

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

William Martarello

**LIVRE CAMINHO MÉDIO DE NEUTRINOS EM UM
GÁS FORMADO POR PRÓTONS, NÊUTRONS E
ELÉTRONS**

Florianópolis

2014

William Martarello

**LIVRE CAMINHO MÉDIO DE NEUTRINOS EM UM
GÁS FORMADO POR PRÓTONS, NÊUTRONS E
ELÉTRONS**

Dissertação submetida ao Programa
de Pós-Graduação em Física para a
obtenção do Grau de Mestre em Física.
Orientador: Prof. Dr. José Ricardo
Marinelli

Florianópolis

2014

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Martarello, William

Livre caminho médio de neutrinos em um gás formado por prótons, nêutrons e elétrons / William Martarello ; orientador, José Ricardo Marinelli - Florianópolis, SC, 2014.

93 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Física.

Inclui referências

1. Física. 2. Livre caminho médio. 3. Neutrinos. 4. Gás de Fermi relativístico. 5. Interação fraca. I. Marinelli, José Ricardo . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

William Martarello

**LIVRE CAMINHO MÉDIO DE NEUTRINOS EM UM
GÁS FORMADO POR PRÓTONS, NÊUTRONS E
ELÉTRONS**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre em Física”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Física.

Florianópolis, 03 de fevereiro 2014.

Prof. Dr. Luis Guilherme de C. Rego
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Ricardo Marinelli
Presidente

Prof. Dr. José Ricardo Marinelli
Orientador

Prof. Dr. Clebson Abati Graeff - membro externo

Prof. Dr. Celso de Camargo Barros Júnior

Prof. Dr. Sidney dos Santos Avancini

AGRADECIMENTOS

Ao meu Deus Jeová que me deu saúde, perseverança e a capacidade de raciocínio para pesquisar suas obras.

Ao CNPq pelo suporte financeiro que possibilitou a realização deste trabalho.

Ao prof. Marinelli pela orientação, paciência e correção de conceitos.

À minha esposa Kellen pela compreensão e incentivo.

À minha família e amigos.

*Ó Jeová, nosso Senhor, quão majestoso
é o teu nome em toda a terra, Tu, cuja
dignidade é narrada acima dos céus.*

Salmos 8:1

RESUMO

O livre caminho médio de neutrinos em um gás de Fermi relativístico e livre de interações, composto de prótons, nêutrons e elétrons, é calculado. A interação dos neutrinos com o gás é mediada por bósons neutros e carregados da interação fraca, onde supomos neutralidade de carga e equilíbrio químico para as partículas que compõem o mesmo. Os cálculos são efetuados sob determinadas condições termodinâmicas encontradas durante o processo de evolução de estrelas de nêutrons, em especial na fase de resfriamento. A dependência do livre caminho médio com a densidade do gás e com a energia do neutrino incidente é analisada, na faixa de temperatura entre 0 a 30 MeV. Além do gás de Fermi com uma distribuição homogênea, consideramos ainda, para o caso $T = 0$ MeV, o comportamento do neutrino ao longo de uma estrutura não-homogênea de matéria, conhecida como célula de Wigner-Seitz, modelada aqui com simetria esférica. Comparamos os resultados obtidos para os dois tipos de estrutura para o gás.

Palavras-chave: Livre caminho médio. Neutrinos. Gás de Fermi relativístico. Interação fraca.

ABSTRACT

Mean free path of neutrinos in a relativistic Fermi gas made of neutrons, protons and electrons, is obtained. The exchange of neutral weak bosons as well as charged bosons, are taken in to account in the calculation, where electromagnetic charge neutrality and chemical equilibrium between the particles that compose the gas are imposed. The thermodynamic conditions adopted in the calculations are similar to what is expected during the evolution of neutron stars, specially in the cooling process of the star. The dependence of the results on the density of the gas and on the neutrino incident energy is presented and analysed, in the temperature range between $T=0$ and 30 MeV. Besides the Fermi gas model we also consider the behavior of the mean free path in a Wigner-Seitz cell with spherical symmetry and non-homogeneous distribution, for $T=0$. We then compare the results obtained within both approximations.

Keywords: Mean Free path. Neutrinos. Relativistic Fermi gas. Weak interaction.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Vértice primitivo na QED.....	31
Figura 2	Espalhamento Møller.	32
Figura 3	Representação da corrente j_μ^{fi}	34
Figura 4	Diagrama de Feynman para $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$	35
Figura 5	Fatores de vértice e propagador para espalhamento elétron-elétron.	35
Figura 6	Segundo diagrama para espalhamento $e^- e^-$	36
Figura 7	Vértice primitivo fraco leptônico - emissão de um bóson W^-	47
Figura 8	Vértice primitivo fraco leptônico - absorção de um bóson W^+	47
Figura 9	Vértice primitivo $d \rightarrow u + W^-$	48
Figura 10	Vértice primitivo $s \rightarrow u + W^-$	49
Figura 11	Vértice primitivo fraco neutro.....	51
Figura 12	Diagrama do espalhamento elástico via corrente neutra de neutrino por próton ou nêutron.....	62
Figura 13	Diagrama para a reação de absorção $\nu_e + n \rightarrow e^- + p.$..	62
Figura 14	Diagrama do espalhamento elástico de neutrino por elétron via corrente neutra.	62
Figura 15	Diagrama para o espalhamento elástico de neutrino por elétron via corrente carregada.	63
Figura 16	Frações de partículas para $T = 0, 5$ e 30 MeV.....	74
Figura 17	λ dos neutrinos em função da densidade bariônica para matéria homogênea com energia incidente $E_\nu = 200$ MeV para $T = 0, 5$ e 30 MeV.	76
Figura 18	λ dos neutrinos em função de sua energia incidente para matéria homogênea com $T = 0$ MeV nas densidades bariônicas $0.01, 0.31$ e 0.61 fm^{-3}	77
Figura 19	λ dos neutrinos em função de sua energia incidente para matéria homogênea com $T = 5$ MeV nas densidades bariônicas $0.01, 0.31$ e 0.61 fm^{-3}	78
Figura 20	λ dos neutrinos em função de sua energia incidente para matéria homogênea com $T = 30$ MeV nas densidades bariônicas $0.01, 0.31$ e 0.61 fm^{-3}	79

Figura 21 λ_T versus E_ν para matéria homogênea com $T = 1, 5$ e 30 MeV nas densidades bariônicas $0.01, 0.31$ e 0.61 fm^{-3}	80
Figura 22 λ_{Abs} versus ρ_B para matéria homogênea interagente (linha tracejada) e não-interagente (linha cheia) com $T = 1, 5$ e 30 MeV para neutrinos de energia $E_\nu = \pi T$	82
Figura 23 λ_e^{NC} versus ρ_B para matéria homogênea interagente (linha tracejada) e não-interagente (linha cheia) com $T = 1, 5$ e 30 MeV para neutrinos de energia $E_\nu = \pi T$	82
Figura 24 λ_n versus ρ_B para matéria homogênea interagente (linha tracejada) e não-interagente (linha cheia) com $T = 1, 5$ e 30 MeV para neutrinos de energia $E_\nu = \pi T$	83
Figura 25 λ_p versus ρ_B para matéria homogênea interagente (linha tracejada) e não-interagente (linha cheia) com $T = 1, 5$ e 30 MeV para neutrinos de energia $E_\nu = \pi T$	83
Figura 26 λ_S^{NC} versus ρ_B para matéria homogênea interagente (linha tracejada) e não-interagente (linha cheia) com $T = 1, 5$ e 30 MeV para neutrinos de energia $E_\nu = \pi T$	84
Figura 27 λ_T versus ρ_B para matéria homogênea interagente (linha tracejada) e não-interagente (linha cheia) com $T = 1, 5$ e 30 MeV para neutrinos de energia $E_\nu = \pi T$	84
Figura 28 Valores de λ versus E_ν para matéria homogênea (linha tracejada) e não-homogênea (linha cheia) com $T = 0$ MeV e $\rho_B = 0.138 \text{ fm}^{-3}$	85

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Classificação dos léptons.....	30
Tabela 2	Classificação dos quarks.....	30
Tabela 3	Interações ou forças fundamentais.....	30
Tabela 4	Tabela de resumo histórico.....	45
Tabela 5	Algumas propriedades dos neutrinos.....	46
Tabela 6	Estados quirais.....	50
Tabela 7	Coefficientes neutros vetorial e axial no modelo GWS ..	52

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LISTA DE SÍMBOLOS

e	Carga elétrica	31
\hbar	Constante de Planck dividida por 2π	31
c	Velocidade da luz	31
ϕ	Função de onda de partícula livre	32
\vec{p}	Vetor momento	32
\vec{x}	Vetor posição	32
E	Energia	32
t	Tempo	32
$V(\vec{x}, t)$	Função potencial	32
T_{fi}	Amplitude de transição	32
W_{fi}	Taxa de transição	33
$u(\vec{p})$	Espinor	33
p^μ	Quadrimomento	33
x^μ	Quadriposição	33
m	Massa	33
γ_μ	Matrizes de Dirac	33
\mathcal{M}	Amplitude invariante	35
ρ	Densidade de probabilidade	37
$d\sigma$	Seção de choque diferencial	38
\vec{v}	Velocidade	39
λ	Livre caminho médio	39
G_F	Constante de Fermi	45
θ_c	Ângulo de Cabibbo	48
c_V	Coefficiente de acoplamento vetorial neutro	51
c_A	Coefficiente de acoplamento axial neutro	51
θ_w	Ângulo de Weinberg	52
Y_i	Fração de partículas i	54
k_B	Constante de Boltzmann	54

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	27
2 NEUTRINOS E SUA INTERAÇÃO COM A MATÉRIA	29
2.1 DINÂMICA DE PARTÍCULAS ELEMENTARES	29
2.1.1 Neutrinos e propriedades: um pouco da história ...	41
2.2 INTERAÇÃO FRACA	44
2.2.1 Corrente fraca carregada	47
2.2.2 Corrente fraca neutra	51
2.3 NEUTRINOS E AS ESTRELAS DE NÊUTRONS	53
3 GÁS IDEAL QUÂNTICO	55
3.1 GÁS IDEAL DE FERMI	56
3.1.1 Gás ideal relativístico	57
3.1.2 Gás ideal completamente degenerado	57
4 CÁLCULO DO LIVRE CAMINHO MÉDIO DO NEU- TRINO	59
4.1 DESCRIÇÃO DO MODELO	59
4.2 DIAGRAMAS DE FEYNMAN E AS AMPLITUDES \mathcal{M} ...	61
4.3 SEÇÕES DE CHOQUE	66
5 RESULTADOS	73
6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	87
APÊNDICE A – Cálculo do quadrado da amplitude in- variante $\overline{\mathcal{M}}^2$	91
REFERÊNCIAS	93

1 INTRODUÇÃO

Entre as partículas elementares conhecidas, os neutrinos estão entre aquelas que possuem as propriedades mais intrigantes e estudadas atualmente. Por não possuírem carga elétrica e terem massa muito pequena são difíceis de serem detectadas, interagindo com a matéria apenas via força fraca de acordo com o Modelo Padrão. Como são abundantes (cerca de 100 neutrinos por cm^3), a descoberta de que neutrinos possuem massa traz grandes consequências para um novo entendimento sobre o universo.

A solução do problema dos neutrinos solares mostrou que os mesmos possuem uma propriedade ímpar conhecida como oscilação quântica do sabor e , ao mesmo tempo, revelou falhas no Modelo Padrão. Por serem produzidos em grandes quantidades no interior das estrelas, os neutrinos servem como sondas no sentido de revelar mecanismos que acontecem no interior destas (SUTTON, 1992),(GRIFFITHS, 2009).

Eventos astrofísicos recentemente estudados envolvem a formação de estrelas de nêutrons, as quais nascem da explosão de supernovas. Essas estrelas são caracterizadas por densidades iguais ou superiores ao do núcleo atômico sendo da ordem de $10^{14} g/cm^3$ (GLENDENNING, 2000). Em densidades desta ordem os neutrinos ficam assim aprisionados na matéria, com o livre caminho médio sendo estimado como sendo de alguns centímetros, valor bem diferente para neutrinos produzidos, por exemplo, no núcleo do Sol, onde a grande maioria escapa sem sofrer colisões. Nestas condições os neutrinos se termalizam e obedecem a uma função de distribuição.

Nesta dissertação vamos calcular o livre caminho médio dos neutrinos sob determinadas condições termodinâmicas encontradas durante o processo de evolução das estrelas de nêutrons, levando-se em conta os efeitos relativísticos justificados por causa das altas densidades. Para este cálculo, vamos considerar um gás livre de Fermi composto por prótons, nêutrons e elétrons, impondo a condição de neutralidade de carga elétrica e equilíbrio químico, em especial na fase de resfriamento da estrela. Analisamos a dependência do livre caminho médio com a densidade e com a energia incidente dos neutrinos na faixa de temperatura de 0 a 30 MeV para uma distribuição de matéria homogênea. Consideramos ainda uma simulação supondo um distribuição não-homogênea à temperatura $T = 0$ MeV para as distribuições de prótons e de nêutrons, usando um modelo fenomenológico. Neste procedimento, a matéria se comporta como uma estrutura periódica e o livre caminho

médio é calculado em uma célula unitária, conhecida como célula de Wigner-Seitz considerada aqui com simetria esférica.

Modelos mais sofisticados de gases interagentes e compostos por mais partículas estão presentes na literatura (GLENDENNING, 2000), (FURTADO, 2012). No caso considerado neste trabalho nos limitamos a calcular o livre caminho médio dos neutrinos sem utilizar nenhum tipo de aproximação (a menos do fato de que a interação fraca representa uma perturbação ao sistema como um todo), deixando para futuramente considerar outros efeitos como, por exemplo, a oscilação de sabor dos neutrinos, entre outros.

No capítulo 2 descrevemos as ferramentas necessárias para tratar as interações do neutrino com a matéria, um pouco da história e as propriedades do neutrinos. Na última seção deste capítulo apresentamos uma síntese sobre o processo de formação das estrelas de nêutrons destacando os valores termodinâmicos que serão utilizados nos cálculos.

No capítulo 3 apresentamos uma breve recapitulação dos gases ideais quânticos, em especial, ao gás ideal de Fermi relativístico e completamente degenerado.

O capítulo 4 inicia com a descrição do modelo utilizado neste trabalho. Em seguida, aplicamos os diagramas de Feynman para calcular as amplitudes invariantes \mathcal{M} para os processos envolvidos. Finalmente, apresentamos as expressões das seções de choque (e portanto, o livre caminho médio). Alguns detalhes para o cálculo de \mathcal{M}^2 são apresentados no apêndice A.

Os resultados numéricos são apresentados, analisados e comparados com outros trabalhos no capítulo 5. Finalmente, apresentamos as conclusões e perspectivas deste trabalho.

2 NEUTRINOS E SUA INTERAÇÃO COM A MATÉRIA

Os neutrinos são partículas elementares que, assim como outras partículas elementares, interagem com a matéria através de uma das quatro interações fundamentais - a interação fraca. Neste capítulo vamos mostrar propriedades, um pouco da história do neutrino, algumas de suas fontes, por exemplo, objetos astrofísicos como uma das motivações deste trabalho - a estrela de nêutrons. Iniciaremos com a descrição das ferramentas ou formalismos necessários para tratar as interações do neutrino com a matéria.

2.1 DINÂMICA DE PARTÍCULAS ELEMENTARES

A Física de partículas elementares é descrita pelo chamado Modelo Padrão. Este modelo não inclui a interação gravitacional. Descreve, portanto, as interações forte, fraca e eletromagnética e também descreve as partículas fundamentais constituintes da matéria. Essas partículas são classificadas como férmions e bósons. Férmions são partículas com spin semi-inteiro e obedecem ao princípio de exclusão de Pauli, ao passo que bósons são partículas com spin inteiro e não obedecem a este princípio. Por sua vez, férmions são divididos em léptons e quarks. As interações fundamentais são representadas por mediadores, os quais por sua vez são bósons.

Segundo o Modelo Padrão (GRIFFITHS, 2009), a matéria é feita de três tipos de partículas elementares: léptons, quarks e mediadores. Há seis léptons classificados de acordo com sua carga (Q), número eletrônico (L_e), número muônico (L_μ), e número tauônico (L_τ). Eles são arranjados em três gerações (ver tabela 1).

Há também seis anti-léptons, com números característicos com sinais opostos em relação aos léptons. Então, há 12 léptons e anti-léptons ao todo.

Similarmente, há seis 'sabores' de quarks, classificados de acordo com sua carga, estranheza (S), charme (C), beleza (B) e verdade (T). Os quarks também são arranjados em três gerações (ver tabela 2).

Novamente, há também anti-quarks com números característicos com sinais opostos em relação aos quarks. No entanto, quarks e anti-quarks são classificados ainda pela sua "cor" e "anti-cor"; três de cada. Portanto, há 36 quarks e anti-quarks ao todo.

Tabela 1 – Classificação dos léptons

	l	Q	L_e	L_μ	L_τ
Primeira geração	e	-1	1	0	0
	ν_e	0	1	0	0
Segunda geração	μ	-1	0	1	0
	ν_μ	0	0	1	0
Terceira geração	τ	-1	0	0	1
	ν_τ	0	0	0	1

Tabela 2 – Classificação dos quarks

	q	Q	S	C	B	T
Primeira geração	d	$-1/3$	0	0	0	0
	u	$2/3$	0	0	0	0
Segunda geração	s	$-1/3$	-1	0	0	0
	c	$2/3$	0	1	0	0
Terceira geração	b	$-1/3$	0	0	-1	0
	t	$2/3$	0	0	0	1

Finalmente, os mediadores: o fóton para a interação eletromagnética, W^+ , W^- e Z^0 para a interação fraca, e oito tipos de glúons para a interação forte.

Ao todo, o atual Modelo Padrão contém 12 léptons, 36 quarks e 12 mediadores. Ainda, podemos acrescentar o recém-descoberto bóson de *Higgs* (2012/2013), responsável pela existência da massa inercial.

Tabela 3 – Interações ou forças fundamentais

Força	Intensidade relativa	Teoria	Mediador
Forte	10	Cromodinâmica	Glúon
Eletromagnética	10^{-2}	Eletrodinâmica	Fóton
Fraca	10^{-13}	Sabordinâmica	W e Z
Gravitacional	10^{-42}	Geometrodinâmica	Gráviton

Cada interação ou força fundamental trouxe uma teoria, conforme a tabela 3.

Nosso interesse principal neste trabalho é a utilização da interação fraca para descrever a interação do neutrino com a matéria. A primeira teoria das forças fracas foi apresentada por Fermi em 1933, refinada por Lee e Yang, Feynman e Gell-Mann, e muitos outros na década de 1950 e colocada em sua presente forma por Glashow, Weinberg e Salam, na década de 1960. Algumas vezes a teoria é chamada de sabordinâmica quântica ou simplesmente como modelo de Glashow-Weinberg-Salam (GWS). O modelo GWS trata interações fracas e eletromagnéticas como diferentes manifestações de uma força mais fundamental - a força eletrofraca.

A Eletrodinâmica quântica (QED) é a mais bem-sucedida teoria das teorias dinâmicas. Outras teorias de interações, como a interação fraca e a Cromodinâmica quântica (QCD), são modeladas com base na QED. Para representar as interações, usamos os Diagramas de Feynman (GRIFFITHS, 2009), (HALZEN; MARTIN, 1984). No caso da QED, todos os fenômenos eletromagnéticos são representados por esses diagramas, redutíveis ao processo elementar da figura (1)

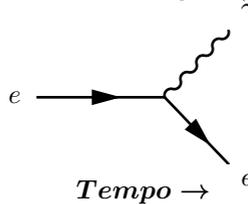


Figura 1 – Vértice primitivo na QED.

Este diagrama descreve uma partícula carregada (e), que emite (ou absorve) um fóton γ . Processos que envolvem interações eletromagnéticas mais complicadas são representadas com a combinação de dois ou mais vértices primitivos vistos na figura 1. Por exemplo, a repulsão coulombiana entre duas partículas carregadas de mesmo sinal, e , é representada na QED pelo chamado *espalhamento Møller*, segundo o diagrama da figura (2), abaixo.

Os diagramas de Feynman nos permitem calcular amplitudes de espalhamento e taxas de decaimento. Usando as chamadas *regras de Feynman* calculamos as contribuições de cada diagrama, cada um representando uma possibilidade, de modo que a soma de todos os diagramas equivalem ao processo físico observado. O fato é que há um número infinito de diagramas para uma dada reação. Felizmente, cada diagrama de ordem mais baixa introduz um fator $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$, a constante de estrutura fina. Por ser um valor entre 0 e 1, diagramas

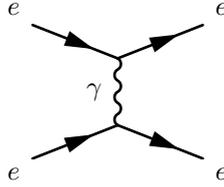


Figura 2 – Espalhamento Møller.

de ordens maiores contribuirão menos com a soma total, de tal forma que a soma pode ser truncada.

O procedimento que envolve diagramas de Feynman tem origem na Teoria das Perturbações (HALZEN; MARTIN, 1984). Obtem-se soluções das equações de onda para partículas livres (léptons ou quarks) e, então, estuda-se o espalhamento de uma partícula por outra tratando a interação como uma perturbação. Em problemas relativísticos, uma versão covariante da teoria de perturbações não-relativísticas usando soluções de equações de onda para partículas livres (equação de Dirac para partículas de spin 1/2) é utilizada. Essa é a Regra de Ouro de Fermi, a qual emprega as regras de Feynman para somar os diagramas relevantes .

Na teoria de perturbação dependente do tempo não-relativística, dadas as soluções de partícula livre $\phi = N e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)}$ e um potencial $V = V(\vec{x}, t)$, utilizamos a equação de Schrödinger para encontrar o elemento da matriz *amplitude de transição*. Para todos os cálculos realizados neste trabalho vamos adotar $\hbar = c = 1$:

$$T_{fi} \equiv -i \int dt \int d^3x \phi_f^*(\vec{x}) V(\vec{x}, t) \phi_i(\vec{x}) \quad (2.1)$$

que pode ser escrita numa forma covariante

$$T_{fi} \equiv \int d^4x \phi_f^*(x) V(x) \phi_i(x). \quad (2.2)$$

No caso particular $V(\vec{x}, t) = V(\vec{x})$, encontramos que

$$T_{fi} = -2\pi i V_{fi} \delta(E_f - E_i) \quad (2.3)$$

com

$$V_{fi} \equiv \int d^3x \phi_f^*(\vec{x}) V(\vec{x}) \phi_i(\vec{x}). \quad (2.4)$$

A probabilidade de transição por unidade de tempo do estado ϕ_i para o estado ϕ_f será:

$$W = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|T_{fi}|^2}{t} \quad (2.5)$$

A função $\delta(E_f - E_i)$ expressa o fato de que a energia da partícula é conservada na transição $i \rightarrow f$.

Na Física de Partículas, geralmente as situações começam com um estado inicial específico e terminam num conjunto de estados finais. Chamaremos de $\rho(E_f)$ a densidade de estados finais, de modo que $\rho(E_f) \cdot dE_f$ seja o número de estados no intervalo de energia E_f e $E_f + dE_f$. Integrando sobre a densidade e impondo a conservação de energia, obtêm-se a *taxa de transição*

$$W_{fi} = 2\pi |V_{fi}|^2 \rho(E_i), \quad (2.6)$$

que é a Regra de Ouro de Fermi.

Como mencionado anteriormente, no caso relativístico utilizamos uma versão covariante, conforme já podemos identificar na equação (2.2). Por exemplo, um elétron livre de quadrimomento p^μ é descrito por uma função de onda de quatro componentes

$$\psi = u(\vec{p}) e^{-ip^\mu x_\mu} \quad (2.7)$$

que satisfaz a equação de Dirac

$$(\gamma_\mu p^\mu - m) \psi = 0. \quad (2.8)$$

A equação para o elétron num campo eletromagnético A^μ é obtida pela substituição (HALZEN; MARTIN, 1984) $p^\mu \rightarrow p^\mu + eA^\mu$, onde levamos em conta que $-e$ é a carga do elétron. Encontramos que

$$(\gamma_\mu p^\mu - m) \psi = \gamma^0 V \psi \quad (2.9)$$

onde a perturbação é dada por

$$\gamma^0 V = -e \gamma_\mu A^\mu. \quad (2.10)$$

Usando a teoria de perturbação em primeira ordem, a amplitude

de espalhamento de um elétron de um estado ψ_i para um estado ψ_f é

$$T_{fi} = -i \int \psi_f^\dagger(x) V(x) \psi_i(x) d^4x = ie \int \bar{\psi}_f \gamma_\mu A^\mu \psi_i d^4x = -i \int j_\mu^{fi} A^\mu d^4x, \quad (2.11)$$

onde

$$j_\mu^{fi} \equiv -e \bar{\psi}_f \gamma_\mu \psi_i = -e \bar{u}_f \gamma_\mu u_i e^{i(p_f - p_i)^\mu x_\mu} \quad (2.12)$$

de modo que j_μ^{fi} é a corrente eletromagnética de transição do elétron entre os estados ψ_i e ψ_f (HALZEN; MARTIN, 1984).

O elemento invariante $\gamma_\mu A^\mu$ representa o principal aspecto da interação eletromagnética. Trata-se de uma expressão geral. Uma corrente de natureza eletromagnética interage com um campo eletromagnético. Um elemento similar vai aparecer em fenômenos que envolvem a interação fraca, conforme veremos mais adiante.

Com o auxílio das regras de Feynman (GRIFFITHS, 2009), a corrente eletromagnética de transição do elétron j_μ^{fi} é representada na figura (3) abaixo.

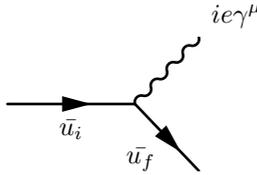


Figura 3 – Representação da corrente j_μ^{fi} .

Notamos na figura (3) a presença das matrizes de Dirac. De fato, quando tratamos a interação de férmions de spin 1/2 o fator de vértice contém essas matrizes. No caso da QED, cada vértice de um diagrama de Feynman contribui com o fator $ie\gamma^\mu$. Notamos ainda a estrutura quadrivetorial $\bar{u}_f \gamma_\mu u_i$ necessária para tratar interações relativísticas, onde u_i é um antes da interação, e \bar{u}_f é um espinor linha descrevendo o mesmo elétron (ou férmion) depois da interação.

Se A^μ for produzido por uma ou mais partículas de determinado spin, então usando a equação correspondente (Klein-Gordon, Dirac, Proca, etc.) podemos relacionar A^μ com sua fonte, ou seja, uma corrente $j_{(2)fi}^\mu$. A amplitude de transição resultante (menor ordem) é dada pela seguinte expressão:

$$T_{fi} = -i \int j_\mu^{(1)}(x) \left(\frac{-1}{q^2} \right) j_{(2)fi}^\mu d^4x, \quad (2.13)$$

onde os índices (1) e (2) das correntes se referem às respectivas partículas interagentes, e q é o quadrimomento transferido durante a interação, a qual descreve duas partículas A e B que interagem produzindo C e D , ou $A+B \rightarrow C+D$. Para ilustrar, vamos utilizar a expressão (2.13) no espalhamento Møller $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$. O diagrama de Feynman de ordem mais baixa deste espalhamento já vimos anteriormente na figura (2). Reescrevemos na figura (4) abaixo.

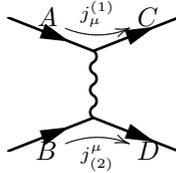


Figura 4 – Diagrama de Feynman para $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$.

Aplicando a (2.12) na (2.13) e integrando em x , obtemos

$$T_{fi} = -i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D) \mathcal{M} \quad (2.14)$$

com

$$-i\mathcal{M} = (ie\bar{u}_C \gamma^\mu u_A) \left(\frac{-i}{q^2}\right) (ie\bar{u}_D \gamma_\mu u_B) = (ie\bar{u}_C \gamma^\mu u_A) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\right) (ie\bar{u}_D \gamma^\nu u_B) \quad (2.15)$$

e $q = p_A - p_C$.

Conforme definido em (2.14), \mathcal{M} é conhecido como amplitude *invariante*. A função delta quadridimensional expressa a conservação energia-momento para o processo.

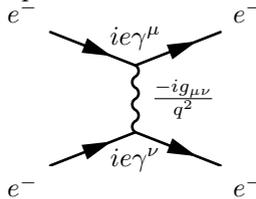


Figura 5 – Fatores de vértice e propagador para espalhamento elétron-elétron.

No entanto, para o espalhamento elétron-elétron há um segundo diagrama de Feynman, conforme vemos na figura (6). A amplitude

deste segundo diagrama é obtida pela expressão (2.15), com a troca $C \iff D$, mas com um sinal de menos devido à troca de férmions idênticos. Assim, a amplitude completa (menor ordem) para o espalhamento Møller é

$$\mathcal{M} = -e^2 \frac{(\bar{u}_C \gamma^\mu u_A)(\bar{u}_D \gamma_\mu u_B)}{(p_A - p_C)^2} + e^2 \frac{(\bar{u}_D \gamma^\mu u_A)(\bar{u}_C \gamma_\mu u_B)}{(p_A - p_D)^2}. \quad (2.16)$$

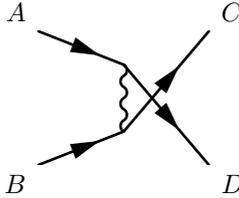


Figura 6 – Segundo diagrama para espalhamento $e^- e^-$.

Na linguagem da teoria de perturbação, os diagramas das figuras (5) e (6) representam um espalhamento elétron-elétron de ordem e^2 (ou α), com amplitude dada pelas equações 2.14 e 2.15. Estes são os diagramas de Feynman de ordem mais baixa. A linha ondulada representa um fóton sendo trocado entre os léptons, e o fator associado $\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}$ é chamado propagador do fóton; ele carrega índices de Lorentz por tratar-se de uma partícula de spin 1. O quadrimomento do fóton q é determinado pela conservação dos quadrimomentos nos vértices. Em cada um dos vértices do diagrama associamos o fator correspondente. Cada fator de vértice contém o acoplamento eletromagnético (e) e um índice de quadrivetor para conectar com o índice do fóton. Os sinais particulares de menos e fatores (i) são distribuídos para dar os resultados corretos para diagramas de ordens maiores. A multiplicação dos três fatores fornece $-i\mathcal{M}$.

Sempre que o mesmo vértice ou linha interna ocorre em um diagrama de Feynman, o fator correspondente contribuirá multiplicativamente com a amplitude $-i\mathcal{M}$ para o diagrama. Assim, uma tabela com regras de Feynman para a QED nos permite escrever rapidamente as expressões para a amplitude \mathcal{M} .

Uma formulação quantitativa da dinâmica de partículas elementares requer, na prática, calcular a taxa de decaimento (Γ) e a seção de choque (σ). O procedimento envolve duas partes distintas: (1) diagramas de Feynman para determinar a amplitude \mathcal{M} do processo em

questão; (2) inserir \mathcal{M} na Regra de Ouro de Fermi para calcular Γ ou σ . Estamos interessados aqui na seção de choque σ . Para relacionar os cálculos com as observações experimentais precisamos, primeiramente, fixar a constante de normalização das funções de onda de uma partícula livre relativística que, a título de exemplo, vamos supor que tenha spin nulo.

$$\phi = N e^{-ip \cdot x}. \quad (2.17)$$

A densidade de probabilidade ρ de partículas descritas por ϕ é

$$\rho = 2E|N|^2. \quad (2.18)$$

Escolhemos a normalização no volume V , de tal forma que obtemos:

$$\int_V \rho dV = 2E. \quad (2.19)$$

Portanto,

$$N = \frac{1}{\sqrt{V}}. \quad (2.20)$$

Agora, a taxa de transição por unidade de volume da reação $A + B \longrightarrow C + D$ é

$$W_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{tV}, \quad (2.21)$$

onde t é o intervalo de tempo da interação e a amplitude de transição é dada por

$$T_{fi} = -iN_A N_B N_C N_D (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D) \mathcal{M}. \quad (2.22)$$

Elevando (2.22) ao quadrado e fazendo uso da (2.21), obtemos

$$W_{fi} = \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D) |\mathcal{M}|^2}{V^4}. \quad (2.23)$$

Resultados experimentais do espalhamento $AB \longrightarrow CD$ são usualmente colhidos na forma de seção de choque, a qual está relacionada com a taxa de transição por

$$\sigma \equiv \frac{W_{fi}}{(\text{fluxo inicial})} (\text{número de estados finais}), \quad (2.24)$$

onde os fatores entre parênteses contêm informações sobre as partículas

antes e depois da interação.

Para uma única partícula o *número de estados finais* num volume V com momentos num elemento d^3p é definido como $Vd^3p/(2\pi)^3$. No entanto temos $2E$ partículas em V , de forma que:

$$\text{No. de estados finais/partícula} = \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \quad (2.25)$$

Assim, para as partículas C e D espalhadas dentro de elementos de momento d^3p_C , d^3p_D , temos

$$\text{No. de estados finais disponíveis} = \frac{d^3p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{d^3p_D}{(2\pi)^3 2E_D} \quad (2.26)$$

O número de partículas passando através de uma área unitária por unidade de tempo é $|v_A|2E_A/V$, e o número de partículas-alvo por volume é $2E_B/V$. Assim, o fluxo inicial das partículas incidentes é dado por

$$\text{Fluxo inicial} = \frac{|v_A|2E_A}{V} \frac{2E_B}{V} \quad (2.27)$$

Inserindo (2.23), (2.26) e (2.27) em (2.24) encontramos a seção de choque diferencial para um espalhamento em $d^3p_C d^3p_D$ dado por

$$d\sigma = \frac{V^2}{|v_A|2E_A 2E_B} \frac{1}{V^4} |\mathcal{M}|^2 \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^6} \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D) \frac{d^3p_C}{2E_C} \frac{d^3p_D}{2E_D} V^2 \quad (2.28)$$

Podemos interpretar a seção de choque σ como uma área efetiva na qual A e B interagem para produzir C e D . A expressão (2.28) pode ser escrita na forma simbólica

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{F} dQ, \quad (2.29)$$

onde dQ é o espaço de fase invariante de Lorentz

$$dQ = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D) \frac{d^3p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{d^3p_D}{(2\pi)^3 2E_D}, \quad (2.30)$$

e o fluxo incidente no referencial do laboratório é

$$F = |\vec{v}_A| 2E_A 2E_B, \quad (2.31)$$

com $\vec{v}_A = \vec{p}_A/E_A$. Para uma colisão geral entre A e B ,

$$\begin{aligned} F &= |\vec{v}_A - \vec{v}_B| \cdot 2E_A \cdot 2E_B = 4(|\vec{p}_A|E_B + |\vec{p}_B|E_A) \\ &= 4((p_A \cdot p_B)^2 - m_A^2 m_B^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

o qual também é invariante.

A amplitude \mathcal{M} contém toda a informação *dinâmica* do processo; conforme vimos, seu cálculo é feito pela avaliação dos diagramas de Feynman relevantes, utilizando as regras de Feynman apropriadas para a interação. O fator espaço de fase dQ é puramente cinemático; depende das massas, energias e momentos das partículas envolvidas na interação; pode ser grande ou pequeno dependendo de quantas maneiras a energia disponível no sistema é distribuída. Isso diz se o processo é ou não provável de ocorrer. Em geral, dQ é chamado de *densidade de estados finais* (GRIFFITHS, 2009).

A expressão (2.29) será utilizada no capítulo 3 para calcular as seções de choque σ no modelo de interação de neutrinos com a matéria, considerado neste trabalho. Conhecendo σ num determinado volume V , calculamos o livre caminho médio do neutrino através da expressão

$$\lambda = \left(\frac{\sigma}{V}\right)^{-1} \quad (2.33)$$

Em alguns experimentos, os spins das partículas antes e depois da interação são especificados, bem como a polarização do fóton (no caso da QED). Nesses casos, a próxima coisa a fazer é inserir os espinores e vetores de polarização apropriados na expressão para \mathcal{M} e calcular $|\mathcal{M}|^2$ para então, calcular a seção de choque σ . De forma geral, não estamos interessados nos spins. Um experimento típico inicia com um feixe de partículas cujas orientações de spin são randômicas ou não-polarizadas. Então, conta-se o número de partículas espalhadas numa dada direção. No caso, a seção de choque é a *média* sobre todas as configurações iniciais de spin, (s_i), e a *soma* sobre todas as configurações finais de spin, (s_f). Portanto, devemos fazer a seguinte substituição (GRIFFITHS, 2009),(HALZEN; MARTIN, 1984):

$$|\mathcal{M}|^2 \rightarrow \overline{|\mathcal{M}|^2} \equiv \frac{1}{(\gamma_A)(\gamma_B)} \sum_{\text{todos os spins}} |\mathcal{M}|^2, \quad (2.34)$$

onde γ_A e γ_B representam as degenerescências de spin das partículas antes da interação.

Para simplificar, aplicamos a (2.34) apenas para o diagrama da figura (5), cuja amplitude \mathcal{M} é dada pela (2.15). Primeiramente, calculamos o módulo quadrado de (2.15):

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{(p_A - p_C)^4} [\bar{u}_C \gamma^\mu u_A] [\bar{u}_D \gamma_\mu u_B] [\bar{u}_C \gamma^\nu u_A]^* [\bar{u}_D \gamma_\nu u_B]^*. \quad (2.35)$$

O primeiro e o terceiro (ou o segundo e quarto) termos entre colchetes constituem uma estrutura genérica que reescrevemos como:

$$G \equiv [\bar{u}_a \Gamma_1 u_b] [\bar{u}_a \Gamma_2 u_b]^*, \quad (2.36)$$

onde (a) e (b) representam spins e momentos, e Γ_1, Γ_2 são matrizes 4×4 . Utilizando os *truques de Casimir* (GRIFFITHS, 2009), (HALZEN; MARTIN, 1984) chegamos à seguinte conclusão:

$$\sum_{\text{todos os spins}} [\bar{u}_a \Gamma_1 u_b] [\bar{u}_a \Gamma_2 u_b]^* = \text{Tr}[\Gamma_1 (\not{p}_b + m_b) \bar{\Gamma}_2 (\not{p}_a + m_a)], \quad (2.37)$$

onde $\not{p} \equiv p_\mu \gamma^\mu$ é uma matriz 4×4 e $\bar{\Gamma}_2 \equiv \gamma^0 \Gamma_2^\dagger \gamma^0$. Dessa forma, os *truques de Casimir* se resumem a reduzir uma soma complicada de spins ao traço de matrizes.

Agora, aplicando os *truques de Casimir* duas vezes na (2.35), encontramos:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{4(p_A - p_C)^4} \text{Tr}[\gamma^\mu (\not{p}_A + m_A) \gamma^\nu (\not{p}_C + m_C)] \times \text{Tr}[\gamma_\mu (\not{p}_B + m_B) \gamma_\nu (\not{p}_D + m_D)]. \quad (2.38)$$

O fator $1/4$ é devido á media sobre os spins iniciais; duas partículas com spin $1/2$ - duas possibilidades de orientação para cada uma. Utili-

zando as propriedades de traço de matrizes (GRIFFITHS, 2009), (HALZEN; MARTIN, 1984) na expressão (2.1), chegamos a:

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{8e^4}{(p_A - p_C)^4} [(p_A \cdot p_B)(p_C \cdot p_D) + (p_A \cdot p_D)(p_B \cdot p_C) - \\ &(p_A \cdot p_C)(m)^2 - (p_B \cdot p_D)(m)^2 + 2(m)^4]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Os procedimentos descritos até aqui para encontrar \mathcal{M} , juntamente com as regras de Feynman apropriadas serão suficientes para tratar a interação dos neutrinos com a matéria e calcular seu livre caminho médio.

2.1.1 Neutrinos e propriedades: um pouco da história

Os neutrinos constituem uma quantidade relevante de matéria no universo. Entre suas fontes estão reatores nucleares, radioatividade das rochas e dos seres vivos, o Sol e outras estrelas e eventos astrofísicos como as supernovas. Há cerca de 170 milhões de anos atrás, na galáxia Grande Nuvem de Magalhães, uma estrela com vinte vezes a massa do Sol explodiu. Em fevereiro de 1987, os primeiros sinais da explosão chegaram na Terra. Este sinal acusou a presença de neutrinos. Embora poucos, mas foi o suficiente para iniciar uma parceria entre físicos de partículas, astrofísicos e cosmólogos. No entanto, a história que deu início à pesquisa com neutrinos começou décadas antes deste acontecimento (SUTTON, 1992).

No final do século 19 foi descoberta a radioatividade por Henri Becquerel - fenômeno no qual átomos instáveis decaem espontaneamente liberando energia e ocupando um estado de menor energia, alterando a estrutura do núcleo atômico. Esta energia liberada em forma de radiação pode se manifestar como raios gama, partículas alfa ou radiação beta, a qual se pensava constituir-se apenas de elétrons de alta energia. Inicialmente, pensou-se por muito tempo que esses elétrons tinham todos uma energia bem definida, assim como ocorre com as partículas alfa e a radiação gama. No entanto, experiências realizadas de 1907 até 1929 levaram à conclusão de que o espectro de energia da radiação beta era realmente contínuo.

Além do espectro contínuo, havia um problema ainda maior: o

princípio da conservação de energia e momento no processo de decaimento beta estavam sendo violados. Em 1930, Wolfgang Pauli escreveu uma carta às colegas físicas descrevendo, pela primeira vez, uma nova partícula que seria batizada mais tarde como *neutrino*. Esta partícula teria as propriedades necessárias para explicar o espectro contínuo da radiação beta, mantendo a validade do princípio da conservação de energia no processo de decaimento. Teria também outras propriedades como: spin $1/2$ e massa da ordem da massa do elétron ou menor. Agora, num decaimento em três corpos, a continuidade do espectro de raios beta está em acordo com os dados experimentais.

Em 1933, Enrico Fermi utilizou a hipótese do neutrino para elaborar uma nova teoria - "Teoria de 4-férmions- capaz não só de determinar a forma do espectro de radiação beta, como também usar essas informações para dizer algo sobre a massa do neutrino. Sua conclusão era de que a massa do neutrino era praticamente nula ou muito pequena em relação à massa do elétron (SUTTON, 1992), (CHUNG, 2001).

Em 14 de junho de 1956, Reines e Cowan anunciaram a detecção do neutrino (mais precisamente anti-neutrino do elétron $\bar{\nu}_e$) e, de fato, sua seção de choque era da ordem de 10^{-44} cm^2 conforme previsto anteriormente.

Em 1956, Tsung-Dao Lee e Chen-Ning Yang observaram que processos envolvendo a interação fraca violavam a simetria espacial de paridade. Um experimento realizado em 1957 por Chien-Shiung Wu e colaboradores, que consistia em medir a distribuição do momento angular dos elétrons originados no decaimento beta ${}^{60}\text{Co} \rightarrow {}^{60}\text{Ni} + e^- + \bar{\nu}_e$, revelou uma assimetria na distribuição, confirmando, assim, que as interações fracas violam a simetria de paridade e essa violação é máxima.

Em 1958, M. Goldhaber, L. Grodzins e A.W. Sunyar mediram a helicidade (projeção do spin ao longo da direção do momento linear) do neutrino. Os resultados da pesquisa mostraram que os neutrinos possuem helicidade $\vec{\sigma}_\nu \cdot \hat{p}_\nu = -1$ (ou de mão esquerda no limite relativístico $E_\nu \gg m_\nu c^2$ e/ou massa nula), ao passo que os anti-neutrinos possuem helicidade $+1$ (mão direita), onde $\vec{\sigma}$ representa as matrizes de Pauli.

Em fevereiro de 1991, no *Physical Letters B* foi publicado que a massa do neutrino deve ser menor que 13 eV . Porém, ainda restava encontrar um limite inferior - tarefa sendo realizada até os dias de hoje. Saber se o neutrino tem ou não massa nula tornou-se uma tarefa necessária, pois esta intrigante pergunta poderia explicar uma outra propriedade curiosa que deu origem ao chamado *problema dos neutrinos*

solares.

Nos anos 1960, John Bahcall, com base em um modelo sobre o núcleo do Sol, previu que o Sol produz uma quantidade de neutrinos da ordem de 100 bilhões/cm^2 . Em 1969, Raymond Davis propôs um experimento (Homestake) utilizando tetracloroetileno (C_2Cl_4) para confirmar a validade desse modelo. Os resultados obtidos por Davis e colaboradores revelavam apenas $1/3$ do valor previsto. O Modelo Padrão recém-estabelecido não podia explicar a aparente falta de neutrinos previstos.

Em 1983, em Kamioka, Japão, um experimento (Kamiokande) observou discrepâncias entre a quantidade de neutrinos gerados na atmosfera terrestre com a quantidade esperada. Isso ficou conhecido como *anomalia dos neutrinos atmosféricos*. Assim como Davis e Bahcall, Masatoshi Koshiba e seus colaboradores do Kamiokande se depararam com o desaparecimento de neutrinos.

Em 1968, um ano antes do Homestake, Bruno Pontecorvo havia proposto uma teoria em que os neutrinos tinham a capacidade espontânea de mudar de sabor. Esse fenômeno é chamado de *oscilação do neutrino* ou *oscilação quântica do sabor*. Isso explicaria a discrepância entre a teoria de Bahcall e o experimento de Davis. No entanto, o Modelo Padrão descreve neutrinos sem massa, os quais não podem mudar de sabor. Uma partícula sem massa viaja à velocidade da luz. De acordo com a relatividade especial de Einstein, no referencial do neutrino o tempo não passa. A oscilação do neutrino é um fenômeno que depende do tempo, logo a necessidade da massa. Além disso, a probabilidade de mudança de sabor no modelo de Pontecorvo exigia diferença de massa entre os sabores.

Após 1983, no Japão, o Super Kamiokande estava sendo construído e seria capaz de detectar neutrinos do elétron e do múon. O número de neutrinos vindos de uma pequena distância em relação ao detector era a quantidade esperada. Porém, o número de neutrinos que vinham da Terra, por baixo, que atravessavam milhares de quilômetros era cerca da metade do valor esperado. A diferença só poderia estar na hora de chegada dos neutrinos ao detector. Este fato indicava um forte indício de massa não-nula, pois o neutrino “sabia” quão longe do detector ele estava. Isto implica que seu tempo próprio é finito em consequência de viajar a uma velocidade menor que a luz - uma característica fundamental de uma partícula com massa.

Cientistas americanos, britânicos e canadenses construíram um novo tipo de detector de neutrinos em Sudbury, Ontário, Canadá, capaz de detectar os três sabores de neutrino. Em junho de 2001, o time da

SNO (Sudbury Neutrino Observatory) anunciou o fluxo de neutrinos do Sol levando em conta, pela primeira vez, os três sabores. Na primeira reação, eles observaram somente um fluxo de neutrinos do elétron de $(1,75 \pm 0,14) \times 10^6 \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$. Da segunda reação, o fluxo era a soma dos três sabores resultando em $(2,39 \pm 0,37) \times 10^6 \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$. Como os valores indicam, algo mais do que neutrinos eletrônicos está sendo detectado. Assim, o número total de neutrinos solares é dada pela expressão:

$$\Phi_{total} = \Phi_{\nu_e} + 7 \times (\Phi_{\nu_e + \nu_\mu + \nu_\tau} - \Phi_{\nu_e}),$$

onde o fator 7 significa que os neutrinos ν_μ e ν_τ têm capacidade de interagir 7 vezes menos do que o ν_e . Como resultado, chegou-se a $\Phi_{Total} = (5,44 \pm 0,99) \times 10^6 \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$, enquanto que a previsão teórica de Bahcall fornecia um fluxo de $(5,15 \pm 0,20) \times 10^6 \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$. John Bahcall e Raymond Davis estavam certos; era o Modelo Padrão que estava incompleto.

Um segundo experimento, na virada do século, chamado KamLAND (Kamioka Liquid Scintillator Anti-neutrino Detector) observou neutrinos (anti-neutrinos) eletrônicos vindos dos reatores através da reação $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$. Os dados do KamLAND mostraram um padrão oscilatório na distribuição de probabilidade de mudança de sabor do ν_e conforme previsto por Pontecorvo, em 1968. Os parâmetros oscilatórios destes dados também resolviam o problema dos neutrinos solares.

Agora, sabia-se que o limite inferior da massa do neutrino não poderia ser zero e que os sabores de neutrino têm diferenças de massa entre si. A oscilação de neutrinos abriu um novo mundo na Física, além de revelar falhas no Modelo Padrão. A descoberta de que os neutrinos têm massa traz grandes consequências sobre o nosso entendimento do universo.

Em resumo, os neutrinos:

- foram propostos por W. Pauli para preservar o princípio de conservação da energia e do momento angular e linear;
- são férmions com spin 1/2 e massa muito pequena;
- têm helicidade esquerda;
- não possuem carga elétrica;
- existem em três sabores: ν_e , ν_μ e ν_τ ;
- interagem com a matéria via interação fraca;
- possuem a capacidade espontânea de mudar de sabor (oscilação quântica de sabor).

Tabela 4 – Tabela de resumo histórico

Década 1860	Teoria de Maxwell do Eletromagnetismo
1896	Descoberta da radioatividade - Becquerel, P.Curie, M.Curie
1897	Descoberta do elétron - Thompson
1930	Hipótese do neutrino - W.Pauli
1933/34	Teoria do Decaimento beta - E.Fermi
Década 1940	Formulação da QED - Feynman, Schwinger, Tomonaga
1956	Descoberta do neutrino do elétron - Reines e Cowan
1957	Descoberta da violação de paridade - Lee e Yang
1962	Descoberta do neutrino do múon - Schwartz, Lederman e Steiberger
Década 1960	Formulação do Modelo Padrão - Glashow, Weinberg e Salam
Década 1960/70	Descoberta dos quarks e Formulação da QCD Gell-mann, Friedman, Kendall, Taylor, Groics e Politzer
1973	Descoberta da corrente neutra
1983	Descoberta dos bósons fracos - Rubbia, Van der Meer
1990-2002	Solucionado o problema dos neutrinos solares - Davis e Koshiba
2002	Descoberta do neutrino do tau - (DONUT) Fermilab

2.2 INTERAÇÃO FRACA

Os neutrinos interagem com a matéria por meio da interação fraca. Todos os quarks e léptons também experimentam a força fraca. Isso ocorre pela troca de bósons vetoriais representados pelas partículas W^+ , W^- (corrente carregada) e Z^0 (corrente neutra). Esses bósons fracos possuem spin 1 e são extremamente massivos (GRIFFITHS, 2009):

$$M_W = 80.40 \pm 0.03 \text{ GeV} \quad \text{e} \quad M_Z = 91.188 \pm 0.002 \text{ GeV}.$$

Em sua proposta original, Fermi associou às interações fracas uma constante de acoplamento G_F , cujo valor é dado por (GRIFFITHS, 2009):

$$G_F = 1.166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad .(2.40)$$

Tabela 5 – Algumas propriedades dos neutrinos

	Massa	Momento Magnético ($\frac{MeV}{T}$)	Sec. Choque (cm^2) (nucleons - 1GeV)
ν_e	$< 2,8 eV$	$< 5,8 \cdot 10^{-20}$	$\sim 10^{-38}$
ν_μ	$< 170 KeV$	$< 4,3 \cdot 10^{-20}$	$\sim 10^{-38}$
ν_τ	$< 18,2 MeV$	$< 3,1 \cdot 10^{-17}$	$\sim 10^{-38}$

Numa perspectiva moderna, a Teoria de Fermi é combinada com os bósons W^+ , W^- e Z^0 , cujos propagadores são dados por:

$$\frac{-i(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / M^2)}{q^2 - M^2}, \quad (2.41)$$

com $M = M_W$ ou M_Z . No regime de baixas energias ($q^2 \ll M^2$) o propagador se reduz a:

$$\frac{i g_{\mu\nu}}{M^2}, \quad (2.42)$$

de modo que neste limite identificamos que:

$$G_F \approx \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\frac{g_w}{M_W} \right)^2, \quad (2.43)$$

onde $g_w = \sqrt{4\pi\alpha_w}$, sendo $\alpha_w = 1/29,5$ a constante de estrutura fina fraca. Curiosamente, $\alpha_w \approx 5\alpha$, por isso o nome “interação fraca” não se deve ao acoplamento fraco, mas pelo fato de que os mediadores fracos são muito massivos, bem acima das faixas de energia tipicamente nucleares.

Justificamos anteriormente (ver seção 2.1) que os diagramas de Feynman de ordem mais baixa podem ser utilizados na QED por esta tratar-se da descrição de processos nos quais cada um desses diagramas contribui com um fator $\alpha = 1/137$. O valor da constante de estrutura fina fraca α_w e o regime de baixas energias $q^2 \ll M^2$ também justificam a utilização de diagramas de ordem mais baixa para calcular a amplitude invariante \mathcal{M} e seções de choque σ nos processos que envolvem as interações fracas.

Ao longo desta seção apresentamos as regras de Feynman correspondentes à interação fraca, ao mesmo tempo em que destacamos suas características particulares, dividindo-a em dois tipos, de acordo com o bóson fraco trocado no processo: interação fraca por corrente

carregada e por corrente neutra. Para todos os cálculos realizados aqui a massa do neutrino será considerada nula.

2.2.1 Corrente fraca carregada

As interações fracas carregadas mudam o sabor de partículas. Seus mediadores - os bósons W^+ e W^- - se acoplam a léptons, quarks e suas anti-partículas. Para o caso dos léptons, o vértice primitivo é representado na figura (7), abaixo:

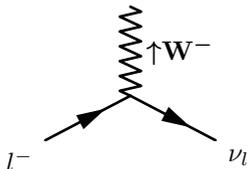


Figura 7 – Vértice primitivo fraco leptônico - emissão de um bóson W^- .

O diagrama da figura (7) representa a reação $l^- \rightarrow \nu_l + W^-$, onde um lépton negativo (e^- , μ^- , τ^-) converte-se em um neutrino correspondente com a emissão de um bóson W^- . Esta mesma conversão pode ser obtida pela absorção de um bóson W^+ , cuja reação $l^- + W^+ \rightarrow \nu_l$ é representada na figura (8), abaixo:

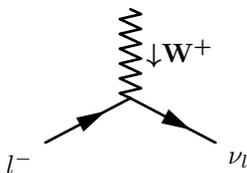


Figura 8 – Vértice primitivo fraco leptônico - absorção de um bóson W^+ .

Reações que envolvem anti-partículas, como $l^+ \rightarrow \bar{\nu}_l + W^+$, são descritas com um diagrama similar. Processos mais complicados envolvendo interações fracas são descritos com a combinação de dois ou mais vértices primitivos similares à figura (7) ou (8).

Nos diagramas que envolvem as interações fracas entre léptons, cada fator de vértice contribui com o seguinte fator:

$$\frac{-ig_w}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1 - \gamma^5). \quad (2.44)$$

A soma $(\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^5)$ representa uma estrutura ' $V - A$ ' (vetor menos vetor axial), a qual é necessária para violar a conservação de paridade que ocorre nas interações fracas.

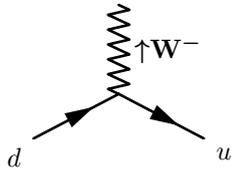
No caso dos léptons, o acoplamento de bósons fracos carregados é restrito às seguintes gerações particulares:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix},$$

não havendo acoplamento entre gerações cruzadas. No caso de quarks, há uma estrutura de gerações similares, porém não há restrição quanto à mistura de sabores entre as seguintes gerações:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}.$$

Assim, como sugerido por Cabibbo em 1963, o vértice $d \rightarrow u + W^-$ carrega um fator de $\cos\theta_c$, onde $\theta_c = 13.15^\circ$ (GRIFFITHS, 2009) enquanto que $s \rightarrow u + W^-$ carrega um fator $\sin\theta_c$, como vemos nas figuras (9) e (10), abaixo:



$$\frac{-ig_w}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1 - \gamma^5)\cos\theta_c$$

Figura 9 – Vértice primitivo $d \rightarrow u + W^-$.

Apesar do que vemos nas figuras (9) e (10), os quarks não são encontrados isolados; encontram-se confinados em mésons e bárions através da interação forte. Uma vez que nem todos os quarks mudam de sabor em um hádron durante uma interação fraca, costuma-se representá-los como espectadores.

O caso geral envolvendo a mistura de sabores das três gerações

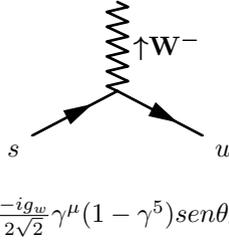


Figura 10 – Vértice primitivo $s \rightarrow u + W^-$.

de quarks é representado pela matriz CKM (GRIFFITHS, 2009):

$$\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix},$$

que inclui a mistura da geração $\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$.

Em analogia à corrente eletromagnética j_μ^{fi} na QED, podemos definir uma corrente fraca para descrever os vértices com base no diagrama da figura (7), através da expressão:

$$J_\mu^- = \bar{\nu}_l \gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) l, \quad (2.45)$$

onde ν_l e l representam espinores. Chamamos aqui os processos que envolvem a emissão de bósons W^- (ou absorção de W^+) como interações via corrente fraca carregada negativamente. Na figura (8) temos a absorção de um bóson W^+ , portanto, uma corrente fraca carregada negativamente dada pela expressão (2.45). Similarmente, os processos que envolvem a emissão de bósons W^+ (ou absorção de W^-) chamamos de interações via corrente fraca carregada positivamente, a qual definimos na expressão (2.46), abaixo, através da reação $\nu_l \rightarrow l^- + W^+$:

$$J_\mu^+ = \bar{l} \gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \nu_l. \quad (2.46)$$

Como já mencionado, o termo $(1 - \gamma^5)$ viola a paridade. Ele atua nos espinores como um operador projetando os espinores u_L (mão-esquerda) e u_R (mão-direita), definidos como:

$$u_R \equiv \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) u(p)$$

$$u_L \equiv \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) u(p). \quad (2.47)$$

Desta forma é útil trabalharmos com estados quirais nas interações fracas, onde o espinor $u(p)$ é escrito como uma combinação de u_L e u_R . Em particular, quando as partículas envolvidas têm massa nula ou nos casos em que $E \gg m$, os espinores u_L e u_R carregam helicidades -1 e $+1$, respectivamente. O mesmo se aplica às anti-partículas, como mostra a tabela 6, que inclui operações com espinores adjuntos.

Tabela 6 – Estados quirais

Partículas	Anti-partículas
$u_L = \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) u$	$v_L = \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) v$
$u_R = \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) u$	$v_R = \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) v$
$\bar{u}_L = \bar{u} \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right)$	$\bar{v}_L = \bar{v} \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right)$
$\bar{u}_R = \bar{u} \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right)$	$\bar{v}_R = \bar{v} \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right)$

Utilizando as propriedades das matrizes de Dirac e os espinores quirais podemos reescrever as correntes fracas, conforme vemos na expressão (2.48), abaixo, para o caso da corrente fraca negativa:

$$J_\mu^- = \bar{v}_l \left[\left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) \gamma_\mu \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \right] l = \bar{v}_{lL} \gamma_\mu l_L \quad (2.48)$$

O vértice fraco agora é uma estrutura puramente vetorial (ao invés de axial vetorial), acoplando somente léptons de mão-esquerda e neutrinos de mão-esquerda, diferente da QED que acopla ambas as quiralidades.

A estrutura de correntes fracas será útil para calcular amplitudes e seções de choque, como fizemos anteriormente para a QED. No modelo GWS (GRIFFITHS, 2009), (HALZEN; MARTIN, 1984)), o desenvolvimento formal das correntes fracas revelaram que as interações fracas e eletromagnéticas são manifestações diferentes de uma interação mais fundamental - a eletrofraca. Além de prever a interação básica da QED, conforme já vimos, caracterizada pelo elemento invariante $-ig_e (j_\mu^{em}) A^\mu$, onde $g_e \equiv \sqrt{4\pi\alpha}$, a teoria eletrofraca apresenta o acoplamento das correntes fracas aos bósons respectivos. As correntes fracas carregadas se acoplam aos bósons W^+ e W^- com intensidade g_w dado por:

$$-ig_w \left[\frac{1}{\sqrt{2}} J_\mu^+ W_\mu^+ + \frac{1}{\sqrt{2}} J_\mu^- W_\mu^- \right], \quad (2.49)$$

Veremos na seção seguinte o acoplamento da corrente neutra ao campo do bóson Z^0 .

2.2.2 Corrente fraca neutra

A interação fraca via corrente neutra, mediada pelo bóson Z^0 , também acopla léptons, quarks e suas anti-partículas. Diferente das correntes fracas carregadas, as correntes neutras não mudam o sabor das partículas envolvidas. O vértice primitivo envolvendo corrente neutra é apresentado na figura (11), abaixo:

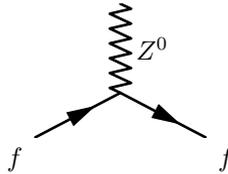


Figura 11 – Vértice primitivo fraco neutro.

O vértice da figura (11) representa a reação $f \rightarrow f + Z^0$, onde (f) representa um lépton, quark ou suas anti-partículas.

Outra diferença entre as correntes fracas carregadas e neutras é que estas últimas, em geral, não são puramente ‘ $V - A$ ’, de modo que devemos fazer a seguinte substituição:

$$(1 - \gamma^5) \rightarrow \left(c_V^f - c_A^f \gamma^5 \right), \quad (2.50)$$

onde c_V^f (coeficiente de acoplamento vetorial) nem sempre é igual à c_A^f (coeficiente de acoplamento axial) para uma partícula (f) (ver tabela (7)). Portanto, nos diagramas que envolvem as interações fracas neutras associamos o seguinte fator de vértice:

$$\frac{-ig_Z}{2} \gamma^\mu \left(c_V^f - c_A^f \gamma^5 \right), \quad (2.51)$$

onde g_Z é a intensidade de acoplamento fraco neutro. A diferença entre os coeficientes de acoplamento significa que a corrente neutra acopla não só espiniores de mão-esquerda, mas também espiniores de mão-direita.

Em analogia feita à corrente fraca carregada, podemos definir uma corrente fraca neutra associada aos processos similares ao diagrama da figura (11), dada por:

$$J_\mu^{NC} = \bar{f}\gamma_\mu\frac{1}{2}\left(c_V^f - c_A^f\gamma^5\right)f, \quad (2.52)$$

onde f representa um espinor.

Como vimos na seção anterior, a interação fraca via corrente carregada acopla-se aos campos dos bósons W^+ e W^- , conforme descrita no modelo GWS. Este modelo descreve o acoplamento da corrente neutra ao campo do bóson Z^0 com intensidade g_Z , dado por:

$$\begin{aligned} -ig_Z\left(J_\mu^3 - \text{sen}^2\theta_w j_\mu^{em}\right)Z^\mu \equiv \\ -ig_Z J_\mu^{NC}Z^\mu \end{aligned} \quad (2.53)$$

, onde $\theta_w = 28,75^\circ$ (GRIFFITHS, 2009) é chamado de ângulo de Weinberg ou ângulo de mistura fraco e $g_Z = \frac{g_e}{\text{sen}\theta_w \cdot \cos\theta_w}$. A expressão (2.53) justifica que a corrente fraca neutra não é puramente ‘ $V - A$ ’ devido à presença da corrente eletromagnética, a qual acopla espiniores de ambas as quiralidades. Os coeficientes c_V e c_A estão implícitos na expressão (2.53), podendo ser calculados utilizando o ângulo de Weinberg previsto pela teoria eletrofraca (GRIFFITHS, 2009), (HALZEN; MARTIN, 1984), conforme vemos na tabela (7).

Tabela 7 – Coeficientes neutros vetorial e axial no modelo GWS

f	c_V	c_A
ν_e, ν_μ, ν_τ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
e^-, μ^-, τ^-	$-\frac{1}{2} + 2\text{sen}^2\theta_w$	$-\frac{1}{2}$
u, c, t	$\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\text{sen}^2\theta_w$	$\frac{1}{2}$
d, s, b	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\text{sen}^2\theta_w$	$-\frac{1}{2}$

O sucesso do modelo de GWS foi sua previsão para as massas dos bósons fracos - relacionados por $M_W = M_Z \cos\theta_w$ - as quais foram confirmadas por Rubbia no CERN, em 1983 (GRIFFITHS, 2009).

Agora que conhecemos a interação básica das correntes fracas carregadas e neutras com os respectivos campos bosônicos, \vec{W}^μ e Z^μ podemos prosseguir para o cálculo da amplitude invariante \mathcal{M} com as

regras de Feynman, o que faremos no capítulo 3.

Uma motivação deste trabalho está na estrutura densa encontrada nas estrelas de nêutrons que discutiremos na seção seguinte.

2.3 NEUTRINOS E AS ESTRELAS DE NÊUTRONS

Os neutrinos emitidos por estrelas de nêutrons recém-nascidas revelam os mecanismos que geram supernovas e a estrutura das estrelas de nêutrons. Além disso, são responsáveis em grande parte pelo resfriamento de muitos objetos astrofísicos como jovens estrelas de nêutrons (HAXTON, 2012), (REDDY; PRAKASH; LATTIMER, 1998b) e (BURROWS, 1990).

Nesta seção, abordaremos alguns aspectos quantitativos do comportamento dos neutrinos durante o processo de formação das estrelas de nêutrons. Esses parâmetros ou condições termodinâmicas serão úteis no cálculo do livre caminho médio dos neutrinos em matéria com temperaturas e densidades encontrados nessas estrelas.

Núcleos de estrelas entre 10 a 25 massas solares fundem elementos começando pelo hidrogênio até formar um núcleo de ferro através de reações nucleares. Nesta etapa não há energia suficiente para fundir elementos mais pesados e manter o equilíbrio hidrostático, o que leva ao colapso gravitacional do núcleo de ferro. Um caroço altamente denso, quente e instável formado durante o colapso, dá origem a ondas de choque no interior da estrela de modo que uma explosão de supernova ocorre, ejetando o material da estrela pelo espaço. O caroço remanescente é uma estrela de nêutrons recém-nascida ou uma proto-estrela de nêutrons (GLENDEENING, 2000), (BURROWS, 1990).

Antes do colapso, a temperatura e a densidade centrais do núcleo são cerca de 5×10^9 K (0.5 MeV) e 10^{10} g/cm³, respectivamente. No colapso, a densidade chega à 10^{14} g/cm³ e a temperatura chega à 10 MeV, o suficiente para desintegrar os núcleos de ferro (fotodesintegração), transformando-os em prótons, nêutrons, fótons de alta energia que dão origem à produção de pares e^-e^+ que, por sua vez, produzem pares de neutrinos e anti-neutrinos (em especial, tauônicos e muônicos). Conforme ocorre a implosão do núcleo, elétrons são capturados por prótons produzindo nêutrons e neutrinos eletrônicos (neutronização). Parte dos neutrinos produzidos são armadilhados de acordo com a reação inversa $\nu_e + n \rightarrow p + e^-$, de tal forma que se estabelece um equilíbrio beta e uma carga elétrica global neutra (RYU; CHEOUN, 2011), (BURROWS, 1990). Associado a este equilíbrio, introduz-se uma variável conservada,

o número léptonico por bárion, dado pela relação:

$$Y_L = Y_e + Y_{\nu_e}, \quad (2.54)$$

onde Y_e e Y_{ν_e} são as frações de elétron e de neutrino eletrônico por bárion, respectivamente¹. O caroço remanescente da supernova evolui de uma proto-estrela de nêutrons quente e rica em léptons para uma estrela de nêutrons fria e desleptonizada. Este processo ocorre em três importantes estágios de evolução caracterizados por variáveis termodinâmicas. Em seu nascimento, o centro da proto-estrela tem entropia por bárion $s \approx 1$ (em unidades de k_B), fração de léptons Y_L na faixa de 0.3 a 0.5 e temperatura ambiente de 5 a 30 MeV. Em seguida ocorre a desleptonização na qual o excesso de neutrinos de elétrons, com energias na faixa de 250 a 450 MeV, difundem para fora da estrela onde a entropia alcança um valor máximo $s \approx 2$ com temperatura de 50 MeV. Finalmente, os neutrinos termalizam e obedecem a distribuição de Fermi-Dirac com energias $E_{\nu_e} \approx \pi T$ caracterizando a fase de resfriamento com $Y_{\nu_e} \approx 0$, conduzindo a estrela para a fase resfriada com $Y_{\nu_e} = 0$ e $T = 0$ MeV (PONS et al., 1999), (REDDY; PRAKASH, 1997) e (REDDY; PRAKASH; LATTIMER, 1998b). Os neutrinos carregam a maior parte da energia irradiada pelas estrelas de nêutrons. Compreender os processos relevantes de evolução de tais estrelas requer simulações computacionais que levem em conta as reações que contribuem para a interação dos neutrinos com a matéria. Isso é feito identificando estas reações e calculando as seções de choque em um determinado volume ou livre caminho médio nas condições termodinâmicas adequadas.

Historicamente, o primeiro cálculo para um modelo de estrela de nêutrons idealizado por Oppenheimer e Volkoff consistia de um gás ideal de nêutrons. No entanto, a matéria de nêutrons pura é instável. Um modelo aperfeiçoado incluindo prótons e elétrons numa proporção em que a carga elétrica global seja neutra e que haja um equilíbrio químico passou a ser considerado numa primeira aproximação para o estado fundamental. Um modelo similar considerando um gás ideal de prótons, nêutrons e elétrons será considerado neste trabalho. Antes, porém, o capítulo seguinte dedicará uma breve recapitulação dos gases ideais quânticos, em particular, o gás livre de Fermi.

¹Embora não seja mencionado nesta descrição, reconhecemos que a presença de partículas como híperons, káons e outras estão presentes na composição das estrelas de nêutrons e são citadas nas referências, porém não serão consideradas neste trabalho.

3 GÁS IDEAL QUÂNTICO

Os sistemas de partículas que constituem um gás, sujeitos às leis da mecânica quântica, são descritos por funções de onda com propriedades de simetria que dependem de as partículas serem bósons ou férmions. Devido a essas propriedades, um estado quântico do gás é caracterizado pelo conjunto de números (SALINAS, 1997):

$$\{n_1, n_2 \dots n_j, \dots\} \equiv \{n_j\}, \quad (3.1)$$

onde j designa o estado quântico de um nível de energia e n_j é o número de partículas neste nível j . Para o caso de férmions, $n_j = 0$ ou 1. Para o caso de bósons, n_j pode variar de 0 a N , onde N é o número total de partículas que constituem o gás. A energia que corresponde ao estado quântico $\{n_j\}$ é dada por:

$$E \{n_j\} = \sum_j \epsilon_j n_j, \quad (3.2)$$

onde ϵ_j é a energia do nível j . O número total de partículas é dado por:

$$N = N \{n_j\} = \sum_j n_j. \quad (3.3)$$

A partir do formalismo da mecânica estatística podemos escolher um ensemble adequado para definir a função de partição, através da qual podemos fazer a conexão com a termodinâmica e obter expressões como, por exemplo, o valor esperado da energia e do número de partículas de um gás. Para o modelo que consideramos neste trabalho escolhemos o ensemble grande canônico, cuja função de partição é dada pela expressão (3.4), abaixo:

$$\Xi = \Xi(T, V, \mu) = \prod_j \left\{ \sum_n e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)n} \right\}, \quad (3.4)$$

onde μ é o potencial químico e $\beta = 1/k_B T$. O valor esperado do número de ocupação do nível j , $\langle n_j \rangle$, pode ser obtido por meio da relação:

$$\langle n_j \rangle = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon_j} \ln \Xi. \quad (3.5)$$

Visto que estamos considerando modelos de gases com prótons, elétrons

e nêutrons, vamos escolher a estatística de Fermi-Dirac daqui em diante.

3.1 GÁS IDEAL DE FERMI

Efetuando o somatório para férmions na grande função de partição na equação (3.4), encontramos que:

$$\Xi(T, V, \mu) = \prod_j \left\{ 1 + e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)} \right\}, \quad (3.6)$$

de onde vem que

$$\ln \Xi(T, V, \mu) = \sum_j \ln \left\{ 1 + e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)} \right\}. \quad (3.7)$$

Calculando o valor esperado do número de ocupação na (3.5), temos:

$$\langle n_j \rangle = \frac{1}{1 + e^{\beta(\epsilon_j - \mu)}}, \quad (3.8)$$

que é a função de distribuição de Fermi-Dirac.

Conhecendo-se a função de distribuição para um gás de Fermi, obtemos a sua energia interna e número total de partículas com o auxílio das expressões (3.2) e (3.3), resultando em:

$$U = \sum_j \epsilon_j \langle n_j \rangle = \frac{\epsilon_j}{1 + e^{\beta(\epsilon_j - \mu)}} \quad (3.9)$$

$$N = \sum_j \langle n_j \rangle = \frac{1}{1 + e^{\beta(\epsilon_j - \mu)}}. \quad (3.10)$$

A conexão com a termodinâmica é feita através do limite termodinâmico. Isso é feito através da seguinte substituição:

$$\sum_{j=\vec{k}, m_s} \rightarrow \gamma \cdot V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}, \quad (3.11)$$

onde o nível de energia j inclui o vetor de onda \vec{k} , associado aos graus de liberdade de translação, e o número quântico de spin m_s . A variável γ é a degenerescência de spin e vale 2 para prótons, nêutrons e elétrons, e 1 para os neutrinos.

Realizando a substituição da (3.11) nas expressões (3.9) e (3.10), encontramos que:

$$U = \gamma \cdot V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \cdot \epsilon(k) \cdot \frac{1}{1 + e^{\beta(\epsilon(k) - \mu)}} \quad (3.12)$$

$$N = \gamma \cdot V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{1 + e^{\beta(\epsilon(k) - \mu)}}. \quad (3.13)$$

3.1.1 Gás ideal relativístico

Para férmions relativísticos devemos levar em conta a relação momento-energia, dada pela equação:

$$\epsilon(k) = \sqrt{k^2 + m^2}, \quad (3.14)$$

onde $\vec{p} = \vec{k}$ com $\hbar = c = 1$. Isolando k , podemos obter a relação de dispersão dada por:

$$\frac{dk}{d\epsilon} = \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 - m^2}}, \quad (3.15)$$

de onde vem que

$$\frac{d^3 k}{(2\pi)^3} = \frac{\epsilon \sqrt{\epsilon^2 - m^2}}{2\pi^2} d\epsilon \equiv D(\epsilon) d\epsilon, \quad (3.16)$$

onde $D(\epsilon)$ é a densidade de estados.

Reescrevendo a energia interna e o número de partículas em termos da energia ϵ , temos:

$$U = \gamma \cdot V \int \epsilon D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon \quad (3.17)$$

$$N = \gamma \cdot V \int D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon, \quad (3.18)$$

com $f(\epsilon) \equiv 1/(1 + e^{\beta(\epsilon - \mu)})$. A expressão (3.18) é um resultado geral valendo para casos não-relativísticos utilizando um $D(\epsilon)$ correspondente.

3.1.2 Gás ideal completamente degenerado

Costuma-se dizer que um gás quântico no estado fundamental, com a temperatura nula, está completamente degenerado. No caso

de férmions à temperatura nula ($\beta \rightarrow \infty$), o número de ocupação mais provável dos níveis de energia é dado por uma função degrau da energia:

$$f(\epsilon) \equiv \Theta(\epsilon - \mu(T=0)) = \begin{cases} 1, & \text{se } \epsilon < \mu(T=0) \\ 0, & \text{se } \epsilon > \mu(T=0) \end{cases}. \quad (3.19)$$

O potencial químico à temperatura nula $\mu(T=0)$ é definido como a *energia de Fermi* ϵ_F . Vamos calcular a energia de Fermi para um gás com N partículas relativísticas ocupando um volume V , através da expressão (3.18) no limite $\beta \rightarrow \infty$, resultando em:

$$N = \gamma \cdot V \int_m^{\epsilon_F} D(\epsilon) d\epsilon. \quad (3.20)$$

Considerando a densidade de estados na (3.16) para resolver a integral em (3.20), encontramos que:

$$\epsilon_F = \sqrt{k_F^2 + m^2}, \quad (3.21)$$

onde $k_F \equiv \left(\frac{6\pi^2\rho}{\gamma}\right)^{1/3}$ é definido como *momento de Fermi* e $\rho \equiv \frac{N}{V}$ é a densidade do número de partículas.

4 CÁLCULO DO LIVRE CAMINHO MÉDIO DO NEUTRINO

4.1 DESCRIÇÃO DO MODELO

Este trabalho tem como um dos objetivos calcular o livre caminho médio de neutrinos para uma matéria contendo prótons, nêutrons e elétrons utilizando o modelo de gás livre de Fermi, impondo as condições de neutralidade de carga e de equilíbrio químico. Consideramos os cálculos em situações termodinâmicas tipicamente encontradas durante a evolução de uma estrela de nêutrons, como as densidades, temperaturas e a composição de partículas, em especial na fase de resfriamento caracterizado por $Y_{\nu_e} \approx 0$, na fase imediatamente após a desleptização.

Em primeiro lugar, consideramos as reações que contribuem significativamente para as seções de choque do neutrino sob as condições supracitadas. Essas reações são (BURROWS, 1990):

$$\nu_i + n \rightarrow \nu_i + n \quad (4.1)$$

$$\nu_i + p \rightarrow \nu_i + p \quad (4.2)$$

$$\nu_i + e^- \rightarrow \nu_i + e^- \quad (4.3)$$

$$\nu_e + n \rightarrow p + e^-. \quad (4.4)$$

Os processos (4.1) e (4.2) envolvem espalhamento elástico via corrente neutra de neutrinos de sabor (i) por nêutrons e prótons, respectivamente. O processo (4.3) contém contribuições de corrente carregada e corrente neutra para ν_e , e somente corrente neutra no caso de neutrinos de outros sabores. A reação (4.4) é a inversa da captura eletrônica e tem somente contribuição de corrente carregada.

Consideramos aqui processos envolvendo apenas neutrinos eletrônicos. Os cálculos são feitos no limite relativístico, desprezando os efeitos da gravidade e da interação forte. A interação eletromagnética tem como único efeito neutralizar a carga elétrica do sistema.

Nosso modelo descreve um gás de prótons, nêutrons e elétrons não interagentes em determinadas proporções para uma dada densidade bariônica e tal que o gás tem a sua menor energia possível, restrito à neutralidade de carga (GLENDENNING, 2000). Essas condições são dadas nas equações abaixo:

$$\rho_B = \rho_n + \rho_p. \quad (4.5)$$

$$\rho_p = \rho_e. \quad (4.6)$$

Esta situação conhecida como equilíbrio beta é definida pela relação abaixo entre os potenciais químicos:

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e, \quad (4.7)$$

onde $\mu_\nu = 0$ se refere à fase de resfriamento da estrela de nêutrons.

Podemos escrever as densidades em (4.5) e (4.7) em termos dos potenciais químicos com o auxílio da equação (3.18), de modo a obter um sistema de duas equações com duas variáveis. Assim, para o caso com temperaturas não nulas, temos:

$$\begin{cases} \rho_B = \rho_n + \rho_p \\ \rho_p = \rho_e \end{cases}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned} \rho_B \pi^2 &= \int_{4.7548}^{\infty} \frac{\epsilon \sqrt{\epsilon^2 - 4.7548^2}}{1 + e^{\beta(\epsilon - \mu_p)}} d\epsilon + \int_{4.7614}^{\infty} \frac{\epsilon \sqrt{\epsilon^2 - 4.7614^2}}{1 + e^{\beta(\epsilon - \mu_n)}} d\epsilon \\ &= \int_{4.7548}^{\infty} \frac{\epsilon \sqrt{\epsilon^2 - 4.7548^2}}{1 + e^{\beta(\epsilon - \mu_p)}} d\epsilon = \int_{0.0026}^{\infty} \frac{\epsilon \sqrt{\epsilon^2 - 0.0026^2}}{1 + e^{\beta(\epsilon - \mu_e)}} d\epsilon, \end{aligned} \quad (4.8)$$

com $\mu_n = \mu_p + \mu_e$. As massas do nêutron, próton e elétron estão dadas em fm^{-1} e a constante de Boltzman foi tomada como $k_B = 1$. Para resolver este sistema experimentamos um valor para μ_e ; então, calculamos μ_p . Verificamos se μ_e e μ_p satisfazem o sistema. Conhecendo-se os potenciais químicos podemos encontrar as densidades ρ_n, ρ_p, ρ_e para uma determinada temperatura utilizando a equação (3.13).

Para o caso completamente degenerado ($T \rightarrow 0$), os potenciais químicos são definidos como energias de Fermi, como vimos na subseção (3.1.2). Neste caso, para cada densidade bariônica ρ_B resolvemos a equação (3.21) para ρ_p :

$$\sqrt{[3\pi^2(\rho_B - \rho_p)]^{2/3} + m_n^2} = \sqrt{(3\pi^2\rho_p)^{2/3} + m_p^2} + \sqrt{(3\pi^2\rho_p)^{2/3} + m_e^2}, \quad (4.9)$$

onde já consideramos a neutralidade de carga. Nestas condições, descrevemos a interação dos neutrinos em uma matéria neutra e em equilíbrio beta.

O comportamento da seção de choque de neutrinos na matéria formada por prótons, nêutrons e elétrons não deve no entanto se restringir ao caso de uma distribuição homogênea e não interagente. Em muitas aplicações devemos levar em conta tais efeitos para uma descrição realista do sistema. Vamos aqui simular tais condições supondo um distribuição não homogênea para as distribuições de prótons e de nêutrons, usando um modelo fenomenológico e que é corroborado por cálculos microscópicos tanto para o núcleo atômico como para estruturas em certas regiões de estrelas de nêutrons (AVANCINI et al., 2008), (WATANABE; MARUYAMA, 2012) e (SHEN; TOKI; SUMIYOSHI, 1998). Neste procedimento, a matéria se comporta como uma estrutura periódica e equações são resolvidas em uma célula unitária, conhecida como célula de Wigner-Seitz. Inspirado neste procedimento, calculamos o livre caminho médio dos neutrinos no interior de células de Wigner-Seitz com geometria esférica de volume V_{WZ} e raio $R_{WZ} = r_0 \cdot A^{1/3}$, onde o número bariônico A é constante. A densidade bariônica ρ_B , a densidade de prótons ρ_p e de nêutrons variam com a posição. A densidade de elétrons ρ_e é constante dentro da célula. Esses perfis de densidade são dados por (AVANCINI, 2013):

$$\rho_B(r) = \frac{\rho_c}{1 + e\left(\frac{r - R_{WZ}}{a}\right)}; \begin{cases} \rho_p(r) = Y_p \cdot \rho_B(r) \\ \rho_n(r) = (1 - Y_p) \cdot \rho_B(r) \\ \rho_e(r) = \frac{Z}{\frac{4}{3}\pi R_{WZ}^3} \end{cases}, \quad (4.10)$$

onde $Z = \int_0^\infty \rho_p(r) dV = Y_p \cdot A$ é o número de prótons dentro da célula. A fração de prótons Y_p é um parâmetro de entrada. A célula tem carga global neutra.

4.2 DIAGRAMAS DE FEYNMAN E AS AMPLITUDES \mathcal{M}

Passamos agora ao cálculo da seção de choque das reações (4.1) - (4.4). Vamos considerar os diagramas de Feynman de ordem mais baixa para as reações.

O espalhamento elástico de neutrino por um nêutron ou próton é dado na figura (12), abaixo:

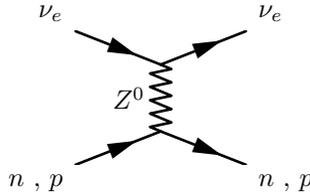


Figura 12 – Diagrama do espalhamento elástico via corrente neutra de neutrino por próton ou nêutron.

Para a reação de absorção $\nu_e + n \rightarrow e^- + p$, temos o diagrama da figura (13), abaixo:

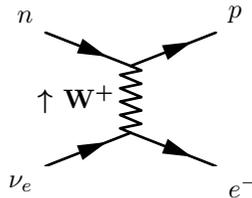


Figura 13 – Diagrama para a reação de absorção $\nu_e + n \rightarrow e^- + p$.

O espalhamento elástico de neutrino (do elétron) por um elétron tem duas contribuições. Seus diagramas são dados nas figuras (14) e (15), abaixo:

As correntes fracas carregadas leptônicas e bariônicas desses diagramas são, respectivamente:

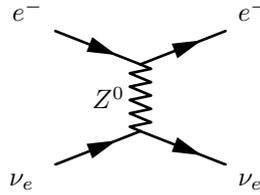


Figura 14 – Diagrama do espalhamento elástico de neutrino por elétron via corrente neutra.

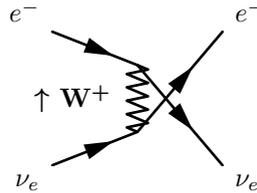


Figura 15 – Diagrama para o espalhamento elástico de neutrino por elétron via corrente carregada.

$$J_{\mu}^{+l} = \bar{\psi}_e(4) \gamma_{\mu} \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \psi_{\nu_e}(2) ; J_{\mu}^{-l} = \bar{\psi}_{\nu_e}(4) \gamma_{\mu} \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \psi_e(1) \quad (4.11)$$

$$J_{\mu}^{-B} = \bar{\psi}_p(3) \gamma_{\mu} \left(\frac{g_V - g_A \gamma^5}{2} \right) \cos \theta_c \psi_n(1) , \quad (4.12)$$

onde $\psi_i(j)$ é o espinor da partícula i no estado j com $j = 1, 2$ para estado inicial e $j = 3, 4$ para estado final de momento e spin. As constantes g_V e g_A são fatores de correção ao acoplamento vetorial e axial devido à conservação de corrente vetorial (CVC) e à conservação parcial da corrente axial (PCAC) (GRIFFITHS, 2009). O fator de Cabibbo $\cos \theta_c$ surge devido à mudança de sabor entre quarks, conforme vimos na seção (2.2.1).

As correntes fracas neutras leptônicas e bariônicas são, respectivamente:

$$J_{\mu}^{NC_l} = \bar{\psi}_l(3) \gamma_{\mu} \left(\frac{c_V^l - c_A^l \gamma^5}{2} \right) \psi_l(1) \quad (4.13)$$

$$J_\mu^{NC}{}_i = \overline{\psi}_i(4) \gamma_\mu \left(\frac{c_V^i - c_A^i \gamma^5}{2} \right) \psi_i(2), \quad (4.14)$$

onde o índice $i = p, n$ para bárions e $l = \nu_e, e^-$ para léptons.

Agora, seguindo os passos das expressões (2.13) a (2.16) aplicadas à interação fraca no limite de baixas energias ($q^2 \ll M^2$) obtemos \mathcal{M} . Começamos com o espalhamento neutrino - bárion via corrente neutra do diagrama da figura (12):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\nu_e B}^{NC} &= \frac{g_z^2}{M_z^2} J_\mu^{NC}{}_{\nu_e} J^\mu{}^B{}^{NC} = \\ &= \frac{g_z^2}{8M_z^2} [\overline{\psi}_{\nu_e}(3) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e}(1)] [\overline{\psi}_B(4) \gamma^\mu (c_V^B - c_A^B \gamma^5) \psi_B(2)], \end{aligned} \quad (4.15)$$

com $c_V^{\nu_e} = c_A^{\nu_e} = \frac{1}{2}$ (ver tabela (7)) e $B =$ próton ou nêutron.

Para o espalhamento neutrino - elétron temos duas contribuições - corrente neutra ($\mathcal{M}_{\nu_e e^-}^{NC}$) e corrente carregada ($\mathcal{M}_{\nu_e e^-}^{CC}$) - das figuras (14) e (15), respectivamente, dadas por:

$$\mathcal{M}_{\nu_e e^-}^{NC} = \frac{g_z^2}{8M_z^2} [\overline{\psi}_{\nu_e}(4) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e}(2)] [\overline{\psi}_e(3) \gamma^\mu (c_V^e - c_A^e \gamma^5) \psi_e(1)] \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\nu_e e^-}^{CC} &= -\frac{g_w^2}{2M_w^2} J_\mu^+{}_l J^\mu{}^-{}_l = \\ &= -\frac{g_w^2}{8M_w^2} [\overline{\psi}_e(3) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e}(2)] [\overline{\psi}_{\nu_e}(4) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_e(1)], \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde o sinal (-) da (4.17) surge devido à permutação dos léptons após a interação representada no diagrama da figura (14). De acordo com o teorema de Fierz podemos reordenar os espinores ψ_e e ψ_{ν_e} da expressão (4.17), ganhando um sinal de menos (HALZEN; MARTIN, 1984). Além disso, utilizando $g_z = \frac{g_w}{\cos \theta_w}$, $M_W = M_Z \cos \theta_w$ e a constante de Fermi na (2.43) verificamos que:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} \approx \frac{g_w^2}{8M_W^2} = \frac{g_z^2}{8M_Z^2}. \quad (4.18)$$

Assim, as duas contribuições do espalhamento neutrino - elétron são somadas tendo um fator comum $G_F/\sqrt{2}$, de modo que:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\nu_e e^-} &= \mathcal{M}_{\nu_e e^-}^{NC} + \mathcal{M}_{\nu_e e^-}^{CC} = \\ &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[\overline{\psi}_{\nu_e}(4) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e}(2) \right] \left[\overline{\psi}_e(3) \gamma^\mu ((c_V^e + 1) - (c_A^e + 1)\gamma^5) \psi_e(1) \right]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

A amplitude da absorção neutrino - nêutron do diagrama da figura (13) é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\nu_e n}^{CC} &= \frac{g_w^2}{2M_w^2} J_\mu^+ J_B^{\mu-} = \\ &= \frac{g_w^2}{8M_w^2} \left[\overline{\psi}_e(4) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e}(2) \right] \left[\overline{\psi}_p(3) \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma^5) \cos \theta_c \psi_n(1) \right]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

O próximo passo é encontrar o quadrado das amplitudes e suas médias $\overline{\mathcal{M}^2}$, conforme vimos na (2.34). Começando pela amplitude de espalhamento neutrino - bárion em (4.15), temos (veja os detalhes no Apêndice A):

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}^2}_{\nu_e B} &= \frac{1}{2} \left(\frac{g_z}{M_Z} \right)^4 \left\{ (c_V + c_A)^2 [(p_1 \cdot p_2) (p_3 \cdot p_4)] + \right. \\ &\quad \left. + (c_V - c_A)^2 [(p_1 \cdot p_4) (p_2 \cdot p_3)] - m_B^2 (c_V^2 - c_A^2) (p_1 \cdot p_3) \right\}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde p_1 e p_3 se referem, respectivamente, aos momentos inicial e final do neutrino; p_2 e p_4 se referem, respectivamente, aos momentos inicial e final do nêutron ou próton, cujas massas são dadas por m_B e seus coeficientes de acoplamento c_V e c_A .

O quadrado da amplitude do espalhamento neutrino - elétron (4.19) é dada por:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}^2}_{\nu_e e^-} &= \frac{1}{2} \left(\frac{g_z}{M_Z} \right)^4 \left\{ (c_V + c_A + 2)^2 [(p_1 \cdot p_2) (p_3 \cdot p_4)] + \right. \\ &\quad \left. + (c_V - c_A)^2 [(p_1 \cdot p_4) (p_2 \cdot p_3)] - \right. \\ &\quad \left. - m_e^2 ((c_V + 1)^2 - (c_A + 1)^2) (p_1 \cdot p_3) \right\}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde p_1, p_3 e p_2, p_4 se referem aos momentos do neutrino e do elétron, respectivamente; a massa m_e e os coeficientes de acoplamento c_V e c_A são referentes ao elétron.

Para o quadrado da amplitude de absorção neutrino - nêutron na (4.20), temos:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}^2_{abs} = & \frac{1}{2} \left(\frac{g_w}{M_W} \right)^4 \left\{ (C \cdot g_V + C \cdot g_A)^2 [(p_1 \cdot p_2) (p_3 \cdot p_4)] + \right. \\ & + (C \cdot g_V - C \cdot g_A)^2 [(p_1 \cdot p_4) (p_2 \cdot p_3)] - \\ & \left. - m_n m_p ((C \cdot g_V)^2 - (C \cdot g_A)^2) (p_1 \cdot p_3) \right\}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

com os momentos p_1, p_3, p_2 e p_4 referentes ao neutrino, elétron, nêutron e próton, respectivamente, e $C = \cos \theta_c$ é o fator de Cabibbo .

4.3 SEÇÕES DE CHOQUE

Uma vez que temos $\overline{\mathcal{M}}^2$, podemos utilizar a expressão (2.29) para calcular as seções de choque do neutrino em um gás de Fermi composto de prótons, nêutrons e elétrons sujeito às condições descritas no início deste capítulo.

Para fazer os cálculos, vamos definir as variáveis cinemáticas. Os quadrimomentos são dados por $p_i = (E_i, \vec{k}_i)$, onde $E_i = \sqrt{k_i^2 + m_i^2}$ são as energias das partículas com $i = 1, 2, 3, 4$. As velocidades são definidas como a razão entre o vetor momento \vec{k}_i e a energia, dadas por $\vec{v}_i = \frac{\vec{k}_i}{E_i}$. No referencial do laboratório definimos $\vec{k}_1 = k_1 \hat{k}$ na direção Z .

Ao levarmos em conta que a partícula $i = 2$ (prótons, nêutrons ou elétrons) tem energias variáveis dentro de um gás, precisamos multiplicar a expressão (2.29) por:

$$V \cdot \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3}. \quad (4.24)$$

Ainda, considerando um gás com temperatura T devemos multiplicar pela distribuição de Fermi-Dirac para cada partícula da seguinte forma:

$$f_2(E_2, T) \times (1 - f_3(E_3, T)) \times (1 - f_4(E_4, T)), \quad (4.25)$$

com o Princípio de Exclusão de Pauli sendo levado em conta¹. Temos que $f_i = [1 + \exp((E_i - \mu_i)/T)]^{-1}$

Assim, a seção de choque diferencial de um neutrino incidente com energia E_1 em um gás à temperatura T é dada pela seguinte expressão:

$$d\sigma = V \cdot \frac{1}{16(2\pi)^5} d^3k_2 d^3k_3 d^4k_4 \cdot \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) f_2(E_2, T) \times \\ \times (1 - f_3(E_3, T))(1 - f_4(E_4, T)) \overline{\mathcal{M}}^2 \frac{1}{E_1 E_2 E_3 E_4} \frac{1}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}. \quad (4.26)$$

Inicialmente, integramos em $d\vec{k}_4$, onde $\vec{k}_4 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3$ na função $\delta^3(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4)$ garante um valor não nulo. Agora, $E_4 = \sqrt{k_4^2 + m_4^2}$, $f_4 = [1 + \exp((E_4 - \mu_4)/T)]^{-1}$, com:

$$k_4^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + 2(k_1 k_2 \cos \theta_2 - k_1 k_3 \cos \theta_3 - k_2 k_3 \cos \theta_{23}) \quad (4.27)$$

e

$$\cos \theta_{ij} = \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \text{sen } \theta_2 \text{sen } \theta_3 \cos(\phi_2 - \phi_3). \quad (4.28)$$

Os termos com o índice (4) nas expressões de $\overline{\mathcal{M}}^2$ também foram levados em conta na integração de modo que aparecem explicitamente nas próximas integrações, porém como funções de k_1 , k_2 e k_3

O próximo passo é integrar em $d^3k_3 = k_3^2 dk_3 \text{sen } \theta_3 d\theta_3 d\phi_3$. Vamos reescrever a integral da seguinte forma:

$$\frac{\sigma}{V} = \int \mathcal{F}_3(k_3) \cdot \delta(\mathcal{G}_3(k_3)) dk_3 \quad (4.29)$$

Para resolvê-la utilizamos as propriedades da função delta de Dirac (GRIFFITHS, 2009). Assim, temos:

$$\frac{\sigma}{V} = \int \mathcal{F}_3(k_3) \cdot \delta(\mathcal{G}_3(k_3)) dk_3 = \sum_i \frac{\mathcal{F}_3(k'_3)}{|\mathcal{G}'_3(k'_3)|}, \quad (4.30)$$

¹Na verdade, como estamos considerando um gás constituído apenas de prótons, nêutrons e elétrons, não precisamos considerar o termo $(1 - f_3(E_3, T))$ para os espalhamentos elásticos.

onde a soma é feita sobre as k'_3 (fisicamente aceitáveis) raízes da equação $\mathcal{G}_3(k_3) = E_1 + E_2 - E_3 - E_4 = 0$ que, no caso de um espalhamento elástico com $m_1 = m_3 = 0$ (neutrino) e $m_2 = m_4$ (próton, elétron ou nêutron), são dadas por:

$$k'_3 = \frac{E_2 k_1 - E_1 k_2 \cos \theta_2}{E_2 + E_1 (1 - \cos \theta_3) - k_2 \cos \theta_{23}}, \quad (4.31)$$

e para o caso da absorção ($m_1 \neq m_3$ e $m_2 \neq m_4$), temos:

$$k'_3 = \frac{1}{2(B^2 - A^2)} \left[B(D - A^2 - m_3^2) - A \left((A^2 - D)^2 + m_3^2 (4B^2 - 2(A^2 + D) + m_3^2) \right)^{(1/2)} \right], \quad (4.32)$$

com

$$B = k_1 \cos \theta_3 + k_2 \cos \theta_{23}$$

$$D = k_1^2 + k_2^2 + 2k_1 k_2 \cos \theta_2 + m_4^2$$

$$A = k_1 + E_2$$

A função $\mathcal{G}'_3(k_3) \equiv \frac{d\mathcal{G}_3(k_3)}{dk_3}$, de modo que, para os espalhamentos elásticos temos:

$$\mathcal{G}'_3(k_3) = - \left[1 + \frac{k_3 - k_1 \cos \theta_3 - k_2 \cos \theta_{23}}{k_1 + E_2 - k_3} \right], \quad (4.33)$$

e para a absorção, temos:

$$\mathcal{G}'_3(k_3) = - \left[\frac{k_3}{\sqrt{k_3^2 + m_3^2}} + \frac{k_3 - k_1 \cos \theta_3 - k_2 \cos \theta_{23}}{k_1 + E_2 - \sqrt{k_3^2 + m_3^2}} \right]. \quad (4.34)$$

A função $\mathcal{F}_3(k'_3)$ é definida como:

$$\mathcal{F}_3(k'_3) = \frac{1}{16 \cdot (2\pi)^5} \int_0^\infty dk_2 \int_0^\pi \sin \theta_2 d\theta_2 \int_0^{2\pi} d\phi_2 \int_0^\pi \sin \theta_3 d\theta_3 \int_0^{2\pi} d\phi_3 \times$$

$$\times \overline{\mathcal{M}^2} f_2(1-f_3)(1-f_4) \frac{k_2^2 k_3'^2}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| E_1 E_2 E_3 E_4}. \quad (4.35)$$

Agora, conhecendo-se $\overline{\mathcal{M}^2}$, a integral quántupla na (4.35) juntamente com a expressão (4.30) são resolvidas com um método computacional que seleciona valores randômicos baseado no algoritmo de Monte Carlo. Escrevemos abaixo as expressões a serem implementadas. Começamos com o espalhamento neutrino-bárion:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{V_{\nu_e B}} &= \frac{1}{32 \cdot (2\pi)^5} \int_0^\infty dk_2 \int_0^\pi \text{sen } \theta_2 d\theta_2 \int_0^{2\pi} d\phi_2 \int_0^\pi \text{sen } \theta_3 d\theta_3 \int_0^{2\pi} d\phi_3 \times \\ &\times \left(\frac{g_z}{M_Z} \right)^4 \left\{ (c_V + c_A)^2 (1 - v_1 v_2 \cos \theta_2) \times \right. \\ &\times (E_4 - v_3 k_1 \cos \theta_3 - v_3 k_2 \cos \theta_{23} + v_3 k_3) + (c_V - c_A)^2 \times \\ &\times (E_4 - v_1 k_1 - v_1 k_2 \cos \theta_2 + v_1 k_3 \cos \theta_3) (1 - v_2 v_3 \cos \theta_{23}) - \\ &\left. - \left(\frac{m_B^2}{E_2} \right) (c_V^2 - c_A^2) (1 - v_1 v_3 \cos \theta_3) \right\} f_2(1-f_4) \times \\ &\times \frac{k_2^2 k_3'^2}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| E_4} \frac{1}{|\mathcal{G}'_3(k'_3)|} \end{aligned} \quad (4.36)$$

onde $E_4 = \sqrt{k_4^2 + m_4^2}$ com k_4 escrito como função de k_1 , k_2 e k_3 , conforme aparece na (4.27). Para o espalhamento neutrino-próton $c_V = 1/2 - 2\text{sen}^2 \theta_w$ e $c_A = 1.23/2$, enquanto que para espalhamento neutrino-nêutron $c_V = -1/2$ e $c_A = -1.23/2$, onde $\text{sen}^2 \theta_w = 0.23$ (REDDY; PRAKASH; LATTIMER, 1998b).

A seção de choque para o espalhamento neutrino-elétron é dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma}{V_{\nu_e e^-}} &= \frac{1}{32 \cdot (2\pi)^5} \int_0^\infty dk_2 \int_0^\pi \text{sen } \theta_2 d\theta_2 \int_0^{2\pi} d\phi_2 \int_0^\pi \text{sen } \theta_3 d\theta_3 \int_0^{2\pi} d\phi_3 \times \\
&\times \left(\frac{g_z}{M_Z} \right)^4 \left\{ (c_V + c_A + 2)^2 (1 - v_1 v_2 \cos \theta_2) \times \right. \\
&\times (E_4 - v_3 k_1 \cos \theta_3 - v_3 k_2 \cos \theta_{23} + v_3 k_3) + (c_V - c_A)^2 \times \\
&\times (E_4 - v_1 k_1 - v_1 k_2 \cos \theta_2 + v_1 k_3 \cos \theta_3) (1 - v_2 v_3 \cos \theta_{23}) - \\
&\left. - \left(\frac{m_e^2}{E_2} \right) ((c_V + 1)^2 - (c_A + 1)^2) (1 - v_1 v_3 \cos \theta_3) \right\} \times \\
&\times f_2(1 - f_4) \frac{k_2^2 k_3'^2}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| E_4 |\mathcal{G}'_3(k'_3)|}, \tag{4.37}
\end{aligned}$$

onde temos $c_V = -1/2 + 2\text{sen}^2 \theta_w$ e $c_A = -1/2$ para o espalhamento neutrino-elétron (ver Tabela (7)).

Para o processo de absorção neutrino - nêutron, a seção de choque é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma}{V_{abs}} &= \frac{1}{32 \cdot (2\pi)^5} \int_0^\infty dk_2 \int_0^\pi \text{sen } \theta_2 d\theta_2 \int_0^{2\pi} d\phi_2 \int_0^\pi \text{sen } \theta_3 d\theta_3 \int_0^{2\pi} d\phi_3 \times \\
&\times \left(\frac{g_w}{M_W} \right)^4 \left\{ (C.g_V + C.g_A)^2 (1 - v_1 v_2 \cos \theta_2) \times \right. \\
&\times (E_4 - v_3 k_1 \cos \theta_3 - v_3 k_2 \cos \theta_{23} + v_3 k_3) + (C.g_V - C.g_A)^2 \times \\
&\times (E_4 - v_1 k_1 - v_1 k_2 \cos \theta_2 + v_1 k_3 \cos \theta_3) (1 - v_2 v_3 \cos \theta_{23}) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{m_n m_p}{E_2} \right) \left((C.g_V)^2 - (C.g_A)^2 \right) (1 - v_1 v_3 \cos \theta_3) \} \times \\
& \times f_2(1 - f_3)(1 - f_4) \frac{k_2^2 k_3'^2}{|v_1 - v_2| E_4} \frac{1}{|\mathcal{G}'_3(k_3')|}, \quad (4.38)
\end{aligned}$$

com $g_V = 1/2$, $g_A = -1.23/2$ e o fator de Cabibbo $C = 0.973$.

Implementamos também o caso com $T = 0$ MeV (*gás completamente degenerado*), adaptando a função distribuição de Fermi-Dirac para uma função degrau similar à expressão (3.19), dada por:

$$f_i(E_i(k_i)) \equiv \Theta(k_i - k_{Fi}) = \begin{cases} 1, & \text{se } k_i < k_{Fi} \\ 0, & \text{se } k_i > k_{Fi} \end{cases}, \quad (4.39)$$

onde $k_{Fi} = \left(\frac{6\pi^2}{\gamma_i} \right)^{(1/3)} \rho_i^{(1/3)}$ é o momento de Fermi para uma densidade ρ_i de partículas. A função $\Theta(k_i - k_{Fi})$ impõe restrições nos limites das integrais de modo que, para obter resultados não nulos, precisamos tomar $|k_4| > k_{F4}$, $|k_3| > k_{F3}$ e $|k_2| < k_{F2}$.

Para o caso com $T = 0$ dentro da célula de Wigner-Seitz, as seções de choque são implementadas com a utilização das densidades dadas na expressão (4.10). Então, dado um número bariônico A obtemos a densidade no centro da célula (ρ_c) da seguinte forma:

$$A = \int \rho_B(r) dV = 4\pi\rho_c \int_0^\infty \frac{r^2 dr}{1 + e^{\left(\frac{r-R_{WZ}}{a}\right)}}, \quad (4.40)$$

onde r_0 e a são parâmetros devidamente escolhidos. A célula tem carga global neutra, de modo que:

$$\int_{V_{WZ}} \rho_p(r) dV = \int_{V_{WZ}} \rho_e(r) dV. \quad (4.41)$$

A densidade bariônica global dentro da célula é dada por:

$$\rho_{Bglobal} = \frac{A}{V_{WZ}} = \frac{1}{\frac{4\pi r_0^3}{3}} \quad (4.42)$$

Agora, podemos implementar um algoritmo para calcular a seção de choque média dentro da célula, a qual é dada pela seguinte expressão:

$$\left\langle \frac{\sigma}{V_i} \right\rangle = \frac{4\pi \int_0^{\infty} \frac{\sigma}{V_i}(r) r^2 dr}{\int_0^{\infty} \frac{4\pi r^3}{3} dr}, \quad (4.43)$$

onde o índice i se refere ao processo estudado. Lembrando que esta integral é calculada no caso em que $T = 0$ MeV.

5 RESULTADOS

Mostramos aqui resultados do livre caminho médio de neutrinos para uma matéria não interagente eletricamente neutra em equilíbrio químico para situações termodinâmicas tipicamente encontradas durante a evolução de uma estrela de nêutrons, como as densidades, temperaturas e composição de partículas e energias de neutrinos, em especial nos estágios finais da evolução caracterizado por $Y_{\nu_e} \approx 0$. Neste caso, onde temos que $\mu_{\nu_e} \approx 0$, ainda existem neutrinos dentro do sistema, porém, a quantidade de neutrinos é igual à quantidade de anti-neutrinos (FURTADO, 2012), (REDDY; PRAKASH; LATTIMER, 1998b). A fração de partículas não é fixa, mas varia com a temperatura e com a densidade bariônica. Tratamos de duas situações distintas. Na primeira, a matéria é homogênea de modo que as densidades bariônicas são dadas como parâmetros de entrada. Numa segunda situação, a distribuição de prótons e nêutrons é não-homogênea e os cálculos são realizados nas células de Wigner-Seitz à temperatura $T = 0$.

Nesta primeira situação, o sistema de equações na (4.8) é resolvido conforme já mencionado de modo a obtermos os potenciais químicos μ_e , μ_p e μ_n e, em seguida, as densidades ρ_e , ρ_p e ρ_n para cada valor de densidade bariônica a uma determinada temperatura. No caso completamente degenerado ($T = 0$) as densidades são obtidas pela expressão de equilíbrio beta (4.9). Com esses dados verificamos o comportamento das frações de prótons, nêutrons e elétrons em função da densidade bariônica nas temperaturas $T = 0$, $T = 5$ e $T = 30$ MeV na figura (16). As condições impostas de equilíbrio químico e neutralidade de carga favorecem um aumento na fração de prótons e elétrons em altas temperaturas. Apesar disso, notamos que esta fração assume valores pouco significativos no modelo de gás livre de Fermi. A fração de nêutrons é praticamente constante nos casos apresentados (LOPES, 2012),(REDDY; PRAKASH; LATTIMER, 1998b).

O livre caminho médio dos casos aqui estudados são simbolizados por: λ_n , λ_p devido ao espalhamento de neutrinos com nêutrons e prótons, respectivamente, via corrente neutra; λ_e^{NC} , λ_e^{NC+CC} devido ao espalhamento de neutrinos com elétrons via corrente neutra somente e levando-se em conta a corrente carregada, respectivamente; λ_S^{NC} devido a todos os espalhamentos via corrente neutra somente e λ_S^{NC+CC} devido a todos espalhamentos via corrente neutra mais a contribuição via corrente carregada do elétron; λ_{Abs} é devido à absorção de neutrinos com nêutrons e λ_T é devido a todos os espalhamentos e à absorção.

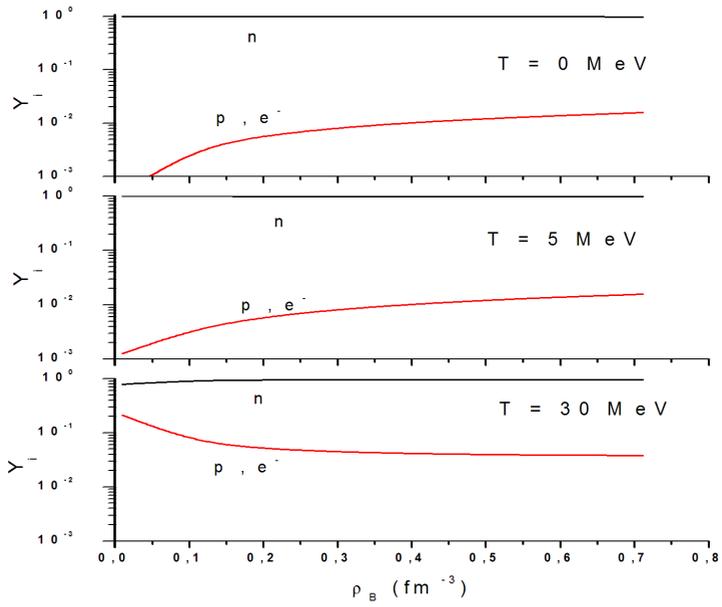


Figura 16 – Frações de partículas para $T = 0, 5$ e 30 MeV .

Para os neutrinos incidentes com energia $E_{\nu_e} = 200$ MeV (REDDY; PRAKASH, 1997) em um gás com distribuição homogênea, os valores do livre caminho médio são dados na figura (17) em função das densidades bariônicas na faixa entre $0.01 - 0.71 \text{ fm}^{-3}$ e nas temperaturas $T = 0, 5$ e 30 MeV. Podemos ver que os valores de λ decrescem com o aumento da densidade e da temperatura. Este decréscimo ocorre drasticamente para prótons e elétrons em baixas temperaturas e densidades uma vez que suas frações sofrem uma variação significativa nestas condições. Este comportamento não ocorre com os nêutrons pelo fato de sua fração ser praticamente constante, conforme vemos na figura (16). Percebemos nas curvas λ_n , λ_S^{NC+CC} e λ_S^{NC} que o espalhamento com nêutrons é dominante em relação aos prótons e elétrons já que suas frações são pequenas. Destacamos ainda que a seção de choque de espalhamento de neutrinos com elétrons via corrente carregada é cerca de quatro vezes maior em relação ao mesmo espalhamento via corrente neutra, conforme observado nas curvas λ_e^{NC} e λ_e^{NC+CC} . Apesar disso, ambas seções de choque são pequenas em relação ao nêutron de modo que λ_S^{NC+CC} e λ_S^{NC} são praticamente iguais. Destacamos ainda que para $E_{\nu_e} = 200$ MeV e em densidades não tão baixas ($> 0.01 \text{ fm}^{-3}$), a absorção é dominante.

Nas figuras (18), (19) e (20) mostramos a dependência do livre caminho médio dos neutrinos com sua energia incidente na faixa entre $10 - 210$ MeV para a distribuição de gás homogênea nas densidades bariônicas $0.01, 0.31$ e 0.61 fm^{-3} com as temperaturas $T = 0, 5$ e 30 MeV, respectivamente. Notamos que os valores de λ são sensíveis à variação da energia incidente dos neutrinos. Assim como ocorre para a matéria interagente (REDDY; PRAKASH, 1997), (FURTADO, 2012), a seção de choque aumenta rapidamente com esta energia para o modelo de gás livre de Fermi conforme esperado. Notamos explicitamente, no caso da absorção, uma queda repentina no livre caminho médio em um determinado intervalo de energia. Este comportamento ocorre abaixo de uma energia mínima, a qual aumenta quando a densidade bariônica aumenta conforme vemos nas densidades 0.31 e 0.61 fm^{-3} . Abaixo deste valor mínimo a absorção torna-se suprimida na medida em que a temperatura tende a zero (caso completamente degenerado) (REDDY; PRAKASH; LATTIMER, 1998b) e o espalhamento com nêutron torna-se dominante para as energias térmicas ($E_\nu \approx \pi T$), *na temperatura analisada*.

Analisamos separadamente o comportamento do livre caminho médio total em função da energia incidente do neutrino nas temperaturas $T = 1, 5$ e 30 MeV na figura (21). A contribuição majoritária à seção

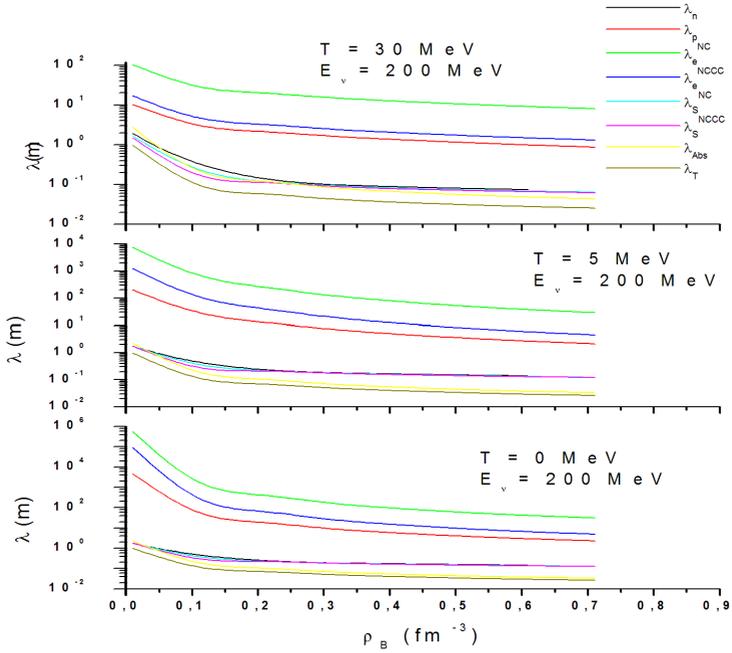


Figura 17 – λ dos neutrinos em função da densidade bariônica para matéria homogênea com energia incidente $E_\nu = 200 \text{ MeV}$ para $T = 0, 5$ e 30 MeV .

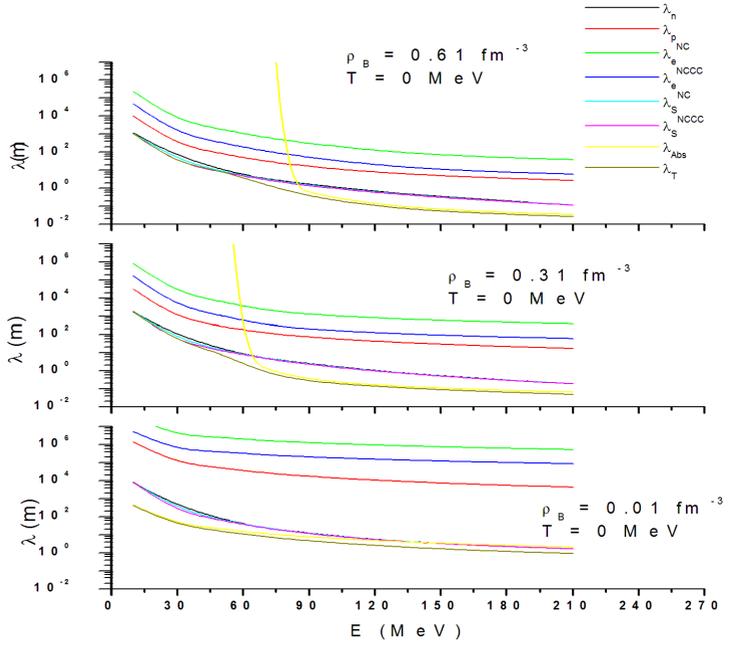


Figura 18 – λ dos neutrinos em função de sua energia incidente para matéria homogênea com $T = 0 \text{ MeV}$ nas densidades bariônicas 0.01 , 0.31 e 0.61 fm^{-3} .

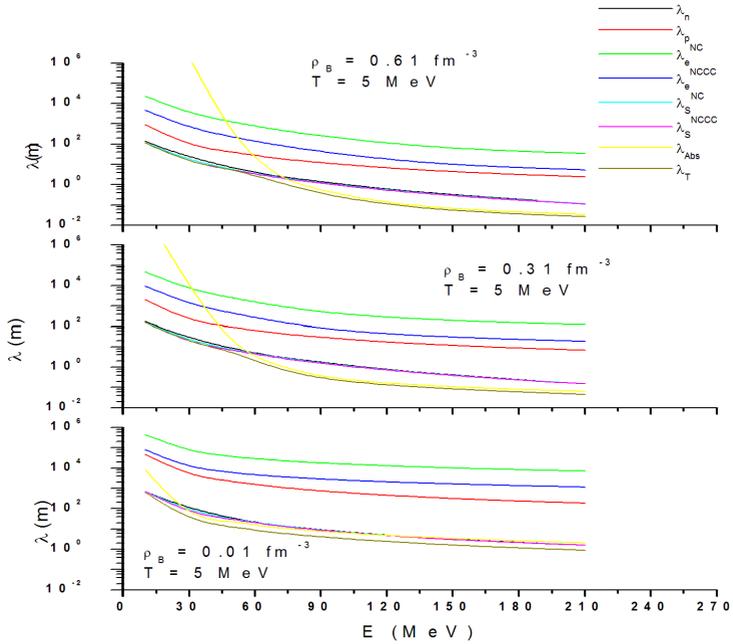


Figura 19 – λ dos neutrinos em função de sua energia incidente para matéria homogênea com $T = 5 \text{ MeV}$ nas densidades bariônicas 0.01, 0.31 e 0.61 fm^{-3} .

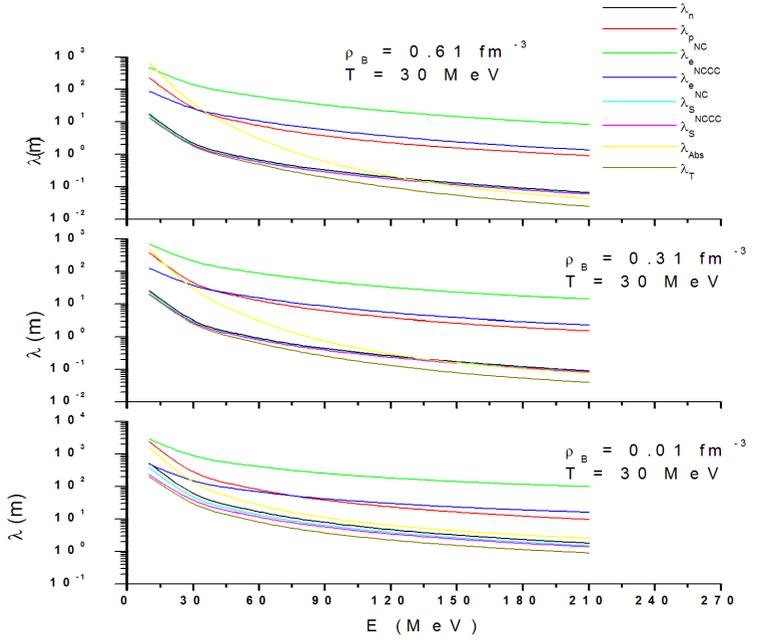


Figura 20 – λ dos neutrinos em função de sua energia incidente para matéria homogênea com $T = 30 \text{ MeV}$ nas densidades bariônicas 0.01 , 0.31 e 0.61 fm^{-3} .

de choque total é devido às interações do neutrino com o nêutron. Notamos que para altas temperaturas, o livre caminho médio diminui com o aumento da densidade bariônica para todas as energias do intervalo escolhido. No entanto, para baixas temperaturas este comportamento não é bem definido abaixo de uma determinada energia. Nas figuras (18), (19) e (20) vimos que a absorção domina para energias acima de $E_\nu \approx \pi T$, com a temperatura analisada, em densidades altas (0.31 e 0.61 fm^{-3}). Abaixo deste valor, ocorre a predominância do espalhamento neutrino-nêutron sobre a absorção. Assim, esta transição está diretamente relacionada com o cruzamento nas curvas da figura (21) para $T = 1$ e 5 MeV .

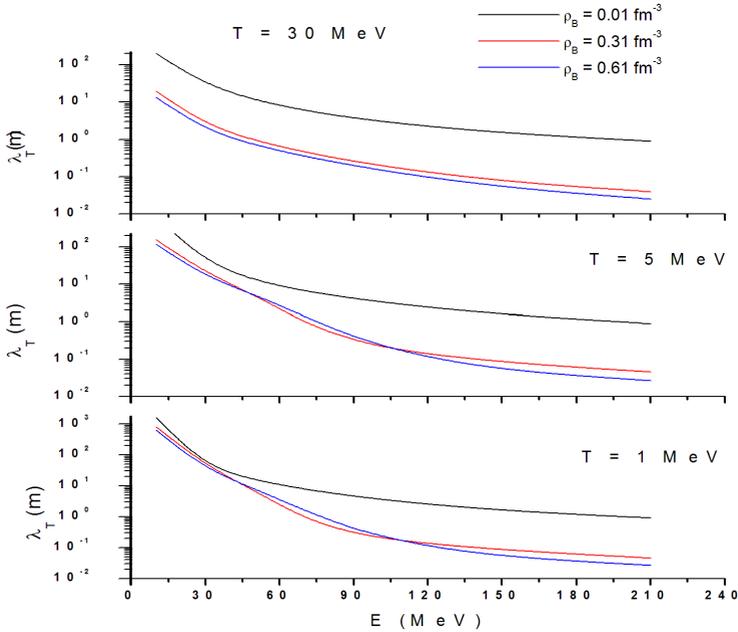


Figura 21 – λ_T versus E_ν para matéria homogênea com $T = 1, 5$ e 30 MeV nas densidades bariônicas $0.01, 0.31$ e 0.61 fm^{-3} .

Comparamos alguns valores do livre caminho médio em função da densidade bariônica para um gás homogêneo não-interagente com os valores para matéria interagente que utiliza a parametrização usada para descrever a interação forte entre nucleons conhecida como GM1

(FURTADO, 2012). A energia característica dos neutrinos térmicos incidentes é dada por $E_{\nu_e} = \pi T$ MeV. Apresentamos estas comparações nas figuras (22), (23), (24), (25), (26) e (27) nas temperaturas $T = 1, 5$ e 30 MeV. Na figura (22) para baixas temperaturas, o livre caminho médio de absorção é muito grande, já que esta reação é cinematicamente suprimida, e aumenta com a densidade conforme a temperatura tende a zero. Para o caso limite completamente degenerado, que não é plotado devido à escala, o livre caminho médio é infinito (REDDY; PRAKASH; LATTIMER, 1998b). A presença da interação entre os nucleons altera significativamente o comportamento do livre caminho médio para baixas temperaturas e altas densidades. Em altas temperaturas os efeitos térmicos são superiores aos efeitos da interação. Na figura (23) vemos que, embora os elétrons não interajam via força forte, seu potencial químico bem como sua fração são alterados de modo a satisfazerem um determinado sistema de equações similar à (4.8). Assim, o livre caminho médio assume valores diferentes nos casos comparados. Nas figuras (24) e (25) uma divergência entre os casos comparados nos valores de λ para nêutrons e prótons, respectivamente, é observada conforme aumenta a densidade bariônica. Este comportamento aparece devido à redução da massa efetiva dos nucleons para altas densidades no caso interagente (REDDY; PRAKASH; LATTIMER, 1998b). Na figura (26) comparamos o livre caminho médio devido ao espalhamento total via corrente neutra para os casos interagente e não-interagente. Notamos uma divergência similar à observada para os nucleons nas altas densidades bariônicas. De fato, a predominância do espalhamento total via corrente neutra é devido aos nêutrons. Por isso, notamos a similaridade entre os valores de λ_n e λ_S^{NC} nas figuras (24) e (26). Na figura (27) notamos como o livre caminho médio total é afetado pelo efeito de diferentes comportamentos que o espalhamento neutrino-nêutron e a absorção adquirem nos casos interagente e não-interagente. Para $T = 1$ MeV no caso interagente, o espalhamento domina em densidades menores e a absorção domina nas densidades maiores, ao passo que o espalhamento domina para todas as densidades no caso não-interagente. Percebemos isso na similaridade das ordens de grandeza entre λ_n e λ_T do caso interagente nas figuras (24) e (27) para $T = 1$ MeV. Além disso, percebemos também a transição entre a predominância da absorção e do espalhamento neutrino-nêutron para esta mesma temperatura nas figuras (22), (24) e (27) para o caso interagente. Para $T = 5$ e 30 MeV, a absorção domina no caso interagente e o espalhamento domina no caso não-interagente em todas as densidades. Por isso, notamos a similaridade entre λ_{Abs} e λ_T para o caso interagente e entre λ_n e λ_T para

o caso não-intergente nas figuras (22),(24) e (27).

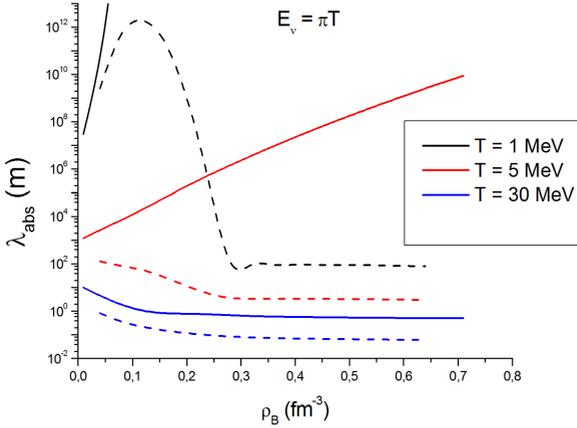


Figura 22 – λ_{Abs} versus ρ_B para matéria homogênea intergente (linha tracejada) e não-intergente (linha cheia) com $T = 1, 5$ e 30 MeV para neutrinos de energia $E_\nu = \pi T$.

Para o caso de distribuição não-homogênea para prótons e nêutrons, realizada para a célula de Wigner-Seitz, escolhemos os parâmetros $r_0 = 1.2 fm$, $a = 0.6 fm$ (CHUNG, 2001) e $A = 1000$ (SHEN; TOKI; SUMIYOSHI, 1998) na expressão (4.41) e encontramos $\rho_c = 0.135 fm^{-3}$ no centro da célula de raio $R_{WZ} = r_0 \cdot A^{1/3}$. A partir destes parâmetros utilizamos a expressão (4.43) para calcular a seção de choque média (daí, o livre caminho médio) na célula. Na figura (28) comparamos alguns valores de livre caminho médio em função da energia incidente dos neutrinos à temperatura $T = 0$ e densidade bariônica $0.138 fm^{-3}$ para os casos em que a estrutura do gás tem distribuição homogênea e não-homogênea. Notamos que os valores de livre caminho médio dos elétrons não se alteram para as estruturas comparadas, conforme esperado. Isso ocorre pois a distribuição de elétrons na célula é homogênea. Para prótons e nêutrons o livre caminho médio aumentou para o caso não-homogêneo. Este comportamento também era esperado pois, neste caso, a distribuição de prótons e nêutrons decresce em função da distância do centro da célula, diminuindo a seção de choque média dos neutrinos com estas partículas.

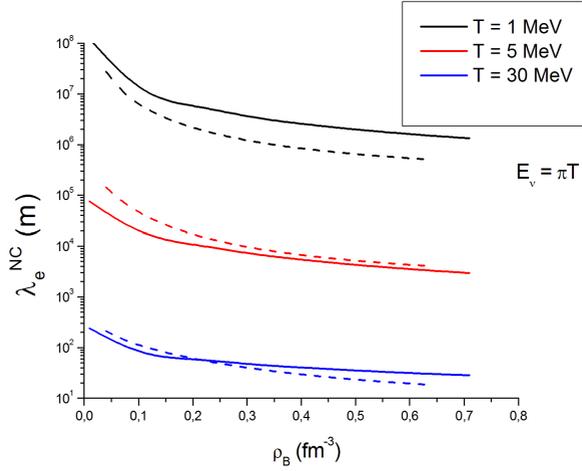


Figura 23 – λ_e^{NC} versus ρ_B para matéria homogênea interagente (linha tracejada) e não-interagente (linha cheia) com $T = 1, 5$ e 30 MeV para neutrinos de energia $E_\nu = \pi T$.

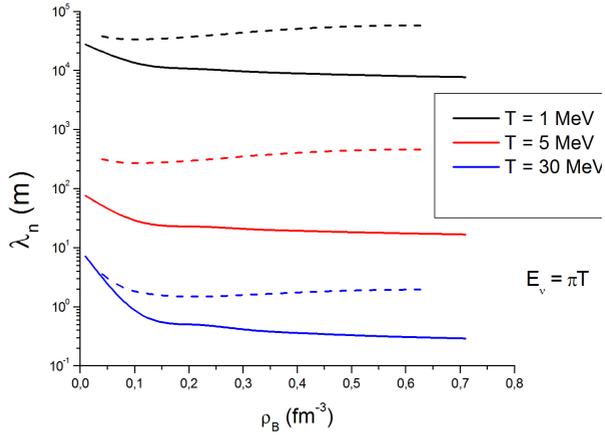


Figura 24 – λ_n versus ρ_B para matéria homogênea interagente (linha tracejada) e não-interagente (linha cheia) com $T = 1, 5$ e 30 MeV para neutrinos de energia $E_\nu = \pi T$.

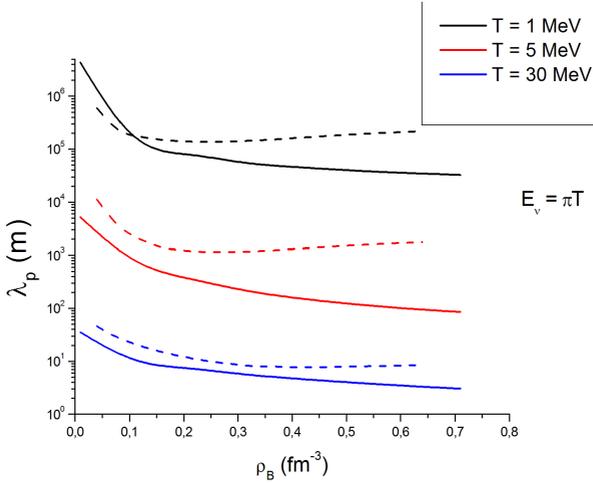


Figura 25 – λ_p versus ρ_B para matéria homogênea interagente (linha tracejada) e não-interagente (linha cheia) com $T = 1, 5$ e 30 MeV para neutrinos de energia $E_\nu = \pi T$.

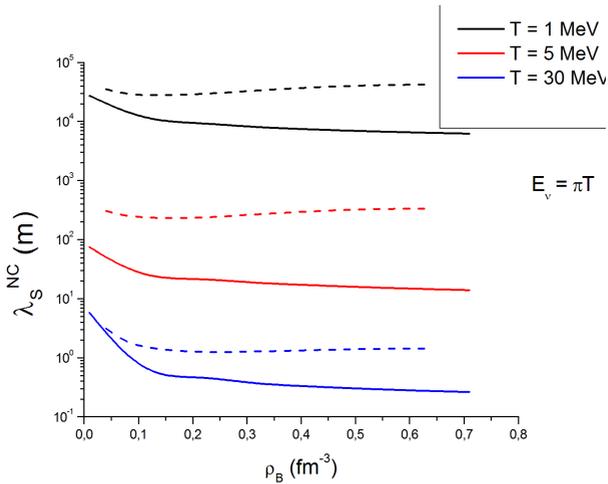


Figura 26 – λ_S^{NC} versus ρ_B para matéria homogênea interagente (linha tracejada) e não-interagente (linha cheia) com $T = 1, 5$ e 30 MeV para neutrinos de energia $E_\nu = \pi T$.

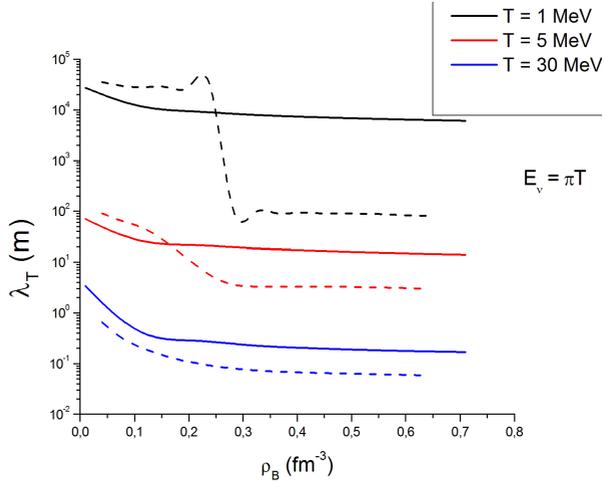


Figura 27 – λ_T versus ρ_B para matéria homogênea interagente (linha tracejada) e não-interagente (linha cheia) com $T = 1, 5$ e 30 MeV para neutrinos de energia $E_\nu = \pi T$.

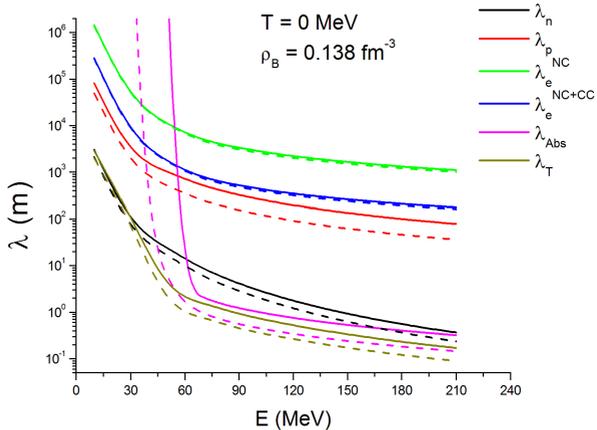


Figura 28 – Valores de λ versus E_ν para matéria homogênea (linha tracejada) e não-homogênea (linha cheia) com $T = 0$ MeV e $\rho_B = 0.138$ $f m^{-3}$.

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Apresentamos o cálculo do livre caminho médio dos neutrinos em um gás livre de Fermi relativístico composto de prótons, nêutrons e elétrons. Para obter os resultados, consideramos que os neutrinos interagem através da troca de bósons neutros e carregados da interação fraca impondo as condições de neutralidade de carga e de equilíbrio químico entre as partículas constituintes do gás. Os cálculos foram feitos sob determinadas condições termodinâmicas encontradas durante o processo de evolução das estrelas de nêutrons, em especial na fase de resfriamento, a partir da fase imediatamente após a desleptonização, na qual a energia inicial do neutrino incidente foi tomada como $E_{\nu_e} = 200$ MeV. Após atingir o equilíbrio térmico, a energia característica dos neutrinos foi tomada como $E_{\nu_e} = \pi T$ MeV. A partir deste caso tratamos de duas situações distintas caracterizadas pelas distribuições homogênea e não-homogênea do gás. Nesta última situação, os cálculos são efetuados na célula de Wigner-Seitz esférica de raio $R_{WZ} = r_0 A^{1/3}$ e volume V_{WZ} , onde r_0 é o raio médio do volume ocupado por cada nucleon dentro da célula e A é o número bariônico tomado fixo dentro da célula e à temperatura $T = 0$ MeV.

Para realizar os cálculos utilizamos as regras de Feynman nos processos envolvidos considerando os diagramas de ordem mais baixa. Desprezamos os efeitos da gravidade e da interação forte. A interação eletromagnética teve como único efeito neutralizar a carga elétrica do sistema. As seções de choque obtidas são resolvidas com um método computacional que seleciona valores randômicos baseado no algoritmo de Monte Carlo, bastante útil na soluções de integrais múltiplas.

Verificamos os efeitos da temperatura, da densidade bariônica e da energia incidente do neutrino no comportamento do livre caminho médio para uma distribuição homogênea. Este comportamento em função da energia incidente é comparado com a estrutura não-homogênea do gás para a temperatura $T = 0$ e densidade bariônica 0.138 fm^{-3} . Comparamos os valores do livre caminho médio em função da densidade bariônica da estrutura homogênea não-interagente aqui obtidos com os valores para matéria interagente que utiliza a parametrização GM1 para descrever as interações fortes entre nucleons (FURTADO, 2012). Reproduzimos o comportamento das frações de partículas obtidas em outros trabalhos (LOPES, 2012).

Neste modelo de gás livre de Fermi as frações de prótons e elétrons assumem valores pouco significativos de modo a fornecer uma

contribuição pouco significativa para a seção de choque total, em especial para temperaturas e densidades baixas. Este comportamento não é verificado para nêutrons por ter uma fração com valores significativos.

As similaridades entre as curvas λ_n , λ_S^{NC+CC} e λ_S^{NC} das figuras (17)-(20) mostram que quase toda a contribuição para a seção de choque total via corrente neutra vem do espalhamento neutrino-nêutron.

A energia incidente mínima para que o neutrino interaja com a matéria depende da densidade do gás. Notamos este comportamento explicitamente para a absorção nas figuras (18)-(20). A probabilidade desta interação aumenta rapidamente com esta energia incidente (REDDY; PRAKASH, 1997)

Na medida em que a matéria torna-se degenerada a absorção torna-se cinematicamente suprimida na faixa de energias térmicas ($E_\nu \approx \pi T$) (ver figura (22)) (REDDY; PRAKASH; LATTIMER, 1998b).

A presença da interação forte causa efeitos significativos nos valores de livre caminho médio em baixas temperaturas. Para altas temperaturas, este comportamento não é observado pois os efeitos térmicos são superiores à interação conforme mostram as figuras (22)-(26). Além disso, a presença dessa interação faz com que a absorção torne-se a reação dominante de modo a oferecer uma contribuição maior para a seção de choque total do que o espalhamento neutrino-nêutron. Já para caso não-interagente, este espalhamento domina na faixa de energias térmicas ($E_\nu \approx \pi T$) conforme vemos nas figuras (22), (24) e (27).

Na figura (28), a comparação entre os valores de livre caminho médio entre as distribuições homogênea e não-homogênea segue o comportamento esperado. Para o caso não-homogêneo, as distribuições de prótons e nêutrons decrescem a partir do centro da célula de modo que a seção de choque média é menor em relação à distribuição homogênea.

Levando-se em conta os resultados apresentados aqui verificamos a sensibilidade do livre caminho médio a variáveis termodinâmicas como a energia incidente do neutrino, a temperatura e a densidade. Tendo em vista que não consideramos matéria interagente, este trabalho não descreve as condições de um ambiente estelar. Nossa perspectiva é incluir as interações entre nucleons e coulombiana entre prótons e elétrons para uma distribuição de matéria não-homogênea em um modelo que seja mais realista que simule tais condições. A extensão do cálculo para matéria não-homogênea e interagente para densidades diferentes do valor aqui tratado e para temperaturas diferentes de zero, também deve ser um dos objetivos futuros a ser alcançado. Além disso, analisar o efeito da oscilação quântica de sabor no livre caminho médio dos neutrinos.

APÊNDICE A - Cálculo do quadrado da amplitude
invariante \mathcal{M}^2

Elevando ao quadrado as amplitudes invariantes das expressões (4.15),(4.16),(4.19) e (4.20), aplicando a média sobre as configurações de spins iniciais e somando sobre todas as configurações finais de spin conforme a expressão (2.34), chegamos a um resultado da forma:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}^2} &= \frac{1}{2} \frac{1}{64} \left(\frac{g_k}{M_k} \right)^4 \sum_{\text{spins}} [\overline{\psi_L}(\mathbf{3}) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e}(\mathbf{1})] \times \\ &\times [\overline{\psi_L}(\mathbf{3}) \gamma_\nu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e}(\mathbf{1})]^* [\overline{\psi_i}(\mathbf{4}) \gamma^\mu (\mathbf{V} - \mathcal{A}\gamma^5) \psi_j(\mathbf{2})] \times \\ &\times [\overline{\psi_i}(\mathbf{4}) \gamma^\nu (\mathbf{V} - \mathcal{A}\gamma^5) \psi_j(\mathbf{2})]^*, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

onde $\mathbf{k} = \mathbf{W}$ ou \mathbf{Z} , \mathbf{L} para os léptons (e) ou (ν_e), i, j para prótons (\mathbf{p}), nêutrons (\mathbf{n}) ou elétrons (\mathbf{e}), \mathbf{V} e \mathcal{A} para os coeficientes de acoplamento de acordo com as partículas envolvidas. Desenvolvendo a expressão (A.1) encontramos que:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}^2} &= \frac{1}{2} \frac{1}{64} \left(\frac{g_k}{M_k} \right)^4 \sum_{s_3} \left[\overline{\psi_L}(\mathbf{3}) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \left(\sum_{s_1} \psi_{\nu_e}(\mathbf{1}) \overline{\psi_{\nu_e}}(\mathbf{1}) \right) \times \right. \\ &\times \left. \gamma_\nu (1 - \gamma^5) \psi_L(\mathbf{3}) \right] \sum_{s_4} \left[\overline{\psi_i}(\mathbf{4}) \gamma^\mu (\mathbf{V} - \mathcal{A}\gamma^5) \left(\sum_{s_2} \psi_i(\mathbf{2}) \overline{\psi_i}(\mathbf{2}) \right) \times \right. \\ &\times \left. \gamma^\nu (\mathbf{V} - \mathcal{A}\gamma^5) \psi_i(\mathbf{4}) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Agora, utilizamos a relação de completeza dada por (GRIFFITHS, 2009):

$$\sum_{s=1,2} \psi_a^{(s)} \overline{\psi_a^{(s)}} = (\not{p}_a + m_a), \quad (\text{A.3})$$

onde $\mathbf{a} = \mathbf{p}, \mathbf{n}, \mathbf{e}$ ou ν_e . Aplicando esta relação temos que:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}^2} &= \frac{1}{2} \frac{1}{64} \left(\frac{g_k}{M_k} \right)^4 Tr \left[\gamma_\mu (1 - \gamma^5) \not{p}_1 \gamma_\nu (1 - \gamma^5) (\not{p}_{L_3} + m_3) \right] \times \\ &\times Tr \left[\gamma^\mu (\mathbf{V} - \mathcal{A}\gamma^5) (\not{p}_{j_2} + m_2) \gamma^\nu (\mathbf{V} - \mathcal{A}\gamma^5) (\not{p}_{i_4} + m_4) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

onde $m_3 = m_L$, $m_2 = m_j$ e $m_4 = m_i$, com i, j, L mencionados anteriormente. Aplicando as propriedades de traço de matrizes temos que (GRIFFITHS, 2009):

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}^2} = & \frac{1}{2} \frac{1}{64} \left(\frac{g_k}{M_k} \right)^4 8 [(p_1)_\mu (p_3)_\nu - g_{\mu\nu} (p_1 p_3) + (p_1)_\nu (p_3)_\mu - \\ & - i (p_1)^\kappa (p_3)^\tau \epsilon_{\mu\nu\kappa\tau}] [4 (\mathcal{V}^2 + \mathcal{A}^2) ((p_2)^\mu (p_4)^\nu - g^{\mu\nu} (p_2 p_4) + \\ & + (p_2)^\nu (p_4)^\mu) - i 8 \mathcal{V} \mathcal{A} (p_2)_\lambda (p_4)_\sigma \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} + 4 (\mathcal{V}^2 - \mathcal{A}^2) m_2 m_4 g^{\mu\nu}], \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

onde estamos suprimindo o uso dos índices i, j, L . Finalmente, encontramos que:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}^2} = & \frac{1}{2} \left(\frac{g_k}{M_k} \right)^4 \left\{ (\mathcal{V} + \mathcal{A})^2 [(p_1 \cdot p_2) (p_3 \cdot p_4)] + \right. \\ & \left. + (\mathcal{V} - \mathcal{A})^2 [(p_1 \cdot p_4) (p_2 \cdot p_3)] - m_2 m_4 (\mathcal{V}^2 - \mathcal{A}^2) (p_1 \cdot p_3) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

De acordo com o processo envolvido, $\overline{\mathcal{M}^2}$ assume uma forma particular conforme vimos nas expressões (4.2), (4.2) e (4.2).

REFERÊNCIAS

- AVANCINI, S. S. Notas sobre o programa que calcula a fase não homogênea usando a aproximação de thomas-fermi. Notas internas. Departamento de Física-UFSC. 2013.
- AVANCINI, S. S. et al. Warm and cold pasta phase in relativistic mean field theory. *Physical Review C*, v. 78, n. 015802, 2008.
- BURROWS, A. Neutrinos from supernova explosions. *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.*, v. 40, p. 181–212, 1990.
- CHUNG, K. C. *Introdução à Física Nuclear*. Rio de Janeiro, Brasil: EdUERJ, 2001. 286 p.
- FURTADO, U. J. *Gás de neutrinos interagentes em um meio nuclear denso*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, Brasil, 2012.
- GLENDENNING, N. K. *Compact Stars: nuclear physics, particle physics and general relativity*. Nova York, Estados Unidos da América: Springer, 2000. 467 p.
- GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Elementary Particles*. Weinheim, Alemanha: Wiley-VCH, 2009. 454 p.
- HALZEN, F.; MARTIN, A. D. *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*. Estados Unidos da América: John Wiley Sons, 1984. 396 p.
- HAXTON, W. C. Neutrino astrophysics. *arXiv:1209.3743v1*, 2012.
- LOPES, L. L. *Estrelas de nêutrons: do gás de nêutrons livres à inclusão de híperons e campo magnético*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, Brasil, 2012.
- PONS, J. A. et al. Evolution of proto-neutron stars. *The Astrophysical Journal*, v. 513, p. 780–804, 1999.
- REDDY, S.; PRAKASH, M. Neutrino scattering in a newly born neutron star. *The Astrophysical Journal*, v. 478, p. 689–700, 1997.
- REDDY, S.; PRAKASH, M.; LATTIMER, J. M. Neutrino interactions in hot and dense matter. *Physical Review D*, v. 58, n. 013009, 1998b.

RYU, C. Y.; CHEOUN, M. K. Proto-neutron star with trapped neutrinos. *Journal of the Korean Physical Society*, v. 59, n. 2, p. 2110–2113, 2011.

SALINAS, S. R. A. *Introdução à Física Estatística*. São Paulo, Brasil: EDUSP, 1997.

SHEN, H.; TOKI, H.; SUMIYOSHI, K. O. K. Relativistic equation of state of nuclear matter for supernova and neutron star. *Nuclear Physics A*, v. 637, p. 435–450, 1998.

SUTTON, C. *Spaceship Neutrino*. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 1992. 244 p.

WATANABE, G.; MARUYAMA, T. Nuclear pasta in supernovae and neutron stars. *arXiv:1109.3511v2*, 2012.