \in X$ (conforme o Exemplo 1.19). A topologia em $\mathbb{K}^X$ induzida por estas seminormas é chamada de *topologia de convergência pontual*.

Se considerarmos X com a topologia discreta, temos que $C(X) = \mathbb{K}^X$. Neste caso, as topologias de convergência uniforme em compactos e de convergência pontual coincidem, pois os subconjuntos compactos de X são seus subconjuntos finitos. Munido desta topologia, $\mathbb{K}^X$ é um EVT completo.

Além do mais, o item (d) do Teorema 1.23 implica que a topologia de convergência pontual coincide com a topologia produto em $\mathbb{K}^X$.

A seguinte proposição é consequência direta do fato de $\mathscr{B}$ como no Teorema 1.23 ser uma base local

Proposição 1.29. *Se $\mathbb{W}$ é um EVT e $\mathbb{V}$ tem a topologia induzida pela família de seminormas $\mathscr{P}$, então uma aplicação linear $T : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ é contínua se, e somente se, para todo $p \in \mathscr{P}$, $p \circ T : \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ é uma seminorma contínua.*

Proposição 1.30. *Sejam $\mathscr{P}$ é uma família de seminormas em $\mathcal{V}$ e q uma seminorma em $\mathcal{V}$. São equivalentes:*

(a) q é contínua em $(\mathcal{V}, \mathscr{P})$;

(b) Existem $p_1, \cdots, p_n \in \mathscr{P}$ e $C > 0$ tais que $q(x) \leq C \sum_{i=1}^n p_i(x)$ para todo $x \in \mathcal{V}$.

Demonstração. A implicação (b)⇒(a) é óbvia. Se q é uma seminorma contínua em $(\mathcal{V}, \mathscr{P})$, então existem $p_1, \ldots, p_n \in \mathscr{P}$ e $\delta > 0$ tais que se $p_i(x) < \delta$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$, então $q(x) < 1$. Portanto, para todo $x \in \mathcal{V}$ e para todo $\varepsilon > 0$, temos que

$$q(x) \leq \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{n} p_i(x) + \frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Tomando $\inf_{\varepsilon>0}$ na desigualdade acima, provamos que (a)⇒(b). □

Corolário 1.31. *Sejam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ EVTs com topologias induzidas, respectivamente, por $\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$. Então uma aplicação linear $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ é contínua se, e somente se, para toda $q \in \mathscr{Q}$ existirem $p_1, \ldots, p_n \in \mathscr{P}$ e $k > 0$ tais que, para todo $x \in \mathbb{V}$, $q(Tx) \leq k \sum_{i=1}^n p_i(x)$.*

Em particular, se $\mathscr{P}$ é separante, então $(\mathbb{V}, \mathscr{P})$ é normável se, e somente se, existe uma subfamília finita $\mathscr{Q} \subseteq \mathscr{P}$ tal que para todo $p \in \mathscr{P}$, existe $C > 0$ tal que $p \leq C \cdot \sum_{q \in \mathscr{Q}} q$. Neste caso, $Q = \sum_{q \in \mathscr{Q}} q$ é uma norma que induz a topologia.

Teorema 1.32. *Seja $\mathscr{P}$ uma família separante de seminormas que induz a topologia no EVT $\mathbb{V}$. São equivalentes:*

(a) $\mathbb{V}$ metrizável;

(b) $\mathbb{V}$ possui base local enumerável;

(c) Existe uma subfamília enumerável $\mathscr{P}' \subseteq \mathscr{P}$ tal que $(\mathbb{V}, \mathscr{P}) = (\mathbb{V}, \mathscr{P}')$.

Demonstração. A implicação (a)⇒(b) é imediata. Se $\mathbb{V}$ possui uma base local enumerável $\mathscr{B} = \{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, então tome para cada $n \in \mathbb{N}$ uma subfamília finita $\mathscr{P}_n \subseteq \mathscr{P}$ e $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_{p\in\mathscr{P}_n} V(p, k_n) \subseteq W_n$. Então $\mathscr{P}' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ é enumerável e $(\mathbb{V}, \mathscr{P}) = (\mathbb{V}, \mathscr{P}')$. Isto mostra (b)⇒(c).

Por fim, suponha que $\mathscr{P} = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$. Defina, para todos $x, y \in \mathbb{V}$,

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{p_n(x-y)+1}.$$

Então d está bem definida (de fato, $d(x, y) < 1$), e é uma métrica invariante por translações em $\mathbb{V}$. Verificações simples mostram que d induz a topologia de $(\mathbb{V}, \mathscr{P})$, e portanto $\mathbb{V}$ é metrizável. □

Definição 1.33. Um EVT é dito ser um *espaço de Fréchet* se é metrizável, localmente convexo e completo.

Exemplo 1.34. Seja $\mathcal{S}$ um espaço topológico Hausdorff localmente compacto, e considere $C(\mathcal{S})$ com a topologia de convergência uniforme em compactos (vide Exemplo 1.27). Vamos mostrar que $C(\mathcal{S})$ é um espaço de Fréchet se, e somente se, $\mathcal{S}$ é σ-compacto, e que $C(\mathcal{S})$ é normável se, e somente se $\mathcal{S}$ é compacto.

Suponha primeiro que $\mathcal{S}$ seja σ-compacto. Então existe uma sequência $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos compactos de $\mathcal{S}$ tais que $K_n \subseteq \operatorname{int}(K_{n+1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{S} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Segue que qualquer compacto $L \subseteq \mathcal{S}$ está contido em algum K_n, e portanto $p_L \leq p_{K_n}$. Então $\{p_{K_n} : n \in \mathbb{N}\}$ induz a topologia em $C(\mathcal{S})$, logo $C(\mathcal{S})$ é metrizável pelo Teorema 1.32, e é completo pelo Exemplo 1.27. Portanto, $C(\mathcal{S})$ é um espaço de Fréchet.

Reciprocamente, suponha $\mathcal{S}$ não é σ-compacto, e seja $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma família qualquer de subconjuntos compactos de $\mathcal{S}$. Pelo Teorema 1.32, basta mostrar que $\{p_{K_n} : n \in \mathbb{N}\}$ não induz a topologia em $C(\mathcal{S})$, para concluir que $C(\mathcal{S})$ não é metrizável.

Como $\mathcal{S}$ não é σ-compacto, existe $x \in \mathcal{S} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Dado qualquer $N \in \mathbb{N}$, temos que $\bigcup_{i=1}^N K_i$ é fechado e não contém x. Pelo Lema de Urysohn, existe $f \in C(\mathcal{S})$ tal que $f(x) = 1$ e $f|_{\bigcup_{i=1}^N K_i} = 0$. Portanto, para todo $C > 0$, temos que $p_{\{x\}}(f) = 1 > 0 = C \cdot \sum_{i=1}^N p_{K_i}(f)$. Segue do Corolário 1.31 que $\{p_{K_n} : n \in \mathbb{N}\}$ não induz a topologia em $C(\mathcal{S})$. Concluímos então que $C(\mathcal{S})$ não é metrizável.

Argumentos similares mostram que $C(\mathcal{S})$ é normável se, e somente se, $\mathcal{S}$ é compacto.

Exemplo 1.35. Seja X um conjunto qualquer e considere $\mathbb{K}^X$ com a topologia de convergência pontual. Então $\mathbb{K}^X$ é um espaço de Fréchet se, e somente se, X é enumerável, e $\mathbb{K}^X$ é normável se, e somente se, X é finito. Isto é claro, em vista do Exemplo 1.35, adotando a topologia discreta em X.

No restante desta seção, mostraremos que todo EVT localmente convexo tem a topologia induzida por uma família de seminormas.

Definição 1.36. Um subconjunto A de um espaço vetorial $\mathcal{V}$ é dito ser *absorvente* se $\mathcal{V} = \bigcup_{t>0} tA$ (em particular, $0 \in A$). O *funcional de Minkowski* associado a A é a aplicação $\mu_A : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mu_A(x) = \inf \left\{ t > 0 : t^{-1}x \in A \right\}.$$

Proposição 1.37. *Se $p : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ é uma seminorma, então a "bola associada" $B = \{x \in \mathcal{V} : p(x) < 1\}$ é absorvente e $p = \mu_B$.*

Demonstração. Se $x \in \mathcal{V}$, então $x \in (p(x) + 1)B$, portanto B é absorvente. Se $s > p(x)$, então $p(s^{-1}x) = s^{-1}p(x) < 1$. Segue que $\mu_B(x) \leq p(x)$.

Por outro lado, se $s > \mu_B(x)$, então existe $t > 0$ tal que $\mu_B(x) \leq t < s$ e $t^{-1}x \in B$, logo $p(x) = tp(t^{-1}x) \leq t < s$. Portanto $p(x) \leq \mu_B(x)$. □

Se $\mathbb{V}$ é um EVT, a continuidade da multiplicação nos pontos $(x, 0) \in \mathbb{V} \times \mathbb{K}$ implica que as vizinhanças de $0 \in \mathbb{V}$ são subconjuntos absorventes.

O objetivo a partir daqui é mostrar que as seminormas de um espaço $\mathcal{V}$ são precisamente os funcionais de Minkowski de subconjuntos balanceados, convexos e absorventes de $\mathcal{V}$. Assim, obteremos maneiras de relacionar convexidade local num EVT $\mathbb{V}$ com certas seminormas (contínuas) em $\mathbb{V}$.

Lema 1.38. *Sejam $A, B \subseteq \mathcal{V}$ subconjuntos convexos e absorventes e $x \in \mathcal{V}$.*

(a) Se $0 < s < t$ e $s^{-1}x \in A$ então $t^{-1}x \in A$;

(b) $\mu_{A\cap B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$.

Demonstração. A igualdade $t^{-1}x = (1 - st^{-1})0 + st^{-1}(s^{-1}x)$ prova o item (a). Então $\{t > 0 : t^{-1}x \in A\}$ é um dos conjuntos $[\mu_A(x), \infty)$ ou $(\mu_A(x), \infty)$, e o mesmo ocorre com B. O item (b) segue trivialmente. □

Teorema 1.39. *Seja A um subconjunto convexo absorvente de um espaço vetorial $\mathcal{V}$.*

(a) $\mu_A(x + y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$;

(b) $\mu_A(tx) = t\mu_A(x)$ se $t \geq 0$;

(c) μ_A é uma seminorma, se A é balanceado;

(d) Se $B = \{x \in \mathcal{V} : \mu_A(x) < 1\}$ e $C = \{x \in \mathcal{V} : \mu_A(x) \leq 1\}$, então $B \subseteq A \subseteq C$ e $\mu_B = \mu_A = \mu_C$.

Demonstração. (a) Se $s > \mu_A(x)$ e $t > \mu_A(y)$, então $s^{-1}x, t^{-1}y \in A$ pelo Lema 1.38. Por convexidade,

$$(s + t)^{-1}(x + y) = \frac{s}{s + t}s^{-1}x + \frac{t}{s + t}t^{-1}y \in A,$$

portanto $\mu_A(x + y) \leq s + t$. Isto prova que $\mu_A(x + y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$.

(b) Segue da igualdade $\{s > 0 : s^{-1}(tx) \in A\} = t\,\{s > 0 : s^{-1}x \in A\}$, válida para $t \geq 0$.

(c) Supondo que A é balanceado, basta notar que para todo $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\left\{s > 0 : s^{-1}(\alpha x) \in A\right\} = |\alpha| \cdot \left\{s > 0 : s^{-1}x \in A\right\},$$

e o resultado segue.

(d) A inclusão $A \subseteq C$ é clara. Se $x \in B$, então $x = 1x \in A$, pelo Lema 1.38. Então $B \subseteq A \subseteq C$, e $\mu_C(x) \leq \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ para todo $x \in \mathcal{V}$.

Suponha agora que $\mu_C(x) < s < t$ e $s^{-1}x \in C$. Então

$$\mu_A(t^{-1}x) = t^{-1}s\mu_A(s^{-1}x) < 1,$$

ou seja, $t^{-1}x \in B$, logo $\mu_B(x) \leq t$. Isso mostra que $\mu_B(x) \leq \mu_C(x)$. □

Corolário 1.40. *Seja $\mathscr{C}$ uma coleção de abertos convexos e balanceados do EVT $\mathbb{V}$ tal que a família $\mathscr{B}$ das interseções finitas de dilatações de elementos de $\mathscr{C}$ é uma base local para $\mathbb{V}$. Então $\mathscr{P} = \{\mu_V : V \in \mathscr{C}\}$ é uma família de seminormas contínuas em $\mathbb{V}$ que induz a topologia de $\mathbb{V}$. Em particular, todo EVT localmente convexo tem sua topologia gerada por seminormas, no sentido do Teorema 1.23*

Demonstração. Pelo teorema anterior, $\mathscr{P}$ é de fato uma família de seminormas. A continuidade da multiplicação em $\mathbb{V}$ implica que $\{x \in \mathbb{V} : \mu_V(x) < 1\} = V$ para todo $V \in \mathscr{C}$, e portanto μ_V é contínua. Segue também do Lema 1.38 e do Corolário 1.31 que $\{\mu_{kV} : k > 0, V \in \mathscr{C}\}$ induz a topologia de $\mathbb{V}$. Por outro lado, é simples verificar que $\mu_{kV} = k^{-1}\mu_V$, para todo $k > 0$, e portanto e $\mathscr{P}$ induz a topologia de $\mathbb{V}$. □

Exemplo 1.41. Se $\{\mathbb{V}_i : i \in I\}$ é uma família de EVTs localmente convexos, então $\mathbb{W} = \prod_{i \in I} \mathbb{V}_i$ é um EVT localmente convexo. Suponha que cada $\mathbb{V}_i$ tem a topologia induzida por uma família $\mathscr{P}_i$ de seminormas. Para cada $i \in I$ e $p \in \mathscr{P}_i$, seja $V(i,p) = \{x \in \mathbb{V}_i : p(x) < 1\}$.

A família dos conjuntos da forma

$$V(i,p,\varepsilon) = \{(x_i)_{i \in I} \in \mathbb{W} : p(x_i) < \varepsilon\},$$

onde $i \in I$, $p \in \mathscr{P}_i$ e $\varepsilon > 0$, forma uma sub-base local convexa e balanceada para $\mathbb{W}$, portanto $\left\{\mu_{V(i,p,1)}\right\}$ induz a topologia de $\mathbb{W}$. Mas note que $\mu_{V(i,p,1)} = p \circ \pi_i$, onde $\pi_i : \mathbb{W} \to \mathbb{V}_i$ é a projeção canônica. Portanto, $\mathbb{W}$ tem a topologia induzida pelas seminormas $p \circ \pi_i$, onde $i \in I$ e $p \in \mathscr{P}_i$.

No caso particular de I ser finito e cada $\mathbb{V}_i$ ser normável, digamos, com p_i induzindo a topologia de $\mathbb{V}_i$, então a topologia de $\mathbb{W}$ é induzida por qualquer uma das normas equivalentes,

$$\|(x_i)_{i \in I}\|_{\max} = \max_{i \in I} p_i(x_i) \qquad \text{e} \qquad \|(x_i)_{i \in I}\|_1 = \sum_{i \in I} p_i(x_i),$$

e portanto $\mathbb{W}$ é normável.

1.4 Quocientes

Sejam $\mathcal{V}$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $N \subseteq \mathcal{V}$ um subespaço. Considere a seguinte relação em $\mathcal{V}$: $x \sim_N y$ quando $x - y \in N$. Então $\sim_N$ é uma relação de equivalência e que a classe de equivalência de um ponto $x \in \mathcal{V}$ é igual a $x + N$.

O quociente $\mathcal{V}/N = \mathcal{V}/\sim_N = \{x + N : x \in \mathcal{V}\}$ possui uma estrutura natural de $\mathbb{K}$-espaço vetorial dada por

$$(x + N) + (y + N) = (x + y) + N \quad \text{e} \quad \alpha(x + N) = (\alpha x) + N,$$

para todos $x, y \in \mathcal{V}$, $\alpha \in \mathbb{K}$. A aplicação quociente $\pi : x \in \mathcal{V} \mapsto x + N \in \mathcal{V}/N$ é linear e sobrejetiva.

Agora, se $\mathbb{V}$ é um EVT e N é um subespaço, então a $\mathbb{V}/N$ é um espaço topológico quando munido da topologia quociente: um subconjunto $E \subseteq \mathbb{V}/N$ é aberto quando $\pi^{-1}(E)$ é aberto em $\mathbb{V}$.

Teorema 1.42. *Seja N um subespaço do EVT $\mathbb{V}$, e considere o quociente $\mathbb{V}/N$ munido da topologia quociente.*

(a) $\pi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}/N$ *é linear, contínua e aberta;*

(b) $\mathbb{V}/N$ *é um EVT;*

(c) Se $\mathscr{B}$ *é uma base local para* $\mathbb{V}$*, então* $\{\pi(V) : V \in \mathscr{B}\}$ *é uma base local para* $\mathbb{V}/N$*;*

(d) Se $\mathbb{V}$ *é localmente convexo ou localmente limitado, então* $\mathbb{V}/N$ *também o é;*

(e) $\mathbb{V}/N$ *é Hausdorff se, e somente se,* N *é fechado;*

(f) Se $\mathbb{V}$ *é metrizável e* N *é fechado, então* $\mathbb{V}/N$ *também é metrizável;*

(g) Se $\mathbb{V}$ *é metrizável e completo e* N *é fechado, então* $\mathbb{V}/N$ *também é completo.*

Demonstração. Dado $V \subseteq \mathbb{V}$ aberto, $\pi^{-1}(\pi(V)) = V + N$ é aberto em $\mathbb{V}$, logo $\pi(V)$ é aberto em $\mathbb{V}/N$. Pela definição da topologia e das operações em $\mathbb{V}/N$, π é contínua e linear. Isso prova (a).

Seja E uma vizinhança de $(x + y) + N$ em $\mathbb{V}/N$. Então $\pi^{-1}(E)$ é uma vizinhança de $x + y$ em $\mathbb{V}$, logo existem abertos V, W contendo x e y, respectivamente, tais que $V + W \subseteq \pi^{-1}(E)$, e portanto $\pi(V) + \pi(W) \subseteq E$. Junto com o item (a), isto mostra que a soma é contínua em $\mathbb{V}/N$. A continuidade da multiplicação é demonstrada de maneira similar. Isso prova (b). Os itens (c) e (d) seguem diretamente de (a).

Se $\mathbb{V}/N$ é Hausdorff, então $N = \pi^{-1}(0 + N)$ é fechado, pois π é contínua. Se N é fechado e $x+N \neq y+N$, então $x-y \in \mathbb{V} \setminus N$, que é aberto. Portanto existem vizinhanças V e W de x e y, respectivamente, tais que $(V - W) \cap N = \varnothing$, logo $\pi(V) \cap \pi(W) = \varnothing$. Isso prova ($e$).

Seja d uma métrica invariante que induz a topologia de $\mathbb{V}$. Se N é fechado, verifica-se facilmente que a função $\rho : \mathbb{V}/N \times \mathbb{V}/N \to \mathbb{R}$ dada por

$$\rho(x+N, y+N) = \inf_{n \in N} d(x-y, n)$$

define uma métrica invariante em $\mathbb{V}/N$. A igualdade

$$\pi(\{x \in \mathbb{V} : d(x,0) < \varepsilon\}) = \{u \in \mathbb{V}/N : \rho(u, 0+N) < \varepsilon\},$$

juntamente com o item (a), provam (f).

Agora, se $\mathbb{V}$ é metrizável, completo e N é fechado, seja ρ a métrica dada acima e tome uma sequência de Cauchy $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{V}/N$ em relação a ρ. Existe uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{V}$ tal que $x_n + N = u_n$ e $d(x_n, x_{n+1}) < \rho(u_n, u_{n+1}) + 2^{-n}$, que portanto é de Cauchy e logo converge. Como π é contínua, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\pi(\lim_{n\to\infty} x_n)$. Isso prova (g). □

Exemplo 1.43. Sejam $\mathbb{V}$ um EVT localmente convexo, $\mathscr{P}$ uma família de seminormas que induz sua topologia e N um subespaço de $\mathbb{V}$. Pelo item (d) do teorema acima, $\mathbb{V}/N$ é localmente convexo e, pelo item (c), uma sub-base de abertos para $\mathbb{V}/N$ é dada por conjuntos da forma

$$V(p,\varepsilon) = \{x + N : x \in \mathbb{V},\ p(x) < \varepsilon\}$$

para $p \in P$, $\varepsilon > 0$.

O Corolário 1.40, juntamente com o corolario, 1.31 implicam que a topologia de $\mathbb{V}$ é induzida pelas seminormas $\mu_{V(p,1)}$ para $p \in \mathscr{P}$.

Note agora que, dado $c \in (0,1)$,

$$\begin{aligned} c\mu_{V(p,1)}(x+N) &= \inf\left\{t > 0 : \exists n \in N \text{ tal que } p(t^{-1}x + n) < c^{-1}\right\} \\ &\leq \inf\left\{t > 0 : \exists n \in N \text{ tal que } p(t^{-1}x + n) \leq 1\right\} \\ &= \inf_{n\in N} p(x+n) \leq \mu_{V(p,1)}(x+N). \end{aligned}$$

Tomando $\sup_{0<c<1}$, obtemos $\mu_{V(p)}(x+N) = \inf_{n\in N} p(x+n)$.

Proposição 1.44. *Sejam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ EVTs, N um subespaço de $\mathbb{V}$, $\pi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}/N$ a aplicação quociente e $T \in \mathscr{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. São equivalentes:*

(a) $N \subseteq \ker T = T^{-1}(0)$;

(b) Existe $\widetilde{T} \in \mathscr{L}(\mathbb{V}/N, \mathbb{W})$ *tal que* $\widetilde{T} \circ \pi = T$.

Caso essas afirmações sejam válidas, então a aplicação $\widetilde{T}$ *é única.*

Demonstração. Caso $N \subseteq \ker T$, então a aplicação $\widetilde{T} : \mathbb{V}/N \to \mathbb{W}$ dada por $\widetilde{T}(x+N) = Tx$ para todo $x \in \mathbb{V}$ está bem definida, é linear e $\widetilde{T} \circ \pi = T$. Segue que $\widetilde{T} \in \mathscr{L}(\mathbb{V}/N, \mathbb{W})$. A unicidade vem do fato que π é sobrejetiva.

Reciprocamente, se existir $\widetilde{T} \in \mathscr{L}(\mathbb{V}/N, \mathbb{W})$ tal que $\widetilde{T} \circ \pi = T$, então $N = \ker \pi \subseteq \ker T$. □

2 Convexidade

Neste capítulo são discutidos EVTs localmente convexos conforme a referência [1], iniciando com o teorema de extensão de Hahn-Banach e suas consequências, seguindo para topologias fracas, incluindo o teorema de compacidade de Banach-Alaoglu e, por fim, discutimos limites diretos de EVTs localmente convexos, baseando-nos na referência [2].

2.1 O Teorema de Hahn-Banach

Teorema 2.1 (Teorema de Hahn-Banach)**.** *Suponha que*

(a) $\mathcal{M}$ *é um subespaço de um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial* $\mathcal{V}$*;*

(b) $p : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ *é uma aplicação satisfazendo, para todos* $x, y \in \mathcal{V}$ *e* $t \geq 0$*,*

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad e \quad p(tx) = tp(x);$$

(c) $T \in L(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ *satisfaz* $Tx \leq p(x)$ *para todo* $x \in \mathcal{V}$*.*

Então existe $\widetilde{T} \in L(\mathcal{V}, \mathbb{R})$ *tal que* $\widetilde{T}|_{\mathcal{M}} = T$ *e* $\widetilde{T}x \leq p(x)$ *para todo* $x \in \mathcal{M}$*.*

Demonstração. Seja $\mathscr{E}$ o conjunto dos pares (N, S), onde N é subespaço de $\mathcal{V}$ contendo $\mathcal{M}$ e $S \in L(N, \mathbb{R})$ é tal que $S|_{\mathcal{M}} = T$ e $Sx \leq p(x)$ em N. Note que $\mathscr{E} \neq \varnothing$, pois $(\mathcal{M}, T) \in \mathscr{E}$.

Considere em $\mathscr{E}$ a seguinte ordem parcial:

$$(N_1, S_1) \leq (N_2, S_2) \quad \text{quando} \quad N_1 \subseteq N_2 \text{ e } S_2|_{N_1} = S_1.$$

Dada uma cadeia (isto é, um subconjunto totalmente ordenado de $\mathscr{E}$) $\{(N_i, S_i) : i \in I\}$, o par (N, S) definido por

$$N = \bigcup_{i \in I} N_i \quad \text{e} \quad Sx = S_i x \text{ se } x \in N_i$$

pertence a $\mathscr{E}$ e é um majorante de $\{(N_i, S_i) : i \in I\}$.

Pelo Lema de Zorn, $\mathscr{E}$ possui um elemento maximal $(\mathcal{N}, \widetilde{T})$. Basta então mostrar que $\mathcal{N} = \mathcal{V}$.

Suponha por absurdo que $\mathcal{N} \neq \mathcal{V}$, e tome $x_0 \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{N}$. Note que para todos $x, y \in \mathcal{N}$, $\widetilde{T}(y+x) \leq p(y+x) \leq p(y - x_0) + p(x + x_0)$, portanto $\widetilde{T}y - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - \widetilde{T}x$.

Seja $\alpha_0 = \sup_{y \in \mathcal{N}} \widetilde{T}y - p(y - x_0)$. Então para todos $x, y \in \mathcal{N}$, temos que

$$\widetilde{T}y - p(y - x_0) \leq \alpha_0 \leq p(x + x_0) - \widetilde{T}x. \tag{2.1}$$

Defina $\widetilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N} \oplus \mathbb{R}x_0$ e $\widetilde{S} \in L(\widetilde{\mathcal{N}}, \mathbb{R})$ por

$$\widetilde{S}(x + tx_0) = \widetilde{T}x + t\alpha_0, \quad \text{para todos } x \in \mathcal{N}, t \in \mathbb{R}$$

Para $t \neq 0$, as desigualdades em (2.1) aplicadas com $t^{-1}x$ no lugar de x e $t^{-1}y$ no lugar de y mostram que, para todos $x, y \in \mathcal{V}$

$$\widetilde{S}(x + tx_0) \leq p(x + tx_0) \quad \text{e} \quad \widetilde{S}(y - tx_0) \leq p(y - tx_0)$$

e o mesmo vale para $t = 0$. Então $(\widetilde{\mathcal{N}}, \widetilde{S}) \in \mathscr{E}$ e é um elemento estritamente maior do que $(\mathcal{N}, \widetilde{T})$, contradizendo sua maximalidade. Concluímos então que $\mathcal{N} = \mathcal{V}$, e $\widetilde{T}$ é a extensão de T buscada. □

No caso do corpo de base ser $\mathbb{C}$, ainda obtemos um resultado de extensão de funcionais lineares que segue como consequência do resultado anterior. Para isso, devemos analisar mais de perto a relação entre funcionais lineares sobre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ sobre um $\mathbb{C}$-espaço vetorial.

Seja $\mathcal{V}$ um $\mathbb{C}$-espaço vetorial. Então $\mathcal{V}$ tem uma estrutura natural de $\mathbb{R}$ espaço vetorial. Dada uma aplicação $\mathbb{C}$-linear $T : \mathcal{V} \to \mathbb{C}$, T pode ser decomposta como $T = \mathrm{Re}T + i\mathrm{Im}T$, e $\mathrm{Re}T : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ é uma aplicação $\mathbb{R}$-linear. Note agora que para todo $x \in \mathcal{V}$,

$$-i\mathrm{Re}T(ix) + \mathrm{Im}T(ix) = -i(T(ix)) = Tx = \mathrm{Re}Tx + i\mathrm{Im}Tx.$$

Logo, $\mathrm{Im}Tx = -\mathrm{Re}T(ix)$

Reciprocamente, é fácil verificar se $T : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ é $\mathbb{R}$-linear no $\mathbb{C}$-espaço vetorial $\mathcal{V}$ então a aplicação $x \in \mathcal{V} \mapsto Tx - iT(ix)$ é $\mathbb{C}$-linear.

Teorema 2.2 (Teorema de Hahn-Banach, caso complexo)**.** *Suponha que $\mathcal{M}$ é um subespaço de $\mathcal{V}$, p é uma seminorma em $\mathcal{V}$ e $T \in L(\mathcal{M}, \mathbb{K})$ satisfaz $|Tx| \leq p(x)$ em $\mathcal{M}$. Então existe $\widetilde{T} \in L(\mathcal{V}, \mathbb{K})$ tal que $\widetilde{T}|_{\mathcal{M}} = T$ e satisfazendo $|\widetilde{T}x| \leq p(x)$ para todo $x \in \mathcal{V}$.*

Demonstração. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, este é um caso particular do teorema anterior. Suponha então $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, e seja $S = \mathrm{Re}T$. Pelo Teorema 2.1, existe uma extensão linear $\widetilde{S} : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ de S tal que $\widetilde{S}x \leq p(x)$ para todo $x \in \mathcal{V}$. Seja $\widetilde{T} : x \in \mathcal{V} \mapsto \widetilde{S}x - i\widetilde{S}(ix) \in \mathbb{C}$ o único funcional $\mathbb{C}$-linear cuja parte real é $\widetilde{S}$. Fica claro então que $\widetilde{T}|_{\mathcal{M}} = T$.

Seja agora $x \in \mathcal{V}$. Então existe $\alpha \in \mathbb{C}$ com $|\alpha| = 1$ tal que $|\widetilde{T}(x)| = \alpha\widetilde{T}(x)$. Logo

$$|\widetilde{T}(x)| = \widetilde{T}(\alpha x) = \mathrm{Re}\widetilde{T}(\alpha x) = \widetilde{S}(\alpha x) \leq p(\alpha x) = p(x). \quad \square$$

Definição 2.3. O *espaço dual* de um EVT $\mathbb{V}$ é o espaço $\mathbb{V}^* = \mathscr{L}(\mathbb{V}, \mathbb{K})$.

Note que se $\mathbb{V}$ é um EVT localmente convexo com topologia gerada por uma família $\mathscr{P}$ de seminormas, pelo Corolário 1.31 um funcional linear $T : \mathbb{V} \to \mathbb{K}$ é contínuo se, e somente se, existem $C > 0$ e $p_1, \ldots, p_n \in \mathscr{P}$ tais que $|Tx| \leq C \sum_{i=1}^n p_i(x)$ para todo $x \in \mathbb{V}$.

Corolário 2.4. *Sejam* $\mathbb{V}$ *é um espaço localmente convexo,* $\mathbb{M}$ *um subespaço e* $T \in \mathbb{M}^*$*. Então existe* $\widetilde{T} \in \mathbb{V}^*$ *que estende* T*.*

Demonstração. Seja $\mathscr{P}$ uma família de seminormas que induz a topologia de $\mathbb{V}$. Pela Observação 1.24, a topologia de $\mathbb{M}$ é a induzida pelas restrições de $\mathscr{P}$ – isto é, pela família $\{p|_{\mathbb{M}} : p \in \mathscr{P}\}$ – então existem $p_1, \dots, p_n \in \mathscr{P}$ e $C > 0$ tais que para todo $x \in \mathbb{M}$ temos

$$|Tx| \leq C \sum_{i=1}^{n} p_i(x).$$

Como $C \sum_{i=1}^{n} p_i$ é uma seminorma em $\mathbb{V}$, o Teorema de Hahn-Banach implica que T se estende para uma função $\widetilde{T} \in L(\mathbb{V}, \mathbb{K})$ tal que para todo $x \in \mathbb{V}$, $|\widetilde{T}x| \leq C \sum_{i=1}^{n} p_i(x)$, e portanto $\widetilde{T} \in \mathbb{V}^*$. □

Corolário 2.5. *Se* $\mathbb{V}$ *é um espaço localmente convexo Hausdorff, então* $\mathbb{V}^*$ *é separante.*

Demonstração. Dado $x \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$, basta aplicar o Corolário 2.4 para $\mathbb{M} = \mathbb{K}x$ e $T : \alpha x \in \mathbb{M} \mapsto \alpha \in \mathbb{K}$. De fato, pelo Teorema 1.23(c) e pelo Corolário 1.40, existe uma seminorma contínua p em $\mathbb{V}$ tal que $p(x) \neq 0$, e nesse caso $|Ty| = p(x)^{-1} p(y)$ para todo $y \in \mathbb{M}$, e portanto $T \in \mathbb{M}^*$. □

O próximo teorema é conhecido como *Teorema de Separação de Hahn-Banach*, pois implica que, sob certas hipóteses, subconjuntos convexos e disjuntos de um EVT podem ser separados por hiperplanos, isto é, subespaços de codimensão 1.

Lema 2.6. *Se* $\mathbb{V}$ *é um EVT,* $K \subseteq \mathbb{V}$ *é compacto e* $F \subseteq \mathbb{V}$ *é fechado, então existe uma vizinhança* V *de* 0 *tal que* $(K + V) \cap F = \varnothing$*.*

Demonstração. Para cada $x \in K$, tome V_x vizinhança de 0 tal que $(x + V_x + V_x) \cap F = \varnothing$. Por compacidade, existem $x_1, \dots, x_n \in K$ tais que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i})$. Tomando $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$, obtemos

$$(K + V) \cap F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_i + V) \cap F = \varnothing. \quad \square$$

Teorema 2.7. *Sejam* A *e* B *subconjuntos disjuntos convexos e não vazios de um EVT* $\mathbb{V}$*.*

(a) Se A *é aberto, então existem* $T \in \mathbb{V}^*$ *e* $\gamma \in \mathbb{R}$ *tais que, para todos* $x \in A$ *e* $y \in B$*,*

$$\mathit{Re}Tx < \gamma \leq \mathit{Re}Ty.$$

(b) Se A *é compacto,* B *é fechado e* $\mathbb{V}$ *é localmente convexo, então existem* $T \in \mathbb{V}^*$ *e* $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ *tais que, para todos* $x \in A$ *e* $y \in B$*,*

$$\mathit{Re}Tx < \gamma_1 < \gamma_2 < \mathit{Re}Ty.$$

Demonstração. Basta provar o caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. O caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ segue considerando a relação entre funcionais $\mathbb{R}$-lineares e $\mathbb{C}$-lineares conforme feito antes do Teorema 2.2.

(a) Sejam $a_0 \in A$ e $b_0 \in B$ quaisquer, $x_0 = b_0 - a_0$ e $C = A - B + x_0$. Então C é uma vizinhança convexa da origem e, como $A \cap B = \varnothing$, então $x_0 \notin C$, logo $\mu_C(x_0) \geq 1$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $T \in L(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ tal que $Tx_0 = 1 \leq \mu_C(x_0)$ e $|Tx| \leq \mu_C(x)$ para todo $x \in \mathbb{V}$, e portanto T é contínua. Dados $a \in A$ e $b \in B$, temos que
$$Ta - Tb + 1 = T(a - b + x_0) \leq \mu_C(a - b + x_0) < 1,$$
pois $C = A - B + x_0$ é aberto, e portanto $Ta \leq Tb$.

Segue facilmente da continuidade das operações em $\mathbb{V}$ que todo funcional linear contínuo não nulo é aberto, e portanto $T(A)$ é um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}$. Por fim, basta tomar $\gamma = \sup T(A)$.

(b) Pelo Lema 2.6, tome uma vizinhança convexa V de 0 tal que $(A + V) \cap B = \varnothing$. Pelo item (a), existem $T \in \mathbb{V}^*$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tais que para todos $x \in A + V$ e $y \in B$, $Tx < \gamma \leq Ty$. Como $T(A)$ é subconjunto compacto do aberto $T(A + V)$, basta tomar quaisquer $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ com $\sup T(A) < \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma$, e temos o resultado. □

Corolário 2.8. *Sejam B um subconjunto convexo e balanceado de um EVT localmente convexo $\mathbb{V}$ e $x_0 \in \mathbb{V}$. Então $x_0 \notin cl(B)$ se, e somente se, existe $T \in \mathbb{V}^*$ tal que* $\sup_{y \in B} |Ty| \leq 1 < |Tx_0|$.

Demonstração. Se existe T como no enunciado, então $\{y \in \mathbb{V} : |Ty| > 1\}$ é uma vizinhança de x_0 que não intersecta B, logo $x_0 \notin \mathrm{cl}\,(B)$.

Reciprocamente, se $x_0 \notin \mathrm{cl}\,(B)$, o item (b) do Teorema anterior aplicado ao fechado $\mathrm{cl}\,(B)$ e ao compacto $\{x_0\}$ implica que existem $T \in \mathbb{V}^*$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tais que
$$-|Tx_0| \leq \mathrm{Re} Tx_0 < \gamma < \inf_{y \in B} \mathrm{Re} Ty.$$

Como B é balanceado, $\inf_{y \in B} \mathrm{Re} Ty = -\sup_{y \in B} |Ty| \leq 0$, e a aplicação T/γ satisfaz às condições desejadas. □

Corolário 2.9. *Um subespaço $\mathbb{W}$ de um EVT localmente convexo $\mathbb{V}$ é denso se, e somente se, toda aplicação $T \in \mathbb{V}^*$ que se anula em $\mathbb{W}$ também se anula em $\mathbb{V}$.*

Demonstração. Vamos fazer somente a implicação não-óbvia. Se $x_0 \in \mathbb{V} \setminus \mathrm{cl}\,(\mathbb{W})$, tome T como no Corolário 2.8 com $B = \mathbb{W}$. Então $T \neq 0$, mas $T(\mathbb{W})$ é um subespaço próprio de $\mathbb{K}$, logo $T(\mathbb{W}) = \{0\}$. □

2.2 Topologias Fracas

Lema 2.10. *Se $\mathcal{V}$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $T_1, \ldots, T_n, S \in L(\mathcal{V}, \mathbb{K})$, então são equivalentes:*

(i) Existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que $S = \sum_{i=1}^n \alpha_i T_i$.

(ii) $N := \bigcap_{i=1}^n \ker T_i \subseteq \ker S$.

Demonstração. A implicação (i)⇒(ii) é óbvia. Reciprocamente, Se $N \subseteq \ker S$, defina $\eta \in L(\mathcal{V}, \mathbb{K}^n)$ por

$$\eta(x) = (T_1 x, \ldots, T_n x) \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{V}.$$

Então $\ker \eta = N \subseteq \ker S$, e portanto $F : \eta(x) \in \eta(\mathcal{V}) \mapsto Sx \in \mathbb{K}$ está bem-definida e se estende para $\mathbb{K}^n$, logo existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que $F(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$ ($u_i \in \mathbb{K}$). Segue que $S = F \circ \eta = \sum_{i=1}^n \alpha_i T_i$. □

Teorema 2.11. *Sejam $\mathcal{V}$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $\mathscr{T}$ um subespaço de $L(\mathcal{V}, \mathbb{K})$. Então a topologia fraca τ induzida por $\mathscr{T}$ faz de $\mathcal{V}$ um EVT localmente convexo e cujo dual é $\mathscr{T}$. Além disso, $(\mathcal{V}, \tau)$ é Hausdorff se, e somente se, $\mathscr{T}$ é separante.*

Demonstração. Seja $\mathscr{P} = \{|T| : T \in \mathscr{T}\}$. Então $\mathscr{P}$ é uma família de seminormas em $\mathcal{V}$ que, pelo Teorema 1.23, induz uma topologia $\tau_{\mathscr{P}}$ em $\mathcal{V}$ na qual $\mathcal{V}$ é um EVT localmente convexo e que é Hausdorff exatamente quando $\mathscr{P}$, e portanto $\mathscr{T}$, são separantes. Basta mostrar que $\tau = \tau_{\mathscr{P}}$.

A inclusão $\tau \subseteq \tau_{\mathscr{P}}$ segue da definição de topologia fraca. A linearidade dos elementos de $\mathscr{T}$ implica que τ é invariante por translações, e portanto $\tau_{\mathscr{P}} \subseteq \tau$ (ver Observação 1.26).

Considere agora o dual $\mathcal{V}^*$. É claro que $\mathscr{T} \subseteq \mathcal{V}^*$. Se $S \in \mathcal{V}^*$, então existem $T_1, \ldots, T_n \in \mathscr{T}$ e $C > 0$ tais que para todo $x \in \mathcal{V}$, $|Sx| \leq C \sum_{i=1}^n |T_i x|$, logo $\bigcap_{i=1}^n \ker T_i \subseteq \ker S$. Do Lema 2.10 segue que $S \in \sum_{i=1}^n \mathbb{K} T_i \subseteq \mathscr{T}$. □

Definição 2.12. A *topologia fraca* de um EVT $\mathbb{V}$ é a topologia fraca induzida por $\mathbb{V}^*$ em $\mathbb{V}$, e $\mathbb{V}$ munido dessa topologia será denotado por $(\mathbb{V}, w)$

O adjetivo "fraco" será utilizado quando nos referirmos a esta topologia (vizinhança fraca, fechado fraco, etc. . .), e o fecho fraco de um subconjunto $E \subseteq \mathbb{V}$ será denotado por $\mathrm{cl}\,(E, w)$. O adjetivo "forte" será utilizado quando nos referirmos à topologia original.

Se τ denota a topologia original de $\mathbb{V}$ e τ_w denota a topologia fraca, tem-se que $\tau_w \subseteq \tau$. Como topologias fracas preservam o dual, então $(\tau_w)_w = \tau_w$, mas não é verdade, em geral, que $\tau = \tau_w$, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 2.13. Seja $\mathbb{V}$ um EVT de dimensão infinita cujo dual separa pontos (o que ocorre, por exemplo, se $\mathbb{V} = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ com a topologia produto). Dada uma vizinhança fraca básica

$$V = \{x \in \mathbb{V} : |T_i x| < \varepsilon \text{ para } 1 \leq i \leq n\},$$

onde $T_1, \ldots, T_n \in \mathbb{V}^*$ e $\varepsilon > 0$, seja $N = \bigcap_{i=1}^n \ker T_i$. Então $x \mapsto (T_1 x, \ldots, T_n x)$ é uma aplicação linear de $\mathbb{V}$ em $\mathbb{K}^n$ cujo kernel é N, e portanto $\dim \mathbb{V} \leq n + \dim N$, ou seja, N é um subespaço de dimensão infinita de $\mathbb{V}$ e $N \subseteq V$.

Desta forma, toda vizinhança fraca de 0 possui um subespaço de dimensão infinita de $\mathbb{V}$. Em particular, $(\mathbb{V}, w)$ não é localmente limitado visto que é Hausdorff.

Uma questão importante é a de quais subconjuntos fechados de um EVT são mantidos quando tomamos a topologia fraca, e é natural esperarmos que subconjuntos fechados que sejam mantidos por transformações lineares também sejam mantidos na topologia fraca. A seguinte proposição, que é um resultado básico de álgebra linear, ajuda a caracterizar estes conjuntos.

Proposição 2.14. *Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$. Então T é linear se, e somente se, satisfaz:*

(i) $T(0) = 0$;

(ii) *Se $x, y \in \mathcal{V}$ e $0 \leq t \leq 1$ então $T((1-t)x + ty) = (1-t)Tx + tTy$, e, caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, que $T(ix) = iTx$.*

Desta forma, transformações lineares são aquelas que "preservam linhas" (e a origem). Isto motiva o seguinte teorema:

Teorema 2.15. *Seja E um subconjunto convexo do EVT localmente convexo $\mathbb{V}$. Então $cl(E, w) = cl(E)$.*

Demonstração. A inclusão $\mathrm{cl}(E) \subseteq \mathrm{cl}(E, w)$ é imediata. Recíprocamente, se $x_0 \notin \mathrm{cl}(E)$, então o item (b) do Teorema 2.7 implica que existe $T \in \mathbb{V}^*$ tal que $\mathrm{Re}Tx_0 < \inf \mathrm{Re}T(\mathrm{cl}(E))$, e portanto $V = \{y \in \mathbb{V} : \mathrm{Re}Ty < \inf \mathrm{Re}T(\mathrm{cl}(E))\}$ é uma vizinhança fraca de x_0 que não intersecta E. Segue que $x_0 \notin \mathrm{cl}(E)_w$. □

Corolário 2.16. *Um subespaço $\mathcal{M}$ do EVT localmente convexo $\mathbb{V}$ é fechado se, e somente se, é fracamente fechado.*

Vamos agora analisar um modo de topologizar o dual de um EVT $\mathbb{V}$.

Definição 2.17. Dado um EVT $\mathbb{V}$, a aplicação (claramente linear) $\mathrm{ev}(x) : T \in \mathbb{V}^* \mapsto Tx \in \mathbb{K}$ é chamada de *valoração em x*. A aplicação $\mathrm{ev} : x \in \mathbb{V} \mapsto \mathrm{ev}(x) \in L(\mathbb{V}^*, \mathbb{K})$ é chamada de *valoração*.

Note, além disso, que ev é linear, e portanto $\{\text{ev}(x) : x \in \mathbb{V}\}$ é uma família separante de funcionais lineares em $\mathbb{V}^*$.

Definição 2.18. Dado um EVT $\mathbb{V}$, a *topologia fraca** de $\mathbb{V}^*$ é a topologia fraca em $\mathbb{V}^*$ induzida por $\{\text{ev}(x) : x \in \mathbb{V}\}$, e $\mathbb{V}^*$ munido desta topologia será denotado por $(\mathbb{V}^*, w*)$.

Notação e nomenclatura similar à utilizada com a topologia fraca será utilizada quando nos referirmos à topologia fraca*.

As topologias fracas* possuem uma propriedade importante de compacidade dada pelo seguinte teorema.

Teorema 2.19 (Teorema de Banach-Alaoglu)**.** *Sejam V uma vizinhança de* 0 *no EVT* $\mathbb{V}$ *e*

$$K = \{T \in \mathbb{V}^* : \forall x \in V,\ |Tx| \leq 1\}$$

(K é chamado de polar *de V). Então K é compacto em* $(\mathbb{V}^*, w*)$.

Demonstração. Dado $x \in \mathbb{V}$, escolha um número real $\gamma(x) > 0$ tal que $x \in \gamma(x) \cdot V$. Assim, para todo $T \in K$, temos que $|Tx| \leq \gamma(x)$. Seja $D_x = \{\alpha \in \mathbb{K} : |\alpha| \leq \gamma(x)\}$.

Seja $\mathscr{D} = \prod_{x \in \mathbb{V}} D_x$ munido da topologia produto. Pelo Teorema de Tychonoff, $\mathscr{D}$ é compacto e Hausdorff, e $K \subseteq \mathscr{D} \cap \mathbb{V}^*$. Dado $T_0 \in K$, os conjuntos da forma

$$\{T \in K : |Tx_i - T_0 x_i| < \varepsilon \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$$

onde $\varepsilon > 0$ e $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{V}$, formam uma base de vizinhanças de T_0 em K, vendo K tanto como subespaço topológico de $(\mathbb{V}^*, w*)$ quanto de $\mathscr{D}$. Basta então provar que K é fechado em $\mathscr{D}$.

Considerando as projeções $\pi_x : f \in \mathscr{D} \mapsto f(x) \in D_x$, a topologia de $\mathscr{D}$ é a topologia fraca induzida por $\{\pi_x : x \in \mathbb{V}\}$. Dados $x, y, \in \mathbb{V}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, os conjuntos $A_{x,y,\alpha} = \{f \in \mathscr{D} : \pi_{x+\alpha y}(f) = (\pi_x + \alpha \pi_y)(f)\}$ e $B_x = \{f \in \mathscr{D} : |f(x)| \leq 1\}$ são fechados em K. Como

$$K = \bigcap_{x,y \in \mathbb{V},\ \alpha \in \mathbb{K}} A_{x,y,\alpha} \cap \bigcap_{x \in \mathbb{V}} B_x,$$

segue que K é fechado no compacto Hausdorff $\mathscr{D}$, e portanto K é compacto em $(\mathbb{V}^*, w*)$.

□

2.3 Limites Diretos

Nesta seção discutiremos limites diretos, que serão utilizados no estudo de distribuições.

Definição 2.20. Sejam I um conjunto não-vazio, $\mathcal{W}$ um espaço vetorial, e sejam dados, para cada $i \in I$, um EVT localmente convexo $\mathbb{V}_i$ e uma aplicação $T_i \in L(\mathbb{V}_i, \mathcal{W})$. Seja $\mathscr{C}$ a coleção dos subconjuntos U absorventes, balanceados e convexos de $\mathcal{W}$ tais que para todo $i \in I$, $T_i^{-1}(U)$ é aberto em $\mathbb{V}_i$.

A *topologia de limite direto de $\mathcal{W}$ pela família $\{T_i : i \in I\}$* é a topologia induzida pela família de seminormas $\{\mu_U : U \in \mathscr{C}\}$, que torna $\mathcal{W}$ um EVT localmente convexo.

Exemplo 2.21. A família $\mathscr{C}$ da definição acima não é (necessariamente) uma base local para $\mathcal{W}$: Tome $I = \{1\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 = \{0\}$, $\mathcal{W} = \mathbb{R}$ e $T = T_1 : 0 \in \{0\} \mapsto 0 \in \mathbb{R}$. Neste caso, $\mathscr{C}$ consiste de todos os intervalos contendo 0 em seu interior, e a topologia de limite direto em $\mathbb{R}$ coincide com a usual.

Teorema 2.22. *Seja $\mathcal{W}$ um espaço vetorial munido da topologia de limite direto por uma família $\{T_i : \mathbb{V}_i \to \mathcal{W} : i \in I\}$ como na Definição 2.20. Então*

(a) Cada $T_i : \mathbb{V}_i \to \mathcal{W}$ é contínua.

(b) Se $\mathbb{U}$ é um EVT localmente convexo e $S \in L(\mathcal{W}, \mathbb{U})$, então S é contínua se, e somente se, todas as aplicações $S \circ T_i$ o forem.

Demonstração. Dados $i \in I$ e $U \in \mathscr{C}$ como na Definição 2.20, note que, como $T_i^{-1}(U)$ é aberto,

$$T_i^{-1}(\{x \in \mathcal{W} : \mu_U(x) < 1\} = T_i^{-1}(U)$$

e portanto T_i é contínua, visto que $\mathscr{C}$ é fechado por dilatações.

Nas condições de (b), se cada aplicação $S \circ T_i$ for contínua, então dado um subconjunto aberto, convexo e balanceado Z de $\mathbb{U}$, o subconjunto $S^{-1}(Z)$ é absorvente, convexo, balanceado, e para todo $i \in I$, $T_i^{-1}(S^{-1}(Z)) = (S \circ T_i)^{-1}(Z)$ é aberto, logo $S^{-1}(Z) \in \mathscr{C}$. Além disso, como Z é aberto, $S^{-1}(Z) = \left\{x \in \mathcal{W} : \mu_{S^{-1}(Z)}(x) < 1\right\}$ é aberto em $\mathcal{W}$, e portanto S é contínua. A recíproca é óbvia. □

Definição 2.23. Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial e suponha que exista uma família $\{\mathbb{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subespaços de $\mathcal{V}$ satisfazendo

(i) Cada $\mathbb{V}_n$ é um EVT localmente convexo;

(ii) $\mathbb{V}_n \subseteq \mathbb{V}_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{V}_n$;

(iii) Caso $n \leq m$, a topologia de $\mathbb{V}_n$ é a induzida por $\mathbb{V}_m$.

Considere as inclusões $i_n : \mathbb{V}_n \hookrightarrow \mathcal{V}$. O espaço $\mathcal{V}$ com a topologia de limite direto pela família $\{i_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é chamado de *limite direto estrito* da sequência $\{\mathbb{V}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, e é denotado por $\lim \mathbb{V}_n$.

Proposição 2.24. *Seja $\mathbb{V}_1 \subseteq \mathbb{V}_2 \subseteq \cdots$ uma sequência de EVTs localmente convexos tais que $\mathbb{V}_n$ tem a topologia (e a estrutura de EVT) induzida por $\mathbb{V}_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e seja $\mathcal{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{V}_n$. Considere as inclusões $i_n : \mathbb{V}_n \hookrightarrow \mathcal{V}$. Dada uma sequência crescente $n_1 < n_2 < \cdots$ de números naturais, tem-se que* $\lim \mathbb{V}_n = \lim \mathbb{V}_{n_k}$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.22, é fácil ver que as identidades, $i : \lim \mathbb{V}_n \to \lim \mathbb{V}_{n_k}$ e $j : \lim \mathbb{V}_{n_k} \to \lim \mathbb{V}_n$ são contínuas, o que significa que estas topologias em $\mathcal{V}$ coincidem. $\square$

Lema 2.25. *Sejam $\mathbb{V}$ um EVT localmente convexo e $\mathbb{W}$ um subespaço munido da topologia induzida por $\mathbb{V}$. Seja $V \subseteq \mathbb{W}$ aberto, convexo e balanceado. Então existe $Z \subseteq \mathbb{V}$ aberto, convexo e balanceado tal que $Z \cap \mathbb{W} = V$.*

Demonstração. Sejam $O \subseteq \mathbb{V}$ aberto tal que $O \cap \mathbb{W} = V$. Então existe $U \subseteq O$ aberto, convexo e balanceado. Seja

$$Z = \bigcup_{0 \leq t \leq 1} ((1-t)U + tV).$$

Como U e V são convexos, abertos e balanceado, então $Z = \bigcup_{0<t<1}(1-t)\,(U + tV)$ também é convexo, aberto e balanceado.

É claro que $V \subseteq Z \cap \mathbb{W}$. Reciprocamente, se $u \in U$, $v \in V$, $t \in (0,1)$ e $(1-t)u + tv = x \in \mathbb{W}$, então $(1-t)u = x - tv \in \mathbb{W}$, logo $u \in \mathbb{W} \cap U \subseteq V$, e segue que $(1-t)u + tv \in V$. Concluindo, $Z \cap \mathbb{W} = V$. $\square$

Corolário 2.26. *Seja $\mathbb{V} = \lim \mathbb{V}_n$. Então a topologia de $\mathbb{V}_n$ é a induzida por $\mathbb{V}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.24, é suficiente considerar o caso $n = 1$. Como a inclusão $i_1 : \mathbb{V}_1 \hookrightarrow \mathbb{V}$ é contínua, a topologia original de $\mathbb{V}_1$ é mais forte do que a induzida por $\mathbb{V}$. Só resta mostrar que toda vizinhança original de 0 em $\mathbb{V}_1$ é da forma $V \cap \mathbb{V}_1$ para alguma vizinhança V de 0 em $\mathbb{V}$.

Seja $U \subseteq \mathbb{V}_1$ uma vizinhança balanceada convexa de 0 em sua topologia original. Pelo lema acima, é possível tomar uma sequência $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de vizinhanças balanceadas e convexas de 0 em $\mathbb{V}_i$ em suas topologias originais tais que $U_1 = U$ e $U_{i+1} \cap \mathbb{V}_i = U_i$ para $i \geq 1$.

Então $U_\infty = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ é absorvente, balanceado, convexo e, para todo $i \in \mathbb{N}$, $U_\infty \cap \mathbb{V}_i = U_i$ é aberto. Então μ_{U_∞} é uma seminorma contínua em $\mathbb{V}$. Como $U_\infty = \mu_{U_\infty}^{-1}[0,1)$, então U_∞ é um aberto em $\mathbb{V}$ tal que $U_\infty \cap \mathbb{V}_1 = U$. $\square$

Corolário 2.27. $\lim \mathbb{V}_n$ *é Hausdorff se, e somente se, cada $\mathbb{V}_n$ o é.*

Teorema 2.28. *Se $\mathbb{V} = \lim \mathbb{V}_n$ e cada $\mathbb{V}_n$ e completo, então $\mathbb{V}$ também é completo.*

Demonstração. Seja $\mathscr{B}$ uma base local convexa balanceada para $\mathbb{V}$. Seja $\{y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma net de Cauchy em $\mathbb{V}$. Vamos mostrar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $\lambda_0 \in \Lambda$ e $U_0 \in \mathscr{B}$ existem $\lambda \geq \lambda_0$ e $x \in U_0$ tais que $y_\lambda + x \in \mathbb{V}_{n_0}$.

Por absurdo, suponha que isto não é válido. Então existem sequências $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ em Λ e $W_1 \supseteq W_2 \supseteq \cdots$ em $\mathscr{B}$ tais que $(F_n + W_n) \cap \mathbb{V}_n = \varnothing$, onde $F_n = \{y_\lambda : \lambda \geq \lambda_n\}$.

Considere

$$U=\left\{\sum_{k=1}^{p}\alpha_k x_k : p\in\mathbb{N},\alpha\in\mathbb{K},\sum_{k=1}^{p}|\alpha_k|\leq 1, x_k\in W_k\cap\mathbb{V}_k\right\},$$

que é uma vizinhança de 0 em $\mathbb{V}$, visto que é absorvente, convexo, balanceado e $U=\{x\in\mathbb{V}:\mu_U(x)<1\}$, pois cada W_k é aberto.

Mostremos que $(F_n+U)\cap\mathbb{V}_n=\varnothing$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Caso contrário, seja $y=z_n+\sum_{k=1}^{p}\alpha_k x_k\in(F_n+U)\cap\mathbb{V}_n$, com $z_n\in F_n$, $\sum_{k=1}^{p}|\alpha_k|\leq 1$ e $x_k\in W_k\cap\mathbb{V}_k$. Pela escolha dos W_k, $z_n+\sum_{i>n}\alpha_k x_k\in F_n+W_n$, mas $z_n+\sum_{i>n}\alpha_k x_k=y-\sum_{k\leq n}\alpha_k x_k\in\mathbb{V}_n$, um absurdo. Portanto, $(F_n+U)\cap\mathbb{V}_n=\varnothing$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Agora, como $\{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é net de Cauchy, existe $\lambda_U\in\Lambda$ tal que se $\lambda,\gamma\geq\lambda_U$ então $y_\lambda-y_\gamma\in U$. Seja $k\in\mathbb{N}$ tal que $y_{\lambda_U}\in\mathbb{V}_k$. Tome $\gamma\geq\lambda_U,\lambda_k$. Então $\mathbb{V}_k\ni y_{\lambda_U}=y_\gamma+(y_{\lambda_U}-y_\gamma)\in F_k+U$, um absurdo.

Concluímos então que existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para todos $\lambda\in\Lambda$ e $U\in\mathscr{B}$, existem $\Gamma(\lambda,U)\geq\lambda$ e $x_{\lambda,U}\in U$ tais que $y_{\Gamma(\lambda,U)}+x_{\lambda,U}\in\mathbb{V}_n$. Como a net $\left\{y_{\Gamma(\lambda,U)}+x_{\lambda,U}\right\}_{(\lambda,U)\in\Lambda\times\mathscr{B}}$ é de Cauchy no EVT completo $\mathbb{V}_{n_0}$, então converge para um ponto $v\in\mathbb{V}_{n_0}$. Segue facilmente que $\{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge em $\mathbb{V}$ para v. □

Note que se $\mathbb{V}=\lim\mathbb{V}_n$ e cada $\mathbb{V}_n$ é metrizável, então uma aplicação linear $T:\mathbb{V}\to\mathbb{W}$, onde $\mathbb{W}$ é um EVT localmente convexo, é contínua se, e somente se, para toda sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que esteja contida em algum dos $\mathbb{V}_n$ e que convirja para 0, $\{T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ também convirja para 0 em $\mathbb{W}$. Entretanto, $\mathbb{V}$ não é (necessariamente) metrizável, como mostra a proposicão abaixo.

Proposição 2.29. *Se $\mathbb{V}=\lim\mathbb{V}_n$ e cada $\mathbb{V}_n$ é subespaço fechado de $\mathbb{V}_{n+1}$ então $\mathbb{V}$ não é metrizável, ou, equivalentemente, $\mathbb{V}$ não possui base enumerável de abertos.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\mathbb{V}$ possui uma base enumerável decrescente de abertos, digamos $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Tome uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{V}$ tal que $x_n\in U_n\setminus\mathbb{V}_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$ e, tomando subsequências se necessário, podemos supor que $x_n\in\mathbb{V}_{n+1}\setminus\mathbb{V}_n$.

Pelas hipóteses, segue facilmente que cada $\mathbb{V}_n$ é fechado em $\mathbb{V}$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe uma sequência $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{V}^*$ tal que $T_n|_{\mathbb{V}_n}=0$ e $T_n(x_n)=n-\sum_{k=1}^{n-1}T_k(x_n)$.

Seja $S=\sum_{k=1}^{\infty}T_k$. Como $S|_{\mathbb{V}_n}=\sum_{k=1}^{n-1}T_k\in\mathbb{V}^*$ para todo $n\in\mathbb{N}$, então S está bem definida e é contínua. Porém, $0=\lim_{n\to\infty}x_n$, mas $\{Sx_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não converge para 0, um absurdo.

Concluímos então que $\mathbb{V}$ não é metrizável. □

3 Espaços de Banach

Neste capítulo restringiremos os resultados obtidos nos capítulos anteriores para espaços de Banach. Na primeira seção são revisados alguns conceitos e fixada a notação para este contexto. Nas seções subsequentes, analisamos funções lineares (em particular, funcionais lineares) contínuas entre estes espaços. Nas duas últimas seções, analisamos espaços reflexivos, culminando no teorema de minimização 3.22, que será utilizado posteriormente. As referências utilizadas neste capítulo são [1] e [3].

3.1 Generalidades

Como vimos no Capítulo 1, se $\mathbb{E}$ é um espaço normado, $\mathbb{E}$ pode ser munido, naturalmente, de uma topologia com a qual $\mathbb{E}$ é um EVT localmente convexo e localmente limitado. Neste caso, a noção usual de subconjunto limitado – isto é, um subconjunto $X \subseteq \mathbb{E}$ é limitado se $\sup_{x \in X} \|x\| < \infty$ – coincide com a noção dada para EVTs em geral (1.42(d)). Esta mesma topologia é obtida se considerarmos $\mathbb{E}$ como um espaço métrico quando munido da métrica $d(x, y) = \|x - y\|$ (vide Exemplo 1.8).

A *bola aberta* (*unitária*) em $\mathbb{E}$ é definida como sendo o conjunto

$$\mathcal{B}_{(\mathbb{E},\|.\|)} = \{x \in \mathbb{E} : \|x\| < 1\},$$

e a *bola fechada* (*unitária*) em $\mathbb{E}$ é definida como sendo seu fecho, isto é, o conjunto $\mathrm{cl}\left(\mathcal{B}_{(\mathbb{E},\|.\|)}\right)$. Verificações triviais mostram que

$$\mathrm{cl}\left(\mathcal{B}_{(\mathbb{E},\|.\|)}\right) = \{x \in \mathbb{E} : \|x\| \leq 1\}.$$

Pela definição da topologia em $\mathbb{E}$, a família $\left\{(1/n)\mathcal{B}_{(\mathbb{E},\|.\|} : n \in \mathbb{N}\right\}$ é uma base local para $\mathbb{E}$, que é então localmente limitado.

Quando não houver ambiguidade quanto ao espaço e/ou à norma utilizada, denotaremos somente por $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_{\mathbb{E}}$ ou $\mathcal{B}_{\|.\|}$ a bola aberta, e de modo análogo para a bola fechada.

Um espaço normado $\mathbb{E}$ é dito ser um *espaço de Banach* caso seja completo como espaço métrico com a métrica induzida pela norma. Vimos, como consequência do Corolário 1.15, que isto significa que $\mathbb{E}$ é completo como um EVT.

3.2 Norma de Operador

Sejam $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ espaços normados. O Corolário 1.31 pode ser interpretado neste caso como o seguinte:

Teorema 3.1. *Uma aplicação linear $T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ é contínua se, e somente se, existe $C > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{E}$, $\|Tx\| \leq C\|x\|$.*

Definição 3.2. Dados espaços normados $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ e uma aplicação $T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, a *norma de operador* de T é

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in \mathbb{E}, \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|Tx\| : x \in \operatorname{cl}(\mathcal{B}_{\mathbb{E}})\}.$$

Note que não é excluída a possibilidade de que $\|T\| = \infty$. O seguinte teorema associa a finitude da norma de operador de uma aplicação linear com a continuidade da mesma.

Teorema 3.3. *Seja $T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.*

(a) T é contínua se, e somente se, $\|T\| < \infty$.

(b) A norma de operador define de fato uma norma em $\mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.

(c) Para todo $x \in \mathbb{E}$, $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$.

(d) Vale a seguinte igualdade:

$$\|T\| = \inf\{C > 0 : \forall x \in \mathbb{E}, \|Tx\| \leq C\|x\|\}.$$

Demonstração. Como espaços normados são localmente limitados e $\{(1/n) \cdot \mathcal{B}_{\mathbb{E}} : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base local para $\mathbb{E}$, o item (a) segue do Teorema 1.11.

Provemos a desigualdade triangular para a norma de operador: Sejam $S, T \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Então para todo $x \in \mathcal{D}_{\mathbb{E}}$, vale $\|(T + S)x\| \leq \|Tx\| + \|Sx\| \leq \|T\| + \|S\|$. Tomando $\sup_{x \in \mathcal{D}_{\mathbb{E}}}$, obtemos o resultado. As outras propriedades de norma são fáceis, e portanto (b) vale.

Seja agora $x \in \mathbb{E}$. Se $x \neq 0$, então $\|T(x/\|x\|)\| \leq \|T\|$, logo $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$, e esta desigualdade é trivialmente válida para $x = 0$. Isto prova (c).

Considere $L = \inf\{C > 0 : \forall x \in \mathbb{E}, \|Tx\| \leq C\|x\|\}$. Pelo item (c), $L \leq \|T\|$. Reciprocamente, seja $K > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{E}$, $\|Tx\| \leq K\|x\|$. Segue que

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathcal{D}_{\mathbb{E}}} \|Tx\| \leq \sup_{x \in \mathcal{D}_{\mathbb{E}}} K\|x\| \leq K,$$

e portanto $\|T\| = L$. □

Desta forma, $\mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ possui uma topologia natural induzida pelas normas de $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$. Uma propriedade importante é que esta topologia na verdade depende somente das topologias em $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$, como mostra o seguinte teorema.

Teorema 3.4. *Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços vetoriais. Para $i \in \{1, 2\}$, considere normas $\|.\|_{\mathcal{V},i}$ em $\mathcal{V}$ e $\|.\|_{\mathcal{W},i}$ em $\mathcal{W}$. Denote por $\|.\|_i$ a norma de operador relativamente a $\|.\|_{\mathcal{V},i}$ e $\|.\|_{\mathcal{W},i}$.*

(a) Se $k_1, k_2 > 0$ são números tais que $\|.\|_{\mathcal{V},2} \leq k_1 \|.\|_{\mathcal{V},1}$ e $\|.\|_{\mathcal{W},1} \leq k_2 \|.\|_{\mathcal{W},2}$, entao $\|.\|_1 \leq k_1 k_2 \|.\|_2$.

(b) *Se as normas em $\mathcal{V}$ e as normas em $\mathcal{W}$ são equivalentes – isto é, induzem as mesmas topologias – então $\|.\|_1$ e $\|.\|_2$ são equivalentes.*

Demonstração. Nas hipóteses do item (a), seja $T \in L(\mathcal{V},\mathcal{W})$. Então

$$\begin{aligned}\|T\|_1 &= \sup_{\|x\|_{\mathcal{V},1}\le 1} \|Tx\|_{\mathcal{W},1} \le k_2 \sup_{\|x\|_{\mathcal{V},1}\le 1} \|Tx\|_{\mathcal{W},2} \le k_2 \|T\|_2 \sup_{\|x\|_{\mathcal{V},1}\le 1} \|x\|_{\mathcal{V},2} \\ &\le k_1 k_2 \|T\|_2 \sup_{\|x\|_{\mathcal{V},1}\le 1} \|x\|_{\mathcal{V},1} = k_1 k_2 \|T\|_2 .\end{aligned}$$

Isto prova (a). O item (b) segue diretamente. □

Sempre que tratarmos de $\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ (ou de $\mathbb{E}^*$, caso $\mathbb{F}=\mathbb{K}$), o entenderemos como um espaço normado com a norma de operador a menos de menção explícita em contrário. (Lembre-se que podemos considerar a topologia fraca* em $\mathbb{E}^*$, mas esta é estritamente mais fraca que a topologia da norma de operador em $\mathbb{E}^*$ no caso de $\dim\mathbb{E}=\infty$, como vimos no Exemplo 2.13.)

Teorema 3.5. *Sejam $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ espaços normados com $\mathbb{E}\neq\{0\}$. Então $\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ é um espaço de Banach se, e somente se, $\mathbb{F}$ o for.*

Demonstração. Suponha que $\mathbb{F}$ seja um espaço de Banach, e seja $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy (relativamente à norma de operador). Então para todo $x\in\mathbb{E}$, $\{T_n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{F}$, e portanto converge para um ponto $Tx\in\mathbb{F}$. Defina $T : x\in\mathbb{E}\mapsto Tx\in\mathbb{F}$ desta forma. É claro que T é linear. Como $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, então $C=\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T\|_n<\infty$. Para todo $x\in\mathbb{E}$,

$$\|Tx\| = \lim_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\| \le C\,\|x\| .$$

Portanto T é contínua e $\|T\|\le C$.

Dado $\varepsilon>0$, tome $N\in\mathbb{N}$ tal que para todos $n,m\ge N$, temos que

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

Então para todo $x\in\mathcal{D}_{\mathbb{E}}$, vale que, para todos $n,m\ge N$, $\|T_n x - T_m x\|<\varepsilon$. Tomando $m\to\infty$ e $\sup_{x\in\mathcal{D}_{\mathbb{E}}}$, obtemos, para todo $n\ge N$,

$$\|T_n - T\| \le \varepsilon.$$

Então $T_n\to T$ em $\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$. Portanto, $\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ é completo.

Para a recíproca, tome (pelo Teorema de Hahn-Banach) $\phi\in\mathbb{E}^*$ com $\|\phi\|=1$, e defina para cada $y\in\mathbb{F}$ o operador

$$\phi(\cdot)y : x\in\mathbb{E}\mapsto\phi(x)y\in\mathbb{F}.$$

Note que $\phi(\cdot)y$ é linear e $\|\phi(\cdot)y\| = \|y\|$, portanto $\phi(\cdot)y \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$. Mais ainda, a aplicação

$$\Phi : y \in \mathbb{F} \mapsto \phi(\cdot)y \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$$

é uma isometria linear.

Tome agora $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de Cauchy em $\mathbb{F}$. Então $\{\Phi(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$, e portanto converge para uma aplicação $T \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

Se $T = 0$, então $T = \Phi(0)$, e o resultado segue pois Φ é uma isometria (neste caso, $\lim y_n = 0$). Suponha então $T \neq 0$, e tome $x \in \mathbb{E}$ tal que $Tx \neq 0$. Como $\{\phi(x)y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $Tx \neq 0$, então $\phi(x) \neq 0$, logo $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $Tx/\phi(x)$. Portanto $\mathbb{F}$ é completo. □

Em particular, $\mathbb{E}^*$ é um espaço de Banach.

Proposição 3.6. *Se $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ são espaços normado, $\mathbb{W}$ é um subespaço denso de $\mathbb{E}$ e $T \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$, então $\|T\| = \|T|_{\mathbb{W}}\|$.*

Demonstração. A desigualdade $\|T|_{\mathbb{W}}\| \leq \|T\|$ é imediata. A desigualdade inversa segue de (d) e (b) do Teorema 3.3 tomando limites. □

O seguinte teorema de extensão é consequência direta do Teorema 1.16 e da Proposição 3.6.

Teorema 3.7. *Se $\mathbb{M}$ é um subespaço do espaço normado $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ é um espaço de Banach e $T : \mathbb{M} \to \mathbb{F}$ é linear e contínua, então existe uma única extensão contínua (necessariamente linear) $\widetilde{T} : cl(\mathbb{M}) \to \mathbb{F}$. Além disso, $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$, e portanto a aplicação $T \mapsto \widetilde{T}$ é uma isometria linear.*

Provaremos um outro teorema de extensão que pode ser obtido como consequência deste.

Lembre-se que uma *aplicação bilinear* $B : \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \to \mathcal{W}$, onde $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ e $\mathcal{W}$ são espaços vetoriais, é uma aplicação que é linear em cada entrada, ou seja, para todos $x_1, y_1 \in \mathcal{V}_1$, $x_2, y_2 \in \mathcal{V}_2$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$B(x_1 + \alpha y_1, x_2 + \beta y_2) = B(x_1, x_2) + \alpha B(y_1, x_2) + \beta B(x_1, y_2) + \alpha\beta B(y_1, y_2).$$

Teorema 3.8. *Dados espaços normados $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$ e $\mathbb{F}$, uma aplicação bilinear $B : \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \to \mathbb{F}$, são equivalentes:*

(a) B é contínua;

(b) B é contínua em $(0,0)$;

(c) Existe $C > 0$ tal que para todos $(x_1, x_2) \in \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$, tem-se que

$$\|B(x_1, x_2)\| \leq C \|x_1\| \|x_2\|.$$

Demonstração. A implicação (a)⇒(b) é trivial. Se B é contínua em $(0,0)$, existe $\delta > 0$ tal que se $\|x_1\|, \|x_2\| \leq \delta$, onde $x_i \in \mathbb{E}_i$, então $\|B(x_1, x_2)\| \leq 1$. Segue que para todos $(x_1, x_2) \in \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$, $\|B(x_1, x_2)\| \leq (1/\delta^2)\|x_1\|\|x_2\|$, e (c) vale.

Supondo agora que (c) é válida, a continuidade de B segue diretamente da desigualdade seguinte, que é válida para todos $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$:

$$\|B(x_1, x_2) - B(y_1, y_2)\| \leq C\|x_1\|\|x_2 - y_2\| + C\|x_1 - y_1\|\|y_2\|. \quad \square$$

O conjunto das operações bilineares $B : \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \to \mathcal{W}$ será denotado por $\mathrm{Bil}(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2, \mathcal{W})$, e este é um espaço vetorial com operações definidas ponto a ponto.

Teorema 3.9. *A aplicação $\Psi : Bil(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2, \mathcal{W}) \to L(\mathcal{V}_1, L(\mathcal{V}_2, \mathcal{W}))$ dada por $\Psi(T)(x_1)(x_2) = T(x_1, x_2)$ é um isomorfismo linear. Caso $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$ e $\mathbb{F}$ sejam espaços normados, então*

$$\Psi\left(\{B \in Bil(\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2, \mathbb{F}) : B \text{ é contínua}\}\right) = \mathscr{L}(\mathbb{E}_1, \mathscr{L}(\mathbb{E}_2, \mathbb{F})).$$

Demonstração. É fácil ver que Ψ é linear e sua inversa é dada por

$$\Psi^{-1}(T)(x_1, x_2) = T(x_1)(x_2), \qquad \forall T \in \mathscr{L}(\mathbb{E}_1, \mathscr{L}(\mathbb{E}_2, \mathbb{F})),\ \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2,$$

e portanto Ψ é um isomorfismo. Os Teoremas 3.1 e 3.8, juntamente com a definição da norma de operador em $\mathscr{L}(\mathbb{E}_2, \mathbb{F})$, provam a outra parte. $\square$

Teorema 3.10. *Se $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$ e $\mathbb{F}$ são espaços normados, $\mathbb{F}$ é completo, $\mathbb{M}_1 \subseteq \mathbb{E}_1$ e $\mathbb{M}_2 \subseteq \mathbb{E}_2$ são subespaços e $T : \mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2 \to \mathbb{F}$ é bilinear, então existe uma única aplicação bilinear contínua $\widetilde{T} : cl(\mathbb{M}_1) \times cl(\mathbb{M}_2) \to \mathbb{F}$ que estende T.*

Demonstração. Sejam

$$\begin{aligned}
&\Psi_1 : \mathrm{Bil}(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2, \mathbb{F}) \to \mathscr{L}(\mathbb{M}_1, \mathscr{L}(\mathbb{M}_2, \mathbb{F})) \qquad \text{e} \\
&\Psi_2 : \mathrm{Bil}(\mathrm{cl}(\mathbb{M}_1) \times \mathrm{cl}(\mathbb{M}_2), \mathbb{F}) \to \mathscr{L}(\mathrm{cl}(\mathbb{M}_1), \mathscr{L}(\mathrm{cl}(\mathbb{M}_2), \mathbb{F}))
\end{aligned}$$

as aplicações como no último teorema e

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ext}_2 : \mathscr{L}(\mathbb{M}_2, \mathbb{F}) \to \mathscr{L}(\mathrm{cl}(\mathbb{M}_2), \mathbb{F}) \qquad \text{e} \\
&\mathrm{ext}_1 : \mathscr{L}(\mathbb{M}_1, \mathscr{L}(\mathrm{cl}(\mathbb{M}_2), \mathbb{F})) \to \mathscr{L}(\mathrm{cl}(\mathbb{M}_1), \mathscr{L}(\mathrm{cl}(\mathbb{M}_2), \mathbb{F})
\end{aligned}$$

as aplicações de extensão (pois $\mathbb{F}$ é completo). Então

$$\Psi_2^{-1}\left(\mathrm{ext}_1\left(\mathrm{ext}_2 \circ \Psi_1(T)\right)\right)$$

é uma extensão contínua de T, e a unicidade segue de que $\mathrm{cl}(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2) = \mathrm{cl}(\mathbb{M}_1) \times \mathrm{cl}(\mathbb{M}_2)$. $\square$

3.3 Dualidade

Como vimos na seção anterior, $\mathbb{E}^*$ é um espaço de Banach quando munido da norma de operador, e portanto possui um próprio dual $\mathbb{E}^{**}$, que também é um espaço de Banach. De modo análogo ao feito em $\mathbb{E}$, denotaremos por $\mathcal{B}^*$ e $\mathcal{D}^*$, respectivamente, a bola aberta e a bola fechada (unitárias) em $\mathbb{E}^*$.

Considere agora a valoração $\mathrm{ev}(x) : \mathbb{E} \to L(\mathbb{E}^*, \mathbb{K})$. Como $|Tx| \leq \|T\| \|x\|$, então $\|\mathrm{ev}(x)\| \leq \|x\|$, e portanto $\mathrm{ev}(x) \in \mathbb{E}^{**}$.

Teorema 3.11. *A aplicação de valoração, $ev : \mathbb{E} \to \mathbb{E}^{**}$, é uma isometria linear.*

Demonstração. Dado $x \in \mathbb{E}$, a desigualdade $\|\mathrm{ev}(x)\| \leq \|x\|$ foi mostrada acima. O Teorema de Hahn-Banach implica que existe $T \in \mathbb{E}^*$ tal que $Tx = \|x\|$ e $\|T\| = 1$, logo $\|\mathrm{ev}(x)\| \geq \mathrm{ev}(x)(T) = \|x\|$, e portanto há igualdade. A linearidade é clara. □

Corolário 3.12. *$\mathcal{D}^*$ é compacto na topologia fraca* de $\mathbb{E}^*$.*

Demonstração. Basta notar que $\mathcal{D}^* = \{T \in \mathbb{E}^* : \forall x \in \mathcal{B},\ |Tx| \leq 1\}$, ou seja, $\mathcal{D}^*$ é o polar de $\mathcal{B}$. O resultado segue pelo Teorema de Banach-Alaoglu. □

Exemplo 3.13. Seja $\mathbb{V} = \ell^\infty(\mathbb{N})$, o espaço de todas as sequência reais limitadas munido da norma $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x(n)|$. Então o disco fechado $\mathcal{D}^* \subseteq (\ell^\infty(\mathbb{N}))^*$ é compacto na topologia fraca*, mas não é sequencialmente compacto.

De fato, considere a sequência de funcionais $T_n : x \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \mapsto x(n) \in \mathbb{K}$. Claramente $T_n \in \mathcal{D}^*$, mas dada qualquer função crescente $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tome $x \in \ell^\infty$ dada por $x(n) = 0$ se $n \notin \sigma(\mathbb{N})$ e $x(\sigma(n)) = (-1)^n$ para $n \in \mathbb{N}$.

Então $\left\{T_{\sigma(n)}(x)\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, que é uma sequência não convergente em $\mathbb{K}$, logo $\left\{T_{\sigma(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ não converge na topologia fraca*, e portanto $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não possui subsequência convergente em $(\ell^\infty(\mathbb{N})^*, w*)$.

Note que a topologia fraca em $\mathbb{E}$ é induzida por $\mathbb{E}^*$, e a topologia fraca* em $\mathbb{E}^{**}$ também é induzida por $\mathbb{E}^*$. Identificando $\mathbb{E}^*$ com sua imagem $\mathrm{ev}(\mathbb{E}) \subseteq \mathbb{E}^{**}$, temos, a princípio, dois modos de induzir uma topologia em $\mathbb{E}$ por $\mathbb{E}^*$. O próximo teorema mostra que estas topologias na verdade coincidem.

Teorema 3.14. *Considere as aplicações de valoração $ev : \mathbb{E} \to \mathbb{E}^{**}$ e $ev^* : \mathbb{E}^* \to \mathbb{E}^{***}$.*

(a) ev é um homeomorfismo de $(\mathbb{E}, w)$ sobre um subespaço denso de $(\mathbb{E}^{**}, w*)$.

(b) $ev(\mathcal{D})$ é denso em $(\mathcal{D}^{**}, w*)$.

Demonstração. (a) Considere a inversa $\mathrm{ev}^{-1} : \mathrm{ev}(\mathbb{E}) \to \mathbb{E}$, e note que para todo $T \in \mathbb{E}^*$, $\mathrm{ev}^*(T) \circ \mathrm{ev} = T$ e $T \circ \mathrm{ev}^{-1} = \mathrm{ev}^*(T)$. Como $(\mathbb{E}, w)$ e $(\mathbb{E}^{**}, w*)$ possuem as topologias fracas induzidas, respectivamente, por $\mathbb{E}^*$ e por $\mathrm{ev}^*(\mathbb{E}^*)$, isto significa que $\mathrm{ev} : (\mathbb{E}, w) \to (\mathrm{ev}(\mathbb{E}), w*)$ e $\mathrm{ev}^{-1} : (\mathrm{ev}(\mathbb{E}), w*) \to (\mathbb{E}, w)$ são contínuas, ou seja, ev é um homeomorfismo destes espaços.

Novamente, da igualdade $\mathrm{ev}^*(T) \circ \mathrm{ev} = T$ para $T \in \mathbb{E}^*$, deduzimos que $\mathrm{ev}^*(T)$ se anula em $\mathrm{ev}(\mathbb{E})$ se, e somente se, T se anula em $\mathbb{E}$, ou seja $T = 0$ e portanto $\mathrm{ev}^*(T) = 0$. Como o dual de $(\mathbb{E}^{**}, w*)$ é $\mathrm{ev}^*(\mathbb{E}^*)$, o Corolário 2.9 implica que $\mathrm{ev}(\mathbb{E})$ é denso em $(\mathbb{E}^{**}, w*)$.

(b) Como ev é isometria, então $\mathrm{ev}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}^{**}$. Quanto à densidade, seja $T \in \mathbb{E}^*$ tal que para todo $x \in \mathcal{D}$, $|\mathrm{ev}^*(T)(\mathrm{ev}(x))| \leq 1$, ou seja $|Tx| \leq 1$. Então $\|T\| \leq 1$ e para todo $\Lambda \in \mathcal{D}^{**}$, temos que $|\mathrm{ev}^*(T)(\Lambda)| \leq \|\Lambda\| \, \|T\| \leq 1$. Segue do Corolário 2.8 que $\mathrm{ev}(\mathcal{D})$ é denso em $(\mathcal{D}^{**}, w*)$.

□

3.4 Espaços Reflexivos

Definição 3.15. Um espaço normado $\mathbb{E}$ é *reflexivo* se a aplicação de valoração $\mathrm{ev} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}^{**}$ é sobrejetiva.

Note que, pelo Teorema 3.4, reflexibilidade é uma propriedade topológica. Como $\mathbb{E}^{**}$ é completo e ev é isometria, todo espaço reflexivo é necessariamente de Banach.

Teorema 3.16. *Seja $\mathbb{E}$ um espaço de Banach.*

(a) $\mathbb{E}$ é reflexivo se, e somente se, $\mathcal{D}$ é compacto fraco.

(b) $\mathbb{E}$ é reflexivo se, e somente se, $\mathbb{E}^*$ o for.

(c) Se $\mathbb{E}$ é reflexivo e $\mathbb{F}$ é um subespaço fechado de $\mathbb{E}$, então $\mathbb{F}$ é reflexivo.

Demonstração. (a) Se $\mathbb{E}$ é reflexivo, então $(\mathbb{E}^{**}, w*) = (\mathbb{E}^{**}, w)$, $\mathrm{ev} : (\mathbb{E}, w) \to (\mathbb{E}^*, w*)$ é um homeomorfismo e $\mathrm{ev}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}^{**}$. Pelo Teorema de Banach-Alaoglu, $\mathcal{D}^{**}$ é compacto fraco*, logo $\mathcal{D}$ é compacto fraco.

Reciprocamente, se $\mathcal{D}$ é compacto fraco, então $\mathrm{ev}(D)$ é fechado fraco* em $\mathbb{E}^{**}$, logo $\mathrm{ev}(D) = \mathrm{cl}\,(\mathcal{D}^{**}, w*) = \mathcal{D}^{**}$ e portanto $\mathrm{ev}(\mathbb{E}) = \bigcup_{t>0} \mathrm{ev}(t\mathcal{D}) = \mathbb{E}^{**}$.

(b) Se $\mathbb{E}$ é reflexivo, então $(\mathbb{E}^*, w^*) = (\mathbb{E}^*, w)$, e o resultado segue do Teorema de Banach-Alaoglu e do item (a).

Se $\mathbb{E}^*$ é reflexivo então, pelo Corolário 2.16, $\mathrm{ev}(\mathbb{E})$ é subespaço fechado de $(\mathbb{E}^{**}, w) = (\mathbb{E}^{**}, w*)$, e portanto $\mathrm{ev}(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^{**}$.

(c) Pelo Teorema de Hahn-Banach,

$$\mathbb{F}^* = \{T|_{\mathbb{F}} : T \in \mathbb{E}^*\},$$

e portanto $(\mathbb{F}, w)$ tem a topologia induzida de $(\mathbb{E}, w)$. Como $\mathcal{D}_{\mathbb{F}} = \mathcal{D}_{\mathbb{E}} \cap \mathbb{F}$, este item segue do item (a) e do Teorema 2.15.

□

Teorema 3.17. *Se* $(\mathbb{E}_1, \|.\|_1)$ *e* $(\mathbb{E}_2, \|.\|_2)$ *são reflexivos, então* $\mathbb{F} = \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$ *é reflexivo.*

Demonstração. Considere em $\mathbb{F}$ a norma do máximo: para todo par $(x, y) \in \mathbb{F}$,

$$\|(x,y)\|_{\max} = \max\left\{\|x\|_1, \|y\|_2\right\}.$$

Desta forma, $\mathcal{D}_{\mathbb{F}} = \mathcal{D}_{\mathbb{E}_1} \times \mathcal{D}_{\mathbb{E}_2}$

Como todo funcional linear contínuo em $\mathbb{F}$ é da forma $(x, y) \mapsto Tx + Sy$ para certos $T \in \mathbb{E}_1^*$ e $S \in \mathbb{E}_2^*$, então a topologia fraca de $\mathbb{F}$ coincide com a topologia produto de $(\mathbb{E}_1, w)$ com $(\mathbb{E}_2, w)$. Portanto $\mathcal{D}_{\mathbb{F}}$ é um compacto fraco, logo $\mathbb{F}$ é reflexivo. □

3.5 Compacidade

Para problemas de minimização, é comum utilizar teoremas de compacidade, como o de Banach-Alaoglu, para garantir que uma certa classe de funções admita o mínimo num conjunto compacto, por exemplo funções contínuas. A hipótese de continuidade pode ser enfraquecida como no que se segue.

Definição 3.18. Seja $\mathcal{S}$ um espaço topológico. Um funcional $F : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ é dito ser *semi-contínuo inferiormente* se para todo $x \in \mathcal{S}$ e para todo $a < F(x)$ existir uma vizinhança V de x tal que $F(V) \subseteq (a, \infty)$.

Exemplo 3.19. Sejam $\mathbb{E}$ um espaço de Banach e $x \in \mathbb{E}$. Dado $\varepsilon > 0$, como $\|x\| = \sup\{|Tx| : T \in \mathbb{E}^*, \|T\| = 1\}$, então existe $T \in \mathbb{E}^*$ com $\|T\| = 1$ tal que $|Tx| > \|x\| - \varepsilon/2$. Se $y \in \mathbb{E}$ e $|Ty - Tx| < \varepsilon/2$, então

$$\|y\| \geq |Ty| \geq |Tx| - \varepsilon/2 > \|x\| - \varepsilon,$$

e portanto a norma $\|.\|$ é semicontínua inferiormente em $\mathbb{E}$ com respeito à topologia fraca, mas é claro que é contínua se, e somente se, a topologia da norma coincide com a fraca, o que ocorre somente quando $\mathbb{E}$ tem dimensão infinita (vide Exemplo 2.13).

Teorema 3.20. $F : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ *é semicontínuo inferiormente se, e somente se, para todo* $a \in \mathbb{R}$, *o conjunto* $F^{-1}(-\infty, a]$ *é fechado em* $\mathcal{S}$, *ou equivalentemente,* $F^{-1}(a, \infty)$ *é aberto em* $\mathcal{S}$.

Demonstração. Basta notar que $F^{-1}(-\infty, a]$ é fechado se, e somente se, para todo x, se $F(x) > a$ então existe uma vizinhança V de x tal que $F(V) \subseteq (a, \infty)$. □

Teorema 3.21. *Se* $\mathcal{S} \neq \varnothing$ *é compacto e* $F : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ *é semicontínua inferiormente, então* F *admite ponto de mínimo.*

Demonstração. Seja $m = \inf F(\mathcal{S}) \in [-\infty, \infty)$. Suponha por absurdo que $m \notin F(\mathcal{S})$. Então a família $\{F^{-1}(a, \infty) : a > m\}$ é uma cobertura aberta de $\mathcal{S}$. Por compacidade, existe $\widetilde{a} > m$ tal que

$$\mathcal{S} \subseteq F^{-1}(\widetilde{a}, \infty),$$

contradizendo o fato de que m é ínfimo de $F(\mathcal{S})$. Portanto existe $x_0 \in \mathcal{S}$ tal que $m = F(x_0)$. □

Teorema 3.22 (Método Direto do Cálculo das Variações)**.** *Sejam M um subconjunto fracamente fechado de um espaço de Banach reflexivo $\mathbb{E}$ e $F : M \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo:*

(i) F é fracamente semicontínua inferiormente;

(ii) Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $F^{-1}(-\infty, a]$ é não vazio e limitado (na norma) em $\mathbb{E}$.

Então existe $x_0 \in M$ minimizando F, isto é, tal que $F(x_0) = \min F(M)$.

Demonstração. Se $a \in \mathbb{R}$ é como em (ii), então $F^{-1}(-\infty, a]$ está contido numa bola fechada, que é fracamente compacta pelo Teorema 3.16. Segue que $F^{-1}(-\infty, a]$ é um compacto fraco não vazio, e portanto, pelo Teorema 3.21, $F|_{F^{-1}(-\infty,a]}$ admite um minimizante x_0 que claramente minimiza F em M. □

Uma classe importante de funções para problemas de minimização em espaços reflexivos é a das funções convexas, pois semicontinuidade inferior forte e fraca coincidem nestas, como mostraremos a seguir.

Definição 3.23. Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial. Uma função $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ é dita ser *convexa* se para todos $x, y \in \mathcal{V}$ e $t \in [0, 1]$

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y),$$

e f é dita ser *estritamente convexa* se a desigualdade acima for estrita sempre que $x \neq y$ e $0 < t < 1$.

Exemplo 3.24. Toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável para a qual $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é não decrescente é convexa e, se f' for estritamente crescente, então f é estritamente convexa.

De fato, se $x < y$ em $\mathbb{R}$ e $t \in [0, 1]$, então existem, pelo Teorema do Valor Médio $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ tais que $x < z_1 < (1-t)x + ty < z_2 < y$ e $f'(z_1) = [f((1-t)x + ty) - f(x)] / [t(y - x)]$ e $f'(z_2) = [f(y) - f((1-t)x + ty)] / [(1-t)(y - x)]$. A desigualdade $f'(z_1) \leq f'(z_2)$ é equivalente a $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$, e o mesmo vale para as desigualdade estritas.

Em particular, a função $t \in \mathbb{R} \mapsto t^2 \in \mathbb{R}$ é estritamente convexa.

Exemplo 3.25. Sejam $p : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ uma seminorma e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma aplicação convexa e crescente em $p(\mathcal{V})$. Se $t \in [0, 1]$ então

$$f\left(p\left((1-t)x + ty\right)\right) \leq f\left((1-t)p(x) + tp(y)\right) \leq (1-t)f(p(x)) + tf(p(y)),$$

portanto $f \circ p : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ é convexa.

Em particular, pelo exemplo anterior, a aplicação $p^2 : x \in \mathcal{V} \mapsto p(x)^2 \in \mathbb{R}$ é convexa.

Teorema 3.26. *Sejam* $\mathbb{V}$ *um EVT localmente convexo e* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ *uma função convexa. Então* f *é semicontínua inferiormente se, e somente se,* f *é fracamente semicontínua inferiormente.*

Demonstração. Dado $a \in \mathbb{R}$, basta notar que, como $f^{-1}(-\infty, a]$ é convexo, então é fechado se, e somente se, for fracamente fechado, e utilizar o Teorema 3.20. $\square$

Parte II

Espaços de Sobolev e o Princípio do Máximo

4 Distribuições e Espaços de Sobolev

Em todo este capítulo, fixaremos um número natural $N \in \mathbb{N}$ e um subconjunto aberto, conexo e não vazio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$. Fixaremos também uma família enumerável $\left\{\widetilde{\Omega}_n : n \in \mathbb{N}\right\}$ de subconjuntos abertos de Ω satisfazendo

(i) $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{\Omega}_n$;

(ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{\Omega}_n$ é limitado e $\mathrm{cl}\left(\widetilde{\Omega}_n\right) \subseteq \mathrm{int}\left(\widetilde{\Omega}_{n+1}\right)$.

(Por exemplo, tome $\widetilde{\Omega}_n = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > 1/n \text{ e } |x| < n\}$.) Uma tal sequência é denominada uma *exaustão* de Ω por subconjuntos relativamente compactos.

Pelo restante deste trabalho, a seguinte terminologia será utilizada:

Dados subconjuntos X e Y de um espaço topológico $\mathcal{S}$, escreveremos $X \Subset Y$ quando $\mathrm{cl}\,(X)$ for compacto e $\mathrm{cl}\,(X) \subseteq Y$. Com esta notação, a propriedade (ii) acima é equivalente a

(ii)' Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{\Omega}_n \Subset \mathrm{int}\left(\widetilde{\Omega}_{n+1}\right)$.

$C(\mathcal{S})$ denotará o espaço das funções contínuas com valores em $\mathbb{K}$, e $C_c(\mathcal{S}) \subseteq C(\mathcal{S})$ denotará o espaço das funções contínuas com suporte compacto.

Um *multi-índice N-dimensional* é uma N-upla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ de números inteiros não negativos, cuja *ordem* é $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$. O conjunto de todos os multi-índices N-dimensionais é $\mathbb{N}^N$. A um multi-índice α associamos o operador diferencial

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_N}\right)^{\alpha_N}.$$

O multi-índice nulo é $0 = (0, \ldots, 0)$, e a soma de dois multi-índices α e β é $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_N + \beta_N)$. Escreveremos também $D_i = (\partial/\partial x_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, N\}$.

Dados $x \in \mathbb{R}^N$ e $\varepsilon > 0$, denotaremos por $B(x;\varepsilon) = \left\{y \in \mathbb{R}^N : |x - y| < \varepsilon\right\}$, a bola aberta de centro x e raio ε, e por $D^N = B(0;1)$, o N-disco aberto, de forma que $\mathrm{cl}\left(D^N\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq 1\right\}$ é o N-disco fechado. Dado $A \subseteq \mathbb{R}^N$, e $r > 0$, denotaremos $B(A;r) := \bigcup_{a\in A} B(a;r)$.

Dados subconjuntos $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$, defina

$$d(A,B) = \inf\left\{|a - b| : a \in A,\ b \in B\right\}.$$

No caso de A ser unitário, digamos $A = \{a\}$, escreveremos somente $d(a, B) = d(\{a\}, B)$. Note que $d(A, B) = \infty$ se, e somente se, $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$. Além disso, dado $x \in \Omega$, pode-se verificar que $d(x, \partial\Omega) = d(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$, e que $B(x, d(x, \partial\Omega)) \subseteq \Omega$.

Neste capítulo, introduziremos uma noção “fraca” ou “generalizada” para derivação em $\mathbb{R}^N$, a fim de definir os chamados espaços de Sobolev. Estes espaços aparecem naturalmente em problemas variacionais, como o problema de Plateau, e possuem certas características que nos serão muito úteis mais adiante. O estudo feito neste capítulo é baseado nas referências [4], [5] e [6].

4.1 Funções-Teste

Considere o $\mathbb{K}$-espaço vetorial (lembramos que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) $C^\infty(\Omega)$ consistindo das funções $f : \Omega \to \mathbb{K}$ de classe C^∞, isto é, tais que para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha f : \Omega \to \mathbb{K}$ existe e é contínua.

Dados um subconjunto compacto $K \Subset \Omega$ e $\alpha \in \mathbb{N}^N$ considere a seminorma $p_{K;\alpha} : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$p_{K;\alpha}(f) = \sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)|.$$

Considere, de acordo com o Teorema 1.23, $C^\infty(\Omega)$ munido com a topologia induzida pela família $\mathscr{P} = \left\{p_{K;\alpha} : K \subseteq \Omega \text{ compacto}, \ \alpha \in \mathbb{N}^N\right\}$ destas seminormas. Assim, $C^\infty(\Omega)$ é um EVT sobre $\mathbb{K}$ localmente convexo e Hausdorff.

Como todo subconjunto compacto $K \subseteq \Omega$ está contido em algum dos $\widetilde{\Omega}_n$ considerados no início do capítulo, então $\left\{p_{\mathrm{cl}\left(\widetilde{\Omega}_n\right);\alpha} : n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^N\right\}$ é uma subfamília enumerável de $\mathscr{P}$ que induz a topologia de $C^\infty(\Omega)$, pelo Teorema 1.31. Por 1.32, $C^\infty(\Omega)$ é metrizável.

Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $C^\infty(\Omega)$. Isto significa que para todo $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $\{D^\alpha f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C(\Omega)$ com a topologia de convergência uniforme em compactos, que é completo (vide Exemplo 1.27). Portanto, existem funções contínuas $g_\alpha : \Omega \to \mathbb{K}$ tais que para todo compacto $K \subseteq \Omega$, $\{D^\alpha f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em K para g_α.

Segue facilmente $g_\alpha = D^\alpha g_0$, e portanto $p_{K;\alpha}(f_n - g_0) \to 0$ quando $n \to \infty$ para todo compacto $K \subseteq \Omega$ e $\alpha \in \mathbb{N}^N$. Isto significa que $f_n \to g_0$ em $C^\infty(\Omega)$. Concluímos então que $C^\infty(\Omega)$ é completo, e portanto é um espaço de Fréchet.

Dado um subconjunto compacto $K \subseteq \Omega$, seja $\mathscr{D}_K$ o espaço das funções $f \in C^\infty(\Omega)$ cujo suporte está contido em K. Desta forma, $\mathscr{D}_K = \bigcap_{x\in\Omega\setminus K} \overset{-1}{p}_{\{x\};0}(0)$ é um subespaço fechado de $C^\infty(\Omega)$, e portanto um espaço de Fréchet quando munido da topologia induzida.

Considere agora $C_c^\infty(\Omega)$, o conjunto das funções $\phi \in C^\infty(\Omega)$ cujo suporte é compacto e está contido em Ω. A topologia que $C^\infty(\Omega)$ induz em $C_c^\infty(\Omega)$ o faz um EVT localmente convexo Hausdorff não completo. Para verificar isto, tome $N = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\psi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n^2 - x^2}\right) & \text{, se } x \in (-n, n) \\ 0 & \text{, se } x \in \mathbb{R} \setminus (-n, n). \end{cases}$$

Então $\psi_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ e supp$\psi_n = [-n, n]$, donde $\psi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. É simples verificar que $\psi_n \to \chi_\mathbb{R}$ em $C^\infty(\Omega)$, onde $\chi_\mathbb{R}$ é função constante a 1 em $\mathbb{R}$. Como $\chi_\mathbb{R} \in C^\infty(\mathbb{R}) \setminus C_c^\infty(\mathbb{R})$, $C_c^\infty(\mathbb{R})$ não é fechado, e portanto não é completo.

Argumentos similares podem ser utilizados para mostrar que $C_c^\infty(\Omega)$ não é fechado em $C^\infty(\Omega)$ para qualquer Ω.

A fim de tornar $C_c^\infty(\Omega)$ um EVT completo, introduziremos a seguinte topologia.

Definição 4.1. O espaço $C_c^\infty(\Omega)$ munido da topologia de limite direto estrito da sequência $\left\{\mathscr{D}_{\mathrm{cl}\left(\tilde{\Omega}_n\right)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ é denominado *espaço das funções-teste* (em Ω), e é denotado por $\mathscr{D}(\Omega)$.

Portanto, $\mathscr{D}(\Omega)$ é um EVT localmente convexo Hausdorff e completo[1]. De modo equivalente (via o Teorema 2.22), $\mathscr{D}(\Omega)$ possui a topologia de limite direto dada pelas inclusões $\mathscr{D}_K \hookrightarrow C_c(\Omega)$, para $K \subseteq \Omega$ compacto. Portanto, um funcional linear $T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ é contínuo se, e somente se, para todo subconjunto compacto $K \subseteq \Omega$, existem $k \in \mathbb{N}$ e $C > 0$ tais que para toda $\phi \in \mathscr{D}_K$,

$$|T(\phi)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in K} |D^\alpha \phi(x)|.$$

4.2 Regularizações

Ao estudar generalizações de derivadas, é natural que queiramos que as funções consideradas possam ser adequadamente aproximadas por funções suaves. Um modo conhecido de se obter isto é por meio das "regularizações" que serão introduzidas nesta seção.

Definição 4.2. Um *molificador* é uma função suave $\rho : \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ tal que supp$\rho \subseteq D^N$ e $\int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho = 1$.

Exemplo 4.3. A função $\rho : \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ dada por

$$\rho(x) = \begin{cases} c \exp \dfrac{1}{|x|^2 - 1} & , \text{ se } |x| \leq 1 \\ 0 & , \text{ se } |x| \geq 1, \end{cases}$$

onde $c > 0$ é escolhido de forma que $\int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho = 1$, é um molificador denominado de *molificador padrão*. Note que $\rho(x) = \rho(y)$ se $|x| = |y|$.

Sejam ρ um molificador e $f : \Omega \to \mathbb{K}$ uma função contínua. Dado $x \in \Omega$, tome $\varepsilon > 0$ tal que $B(x; 2\varepsilon) \subseteq \Omega$. Note agora que se ε é suficientemente pequeno, então $f(y) \approx f(x)$

[1] No sentido de que $\mathscr{D}(\Omega)$ *não é* um espaço de Fréchet, pois não é metrizável (vide Teorema 2.29).

se $|x-y|<\varepsilon$. Desta forma, devemos ter

$$f(x) = f(x)\int\limits_{D^N} \rho(-z)dz = \varepsilon^{-N} \int\limits_{\mathrm{cl}(B(x;\varepsilon))} f(x)\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy$$
$$\approx \varepsilon^{-N} \int\limits_{\mathrm{cl}(B(x;\varepsilon))} f(y)\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy$$

O último termo acima tem a propriedade de que se tomarmos derivadas parciais sob o sinal da integral, estaremos derivando somente ρ, que é de classe C^∞. Isto motiva a seguinte definição:

Definição 4.4. Sejam $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$[2] e $\phi \in C_c(\mathbb{R}^N)$, e considere o conjunto

$$\Omega_\phi = \{x \in \Omega : x - \mathrm{supp}\phi \Subset \Omega\}.$$

O *produto de convolução* de u e ϕ é a função $(u*\phi) : \Omega \to \mathbb{K}$ definida por

$$(u*\phi)(x) = \int\limits_{\Omega} u(y)\phi(x-y)dy = \int\limits_{x-\mathrm{supp}\phi} u(y)\phi(x-y)dy$$

caso $x \in \Omega_\phi$ e $(u*\phi)(x) = 0$ caso $x \in \Omega \setminus \Omega_\phi$.

Observação 4.5. *A definição de $(u*\phi)$ deixa claro que, como ϕ é uniformemente contínua, então $(u*\phi)$ é contínua em Ω_ϕ. Além disso, Ω_ϕ é aberto, pois se $x \in \Omega_\phi$ e $|y-x| < d(x-supp\phi, \partial\Omega)/2$, então verifica-se facilmente que $d(y-supp\phi, \partial\Omega) > d(x-supp\phi, \partial\Omega)/2$ e portanto $y - supp\phi \subseteq \bigcup_{z\in x-supp\phi} B(z; d(x-supp\phi, \partial\Omega)/2) \Subset \Omega$.*

Proposição 4.6. *Se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\phi \in C_c(\mathbb{R}^N)$ possui a i-ésima derivada parcial contínua em Ω, então $(u*\phi)$ possui a i-ésima derivada parcial contínua em Ω_ϕ, e $D_i(u*\phi)(x) = (u*D_i\phi)(x)$, para todo $x \in \Omega_\phi$.*

Demonstração. Sejam $x \in \Omega_\phi$ e $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ uma sequência convergindo para 0. Suponha também que $0 < |h_n| < d(x-\mathrm{supp}\phi, \partial\Omega)/2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que, definido

$$\widetilde{\Omega} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{y \in \mathbb{R}^N : d(y, x-\mathrm{supp}\phi) < |h_n|\right\},$$

temos que $x - \mathrm{supp}\phi \subseteq \widetilde{\Omega} \Subset \Omega$.

Seja $\{e_1, \ldots, e_N\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^N$. Então para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{(u*\phi)(x+h_ne_i) - (u*\phi)(x)}{h_n} = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} u(y)\frac{\phi(x-y+h_ne_i) - \phi(x-y)}{h_n}dy.$$

[2] Vide o Apêndice A para a definição e algumas propriedades de $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

O integrando acima converge pontualmente para $u(y)D_i\phi(x-y)$, e, pelo Teorema do Valor Médio (aplicado à função $t \mapsto \phi(x-y+te_i)$), é limitado por $|u|\,\|D_i\phi\|_{\infty;\widetilde{\Omega}}$, que é integrável em $\widetilde{\Omega}$. Então

$$\frac{(u*\phi)(x+h_ne_i)-(u*\phi)(x)}{h_n} \to (u*D_i\phi)(x) \qquad \text{quando } n\to\infty$$

pelo Teorema da Convergência Dominada (vide referência [7], Teorema 4.1.1(c)). Isto, juntamente com a Observação 4.5, prova a proposição. □

Corolário 4.7. *Se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ então $(u*\phi)|_{\Omega_\phi} \in C^\infty(\Omega_\phi)$, e $D^\alpha(u*\phi)(x) = (u*D^\alpha\phi)(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^N$ e para todo $x \in \Omega_\phi$.*

Pelo restante da seção, fixe um molificador $\rho : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e considere para cada $h > 0$ a função $\rho_h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por

$$\rho_h(x) = h^{-N}\rho\left(\frac{x}{h}\right).$$

Desta forma, $\operatorname{supp}\rho_h \subseteq \operatorname{cl}(B(0;h))$. Considere também, para cada $h > 0$, o aberto $\Omega_h = \{x \in \Omega : d(x,\partial\Omega) > h\}$ e note que $\Omega_h \subseteq \Omega_{\rho_h}$. Portanto, se $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ então $(u*\rho_h)$ está definida e é de classe C^∞ em Ω_h. A função $(u*\rho_h)$ é dita ser uma *regularização* (local) de u.

Proposição 4.8. *Seja $u \in \mathscr{L}^1_{loc}(\Omega)^3$ com supp(u) é compacto. Então $(u*\rho_h) \in C_c^\infty(\Omega)$ para $0 < h < d(\mathrm{supp}(u),\partial\Omega)/2$ e, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $D^\alpha(u*\rho_h) = (u*D^\alpha\rho_h)$ em Ω.*

Demonstração. Suponha $0 < h < d(\mathrm{supp}(u),\partial\Omega)/2$, e fixe $\alpha \in \mathbb{N}^N$. Note que $\widetilde{\Omega} := \{x \in \Omega : d(x,\mathrm{supp}(u)) < 2h\}$ é aberto e $\widetilde{\Omega} \Subset \Omega_{\rho_h}$. Pelo Corolário 4.7, $(u*\rho_h)$ é suave em $\widetilde{\Omega}$ e $D^\alpha(u*\rho_h) = (u*D^\alpha\rho_h)$ em $\widetilde{\Omega}$.

Além disso, como u é identicamente nula em $\Omega\setminus\mathrm{supp}u$ e $p_h(x-y) = 0$ caso $|x-y| \geq h$ $(x,y \in \mathbb{R}^N)$, segue que $(u*\rho_h)$ é identicamente nula no aberto

$$\Omega_1 := \{x \in \Omega : d(x,\mathrm{supp}(u)) > h)\}.$$

Neste caso, também segue que $(u*\rho_h)$ é suave em Ω_1 e $D^\alpha(u*\rho_h) = 0 = (u*D^\alpha\rho_h)$ em Ω_1.

Como $\widetilde{\Omega}\cup\Omega_1 = \Omega$, então $(u*\rho_h)$ é suave em Ω e $\mathrm{supp}(u*\rho_h) \subseteq \widetilde{\Omega} \Subset \Omega$, e portanto $(u*\rho_h) \in C_c^\infty(\Omega)$ e $D^\alpha(u*\rho_h) = (u*D^\alpha\rho_h)$ em Ω. □

Lema 4.9. *Se $u \in C^0(\Omega)$ e $\widetilde{\Omega} \Subset \Omega$ então $\{(u*\rho_h)\}_{h>0}$ converge uniformemente para u em $\widetilde{\Omega}$ quando h tende a 0.*

[3] Aqui, consideramos u como uma função no sentido clássico, para que faça sentido considerarmos seu suporte. Ver Definição A.18.

Demonstração. Se $h < d(\widetilde{\Omega}, \partial\Omega)/2$ então $\widetilde{\Omega} \Subset \Omega_h$, logo $(u * \rho_h)(x) = \int\limits_{D^N} \rho(z)u(x-hz)dz$ para $x \in \widetilde{\Omega}$. Portanto

$$\|u - (u*\rho_h)\|_{\infty;\widetilde{\Omega}} \leq \sup_{x\in\widetilde{\Omega}} \int\limits_{D^N} \rho(z)|u(x) - u(x-hz)|dz$$

e o resultado fica claro, pois u é uniformemente contínua em $B(\widetilde{\Omega}; h) \Subset \Omega$, e ρ é um molificador. □

Lema 4.10. *Seja* $1 \leq p < \infty$.

(a) Se $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, $\widetilde{\Omega} \Subset \Omega$ *e* $0 < h < d(\widetilde{\Omega}, \partial\Omega)$, *então* $(u*\rho_h) \in L^p(\widetilde{\Omega})$ *e* $\|(u*\rho_h)\|_{p;\widetilde{\Omega}} \leq \|u\|_{p;B(\widetilde{\Omega};h)}$.

(b) Se $u \in L^p(\Omega)$, *então* $(u*\rho_h) \in L^p(\Omega)$ *para todo* $h > 0$, *e* $\|(u*\rho_h)\|_{p;\Omega} \leq \|u\|_{p;\Omega}$.

Demonstração. Primeiro note que para todos $x \in \Omega$ e $0 < h < d(x, \partial\Omega)$,

$$\begin{aligned}|(u*\rho_h)(x)|^p &\leq \left(\int\limits_{D^N} \rho(z)^{1-1/p}\rho(z)^{1/p}|u(x-hz)|dz\right)^p \\ &\leq \left\|\rho^{1-1/p}\right\|^p_{p';\mathcal{D}^N} \int\limits_{\mathcal{D}^N} \rho(z)|u(x-hz)|^p dz = \int\limits_{\mathcal{D}^N} \rho(z)|u(x-hz)|^p dz\end{aligned}$$

pela desigualdade de Hölder, onde p' é o conjugado de Hölder de p (veja a Definição A.4).

(a) Se $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e $h < d(\widetilde{\Omega}, \partial\Omega)$, então $B(\widetilde{\Omega}; h) \Subset \Omega$, portanto

$$\begin{aligned}\|(u*\rho_h)\|^p_{p;\widetilde{\Omega}} &\leq \int\limits_{\widetilde{\Omega}}\int\limits_{\mathcal{D}^N} \rho(z)|u(x-hz)|^p dzdx \leq \int\limits_{\mathcal{D}^N} \rho(z) \int\limits_{B(\widetilde{\Omega};h)} |u(y)|^p dydz \\ &= \|u\|^p_{p;B(\widetilde{\Omega};h)}.\end{aligned}$$

(b) Seja $\widetilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^N)$ a extensão de u por 0. Então

$$\begin{aligned}\|(u*\rho_h)\|_{p;\Omega} \leq \|(\widetilde{u}*\rho_h)\|_{p;\mathbb{R}^N} &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathcal{D}^N} \rho(z)|\widetilde{u}(x-hz)|^p dzdx \\ &\leq \int\limits_{\mathcal{D}^N} \rho(z) \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{u}(x-hz)|^p dxdz = \|\widetilde{u}\|_{p;\mathbb{R}^N} = \|u\|_{p;\Omega}.\end{aligned}$$ □

Proposição 4.11. *Sejam* $1 \leq p < \infty$, $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ *e* $\widetilde{\Omega} \Subset \Omega$. *Então* $\{(u*\rho_h)\}_{0<h<d(\widetilde{\Omega},\partial\Omega)}$ *converge para* u *em* $L^p(\widetilde{\Omega})$ *quando* h *tende a* 0.[4]

[4] Não é necessariamente verdade que $(u*\rho_h) \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, e portanto não podemos dizer que $\{(u*\rho_h)\}_{h>0}$ converge em $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ para u, embora esta proposição afirme algo muito semelhante.

Demonstração. Fixe $0 < j_0 < d(\widetilde{\Omega}, \partial\Omega)/2$. Dado $\varepsilon > 0$, tome $w \in C^0(\Omega)$ tal que $\|u - w\|_{p;B(\widetilde{\Omega};j_0)} < \varepsilon$ (vide Teorema A.22). Para todo $h < j_0$ suficientemente pequeno, temos que $\|w - (w * \rho_h)\|_{p;B(\widetilde{\Omega};j_0)} < \varepsilon$, e portanto

$$\begin{aligned}\|u - (u * \rho_h)\|_{p;\widetilde{\Omega}} &\leq \|u - w\|_{p;\widetilde{\Omega}} + \|w - (w * \rho_h)\|_{p;\widetilde{\Omega}} + \|(w * \rho_h) - (u * \rho_h)\|_{p;\widetilde{\Omega}} \\ &< 2\varepsilon + \|((w - u) * \rho_h)\|_{p;\widetilde{\Omega}} \leq 2\varepsilon + \|(w - u)\|_{p;B(\widetilde{\Omega};h)} < 3\varepsilon. \end{aligned}$$ □

Corolário 4.12. *Se $1 \leq p < \infty$ e $u \in L^p(\Omega)$ então $\{(u * \rho_h)\}_{h>0}$ converge para u em $L^p(\Omega)$ quando h tende a 0.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Pela regularidade da medida de Lebesgue e pelo fato da integral indefinida de $|u|^p$ ser absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue, podemos escolher abertos $\Omega_1 \Subset \Omega_2 \Subset \Omega$ tais que $\|u\|_{p;\Omega\setminus\Omega_1} < \varepsilon$. Pela proposição anterior, se $h > 0$ é suficientemente pequeno então $\|u - (u * \rho_h)\|_{p;\Omega_2} < \varepsilon$ e portanto

$$\begin{aligned}\|u - (u * \rho_h)\|_{p;\Omega} &\leq 2\varepsilon + \|(u * \rho_h)\|_{p;\Omega\setminus\Omega_2} \leq 2\varepsilon + \|(u * \rho_h)\|_{p;\Omega\setminus \mathrm{cl}(\Omega_1)} \\ &\leq 2\varepsilon + \|u\|_{p;\Omega\setminus \mathrm{cl}(\Omega_1)} < 3\varepsilon. \end{aligned}$$ □

Corolário 4.13. *$C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $f \in C_c(\Omega)$. Se $h < d(\mathrm{supp} f, \partial\Omega)/2$, então $(f * \rho_h)|_{\Omega_{\rho_h}\setminus\Omega_{\rho_{2h}}} = 0$, logo $(f * \rho_h) \in C_c^\infty(\Omega)$. O resultado segue do último corolário e do fato que $C_c(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ (vide apêndice A, Corolário A.14). □

4.3 Distribuições e Derivadas Fracas

Definição 4.14. Uma *distribuição* (ou *função generalizada*) em Ω é um funcional linear contínuo em $\mathscr{D}(\Omega)$. O espaço $\mathscr{D}'(\Omega) = \mathscr{D}(\Omega)^*$ das distribuições em Ω é munido da topologia fraca*.

Lema 4.15 (Lema de du Bois-Reymond). *Se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\int_\Omega u\phi = 0$ para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, então $u = 0$ em $L^1_{loc}(\Omega)$.*

Demonstração. Tome um molificador $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $h > 0$. Note agora que se $x \in \Omega_{\rho_h}$ então $(u * \rho_h)(x) = \int_\Omega u(y)\rho_h(x - y)dy = 0$, ou seja, $(u * \rho_h) = 0 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Como $\{(u * \rho_h)\}_{h>0}$ converge para u em $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ quando h tende a 0, então $u = 0$. □

Proposição 4.16. *Se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, então a aplicação $T_u : \phi \in \mathscr{D}(\Omega) \mapsto \int_\Omega (\phi u)$ é uma distribuição. Além disso, a aplicação $T : u \in L^1_{loc}(\Omega) \mapsto T_u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ é linear, contínua e injetiva.*

Demonstração. Se $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, então T_u é linear e para todo aberto $\widetilde{\Omega} \Subset \Omega$ e toda $\phi \in \mathscr{D}_{\widetilde{\Omega}}$

$$|T_u(\phi)| = |\int\limits_{\widetilde{\Omega}} \phi u| \leq \|u\|_{L^1(\widetilde{\Omega})} \|\phi\|_{L^\infty(\widetilde{\Omega})}.$$

Isto mostra que T_u é uma distribuição e que T é contínua, visto que é obviamente linear. A injetividade de T é exatamente o lema de du Bois-Reymond. □

Vamos motivar a definição de derivadas fracas. Sejam $\psi \in C^\infty(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^N$. Para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos que, integrando por partes,

$$T_{D^\alpha \psi}(\phi) = \int\limits_\Omega D^\alpha \psi \phi = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega \psi D^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} T_\psi(D^\alpha \phi).$$

Pelo lema de du Bois-Reymond, se $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ satisfaz $\int\limits_\Omega v\phi = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega \psi D^\alpha \phi$ para toda $\phi \in C_c(\Omega)$, então $v = D^\alpha \psi$ em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Isto motiva a seguinte definição.

Definição 4.17. Dadas $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^N$, a *α-ésima derivada* de T é a aplicação $D^\alpha T : \phi \in \mathscr{D}(\Omega) \mapsto (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi)$.

Seja $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Dado um compacto $K \subseteq \Omega$, existem $k \in \mathbb{N}$ e $C > 0$ tais que para toda $\phi \in \mathscr{D}_K$,

$$|T(\phi)| \leq C \sum_{|\beta| \leq k} \sup_{x \in K} |D^\beta \phi(x)|.$$

Portanto, dado $\alpha \in \mathbb{N}^N$, temos que, para toda $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$,

$$|D^\alpha T(\phi)| = |T(D^\alpha)| \leq C \sum_{|\beta| \leq k} \sup_{x \in K} |D^{\alpha + \beta} \phi(x)| \leq C \sum_{|\beta| \leq k + |\alpha|} \sup_{x \in K} |D^\beta \phi(x)|,$$

e portanto $D^\alpha T$ é contínua.

Na motivação, demonstramos o seguinte:

Proposição 4.18. *Se $\psi \in C^\infty(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^N$ então $D^\alpha T_\psi = T_{D^\alpha \psi}$.*

Proposição 4.19. *$D^\alpha : T \in \mathscr{D}'(\Omega) \mapsto D^\alpha T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ é (linear e) contínua.*

Demonstração. Lembremos que a topologia de $\mathscr{D}'(\Omega)$ é gerada pela família de seminormas $\{|\text{ev}(\phi)| : \phi \in \mathscr{D}(\Omega)\}$.

Seja $\alpha \in \mathbb{N}^N$. Note que, dada $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ e $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, temos que

$$|\text{ev}(\phi)(D^\alpha T) = |D^\alpha T(\phi)| = |T(D^\alpha \phi)| = |\text{ev}(D^\alpha \phi)(T)|.$$

Pelo Corolário 1.31, D^α é contínua. □

Lema 4.20. *Sejam $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}^N$ e $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e suponha que $T_v = D^\alpha T_u$. Então dado $h > 0$, $D^\alpha(u * \phi) = (v * \phi)$ em Ω_ϕ.*

Demonstração. Dado $x \in \Omega_\phi$, temos, pelo Corolário 4.7 e pela definicao 4.17,

$$\begin{aligned} D^\alpha(u * \phi)(x) &= (u * D^\alpha \phi)(x) = \int_\Omega u(y) D^\alpha_x \phi(x-y)dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(y)(D^\alpha_y \phi)(x-y)dy = \int_\Omega v(y)\phi(x-y)dy \\ &= (v * \phi)(x). \end{aligned}$$

□

Teorema 4.21. *Suponha $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^N$. Se $T_v = D^\alpha T_u$ então existe uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^\infty_c(\Omega)$ e $K > 0$ satisfazendo:*

(i) $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ e $v = \lim_{n\to\infty} D^\alpha u_n$ em $L^1_{loc}(\Omega)$;

(ii) Para todos $\Omega_1 \Subset \Omega_2 \Subset \Omega$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ e para todo $x \in \Omega_1$, $|u_n(x)| \leq K \|u\|_{1;\Omega_2}$ e $|D^\alpha u_m(x)| \leq K \|v\|_{1;\Omega_2}$

Reciprocamente, se existe uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^{|\alpha|}(\Omega)$ tal que $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ e $v = \lim_{n\to\infty} D^\alpha u_n$ em $L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_v = D^\alpha T_u$.

Demonstração. Primeiro, considere a sequência $\left\{\widetilde{\Omega}_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ fixada no início do capítulo. Tome funções $\psi_n \in C^\infty_c(\Omega)$ tais que $\psi_n|_{\widetilde{\Omega}_n} = 1$ e $\mathrm{supp}\psi_n \Subset \widetilde{\Omega}_{n+1}$[5]. Considere também um molificador $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Se $T_v = D^\alpha T_u$, tome uma sequência de números reais $\{r(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de forma que $\lim_{n\to\infty} r(n) = 0$ e que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $r(n) > 0$ e $\widetilde{\Omega}_{n+1} \Subset \Omega_{\rho_{r(n)}}$. Defina então

$$u_n = (u * \rho_{r(n)})\psi_n.$$

Desta forma, $u_n \in C^\infty_c(\Omega)$ e, pela escolha das ψ_n, $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ em $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, pela Proposição 4.11. Também, dado um subconjunto $\widetilde{\Omega} \Subset \Omega$, temos que, para todo n suficientemente grande, $D^\alpha u_n = (v * \rho_{r(n)})$ em $\widetilde{\Omega}$, pelo Lema 4.20, e portanto $v = \lim_{n\to\infty} D^\alpha u_n$ em $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Isto prova (i).

Quando a (ii), se $\Omega_1 \Subset \Omega_2 \Subset \Omega$, temos que para todo n suficientemente grande, $r(n) < d(\Omega_1, \partial\Omega_2)$. Então, dado um tal n, para todo $x \in \Omega_1$

$$|u_n(x)| \leq \int_{\mathcal{D}^N} |u(x-hz)|\rho(z)dz \leq \|\rho\|_{\infty;\mathbb{R}^N} \|u\|_{1;\Omega_2}$$

e, analogamente, $|D^\alpha u_n(x)| \leq \|\rho\|_{\infty;\mathbb{R}^N} \|v\|_{1;\Omega_2}$.

[5] A existência de tais funções é consequência do Teorema de Existência de *Partições da Unidade*. Para referência, veja o Lema 2.26 de [8].

Para a recíproca, se $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ e $v = \lim_{n\to\infty} D^\alpha u_n$ em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, então para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$D^\alpha T_{u_n}(\phi) = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_n D^\alpha \phi = \int_\Omega D^\alpha u_n \phi = T_{D^\alpha u_n}(\phi).$$

Pela parte de continuidade na Proposição 4.16, e como D^α é contínua, então $D^\alpha T_u = T_v$. □

Observação 4.22. *Na primeira parte do Teorema 4.21, a sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ foi construída independentemente de v. Portanto, os mesmos argumentos utilizados mostram que se $w \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\beta \in \mathbb{N}^N$ são tais que $T_w = D^\beta T_u$, então $D^\beta u_n \to w$ em $L^1_{loc}(\Omega)$.*

Definição 4.23. Dado $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, definimos

$$W^k(\Omega) = \left\{ u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) : \forall \alpha \in \mathbb{N}^N,\ |\alpha| \leq k, \exists v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \text{ tal que } T_v = D^\alpha T_u \right\}.$$

Deste ponto em diante, se $u \in W^k(\Omega)$ e $|\alpha| \leq k$, denotaremos por $D^\alpha u$ a (única) função $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que $T_v = D^\alpha T_u$, que é denominada de *α-ésima derivada fraca* de u, que é dita ser, portanto, *fracamente diferenciável até ordem k*. As derivadas usuais de u, caso existam, serão denominadas *derivadas clássicas*.

Vamos mostrar agora que D^α satisfaz propriedades análogas às da derivação usual. Primeiro, provaremos a regra da cadeia para composições da forma $u \circ \Psi$, com $u \in W^1(\Omega)$ e $\Psi : \Omega' \to \Omega$ difeomorfismo entre abertos de $\mathbb{R}^N$.

Proposição 4.24 (Regra da Cadeia 1)**.** *Sejam $u \in W^1(\Omega)$, $\Delta \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto e $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_N) : \Delta \to \Omega$ um difeomorfismo de classe C^1. Então $u \circ \Psi \in W^1(\Delta)$ e, para todo $i \in \{1, \ldots, N\}$,*

$$D_i(u \circ \Psi) = \sum_{k=1}^N \left((D_k u) \circ \Psi \right) D_i \Psi_k.$$

Demonstração. Fixe $i \in \{1, \ldots, N\}$. Pelo Teorema 4.21 e pela Observação 4.22, podemos escolher uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ e $D_k u_n \to D_k u$ em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, para cada $k \in \{1, \ldots, N\}$.

Seja $\widetilde{\Delta} \Subset \Delta$. Como Ψ é difeomorfismo C^1, então $\Psi(\widetilde{\Delta}) \Subset \Omega$. Seja

$$C = \left\| \det D\Psi^{-1} \right\|_{\infty; \Psi(\widetilde{\Delta})} + \sum_{k=1}^N \left\| (D_i \Psi_k) \circ \Psi^{-1} \right\|_{\infty; \Psi(\widetilde{\Delta}')} < \infty.$$

Temos que, pelo Teorema de Mudança de Coordenadas,

$$\int_{\widetilde{\Delta}} |u_n \circ \Psi - u \circ \Psi| = \int_{\Psi(\widetilde{\Delta})} |u_n - u| |\det D\Psi^{-1}| \leq C \int_{\Psi(\widetilde{\Delta})} |u_n - u| \to 0,$$

e, pela regra da cadeia usual e novamente pelo Teorema de Mudança de Coordenadas,

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{\Delta}} \left|D_i(u_n \circ \Psi) - \sum_{k=1}^{N} ((D_k u) \circ \Psi)\, D_i \Psi_k\right| &\leq \sum_{k=1}^{N} \int_{\widetilde{\Delta}} \left|\,((D_k u_n) \circ \Psi) - ((D_k u) \circ \Psi)\,\right| |D_i \Psi_k| \\ &= \sum_{k=1}^{N} \int_{\Psi(\widetilde{\Delta})} |D_k u_n - D_k u| |(D_i \Psi_k) \circ \Psi^{-1}| |\det D\Psi^{-1}| \\ &\leq C^2 \sum_{k=1}^{N} \int_{\Psi(\widetilde{\Delta})} |D_k u_n - D_k u| \to 0,\end{aligned}$$

portanto $u_n \circ \phi \to u \circ \phi$ e $D_i(u_n \circ \phi) \to \sum_{k=1}^{N} (D_k u) \circ \phi D_i \phi_k$ em $L^1_{\mathrm{loc}}(\Delta)$. O resultado segue pelo Teorema 4.21. □

Pelo restante desta seção, suporemos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Agora demonstraremos a Regra da Cadeia para funções da forma $f \circ u$, com $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $u \in W^1(\Omega)$.

Lema 4.25. *Sejam $f \in C^1(\mathbb{R})$ com $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ e $u \in W^1(\Omega)$. Então $f \circ u \in W^1(\Omega)$ e $D_i(f \circ u) = (f' \circ u) D_i u$ para todo $i \in \{1, \ldots, N\}$.*

Demonstração. Primeiro note que, pelo Teorema do Valor Médio, para todo $x \in \Omega$ existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $f(u(x)) = f(0) + f'(t)u(x)$, logo,

$$|(f \circ u)(x)| \leq |f(0)| + \|f'\|_{\infty;\mathbb{R}} |u(x)|$$

para todo $x \in \Omega$, e que

$$|(f' \circ u)(x) D_i u(x)| \leq \|f'\|_{\infty;\mathbb{R}} |D_i u(x)|$$

para todo $x \in \Omega$. Então, temos que $f \circ u, (f' \circ u) D_i u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Seja $i \in \{1, \ldots, N\}$. Tome $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\Omega)$ convergindo para u em $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e tal que $\{D_i u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $D_i u$ em $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Tomando subsequências se necessário, podemos supor, de acordo com o Teorema A.20, que estas sequências convergem pontualmente q.t.p. para seus respectivos limites.

Dados $\widetilde{\Omega} \Subset \Omega$ e $n \in \mathbb{N}$, o Teorema do Valor Médio implica, novamente, que para todo $x \in \Omega$, $|f(u_n(x)) - f(u(x))| \leq \|f'\|_{\infty;\mathbb{R}} |u_n(x) - u(x)|$, logo

$$\|f \circ u_n - f \circ u\|_{1;\widetilde{\Omega}} \leq \|f'\|_{\infty;\mathbb{R}} \|u_n - u\|_{1;\widetilde{\Omega}} \to 0.$$

Note agora que, pela regra da cadeia usual, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|D_i(f \circ u_n) - (f' \circ u) D_i u\|_{1;\widetilde{\Omega}} &= \|(f' \circ u_n) D_i u_n - (f' \circ u) D_i u\|_{1;\widetilde{\Omega}} \\ &\leq \|(f' \circ u_n)(D_i u_n - D_i u)\|_{1;\widetilde{\Omega}} + \|((f' \circ u_n) - (f' \circ u))\, D_i u\|_{1;\widetilde{\Omega}} \\ &\leq \|f'\|_{\infty;\mathbb{R}} \|D_i u_n - D_i u\|_{1;\widetilde{\Omega}} + \int_{\widetilde{\Omega}} |(f' \circ u_n) - (f' \circ u)| |D_i u|.\end{aligned}$$

Como f' é contínua então $|(f' \circ u_n) - (f' \circ u)||D_i u| \to 0$ pontualmente q.t.p. em Ω. Pelo Teorema da Convergência Dominada, a integral no lado direito da segunda desigualdade acima converge para 0.

Concluímos que $f \circ u_n \to f \circ u$ e $D_i(f \circ u_n) \to (f' \circ u)D_i u$ em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Portanto, $f \circ u \in W^1(\Omega)$ e $D_i(f \circ u) = (f' \circ u)D_i u D_i(f \circ u)$ para $1 \leq i \leq N$. $\square$

Se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função qualquer, a *parte positiva* e a *parte negativa* de u são as funções

$$u^+ = \max\{u, 0\} \qquad \text{e} \qquad u^- = -\min\{u, 0\}.$$

Lema 4.26. *Se $u \in W^1(\Omega)$, então $u^+, u^-, |u| \in W^1(\Omega)$ e*

$$D_i u^+(x) = \begin{cases} D_i u(x) & , \textit{ se } u(x) > 0 \\ 0 & , \textit{ se } u(x) \leq 0 \end{cases}, \quad D_i u^-(x) = \begin{cases} 0 & , \textit{ se } u(x) \geq 0 \\ D_i u(x) & , \textit{ se } u(x) < 0 \end{cases},$$

$$\textit{e} \quad D_i|u|(x) = \begin{cases} D_i u(x) & , \textit{ se } u(x) > 0 \\ 0 & , \textit{ se } u(x) = 0 \\ -D_i u(x) & , \textit{ se } u(x) < 0 \end{cases},$$

para quase todo $x \in \Omega$ e para todo $1 \leq i \leq N$.

Demonstração. Para cada $\varepsilon > 0$, considere a aplicação $f_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} (t^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon & , \text{ se } t > 0 \\ 0 & , \text{ se } t \leq 0. \end{cases}$$

Então f_ε satisfaz às condições do lema anterior, e portanto para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e todo $i \in \{1, \ldots, N\}$,

$$\int_\Omega (f_\varepsilon \circ u) D_i \phi = - \int_{u(x)>0} (f'_\varepsilon \circ u)(D_i u)\phi.$$

Como f_ε e f'_ε convergem uniformemente para as funções $id_{\mathbb{R}} \cdot \chi_{(0,\infty)}$ e $\chi_{(0,\infty)}$, respectivamente, quando ε tende a 0 (onde χ_A denota a função característica de um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$), e ϕ tem suporte compacto, podemos tomar o limite $\varepsilon \to 0$ na igualdade acima, o que nos dá

$$\int_\Omega u^+ D_i \phi = - \int_{u(x)>0} (D_i u)\phi,$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Isto prova a a afirmação feita para u^+ (visto que as funções em questão são limitadas pontualmente por $|u| + |D_i u|$, e portanto pertencem a $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$). As outras afirmações seguem deste caso e das igualdades

$$u^- = (-u)^+ \qquad \text{e} \qquad |u| = u^+ + u^-. \quad \square$$

Corolário 4.27. *Se $u \in W^1(\Omega)$, então $D_i u = 0$ q.t.p. para $1 \leq 1 \leq N$ em qualquer domínio no qual u seja constante.*

Demonstração. Dados $c \in \mathbb{R}$ e $1 \leq i \leq N$, basta observar que para quase todo ponto $x \in \Omega$, $D_i u(x) = D_i(u-c)(x) = D_i(u-c)^+(x) - D_i(u-c)^-(x)$, que vale 0 se $u(x) = c$. $\square$

Teorema 4.28 (Regra da Cadeia 2)**.** *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é C^1 por partes com $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ e $u \in W^1(\Omega)$, então $f \circ u \in W^1(\Omega)$. Além disso, se L é o conjunto dos pontos de descontinuidade (ou inexistência) de f', então para todo $1 \leq i \leq N$,*

$$D_i(f \circ u)(x) = \begin{cases} f'(u(x)) D_i u & , \text{ se } u(x) \notin L \\ 0 & , \text{ se } u(x) \in L. \end{cases}$$

Demonstração. Se $L = \varnothing$ o resultado é imediato do Lema 4.25. Caso contrário, sejam k o número de elementos de L e $c \in L$. Tome funções $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f_1|_{(-\infty,c]} = f|_{(-\infty,c]}$ e $f_2|_{[c,\infty)} = f|_{[c,\infty)}$, que $f_1', f_2' \in L^\infty(\mathbb{R})$ e que f_1' e f_2' possuam no máximo $k-1$ descontinuidades. Note então que para todo $x \in \Omega$,

$$(f \circ u)(x) = f_1\big((u(x) - c)^- + c\big) + f_2\big(-(u(x) - c)^+ + c\big) - f(c).$$

Caso $k = 1$, basta aplicar os resultados anteriores na igualdade acima. O caso geral segue desta mesma igualdade por indução. $\square$

Por fim, provaremos a que a fórmula clássica da regra do produto também é válida neste contexto generalizado.

Teorema 4.29 (Regra do Produto)**.** *Sejam $u, v \in W^1(\Omega)$, e suponha que $uv, uD_i v, vD_i u \in L^1_{loc}(\Omega)$ para todo $1 \leq i \leq N$. Então $uv \in W^1(\Omega)$ e para todo $1 \leq i \leq n$, $D_i(uv) = uD_i v + vD_i u$.*

Demonstração. Fixe $1 \leq i \leq N$. Suponha primeiro que $v \in C^\infty(\Omega)$ (neste caso, é imediato que $uv, uD_i v, vD_i u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ para todo $1 \leq i \leq N$). Dada $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos que $v\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Pela regra do produto usual e pela definição das derivadas fracas de u, temos que

$$\int_\Omega (uD_i v + vD_i u)\phi = \int_\Omega u(D_i v\phi - D_i(v\phi)) = -\int_\Omega uvD_i\phi.$$

Segue que existe $D_i(uv) = uD_i v + vD_i u$, e portanto $uv \in W^1(\Omega)$.

No caso geral, suponha somente que $v \in W^1(\Omega)$. Considere uma sequência $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $K > 0$ satisfazendo (i) e (ii) de 4.21. Tomando subsequências se necessário, também podemos supor que $v(x) = \lim_{n\to\infty} v_n(x)$ e $D_i v(x) = \lim_{n\to\infty} D_i v_n(x)$ q.t.p. em Ω (vide A.20). Seja $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Então, pelo caso anterior, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_\Omega (uv_n)D_i\phi = -\int_\Omega (uD_i v_n + v_n D_i u)\phi.$$

Como ϕ tem suporte compacto, as integrais acima podem ser tomadas em algum subconjunto $\widetilde{\Omega} \Subset \Omega$. Pela propriedade (ii) de 4.21, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada e tomar o limite $n \to \infty$ sob o sinal da integral, obtendo

$$\int_{\Omega} (uv) D_i \phi = -\int_{\Omega} (u D_i + v D_i u) \phi$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Segue então o resultado. $\square$

4.4 Espaços de Sobolev

Até o presente momento estudamos derivação de funções apenas localmente integráveis. Agora vamos nos concentrar na derivação de funções em espaços do tipo $L^p(\Omega)$ e cujas derivadas também pertencem a $L^p(\Omega)$. Os espaços que contêm estas funções são chamados *espaços de Sobolev.*

Definição 4.30. Dados $1 \leq p < \infty$ e $k \in \mathbb{N}$, o *espaço de Sobolev* $W^{k,p}(\Omega)$ consiste das funções $u \in L^p(\Omega)$ que possuem todas as derivadas fracas até ordem k e estas são elementos de $L^p(\Omega)$, munido da topologia induzida pela norma $\|.\|_{k,p;\Omega} : W^{k,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|u\|_{k,p;\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{p;\Omega}.$$

Em particular, $W^{k,p}(\Omega)$ uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0 em $W^{k,p}(\Omega)$ se, e somente se, $\{D^\alpha u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0 em $L^p(\Omega)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^N$ com $|\alpha| \leq k$.

Teorema 4.31. *$W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach para todos $k \in \mathbb{N}$ e $p \in [1, \infty)$.*

Demonstração. Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $W^{k,p}(\Omega)$. Então para cada multi-índice α com $|\alpha| \leq k$, $\{D^\alpha u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega)$, e portanto converge para um elemento $u_\alpha \in L^p(\Omega)$.

Como as inclusões $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^p_{\text{loc}}(\Omega) \hookrightarrow L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (vide Teorema A.25)e as aplicação $T : L^1_{\text{loc}}(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$ e $D^\alpha : \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$ são contínuas, então

$$T_{u_\alpha} = \lim_{n\to\infty} T_{D^\alpha u_n} = \lim_{n\to\infty} D^\alpha T_{u_n} = D^\alpha T_{u_0},$$

e isto significa que $u_\alpha = D^\alpha u_0$, pela convenção adotada. Portanto, $u_0 = \lim_{n\to\infty} u_n$ em $W^{k,p}(\Omega)$. $\square$

Corolário 4.32. *$W^{k,p}(\Omega)$ é reflexivo para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Seja $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ uma enumeração do conjunto dos multi-índices α com $|\alpha| \leq k$. Então a aplicação

$$L : u \in W^{k,p}(\Omega) \mapsto (D^{\alpha_1} u, \ldots, D^{\alpha_m} u) \in L^p(\Omega)^m = L^p(\Omega) \times \cdots \times L^p(\Omega)$$

é uma isometria, quando consideramos a norma da soma em $L^p(\Omega)^m$. Como $W^{k,p}(\Omega)$ é completo, então $L(W^{k,p}(\Omega))$ é fechado em $L^p(\Omega)^m$. Logo, $W^{k,p}(\Omega)$ é isométrico ao espaço reflexivo $L(W^{k,p}(\Omega))$, e portanto $W^{k,p}(\Omega)$ também é reflexivo. $\square$

Como $W^{k,p}(\Omega)$ foi construído de forma que pudéssemos estender a noção usual de derivada, uma outra propriedade importante que procuramos é que a noção usual valha para uma classe suficientemente grande de funções em $W^{k,p}(\Omega)$. Este é o caso, como mostra o seguinte teorema.

Dada uma função $f : \Omega \to \mathbb{K}$, denote por $\widetilde{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ a extensão de f por 0[6].

Lema 4.33. *Se $\rho \in C^\infty(\Omega)$ é um molificador, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ e $u \in W^{k,p}(\Omega)$, então $\{(\widetilde{u} * \rho_h)|_\Omega\}_{h>0}$ converge para u em $W^{k,p}(\Omega)$ quando h tende a 0.*

Demonstração. Dada $u \in W^{k,p}(\Omega)$, para cada multi-índice α com $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, e portanto $\widetilde{D^\alpha u} \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Pela Proposição 4.6 e pelo Corolário 4.12, $D^\alpha(\widetilde{u} * \rho_h) = (D^\alpha u) * \rho_h \to D^\alpha u$ em $L^p(\Omega)$ quando $h \to 0$.

Logo, $(\widetilde{u} * \rho_h)|_\Omega \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$ quando $h \to 0$. $\square$

Teorema 4.34. *$C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ é denso em $W^{k,p}(\Omega)$.*

Demonstração. Considere a sequência $\left\{\widetilde{\Omega}_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ fixada no início deste capítulo. Defina $\widetilde{\Omega}_0 = \widetilde{\Omega}_{-1} = \varnothing$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \widetilde{\Omega}_n \setminus \operatorname{cl}\left(\widetilde{\Omega}_{n-2}\right)$. Então $\mathscr{O} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma cobertura aberta de Ω. Tome uma partição C^∞ da unidade Ψ subordinada a $\mathscr{O}$[7].

Seja ψ_1 a soma (finita) das funções $\psi \in \Psi$ cujo suporte está contido em U_1, e para cada $n \in \mathbb{N}$, seja ψ_{n+1} a soma (finita) das funções $\psi \in \Psi$ cujo suporte está contido em U_{n+1}, mas não em U_j para $j < n+1$. Assim, $\operatorname{supp}\psi_n \Subset U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=1}^\infty \psi_n = 1$ em Ω.

Fixe $u \in W^{k,p}(\Omega)$ e um molificador ρ. Seja $\varepsilon > 0$. Pelo Lema 5.3, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escolher $h_n > 0$ suficientemente pequeno de forma que $((\psi_n u) * \rho_{h_n}) \in C_c^\infty(\Omega)$, $\operatorname{supp}((\psi_n u) * \rho_{h_n}) \Subset U_n$ e

$$\|(\psi_n u * \rho_{h_n}) - \psi_n u\|_{k,p;\Omega} = \|(\psi_n u * \rho_{h_n}) - \psi_n u\|_{k,p;U_n} < 2^{-n}\varepsilon.$$

Seja $\psi = \sum_{n=1}^\infty (\psi_n u * \rho_{h_n})$. Note que esta soma é finita em cada U_n, e portanto ψ está bem definida e é de classe C^∞. Segue que

$$\sum_{|\alpha|\leq k} \|u - D^\alpha \psi\|_{p;\Omega} \leq \sum_{n=1}^\infty \|\psi_n u - (\psi_n u * \rho_{h_n})\|_{k,p;\Omega} \leq \varepsilon < \infty.$$

Esta desigualdade mostra que $\psi \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ e $\|u - \psi\|_{k,p;\Omega} < \varepsilon$. $\square$

---

6 É necessário considerar estas extensões na demonstração do próximo lema, onde é usada a Proposição 4.6, que fala de igualdade, a princípio, em um subconjunto de Ω que depende de ρ e de h. Ao estendermos u, conseguimos igualdade em Ω.

7 Veja a referência [8], Capítulo 2.

4.5 Desigualdade de Sobolev

Definição 4.35. $W_0^{k,p}(\Omega)$ é o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$.

Da definição, os elementos de $W_0^{k,p}(\Omega)$ podem ser visualizados (intuitivamente) como elementos de $W^{k,p}(\Omega)$ que se anulam no bordo de Ω. Isto é reforçado pelo seguinte resultado.

Proposição 4.36. *Se $u \in W^{k,p}(\Omega)$ satisfaz supp$(u) \Subset \Omega$ então $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$. Em particular, $C_c(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega) \subseteq W_0^{k,p}(\Omega)$.*

Demonstração. Suponha $u \in W^{k,p}(\Omega)$ com $\operatorname{supp}(u) \Subset \Omega$. Pela proposicao 4.8 e pelo Corolário 4.7, para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos que $(u * \rho_{1/n}) \in C_c^\infty(\Omega)$ e que $D^\alpha(u * \rho_{1/n}) = (D^\alpha u * \rho_{1/n})$ em Ω para todo $|\alpha| \leq k$. Como $(u * \rho_{1/n}) \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$ pelo Lema 5.3, segue que $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$. □

Nesta seção será provada a desigualdade de Sobolev, que é um dos teoremas conhecidos como *mergulhos de Sobolev*. Esta desigualdade mostra a existência de uma inclusão contínua $W_0^{k,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ para algum $q > p$ dependendo de p, n, e k. Alguns resultados técnicos preliminares serão necessários para a demonstração deste teorema.

Definição 4.37 (Norma $L^{\mathbf{p}}$ mista)**.** Sejam $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_N) \in [1,\infty]^N$ (isto é, $1 \leq p_i \leq \infty$) e $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. A $\mathbf{p}$-*norma* de u é dada por

$$\|u\|_{\mathbf{p}} = \left\| \cdots \left\| \|u\|_{p_1;\mathbb{R}(dx_1)} \right\|_{p_2;\mathbb{R}(dx_2)} \cdots \right\|_{p_N;\mathbb{R}(dx_N)},$$

onde dx_i indica que a variável de integração (ou em que se toma $\operatorname{ess\,sup}$, caso $p_i = \infty$) é x_i.

Mais precisamente, $\|u\|_{\mathbf{p}}$ é definida indutivamente do seguinte modo:

(i) Se $N = 1$, $\mathbf{p} = p \in [1,\infty]$, então $\|u\|_{\mathbf{p}} = \|u\|_{p;\mathbb{R}}$;

(ii) Se $u : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_{N+1}) \in [1,\infty]^{N+1}$, sejam $\mathbf{q} = (p_1, \ldots, p_N)$ e defina, para cada $t \in \mathbb{R}$, $u(\cdot,t) : x \in \mathbb{R}^N \mapsto u(x,t) \in \mathbb{R}$ e $u_{\mathbf{q}} : t \in \mathbb{R} \mapsto \|u(\cdot,t)\|_{\mathbf{q}}$. Define-se então
$$\|u\|_{\mathbf{p}} = \|u_{\mathbf{q}}\|_{p_{n+1};\mathbb{R}}.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder variável por variável, chegamos no seguinte resultado:

Proposição 4.38 (Desigualdade de Hölder mista)**.** *Se $\mathbf{p}^1, \ldots, \mathbf{p}^n, \mathbf{r} \in [1,\infty]^N$, com $\mathbf{p}^j = (p_1^j, \ldots, p_N^j)$ e $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_N)$ satisfazem, para todo $i \in \{1, \ldots, N\}$, $1/r_i = \sum_{j=1}^n 1/p_i^j$, e $u_1, \ldots, u_n$ são funções mensuráveis, então*

$$\|u_1 \cdots u_n\|_{\mathbf{r}} \leq \prod_{j=1}^n \|u_j\|_{\mathbf{p}^j}.$$

Caso $N \geq 2$, dados um vetor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^N$ e $i \in \{1, \ldots, N\}$, denotaremos por $\widehat{x_i} \in \mathbb{R}^{N-1}$ o vetor

$$\widehat{x_i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N).$$

Lema 4.39. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto, e suponha $N \geq 2$. Para cada $j \in \{1, \ldots, N\}$, seja $\Omega_j \subseteq \mathbb{R}^{N-1}$ a imagem de Ω pela aplicação $x \mapsto \widehat{x_j}$, e seja $F_j : \Omega_j \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Considere agora a função $F : x \in \Omega \mapsto \prod_{j=1}^N F_j(\widehat{x_j}) \in \mathbb{R}$. Então F (é mensurável e) satisfaz*

$$\|F\|_{1;\Omega} \leq \prod_{j=1}^N \|F_j\|_{N-1;\Omega_j}.$$

Demonstração. Para cada $j \in \{1, \ldots, N\}$, F_j pode ser estendida a $\mathbb{R}^N$ por

$$\widetilde{F}_j(x) = \begin{cases} F_j(\widehat{x_j}) & , \text{se } x \in \Omega \\ 0 & , \text{se } x \notin \Omega \end{cases},$$

e do mesmo modo para F, por $\widetilde{F}|_\Omega = F$ e $\widetilde{F}|_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} = 0$.

Considere agora $\mathbf{p}^j = (p_1^j, \ldots, p_N^j)$ dados por $p_i^j = N - 1$ se $i \neq j$ e $p_i^j = \infty$ se $i = j$. Como cada $\widetilde{F}_j$ independe da j-ésima variável, segue da desigualdade de Hölder mista que

$$\|F\|_{1;\Omega} = \left\|\widetilde{F}\right\|_{(1,\ldots,1)} = \left\|\widetilde{F}_1 \cdots \widetilde{F}_N\right\|_{(1,\ldots,1)} \leq \prod_{j=1}^N \left\|\widetilde{F}_j\right\|_{\mathbf{p}^j} = \prod_{j=1}^N \|F_j\|_{N-1;\Omega_j}. \quad \square$$

Teorema 4.40 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)**.** *Dado $k \in \mathbb{N}$, para todo $p \geq 1$ tal que $kp < N$ (em particular, $N \geq 2$), existe uma constante $C = C(N, p, k) < \infty$ tal que para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$,*

$$\|\phi\|_{\frac{Np}{N-kp};\mathbb{R}^N} \leq C(N, p, k) \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha \phi\|_{p;\mathbb{R}^N}.$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução em k. Consideremos primeiro o caso $k = p = 1$. Sejam $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $1 \leq j \leq N$. Considere as funções $T_j \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ dadas por $T_j(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_N, x_j) = (x_1, \ldots, x_N)$ e $u_j : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ dada por

$$u_j(\widehat{x}) = \left(\sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}} |D_i \phi_j(T_j(\widehat{x}, t))| dt \right)^{1/N-1},$$

e que portanto satisfaz

$$\|u_j\|_{N-1;\mathbb{R}^{N-1}}^{N-1} \leq \sum_{i=1}^N \|D_i \phi\|_{1;\mathbb{R}^N}.$$

Agora, como $\phi(x) = \int\limits_{(-\infty, x_j]} D_j \phi(T_j(\widehat{x}_j, t)) dt$, então

$$|\phi(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |D_j \phi(T_j(\widehat{x}_j, t))| dt \leq (u_j(\widehat{x}_j))^{N-1},$$

para todo $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\phi(x)|^{N/N-1} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{j=1}^{N} u_j(\widehat{x}_j) dx \leq \prod_{j=1}^{N} \|u_j\|_{N-1;\mathbb{R}^{N-1}}$$
$$\leq \left(\sum_{i=1}^{N} \|D_i\phi\|_{1;\mathbb{R}^N} \right)^{N/(N-1)},$$

onde na segunda desigualdade utilizamos o Lema 4.39.

Agora, se $1 < p < N$, sejam $q = p/(p-1)$ o conjugado de Hölder de p, $r = Np/(N-p)$ e $s = (N-1)r/N$. Note que $1/p + 1/q = 1$, e podemos aplicar a desigualdade acima para ϕ^s, obtendo assim

$$\|\phi\|_{r;\mathbb{R}^N}^r = \int_{\mathbb{R}^N} |\phi(x)|^r dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\phi(x)^s|^{N/(N-1)} dx \leq \left(\sum_{i=1}^{N} \left\| s\phi^{s-1} D_i\phi \right\|_{1;\mathbb{R}^N} \right)^{N/(N-1)} \tag{4.1}$$

$$\leq \left\| \phi^{s-1} \right\|_{q;\mathbb{R}^N}^{N/(N-1)} \left(s \sum_{i=1}^{N} \|D_i\phi\|_{p;\mathbb{R}^N} \right)^{N/(N-1)}, \tag{4.2}$$

onde aplicamos a desigualdade de Hölder no último passo. Verifica-se facilmente que $\|\phi^{s-1}\|_{q;\mathbb{R}^N}^{N/(N-1)} = \|\phi\|_{r;\mathbb{R}^N}^{r-(N/(N-1))}$, e logo a desigualdade 4.1 é equivalente a

$$\|\phi\|_{\frac{Np}{(N-p)};\mathbb{R}^N} = \|\phi\|_{r;\mathbb{R}^N} \leq s \sum_{i=1}^{N} \|D_i\phi\|_{p;\mathbb{R}^N},$$

e portanto o caso $k = 1$ é válido, com $C(N, p, 1) = s = (N-1)p/(N-p)$.

Suponha agora que o teorema é válido para k, e que $(k+1)p < N$. Considere novamente $r = Np/(N-p)$ e note que $r > 1$, $kr < N$, e

$$\frac{Nr}{N - kr} = \frac{Np}{N - (k+1)p}.$$

Dos casos $k = 1$ e pela hipótese de indução, obtemos, para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\|\phi\|_{\frac{Np}{N-(k+1)p};\mathbb{R}^N} = \|\phi\|_{\frac{Nr}{N-kr};\mathbb{R}^N} \leq C(N, r, k) \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha\phi\|_{r;\mathbb{R}^N}$$
$$= C(N, r, k) \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha\phi\|_{\frac{Np}{N-p};\mathbb{R}^N}$$
$$\leq C(N, r, k) C(N, p, 1) \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\alpha|=k} \|D_i D^\alpha\phi\|_{p;\mathbb{R}^N}$$
$$= C(N, r, k) C(N, p, 1) \sum_{|\beta|=k+1} \left\|D^\beta\phi\right\|_{p;\mathbb{R}^N},$$

e portanto o resultado também é válido para $k+1$, com $C(N, p, k+1) = C(N, r, k)C(N, p, 1) = C(N, Np/(N-p), k)C(N, p, 1)$. $\square$

Lema 4.41. *Sejam Ω_1 e Ω_2 abertos de $\mathbb{R}^N$ com $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$. Denote, para cada $f : \Omega_1 \to \mathbb{K}$, a extensão por zero de f para Ω_2 por $\widetilde{f}$. Se $u \in W_0^{k,p}(\Omega_1)$, então $\widetilde{u} \in W_0^{k,p}(\Omega_2)$ e $D^\alpha \widetilde{u} = \widetilde{D^\alpha u}$ caso $|\alpha| \leq k$.*

Demonstração. Basta tomar uma sequência $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_c^\infty(\Omega_1)$ convergindo para u em $W^{k,p}(\Omega_1)$ e considerar as extensões $\widetilde{\phi}_n$ de ϕ_n por zero para Ω_2. Então $\left\{\widetilde{\phi}_n\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_c^\infty(\Omega_2)$, e $D^\alpha \widetilde{\phi_n} = \widetilde{D^\alpha \phi_n}$ para todos $n \in \mathbb{N}$ e $|\alpha| \leq k$.

Segue que $\widetilde{u} = \lim_{n\to\infty} \widetilde{\phi}_n$ e $\widetilde{D^\alpha u} = \lim_{n\to\infty} D^\alpha \widetilde{\phi}_n$ em $L^p(\Omega_2)$, e portanto $\widetilde{u} \in W^{k,p}(\Omega_2)$, $D^\alpha \widetilde{u} = \widetilde{D^\alpha u}$ para $|\alpha| \leq k$, e $\widetilde{u} = \lim_{n\to\infty} \widetilde{\phi}_n$ em $W^{k,p}(\Omega_2)$, e portanto $u \in W_0^{k,p}(\Omega_2)$. □

Corolário 4.42 (Desigualdade de Sobolev)**.** *Dados um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e números $1 \leq p < \infty$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que $kp < N$, existe uma constante $C = C(N,p,k) < \infty$ tal que para toda $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$*

$$\|u\|_{\frac{Np}{N-kp};\Omega} \leq C(N,p,k) \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{p;\Omega}.$$

Demonstração. Seja $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_c^\infty(\Omega) \subseteq W^{k,p}(\Omega)$ uma sequência convergindo em $W^{k,p}(\Omega)$ para u. Considere as extensões por zero $\widetilde{\phi}_n$ e $\widetilde{u}$ para $\mathbb{R}^N$. Tomando subsequências se necessário, podemos supor que $\left\{\widetilde{\phi}_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente q.t.p. para $\widetilde{u}$. Pelo Lema de Fatou e pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, existe uma constante $C(N,p,k)$ tal que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\frac{Np}{N-kp};\Omega} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{u}(x)|^{\frac{Np}{N-kp}} dx\right)^{\frac{N-p}{Np}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n\to\infty} |\widetilde{\phi}_n(x)|^{\frac{Np}{N-kp}} dx\right)^{\frac{N-kp}{Np}} \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{\phi}_n(x)|^{\frac{Np}{N-kp}} dx\right)^{\frac{N-kp}{Np}} = \liminf_{n\to\infty} \left\|\widetilde{\phi}_n\right\|_{\frac{Np}{N-kp};\mathbb{R}^N} \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} C(N,p,k) \sum_{|\alpha|=k} \left\|D^\alpha \widetilde{\phi}_n\right\|_{p;\mathbb{R}^N} = C(N,p,k) \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{p;\Omega}.
\end{aligned}$$

□

5 O Princípio do Máximo

Neste capitulo será demonstrado o teorema conhecido como Princípio do Máximo Fraco ou Generalizado conforme a referência [6]. Este resultado relaciona o comportamento no bordo de aplicações diferenciáveis (num sentido fraco) com o comportamento no interior do domínio, e é uma ferramenta essencial para o estudo de regularidade no bordo de soluções do Problema de Dirichlet.

5.1 Notação

Por todo este capítulo, utilizaremos a convenção de somatórios de Einsten: um índice que aparece duas vezes num termo (e que não tenha sido previamente especificado) significa que há a soma destes termos nos possíveis valores para este índice. Por exemplo, se são dados números x_i, y^i e z_{ij} para $i, j \in \{1, \dots, N\}$, então utilizando esta convenção de somatórios, podemos escrever

$$x_i y^i = \sum_{i=1}^{N} x_i y^i \qquad \text{e} \qquad z_{ij} z_{ij} = \sum_{i,j=1}^{N} z_{ij}^2.$$

A medida de Lebesgue de um conjunto mensurável $A \subseteq \mathbb{R}^N$ será denotada por $|A|$.

Fixamos um subconjunto aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, e supomos que, ou $N \geq 3$ ou $N = 2$ e $|\Omega| < \infty$. Dada uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$, denote respectivamente por $f^+ = \max(f, 0)$ e $f^- = -\min(f, 0)$ as suas partes positiva e negativa, respectivamente.

Para $i, j \in \{1, \dots, N\}$, fixamos ainda funções mensuráveis $a^{ij}, b^i, c^i, d : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $a^{ij} = a^{ji}$ para todo par (i, j).

Definição 5.1. Um operador diferencial L da forma

$$Lu = D_i(a^{ij} D_j u + b^i u) + c^i D_i u + du$$

para funções apropriadamente (fracamente) deriváveis é dito ser um operador (linear) *em forma de divergência.*

No que segue, L se referirá ao operador da definição acima. Supomos agora que existem números $\lambda_0, \Lambda_0, \nu_0 > 0$ tais que

$$|a^{ii}(x)|^2 \leq \Lambda_0^2, \tag{5.1}$$

$$\lambda_0^{-2} \left(|b^i(x)|^2 + |c^i(x)|^2 \right) + \lambda_0^{-1} |d(x)| \leq \nu_0^2, \tag{5.2}$$

$$\tau_i \tau_j a^{ij}(x) \geq \lambda_0 |\tau|^2 \tag{5.3}$$

para todo $x \in \Omega$ e para todo $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_N) \in \mathbb{R}^N$. Em particular, estas limitações implicam que as função são localmente integráveis e que a matriz $[a^{ij}(x)]_{i,j}$ é positiva-definida para todo $x \in \Omega$ (e com autovalores uniformemente limitados inferiormente por λ_0), e portanto

$$\max_{1\le i,j\le N} |a^{ij}(x)| = \max_{1\le i\le N} |a^{ii}(x)|.$$

5.2 Desigualdades Fracas

O Princípio do Máximo Fraco descreve certas hipóteses para que uma função num espaço de Sobolev alcance seu supremo na fronteira de Ω. Mas como estas funções estão somente bem definidas q.t.p., é necessário discutir sentidos generalizados para certas desigualdades.

Primeiro vamos definir o significado da desigualdade $Lu \ge 0$ em Ω. Sabemos que se $u \in C^2(\Omega)$, então $u \ge 0$ (pontualmente) se, e somente se, para toda $v \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $v \ge 0$ (pontualmente), temos que $\int_\Omega uv \ge 0$. Caso isso ocorra, e os coeficientes a^{ij}, b^i, c^i, d sejam suaves, podemos considerar a função contínua $Lu : \Omega \to \mathbb{R}$. Então $Lu \ge 0$ pontualmente se, e somente se, para toda $v \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$0 \le \int_\Omega (Lu)v = \int_\Omega (c^i D_i u + du)v - (a^{ij} D_j u + b^i u) D_i v,$$

onde utilizamos integração por partes na igualdade. Note que o termo à direita da desigualdade acima depende somente das primeiras derivadas de u.

Voltando ao caso geral, *defina* a forma bilinear $\mathscr{L} : W^{1,2}(\Omega) \times C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$\mathscr{L}(u,v) = \int_\Omega (a^{ij} D_j u + b^i u) D_i v - (c^i D_i u + du)v.$$

Note que se $(u,v) \in W^{1,2}(\Omega) \times C_c^\infty(\Omega)$, então

$$\int_\Omega |(a^{ij} D_j u + b^i u) D_i v - (c^i D_i u + du)v| \le \int_\Omega |a^{ij}||D_j u||D_i v| + \int_\Omega |b^i||u||D_i v| + \int_\Omega |c^i||D_i u||v| + \int_\Omega |d||u||v|.$$

Utilizando as limitações adotadas nos coeficientes e a desigualdade de Cauchy-Schwarz em $L^2(\Omega)$, podemos obter uma constante $C(\lambda_0, \Lambda_0, \nu_0) > 0$ tal que

$$\int_\Omega |(a^{ij} D_j u + b^i u) D_i v - (c^i D_i u + du)v| \le C(\lambda_0, \Lambda_0, \nu_0) \|u\|_{1,2;\Omega} \|v\|_{1,2;\Omega},$$

Isto mostra que $\mathscr{L}$ está bem definida e é contínua, portanto se estende de forma única para $W^{1,2}(\Omega) \times W_0^{1,2}(\Omega)$. Se $u \in C^2(\Omega)$ e $a^{ij}, b^i \in W^1(\Omega)$, então Lu está bem-definido como função e a regra do produto implica que $Lu \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, e do mesmo modo que acima, que

$$\mathscr{L}(u, v) = -\int_\Omega (Lu)v.$$

Essas considerações motivam a seguinte definição.

Definição 5.2. Se $u \in W^{1,2}(\Omega)$, dizemos que $Lu = 0$ (≥ 0, ≤ 0) no *sentido fraco* (ou *fracamente*) se para toda $v \in C^\infty_c(\Omega)$ com $v \geq 0$, tem-se que $\mathscr{L}(u, v) = 0$ (≤ 0, ≥ 0).

Se $u \in C^2(\Omega)$ e se $a^{ij}, b^i \in W^1(\Omega)$ para $1 \leq i, j \leq n$, dizemos que $Lu = 0$ (≥ 0, ≤ 0) no *sentido clássico* se a correspondente (des)igualdade vale q.t.p..

Teorema 5.3. *Suponha que $u \in W^{1,2}(\Omega) \cap C^2(\Omega)$ e que $a^{ij}, b^i \in W^1(\Omega)$. Então $Lu = 0$ (≥ 0, ≤ 0) vale no sentido clássico se, e somente se, vale no sentido fraco.*

Demonstração. A implicação "somente se" é óbvia. Suponha então que $Lu \leq 0$ no sentido fraco. Isto significa que para toda $v \in C^\infty_c(\Omega)$ com $v \geq 0$,

$$\int_\Omega (Lu)v \leq 0.$$

Dado $m \in \mathbb{N}$, seja $A_m = \{x \in \Omega : Lu(x) > 1/m\}$. Pela regularidade da medida de Lebesgue, existe um subconjunto compacto $K \subseteq A_m$ tal que $|K| \geq |A_m|/2$. Considere sua função característica χ_K.

Considere agora uma sequência $\{w_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq C^\infty_c(\Omega)$ de regularizações de χ_K convergindo para χ_K em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e pontualmente q.t.p. em Ω (vide Teoremas 4.11 e A.20). Assim, por definição das regularizações, $w_m(\Omega) \subseteq [0, 1]$. Pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que $(Lu)\chi_K = \lim_{m\to\infty}(Lu)w_m$ em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, logo

$$|A_m|/2m \leq |K|/m \leq \int_K (Lu)\chi_K = \lim_{m\to\infty} \int_K (Lu)w_m \leq 0.$$

ou seja, $|A_m| = 0$.

Como $\{x \in \Omega : Lu(x) > 0\} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m$, então $Lu(x) \leq 0$ q.t.p. em Ω, ou seja, $Lu \leq 0$ no sentido clássico. Os outros casos são análogos. □

A segunda desigualdade necessária é sobre o termo que multiplica u. Caso os coeficientes a^{ij}, b^i, c^i, d sejam suaves, então para toda $u \in C^2(\Omega)$, temos que $Lu = a^{ij}D_{ij}u + (D_j a^{ji} + b^i + c_i)(D_i u) + (D_i b^i + d)u$ e, dada $v \in C^\infty_c(\Omega)$, $\int_\Omega (D_i b^i + d)v = \int_\Omega dv - b^i D_i v$.

Definimos então, no caso geral, a aplicação linear $F : C^\infty_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$F(v) = \int_\Omega dv - b^i D_i v \tag{5.4}$$

que é claramente contínua em relação à norma de $W^{1,1}(\Omega)$, em vista das limitações nos coeficientes. Portanto, F se estende de forma única a $W_0^{1,1}(\Omega)$. A condição que prostularemos é que

$$F(v) \leq 0 \qquad \text{para toda } v \in C_c^\infty(\Omega) \text{ com } v \geq 0.$$

Quanto às condições de fronteira, como é comum que os domínios estudados possuam fronteira com medida nula, condições que envolvem desigualdades pontuais (q.t.p.) não são adequadas. A seguinte proposição motiva a definição que utilizaremos.

Proposição 5.4. *Suponha que Ω é limitado e que $u, v \in C^0(cl(\Omega)) \cap W^{1,2}(\Omega)$. Se $u(x) \leq v(x)$ para todo $x \in \partial\Omega$, então $(u-v)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $w = (u-v)^+$. Então a sequência $\{(w-1/n)^+\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para w. Como $(w-1/n)^+ \in C_c(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega) \subseteq W_0^{1,2}(\Omega)$ (vide Proposição 4.36), podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada (visto que $0 \leq (w-1/n)^+ \leq |w|$ e $|D_i(w-1/n)^+| \leq |D_i(w-1/n)| = |D_i w|$), e concluir que $(w-1/n)^+ \to w$ em $W^{1,2}(\Omega)$. Portanto $(u-v)^+ = w \in W_0^{1,2}(\Omega)$. □

Definição 5.5. Dadas $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$ (ou $v \in \mathbb{R}$), dizemos que $u \leq v$ (ou que $v \geq u$) em $\partial\Omega$ se $(u-v)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Definição 5.6. Dada $u \in W^{1,2}(\Omega)$,

$$\sup_{\partial\Omega} u = \inf\{k \in \mathbb{R} : u \leq k \text{ em } \partial\Omega\}.$$

5.3 O Princípio Fraco do Máximo

Neste seção será demonstrado o Princípio Fraco do Máximo. Alguns lemas técnicos são necessários para a demonstração.

Proposição 5.7. *A aplicação $(\cdot)^+ : u \in W^{1,p}(\Omega) \mapsto u^+ \in W^{1,p}(\Omega)$ é contínua ($1 \leq p < \infty$).*

Demonstração. Lembre-se que, pela regra da cadeia, $u^+ \in W^{1,p}(\Omega)$ e, para todos $1 \leq i \leq N$,

$$D_i u^+(x) = \begin{cases} D_i u(x) & , \text{se } u(x) > 0 \\ 0 & , \text{se } u(x) \leq 0. \end{cases} \tag{5.5}$$

Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ sequência tal que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Tome uma subsequência $\{v_k = u_{n(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $v_k \to u$ e $D_i v_k \to D_i u$ em $L^p(\Omega)$ e pontualmente q.t.p.. É fácil ver que $v_k^+ \to u^+$ e, utilizando a equação (5.5), que $D_i v_k^+ \to D_i u^+$ pontualmente q.t.p.. Pelo Teorema da Convergência Dominada, $v_k^+ \to u$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Isto mostra que $(\cdot)^+$ é contínua. □

Corolário 5.8. *Se $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfaz $v \geq 0$ pontualmente q.t.p., então existe uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ com $u_n \geq 0$ pontualmente tal que $u_n \to v$ em $W^{1,p}(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Seja $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ com $w_n \to v$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Pela Proposição 5.7, $w_n^+ \to v^+ = v$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Pelo Lema , $(\widetilde{w_n} * \rho_{1/m})|_\Omega \to w_n$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Como $(\widetilde{w_n} * \rho_{1/m}) \geq 0$ pontualmente e $(\widetilde{w_n} * \rho_{1/m}) \in C_c^\infty(\Omega)$ para m suficientemente grande, basta tomar uma subsequência diagonal $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\left\{(\widetilde{w_n} * \rho_{1/m})|_\Omega\right\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ apropriada, de modo que $u_n \to v$ em $W^{1,p}(\Omega)$. □

Pelo Corolário 5.8 e pela continuidade de F definida como na equação (5.4), temos, em particular, que $F(v) \geq 0$ para toda $v \in W_0^{1,1}(\Omega)$ com $v \geq 0$ pontualmente q.t.p.. Do mesmo modo, se $Lu \geq 0$, então $\mathscr{L}(u, v) \geq 0$ para toda $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ com $v \geq 0$ pontualmente q.t.p..

Lema 5.9. *Seja $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, e seja $v : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $v \in W^{1,2}(\Omega)$ tal que $v \geq 0$ q.t.p., ou $v = v_k : x \in \Omega \mapsto k \in \mathbb{R}$ constante com $k \geq 0$. Então $(u - v)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$.*

Demonstração. Primeiro suponha que $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Como $0 \leq (u - v)^+ \leq |u|$ (q.t.p.), então $\operatorname{supp}(u - v)^+ \subseteq \operatorname{supp} u \Subset \Omega$, e portanto $(u - v)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$, pela Proposição 4.36.

Suponha agora que $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ convergindo para u em $W^{1,2}(\Omega)$. Pelo caso anterior e pela Proposição 5.7, $\{(u_n - v)^+\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $W_0^{1,2}(\Omega)$ que converge para $(u - v)^+$, logo $(u - v)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$. □

Proposição 5.10. *Seja $k \in \mathbb{R}$ e considere a função constante $v_k : x \in \Omega \mapsto k \in \mathbb{R}$. Se $v_k \in W_0^{1,2}(\Omega)$ então $k = 0$.*

Demonstração. Suponha inicialmente que $N \geq 3$. Pela desigualdade de Sobolev, existe $C > 0$ tal que

$$\|v_k\|_{\frac{2N}{N-2};\Omega} \leq C \sum_{i=1}^{N} \|D_i v_k\|_{2;\Omega} = 0,$$

donde $v_k = 0$, isto é, $k = 0$.

Se $N = 2$ e $|\Omega| < \infty$, tome $p \in (1, 2)$. Como $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ continuamente neste caso, também temos $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega)$ continuamente, e $W_0^{1,2}(\Omega) \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$. Agora, podemos aplicar a desigualdade de Sobolev novamente, e existe $C > 0$ tal que

$$\|v_k\|_{\frac{2p}{2-p};\Omega} \leq C \sum_{i=1}^{2} \|D_i v_k\|_{2;\Omega} = 0,$$

logo $v_k = 0$, isto é, $k = 0$. □

Lema 5.11. *Sejam $u \in W^{1,2}(\Omega)$ e $k \in \mathbb{R}$ tal que $u^+ \leq k$ em $\partial\Omega$. Então $k \geq 0$.*

Demonstração. Por absurdo, suponha que $k < 0$. Então $u^+ + |k| = (u^+ - k)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Pelo Lema 5.9, $u^+ = ((u^+ + |k|) - |k|)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$, e portanto $|k| = (u^+ + |k|) - u^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$, contradizendo a Proposição 5.10. □

Lema 5.12. *Sejam $u \in W^{1,2}(\Omega)$ e $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tais que $u^+ \leq k_1$ em $\partial\Omega$ e $k_1 \leq k_2$. Então $u^+ \leq k_2$ em $\partial\Omega$.*

Demonstração. Pelo Lema 5.9, $(u^+ - k_2)^+ = ((u^+ - k_1)^+ - (k_2 - k_1))^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$, portanto $u^+ \leq k_2$ em $\partial\Omega$. □

Considerando F como na equação (5.4), suporemos no próximo teorema que $F(v) \geq 0$ para toda $v \in C_c^\infty(\Omega)$ com $v \geq 0$ pontualmente.

Teorema 5.13 (Princípio Fraco do Máximo)**.** *Suponha que $u \in W^{1,2}(\Omega)$ satisfaz $Lu \geq 0$ em Ω. Então*

$$\operatorname{ess\,sup} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+.$$

Demonstração. Primeiro note que se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ e $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ então $uv \in W_0^{1,1}(\Omega)$ e $D_i(uv) = uD_iv + vD_iu$ para $1 \leq i \leq N$.

Se $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ com $v \geq 0$ q.t.p. pontualmente, então a desigualdade $\mathscr{L}(u, v) \leq 0$ pode ser escrita como

$$\int_\Omega a^{ij} D_i u D_j v - (b^i + c^i) v D_i u \leq F(uv).$$

Além disso, se também vale $uv \geq 0$ pontualmente q.t.p., então

$$\int_\Omega a^{ij} D_i u D_j v - (b^i + c^i) v D_i u \leq 0.$$

Pelas limitações impostas nos coeficientes, obtemos que $|b^i|, |c^i| \leq \lambda_0 \nu_0$ para todo $1 \leq i \leq N$. Se $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ é tal que $v \geq 0$ q.t.p. e $uv \geq 0$ q.t.p., então

$$\int_\Omega a^{ij} D_i u D_j v \leq 2\lambda_0 \nu_0 \int_\Omega v \sum_{i=1}^{N} |D_i v|. \tag{5.6}$$

Seja $l = \sup_{\partial\Omega} u^+$ e suponha, por absurdo, que o teorema não seja válido. Em particular, $l < \infty$. Neste caso, tome $k > 0$ satisfazendo

$$0 \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \leq k < \operatorname{ess\,sup} u.$$

Pelo Lema 5.12 e pela definição de $\sup_{\partial\Omega} u^+$, $u^+ \leq k$ em $\partial\Omega$. Como $k \geq 0$, então $(u - k)^+ = (u^+ - k)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$, ou seja, $u \leq k$ em $\partial\Omega$.

Defina $v_k = (u - k)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Então $v_k \geq 0$ pontualmente q.t.p. em Ω e $uv_k \geq 0$ pontualmente q.t.p. em Ω. Pela regra da cadeia,

$$D_i v_k(x) = \begin{cases} D_i u(x) & \text{, se } v_k(x) \neq 0 \\ 0 & \text{, se } v_k(x) = 0. \end{cases}$$

Sejam $\Gamma_k = \bigcup_{i=1}^N \{x \in \Omega : D_i v_k(x) \neq 0\}$, e $\Delta_k = \{x \in \Omega : v_k(x) \neq 0\}$. Da igualdade acima, obtemos em particular que $\Gamma_k \subseteq \Delta_k$. Note que $u > k > 0$ em Δ_k. Portanto,

$$k|\Delta_k|^2 \leq \int\limits_{\Delta_k} |u|^2 \leq \|u\|_{2;\Omega}^2 < \infty,$$

logo $|\Gamma_k| \leq |\Delta_k| < \infty$.

As desigualdades (5.6)e (5.3) implicam que

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^N |D_i v_k|^2 &\leq \lambda_0^{-1} \int\limits_{\Omega} a^{ij} D_i v_k D_j v_k \leq 2\nu_0 \int\limits_{\Omega} v_k \sum_{i=1}^N |D_i u| \\
&= 2\nu_0 \int\limits_{\Delta_k} v_k \sum_{i=1}^N |D_i v_k| = 2\nu_0 \int\limits_{\Gamma_k} v_k \sum_{i=1}^N |D_i v_k| \\
&\leq 2\nu_0 \|v_k\|_{2;\Gamma_k} \sum_{i=1}^N \|D_i v_k\|_{2;\Gamma_k} \leq 2\nu_0 N \|v_k\|_{2;\Gamma_k} \|Dv_k\|_{2;\Omega}
\end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz em $L^2(\Gamma_k)$ na penúltima desigualdade, e $\|Dv_k\|_{2;\Omega} = \left(\sum_{i=1}^N \|D_i v_k\|_{2;\Omega}^2\right)^{1/2}$. Portanto,

$$\|Dv_k\|_{2;\Omega} \leq 2N\nu_0 \|v_k\|_{2;\Gamma_k}. \tag{5.7}$$

Suponha primeiro que $N \geq 3$. Pela desigualdade de Sobolev, existe uma constante $C = C(N, 2, 1) > 0$ tal que

$$\|v_k\|_{2N/(N-2);\Omega} \leq C \|Dv_k\|_{2;\Omega} < \infty. \tag{5.8}$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$\|v_k\|_{2;\Gamma_k} \leq \|v_k\|_{2N/(N-2);\Gamma_k} \|1\|_{2N/2;\Gamma_k} \leq \|v_k\|_{2N/(N-2);\Omega} |\Gamma_k|^{1/N}. \tag{5.9}$$

Pondo $C_0 = 2N\nu_0 C$, obtemos das equações (5.7), (5.8) e (5.9) que

$$\|v_k\|_{2N/(N-2);\Omega} \leq C_0 \|v_k\|_{2N/(N-2);\Omega} |\Gamma_k|^{1/N}$$

ou seja, $|\Gamma_k| \geq C_0^{-N}$, pois v_k não é nula q.t.p. em Ω.

Suponha agora que $N = 2$ e que $|\Omega| < \infty$. Dado $1 < p < 2$, como $W^{k,2}(\Omega) \subseteq W^{k,p}(\Omega)$ e a inclusão é contínua, então $W_0^{1,2}(\Omega) \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$

Pela desigualdade de Sobolev, existe uma constante $C = C(2, p, 1)$ tal que

$$\|v_k\|_{2p/(p-2);\Omega} \leq C \|Dv_k\|_{2;\Omega} < \infty. \tag{5.10}$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$\|v\|_{2;\Gamma_k} \leq \|v\|_{2p/(2-p);\Gamma_k} \|1\|_{p/(p-1);\Gamma_k} \leq \|v\|_{2p/(2-p);\Omega} |\Gamma_k|^{(p-1)/p}. \tag{5.11}$$

Pondo $C_0 = 2N\nu_0 C$, as equações (5.7), (5.10) e (5.11) implicam que

$$\|v_k\|_{2p/(2-p);\Omega} \leq C_0 \|v\|_{2p/(2-p);\Omega} |\Gamma_k|^{(p-1)/p},$$

ou seja, $|\Gamma_k| \geq C_0^{p/(p-1)}$, visto que $0 < \|v\|_{2p/(2-p);\Omega} < \infty$.

Concluindo, é possível, em todo caso, encontrar uma constante $C > 0$, independente de k, tal que $|\Delta_k| > C$. Fixe um tal C.

Tome uma sequência $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} u = \lim_{n\to\infty} k_n \quad \text{e} \quad \sup_{\partial\Omega} u^+ < k_n < k_{n+1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

e considere os conjuntos $\Delta^n := \Delta_{k_n}$ e suas funções características $\chi_n = \chi_{\Delta^n}$. Lembre-se que $|\Delta^1| < \infty$. Além disso, como $v_{k_{n+1}} \leq v_{k_n}$, então $\Delta^{n+1} \subseteq \Delta^n \subseteq \Delta^1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Note que $\chi_n \to 0$ pontualmente q.t.p. em Δ^1 e $|\chi_n| \leq 1$ pontualmente. Pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_{\Delta^1} \chi_n = \lim_{n\to\infty} |\Delta^n| \geq C > 0,$$

um absurdo. Disto concluímos que $\operatorname{ess\,sup}_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+$. □

Corolário 5.14. *Nas hipóteses do Teorema 5.13, se $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$, $L(u-v) = 0$ fracamente e $u \leq v$ em $\partial\Omega$, então $u \leq v$ q.t.p. em Ω.*

Demonstração. Seja $w = u - v$. Então $Lw = 0$ fracamente e $(w-0)^+ = (u-v)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$, logo

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega}(u-v) = \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} w \leq \sup_{\partial\Omega} w^+ \leq 0,$$

portanto $u \leq v$ q.t.p. em Ω. □

Parte III

Os Problemas de Dirichlet e de Plateau

6 O Problema de Dirichlet

Neste capítulo, discutiremos o Problema de Dirichlet para o Laplaciano. Na primeira seção são dadas as formulações clássica e fraca para o problema, bem como mostrada a unicidade da solução fraca. Na segunda parte, prova-se a existência de soluções, utilizando o funcional de energia. Na última parte discutimos a regularidade, tanto interior quanto no bordo, de uma classe de Problemas de Dirichlet, a saber os da forma $\Delta u = 0$ em D^N. O estudo deste capítulo é baseado na referência [9].

Fixe, durante o capítulo, $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, e um aberto limitado e conexo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ com bordo C^1, isto é, tal que $\partial\Omega$ é uma hipersuperfície de classe C^1 de $\mathbb{R}^N$. Assumiremos o seguinte resultado:

Teorema 6.1 (Teorema do Traço)**.** *Seja $p \in [1, \infty)$. Suponha que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é aberto e limitado e que $\partial\Omega$ é uma hipersuperfície de classe C^1. Então existe um (único) operador linear contínuo*

$$Tr_p : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

satisfazendo

(i) $Tr_p u = u|_{\partial\Omega}$ se $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0(cl(\Omega))$;

(ii) $\ker Tr_p = W_0^{1,p}(\Omega)$.

Para uma demonstração, ver referência [5], pp. 258-261.

Lembre-se que o *Laplaciano* (ou *operador de Laplace*) é o operador diferencial $\Delta = \sum_{i=1}^N D_i^2 = \sum_{i=1}^N(\partial^2/\partial x_i^2)$. O *gradiente* de uma aplicação (fracamente) diferenciável $u : \Omega \to \mathbb{R}$ (tanto em $C^1(\Omega)$ quanto em $W^{1,p}(\Omega)$) é dado por

$$\nabla u = (D_1 u, \ldots, D_N u).$$

Notamos que $L = \Delta$ satisfaz todas as condições que adotamos no capitulo 5. Em particular, valem o Princípio do Máximo e seu Corolário 5.14.

6.1 Formulação do Problema de Dirichlet

Sejam $f : \Omega \to \mathbb{R}$ e $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$. O *Problema de Dirichlet* para o Laplaciano (com dados f e g) é o problema de valor de contorno

$$\begin{cases} \Delta u = -f \\ u|_{\partial\Omega} = g. \end{cases} \tag{6.1}$$

Definição 6.2. Se $f \in C^0(\Omega)$ e $g \in C^0(\partial\Omega)$, uma *solução clássica* do Problema de Dirichlet é uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\mathrm{cl}\,(\Omega))$ tal que as equações (6.1) são válidas.

Estamos interessados em garantir a existência e unicidade de soluções para o Problema de Dirichlet. Com o mesmo raciocínio que o utilizado quando discutimos desigualdades fracas para operadores diferenciais lineares (5.2), podemos definir soluções fracas para o Problema de Dirichlet.

Definição 6.3. Sejam $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in L^2(\partial\Omega)$. Uma função $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é dita ser uma *solução fraca* para o Problema de Dirichlet se

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle = \int_\Omega fv \quad \text{, para toda } v \in W_0^{1,2}(\Omega), \\ \mathrm{Tr}_2 u = g. \end{cases} \tag{6.2}$$

Utilizaremos a notação $\mathrm{Tr} = \mathrm{Tr}_2$ e

$$X_g = \left\{u \in W^{1,2}(\Omega) : \mathrm{Tr}u = g\right\}.$$

O próximo teorema é uma consequência consequência direta do Lema de du Bois-Reymmond.

Teorema 6.4. *Se $f \in C^0(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ e $g \in C^0(\partial\Omega)$, uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(cl\,(\Omega)) \cap W^{1,2}(\Omega)$ é solução clássica do Problema de Dirichlet se, e somente se, é solução fraca.*

Teorema 6.5 (Unicidade de Soluções do Problema de Dirichlet)**.** *Sejam $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in L^2(\partial\Omega)$. O Problema de Dirichlet possui no máximo uma solução fraca.*

Demonstração. Suponha que $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$ sejam soluções fracas, isto é, que satisfaçam as condições (6.2). Isto implica que $\Delta(u - v) = 0$ fracamente (como discutido no capítulo 5) e que $(u - v) \in \ker \mathrm{Tr} = W_0^{1,2}(\Omega)$, logo $u \leq v$ e $v \leq u$ em $\partial\Omega$. Pelo Corolário 5.14, $u = v$ (em $W^{1,2}(\Omega)$). □

6.2 A Solução do Problema de Dirichlet

Fixamos, durante esta seção, funções $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in L^2(\partial\Omega)$.

Definição 6.6. O funcional de *energia* é

$$\begin{aligned} E_f : W^{1,2}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \frac{1}{2}\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla u\rangle - \int_\Omega fu. \end{aligned}$$

O próximo teorema é um princípio variacional, que mostra que encontrar soluções para o Problema de Dirichlet equivale a minimizar o funcional de energia.

Teorema 6.7 (Princípio de Dirichlet)**.** *Suponha que $X_g \neq \varnothing$. Então $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é uma solução fraca do Problema de Dirichlet (para dados f e g) se, e somente se, $u \in X_g$ e*

$$E_f(u) = \inf_{v \in X_g} E_f(v).$$

Demonstração. Suponha que $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é uma solução fraca do Problema de Dirichlet. Então, pela definição de solução fraca, temos que $u \in X_g$.

Seja $v \in X_g$. Então $(u - v) \in \ker \mathrm{Tr} = W_0^{1,2}(\Omega)$, logo

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla (u-v) \rangle = \int_\Omega f(u-v),$$

ou, equivalentemente,

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla u \rangle - \int_\Omega fu = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle - \int_\Omega fv.$$

Note agora que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle = \sum_{i=1}^N \int_\Omega D_i u D_i v &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_\Omega (D_i u)^2 + (D_i v)^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla u \rangle + \frac{1}{2} \int_\Omega \langle \nabla v, \nabla v \rangle, \end{aligned}$$

logo,

$$E_f(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla u \rangle - \int_\Omega fu \leq \frac{1}{2} \int_\Omega \langle \nabla v, \nabla v \rangle - \int_\Omega fv = E_f(v),$$

e segue que $E_f(u) = \inf_{v \in X_g} E_f(v)$, como desejado.

Agora, suponha que $u \in X_g$, ou seja, $\mathrm{Tr}\, u = g$, e $E_f(u) = \inf_{v \in X_g} E_f(v)$. Dado $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, considere a função $\zeta = \zeta(v) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} \zeta(t) = E_f(u + tv) &= \frac{1}{2} \int_\Omega \langle \nabla (u + tv), \nabla (u + tv) \rangle - \int_\Omega f(u + tv) \\ &= E_f(u) + t \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle + \frac{t^2}{2} \int_\Omega \langle \nabla v, \nabla v \rangle - t \int_\Omega fv. \end{aligned}$$

Esta função é diferenciável e, como $u + tv \in X_g$ para todo $t \in \mathbb{R}$, admite um mínimo global em $t = 0$. Logo,

$$0 = \zeta'(0) = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle - \int_\Omega fv.$$

Portanto, u é uma solução fraca do Problema de Dirichlet. □

Com este resultado, podemos tratar o Problema de Dirichlet como um problema de minimização. No que segue, utilizaremos o método direto do cálculo das variações para garantir a existência de soluções para o problema.

Lema 6.8 (Desigualdade de Dirichlet-Poincaré)**.** *Existe uma constante positive $C = C(|\Omega|) < \infty$ tal que para toda $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, tem-se que*

$$\|u\|_{2;\Omega}^2 = \int_\Omega u^2 \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2$$

Demonstração. Seja $p = 2N/(N+2)$. Note que $1 \leq p < 2 \leq N$, e pela desigualdade de Sobolev, existe uma constante $C = C(N) > 0$ tal que, para toda $u \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\|u\|_{\frac{Np}{N-p};\Omega} \leq C \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{p;\Omega}.$$

Mas $Np/(N-p) = 2$ e, como $|\Omega| < \infty$, $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ continuamente, de modo que para alguma constante $D = D(N, \Omega) > 0$,

$$\|u\|_{2;\Omega} \leq D \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{2;\Omega} \leq ND \left(\sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{2;\Omega}^2 \right)^{1/2} = ND \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{1/2}$$

para toda $u \in C_c^\infty(\Omega)$. O caso geral segue por densidade. □

Usaremos a seguinte notação: dada $u \in W^{1,2}(\Omega)$,

$$\|\nabla u\|_{2;\Omega} = \left(\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla u \rangle \right)^{1/2}.$$

Teorema 6.9. *Para cada $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in L^2(\partial\Omega)$ tal que $X_g \neq \varnothing$, existe uma única solução fraca para o Problema de Dirichlet (6.2).*

Demonstração. Pelo Princípio de Dirichlet, Teorema 6.7, basta mostrar que existe $u_0 \in X_g$ tal que

$$E_f(u_0) = \inf_{v \in X_g} E_f(v).$$

Dado qualquer elemento $v \in X_g$, note que $X_g = v + \ker \mathrm{Tr} = v + W_0^{1,2}(\Omega)$ é convexo e fechado na norma de $W^{1,2}(\Omega)$. Portanto, X_g é fracamente convexo em $W^{1,2}(\Omega)$.

Considere a seminorma

$$Q : u \in W^{1,2}(\Omega) \mapsto \|\nabla u\|_{2;\Omega} \in \mathbb{R}$$

e a aplicação linear

$$T_f : u \in W^{1,2}(\Omega) \mapsto \int_\Omega f u \in \mathbb{R}.$$

Pelo Exemplo 3.25, $Q^2/2$ é um funcional convexo, e T_f é linear, logo convexo. Como

$$E_f = \frac{1}{2} Q^2 - T_f,$$

então E_f é convexo, e obviamente contínuo na norma de $W^{1,2}(\Omega)$. Pelo Teorema 3.26, E_f é fracamente semicontínua inferiormente.

Tome $v_0 \in X_g$. Vamos mostrar que $M := E_f^{-1}(-\infty, E_f(v_0)] \cap X_g$ é limitado na norma de $W^{1,2}(\Omega)$. Seja $u \in M$, e considere

$$w = u - v_0.$$

Note que

$$\begin{aligned} E_f(u) = E_f(w + v_0) &= \frac{1}{2} \|\nabla w + \nabla v_0\|_{2;\Omega}^2 - \int_\Omega f(w + v_0) \\ &= \frac{1}{2} \|\nabla w\|_{2;\Omega}^2 + \int_\Omega \langle \nabla w, \nabla v_0 \rangle + \frac{1}{2} \|\nabla v_0\|_{2;\Omega}^2 - \int_\Omega fw - \int_\Omega fv_0 \\ &= E_f(v_0) + \frac{1}{2} \|\nabla w\|_{2;\Omega}^2 - \int_\Omega fw + \int_\Omega \langle \nabla w, \nabla v_0 \rangle . \end{aligned}$$

Note que $w \in \ker \mathrm{Tr} = W_0^{1,2}(\Omega)$. Seja $C > 0$ a constante obtida na desigualdade de Dirichlet-Poincaré. Então

$$\|w\|_{2;\Omega} \leq C \|\nabla w\|_{2;\Omega} .$$

Além disso, pela desigualdade de Hölder, temos que

$$|\int_\Omega \langle \nabla w, \nabla v_0 \rangle | \leq \|\nabla w\|_{2;\Omega} \|\nabla v_0\|_{2;\Omega} \qquad \text{e} \qquad |\int_\Omega fw| \leq \|f\|_{2;\Omega} \|w\|_{2;\Omega} .$$

Então,

$$\begin{aligned} E_f(v_0) &\geq E_f(u) \\ &\geq E_f(v_0) + \frac{1}{2} \|\nabla w\|_{2;\Omega}^2 - \|f\|_{2;\Omega} \|w\|_{2;\Omega} - \|\nabla w\|_{2;\Omega} \|\nabla v_0\|_{2;\Omega} \\ &\geq E_f(v_0) + \frac{1}{2} \|\nabla w\|_{2;\Omega}^2 - \Big(C \|f\|_{2;\Omega} + \|\nabla v_0\|_{2;\Omega} \Big) \|\nabla w\|_{2;\Omega} . \end{aligned}$$

Portanto, $\|\nabla w\|_{2;\Omega} \leq 2(C \|f\|_{2;\Omega} + \|\nabla v_0\|_{2;\Omega})$. Segue que

$$\begin{aligned} \|w\|_{1,2;\Omega} = \|w\|_{2;\Omega} + \sum_{i=1}^N \|D_i w\|_{2;\Omega} &\leq C \|\nabla w\|_{2;\Omega} + N \|\nabla w\|_{2;\Omega} \\ &\leq 2(C + N) \Big(C \|f\|_{2;\Omega} + \|\nabla v_0\|_{2;\Omega} \Big) , \end{aligned}$$

e, por fim, $\|u\|_{1,2;\Omega} \leq 2(C + N) \Big(C \|f\|_{2;\Omega} + \|\nabla v_0\|_{2;\Omega} \Big) + \|v_0\|_{1,2;\Omega}$. Concluímos que $X_g \cap E_f^{-1}(-\infty, E_f(v_0)]$ é não vazio e limitado na norma de $W^{1,2}(\Omega)$.

Pelo método direto do cálculo das variações, Teorema 3.22, existe $u_0 \in X_g$ tal que $E_f(u_0) = \inf_{v \in X_g} E_f(v)$, e portanto u_0 é solução fraca para o Problema de Dirichlet. A unicidade segue do Teorema 6.5. $\square$

6.3 Regularidade

Nesta seção serão demonstrados resultados de regularidade, tanto interior quanto no bordo, de soluções para o Problema de Dirichlet. Alguns resultados preliminares serão feitos em domínios arbitrários, e depois nos restringiremos ao disco D^N.

Fixemos um aberto conexo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e um molificador qualquer $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ que seja radialmente simétrico, isto é, se $x, y \in \mathbb{R}^N$ e $|x| = |y|$ então $\rho(x) = \rho(y)$ (por exemplo, considere o molificador padrão).

Lembre-se que uma função $\psi \in C^2(\Omega)$ é dita ser *harmônica* se $\Delta\psi = 0$. Pelo Lema de du-Bois Reymmond, isto equivale a dizer que para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, vale a igualdade

$$0 = \int\limits_\Omega \phi(\Delta\psi) = -\int\limits_\Omega \langle \nabla\psi, \nabla\phi \rangle .$$

Isto motiva a seguinte definição.

Definição 6.10. Uma função $v \in W^{1,2}(\Omega)$ é dita ser *fracamente harmônica* se para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int\limits_\Omega \langle \nabla v, \nabla\phi \rangle = 0.$$

Em particular, toda função $\phi \in C^2(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ que é harmônica também é fracamente harmônica.

Lema 6.11 (Propriedade do Valor Médio)**.** *Se $u \in C^2(\Omega)$ é harmônica, então para todo $x \in \Omega$ e para todo $r \in (0, d(x, \partial\Omega))$, tem-se que*

$$u(x) = \frac{1}{|D^N| N r^{N-1}} \int\limits_{\partial B(x;r)} u(y) dS(y) = \frac{1}{|D^N| r^N} \int\limits_{B(x;r)} u(y) dy$$

onde dS denota o elemento de área na esfera de raio r.

Demonstração. Seja $x \in \Omega$. Defina $\phi : (0, d(x, \partial\Omega)) \to \mathbb{R}$ por

$$\phi(r) = \frac{1}{r^{N-1}} \int\limits_{\partial B(x;r)} u(y) dS(y) = \int\limits_{\partial D^N} u(x + rz) dS(z).$$

Assim, ϕ é diferenciável e para todo $r \in (0, d(x, \partial\Omega))$, e

$$\phi'(r) = \int\limits_{\partial D^N} \langle \nabla u(x + rz), z \rangle \, dS(z) = \int\limits_{D^N} \Delta u(x + rz) dz = 0,$$

pelo Teorema da Divergência e pelo fato de u ser harmônica. Então ϕ é constante. Dado $r \in (0, d(x, \partial\Omega))$,

$$\phi(r) = \lim_{t \to 0} \phi(t) = \lim_{t \to 0} \int\limits_{\partial D^N} u(x + tz) dS(z) = u(x) N |D^N|,$$

ou seja, para todo $r \in (0, d(x, \partial\Omega))$,

$$u(x) = \frac{1}{|D^N| N r^{N-1}} \int\limits_{\partial B(x;r)} u(y) dS(y).$$

Tome agora $r \in (0, d(x, \partial\Omega))$. Utilizando coordenadas esféricas e aplicando a igualdade acima para $s \in (0, r)$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{|D^N| r^N} \int\limits_{B(x;r)} u(y) dy &= \frac{1}{|D^N| r^N} \int_0^r \left(\int\limits_{\partial B(x;s)} u(y) dS(y) \right) ds \\ &= \frac{1}{|D^N| r^N} \int_0^r \left(u(x) n |D^N| s^{N-1} \right) ds = u(x). \qquad \square\end{aligned}$$

Lema 6.12. *Se $v \in W^{1,2}(\Omega)$ é fracamente harmônica e $h > 0$, então $(v * \rho_h)$ é harmônica em $\Omega_h = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > h\}$.*

Demonstração. Para todo $x \in \Omega_h$, temos que

$$\begin{aligned}\Delta(v * \rho_h)(x) &= \sum_{i=1}^N D_i^2 (v * \rho_h)(x) = \sum_{i=1}^N (v * D_i^2 \rho_h)(x) \\ &= -\sum_{i=1}^N (D_i v * D_i \rho_h)(x) = -\int\limits_\Omega \langle \nabla v(y), \nabla \rho_h(x-y) \rangle \, dy = 0.\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 6.13 (Lema de Weyl)**.** *Se $v \in W^{1,2}(\Omega)$ é fracamente harmônica então $v \in C^\infty(\Omega)$ e é harmônica.*

Demonstração. Primeiramente note que se $x \in \widetilde{\Omega} \Subset \Omega$ e $h, t \in (0, d(\widetilde{\Omega}, \partial\Omega)/2)$, então

$$((v * \rho_h) * \rho_t)(x) = \int\limits_\Omega \rho_t(x-y)(v * \rho_h)(y) dy = \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega \rho_t(x-y) \rho_h(y-z) v(z) dy dz,$$

$$((v * \rho_t) * \rho_h)(x) = \int\limits_\Omega \rho_h(x-w)(v * \rho_t)(w) dw = \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega \rho_t(w-z) \rho_h(x-w) v(z) dw dz,$$

e estas integrais coincidem, com a substituição $y - z = x - w$.

Sejam então $\widetilde{\Omega} \Subset \Omega$ e $h, t \in (0, d(\widetilde{\Omega}, \partial\Omega)/2)$. Dado $x \in \widetilde{\Omega}$, utilizamos coordenadas esféricas para obter

$$\begin{aligned}((v * \rho_t) * \rho_h)(x) &= h^{-N} \int\limits_{B(x;h)} \rho((x-y)/h)(v * \rho_t)(y) dy \\ &= h^{-N} \int_0^h \left(\int\limits_{\partial B(x;s)} \rho((x-z)/h)(v * \rho_t)(z) dS(z) \right) ds.\end{aligned}$$

Como ρ é escolhida radialmente simétrica e $\|(x-z)/h\| = s/h$ para todo $z \in \partial B(x;s)$, então, tomando $\xi : [0,\infty)$ tal que $\xi(|y|) = \rho(y)$ para todo $y \in \mathbb{R}^N$, obtemos

$$((v*\rho_t)*\rho_h)(x) = h^{-N}\int_0^h \xi(s/h)\left(\int\limits_{\partial B(x;s)} (v*\rho_t)(z)dS(z)\right) ds.$$

Pelos Lemas 6.12 e 6.11, vale a propriedade do valor médio para $(v*\rho_t)$:

$$((v*\rho_t)*\rho_h)(x) = h^{-N}(v*\rho_t)(x)\int_0^h \xi(s/h)s^{N-1}N|D^N|ds.$$

Note agora que

$$\begin{aligned}\int_0^h \xi(s/h)s^{N-1}N|D^N|ds &= \int_0^h \xi(s/h)\left(\int\limits_{\partial B(0;s)} dS(z)\right) ds\\ &= \int_0^h \left(\int\limits_{\partial B(0;s)} \rho(z/h)dS(z)\right) ds = \int\limits_{B(0;h)} \rho(z/h)dz\\ &= h^N\int_{B_1(0)} \rho(y)dy = h^N.\end{aligned}$$

Portanto, $((v*\rho_h)*\rho_t)(x) = ((v*\rho_t)*\rho_h)(x) = (v*\rho_t)(x)$ em $\widetilde{\Omega}$. Tomando $t \to 0$, temos que $(v*\rho_h) = v$ q.t.p.. Então podemos tomar $v \in C^\infty(\widetilde{\Omega})$, onde $\widetilde{\Omega} \Subset \Omega$ é arbitrário. Utilizando uma exaustão $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{\Omega}_n$ com $\widetilde{\Omega}_n \Subset \Omega$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos $v \in C^\infty(\Omega)$. □

Com estes resultados, podemos provar a regularidade interior e no bordo de soluções para uma certa classe de Problemas de Dirichlet.

Teorema 6.14. *Suponha que $w \in C^0(cl(D^N)) \cap W^{1,2}(D^N)$. Se $u \in W^{1,2}(D^N)$ é solução fraca para o Problema de Dirichlet*

$$\begin{cases}\Delta u = 0,\\ Tru = w|_{\partial D^N},\end{cases}$$

então u é uma solução suave clássica para este mesmo problema.

Em particular, se $u \in W^{1,2}(D^N)$ é fracamente harmônica e $u - w \in W_0^{1,2}(D^N)$, então $u \in C^0(cl(D^N))$ e $u|_{\partial D^N} = w|_{\partial D^N}$.

Demonstração. Pelo Lema de Weyl, $u \in C^\infty(D^N)$ e satisfaz $\Delta u = 0$ em Ω. Basta então mostrar que u admite extensão contínua para $\mathrm{cl}(D^N)$ definida como $u|_{\partial D^N} = w|_{\partial D^N}$.

Seja $p \in \partial D^N$. Considere a função $F : x \in \mathrm{cl}(D^N) \mapsto 1 - \langle x, p\rangle \in \mathbb{R}$. Esta função é harmônica em D^N, contínua em $\mathrm{cl}(D^N)$, se anula em p e é positiva em $\mathrm{cl}(D^N) \setminus \{p\}$ (uma função com estas propriedades é chamada de *função barreira* em p).

Seja $\varepsilon > 0$. Pela continuidade de w, existe $\delta_1 > 0$ tal que para todo $x \in \operatorname{cl}\left(D^N\right) \cap B(p;\delta_1)$,

$$|w(x) - w(p)| < \varepsilon/2.$$

Seja $k > 0$ tal que para todo $z \in \operatorname{cl}\left(D^N\right) \setminus B(p;\delta_1)$,

$$kF(z) > \sup_{x \in \operatorname{cl}(D^N)} |w(x)|.$$

Defina as funções $w_1, w_2 : \operatorname{cl}\left(D^N\right) \to \mathbb{R}$ como

$$w_i = w(p) + (-1)^i \left(\varepsilon/2 + kF\right)$$

Então para todo $x \in \operatorname{cl}\left(D^N\right)$, temos $w_1(x) \leq w(x) \leq w_2(x)$, e w_1 e w_2 são harmônicas em D^N.

Note que $(w_1 - u)^+ = ((w - u) - (w - w_1))^+$. Como $w - u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, temos que, pelo Lema 5.9, $w_1 \leq u$ em ∂D^N. Analogamente, $u \leq w_2$ em ∂D^N. Pelo Princípio do Máximo, ou mais precisamente pelo corolario 5.14, aplicado ao operador de Laplace, $L = \Delta$, e utilizando o fato de que $u|_{\partial D^N} = w|_{\partial D^N}$, obtemos que, para todo $x \in D^N$, $w_1(x) \leq u(x) \leq w_2(x)$, isto é,

$$-kF(x) - \varepsilon/2 \leq u(x) - w(p) \leq kF(x) + \varepsilon/2$$

Como $F(p) = 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que para todo $x \in \operatorname{cl}\left(D^N\right) \cap B(p;\delta_2)$, $kF(x) < \varepsilon/2$. Portanto, se $x \in \operatorname{cl}\left(D^N\right) \cap B(p;\delta_2)$, então

$$|u(x) - u(p)| = |u(x) - w(p)| \leq kF(x) + \varepsilon/2 < \varepsilon$$

Portanto, u é contínua em ∂D^N. $\square$

7 O Problema de Plateau

Neste capítulo será dada a resolução do Problema de Plateau proposta por Douglas, conforme a referência [9].

7.1 Introdução e Notação

Denotaremos simplesmente por $D = D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ o disco aberto de raio unitário.

Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos o espaço $W^{1,2}(D, \mathbb{R}^n) = W^{1,2}(D)^n = W^{1,2}(D) \times \cdots \times W^{1,2}(D)$, que é um espaço de Banach reflexivo quando munido da norma $\|.\|_{1,2;D} : u \mapsto \sum_{j=1}^n \|u_j\|_{1,2;D}$. Analogamente, consideramos $W_0^{1,2}(D, \mathbb{R}^n) = W_0^{1,2}(D)^n$ como sendo o fecho de $C_c^\infty(D, \mathbb{R}^n)$ nesta norma.

Observação 7.1. *Como EVT, $W^{1,2}(D, \mathbb{R}^n)$ tem a topologia induzida pela família de seminormas $u = (u_1, \ldots, u_n) \mapsto \|D_i u_j\|_{2;D}$, para $1 \leq i \leq 2$ e $1 \leq j \leq n$. Em particular, um subconjunto $E \subseteq W^{1,2}(D, \mathbb{R}^n)$ é limitado se, e somente se, $\{D_i u_j : u = (u_1, \ldots, u_n) \in E\}$ é limitado em $L^2(D)$ para todos $1 \leq i \leq 2$ e $1 \leq j \leq n$.*

Dados $i \in \{1, 2\}$ e $u \in W^{1,2}(D, \mathbb{R}^n)$, denotaremos também $D_i u = (D_i u_1, \ldots, D_i u_n)$. Assim, o produto interno

$$\langle u, v \rangle_{W^{1,2}(D,\mathbb{R}^n)} = \int_D \langle u, v \rangle + \sum_{i=1}^{2} \int_D \langle D_i u, D_i v \rangle$$

induz uma norma equivalente a $\|.\|_{1,2;D}$, e que será denotada por $\|.\|_{W^{1,2}(D,\mathbb{R}^n)}$. Com esta estrutura, $W^{1,2}(D, \mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert.

O Problema de Plateau, proposto por Lagrange em 1760, é formulado do seguinte modo:

"Dada uma curva de Jordan $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$, encontrar uma superfície com área mínima entre aquelas que possuem o bordo dado por Γ."

Neste capítulo, consideraremos o Problema de Plateau para superfícies parametrizadas do disco. Esta versão do Problema foi resolvida independentemente por J. Douglas e T. Radó.

Definição 7.2. Dada $u \in W^{1,2}(D, \mathbb{R}^n)$, a *área* de u é dada por

$$A[u] = \int_D \sqrt{|D_1 u|^2 |D_2 u|^2 - \langle D_1 u, D_2 u \rangle^2},$$

e a *energia* de u, por

$$E[u] = \frac{1}{2}\int_D |D_1 u|^2 + |D_2 u|^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n} \|D_i u_j\|_{2;D}^2 .$$

Os funcionais $A : u \in W^{1,2}(D,\mathbb{R}^n) \mapsto A[u] \in \mathbb{R}$ e $E : u \in W^{1,2}(D,\mathbb{R}^n) \mapsto E[u] \in \mathbb{R}$ são denominados *área* e *energia*, respectivamente.

Proposição 7.3. *A área e a energia são contínuas em $W^{1,2}(D,\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Considere a aplicação bilinear $B : W^{1,2}(D,\mathbb{R}^n) \times W^{1,2}(D,\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ dada por

$$B(u,v) = \int_D (\langle D_1 u, D_1 v\rangle + \langle D_2 u, D_2 v\rangle) \qquad \forall u,v \in W^{1,2}(D,\mathbb{R}^n).$$

Então B é claramente contínua e $E[u] = B(u,u)$ para todo $u \in W^{1,2}(D,\mathbb{R}^n)$, portanto E é contínua.

Suponha agora que $u_m \to u$ em $W^{1,2}(D,\mathbb{R}^n)$. Tome uma subsequência $\{u_{m(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $D_i u_{m(k)} \to D_i u$ pontualmente q.t.p. em D. Além disso, $\{D_i u_{m(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ pode ser suposta limitada pontualmente q.t.p. por uma função $v_i \in L^2(D)$ (veja o Teorema A.10, para $i \in \{1,2\}$. Então o integrando de $A[u_{m(k)}]$ converge pontualmente q.t.p. para o integrando de $A[u]$ e é limitado por $v_1 v_2 \in L^1(D)$. Pelo Teorema da Convergência Dominada, $A[u_{m(k)}] \to A[u]$, e portanto A é contínua. □

Proposição 7.4. *Se $u \in W^{1,2}(D,\mathbb{R}^n)$ e $\phi = (\phi_1,\phi_2) : cl(D) \to cl(D)$ é um difeomorfismo C^1, então $A[u] = A[u\circ\phi]$*

Demonstração. Pode-se calcular facilmente

$$\begin{aligned} A[u\circ\phi] &= \int_D \sqrt{|D_1(u\circ\phi)(y)|^2 |D_2(u\circ\phi)(y)|^2 - \langle D_1(u\circ\phi)(y), D_2(u\circ\phi)(y)\rangle^2}\,dy \\ &= \int_D \sqrt{|D_1 u(x)|^2 |D_2 u(x)|^2 - \langle D_1 u(x), D_2 u(x)\rangle^2}\,dx = A[u], \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade decorre da regra da cadeia (Teorema 4.24) e da substituição de variáveis $y = \phi(x)$. □

Note que dados quaisquer vetores $x,y \in \mathbb{R}^n$, a desigualdade (claramente válida) $(|x|^2 - |y|^2) \geq -4\langle x,y\rangle^2$ é equivalente a $\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2} \leq (1/2)(|x|^2 + |y|^2)$, e há igualdade se, e somente se, $\langle x,y\rangle = |x|^2 - |y|^2 = 0$. Segue que

$$A[u] \leq E[u]$$

para todo $u \in W^{1,2}(D,\mathbb{R}^n)$, e há igualdade se, e somente se, $\langle D_1 u, D_2 u\rangle = |D_1 u|^2 - |D_2 u|^2 = 0$ q.t.p..

Definição 7.5. Uma função $u \in W^{1,2}(D, \mathbb{R}^n)$ é dita ser *quase-conforme* se $\langle D_1 u, D_2 u\rangle = |D_1 u|^2 - |D_2 u|^2 = 0$ q.t.p. em D. Se $u \in C^\infty(D, \mathbb{R}^n)$ e estas igualdades valem em todo ponto, então u é dita ser *conforme*.

7.2 Automorfismos do Disco

Uma das vantagens em considerar superfícies parametrizadas do disco é a existência de coordenadas isotermas, que discutiremos brevemente. Serão demontrados somente os resultados que não são comumente vistos num curso de Variável Complexa. Para os outros, vide a referência [10].

Definição 7.6. Um *automorfismo* de D é um difeomorfismo holomorfo $\phi : D \to D$. O conjunto de todos os difeomorfismo de D é denotado por $\mathrm{Aut}(D)$.

Teorema 7.7. *(a) Aut(D) é um grupo por composição.*

(b) Toda $\phi \in Aut(D)$ estende-se univocamente para um homeomorfismo em $\phi : cl(D) \to cl(D)$.

(c) A ação de $Aut(D)$ sobre ∂D é triplamente transitiva, isto é, dados quaisquer pontos $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3 \in \partial D$ com $p_i \neq p_j$ e $q_i \neq q_j$ se $i \neq j$, existe $\phi \in Aut(D)$ tal que $\phi(p_i) = q_i$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$.

Lema 7.8. *Se $u \in W^{1,2}(D, \mathbb{R}^n)$ e $\phi \in Aut(D)$, então $u \circ \phi \in W^{1,2}(D, \mathbb{R}^n)$ e $E[u\circ\phi] = E[u]$.*

Demonstração. Basta provar o caso $n = 1$, pois se $u = (u_1, \ldots, u_n)$, então $E[u] = \sum_{j=1}^n E[u_j]$. Suponha então $u \in W^{1,2}(D)$ e $\phi \in \mathrm{Aut}(D)$.

Segue da regra da cadeia, Teorema 4.24, que $u \circ \phi \in W^{1,2}(D)$ e, derivando ϕ como função complexa, que

$$E[u \circ \phi] = \frac{1}{2}\int_D |\nabla(u \circ \phi)|^2 = \frac{1}{2}\int_D |(\nabla u) \circ \phi|^2 |\phi'|^2,$$

e, como $|\det D\phi| = |\phi'|^2$, então obtemos, por uma troca de variáveis,

$$E[u \circ \phi] = \frac{1}{2}\int_D |(\nabla u) \circ \phi|^2 |\det D\phi| = \frac{1}{2}\int_D |\nabla u|^2 = E[u]. \quad \square$$

Uma das vantagens de se trabalhar no disco bidimensional é a existência de "coordenadas isotermas".

Definição 7.9. Uma *métrica* em D é uma função $g = [g_{ij}] : D \to M_2(\mathbb{R})$ que associa a cada $x \in D$ uma matriz 2×2 semipositiva definida

$$g(x) = [g_{ij}(x)] = \begin{bmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) \end{bmatrix}.$$

A métrica g é dita ser *suave* se cada função $g_{ij} : D \to \mathbb{R}$ o for, e g é dita ser *não degenerada* (ou *Riemanniana*) se para todo $x \in D$, $g(x)$ é positiva definida. Caso contrário, a métrica é dita ser *degenerada*.

Utilizaremos no teorema seguinte a notação: se $\phi : D \to D$ é de classe C^1 e $x \in D$, $J\phi(x)$ denota a Jacobiana de ϕ no ponto x, $J\phi(x)^T$ a sua transposta, e I_2 denotará a matriz identidade 2×2.

Teorema 7.10 (Existência de Coordenadas Isotermas). *Se g é uma métrica suave não-degenerada em D, então existem um automorfismo $\phi \in Aut(D)$ e uma função suave $\lambda : D \to \mathbb{R}$ tais que para todo $x \in D$,*

$$J\phi(x)^T g(\phi(x)) J\phi(x) = e^{\lambda(x)} I_2$$

O difeomorfismo ϕ é dito ser um sistema de coordenada isotermas.

A demonstração pode ser encontrada na referência [11]. Este teorema diz, em termos simples, que toda métrica suave não degenerada em D é conforme à métrica euclidiana (dada pelo produto interno usual).

Seja agora Γ uma curva de Jordan C^1 por partes. Uma função $f : \partial D \to \Gamma$ é dita ser *monótona* se a pré-imagem de conjuntos conexos é conexa. Consideraremos o seguinte conjunto de funções admissíveis[1]:

$$X_\Gamma = \left\{ u \in W^{1,2}(D, \mathbb{R}^3) \cap C^0(\mathrm{cl}\,(D)\,, \mathbb{R}^3) : u|_{\partial D} : \partial D \to \Gamma \text{ é sobrejetiva e monótona} \right\}.$$

Sejam $A_\Gamma = \inf \{A(v) : v \in X_\Gamma\}$ e $E_\Gamma = \inf \{E[v] : v \in X_\Gamma\}$. Neste contexto, consideraremos a seguinte forma do Problema de Plateau:

"Encontrar $u \in X_\Gamma$ tal que $A[u] = A_\Gamma$."

Teorema 7.11. $A_\Gamma = E_\Gamma$.

Demonstração. Como $A[u] \leq E[u]$ para todo $u \in X_\Gamma$, então $A_\Gamma \leq E_\Gamma$.

Para a recíproca, seja $\varepsilon > 0$. Tome $u \in X_\Gamma$ tal que

$$A[u] < A_\Gamma + \varepsilon/4.$$

Como $C^\infty(D) \cap W^{1,2}(D)$ é denso em $W^{1,2}(D)$ e a área e a energia são contínuas, podemos escolher $v \in C^\infty(D, \mathbb{R}^3) \cap W^{1,2}(D, \mathbb{R}^3)$ tal que

$$|E[v] - E[u]|, |A[v] - A[u]| < \varepsilon/4.$$

Considere a métrica suave (possivelmente degenerada) associada a v, definida por

$$g_{ij} = \langle D_i v, D_j v \rangle, \qquad i, j \in \{1, 2\}.$$

[1] A monotonicidade de $u|_{\partial D}$ é uma hipótese técnica necessária à demonstração do Lema 7.16.

Dado $s > 0$, considere a perturbação $v^s : D \to \mathbb{R}^5 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dada por

$$v^s(x_1, x_2) = (v(x_1, x_2), sx_1, sx_2).$$

Considere a métrica suave g^s associada v^s dada por

$$g^s_{ij} = \langle D_i v^s, D_j v^s \rangle = g_{ij} + s^2 \delta_{ij}, \qquad i, j \in \{1, 2\}.$$

Note que, desta forma, $g^s(x, y) = [g^s_{ij}(x, y)]$ é positiva definida para todo ponto $(x, y) \in D$, ou seja, a métrica g^s é não-degenerada.

Pelo Teorema de Existência de Coordenadas Isotermas, existem $\phi_s = (\phi^1_s, \phi^2_s) \in \mathrm{Aut}(D)$ e $\lambda_s \in C^\infty(D)$ tais que $J\phi(x)^T g(\phi(x)) J\phi(x) = e^{\lambda_s(x)} I_2$ para todo $x \in D$. Então, para todos $i, j \in \{1, 2\}$,

$$\begin{aligned}
\langle D_i(v^s \circ \phi), D_j(v^s \circ \phi) \rangle &= \sum_{k,l=1}^{2} (D_i \phi^k_s) \cdot \langle (D_k v^s) \circ \phi_s, (D_l v^s) \circ \phi_s \rangle \cdot (D_j \phi^l_s) \\
&= \sum_{k,l=1}^{2} (D_i \phi^k_s) \cdot (g_{kl} \circ \phi_s) \cdot (D_j \phi^l_s) = e^{\lambda_s} \delta_{ij},
\end{aligned}$$

e portanto $v^s \circ \phi_s$ é quase conforme, donde

$$E[v] \leq E[v^s] = E[v^s \circ \phi_s] = A[v^s \circ \phi_s] = A[v^s].$$

Note agora que

$$\begin{aligned}
\det g^s &= \det(g + s^2 I_2) = \det g + s^2 (\mathrm{Tr} g) + s^4 = \det g + s^2 |\nabla v|^2 + s^4 \\
&\leq \left(\sqrt{\det g} + s|\nabla v| + s^2| \right)^2
\end{aligned}$$

em que Tr denota o traço e ∇ é o gradiente. Portanto,

$$\begin{aligned}
A[v^s] &= \int_D \sqrt{\det g^s} \leq \int_D \left(\sqrt{\det g} + s|\nabla v| + s^2 \right) \\
&= A[v] + s \int_D |\nabla v| + \pi s^2.
\end{aligned}$$

Como $v \in W^{1,2}(D, \mathbb{R}^3)$, podemos tomar $s > 0$ suficientemente pequeno de forma que $A[v^s] \leq A[v] + \varepsilon/4$. Portanto,

$$E_\Gamma \leq E[u] \leq E[v] + \frac{\varepsilon}{4} \leq A[v^s] + \frac{\varepsilon}{4} \leq A[v] + 2\frac{\varepsilon}{4} \leq A[u] + 3\frac{\varepsilon}{4} < A_\Gamma + \varepsilon.$$

Tomando $\inf_{\varepsilon > 0}$, obtemos $E_\Gamma \leq A_\Gamma$. $\square$

7.3 A Solução do Problema de Plateau

Nesta seção, utilizaremos os resultados obtidos sobre soluções do Problema de Dirichlet para garantir a existência de soluções do problema de Plateau, bem como sua regularidade. Isto é obtido minimizando a energia dentre todas as possíveis parametrizações para o bordo.

Primeiro, devemos garantir que existem minimizantes para a energia no sentido estudado neste capítulo, bem como sua regularidade.

Teorema 7.12. *Seja* $w = (w_1, w_2, w_3) \in W^{1,2}(D, \mathbb{R}^3)$*. Então existe um único elemento* $v \in W^{1,2}(D, \mathbb{R}^3)$ *que minimiza a energia em* $w + W_0^{1,2}(D, \mathbb{R}^3)$*. Além disso,*

(a) v *é de classe* C^∞ *e cada componente sua é harmônica em* D*.*

(b) Se $w \in C^0(cl(D), \mathbb{R}^3)$*, então* $v \in C^0(cl(D), \mathbb{R}^3)$ *e* $w|_{\partial D} = v|_{\partial D}$*.*

Demonstração. Para cada $j \in \{1, 2, 3\}$, seja $v_j \in w_j + W_0^{1,2}(D)$ a única solução para o Problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta v_j = 0, \\ \operatorname{Tr}(v_j) = \operatorname{Tr}(w_j), \end{cases}$$

dada pelo Teorema 6.9. De acordo com o Princípio de Dirichlet, Teorema 6.7,

$$E[v_j] = \inf_{u - w \in W_0^{1,2}(D)} E[u].$$

Portanto, $v = (v_1, v_2, v_3)$ é um minimizante para a energia em $w + W_0^{1,2}(D, \mathbb{R}^3)$ O item (a) segue do Lema de Weyl, Teorema 6.13, e o item (b), do Teorema 6.14. □

Lema 7.13. *Se* $u \in C^0(cl(D)) \cap W^{1,2}(D)$*, então existe uma sequência* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^\infty(D)$ *tal que* $u_n \to u$ *uniformemente em* $cl(D)$ *e* $u_n \to u$ *em* $W^{1,2}(D)$*.*

Demonstração. Na demonstração do Teorema 4.34, dado $\varepsilon > 0$, como $(\psi_{n-1} + \psi_n + \psi_{n+1})u = u$ em U_n, é possível, de acordo com o Lema 4.9, escolher os h_n suficientemente pequenos de forma que $\|\psi - u\|_{\infty;D} < \varepsilon$. A sequência desejada é então obtida considerando tais $\psi = \psi_\varepsilon$ ao variar $\varepsilon = \varepsilon_n$ com $\varepsilon_n \to 0$. □

Para o próximo lema, fixe um ponto $p \in \operatorname{cl}(D)$, e considere, para cada $r > 0$ o arco

$$C(p, r) = \{x \in \operatorname{cl}(D) : |p - x| = r\}.$$

Lema 7.14 (Lema de Courant-Lebesgue)**.** *Seja* $u \in C^0(cl(D), \mathbb{R}) \cap W^{1,2}(D, \mathbb{R})$ *e* $K > 0$ *tal que* $E(u) < \dfrac{K}{2}$*. Então para todo* $0 < \delta < 1$ *existe* $s_\delta \in [\delta, \sqrt{\delta}]$ *tal que*

$$diam\,(u\,(C(p, s_\delta)))^2 \leq \varepsilon_\delta$$

onde $\varepsilon_\delta = \dfrac{4\pi K}{-\log\sqrt{\delta}}$*. Em particular,* $\varepsilon_\delta \to 0$ *quando* $\delta \to 0$*.*

Demonstração. Podemos supor, pelo lema anterior, que $u \in C^\infty(D)$. Para cada $r > 0$, seja $L(u(C(p,r)))$ o comprimento de $u(C(p,r))$. Fixe $\delta \in (0,1)$.

Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(r) = r \int\limits_{C(p,r)} |\nabla u|^2 ds,$$

onde ds denota o comprimento de arco de $C(p,r)$. Então

$$\int_\delta^{\sqrt{\delta}} \frac{f(r)}{r} dr \leq \int\limits_D |\nabla u|^2 \leq K.$$

Pelo Teorema do Valor Médio para Integrais, existe $s_\delta \in [\delta, \sqrt{\delta}]$ tal que

$$f(s_\delta) = \frac{\int_\delta^{\sqrt{\delta}} (f(r)/r)dr}{\int_\delta^{\sqrt{\delta}} (1/r)dr} \leq \frac{2K}{-\log \sqrt{\delta}}$$

Para todo $r \in [\delta, \sqrt{\delta}]$, por Cauchy-Schwarz em $L^2(C(p,r), ds)$, vale

$$L(u(C(p,r)))^2 = \left[\int\limits_{C(p,r)} |\nabla u| ds \right]^2 \leq \int\limits_{C(p,r)} |\nabla u|^2 ds \int\limits_{C(p,r)} ds = 2\pi f(r).$$

Em particular,

$$\operatorname{diam}(u(C(p,s_\delta)))^2 \leq L(u(C(p,s_\delta)))^2 \leq \frac{4K\pi}{-\log \sqrt{\delta}} = \varepsilon_\delta. \quad \square$$

Pelo restante da seção, fixaremos três pontos distintos $p_1, p_2, p_3 \in \partial D$ e três pontos distintos $q_1, q_2, q_3 \in \Gamma$.

Lema 7.15. *Seja $u \in X_\Gamma$. Então existe $\phi \in Aut(D)$ tal que*

(i) Para cada $i \in \{1,2,3\}$, $u(\phi(p_i)) = q_i$;

(ii) $E[u] = E[u \circ \phi]$;

(iii) $u \circ \phi \in X_\Gamma$;

(iv) Se u é harmônica, então $u \circ \phi$ também o é.

Demonstração. De fato, como $u(\partial D) = \Gamma$, existem $q_1', q_2', q_3' \in \partial D$ tais que $u(q_i') = q_i$ $(1 \leq i \leq 3)$. Como os pontos q_i são distintos, os pontos q_i' também são distintos. Pelo Teorema 7.7(c), existe $\phi \in \mathrm{Aut}(D)$ tal que $\phi(p_i) = q_i'$ $(1 \leq i \leq 3)$. Isto prova (i).

Como $u \in W^{1,2}(D)$ e $\phi \in \mathrm{Aut}(D)$, então $u \circ \phi \in W^{1,2}(D)$ e $E[u] = E[u \circ \phi]$, pelo Lema 7.8. Isto prova (ii).

Pelo Teorema 7.7(b), $\phi \in C^0(\mathrm{cl}\,(D))$, de modo que $u \circ \phi \in C^0(\mathrm{cl}\,(D))$. Ainda pelo Teorema 7.7(b), $u \circ \phi|_{\partial D}$ é sobrejetiva e monónota. Então, vale (iii).

O item (iv) segue de um simples cálculo, utilizando a regra da cadeia 4.24 e o fato de que ϕ é holomorfa. $\square$

Utilizaremos agora o Lema de Courant-Lebesgue para mostrar que, ao fixar as imagens dos pontos p_i e limitando a energia, obtemos equicontinuidade no bordo.

Lema 7.16. *Dada uma constante $K > 0$, defina a família*

$$\mathcal{F}_K = \{\psi \in X_\Gamma : \forall i \in \{1,2,3\} \;\; \psi(p_i) = q_i \;\; e \;\; E[\psi] \leq K/2\}\,.$$

Então $\mathcal{F}_K$ é equicontínua em ∂D. Portanto, pelo Teorema de Arzela-Ascoli, $\mathcal{F}_K$ é relativamente compacta na topologia da convergência uniforme de ∂D.)

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Sem perda de generalidade, suponha que $\varepsilon < |q_i - q_j|$ para $i \neq j$.

Como Γ é C^1 por partes, em particular é retificável, logo existe $d > 0$ tal que se $p, q \in \Gamma$ com $0 < |p - q| < d$ então $\Gamma \setminus \{p, q\}$ possui exatamente uma componente conexa de diâmetro menor ou igual a ε.

Escolha $0 < \delta < 1$ tal que ε_δ como no Lema de Courant-Lebesgue satisfaça $0 < \sqrt{\varepsilon_\delta} < d$ e tal que para qualquer $p \in \partial D$, há no máximo um dos p_i com $|p - p_i| < \sqrt{\delta}$.

Seja $p \in \partial D$, e fixe temporariamente $\psi \in \mathcal{F}_K$. Pelo Lema de Courant-Lebesgue, existe $s = s_\delta \in [\delta, \sqrt{\delta}]$ tal que $\operatorname{diam}(\psi(C(p,s))) < d$.

A curva $C(p,s)$ divide ∂D em duas componentes conexas, A^1 e A^2, com a menor, digamos A^1, contendo p e no máximo um dos pontos p_i. Sejam $\mathcal{A}_i = \psi(A_i)$. Como as imagens y_1 e y_2 dos pontos da fronteira de $C(p,s)$ por ψ têm distância menor do que $\operatorname{diam}(\psi(C(p,s))) < d$, a escolha de d implica que exatamente uma das componentes conexas de $\Gamma \setminus \{y_1, y_2\}$ possui diâmetro no máximo ε.

A monotonicidade de $\psi|_{\partial D}$ implica que as componentes de $\Gamma \setminus \{y_1, y_2\}$ são exatamente $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$. Como a componente de diâmetro menor ou igual a ε possui no máximo um dos pontos q_i, segue que esta componente é $\mathcal{A}_1$, que então tem diâmetro menor do que ε.

Concluindo, se $|p - p'| < \delta \leq s$ em ∂D, então $p' \in A_1$, e portanto $|\psi(p) - \psi(p')| \leq \operatorname{diam}(\mathcal{A}_1) \leq \varepsilon$. Como a escolha de δ dependeu somente de ε, isto mostra que $\mathcal{F}_K$ é equicontínua. □

Lema 7.17. *Seja $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ uma curva de Jordan. Sejam $u_n : \partial D \to \Gamma$ ($n \in \mathbb{N}$) e $u : \partial D \to \Gamma$ funções contínuas tais que $u_n \to u$ uniformemente. Suponha que existam pontos $p \in \partial D$ e $q \in \Gamma$ tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_n(p) = q$, e suponha que cada u_n é monótona. Então u é monótona.*

Demonstração. Daremos somente um esboço da prova deste lema. Note que, como cada u_n é monótona, então é sobrejetiva ou constante. Caso haja uma subsequência $\{u_{n(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de funções constantes, o resultado é imediato. Podemos supor, então, que todas as u_n são sobrejetivas.

Considere a aplicação exponencial $E : t \in [0,1] \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \in \partial D$. Podemos supor, a menos de compor E com uma translação, que $u(E(0)) = q$. Seja $\gamma : [0,1] \to \Gamma$ uma aplicação contínua, injetiva em $[0,1)$ e tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = q$.

Podemos associar cada aplicação $u_n \circ E$ a uma função contínua $f_n : [0,1] \to [0,1]$ de modo que $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$ e $\gamma \circ f_n = u_n \circ E$. Do mesmo modo, associamos $u \circ E$ a uma função contínua $f : [0,1] \to [0,1]$ tal que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e $\gamma \circ f = u \circ E$, e $f_n \to f$ uniformemente.

A monotonicidade de cada u_n implica, por sua vez, que f_n é não-decrescente. Como $f_n \to f$ uniformemente, então f também é não-decrescente, e isto implica que u é monótona. $\square$

Teorema 7.18 (Problema de Plateau). *Se $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ é uma curva de Jordan C^1 por partes, então existe $u : D \to \mathbb{R}^3$ satisfazendo:*

(i) $u \in X_\Gamma$;

(ii) u *é* C^∞, *harmônica (isto é, cada componente é harmônica) e conforme em* D;

(iii) $E[u] = E_\Gamma = A_\Gamma = A[u]$.

Demonstração. Primeiro vamos verificar que $X_\Gamma \neq \varnothing$. Como Γ é C^1 por partes, existe uma aplicação C^1 por partes, monótona e sobrejetiva $\widetilde{w} : \partial D \to \Gamma$. Seja $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\eta(1) = 1$ e $\eta(t) = 0$ para $t \leq \dfrac{1}{2}$. Podemos definir $w : \operatorname{cl}(D) \to \mathbb{R}^3$ por

$$w(x) = \begin{cases} \eta(|x|)\widetilde{w}(x/|x|) & , \text{ se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } x = 0. \end{cases}$$

Desta forma, $w \in X_\Gamma$. Portanto, $E_\Gamma \leq E_w < \infty$.

$w = (w_1, w_2, w_3)$ é uniformemente contínua em $\operatorname{cl}(D)$ e limitada, de modo que $w_i \in L^2(D)$ $(1 \leq i \leq 3)$. Suas derivadas clássicas são contínuas q.t.p. e limitadas, e portanto de quadrado integrável. Através de um cálculo simples mas longo (que omitimos), verificamos que essas derivadas clássicas sao (q.t.p.) também suas derivadas fracas. Concluímos que $w \in W^{1,2}(D, \mathbb{R}^3) \cap C^0(\operatorname{cl}(D), \mathbb{R}^3)$, e logo $w \in X_\Gamma$.

Seja agora $\{\widetilde{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X_\Gamma$ sequência qualquer com $E[\widetilde{u}_n] \to E_\Gamma$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos, pelos Teoremas 6.9 e 6.14 de existência de soluções do Problema de Dirichlet, obter $u_n \in W^{1,2}(D, \mathbb{R}^3) \cap C^0(\operatorname{cl}(D), \mathbb{R}^3) \cap C^\infty(D, \mathbb{R}^3)$ harmônicas em D com $E_\Gamma \leq E[u_n] \leq E[\widetilde{u}_n]$ e $u_n|_{\partial D} = \widetilde{u}_n|_{\partial D}$. Então $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X_\Gamma$, e é claro que $E[u_n] \to E_\Gamma$.

Pelo Lema 7.15, podemos supor também que

$$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} = \mathcal{F}_K$$

para algum K, visto que $\{E[u_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathbb{R}$.

Pelo Lema 7.16, podemos, tomando subsequências se necessário, assumir que $\{u_n|_{\partial D}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em ∂D para alguma aplicação $\overline{u} : \partial D \to \Gamma$. Como as aplicações da forma $u_n - u_m$ $(n, m \in \mathbb{N})$ são harmônicas, então o (corolário do) Princípio do Máximo, corolário 5.14, implica que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $C(\operatorname{cl}(D), \mathbb{R}^3)$ (munido da topologia de convergência uniforme), e portanto converge uniformemente para uma aplicação $\widetilde{u} \in C(\mathrm{cl}\,(D)\,, \mathbb{R}^3)$. Obviamente, $\widetilde{u}|_{\partial D} = \overline{u}$.

Como a sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada uniformemente, é limitada entrada a entrada em $L^2(D)$. Como a energia também é limitada (por $K/2$), então suas derivadas também são limitadas em $L^2(D)$. Portanto, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $W^{1,2}(D, \mathbb{R}^3)$.

Pelo Teorema de Banach-Alaoglu, 2.19, ou mais especificamente por 3.12, existe uma subnet $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ convergindo fracamente para um elemento $u \in W^{1,2}(D, \mathbb{R}^3)$.

Como $W^{1,2}(D) \subseteq L^2(D)$, e esta inclusão é contínua, segue que $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge entrada a entrada fracamente para u em $L^2(D)$. Mas $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ também converge entrada a entrada fracamente para $\widetilde{u}$ (visto que a topologia uniforme em $C^0(D)$ é mais forte que a induzida por $(L^2(D), w)$). Como $L^2(D)$ é de Banach, seu dual separa pontos, ou seja, $(L^2(D), w)$ é Hausdorff. Segue que $u = \widetilde{u}$ como funções em $L^2(D)$.

Portanto, $u \in W^{1,2}(D) \cap C^0(\mathrm{cl}\,(D))$. A convergência uniforme, juntamente com o fato de cada $u_\lambda|_{\partial D}$ ser sobrejetiva sobre Γ com ∂D compacto, implicam que $u|_{\partial D}$ é sobrejetiva sobre Γ. Pelo Lema 7.17, tomando $p = p_1$ e $q = q_1$, u é monótona, logo $u \in X_\Gamma$.

Vamos verificar que $E[u] = E_\Gamma$. Como E é fracamente semicontínua inferiormente, então para todo $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança fraca U de u em $W^{1,2}(D, \mathbb{R}^3)$ tal que para todo $v \in U$, $E[v] \geq E[u] - \varepsilon$. Como $u_\lambda \to u$ fracamente, então

$$E_\Gamma = \lim_{\lambda\to\infty} E[u_\lambda] \geq E[u] - \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, $E_\Gamma \geq E[u]$, e como $u \in X_\Gamma$, então $E_\Gamma = E[u]$.

Isto mostra também que u é a própria solução do Problema de Dirichlet com dados 0 e $u|_{\partial D}$ e, de acordo com o Lema de Weyl, Teorema 6.13, $u \in C^\infty(D)$ e é harmônica em D. Portanto,

$$A_\Gamma \leq A[u] \leq E[u] = E_\Gamma = A_\Gamma.$$

Portanto, valem as igualdades em (iii), e isto também implica que u é conforme em D, e u é a solução procurada. □

Conclusão

Neste trabalho, apresentamos o Problema de Plateau e provamos a existência de soluções quando nos restringimos à topologia do disco. Este problema foi escolhido pois possui uma formulação simples e os passos de seu estudo seguem um caminho natural.

Um aspecto que procuramos manter durante o texto, quando possível, é que as técnicas e resultados descritos possam ser utilizados em outros contextos, evitando o uso excessivo de "truques". Por exemplo, o Método Direto do Cálculo das Variações (3.22) e o Princípio do Máximo (5.13) possuem interesse próprio.

Algumas questões podem ser levantadas naturalmente:

1. A imagem da solução para o Problema de Plateau é uma subvariedade de $\mathbb{R}^N$?
2. Como podemos generalizar o Problema de Plateau para variedades mais gerais do que $\mathbb{R}^3$?
3. Se considerarmos domínios diferentes do disco, ainda é garantida a existência de soluções para o problema de minimização do volume (com a imagem do bordo previamente fixada)?

A primeira questão é discutida, por exemplo, na referência [9] (pp. 147 e 148). Pode-se provar que a solução encontrada para o Problema de Plateau é uma imersão e que não possui singularidades interiores.

A segunda questão também é respondida de forma positiva na referência [9]. Entretanto, a regularidade da solução não é garantida neste caso.

A terceira questão levantada é mais delicada, e é um motivador, inclusive, da criação da chamada *Teoria Geométrica da Medida*. Neste contexto, ainda vale a existência de minimizantes do volume e certos graus de regularidade, quando são dadas condições iniciais adequadas. A referência [12] trata desta questão.

A Espaços L^p

Neste apêndice, introduziremos os espaços L^p e trataremos de algumas de suas propriedades principais, do mesmo modo que é feito na referência [4]. Admitiremos que o leitor possui familiaridade com a medida e a integral de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$ e alguns dos resultados fundamentais, encontrados, por exemplo, na referência [7].

Utilizaremos a convenção de que $0 \cdot \infty = 0 \cdot (-\infty) = 0$ e que $a/\infty = a/(-\infty) = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$. A medida de Lebesgue de um subconjunto mensurável será denotada por $|A|$. Para este apêndice, E indicará um conjunto (Lebesgue-)mensurável qualquer de $\mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}$ fixado), e $\mathbb{K}$ denotará um dos corpos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dada uma propriedade $P(x)$ acerca pontos $x \in E$, dizemos que $P(x)$ vale *em quase todo ponto* (*q.t.p.*) em E se $\{x \in E : \neg P(x)\}$ tiver medida de Lebesgue nula. Todas as integrais consideradas são relativas à medida de Lebesgue.

A.1 Definição e Propriedades Básicas

Definição A.1. Dada uma função mensurável $u : E \to \mathbb{R}$, o *supremo essencial de u* é dado por

$$\operatorname{ess\,sup} u := \inf \{C > 0 : u(x) \leq C \text{ q.t.p.}\} .$$

Em particular, $u \leq \operatorname{ess\,sup} u$ q.t.p..

Definição A.2. Dados $p \in [1, \infty)$ e uma função mensurável $u : E \to \mathbb{K}$, a *norma L^p* e a *norma L^∞* de u são dadas respectivamente por

$$\|u\|_{p;E} = \left(\int_E |u|^p \right)^{1/p} \qquad \text{e} \qquad \|u\|_{\infty;E} := \operatorname{ess\,sup} |u|.$$

No que segue, omitiremos o índice "E" se não houver risco de confusão. Note que se $p \in [1, \infty]$ e $u : E \to \mathbb{K}$ é mensurável, então $\|u\|_p = 0$ se, e somente se, $u = 0$ q.t.p..

Para verificarmos que $\|.\|_p$ define uma norma num espaço apropriado de funções mensuráveis, necessitaremos do seguinte lema.

Lema A.3 (Desigualdade de Young)**.** *Se $0 \leq a, b < \infty$, $1 < p, q < \infty$ e $1/p + 1/q = 1$, então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Se $a = 0$ ou $b = 0$, a desigualdade é trivial. Caso $a, b > 0$, como a função exponencial é (estritamente) convexa (ver Definição 3.23 e Exemplo 3.24) e $1/p+1/q = 1$, temos que

$$ab = \exp\left(\frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q\right) \leq \frac{1}{p}\exp\log a^p + \frac{1}{q}\exp\log b^q = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad \square$$

Definição A.4. Dado $p \in [1,\infty]$, o único número $q \in [1,\infty]$ que satisfaz $1/p + 1/q = 1$ é chamado de *conjugado de Hölder* de p.

Caso $1 < p < \infty$, então $q = p/(p-1)$, e se $p = \infty$, $q = 1$.

Teorema A.5 (Desigualdade de Hölder)**.** *Se $u_1, \ldots, u_n : E \to \mathbb{K}$ são funções mensuráveis, $p_1, \ldots, p_n \in [1,\infty]$ e $\sum_{i=1}^n 1/p_i = 1$, então*

$$\|u_1 \cdots u_n\|_1 \leq \|u_1\|_{p_1} \cdots \|u_n\|_{p_n}.$$

Demonstração. Basta mostrar o caso $n = 2$. O caso geral segue por indução.

Sejam então $u, v : E \to \mathbb{K}$ funções mensuráveis e $p, q \in [1,\infty]$ tais que $1/p + 1/q = 1$.

Caso $p = \infty$ (ou $q = \infty$), a desigualdade segue da desigualdade q.t.p. $|uv| \leq \|u\|_p |v|$ ($|uv| \leq |u| \|v\|_q$).

Suponha então $1 < p, q < \infty$. Se $\|u\|_p \|v\|_q = 0$ ou se $\|u\|_p \|v\|_q = \infty$, o resultado é trivial, e podemos supor que $0 < \|u\|_p, \|v\|_q < \infty$. Pela desigualdade de Young,

$$\frac{|u(x)|}{\|u\|_p}\frac{|v(x)|}{\|v\|_q} \leq \frac{1}{p}\frac{|u(x)|^p}{\|u\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|v(x)|^q}{\|v\|_q^q}, \qquad \forall x \in E$$

Integrando sobre E, obtemos a desigualdade desejada. $\square$

Teorema A.6 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Se $u, v : E \to \mathbb{K}$ são funções mensuráveis e $p \in [1,\infty]$, então*

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$$

Demonstração. O caso $p = 1$ é consequência direta da desigualdade triangular em $\mathbb{K}$, enquanto o caso $p = \infty$ segue da desigualdade valer pontualmente em E.

Caso $1 < p < \infty$, note que dada $w : E \to \mathbb{K}$ mensurável, $\|w^{p-1}\|_q = \|w\|_p^{p-1}$, onde q é o conjugado de Hölder de p.

Caso $\|u + v\|_p = 0$, a desigualdade é trivial. Caso $\|u + v\|_p \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\|u + v\|_p^p &= \int_E |u + v|^p = \int_E |u + v||u + v|^{p-1} \\
&\leq \int_E |u||u + v|^{p-1} + \int_E |v||u + v|^{p-1} \\
&\leq \left(\|u\|_p + \|v\|_p\right) \left\|(u + v)^{p-1}\right\|_q \\
&= \left(\|u\|_p + \|v\|_p\right) \|u + v\|_p^{p-1},
\end{aligned}$$

onde utilizamos a desigualdade de Hölder na segunda desigualdade. Cancelando, a desigualdade de Minkowski segue. $\square$

Definição A.7. Dado $p \in [1, \infty]$, definimos

$$\mathscr{L}^p(E) := \left\{ u : E \to \mathbb{K} : u \text{ mensurável e } \|u\|_p < \infty \right\}.$$

A desigualdade de Minkowski implica diretamente no seguinte resultado.

Corolário A.8. *Se $p \in [1, \infty]$, $\mathscr{L}^p(E)$ é um espaço vetorial (com as operações ponto-a-ponto), e $u \mapsto \|u\|_{p;E}$ é uma seminorma neste espaço. Consideramos $\mathscr{L}^p(E)$ munido da topologia induzida por esta seminorma, conforme 1.23.*

Definição A.9. Dado $p \in [1, \infty]$, $L^p(E)$ é definido pelo quociente

$$L^p(E) := \mathscr{L}^p(E)/N,$$

em que $N = \left\{ u \in \mathscr{L}^p(E) : \|u\|_{p;E} = 0 \right\} = \mathrm{cl}\left(\{0\}\right)$. $L^p(E)$ é munido da topologia quociente.

Pelo Teorema 1.43, $L^p(E)$ é localmente convexo, com a topologia induzida pela seminorma

$$\|u + N\|_{p;E} := \inf \left\{ \|u + v\|_{p;E} : v = 0 \text{ q.t.p.} \right\} = \|u\|_{p;E}$$

que é uma norma, pois N é fechado, logo $L^p(E)$ é Hausdorff (veja 1.42(e)).

Por abuso de notação, denotaremos $u \in L^p(E)$ no lugar de $u + N \in L^p(E)$.

Teorema A.10. *$L^p(E)$ é completo para $p \in [1, \infty]$. Se $p < \infty$ e se a sequência $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(E)$ converge para u, então existe uma subsequência $\{u_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ satisfazendo:*

(i) $u(x) = \lim_{k\to\infty} u_{m_k}(x)$ *q.t.p. em* E*;*

(ii) Existe uma função $v \in L^p(E)$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $|u_{m_k}(x)| \leq |u(x)| + |v(x)|$ q.t.p. em E.

Demonstração. Suponha primeiro que $1 \leq p < \infty$, e seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $L^p(E)$. Tomando uma subsequência se necessário, suponha que para todo $m \in \mathbb{N}$

$$\|u_m - u_{m+1}\|_{p;E} \leq 2^{-m}$$

(esta subsequência satisfará às propriedades desejadas).

Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $v_m = \sum_{i=1}^{m} |u_{i+1} - u_i| \in L^p(E)$, e considere também $v = \sum_{i=1}^{\infty} |u_{i+1} - u_i|$. Pelo Teorema da convergência monótona,

$$\|v\|_{p;E} \leq \lim_{m\to\infty} \|v_m\|_{p;E} \leq 1.$$

Logo $v \in L^p(E)$ e $v(x) < \infty$ q.t.p. em E, ou seja a série telescópica $\sum_{i=1}^{\infty} u_{i+1}(x) - u_i(x)$ converge absolutamente q.t.p. em E. (note que a n-ésima som parcial dessa séria é u_n).

Defina então $u : E \to \mathbb{R}$ por $u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$ quando este limite existir e $u(x) = 0$ do contrário. Desta forma, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$|u(x) - u_m(x)| \leq \sum_{k=m}^{\infty} |u_{k+1}(x) - u_k(x)| \leq v(x)$$

q.t.p. em E, e portanto $|u_m(x)| \leq |u(x)| + v(x)$.

Dado $\varepsilon > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq n_0$ então $\|u_n - u_m\|_{p;E} < \varepsilon$. Pelo Lema de Fatou, u é mensurável e para todo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}\int_E |u - u_n|^p &= \int_E \lim_{m\to\infty} |u_m - u_n|^p \\ &\leq \liminf_{m\to\infty} \int_E |u_m - u_n|^p \leq \varepsilon^p.\end{aligned}$$

Logo $u \in L^p(E)$ e $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ em $L^p(E)$. Portanto $L^p(E)$ é completo para $p \in [1, \infty)$.

Agora, se $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^\infty(E)$, então existe um subconjunto $F \subseteq E$ com $|F| = 0$ tal que para todos $n, m \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in E \setminus F$

$$|u_n(x) - u_m(x)| \leq \|u_n - u_m\|_\infty .$$

Então $\{u_n|_{E\setminus F}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy no conjunto das funções limitadas $B(E\setminus F)$, munido da métrica uniforme. Como $B(E\setminus F)$ é completo, $\{u_n|_{E\setminus F}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em $E \setminus F$ para uma função mensurável e limitada u. Definindo $u = 0$ em F, temos que $u \in L^\infty(E)$ e $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ em $L^\infty(E)$. Portanto, $L^\infty(E)$ é completo. □

A.2 Densidade

Definição A.11. Dado um subconjunto A de $\mathbb{R}^N$ a *função característica de A* é a função $\chi_A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida por $\chi_A|_A = 1$ e $\chi_A|_{\mathbb{R}^N\setminus A} = 0$. Uma função $s : A \to \mathbb{K}$ é dita ser *simples* se seu conjunto imagem for finito.

Lema A.12. *A classe S das funções simples e mensuráveis $s : E \to \mathbb{K}$ que não se anulam somente num conjunto de medida finita é densa em $L^p(E)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. É fácil ver que $S \subseteq L^p(E)$. Seja $u \in L^p(E)$. Consideremos primeiro o caso $u \geq 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere os conjuntos

$$E_i^n := \left\{ x \in E : \frac{i}{2^n} \leq u(x) < \frac{i+1}{2^n} \right\}, \qquad 1 \leq i \leq n2^n.$$

Definindo

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i}{2^n} \chi_{E_n^i},$$

fica claro que $s_n \in S$ e que $s_n \to u$ pontualmente. Além disso, $|s_n - u| \leq u$. Pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |s_n - u|^p = 0.$$

Portanto, $s_n \to u$ em $L^p(E)$.

O caso geral segue da igualdade $u = (\mathrm{Re}(u))^+ - (\mathrm{Re}(u))^- + i((\mathrm{Im}(u))^+ - (\mathrm{Im}(u))^-)$, onde $f^+ = \max\{f, 0\}$ e $f^- = -\min\{f, 0\}$ para $f : E \to \mathbb{R}$, e do caso acima. $\square$

Teorema A.13. *$C^0(E) \cap L^p(E)$ é denso em $L^p(E)$ se $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Pelo lema acima, é suficiente mostrar que toda função característica de subconjuntos de E de medida finita pode ser aproximada por funções contínuas em $L^p(E)$.

Seja então $F \subseteq E$ um subconjunto mensurável com $|F| < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, tome um compacto $K \subseteq F$ tal que $|F \setminus K| < \varepsilon/2$ e um aberto limitado U contendo K.

Utilizando o Lema de Urysohn, tome $f \in C^0(\mathbb{R}^N)$ tal que $f|_K = 1$, $f|_{\mathbb{R}^N \setminus U} = 0$ e $0 \leq f \leq 1$ em $\mathbb{R}^N$. Então $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere a função $g_n \in C^0(\mathbb{R}^N)$ dada por

$$g_n(x) = \frac{1}{1 + nd(x, K)}.$$

Assim, $g_n|_K = 1$ e $g_n(x) \to 0$ para $x \in \mathbb{R}^m \setminus K$. Então $\{fg_n|_E\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^0(E) \cap L^p(E)$ é uma sequência que converge pontualmente para χ_K. Como $|fg_n|E - \chi_K| \leq f|E + \chi_K$, pelo Teorema da Convergência Dominada, $fg_n|E \to \chi_K$ em $L^p(E)$.

Então podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|fg_{n_0}|E - \chi_K\|_{p;E} < \varepsilon/2$, logo

$$\|\chi_F - fg_{n_0}|_E\| p; E \leq \|\chi_F - \chi_K\|_{p;E} + \|\chi_K - fg_{n_0}|_E\|_{p;E} < \varepsilon$$

Portanto, $C^0(E) \cap L^p(E)$ é denso em $L^p(E)$. $\square$

Corolário A.14. *Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto então $C_c(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$.*

Demonstração. Sejam $f \in C^0(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$. Pela regularidade da medida de Lebesgue, tome subconjuntos abertos $\widetilde{\Omega}_1$ e $\widetilde{\Omega}_2$ tais que $\widetilde{\Omega}_1 \Subset \widetilde{\Omega}_2 \Subset \Omega$ e $\|f\|_{p;\Omega\setminus\widetilde{\Omega}_1} < \varepsilon$.

Pelo Lema de Urysohn, seja $\psi \in C^0(\Omega)$ tal que $\psi(\Omega) \subseteq [0, 1]$, $\psi|_{\widetilde{\Omega}_1} = 1$ e $\psi_{\Omega\setminus\widetilde{\Omega}_2} = 0$, de modo que $\psi \in C_c(\Omega)$. Basta então definir $g = \psi f \in C_c(\Omega)$, e obtemos

$$\|f - g\|_{p;\Omega} = \|f\|_{p;\Omega\setminus\widetilde{\Omega}_2} + \|f - f\psi\|_{p;\widetilde{\Omega}_2\setminus\widetilde{\Omega}_1} \leq \|f\|_{p;\Omega\setminus\widetilde{\Omega}_1} < \varepsilon.$$

Segue que $C_c(\Omega)$ é denso em $C^0(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, e portanto é denso em $L^p(\Omega)$. $\square$

Observação A.15. *O teorema acima não vale para $p = \infty$: Se E é aberto (ou o fecho de um aberto), então a inclusão canônica $i : C^0(E) \cap L^\infty(E) \hookrightarrow L^\infty(E)$ é uma imersão isométrica. Como $C^0(E) \cap L^\infty(E)$ é completo com a norma $\|.\|_\infty$, a imagem $i\,(C^0(E) \cap L^\infty(E))$ é fechada. Esta claramente não coincide com $L^\infty(E)$, e portanto $C^0(E) \cap L^\infty(E)$ não é denso em $L^\infty(E)$. Em particular, como $C_c(E) \subseteq C^0(E) \cap L^\infty(E)$, $C_c(E)$ não é denso em $L^\infty(E)$.*

A.3 O Dual de L^p

Seja $1 \leq p \leq \infty$ e seja q seu conjugado de Hölder. Dada $v \in L^q(E)$, podemos definir um funcional linear T_v em $L^p(E)$ por

$$T_v(u) = \int_E vu, \qquad \forall u \in L^p(E).$$

Pela desigualdade de Hölder, $T_v(u)$ está bem definido e satisfaz

$$T_v(u) \leq \|v\|_{q;E} \|u\|_{p;E} \qquad \forall u \in L^p(E),$$

e portanto $T_v \in L^p(E)^*$ e $\|T_v\| \leq \|v\|$.

Se $1 < p \leq \infty$, então dada $v \in L^q(E)$ podemos definir $u : E \to \mathbb{K}$ por

$$u(x) = \begin{cases} |v(x)|^q/v(x) & \text{, se } v(x) \neq 0 \\ 0 & \text{, se } v(x) = 0 \end{cases}.$$

É fácil verificar que $u \in L^p(E)$ e que $|T_v(u)| = \|v\|_{q;E}^q = \|u\|_{p;E}^p$, portanto $\|T_v\| \geq \|u\|_{p;E}^{p-1} = \|v\|_{q;E}^{q(p-1)/p} = \|v\|_{q;E}$.

O caso $p = 1$, $q = \infty$, é mais complicado. Tome $v \in L^\infty(E)$. Se $\|v\|_{\infty;E} = 0$, então $T_v = 0$. Se $\|v\|_{\infty;E} > 0$, então dado $0 < \varepsilon < \|v\|_{\infty;E}$, tome um subconjunto mensurável $A \subseteq E$ tal que $|A| < \infty$ e $|v(x)| > \|v\|_{\infty;E} - \varepsilon$ para todo $x \in A$. Defina $u(x) = |v(x)|/v(x)$ para $x \in A$ e $u(x) = 0$ para $x \in E \setminus A$. Então $u \in L^1(E)$ e $T_v(u) \geq \|u\|_{1;E} (\|v\|_{\infty;E} - \varepsilon)$.

Portanto, $\|T_v\| = \|v\|_{q;E}$ para todo $v \in L^q(E)$, para todo $1 \leq p \leq \infty$, ou seja, a aplicação $T : v \in L^q(E) \mapsto T_v \in L^p(E)^*$ é uma isometria (obviamente linear).

Teorema A.16. *Se $1 \leq p < \infty$, então a aplicação $T : L^q(E) \to L^p(E)^*$ é um isomorfismo.*

Uma demonstração elementar deste teorema está feita em detalhes em [4] (Teoremas 2.44 e 2.45), e será omitida neste trabalho.

Corolário A.17. *Se $1 < p < \infty$ então $L^p(E)$ é reflexivo.*

Demonstração. Dado $1 < p < \infty$, considere as aplicações $T_p : L^p(E) \to L^q(E)^*$ e $T_q : L^q(E) \to L^p(E)^*$ como no Teorema A.16, e também a aplicação de valoração $\mathrm{ev} : L^p(E) \to L^p(E)^{**}$.

Como T_q é isomorfismo (e um homeomorfismo), então sua adjunta $T_q' : l \in L^p(E)^{**} \mapsto l \circ T_q \in L^q(E)^*$ também é um isomorfismo linear. Verifica-se facilmente que $\mathrm{ev} = (T_q')^{-1} \circ T_1$, e portanto ev é sobrejetiva, ou seja, $L^p(E)$ é reflexivo. $\square$

A.4 Funções Localmente Integráveis

Nesta seção, Ω denotará um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$.

Definição A.18. Dado $p \in [1, \infty]$, $\mathscr{L}^p_{\text{loc}}(\Omega)$ é o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{K}$ tais que para todo subconjunto compacto $K \subseteq \Omega$ tem-se $u|_K \in \mathscr{L}^p(K)$.

Para cada compacto $K \subseteq \Omega$, considere a seminorma $u \in \mathscr{L}^p_{\text{loc}}(\Omega) \mapsto \|u\|_{p;K} := \|u|_K\|_{p;K}$. A topologia em $\mathscr{L}^p_{\text{loc}}(\Omega)$ é a induzida pela família $\left\{\|\cdot\|_{p;K} : K \subseteq \Omega \text{ compacto}\right\}$.

Considere agora uma exaustão $\left\{\widetilde{\Omega}_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Ω por subconjuntos relativamente compactos (ver início do Capítulo 4, "Distribuições e Espaços de Sobolev").

Então para cada $K \subseteq \Omega$ compacto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq \widetilde{\Omega}_n$, logo $\|.\|_{p;K} \le \|.\|_{p;\widetilde{\Omega}_n}$. Logo a subfamília enumerável $\left\{\|.\|_{p;\widetilde{\Omega}_n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ induz a topologia de $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, que é, portanto, metrizável. Note também que $u \in \text{cl}\,(0)$ em $\mathscr{L}^p_{\text{loc}}(\Omega)$ se, e somente se, $u = 0$ q.t.p..

Definição A.19. O espaço das funções *localmente integráveis* em Ω é

$$L^p_{\text{loc}}(\Omega) := \mathscr{L}^p_{\text{loc}}(\Omega)/N$$

onde $N = \text{cl}\,(\{0\}) = \{u \in \mathscr{L}^p_{\text{loc}}(\Omega) : u = 0 \text{ q.t.p.}\}$, e é munido da topologia quociente.

De modo análogo ao de $L^p(\Omega)$, a topologia de $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ é induzida pela família das seminormas

$$\|u + N\|_{p;K} = \|u\|_{p;K}$$

e esta família é separante pois $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ é Hausdorff.

Proposição A.20. *Se $u = \lim_{m\to\infty} u_m$ em $L^p_{loc}(\Omega)$, então existe uma subsequência $\{u_{m_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ que converge pontualmente q.t.p. para u.*

Demonstração. Basta considerar a exaustão $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{\Omega}_n$ como acima, utilizar o fato conhecido para cada $L^p(\widetilde{\Omega}_n)$ (de acordo com o Teorema A.10) e aplicar um argumento diagonal. □

Teorema A.21. *$L^p_{loc}(\Omega)$ é completo.*

Demonstração. Seja $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ sequência de Cauchy. Então para todo $n \in \mathbb{N}$, $\left\{u_k|_{\widetilde{\Omega}_n}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy em $L^p(\widetilde{\Omega}_n)$, logo converge, digamos, para $v_n \in L^p(\widetilde{\Omega}_n)$. Veja que $v_n = v_m|_{\widetilde{\Omega}_n}$ q.t.p. em $\widetilde{\Omega}_n$, caso $n \le m$ em $\mathbb{N}$.

Desta forma, existe um subconjunto mensurável $E \subseteq \Omega$ satisfazendo

(i) $|\Omega \setminus E| = 0$;

(ii) Dados $n, m \in \mathbb{N}$, temos

$$v_n(x) = v_m(x) \qquad \forall x \in \widetilde{\Omega}_n \cap \widetilde{\Omega}_m \cap E.$$

Defina $u : \Omega \to \mathbb{R}$ por $u(x) = 0$, se $x \notin E$ e $u(x) = v_n(x)$ se $x \in E \cap \widetilde{\Omega}_n$. Então u está bem definida e é mensurável: Dado $A \subseteq \mathbb{R}$

$$u^{-1}(A) = \begin{cases} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} v_n^{-1}(A) \cap E & , \text{se } 0 \notin A \\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (v_n^{-1}(A) \cap E) \cup (\Omega \setminus E) & , \text{se } 0 \in A. \end{cases}$$

Além disso, $u|_{\widetilde{\Omega}_n} = v_n$ q.t.p. em $\widetilde{\Omega}_n$. Então $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ e $u_k \to u$ em $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$. Portanto $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ é completo. □

Teorema A.22. *$C^0(\Omega)$ é denso em $L^p_{loc}(\Omega)$.*

Demonstração. É claro que $C^0(\Omega) \subseteq L^p_{\text{loc}}(\Omega)$. Sejam $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$. Vamos mostrar que existe $f \in C^0(\Omega)$ tal que $\|u - f\|_{p;\widetilde{\Omega}_n}$. Pelo Teorema A.13, existe $f \in C^0(\widetilde{\Omega}_{n+1})$ tal que $\|u - f\|_{p;\widetilde{\Omega}_{n+1}} < \varepsilon$. Pelo Teorema de Extensão de Tietze, existe $g \in C^0(\Omega)$ tal que $g|_{\text{cl}(\widetilde{\Omega}_n)} = f|_{\text{cl}(\widetilde{\Omega}_n)}$. Segue que $\|u - g\|_{p;\widetilde{\Omega}_n} < \varepsilon$.

Portanto, $C^0(\Omega)$ é denso em $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$. □

A.5 Imersões

Nesta seção serão demonstrados alguns resultados sobre imersões de espaços L^p que são utilizados durante o texto.

Teorema A.23. *Sejam $1 \leq p \leq q < \infty$ e $E \subseteq \mathbb{R}^N$ um subconjunto mensurável tal que $|E| < \infty$. Então para toda função mensurável $u : E \to \mathbb{K}$, vale*

$$\|u\|_{p;E} \leq |E|^{(q-p)/pq} \|u\|_{q;E} .$$

Em particular, $L^q(E) \subseteq L^p(E)$ e a inclusão é contínua.

Demonstração. O caso $p = q$ é trivial. Suponha então $p < q$. Seja $u : E \to \mathbb{K}$ uma função mensurável. Seja $r = pq/(q - p)$. Então $1/r + 1/q = 1/p$. Pela desigualdade de Hölder,

$$\|u\|_{p;E} = \|1 \cdot |u|^p\|^{1/p}_{1;E} \leq \|1\|^{1/p}_{r/p;E} \||u|^p\|^{1/p}_{q/p;E} = |E|^{(q-p)/pq} \|u\|_{q;E} ,$$

como queríamos. Isto também mostra que $L^q(E) \subseteq L^p(E)$ e, pelo Teorema 3.1, que a inclusão é contínua. □

Corolário A.24. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aberto, e $1 \leq p \leq q < \infty$. Então $L^q_{loc}(\Omega) \subseteq L^p_{loc}(\Omega)$ e a inclusão é contínua.*

Demonstração. Seja $K \subseteq \Omega$ um compacto. Então $|K| < \infty$. Note agora que, pelo Teorema A.23,

$$\|u\|_{p;K} \leq |K|^{(q-p)/pq} \|u\|_{q;K} ,$$

para toda $u \in L^q_{\text{loc}}(\Omega)$. Isto mostra que $L^q_{\text{loc}}(\Omega) \subseteq L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ e também mostra a continuidade da inclusão, pelo Teorema 1.31. □

Teorema A.25. *Se* $1 \leq p \leq q < \infty$ *e* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *é aberto, então valem as inclusões*

$$L^q(\Omega) \subseteq L^q_{loc}(\Omega) \subseteq L^p_{loc}(\Omega),$$

e as aplicações de inclusão associadas são contínuas.

Demonstração. A validade e continuidade da inclusão $L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subseteq L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ foi mostrada no Corolário A.24.

Para todo compacto $K \subseteq \Omega$ e para toda $u \in L^q(\Omega)$, vale

$$\|u\|_{q;K} \leq \|u\|_{q;\Omega},$$

o que mostra que $L^q(\Omega) \subseteq L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e que, pelo Teorema 1.31, a inclusão é contínua. □

Referências

[1] RUDIN, W. *Functional Analysis*. 2. ed. Singapore: McGraw-Hill, 1991. (International Series in Pure and Applied Mathematics).

[2] SCHAEFER, H. H. *Topological Vector Spaces*. 1. ed. New York: Springer-Verlag, 1971. (Graduate Texts in Mathematics, v. 3).

[3] REED, M.; SIMON, B. *Functional Analysis*. 1. ed. Orlando: Academic Press, 1980. (Methods of Modern Mathematical Physics, v. 1).

[4] ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. J. F. *Sobolev Spaces*. 2. ed. Oxford: Elsevier, 2003. (Pure and Applied Mathematics Series, v. 140).

[5] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. 1. ed. [S.l.]: American Mathematical Society, 1998. (Graduate Studies in Mathematics, v. 19).

[6] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Berlin: Springer, 2001. (Classics in Mathematics).

[7] FERNANDEZ, P. J. *Medida e Integração*. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. (Projeto Euclides).

[8] LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2. ed. New York: Springer, 2013. (Graduate Texts in Mathematics, v. 218).

[9] COLDING, T. H.; MINICOZZI II, W. P. *A Course in Minimal Surfaces*. [S.l.]: American Mathematical Society, 2011. (Graduate Studies in Mathematics, v. 121).

[10] LINS NETO, A.*Funções de Uma Variável Complexa*. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. (Projeto Euclides).

[11] MORREY, C. B. *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*. Berlin: Springer, 2008 (Classics in Mathematics)

[12] MORGAN, F. *Geometric Measure Theory: A Beginner's Guide*. 4. ed. Oxford: Elsevier, 2009