UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

Comportamento de somas e máximos de variáveis aleatórias reais independentes: da teoria à prática em contexto escolar

Isaac Felisberto Ferreira Campos

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Matemática Para Professores
(2º ciclo de estudos)

Orientadora: Professora Doutora Ana Paula André Martins Fernandes

Covilhã, Junho de 2018

Dedicatória

Dedico esse trabalho à minha querida mãe Maria Ferreira Vunda por tudo que fez por mim e pelos meus irmãos. Pelo carinho, amor, paz, paciência, sacrifício que a sua incansável personalidade sempre transbordou sem nunca se frustrar. Mansa, humilde, honesta, sem ira, não me lembro de a ver nervosa um só dia. Mãe, não conheço ser humano algum com um sorriso lindo como teu, um coração enorme como teu e um caráter extraordinário como teu. Desde o mês de abril que o meu mundo não é o mesmo. Todas as coisas perderam o brilho que tinham sem a tua presença, sem a tua voz afável e doce, sem o teu "aló mano"... Certamente as minhas míseras palavras não poderão expressar um terço das tuas qualidades, nem expressar o que sinto agora, nem o vazio que é a nossa casa sem ti, mas saiba que também sou feliz porque sei que és vitoriosa e tenho fé que te poderei ver novamente.

«*Amar-te-ei eternamente mãe*».

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a DEUS pelas bênçãos que tem provido à minha vida.

À Ilustre Professora Doutora Ana Paula Fernandes eu agradeço imenso a disponibilidade, a forma sábia, atenciosa e paciente que dirigiu este trabalho. Esteve sempre presente e disposta a ajudar-me a crescer cientificamente. Foi uma grande honra trabalhar com a senhora durante esse tempo e certamente é um modelo de Professor moderno a seguir.

Aos meus pais Felisberto Job Campos e Maria Ferreira Vunda pela educação, pelo apoio incondicional para cada um dos seus filhos, pela perseverança, pela dignidade que soubestes dar à sua família, sou profundamente grato. À minha esposa Antonica Bimbi Júnior por compreender a necessidade da minha formação e apoiar incessantemente, ao meu filho Abderval por suportar a minha ausência durante esse tempo, aos meus irmãos, Elsa, Vunda, João, Marcos, Santana, Fernando, Canda, José, Paulo, Job e Márcio, eu agradeço pois estão sempre do meu lado. Esse trabalho também é vosso.

Ao Doutor Infeliz Carvalho Coxe por ter depositado em mim a sua confiança e me ter dado a oportunidade de cá estar (que são completamente raras), eu estendo o meu profundo agradecimento e sem esquecer, claro, o Instituto Nacional de Gestão de Bolsas de Estudo (INAGBE) por me ter apurado.

A todos os meus colegas do curso de Mestrado em Matemática para Professores especialmente aos provenientes da ESPM, ao Nadab, Gilson, Walter, Lello, Kota Bunga, obrigado pelo calor prestado e por partilharem comigo todas emoções. A todos os Professores do Departamento de Matemática da UBI, os meus sinceros agradecimentos.

Resumo

O Teorema do Limite Central garante que o único modelo estável para somas com variância finita é o modelo normal. Esta noção de estabilidade tornou mais fácil a modelação de fenômenos aditivos, uma vez que a acumulação de informação, sob a forma de mais parcelas, apenas nos faz mudar a localização e a escala, mas permanecemos no mesmo modelo. Contudo, a convergência de somas para uma normal dá-se quando nenhuma das parcelas tem um papel preponderante, ou seja, quando as caudas da distribuição subjacente tem um peso moderado, que é explicitado através da exigência da existência de segundo momento. Esta situação altera-se quando as estatísticas ordinais extremais têm algum protagonismo, o que acontece se o modelo distribucional de base tiver caudas pesadas.

Neste trabalho investigamos o comportamento distribucional de somas e de estatísticas ordinais extremais, em particular do máximo. Obtemos a distribuição exata de algumas somas de variáveis aleatórias reais independentes e do máximos de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Analisamos o comportamento assintótico das estatísticas ordinais centrais, regido pelo Teorema do Limite Central, e das estatísticas ordinais extremais, nomeadamente do máximo, regido pelo Teorema Limite Extremal. Enquadramos alguns dos assuntos abordados, como a média amostral e as distribuições amostrais, no ensino, com a análise das dificuldades dos alunos nestes temas e a análise dos programas de Matemática do ensino secundário e de uma unidade curricular de um curso de formação de professores de Matemática em Angola.

Palavras-chave Distribuição amostral, soma de variáveis aleatórias independentes, máximo de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, teorema do limite central, teorema dos tipos extremos.

Abstract

The Central Limit Theorem guarantees that the only stable model for sums with finite variance is the normal model. This notion of stability has made it easier to model additive phenomena, since accumulating information in the form of more terms only makes us change the location and the scale, but we remain in the same model. However, the convergence of sums to a normal distribution occurs when no terms have a preponderant role, in other words, when the tails of the underlying distribution have a moderate weight, which is explained by the requirement of the existence of second moment. This situation changes when extreme ordinal statistics play a key role, which happens if the underlying distributional model is heavy tailed.

In this work we investigate the distributional behavior of sums and extreme ordinal statistics, maximum in particular. We obtain the exact distribution of some sums of independent real random variables and independent and of maximum of identically distributed random variables. We analyze the asymptotic behavior of central ordinal statistics, governed by the Central Limit Theorem, and the extremal ordinal statistics, namely maximum, governed by the Extremal Types Theorem. We put into teaching context some of the subjects discussed, such as the sample mean and sampling distributions, by analyzing students difficulties in these subjects and the Mathematic programs of secondary school and a curricular unit of a teacher training course of Mathematics in Angola.

Keywords Sampling distribution, sum of independent random variables, maxima of independent and identically distributed random variables, central limit theorem, extremal types theorem.

Índice

Lista de Figuras

Lista de Acrónimos, Siglas e Abreviaturas

UBI	Universidade da Beira Interior
ESPM	Escola Superior Politécnica de Malanje
INIDE	Instituto Nacional de Investigação e Desenvolvimento da Educação
INAGBE	Instituto Nacional de Gestão de Bolsas de Estudo
ISCED	Instituto Superior de Ciências de Educação
v.a.r.	variável aleatória real
f.d.	função de distribuição
i.i.d.	independentes e identicamente distribuídas
e.o.	estatística ordinal

Introdução

Desde há muito tempo que a Estatística tem desempenhado um papel importante e crucial no desenvolvimento das sociedades. Segundo Reis *et al.* (1999) existem duas boas razões para se estudar Estatística, primeiro porque qualquer cidadão está diariamente exposto a informação que provem de estudos sociológicos e de mercado, económicos, de sondagens políticas ou mesmo de pesquisas científicas, resultantes de processos aleatórios. Segundo, porque muitos irão deparar-se com atividades profissionais que requerem o uso da Estatística na resolução de problemas.

A muita informação a que diariamente somos expostos traduz-se muitas vezes em dados que resultam de medições associadas a fenómenos aleatórios. Com a evolução da ciência as medições são cada vez mais precisas, mas mesmo assim continua-se a procurar afinar cada vez mais esta capacidade de medir com precisão. Ora o Teorema do Limite Central veio mostrar que, em muitas circunstâncias, mais vale medir muitas vezes de forma imprecisa, e usar médias, do que medir apenas uma vez, com grande esforço de precisão.

O Teorema do Limite Central é um dos mais célebres resultados da Teoria da Probabilidade, apresentando-nos condições suficientes que garantem que uma soma finita, ou uma média, de variáveis aleatórias reais independentes e identicamente distribuídas, convenientemente normalizada, segue aproximadamente uma lei normal.

O recurso a resultados assintóticos para resolução de problemas do dia a dia é difícil de compreender uma vez que os dados que temos de analisar são sempre em número finito. Além do mais, há situações experimentais tão caras em que dificilmente se aceita muitas repetições das experiências. Nesses casos, tem que se investir no rigor de poucas medições e não em muitas medições repetidas mais grosseiras. Torna-se assim também importante perceber como se comporta a média quando dispomos de amostras de pequena dimensão.

O modelo normal, cuja importância pode ser justificada pelo Teorema do Limite Central, pode ser usado como aproximação em muitas situações, admitindo que existe algum mecanismo aditivo subjacente. É pois notório a modelação de tantos fenómenos reais usando normais, contudo nem tudo é normal. Existem situações na vida diária em que uma única observação que se afasta da tendência central dos dados poderá, pela sua magnitude, ser comparável à acumulação de todas as outras não dominantes. Nestas situações as estatísticas ordinais extremais assumem primordial importância.

Propomo-nos neste trabalho, apresentar uma síntese dos principais resultados conhecidos para somas de variáveis aleatórias independentes e para máximos de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Daremos principal destaque ao Teorema do Limite Central e ao Teorema dos Tipos Extremos. Faremos também uma análise da bibliografia referente ao ensino de alguns dos resultados apresentados, onde nos preocuparemos em perceber quais as principais dificuldades apresentadas pelos alunos e quais as estratégias pedagógicas a utilizar nestes casos. Para tal, dividimos este trabalho em três capítulos que vamos passar a descrever em detalhe.

No primeiro capítulo, estudamos o comportamento de somas de variáveis aleatórias reais independentes e identicamente distribuídas. Começamos por definir na Secção 1.2 alguns conceitos importantes que nos serviram de suporte na demonstração dos resultados fundamentais, nomeadamente os conceitos de convergência em lei ou em distribuição de uma sucessão de variáveis aleatórias e de função característica, e apresentamos as condições suficientes e necessárias que nos garantem a equivalência entre a convergência em lei duma sucessão de variáveis aleatórias e a convergência das respetivas funções características no Teorema da continuidade de Lévy-Cramér.

Definimos ainda nessa secção o conceito de variáveis aleatórias independentes e terminamos a secção com dois resultados que permitem caracterizar existência e determinar o valor de momentos de uma variável aleatória real à custa da respetiva função característica.

Na secção seguinte analisamos a distribuição exata de somas onde determinamos a lei de algumas somas de variáveis aleatórias reais independentes, bem como as suas particularidades e aproveitamos para introduzir o conceito de variáveis aleatórias infinitamente divisíveis. Na última secção do primeiro capítulo provamos através daquele que é seguramente um dos mais ilustres resultados da Teoria da probabilidade, o Teorema do Limite Central, que qualquer variável aleatória infinitamente divisível com segundo momento finito, depois de convenientemente padronizada, é aproximadamente normal padrão. Abordamos desta forma a distribuição assintótica de somas na Secção 1.4 e apresentamos ainda alguns exemplos de aplicação do Teorema do Limite Central.

No segundo capítulo, procuramos entender as situações em que as estatísticas ordinais extremais ganham protagonismo em detrimento das centrais, estudando para tal o comportamento do máximo de variáveis aleatórias reais independentes e identicamente distribuídas. Na Secção 2.3 determinamos a distribuição exata do máximo e apresentamos alguns exemplos de aplicação da distribuição na determinação do tempo de vida de vários sistemas. Na Secção 2.4, analisamos o comportamento assintótico do máximo, regido pelo Teorema dos Tipos Extremos, e, uma vez que as distribuições dos tipos extremos coincidem com a classe de distribuições estáveis para máximos, introduzimos o conceito de variáveis estáveis para máximos. Apresentamos ainda nesta secção o Teorema de Khintchine, fundamental para demonstrar o principal resultado deste capítulo, o Teorema dos Tipos Extremos.

No terceiro capítulo, procuramos contextualizar no ensino alguns dos conceitos estudados ao longo deste trabalho, sobretudo os relacionados com a média amostral. Tentamos perceber na Secção 3.2 qual a perspectiva de professores e alunos sobre a média e as distribuições amostrais com uma análise da literatura existente sobre esta temática. Na Secção 3.3, apresentamos algumas estratégias didáticas, referidas na literatura, para a superação das dificuldades encontradas. Finalmente, na última secção deste capítulo, que fecha o trabalho, fazemos um enquadramento destes conteúdos no ensino, mais precisamente na realidade angolana, onde analisamos alguns programas do ensino secundário e superior de Angola.

No início de cada capítulo é dada, em pormenor, informação acerca dos resultados que focaremos. Salientamos que todas as simulações efetuadas, para ilustrar os principais resultados deste trabalho, foram feitas no *software* `R` que pode ser obtido gratuitamente em `https://www.r-project.org/`, encontrando-se em apêndice ao trabalho os comandos utilizados.

Capítulo 1

Comportamento de somas de variáveis aleatórias reais independentes

1.1 Introdução

O estudo de somas de variáveis aleatórias reais é um assunto de extrema importância em teoria das probabilidades e suas aplicações. Destacamos a sua importância no estudo das propriedades de muitos estimadores que envolvem somas, nomeadamente a média e variância amostrais. Muitos dos fenómenos que observamos diariamente têm subjacente algum mecanismo aditivo.

Neste capítulo começamos por definir alguns conceitos e apresentar alguns resultados fundamentais para caraterizar as leis da soma de variáveis aleatórias reais independentes. Seguidamente analisamos a distribuição exata de algumas somas, tendo sempre o cuidado de ilustrar graficamente os resultados para as diferentes leis de probabilidade subjacentes. Provamos que as leis de Gama, Cauchy, Normal, entre outras, são infinitamente divisíveis e que toda a lei estável para somas é infinitamente divisível.

Veremos que uma variável aleatória infinitamente divisível com variância finita depois de devidamente padronizada pode ser aproximada por uma variável aleatória de lei normal padrão. Obtemos assim a distribuição assintótica de somas de variáveis aleatórias reais independentes e indenticamente distribuídas. Este resultado muito importante foi mola propulsora do desenvolvimento da Teoria das probabilidades e ficou conhecido como Teorema do Limite Central. Garantimos assim que desde que haja um mecanismo aditivo (satisfazendo certas propriedades) subjacente ao que pretendemos modelar, basta avaliar o valor médio e o desvio padrão apropriados para caracterizar o modelo normal que, em geral, é uma aproximação adequada.

1.2 Conceitos e resultados fundamentais

Iremos de seguida apresentar alguns conceitos, como o de função característica, e enunciar alguns resultados que serão extremamente úteis no estudo do comportamento de variáveis aleatórias, em particular no estudo da lei da soma. Os conceitos e os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em Murteira (1990), Gonçalves e Lopes (2000) e Pestana e Velosa (2010).

Aproveitamos para introduzir notações que serão usadas ao longo deste trabalho.

Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sucessão de variáveis aleatórias reais (v.a.r.) definidas sobre um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$[1] e consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, P_{X_n} e F_{X_n} a lei de probabilidade e a função de distribuição (f.d.), respetivamente, de X_n. Consideremos ainda X uma v.a.r. também definida sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de lei de probabilidade P_X e f.d. F_X.

Definição 1.2.1. *A sucessão $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tende em lei para a v.a.r. X, e escreveremos $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$, se $F_{X_n}(x)$ converge para $F_X(x)$, para todo o real x, ponto de continuidade de F_X.*

[1] Ω representa o espaço fundamental ou conjunto de resultados possíveis associado a uma experiência aleatória, $\mathcal{A}$ a σ-álgebra ou tribo sobre Ω e P a probabilidade sobre o espaço probabilizável $(\Omega, \mathcal{A})$.

Definição 1.2.2. *A sucessão* $\{G_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de funções de distribuição converge fracamente para a função de distribuição* $G(x)$, *simbolicamente* $G_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{W}} G(x)$, *se* $\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = G(x)$, *para todo o real* x, *ponto de continuidade de* G.

As definições anteriores são equivalentes, uma vez que convergência em lei é convergência fraca de uma sucessão de funções de distribuição para uma função de distribuição.

A convergência em lei, também denominada convergência em distribuição, de uma sucessão de v.a.r. pode ser caracterizada também em termos da convergência das respetivas funções características, que é o nome que se dá em Teoria da Probabilidade às transformadas de Fourier, formalmente definidas a seguir.

Definição 1.2.3. *Chamamos função característica da v.a.r.* X, *sobre* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *e com valores em* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})^2$ *ou da sua lei de probabilidade* P_X, *à aplicação* Φ_X *de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{C}$ *definida por*

$$\Phi_X(t) = E[e^{itX}], \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Notemos que a definição de função característica de uma v.a.r. pode ser estendida a vetores aleatórios reais $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, passando-se neste caso a ter uma aplicação $\Phi_{\mathbf{X}}$ de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{C}$ definida por $\Phi_{\mathbf{X}}(t) = E[e^{it\mathbf{X}^T}]$, para todo $t \in \mathbb{R}^n$, onde $\mathbf{X}^T$ denota o vetor transposto de $\mathbf{X}$. Assim sendo, todos os resultados desta secção permanecem válidos, *mutatis mutandis*, se substituirmos a v.a.r. X por um vetor aleatório real $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$.

A fórmula de Euler permite-nos escrever a função característica da v.a.r. X como

$$\Phi_X(t) = E[\cos(tX)] + iE[\sin(tX)], \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Desta igualdade resultam algumas das principais propriedades da função característica de uma v.a.r. enunciadas a seguir.

Teorema 1.2.1. *Sendo* Φ_X *a função característica da v.a.r.* X *tem-se*

1. $\Phi_X(0) = 1$.

2. $|\Phi_X(t)| \leq 1$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

3. Φ_X *é uma função uniformemente contínua em* $\mathbb{R}$.

4. $\Phi_X(t) = \overline{\Phi_X(-t)}$, *para* $t \in \mathbb{R}$, *onde* $\overline{z}$ *representa conjugado de* z *em* $\mathbb{C}$.

5. $\Phi_{aX+b}(t) = e^{itb}\Phi_X(at)$, *para todo* $t, a, b \in \mathbb{R}$.

Toda a lei de probabilidade em $\mathbb{R}$ possui função característica e a função característica de uma lei de probabilidade caracteriza completamente essa lei como o prova o Teorema da unicidade (Feller (1971)).

Teorema 1.2.2 (Teorema da unicidade)**.**

Sejam X *e* Y *duas v.a.r. definidas sobre* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *com valores em* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Se, para todo $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_X(t) = \Phi_Y(t)$, *então* $X \overset{d}{=} Y$, *onde* $\overset{d}{=}$ *denota a igualdade em distribuição, ou equivalentemente* $F_X(x) = F_Y(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Lei de probabilidade	Função característica
Binomial de parâmetros $n \in \mathbb{N}$ e $p \in]0,1[$	$(1-p+pe^{it})^n$
Poisson de parâmetro $\lambda > 0$	$e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}$
Gama de parâmetros $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^\alpha$
Cauchy de parâmetros $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\lambda > 0$	$e^{\alpha it-\lambda\|t\|}$
Normal de parâmetros $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in \mathbb{R}^+$	$e^{\mu it-\frac{(\sigma t)^2}{2}}$

Tabela 1.1: Funções características de algumas leis de probabilidade sobre $\mathbb{R}$.

Na Tabela 1.1 podemos encontrar as respectivas funções características de algumas leis usuais sobre $\mathbb{R}$. Destacamos os seguintes casos particulares da lei Gama:

- se $\alpha = 1$, a lei obtida denomina-se lei Exponencial de parâmetro $\lambda > 0$ e será denotada por $\mathcal{E}(\lambda)$;
- se $\alpha = \frac{n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, e $\lambda = \frac{1}{2}$, a lei Gama coincide com a lei do Qui-quadrado com n graus de liberdade, denotada por χ^2_n;

e das leis de Cauchy e Normal

- se $\alpha = 0$ e $\lambda = 1$ na lei de Cauchy obtemos a lei de Cauchy padrão que não é mais do que a lei t de Student com 1 grau de liberdade, que denotaremos por t_1. Analogamente, se na lei Normal considerarmos $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ obtemos a lei Normal padrão, denotada por $N(0,1)$.

Como já referimos, a convergência em lei da sucessão de v.a.r. pode ser caracterizada através da convergência das respetivas funções características. As condições necessárias e suficientes que nos garantem a equivalência entre estas duas convergências são dadas no Teorema da continuidade de Lévy-Cramér. Este resultado foi originalmente estabelecido por Paul Lévy, mas Cramér deu-lhe a forma definitiva, ao demonstrar que basta exigir a convergência de uma sucessão de funções contínuas para uma função contínua na vizinhança da origem para que essa função limite seja uma função característica e a convergência das funções características implicar a convergência em lei da correspondente sucessão de v.a.r. para a v.a.r. que tem aquela função característica.

Teorema 1.2.3 (Teorema da continuidade de Lévy-Cramér)**.**
Se a sucessão de v.a.r. $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *tende em lei para a v.a.r.* X*, então a sucessão de funções características correspondente,* $\{\Phi_{X_n}\}_{n\geq 1}$*, converge para a função característica de* X*.*

Por outro lado, se $\{\Phi_{X_n}(t)\}_{n\geq 1}$ *for uma sucessão de funções características tal que existe* $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi_{X_n}(t) = \Phi(t)$*, e esta função for contínua na vizinhança da origem, então* $\Phi(t)$ *é a função característica de uma v.a.r.* X *e* $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$*.*

A lei de probabilidade de uma v.ar. pode ser determinada à custa da respetiva função característica e pelo Teorema da continuidade o comportamento assintótico em lei de uma sucessão de variáveis aleatórias pode também ser caracterizado através da correspondente sucessão das funções características. A independência de variáveis aleatórias pode igualmente ser caracterizada através da noção de função característica como veremos de seguida.

[2] $\mathcal{B}$ denota a $\sigma-$álgebra de Borel em $\mathbb{R}$

Teorema 1.2.4. *As v.a.r. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são independentes se e somente se*

$$\Phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^{n} \Phi_{X_j}(t_j), \ \textit{para todo } \mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n,$$

onde $\Phi_{\mathbf{X}}$ designa a função característica do vetor aleatório $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ e Φ_{X_j} a função característica de X_j, $j = 1, \ldots, n$.

O próximo resultado será fundamental na determinação da lei da soma de variáveis aleatórias reais independentes que iremos abordar na secção seguinte. Recordamos que as variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sobre o mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e com valores em $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, de leis de probabilidade $P_{X_1}, P_{X_2}, \ldots, P_{X_n}$ são independentes se para todo $B_1 \in \mathcal{B}, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$[3], $P_{(X_1,\ldots,X_n)}(\prod_{j=1}^{n} B_j) = \prod_{j=1}^{n} P_{X_j}(B_j)$.

Teorema 1.2.5. *Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias reais independentes definidas sobre um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, então*

$$\Phi_{\sum_{j=1}^{n} X_j}(t) = \prod_{j=1}^{n} \Phi_{X_j}(t), \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

O resultado anterior garante-nos que a função característica da soma de v.a.r. independentes é o produto das respetivas funções características. Salientamos que o recíproco deste resultado é falso.

Terminamos esta secção com dois resultados que nos permitem caracterizar a existência de momentos de uma v.a.r. e determinar o seu valor à custa da respetiva função característica.

Teorema 1.2.6. *Seja X uma v.a.r. definida sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e possuindo momento de ordem n. Então a função característica de X, Φ_X, é derivável pelo menos até a ordem n e tem-se*

$$\Phi_X^{(k)}(t) = E\left(i^k X^k e^{itX}\right), \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R},$$

onde $\Phi_X^{(k)}$, $k \geq 1$ representa a derivada de ordem k de Φ_X. Em particular,

$$\Phi_X^{(k)}(0) = i^k E\left(X^k\right).$$

Teorema 1.2.7. *Se Φ_X é n vezes derivável no ponto zero então X admite momentos até à ordem n se n é par e até à ordem $n-1$ se n é ímpar.*

1.3 Distribuição exata de algumas somas

Temos agora reunidas as condições necessárias para determinar a lei de algumas somas de variáveis aleatórias reais independentes. O estudo das somas será fundamental para percebermos melhor o comportamento da estatística mais usada, a média.

Os resultados que se seguem decorrem dos teoremas da soma 1.2.5 e da unicidade 1.2.2, e dos exemplos de funções características apresentados na Tabela 1.1.

[3] $\mathcal{B}$ denota o Boreliano sobre o espaço de probabilidade.

Teorema 1.3.1. *Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.r. independentes, tais que $X_j \sim B(m_j, p)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $p \in]0,1[$, $j = 1, \ldots, n$. Então,*

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \sim B\left(\sum_{j=1}^{n} m_j, p\right),$$

onde $B(s,t)$ denota a lei Binomial de parâmetros s e t.

Demonstração: Vimos na Tabela 1.1 que a função característica de $X_j \sim B(m_j, p)$ é

$$\Phi_{X_j}(t) = (1 - p + pe^{it})^{m_j}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ e } \quad j = 1, \ldots, n.$$

Logo, como as v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$ são independentes, pelo Teorema 1.2.5 vem

$$\Phi_{\sum_{j=1}^{n} X_j}(t) = \prod_{j=1}^{n} \left(1 - p + pe^{it}\right)^{m_j} = \left(1 - p + pe^{it}\right)^{\sum_{j=1}^{n} m_j}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

que é a função característica de uma variável aleatória binomial de parâmetros $\sum_{j=1}^{n} m_j$ e p. O resultado decorre agora do Teorema da unicidade 1.2.2. $\square$

Ilustramos, na Figura 1.1, o resultado anterior com três v.a.r. binomiais de parâmetros $n = 5$, 6 e 7 e $p = 0.1$. A cinza temos a distribuição de frequências resultante da soma das três amostras de dimensão 50000 simuladas a partir das respetivas distribuições binomiais e a preto a função de probabilidade da v.a.r. Binomial de parâmetros $n = 5 + 6 + 7 = 18$ e $p = 0.1$.

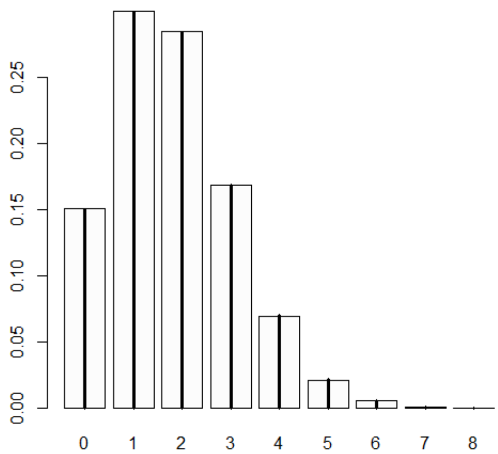

Figura 1.1: Distribuição por amostragem da soma de três v.a.r. binomiais independentes, $X_1 \sim B(5, 0.1)$, $X_2 \sim B(6, 0.1)$ e $X_3 \sim B(7, 0.1)$, (a cinza) e função de probabilidade Binomial de parâmetros 18 e 0.1 (a preto).

O Teorema 1.3.1 estabelece que a soma de variáveis aleatórias reais independentes seguindo leis binomiais, com a mesma probabilidade de sucesso p, continua a ser uma v.a.r. com distribuição Binomial. Como consequência deste resultado, temos que qualquer v.a.r. binomial pode ser sempre vista como a soma de v.a.r. de Bernoulli independentes, uma vez que a distribuição de Bernoulli de parâmetro p não é mais do que a distribuição Binomial de parâmetros 1 e p.

Corolário 1.3.1. *Se $X \sim B(n,p)$ com $n \in \mathbb{N}$ e $p \in]0,1[$, então $X \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{n} Y_j$, com as v.a.r. $Y_j \sim Bernoulli(p)$, $j = 1, \ldots, n$, independentes.*

Veremos de seguida que a soma de v.a.r. independentes com distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda > 0$ também tem distribuição de Poisson.

Teorema 1.3.2. *Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.r. independentes, tais que $X_j \sim P(\lambda_j)$, $\lambda_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$. Então,*

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \sim P\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\right),$$

onde $P(s)$ denota a distribuição de Poisson de parâmetro s.

Demonstração: Tendo em conta que a função característica de X_j, $j = 1, \ldots, n$, é dada por

$$\Phi_{X_j}(t) = e^{\lambda_j\left(e^{it}-1\right)}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

e que as v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$ são independentes do Teorema 1.2.5 obtemos

$$\Phi_{\sum_{j=1}^{n} X_j}(t) = \prod_{j=1}^{n} e^{\lambda_j\left(e^{it}-1\right)} = e^{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\left(e^{it}-1\right)}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Esta é a função característica da lei de probabilidade de uma v.a.r. de Poisson de parâmetro $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j$, o que conjuntamente com o Teorema da unicidade 1.2.2 prova o resultado. $\square$

Este resultado é ilustrado na Figura 1.2 com três v.a.r. de Poisson de parâmetros 1, 2 e 3.

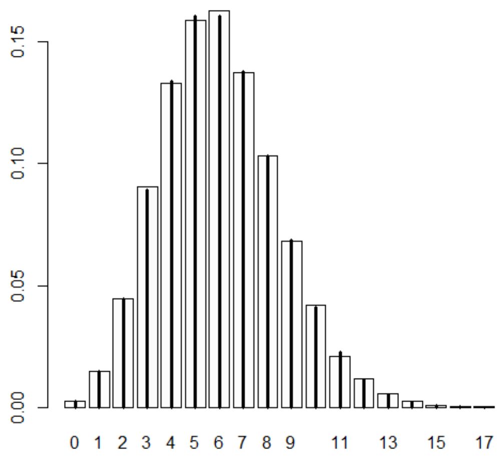

Figura 1.2: Distribuição por amostragem da soma de três v.a.r. de Poisson independentes, $X_1 \sim P(1)$, $X_2 \sim P(2)$ e $X_3 \sim P(3)$, (a cinza) e função de probabilidade de Poisson de parâmetro 6 (a preto).

Como consequência do Teorema 1.3.2 decorre que uma v.a.r. de Poisson pode ser decomposta como a soma de tantas v.a.r. de Poisson independentes quantas se queira.

Corolário 1.3.2. *Se $X \sim P(\lambda)$, $\lambda > 0$, então $X \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{n} Y_j$ com as v.a.r. $Y_j \sim P\left(\frac{\lambda}{n}\right)$, $j = 1, \ldots, n$, independentes, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

O próximo resultado dá-nos a distribuição da soma de v.a.r. independentes com lei Gama.

Teorema 1.3.3. *Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.r. independentes, tais que $X_j \sim \Gamma(\alpha_j, \lambda)$ com $\alpha_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$, e $\lambda > 0$. Então,*

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \sim \Gamma\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j, \lambda\right),$$

onde $\Gamma(a, b)$ denota a lei Gama de parâmetros $a > 0$ e $b > 0$.

Demonstração: O resultado é consequência imediata do fato da função característica da v.a.r. X_j, $j = 1, \ldots, n$, ser dada por

$$\Phi_{X_j}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^{\alpha_j}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

da função característica da soma de v.a.r. independentes ser igual ao produto das respetivas funções características (Teorema 1.2.5) e do Teorema da unicidade 1.2.2. □

Uma ilustração deste resultado pode ser encontrada na Figura 1.3

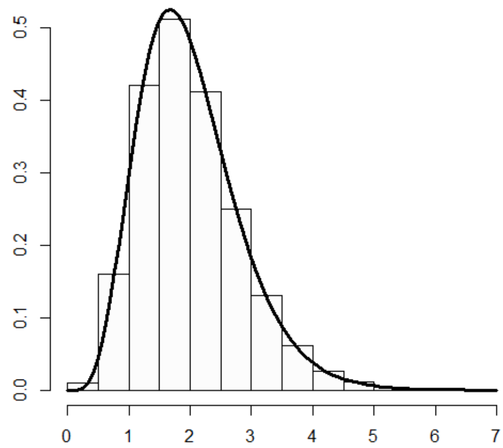

Figura 1.3: Distribuição por amostragem da soma de três v.a.r. gamas independentes, $X_1 \sim \Gamma(1, 3)$, $X_2 \sim \Gamma(2, 3)$ e $X_3 \sim \Gamma(3, 3)$, (a cinza) e função densidade Gama de parâmetros 6 e 3 (a preto).

Também uma v.a.r. gama pode ser decomposta como a soma de tantas variáveis aleatórias independentes com distribuição Gama quantas se queira.

Corolário 1.3.3. *Se $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, então para todo $n \in \mathbb{N}$, $X \overset{d}{=} \sum_{j=1}^{n} Y_j$, com as v.a.r. $Y_j \sim \Gamma\left(\frac{\alpha}{n}, \lambda\right)$ independentes.*

Recordando que a lei Gama de parâmetros $\alpha = 1$ e $\lambda > 0$ não é mais do que a lei Exponencial de parâmetro λ, temos como caso particular do Teorema 1.3.3 que a soma de n v.a.r. exponenciais independentes de parâmetro $\lambda > 0$ tem lei Gama de parâmetros n, λ, como enunciamos a seguir.

Corolário 1.3.4. *Sejam $X_1, \dots, X_n$ v.a.r. independentes com $X_j \sim \mathcal{E}(\lambda)$ para todo $j = 1, \dots, n$. Então,*

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \sim \Gamma(n, \lambda).$$

Sendo a lei do Qui-quadrado também um caso particular da lei Gama, uma vez que a lei do Qui-quadrado com um grau de liberdade não é mais do que a lei Gama de parâmetros $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$, temos novamente como consequência do Teorema 1.3.3 que a distribuição da soma de $n \in \mathbb{N}$ v.a.r. independentes de lei Qui-quadrado de parâmetro 1 é Gama de parâmetros $\frac{n}{2}$ e 2, ou equivalentemente Qui-quadrado com n graus de liberdade.

Corolário 1.3.5. *Sejam $X_1, \dots, X_n$ v.a.r. independentes com $X_j \sim \chi^2_1$, para todo $j = 1, \dots, n$. Então,*

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \sim \chi^2_n.$$

Atendendo agora a que se uma v.a.r. Z tem lei Normal padrão, $Z \sim N(0,1)$, então $Z^2 \sim \chi^2_1$, o próximo resultado é consequência imediata do anterior.

Corolário 1.3.6. *Sejam $X_1, \dots, X_n$ v.a.r. independentes com $X_j \sim N(\mu_j, \sigma_j)$ para todo $j = 1, \dots, n$. Então,*

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{X_j - \mu_j}{\sigma_j} \right)^2 \sim \chi^2_n,$$

onde $N(\mu, \sigma)$ denota a lei Normal de média $\mu \in \mathbb{R}$ e desvio padrão $\sigma \in \mathbb{R}^+$.

A extensão do Corolário 1.3.5 à soma de variáveis aleatórias independentes com lei do Qui-quadrado com um número de graus de liberdade não necessariamente igual é apresentada a seguir.

Corolário 1.3.7. *Sejam $X_1, \dots, X_n$ v.a.r. independentes tais que $X_j \sim \chi^2_{m_j}$, com $m_j \geq 1$ para todo $j = 1, \dots, n$. Então,*

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \sim \chi^2_{\sum_{j=1}^{n} m_j}.$$

A soma de variáveis aleatórias de lei de Cauchy independentes continua a ser de Cauchy como veremos de seguida e ilustramos na Figura 1.4

Teorema 1.3.4. *Sejam $X_1, \dots, X_n$ v.a.r. independentes, tais que $X_j \sim C(\alpha_j, \lambda_j)$ com $\alpha_j \in \mathbb{R}$ e $\lambda_j > 0$, $j = 1, \dots, n$. Então,*

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \sim C\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \right),$$

onde $C(\alpha, \lambda)$ denota a lei de Cauchy de parâmetros $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\lambda > 0$.

Demonstração: Resulta da função característica da lei de Cauchy, apresentada na Tabela 1.1, e dos Teoremas 1.2.5 e 1.2.2. □

Os resultados seguintes são agora consequência do resultado anterior.

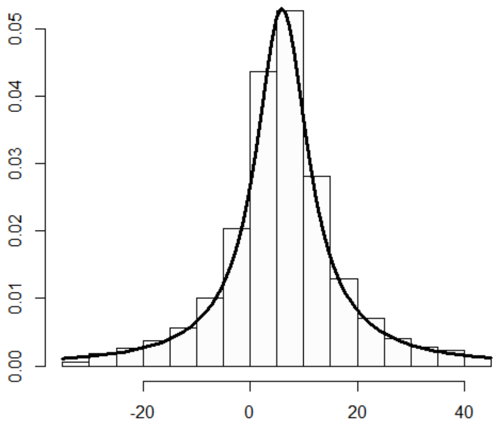

Figura 1.4: Distribuição por amostragem da soma de três v.a.r. de Cauchy independentes, $X_1 \sim C(1,3)$, $X_2 \sim C(2,2)$ e $X_3 \sim C(3,1)$, (a cinza) e função densidade de Cauchy de parâmetros 6 e 6 (a preto).

Corolário 1.3.8. *Se $X \sim C(\alpha, \lambda)$, então $X \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{n} Y_j$, com as v.a.r. $Y_j \sim C\left(\frac{\alpha}{n}, \frac{\lambda}{n}\right)$, $j = 1, \ldots, n$, independentes, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Corolário 1.3.9. *Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.r. independentes tais que $X_j \sim C(\alpha, \lambda)$ e $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$. Então, $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n} \sim C(\alpha, \lambda)$.*

Demonstração: Basta notar que das propriedades da função característica temos, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\Phi_{\overline{X}_n}(t) &= E[e^{it\overline{X}_n}] \\
&= E\left[\prod_{i=1}^{n} e^{itX_j/n}\right] \\
&= \prod_{i=1}^{n} E[e^{itX_j/n}] \\
&= (E[e^{itX_1/n}])^n \\
&= e^{\alpha it - \lambda|t|},
\end{aligned}$$

que é a função característica da lei de Cauchy de parâmetros α e λ. $\square$

Este último resultado diz-nos que a média de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com lei de Cauchy continua a ter a mesma lei de Cauchy. Uma consequência desta propriedade interessante é, por exemplo, que se o erro num certo processo de medição tivesse uma lei de Cauchy e se considerássemos a média de um número de medições, não se poderia esperar que a média fosse mais precisa que qualquer das medições individuais.

A lei de Cauchy relaciona-se assim com a lei Normal, uma vez que o quociente de duas v.a.r. independentes de lei Normal padrão segue uma lei de Cauchy padrão. A lei Normal ou Gaussiana, que é a lei contínua mais usada e sem dúvida das mais importantes, está no cerne do resultado mais importante da Teoria da Probabilidade, o Teorema do Limite Central, que abordaremos na próxima secção.

De seguida caracterizaremos a distribuição de somas envolvendo variáveis aleatórias normais independentes.

Teorema 1.3.5. *Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.r. independentes, tais que $X_j \sim N(\mu_j, \sigma_j)$, $j = 1, \ldots, n$. Então,*

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \sim N\left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j, \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2}\right),$$

onde $N(\mu, \sigma)$ denota a lei normal de parâmetros $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in \mathbb{R}^+$.

Demonstração: Resulta da função característica da lei normal, apresentada na Tabela 1.1, e dos Teoremas 1.2.2 e 1.2.5. □

A Figura 1.5 ilustra este resultado com a soma de três variáveis aleatórias normais independentes com parâmetros distintos.

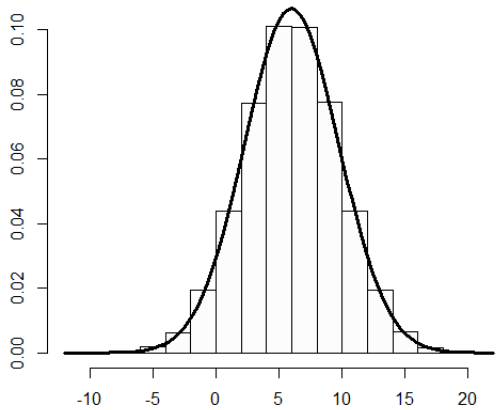

Figura 1.5: Distribuição por amostragem da soma de três v.a.r. normais independentes, $X_1 \sim N(1,2)$, $X_2 \sim N(2,3)$ e $X_3 \sim N(3,1)$, (a cinza) e função densidade Normal de parâmetros 6 e $\sqrt{14}$ (a preto).

Tendo em conta a propriedade 5 da função característica enunciada no Teorema 1.2.1, o Teorema 1.2.2 e o Teorema 1.2.5 facilmente se prova que se $X_1, \ldots, X_n$ são v.a.r. independentes e tais que $X_j \sim N(\mu_j, \sigma_j)$, com $\mu_j \in \mathbb{R}$ e $\sigma_j \in \mathbb{R}^+$, $j = 1, \ldots, n$, então

$$\sum_{j=1}^{n} a_j X_j \sim N\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j, \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \sigma_j^2}\right), \text{ para todo } a_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, n. \quad (1.3.1)$$

Este resultado estabelece que toda a combinação linear de v.a.r. normais independentes é uma variável aleatória com lei Normal. Consequentemente, qualquer variável aleatória normal se pode escrever como a soma de variáveis aleatórias normais independentes.

Corolário 1.3.10. *Se $X \sim N(\mu, \sigma)$, então $X \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{n} Y_j$, com as v.a.r. $Y_j \sim N\left(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, $j = 1, \ldots, n$, independentes, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Notemos que se considerarmos em (1.3.1) as constantes $a_j = \frac{1}{n}$, para todo $j = 1, \ldots, n$, obtemos a distribuição da média de n v.a.r. normais independentes dada no próximo resultado.

Corolário 1.3.11. *Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.r. independentes, com $X_j \sim N(\mu_j, \sigma_j)$, $\mu_j \in \mathbb{R}$, $\sigma_j \in \mathbb{R}^+$, $j = 1, \ldots, n$. Então,*

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j \sim N\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mu_j, \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2}\right).$$

Se no resultado anterior considerarmos que as variáveis aleatórias são independentes e identicamente distribuídas com lei Normal de parâmetros $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in \mathbb{R}^+$, então obtemos, como caso particular,

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j \sim N(\mu, \sigma\sqrt{n}).$$

Este resultado diz-nos que no caso de uma população normal há vantagem em considerar amostras de dimensão tão grande quanto economicamente viável, uma vez que $\overline{X}_n$ terá um desvio padrão cada vez menor $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, e portanto a probabilidade de se afastar do valor médio μ será cada vez menor, tendo em conta a desigualdade de Chebycheff. Recordamos que no caso de uma população de Cauchy tal não acontece, aliás não se ganha em fazer a média de mais do que uma observação, pois $\overline{X}_n \stackrel{d}{=} X_1$.

Vimos até agora resultados, nomeadamente os Corolários 1.3.2, 1.3.3, 1.3.8 e 1.3.10, onde a variável aleatória em causa podia ser decomposta como a soma de tantas parcelas independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) quantas se queira. Estas variáveis aleatórias ou distribuições, Poisson, Gama, Cauchy e Normal, dizem-se infinitamente divisíveis e têm um papel importante na teoria da adição de variáveis aleatórias.

Definição 1.3.1. *Uma v.a.r. X é infinitamente divisível se e só se para todo $n \in \mathbb{N}$, existirem v.a.r. Y_n tais que*

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{n} Y_{nj},$$

sendo os Y_{nj}, $j = 1, \ldots, n$, réplicas independentes de Y_n, ou seja v.a.r. independentes com distribuição igual à de Y_n.

Notemos que a lei Binomial não é infinitamente divisível, nem o será qualquer outra distribuição com suporte finito. Qualquer variável ou lei estável para somas é infinitamente divisível, esta constatação motiva-nos a definir formalmente a classe das v.a.r. estáveis para somas.

Definição 1.3.2. *Dizemos que a v.a.r. X, ou a sua lei, é estável para somas se todos os termos da sucessão de somas parciais de réplicas independentes de X forem do mesmo tipo. Por outras palavras, denotando $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, onde X_j são réplicas independentes de X, para todo $n \in \mathbb{N}$ existem $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} \stackrel{d}{=} \frac{X - \beta}{\alpha}. \quad (1.3.2)$$

Tendo esta definição em consideração, destacamos o fato de no caso de $\{X_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ ser uma sucessão de variáveis aleatórias i.i.d. e $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ termos que

- se $X_j \stackrel{d}{=} X \sim N(\mu,\sigma)$ então $\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \stackrel{d}{=} \frac{X-\mu}{\sigma}$ ou $\frac{S_n-(n-\sqrt{n})\mu}{\sqrt{n}} \stackrel{d}{=} X$;

- se $X_j \stackrel{d}{=} X \sim C(\alpha,\lambda)$ então $\frac{S_n}{n} \stackrel{d}{=} X$.

Isto significa que a lei Normal e de Cauchy são leis estáveis para somas uma vez que ambas verificam a equação de estabilidade (1.3.2).

Na próxima secção iremos provar que qualquer v.a.r. infinitamente divisível com variância finita depois de devidamente padronizada, ou seja centrada e reduzida, pode ser aproximada por uma v.a.r. de lei normal padrão, $N(0,1)$.

1.4 Distribuição assintótica de somas

Nesta secção apresentamos um dos mais célebres resultados da Teoria da Probabilidade, que nos remete à convergência de somas de v.a.r. para uma distribuição normal. Pela sua importância na teoria e em aplicações ficou conhecido como Teorema do Limite Central.

1.4.1 Teorema do Limite Central

O resultado a seguir apresenta-nos condições suficientes que garantem que uma soma finita de variáveis aleatórias reais i.i.d. X_j, $j = 1,\ldots,n$, $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, convenientemente normalizada, segue aproximadamente uma lei normal. Todos os teoremas deste tipo são designados teoremas de limite central e o que apresentamos de seguida data de 1920 e é devido a Lindeberg-Lévy.

Teorema 1.4.1 (Lindeberg-Lévy)**.**

Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão de variáveis aleatórias reais independentes definidas sobre um espaço de probabilidade* $(\Omega,\mathcal{A},P)$*, de mesma lei, de esperança matemática* μ *e desvio padrão* σ *finito. Então, a sucessão de variáveis aleatórias reais de termo geral*

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}, \quad (1.4.3)$$

tende em lei, quando n *tende para* $+\infty$*, para uma variável aleatória real de lei* $N(0,1)$*, isto é,*

$$P(Z_n \le x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(\frac{-t^2}{2}\right)} dt, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Consideremos, para todo $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = \frac{X_n - \mu}{\sigma}$. Como Y_n é uma variável aleatória real centrada e reduzida, isto é, $E[Y_n] = 0$ e $Var[Y_n] = 1$, a sua função característica, $\Phi_{Y_n}(t) = E\left[e^{itY_n}\right]$, é duas vezes derivável pelo Teorema 1.2.6. Assim temos que

$$\Phi_{Y_n}^{(1)}(0) = iE[Y_n] = 0 \quad \text{e} \quad \Phi_{Y_n}^{(2)}(0) = i^2E[Y_n^2] = -1.$$

Denotemos agora por Φ_{Z_n} a função característica da variável aleatória real padronizada
$Z_n = \dfrac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} Y_j.$

Como as v.a.r. $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, pelas propriedades da função característica temos, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\Phi_{Z_n}(t) &= \Phi_{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} Y_j}(t) = \Phi_{\sum_{j=1}^{n} Y_j}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}t\right) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \Phi_{Y_j}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}t\right) \\
&= \left[\Phi_{Y_j}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}t\right)\right]^n. \qquad (1.4.4)
\end{aligned}$$

Tendo agora em conta o desenvolvimento em série de MacLaurin de ordem 2 da função característica em (1.4.4), podemos escrever

$$\left[\Phi_{Y_j}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}t\right)\right]^n = \left[1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n.$$

Donde podemos concluir que

$$\lim_{n \to +\infty} \Phi_{Z_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} = \Phi_X(t), \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

com $X \sim N(0,1)$, resultando a convergência em lei pretendida de Z_n para X do Teorema da continuidade de Lévy-Crámer 1.2.3 . □

Notemos que na expressão (1.4.3) as constantes $b_n = n\mu \in \mathbb{R}$ e $a_n = \sigma\sqrt{n} > 0$ têm como efeito puxar S_n para 0, e estabilizar a dispersão usando a escala intrínseca $\sigma\sqrt{n}$, respectivamente.

O Teorema do Limite Central permite-nos considerar que, para n suficientemente grande, a lei da soma S_n é bem aproximada pela mesma lei normal, independentemente do tipo de lei comum à sucessão de variáveis aleatórias reais X_n. Notemos que a hipótese de variância finita aumenta consideravelmente o conhecimento sobre o comportamento limite de S_n, uma vez que para n elevado esperamos agora que $P(n\mu - \sigma\sqrt{n} < S_n < n\mu + \sigma\sqrt{n}) \approx 0.68$, $P(n\mu - 2\sigma\sqrt{n} < S_n < n\mu + 2\sigma\sqrt{n}) \approx 0.95$ e $P(n\mu - 3\sigma\sqrt{n} < S_n < n\mu + 3\sigma\sqrt{n}) \approx 0.997$.

Sendo que a média de n v.a.r. não é mais do que a soma das n v.a.r. multiplicada pela constante $\frac{1}{n}$, o Teorema do limite central pode também ser trivialmente expresso em termos de médias. De fato, uma média é uma soma, $\overline{X}_n = \frac{X_1}{n} + \ldots + \frac{X_n}{n}$, e consequentemente, nas condições do teorema anterior, temos que

$$\frac{\overline{X}_n - E[\overline{X}_n]}{\sqrt{Var[\overline{X}_n]}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} Z \sim N(0,1).$$

Na Figura 1.6 ilustramos o Teorema do Limite Central com a soma de 10000 variáveis aleatórias Exponenciais independentes de parâmetro $\lambda = 2$. Considerámos amostras simuladas de dimensão 5000.

De seguida veremos alguns exemplos de aproximação de distribuições usuais pela normal, como consequência do Teorema do Limite Central.

Exemplo 1.4.1 (Aproximação da Binomial pela Normal)**.**

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$, v.a.r. independentes e tais que para todo $j \in \mathbb{N}$, $X_j \sim Bernoulli(p)$, $p \in]0,1[$.

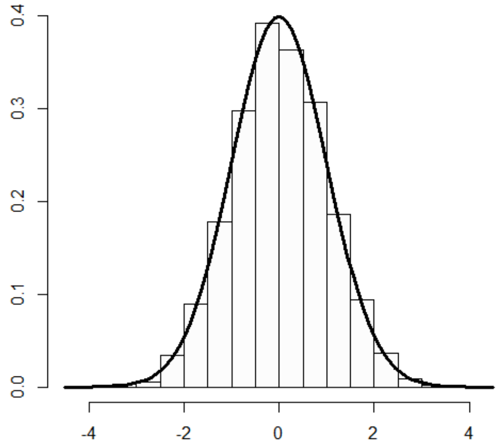

Figura 1.6: Distribuição por amostragem da soma padronizada de 10000 v.a.r. i.i.d. com distribuição Exponencial de parâmetro $\lambda = 2$ (a cinza) e função densidade normal padrão (a preto).

Pelo Corolário 1.3.1, a variável $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ segue a lei Binomial de parâmetros $n \in \mathbb{N}$ e $p \in]0,1[$, e sabemos que $E[S_n] = np$ e $Var[S_n] = np(1-p) < +\infty$. Logo, pelo Teorema do Limite Central

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Z \sim N(0,1)$$

e consequentemente

$$\frac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Z \sim N(0,1).$$

Podemos assim concluir que , para n suficientemente grande, a lei $B(n,p)$ é bem aproximada por uma lei $N(np, \sqrt{np(1-p)})$. A Figura 1.7 ilustra este fato com uma distribuição binomial de parâmetros $n = 50$ e $p = 0.4$.

Exemplo 1.4.2 (Aproximação da Poisson pela Normal)**.**

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$, v.a.r. independentes e tais que para todo $j \in \mathbb{N}$, $X_j \sim P(\lambda)$, $\lambda > 0$.

A v.a.r. S_n segue a lei de Poisson de parâmetro $n\lambda$, pelo Teorema 1.12 Então, como $E[S_n] = Var[S_n] = n\lambda < +\infty$, pelo Teorema do Limite Central

$$\frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Z \sim N(0,1)$$

e

$$\frac{\overline{X}_n - \lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Z \sim N(0,1).$$

Assim, para n suficientemente grande, a lei $P(n\lambda)$ é também bem aproximada por uma lei $N(n\lambda, \sqrt{n\lambda})$, como ilustra a Figura 1.8 com uma lei $P(50 \times 2)$. Obviamente que qualquer lei $P(\lambda')$, $\lambda' > 0$, é bem aproximada por uma lei $N(\lambda, \sqrt{\lambda})$, para λ' suficientemente grande.

Com argumentação análoga prova-se que qualquer variável aleatória infinitamente divisível com variância finita pode ser aproximada por uma Normal com o mesmo valor médio e variância. Esta

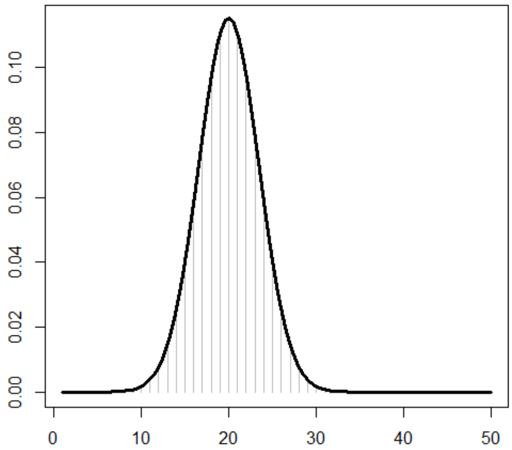

Figura 1.7: Função de probabilidade $B(50, 0.4)$ (a cinza) e função densidade $N(50 \times 0.4, \sqrt{50 \times 0.4 \times 0.6}) = N(20, 3.4641)$ (a preto).

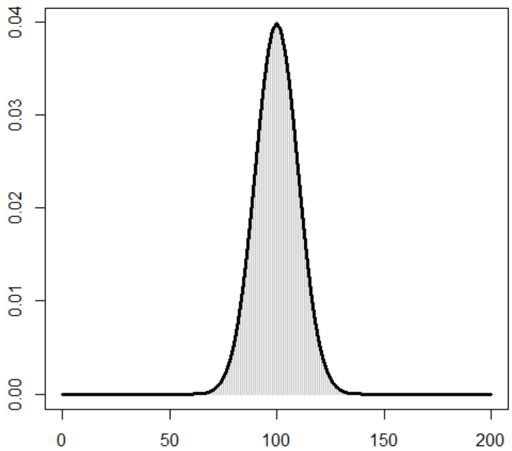

Figura 1.8: Função de probabilidade $P(50 \times 2)$ (a cinza) e função densidade $N(50 \times 2, \sqrt{50 \times 2}) = N(50, 10)$ (a preto).

é uma das razões por que o conceito de divisibilidade infinita tem grande importância na Teoria da Probabilidade.

Nos exemplos seguintes analisamos a aproximação à normal para algumas variáveis infinitamente divisíveis vista anteriormente.

Exemplo 1.4.3 (Aproximação da Gama pela Normal)**.**

Se $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, então

$$\frac{X - \alpha/\lambda}{\sqrt{\alpha}/\lambda} = \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}} X - \sqrt{\alpha} \approx Z \sim N(0, 1).$$

Decorre do Corolário 1.3.3 da divisibilidade infinita da variável aleatória Gama e do se ter $E[X] = \frac{\alpha}{\lambda}$ e $Var[X] = \frac{\alpha}{\lambda^2}$.

Assim, para $\alpha > 0$ suficientemente grande, a lei $\Gamma(\alpha, \lambda)$, $\alpha,\ \lambda > 0$ é bem aproximada por uma lei $N(\alpha/\lambda, \sqrt{\alpha}/\lambda)$, como se ilustra na Figura 1.9.

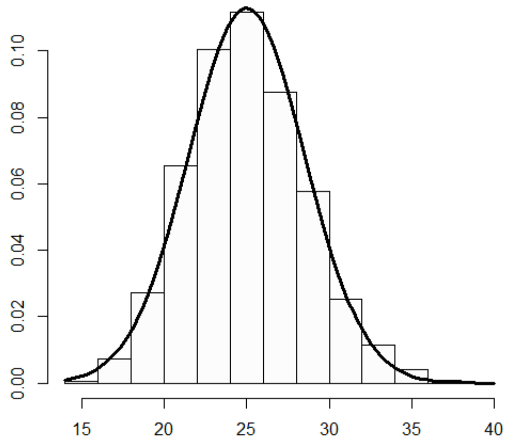

Figura 1.9: Função de probabilidade $\Gamma(50, 2)$ (a cinza) e função densidade $N(50/2, \sqrt{50}/2) = N(25, 3.5355)$ (a preto).

Como casos particulares do anterior temos:

Exemplo 1.4.4 (Aproximação da Exponencial pela Normal).
Se $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$, então $\frac{X-1/\lambda}{1/\lambda} = \lambda(X-1) \approx Z \sim N(0,1)$.

Exemplo 1.4.5 (Aproximação da Qui-quadrado pela Normal).
Se $X \sim \chi^2_n$, $n \in \mathbb{N}$, então $\frac{X-n}{\sqrt{2n}} \approx Z \sim N(0,1)$.

Salientamos que a aproximação à normal não se tem no caso de variáveis de Cauchy, apesar de estas serem infinitamente divisíveis, porque não têm variância finita.

O Teorema do Limite Central justifica a importância do modelo normal, que pode ser usado como aproximação em muitas situações, admitindo que existe algum mecanismo aditivo subjacente. É pois notório a modelação de tantos fenómenos reais usando normais, contudo nem tudo é normal. Existem situações na vida diária em que uma única observação que se afasta da tendência central dos dados poderá, pela sua magnitude, ser comparável à acumulação de todas as outras não dominantes. Nestas situações as estatísticas ordinais extremais assumem primordial importância. Todavia, quando nos focamos nos extremos a aproximação pela normal deixa de ser uma verdade irrefutável. Para melhor percebermos esta situação, consideremos os dados 'zaventem.txt' correspondentes à velocidade máxima diária do vento em Zaventem registadas entre 1985 e 1992. Estes 3225 dados estão disponíveis em `https://lstat.kuleuven.be/Wiley/` (ver Beirlant *et al.* (2004) e Gomes *et al.* (2013)). Na Figura 1.10 podemos ver a distribuição de frequências das 3225 velocidades máximas diárias do vento em Zaventem.

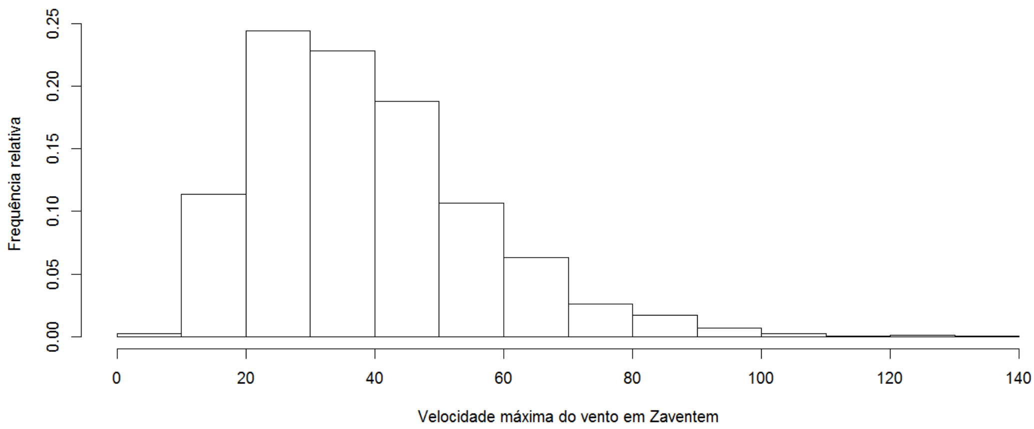

Figura 1.10: Velocidade máxima diária dos ventos em Zaventem.

Constatamos pela Figura 1.10 que os dados da velocidade máxima diária dos ventos em Zaventem não podem ser modelados por uma distribuição normal. Iremos deste modo, no próximo capítulo, analisar o comportamento do máximo de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.

Capítulo 2

Comportamento do máximo de variáveis aleatórias reais independentes e identicamente distribuídas

2.1 Introdução

Como consequência do Teorema do Limite Central vimos, no capítulo anterior, que o único modelo estável para somas com variância finita é o modelo normal. Esta noção de estabilidade tornou mais fácil a modelação de fenômenos aditivos, uma vez que a acumulação de informação, sob a forma de mais parcelas, apenas nos faz mudar a localização e a escala, mas permanecemos no mesmo modelo. Contudo, a convergência de somas para uma normal dá-se quando nenhuma das parcelas tem um papel preponderante, ou seja, quando as caudas da distribuição subjacente tem um peso moderado, que é explicitado através da exigência da existência de segundo momento. Esta situação altera-se quando as estatísticas ordinais extremais têm algum protagonismo, o que acontece se o modelo distribucional de base tiver caudas pesadas.

Faz assim sentido investigar o comportamento distribucional de estatísticas ordinais extremais, em particular do máximo e do mínimo. A relevância prática do comportamento limite de máximos e de mínimos em questões que vão desde cheias ou secas, máximos de ventos e localização de aeroportos ou resistência de estruturas de arranha-céus, máximos de ventos e marés ou de vagas na construção de diques ou de plataformas de exploração petrolífera, e questões de fiabilidade de materiais ou tempos de vida de seres vivos Pestana e Velosa (2010), justificam ainda mais o seu estudo neste capítulo.

Começamos por abordar o estudo das distribuições exatas de estatísticas ordinais, dando principal destaque para a distribuição do máximo de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Seguidamente, abordaremos o seu comportamento assintótico. Veremos que o comportamento assintótico das estatísticas ordinais centrais é regido pelo Teorema do Limite Central, enquanto que as estatísticas ordinais extremais têm comportamento caraterizado pelo Teorema Limite Extremal, que será o resultado principal deste capítulo.

O estudo das estatísticas ordinais e, em particular a análise do seu comportamento assintótico em lei, constitui um ramo importante da Estatística designado Teoria dos Valores Extremos. Uma das obras básicas de referência desta àrea é Leadbetter *et al.* (1983).

2.2 Distribuição exata do máximo

Consideremos agora que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de v.a.r. independentes e identicamente distribuídas com f.d. comum F e designemos por M_n o máximo das n primeiras variáveis da sucessão $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,

$$M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

A função de distribuição do máximo M_n é consequência imediata do fato das v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$

serem i.i.d., como se mostra a seguir

$$\begin{aligned} F_{M_n}(x) &= P(M_n \le x) \\ &= P(\max\{X_1, \ldots, X_n\} \le x) \\ &= P(X_1 \le x, \ldots, X_n \le x) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le x) = F^n(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

De forma análoga podemos obter a distribuição do mínimo das n primeiras variáveis da sucessão $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $m_n = \{X_1, \ldots, X_n\}$, uma vez que este se relaciona com o máximo da seguinte forma

$$m_n = -\max\{-X_1, \ldots, -X_n\}. \tag{2.2.2}$$

Por este motivo, em tudo o que se segue, iremos apenas focar-nos no estudo do comportamento distribucional do máximo.

De seguida veremos dois exemplos que ilustram a aplicação da distribuição do máximo e do mínimo na determinação do tempo de vida de um sistema, cujo tempo de vida é uma função exclusiva dos tempos de vida das suas n componentes. Estes exemplos ilustram a fiabilidade de um sistema, ou seja, de um modo geral, o grau de confiança ou probabilidade que atribuímos ao funcionamento sem falhas por parte de um sistema, em certo ambiente e durante um período de tempo de pelo menos t_0 unidades (Morais (2007)). Estes exemplos podem ser encontrados em Gomes *et al.* (2013).

Exemplo 2.2.1 (Tempo de vida de um sistema em série).

Consideremos um sistema em série com n componentes, esquematizado na Figura 2.1, e denotemos por T_i o tempo de vida da componente $i = 1, \ldots, n$. Seja T_S o tempo de vida do sistema que depende (exclusivamente) das durações de vida das n componentes, *i.e.*, de $T_1, \ldots, T_n$.

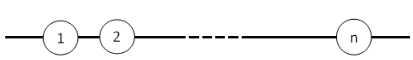

Figura 2.1: Esquema de um sistema em série com n componentes.

Um sistema em série funciona se e só se funcionarem todas as suas n componentes e falha quando uma das componentes falhar. Se assumirmos que os tempos de vida não negativos das componentes, T_i, $i = 1, \ldots, n$, são variáveis aleatórias i.i.d. com f.d. comum $F_T(t) = P(T_i \le t)$, $i = 1, \ldots, n$, o tempo de vida do sistema em série corresponde a

$$T_S = \min\{T_1, \ldots, T_n\}$$

e tendo em conta (2.2.2) a sua função de distribuição é dada por

$$\begin{aligned} F_{T_S}(t) &= P(-\max\{-T_1, ..., -T_n\} \le t) \\ &= 1 - P(\max\{-T_1, \ldots, -T_n\} \ge -t) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(T_i > t) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P(T_i \le t)) \\ &= 1 - (1 - F_T(t))^n, \quad t \ge 0. \end{aligned}$$

Do ponto de vista qualitativo a fiabilidade pode ser definida como a capacidade de um sistema se manter funcional sem interrupções (pelo menos) até ao instante t (Morais (2007)). Logo, corresponde à função de sobrevivência (ou de fiabilidade) de T_S, *i.e.*,

$$S_{T_S}(t) = P(\min\{T_1, \ldots, T_n\} > t) = 1 - F_{T_S}(t) = (1 - F_T(t))^n, \quad t \ge 0.$$

Exemplo 2.2.2 (Tempo de vida de um sistema em paralelo)**.**

Um sistema em paralelo, esquematizado na Figura 2.2, contrariamente a um sistema em série, funciona se e só se pelo menos uma das n componentes funcionar e falha quando todas as componentes falharem.

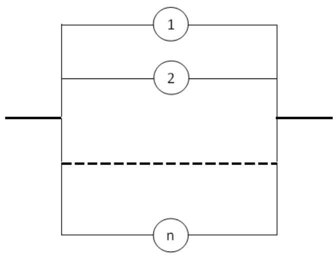

Figura 2.2: Esquema de um sistema em paralelo com n componentes.

Se denotarmos por T_P o tempo de vida do sistema em paralelo e por T_i os n tempos de vida i.i.d. com f.d. comum F_T das suas componentes, o tempo de vida do sistema em paralelo corresponde a

$$T_P = \max\{T_1, \ldots, T_n\}$$

e a f.d. de T_P é dada por

$$F_{T_P}(t) = \prod_{i=1}^{n} P(T_i \le t) = \prod_{i=1}^{n} F_T(t) = F_T^n(t), \quad t \ge 0.$$

Consequentemente a função de fiabilidade de T_P, é dada por

$$S_{T_P}(t) = P(\max\{T_1, \ldots, T_n\} \le t) = 1 - F_{T_P}(t) = 1 - F_T^n(t), \quad t \ge 0.$$

Consideremos agora que as n componentes têm um tempo de vida exponencial com parâmetro

1/2, ou seja,

$$F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t/2} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

e por conseguinte $F_{T_P}(t) = (1 - e^{-t/2})^n$, $t \geq 0$.

Na Tabela 2.1 consideramos um sistema em paralelo com $n \in \{3, 5, 10, 20, 100,\ 500, 1000\}$ componentes e analisamos os valores de $F_{T_P}(t) = (1 - e^{-t/2})^n$, $t \geq 0$, em instantes temporais diferentes, para melhor compreendermos o comportamento do máximo de n v.a.r. independentes e identicamente distribuídas.

n	$F_T^n(1)$	$F_T^n(100)$
3	6.092×10^{-2}	1
5	9.43×10^{-3}	1
10	8.9×10^{-5}	1
20	7.9×10^{-9}	1
100	3.098×10^{-41}	1
500	2.854×10^{-203}	1
1000	0	1

Tabela 2.1: Valores da f.d. do tempo de vida de um sistema em paralelo, $F_{T_P}(t) = F_T^n(t)$, para $t = 1$ e 100 e $n \in \{3, 5, 10, 20, 100, 500, 1000\}$.

A Tabela 2.1 evidencia o fato da distribuição exata do máximo depender da f.d. comum, que em aplicações práticas é em geral desconhecida, e o fato de quando $n \to +\infty$ a f.d. de M_n que obtemos ser degenerada. A obtenção de uma distribuição limite degenerada, ou seja como em (2.2.3),

$$\lim_{n \to +\infty} F^n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } F(x) < 1 \\ 1 & \text{se } F(x) = 1, \end{cases} \tag{2.2.3}$$

equivale a dizer que M_n converge quase certamente para x_F, onde $x_F = \sup\{x : F(x) < 1\}$ denota o limite superior do suporte de F. Na próxima secção iremos obter um resultado assintótico mais interessante e com maior aplicabilidade do que este.

A distribuição exata de uma qualquer estatística ordinal (e.o.) pode facilmente ser obtida, para tal consideremos a amostra aleatória $(X_1, \ldots, X_n)$ de X ordenada de forma crescente, que denotaremos por

$$X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \ldots \leq X_{i:n} \leq \ldots \leq X_{n:n}.$$

$X_{i:n}$ representa a i-ésima e.o. (ascendente), $X_{n:n}$ o máximo e $X_{1:n}$ o mínimo. A f.d. de uma e.o., $F_{X_{i:n}}(x) = P(X_{i:n} \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$, exige que pelo menos i (quaisquer) das variáveis aleatórias X_k sejam menores ou iguais a x, por outras palavras que haja i ou mais sucessos em n provas de Bernoulli em que o sucesso é verificar $X_k \leq x$, com probabilidade $p = P(X_k \leq x) = F(x)$. Logo, tendo em conta a função de probabilidade Binomial de parâmetros $n \in \mathbb{N}$ e $p \in]0, 1[$, obtemos

$$F_{X_{i:n}}(x) = P(X_{i:n} \leq x) = \sum_{k=i}^{n} {}^nC_k F_T^k(x)[1 - F_T(x)]^{n-k}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

onde ${}^nC_k$ denota as combinações de n elementos k a k.

Tal como determinámos o tempo de vida de um sistema cujo tempo de vida é função exclusiva dos tempos de vida das suas n componentes usando a distribuição do máximo e do mínimo, podemos também determinar o tempo de vida dum sistema usando a distribuição duma estatística ordinal qualquer. Estes sistemas são denominados sistemas $i - de - n$ como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 2.2.3 (Tempo de vida de um sistema $i - de - n$)**.**

Um sistema $i - de - n$ funciona se e só se pelo menos funcionarem i das suas n componentes. O tempo de vida de um sistema $i - de - n$ corresponde assim à i-ésima estatística ordinal de topo associada à amostra $(T_1, \ldots, T_n)$ dos tempos das n componentes, isto é, a $T_{n-i+1:n}$. Assumindo que os tempos de vida $T_1, \ldots, T_n$ são variáveis aleatórias i.i.d. com f.d. comum F_T, a f.d. de $T_{n-i+1:n}$ é dada por

$$\begin{aligned} F_{T_{n-i+1:n}}(t) &= P(T_{n-i+1:n} \leq t) \\ &= P(\text{pelo menos } n-i+1 \text{ das } n \text{ v.a.r. } T_i \leq t) \\ &= \sum_{k=n-i+1}^{n} {}^nC_k F_T^k(t)[1-F_T(t)]^{n-k}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

e a sua função de fiabilidade vem

$$\begin{aligned} S_{T_{n-i+1:n}}(t) &= P(T_{n-i+1:n} > t) \\ &= P(\text{pelo menos } i \text{ das } n \text{ v.a.r. } T_i > t) \\ &= \sum_{k=n-i+1}^{n} {}^nC_k [1-F_T(t)]^k [F_T(t)]^{n-k}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Obtivemos até agora a distribuição exata de uma estatística ordinal, em particular do máximo e consequentemente do mínimo. Convém agora clarificar o que se entende por estatísticas ordinais centrais e extremais para que melhor possamos perceber a ligação entre as estatísticas média, $\overline{X}_n$, e máximo M_n, Pestana e Velosa (2010).

Definição 2.2.1. *Dizemos que $X_{i(n):n}$ é uma estatística ordinal central se e só se $i(n)$, $n - i(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ e $\frac{i(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha \in]0,1[$.*

Dizemos que $X_{i(n):n}$ é uma estatística ordinal extremal se e só se $\frac{i(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ (estatística ordinal de máximos) ou se $\frac{i(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (estatística ordinal de mínimos).

Tendo em conta esta definição temos, por exemplo, que $X_{n:n}$ (máximo), $X_{n-1:n}$ (segundo máximo) e $X_{n-12:n}$ são estatísticas ordinais extremais, de máximos. Por outro lado, $X_{1:n}$ (mínimo) $X_{2:n}$ (segundo mínimo) e $X_{7:n}$ são estatísticas ordinais extremais, de mínimos. Como exemplos de estatísticas ordinais centrais temos $X_{I\left(\frac{n+1}{2}:n\right)}$ e $X_{I(0.9n)+1:n}$, onde $I(a)$, denota a parte inteira de $a \in \mathbb{R}$.

Uma característica importante das estatísticas ordinais é a sua relação com a média amostral $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Notemos que

$$\overline{X}_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_{i:n},$$

é uma combinação convexa das e.o., ou seja,

$$\overline{X}_n = \sum_{i=1}^{n} w_i X_{i:n}, \tag{2.2.4}$$

onde as ponderações $w_i = \frac{1}{n}$, $i = 1, \ldots, n$ atribuem igual relevância a todas as estatísticas ordinais.

A hipótese sobre a existência de segundo momento finito, que consta no Teorema do Limite Central, garante-nos que as e.o. "centrais" dominam as "extremais" (de máximos e de mínimos), assegurando assim que estas últimas têm uma influência irrelevante no comportamento das somas. Recordemos que o Teorema do Limite Central estabelece que existem constantes normalizadoras ou constantes de atração $a_n = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{Var[X_1]}{n}} > 0$ e $b_n = \mu = E[X_1] \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tais que

$$\frac{\overline{X}_n - b_n}{a_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} Z \sim N(0,1),$$

onde $\overline{X}_n = S_n/n$, ou equivalentemente que todas as variáveis aleatórias i.i.d. com segundo momento finito estão no domínio de atração da Normal. A distribuição Normal tem assim um vasto domínio de atração.

Considere-se uma sucessão $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de variáveis aleatórias i.i.d., com função de distribuição comum F e seja X uma variável aleatória não degenerada, com função de distribuição G; se existem sucessões de constantes $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$, tais que $\frac{S_n - b_n}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$, diz-se que F pertence ao domínio de atração (para somas) de G.

Até ao momento considerámos sempre a média aritmética simples dada em (2.2.4), no entanto podemos considerar médias ponderadas mais gerais, ou seja combinações convexas $\sum_{i=1}^{n} w_i X_{i:n}$, com ponderações $w_i \geq 0$, tais que $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Assim, trivialmente percebemos que qualquer e.o. $X_{j:n}$, $1 \leq j \leq n$, pode ser vista como uma média ponderada, uma vez que

$$X_{j:n} = \sum_{i=1}^{n} w_i X_{i:n},$$

com $w_i = 1$ e $w_j = 0$ para todo $i \neq j$.

Levanta-se naturalmente a questão de se a sucessão de médias ponderadas, $X_{j:n}$, $n \in \mathbb{N}$, sujeita a uma normalização linear terá também como limite uma f.d. não degenerada, em particular o máximo $M_n = X_{n:n}$, ou seja se existem constantes de atração $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Y,$$

onde Y é uma v.a. não degenerada. Procuramos assim saber se para M_n sujeito a uma normalização linear se teria como limite em (2.2.1) uma f.d. não degenerada, isto é, se

$$P(a_n^{-1}(M_n - b_n) \leq x) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{W}} G(x) \tag{2.2.5}$$

para alguma f.d. G não degenerada e constantes de normalização $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

A resposta à questão anterior é dada na próxima secção com o Teorema dos Tipos Extremos, formalmente demonstrado por Gnedenko (1943).

2.3 Distribuição assintótica do máximo

A caracterização da classe de possíveis leis limite para o máximo das n primeiras variáveis de uma sucessão $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, sujeito a uma normalização linear, foi estabelecido num resultado que ficou conhecido por Teorema dos Tipos Extremos. Este resultado impulsionador da Teoria Clássica de Valores Extremos será o principal resultado desta secção.

2.3.1 Teorema dos Tipos Extremos

Comecemos por notar que, atendendo a 2.2.1, (2.2.5) se pode escrever equivalentemente como

$$F^n(a_n x + b_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{W}} G(x), \quad (2.3.6)$$

e quando tal acontece dizemos que F pertence ao domínio de atração (para o máximo) de G e escrevemos $F \in D(G)$.

A classe de possíveis funções de distribuição G limite em (2.3.6) pode ser restringida a três tipos distintos, como refere o Teorema dos Tipos Extremos a seguir enunciado.

Teorema 2.3.1 (Teorema dos Tipos Extremos)**.** *Se a sucessão $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de variáveis aleatórias i.i.d. verifica (2.3.6) para sucessões de constantes reais $\{a_n > 0\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, então G é do tipo de uma das seguintes distribuições:*

Tipo I (Gumbel): $H(x) = exp(-e^{-x}), \quad -\infty < x < +\infty;$

Tipo II (Fréchet): $H(x) = \begin{cases} 0 & se\ x \leq 0 \\ exp(-x^{-\alpha}) & se\ x > 0, \alpha > 0; \end{cases}$

Tipo III (Weibull): $H(x) = \begin{cases} exp(-(-x)^{\alpha}) & se\ x \leq 0, \alpha > 0 \\ 1 & se\ x > 0. \end{cases}$

Este resultado, impulsionador da Teoria Clássica de Valores Extremos, foi obtido por Fréchet (1927), Fisher e Tippet (1928) e formalmente demonstrado por Gnedenko (1943). A demonstração deste resultado será apresentada mais adiante, depois de introduzirmos alguns conceitos e apresentarmos alguns resultados fundamentais à sua demonstração.

As três distribuições acima ficaram conhecidas como distribuições de valores extremos, e quando dizemos que G é uma distribuição do tipo extremo queremos rigorosamente dizer que $G(x) = H(ax+b)$, para algumas constantes $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ e H uma distribuição de Gumbel, Fréchet ou Weibull. Estas distribuições apresentam comportamentos na cauda muito diferentes, como podemos observar na Figura 2.3

Constatamos pela Figura 2.3 que a função densidade de probabilidade Weibull tem cauda curta e x_F é finito, a de Gumbel tem cauda exponencial e x_F é finito ou infinito e a de Fréchet tem cauda pesada com x_F infinito.

Tal como a distribuição Normal que aparece como limite no Teorema do Limite Central é estável para somas também as distribuições de valores extremos são estáveis para máximos. Mais ainda, a classe de leis limite para o máximo de sucessões i.i.d. apresentada no Teorema 2.3.1 coincide com

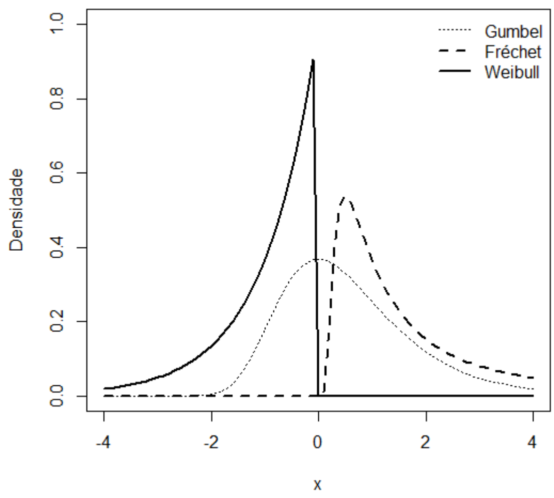

Figura 2.3: Distribuições de valores extremos (Gumbel, Fréchet e Weibull) com $\alpha = 1$.

a classe das distribuições max-estáveis, isto é, funções de distribuição G, tais que

$$G^n(a_n x + b_n) = G(x), \quad (2.3.7)$$

para algumas constantes reais $a_n > 0$ e b_n, $n \in \mathbb{N}$. A equação de estabilidade para máximos (2.3.7) equivale a dizer que existem constantes $a_n > 0$ e b_n, $n \in \mathbb{N}$, tais que $\frac{Y_{n:n} - b_n}{a_n} \stackrel{d}{=} Y$, com $Y_{n:n} = \max\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ onde Y_j, $j = 1, \ldots, n$, são réplicas independentes de $Y \sim G$.

Esta importante caracterização das leis limite do máximo de sucessões i.i.d. é consequência de (2.3.6) e de um resultado relativo à convergência de funções de distribuição, conhecido como Teorema dos Tipos de Khintchine.

Teorema 2.3.2 (Khintchine)**.** *Seja $\{F_n\}_{n\geq 1}$ uma sucessão de f.d. e G uma f.d. não degenerada, sejam $a_n > 0$ e b_n constantes tais que*

$$F_n(a_n x + b_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{W}} G(x),$$

então para alguma f.d. não degenerada G_* e constantes $\alpha_n > 0$, β_n tem-se

$$F_n(\alpha_n x + \beta_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{W}} G_*(x)$$

se e somente se

$$a_n^{-1}\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \quad e \quad a_n^{-1}(\beta_n - b_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$$

para algumas constantes $a > 0$ e b, e neste caso

$$G_*(x) = G(ax + b).$$

Podemos agora formalizar o que anteriormente dissemos sobre a classe de leis limite para o máximo de sucessões i.i.d. apresentada no Teorema 2.3.1 coincidir com a classe das distribuições max-estáveis.

Teorema 2.3.3. **(i)** *Uma f.d. não degenerada G é max-estável se e só se existe uma sucessão $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funções de distribuição e constantes $a_n > 0$ e b_n tais que*

$$F_n(a_{nk}x + b_{nk}) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{W}} G^{1/k}(x), \quad (2.3.8)$$

para cada $k = 1, 2, \ldots$.

(ii) *Em particular, se G é não degenerada, $D(G)$ é não vazio se e somente se G for max-estável. Então também $G \in D(G)$. Assim a classe de f.d. não degeneradas G que aparecem como leis limite em (2.3.8), coincide com a classe de f.d. max-estáveis.*

Como consequência dos resultados anteriores temos que uma f.d. não degenerada G é max-estável se, para cada $n = 2, 3, \ldots$, a f.d. G^n é do mesmo tipo de G, como veremos a seguir.

Corolário 2.3.1. *Se G é max-estável, então existem funções reais $a(s) > 0$ e $b(s)$ definidas para $s > 0$ tais que*

$$G^s(a(s)x + b(s)) = G(x), \quad (2.3.9)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e $s > 0$.

Estão reunidas quase todas as condições para demonstrar o Teorema dos Tipos Extremos, resta demonstrar que uma f.d. é max-estável se e só se for do mesmo tipo de uma das distribuições de valores extremos. Para tal precisamos do seguinte lema sobre inversas de funções monótonas.

Lema 2.3.1. **(i)** *Seja $\psi(x)$ uma função não decrescente contínua à direita. Se $a > 0$, b e c são constantes, e $H(x) = \psi(ax + b) - c$, então $H^{-1}(y) = a^{-1}(\psi^{-1}(y + c) - b)$, onde ψ^{-1} é a função inversa no intervalo $]\inf\{\psi(x)\}, \sup\{\psi(x)\}[$ definida como $\psi^{-1}(y) = \inf\{x : \psi(x) \geq y\}$.*
(ii) *Para ψ como em (i), se ψ^{-1} é contínua, então $\psi^{-1}(\psi(x)) = x$.*
(iii) *Se G é uma f.d. não degenerada, então existem constantes $y_1 < y_2$ tais que $G^{-1}(y_1) < G^{-1}(y_2)$ são bem definidas (e finitas).*

Teorema 2.3.4. *Toda a distribuição max-estável é de um dos tipos extremos definidos no Teorema 2.3.1*

Reciprocamente, cada distribuição do tipo extremo é max-estável.

Demonstração: Se G é max-estável, então a igualdade (2.3.9) verifica-se para todo $s > 0$ e todo x. Se $0 < G(x) < 1$ de (2.3.9) obtemos

$$\begin{aligned} & -s\log G(a(s)x + b(s)) = -\log G(x) \\ \Leftrightarrow \quad & -\log(-\log G(a(s)x + b(s))) - \log s = -\log(-\log G(x)) \qquad (2.3.10) \end{aligned}$$

Da propriedade de max-estabilidade com $n = 2$ podemos ver que G não pode ter nenhum salto em qualquer limite (superior ou inferior) finito do suporte. Assim, a função não decrescente $\psi(x) = -\log(-\log G(x))$ é tal que $\inf\{\psi(x)\} = -\infty$, $\sup\{\psi(x)\} = +\infty$ e portanto temos uma função inversa $U(y) = \psi^{-1}$ definida para todo real y como no Lema 2.3.1. Podemos assim escrever (2.3.10) como

$$\psi(a(s)x + b(s)) - \log s = \psi(x),$$

de modo a que pelo Lema 2.3.1(i) se tenha

$$\frac{U(y+\log s)-b(s)}{a(s)}=U(y).$$

Subtraindo agora em ambos os membros $U(0)=\frac{U(\log s)-b(s)}{a(s)}$ vem

$$\frac{U(y+\log s)-U\log s}{a(s)}=U(y)-U(0),$$

e escrevendo $z=\log s$, $\tilde{a}(z)=a(e^z)$, e $\tilde{U}(y)=U(y)-U(0)$, temos

$$U(y+z)-U(z)=U(y)\tilde{a}(z)$$

ou equivalentemente

$$\tilde{U}(y+z)-\tilde{U}(z)=U(y)\tilde{a}(z) \quad (2.3.11)$$

para todo o real y e z.

Trocando agora y por z e vice-versa em (2.3.11) e subtraindo a equação (2.3.11) da obtida, resulta

$$\tilde{U}(y)(1-\tilde{a}(z))=\tilde{U}(z)(1-\tilde{a}(y)). \quad (2.3.12)$$

Dois casos são possíveis para $\tilde{a}(z)$ e serão analisados de seguida.

Caso 1: $\tilde{a}(z)=1$ para todo z em (2.3.11) obtemos

$$\tilde{U}(y+z)=\tilde{U}(y)+\tilde{U}(z).$$

A única solução monótona crescente para esta equação é simplesmente $\tilde{U}(y)=\rho y$ para algum $\rho>0$, o que equivale a $U(y)-U(0)=\rho y$ ou

$$\psi^{-1}(y)=U(y)=\rho(y)+\nu, \quad \nu=U(0).$$

Como a função inversa é contínua, pelo Lema 2.3.1(i) temos

$$x=\psi^{-1}(\psi(x))=\rho\psi(x)+\nu$$

ou equivalentemente $\psi(x)=\frac{x-\nu}{\rho}$. Mas $\psi(x)=-\log(-\log G(x))$ e portanto $G(x)=exp\{-e^{-(x-\nu)/\rho}\}$ quando $0<G(x)<1$.

Como G não pode ter nenhum salto em qualquer limite (superior ou inferior) finito do suporte e é da forma anterior para todo x, então é uma f.d. de valores extremos do Tipo I.

Caso 2: $\tilde{a}(z)\neq 1$ para todo z em 2.3.12 obtemos

$$\tilde{U}(y)=\frac{U(z)}{1-\tilde{a}(z)}(1-\tilde{a}(y))=c(1-\tilde{a}(y)), \quad (2.3.13)$$

onde $c=\frac{\tilde{U}(z)}{1-\tilde{a}(z)}\neq 0$, uma vez que $\tilde{U}(z)=0$ implicaria $\tilde{U}(y)=0$ para todo y, e portanto $U(y)=U(0)$, constante.

De 2.3.11 obtemos agora

$$c(1-\tilde{a}(y+z))-c(1-\tilde{a}(z))=c(1-\tilde{a}(y))\tilde{a}(z),$$

o que dá $\tilde{a}(y+z)=\tilde{a}(y)\tilde{a}(z)$. Mas $\tilde{a}$ é monótona (de (2.3.13)), e as únicas soluções monótonas não constantes para esta equação funcional têm a forma $\tilde{a}=e^{\rho y}$ para $\rho\neq 0$. Assim 2.3.13 vem

$$\psi-1(y)=U(y)=\nu+c(1-e^{\rho y}),$$

onde $v=U(0)$. Como $-\log(-\log G(x))$ é crescente, U também o é, portanto temos de ter $c<0$ se $\rho>0$ e $c>0$ se $\rho<0$. Pelo Lema 2.3.1(ii) vem,

$$x=\psi-1(\psi(x))=\nu+c(1-e^{\rho\psi(x)})=\nu+c(1-(-\log G(x))^{-\rho}),$$

donde, para $0<G(x)<1$,

$$G(x)=exp\left\{-\left(1-\frac{x-\nu}{c}\right)^{-1/\rho}\right\}.$$

Novamente, pela continuidade de G em qualquer limite finito do suporte, vemos que G é Tipo II ou Tipo III, com $\alpha=\frac{1}{\rho}$ ou $-\frac{1}{\rho}$, consoante $\rho>0$ $(c<0)$ ou $\rho<0$ $(c>0)$.

O recíproco é óbvio, uma vez que, por exemplo, para o Tipo I se tem

$$(\exp\{-e^{-(ax+b)}\})^n=\exp\{-e^{-(ax+b-\log n)}\},$$

ou seja a equação de max-estabilidade verifica-se. Expressões semelhantes podem ser obtidas para os Tipos II e III. □

A demonstração do resultado principal deste capítulo, o Teorema dos Tipos Extremos, é agora quase imediata.

Demonstração: (Teorema dos Tipos Extremos) Se 2.2.5 se verifica, o Teorema 2.3.3 mostra-nos que G é max-estável e portanto, pelo Teorema 2.3.4, é do tipo extremo. □

Mostramos no exemplo seguinte que a distribuição exponencial pertence ao domínio de atração Gumbel (Tipo I)

Exemplo 2.3.1 (Distribuição Exponencial)**.**
Seja $X_i\overset{d}{=}X\sim\mathcal{E}(1)$. Então

$$\begin{aligned}F_{X_{n:n}-\ln n}(x) &= F_{X_{n:n}}(x+\ln n)=[1-e^{-(x+\ln n)}]^n\mathbb{1}_{]-\ln n,+\infty[}(x)\\ &= \left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right)^n\mathbb{1}_{]-\ln n,+\infty[}(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\exp -e^{-x}\mathbb{1}_{]-\infty,+\infty[}(x).\end{aligned}$$

Existem assim constantes $a_n=1$ e $b_n=\ln n$, $n\in\mathbb{N}$ para as quais se verifica a convergência 2.3.6 para uma f.d. limite de Gumbel. A distribuição exponencial pertence assim ao domínio de atração de Gumbel (Tipo I).

A distribuição Normal também está no domínio de atração de Gumbel.

Vimos que o máximo de n variáveis aleatórias i.i.d. não é mais do que uma média ponderada e obtivemos a sua distribuição exata e assintótica. Apesar da importância que esta estatística tem, a média aritmética simples continua a ser a estatística amostral com mais relevo na inferência estatística. Por este motivo ela vai surgindo constantemente ao longo dos vários níveis de ensino, contudo a preceção do seu comportamento por parte dos alunos nem sempre é a mais correta. Iremos, no que se segue, tentar perceber quais são as principais dificuldades dos alunos e professores no ensino-aprendizagem do conceito de média e de alguns temas com ela relacionados.

Capítulo 3

A média amostral no ensino

3.1 Introdução

Se $(X_1, \ldots, X_n)$ é uma amostra aleatória de uma população X, então $X_1, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. A estatística média, $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, fundamental em inferência estatística, tem, pelo Teorema do Limite Central, uma distribuição aproximadamente normal quando o tamanho da amostra é suficientemente grande, como vimos no primeiro capítulo. As suas realizações, $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, resumem de forma simples conjuntos de dados e por conseguinte aparece desde cedo nos currículos escolares e é frequentemente usada pela população no seu dia a dia. O estudo da distribuição amostral da média consta dos programas da grande maioria das unidades curriculares de probabilidade e estatística no ensino superior.

A simplicidade de cálculo de médias, conjuntamente com uma desvalorização sistemática do contexto de muitas situações de ensino pode dar a alunos e professores a ilusão que um conjunto de competências é tudo o que é necessário para perceber o tópico (Jacobbe e Carvalho (2011)).

Investigação sobre a compreensão da média por alunos tem sido umas das áreas mais exploradas na investigação em educação matemática e estatística (Jacobbe e Carvalho (2011)), existindo uma vasta literatura sobre esta temática.

Neste capítulo tentaremos perceber quais são as maiores dificuldades, apontadas na literatura, que professores e alunos, dos vários níveis de ensino, sentem no ensino e aprendizagem do conceito média e temas com ela relacionados, como a sua distribuição amostral.

3.2 Perspetiva de professores e alunos

O conhecimento de alguns conceitos de estatística parecem ser senso comum, ou seja um conhecimento resultante do processo de socialização, construído com base em experiências subjetivas e formulado em linguagem vulgar frequentemente ambígua. Este conhecimento muitas vezes não se traduz em conhecimento científico que é um conhecimento que requer uma formação prévia para a sua aquisição. A iliteracia estatística é infelizmente uma realidade que afeta muitas vezes não só os alunos mas também os professores. Em Jacobbe e Carvalho (2011) podemos encontrar uma vasta revisão da literatura dos estudos realizados sobre a compreensão que os professores têm das medidas de localização ou de tendência central, média, mediana e moda.

Muitos erros comuns têm surgido à volta de conceitos básicos de estatística, nomeadamente das medidas de localização, média, mediana e moda. Dudewicz e Mishra (1988) destacam trabalhos de grande qualidade onde estes conceitos são mal interpretados, como no livro de Kendall e Stuart (1969) onde são feitas as seguintes afirmações: “Uma mnemónica útil é observar que média, mediana e moda ocorrem na mesma ordem (ou por ordem inversa) da que aparece no dicionário” e “Numa população simétrica, a média mediana e moda coincidem”. Estes erros facilmente passam para os alunos no processo de ensino aprendizagem, contribuindo para o uso erróneo destes conceitos no dia a dia.

Num estudo de Jacobbe (2012), sobre o conhecimento que professores do primeiro ciclo, dos Estados Unidos, têm sobre as medidas de localização, conclui-se que quando solicitados para descrever a diferença entre média e mediana e para apresentar exemplos onde a mediana seja mais informativa que a média, dois dos três professores envolvidos no estudo tiveram dificuldades em explicar o que estas medidas representam. Salienta ainda que os professores não possuem a ligação entre o procedimento para calcular a média e a mediana e o que estas medidas realmente envolvem num contexto particular.

Uccellini (1996) exemplifica que se questionarmos um grupo de alunos do ensino básico sobre qual a média dos valores 2, 8, 4, 6, 3 e 7, eles provavelmente responderão 5. Contudo, se questionarmos os mesmos alunos sobre o que representa o número 5 em relação aos seis números apresentados, a resposta mais provável será uma explicação do algoritmo para o cálculo da média. Isto demonstra que os alunos não adquiriram uma compreensão conceptual da estatística básica.

Leavy e Loughlin (2006) indicam que existem dois tipos fundamentais de compreensão da média, conceptual e processual. Conceptualmente a média é vista como ponto de equilíbrio ou centro de gravidade, representando o conjunto de dados. Processualmente é o valor no qual a soma dos desvios numa direção é igual a soma dos desvios na outra direção. Para os autores, interpretações da média como distribuição equitativa dos dados, ou valor de equilíbrio, onde os valores mais altos compensam os valores mais baixos, demonstram compreensão conceptual do conceito. Como interpretações incorretas da média, professores e alunos dão respostas baseadas no valor máximo, valor mínimo, num dado específico, na mediana e na moda. Conclusões semelhantes foram obtidas por Goodchild (1988), Mokros e Russell (1995), Martins *et al.* (2009), Gattuso e Mary (1998), entre muitos outros.

Em relação às distribuições amostrais, em particular a distribuição amostral da média, os trabalhos de Chance *et al.* (2004) e Lunsford *et al.* (2006) destacam as seguintes dificuldades sentidas por parte dos alunos:

1. não compreendem que uma distribuição amostral é a distribuição de uma estatística;

2. não percebem que uma distribuição amostral da média é a distribuição de todas as médias possíveis para um dado tamanho de amostra aleatoriamente retirada duma população;

3. acreditam que a distribuição amostral se parece mais com a população à medida que o tamanho da amostra aumenta;

4. acham que as distribuições amostrais para amostras de pequena dimensão variam da mesma forma que as distribuições amostrais para amostras com grande dimensão;

5. não percebem que à medida que o tamanho da amostra aumenta, a variabilidade das médias das amostras diminui;

6. confundem as situações a aplicar o Teorema do Limite Central ou seja, não percebem que a aproximação pela Normal se aplica nalgumas situações mas não em outras.

Estas dificuldades são essencialmente causadas pelas metodologias de ensino usadas, o deficiente conhecimento matemático que alguns alunos acarretam, a sua experiência prévia com a estatística, a sua área de estudo e sobretudo pela falta de diversidade em atividades, como por exemplo diferentes visualizações (ver Chance *et al.* (2004)).

Dada a importância da utilização da média, o seu conceito deve ser passado aos alunos de forma clara e significativa, o que só será possível se os professores levarem em conta aspectos didáticos que facilitem a interpretação desta estatística. A seguir veremos algumas estratégias que podem ser usadas na sala de aulas para consolidar estes conceitos e superar as dificuldades sentidas.

3.3 Estratégias de ensino e aprendizagem para superação de dificuldades

Diversos estudos mostram que os alunos podem até ser capazes de efetuar cálculos estatísticos, mas frequentemente não conseguem perceber o processo fundamental ou interpretar os resultados por detrás destes cálculos. Portanto, as estratégias usadas para a transmissão desses conteúdos devem ser adequadas, de modo que a sua aprendizagem se possa tornar mais significativa.

Infelizmente, a compreensão de conceitos, como por exemplo da média, por parte de alguns professores parece muito similar à compreensão dos alunos (Jacobbe e Carvalho (2011)). Consequentemente, a forma de começar a ter um impacto na compreensão dos alunos é de começar a investir na compreensão dos professores.

Para ajudar a minimizar as dificuldades existentes no processo de ensino e aprendizagem das distribuições por amostragem, a literatura em educação sugere o uso de simulações (ver, por exemplo, Glencross (1988), Lipson (2002), Aguinis e Branstetter (2007) e Lane (2015)). Muitos destes trabalhos defendem que o uso da tecnologia permite que os alunos estejam diretamente envolvidos com a construção dos conceitos, focando-se em todo o processo, em vez de se centrarem apenas nos resultados finais. Também defendemos que as simulações são importantes no ensino das distribuições por amostragem, e não só, por este motivo no primeiro capítulo usámos sempre simulações para ilustrar as distribuições amostrais da soma. Os comandos do R, que se encontram no Apêndice A, podem assim ser utilizados na sala de aula para uma melhor percepção por parte dos alunos destes conceitos. Os parâmetros das distribuições podem ser facilmente mudados e os tamanhos das amostras também.

Glencross (1988) sugere uma atividade prática e interativa que pode ser usada na sala de aula para melhor compreensão das distribuições por amostragem, envolvendo para além do computador a manipulação de objetos como bolas, tampas, etc. A atividade consiste primeiramente em ter uma caixa com, por exemplo, bolas numeradas de acordo com uma distribuição de frequências específica. Seguidamente:

1. cada aluno escolhe, aleatoriamente e com reposição, uma amostra de $n = 2, 5, 10$ bolas, regista os números obtidos e calcula a média da amostra;

2. o processo é repetido em toda a turma até que, por exemplo, 100 amostras sejam selecionadas. Temos assim 100 médias amostrais para amostras de dimensão $n = 2, 5, 10$. Estes resultados podem ser apresentados em gráficos para fácil comparação;

3. calcula-se a média e o desvio padrão das 100 médias amostrais para os diferentes tamanhos de amostras e os resultados experimentais comparados com os resultados teóricos obtidos.

Salientamos que Glencross (1988) refere no último ponto que os resultados experimentais são comparados aos obtidos por aplicação do Teorema do Limite Central. Tal é obviamente incorreto, uma vez que para o tamanho das amostras escolhidas não será possível ver a aproximação à normal, sendo apenas visível a distribuição por amostragem da média. Mais ainda, para o exemplo que apresenta, que veremos de seguida, não faz sentido evocar o Teorema do Limite Central pois é a aditividade da lei normal que aqui está em causa.

Exemplo 3.3.1. Consideremos uma caixa com 200 bolas, cada uma numerada de acordo com a distribuição apresentada na Tabela 3.1. Esta distribuição de frequências é aproximadamente Normal de média 10 e desvio padrão 3.93.

Nº	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Fr	1	2	3	4	7	9	12	15	18	19	20	19

Nº	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Fr	18	15	12	9	7	4	3	2	1

Tabela 3.1: Número das bolas com as respetivas frequências absolutas.

Os alunos retiram as bolas como descrito em cima e calculam a média de cada uma das amostras obtidas de por exemplo dimensão 2. Usando, por exemplo a folha de cálculo Excel ou outro *software* faz-se o gráfico da distribuição de frequências das médias obtidas. Incentiva-se os alunos a calcular a média e o desvio padrão da amostra de médias calculadas. Seguidamente os alunos podem constatar pelo gráfico que a distribuição é aproximadamente Normal com média 10 e desvio padrão $3.93/\sqrt{2} = 2.78$.

O exercício apresentado no exemplo anterior pode ser facilmente reproduzido com valores gerados a partir de outras distribuições de probabilidade, bastando para tal usar alguns dos comandos das simulações apresentadas nas figuras do capítulo um, disponíveis em anexo.

Para além das simulações, o professor deve seguir os seguintes princípios como diretrizes para o desenho de uma atividade de aprendizagem adequada (Glencross (1988)):

1. fornecer uma boa coleção de exemplos que exemplifiquem os conceitos;

2. assegurar-se de que o conceito se verifica em diferentes situações;

3. ter a certeza de que todas as variáveis envolvidas nos conceitos são vistas a variar.

De modo a enquadrar os temas abordados no ensino, terminamos este capítulo com a análise dos programas de Matemática do 1º e 2º ciclos do ensino secundário geral e do programa de Estatística Aplicada à Educação do Instituto Superior de Ciências de Educação da Huíla, de Angola. A escolha dos programas de Angola prende-se como o fato do autor deste trabalho ser professor de Matemática neste país e por conseguinte ser a realidade que melhor conhece.

3.4 Enquadramento no ensino

Nos últimos anos temos assistido a uma expansão no ensino da estatística em todos os níveis de ensino, desde o primeiro ciclo ao ensino universitário. Tal deve-se, por um lado, ao reconhecimento da importância da literacia estatística, e por outro à disponibilidade de *software*, que permite efetuar análises estatísticas sofisticadas.

Há muitos estudos que apresentam razões importantes para o ensino e aprendizagem da estatística e probabilidades no contexto escolar, salientando que trabalhar temas de estatística e probabilidades motivantes e proporcionando métodos para lidar com a incerteza, ajudam a compreender os argumentos estatísticos e a distinguir as utilizações corretas de procedimentos estatísticos de utilizações incorretas ou falaciosas e permitem aplicações significativas da Matemática a todos os níveis (Martins *et al.* (2009)).

3.4.1 Matemática do 1º e 2º ciclos do ensino secundário geral de Angola

O ensino secundário em Angola é o nível que sucede o ensino primário, resultantes da divisão do subsistema do ensino geral, e que prepara os alunos para o ingresso no ensino superior ou no mercado de trabalho imediatamente ou após uma formação profissional complementar. O ensino secundário é dividido em dois ciclos fundamentais, o primeiro que compreende as 7ª, 8ª e a 9ª classes e o segundo ciclo que compreende as 10ª, 11ª e 12ª classes. Os programas de Matemática destes ciclos de estudos estão disponíveis no Apêndice B. Vamos analisar apenas os programas de Matemática das 7ª, 8ª e 11ª classes por serem as únicas classes onde são tratados temas de Estatística.

Estes programas são elaborados pelo Instituto Nacional de Investigação e Desenvolvimento da Educação (INIDE) do país, com o objetivo de se alcançar as mesmas metas a nível nacional. Os programas de Matemática são concebidos de modo a oferecerem ao professor uma visão global com um roteiro proposto, ou seja em cada tema são colocados à disposição do professor objetivos, metodologias, meios de ensino, etc. O professor tem de ser suficientemente criativo e inovador ao ponto de não ficar preso apenas nas sugestões metodológicas que são previamente concebidas nos programas e adotar técnicas de acordo com o contexto dos seus alunos em relação aos temas.

No programa de Matemática da 7ª classe a Estatística aparece no segundo capítulo. O objetivo principal deste capítulo é que os alunos sejam capazes recolher e organizar dados. Como pré-requisito os alunos devem conhecer a moda e a média aritmética. Como podemos ver, o programa já sugere que os alunos tenham conhecimentos sobre conceitos que apesar de básicos podem ser erradamente interpretados como vimos anteriormente.

Na 8ª classe avança-se um pouco mais na organização e representação de dados, sendo abordados os polígonos de frequência e pictogramas, mas nada mais. Constatamos que há pouca exploração dos conteúdos de Estatística no 1º ciclo do ensino secundário em Angola.

Como já referimos, os programas da 9ª, 10ª e 12ª classes não abordam a Estatística, analisamos por isso no 2º ciclo do ensino secundário apenas o programa da 11ª classe do curso de ciências físicas e biológicas. Na 11ª classe, o capítulo cinco é dedicado à Estatística Descritiva, onde no seu ponto 5.3 se fazem consolidações gerais sobre a média, a mediana e a moda. O objetivo principal do capítulo é que os alunos reconheçam a importância da Estatística no desenvolvimento da capacidade de análise, de crítica e de intervenção nos problemas sociais do quotidiano. No entanto, sabemos à luz da nossa pesquisa que isso só é possível se os alunos aprenderem estes conteúdos de forma significativa e para tal é necessário que estes conceitos sejam transmitidos com meios, métodos e técnicas adequadas. Constatamos que os meios de ensino que o programa da 11ª classe sugere aos professores são o giz, apagador, quadro e régua. Mais uma vez notamos que nestas circunstâncias o espírito criativo do professor é fundamental para um ensino mais efetivo sobre os conceitos estatísticos abordados. É fundamental nestes ciclos de estudos que os professores estejam atentos às dificuldades que os alunos têm na compreensão dos tópicos básicos de estatística lecionados, algumas das quais foram destacadas na Secção 3.2.

Há estudos que referem que a forma de começar a ter um impacto na compreensão dos alunos é de começar a investir na compreensão dos professores, como já mencionámos anteriormente. A formação de um professor de Matemática deve assim incluir uma sólida componente teórica e prática na área de Probabilidades e Estatística. De seguida analisamos o programa, disponível no Apêndice B, de uma unidade curricular do curso de formação de professores de Matemática em Angola.

3.4.2 Estatística Aplicada à Educação do Instituto Superior de Ciências de Educação da Huíla

O Instituto Superior de Ciências de Educação da Huíla (ISCED-Huíla) é uma instituição universitária estatal que se encontra situada na cidade de Lubango, capital da província da Huíla a sul de Angola e que foi criado em 1980. As atividades deste instituto são essencialmente focadas na formação de professores do II ciclo do ensino secundário e da licenciatura. O ISCED-Huíla dispõe de catorze cursos de licenciatura e cinco de mestrado e ainda de um centro de investigação em Educação.

Nesta instituição, a cadeira de Estatística aplicada à Educação é uma unidade curricular obrigatória com objetivos educativos e instrutivos. Dos objetivos desta cadeira destacamos o de desenvolver nos futuros professores competências para as suas carreiras profissionais e de serem capazes de explicar os conceitos básicos associados à Estatística e Teoria das probabilidades. Isso pressupõe um ensino com métodos e técnicas sugestivas de modo que os futuros professores possam ter mais alternativas didáticas e assim os alunos poderem ter uma aprendizagem mais significativa.

No ISCED-Huíla os conteúdos sobre as distribuições amostrais e alguns conceitos ligados a este tema, estudados neste trabalho começam a ser abordados na unidade III do 2º ano de licenciatura, no segundo semestre. Nesta unidade, o programa da cadeira de Estatística Aplicada à Educação mostra que se começa a abordar alguns conceitos básicos como as medidas de tendência central, nomeadamente a média, moda e a mediana, o que significa que os professores do II ciclo a serem formados nesta instituição têm aqui a oportunidade de relembrar estes conceitos. Tal como o capítulo III, os capítulos subsequentes também sugerem conceitos básicos como medidas de dispersão tais como a variância, o desvio padrão entre outras. As distribuições amostrais e o teorema do limite central são abordados no capítulo IX do programa, apesar de já no capítulo VII ser abordada a aproximação da distribuição binomial pela distribuição normal. As simulações que apresentamos no Apêndice A poderiam ser uma mais valia na lecionação destes temas e portanto na formação dos professores.

Destacamos o fato do programa desta unidade curricular propor métodos em que os professores expõem os conteúdos, apresentam exemplos mas sem levar em conta as simulações e atividades práticas e interativas, que se levadas em conta, ajudarão os alunos a perceberem melhor os conceitos e não obstante estarão munidos de mais ferramentas para o futuro como professores.

Conclusão

Na exposição ora feita, apenas abordamos a distribuição da soma de variáveis aleatórias reais independentes, onde o resultado principal é o Teorema do Limite Central Lindeberg-Lévy. No entanto, destacamos o Teorema do Limite Central com a condição de Liapunov para sucessões de variáveis aleatórias não identicamente distribuídas. O Teorema do Limite Central com a condição de Lindeberg que apenas exige que a sucessão de somas de variâncias truncadas seja uniformemente limitada e o de Lindberg-Feller que demonstra que a condição de Lindberg é não só suficiente como também necessária. Por último, destacamos o Teorema do Limite Central com condições de permutabilidade das parcelas, ou seja um tipo de dependência fraca, de grande importância na teoria da amostragem.

Em relação à estatística máximo, apenas abordamos a lei limite do máximo das n primeiras variáveis de uma sucessão de variáveis aleatórias reais independentes e identicamente distribuídas. Salientamos que em sucessões dependentes, nomeadamente sucessões estacionárias, a introdução de condições de dependência permitiu, *mutatis mutandis*, aplicar a teoria de valores extremos obtida em modelos i.i.d., em particular o Teorema dos Tipos Extremos.

A vasta literatura existente sobre a compreensão da média e das distribuições amostrais por alunos e professores consciencializou-nos para o pouco que abordamos sobre este assunto e para o quão interessante é este tema. Ficou a vontade de realizarmos um estudo para perceber as dificuldades sentidas pelos alunos e professores em Angola.

Bibliografia

Aguinis, H. e Branstetter, S. A. (2007). Teaching the concept of the sampling distribution of the mean. *Journal of management education,* **31**, 467–483.

Chance, B., del Mas, R. e Garfield, J. (2004). Reasoning about sampling distributions. In *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking.* Springer. 295-323.

Dudewicz, E. J. e Mishra, S. (1988). *Modern mathematical statistics.* John Wiley & Sons, Inc.

Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications,* vol.2. New York: Wiley.

Fisher, R. e Tippett, L. (1928). Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **24**, 180–190.

Fréchet, M. (1927). Sur la loi de probabilité de l'écart maximum. *Ann. de la Soc. Polonaise de Math.,***6**, 93-116.

Gattuso, L. e Mary, C. (1998). Development of the concept of weighted average among high-school children. In *Proceedings of the fifth international conference on teaching statistics,* 685-692.

Glencross, M. J. (1988). A practical approach to the central limit theorem. In *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics,* 91-95.

Gnedenko, B. (1943). Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Ann. Math.*, **44**, 423-453.

Gomes, M. I., Fraga Alves, M. e Neves, C. (2013). *Análise de Valores Extremos: uma Introdução.* Edições SPE. Lisboa.

Gonçalves, E. e Lopes, N. M. (2000). *Probabilidades: Princípios Teóricos.* Escolar Editora, Lisboa.

Goodchild, S. (1988). School pupils' understanding of average. *Teaching Statistics*, **10**(3), 77–81.

Jacobbe, T. (2012). Elementary school teachers understanding of the mean and median. *International Journal of Science and Mathematics Education*, **10**(5), 1143–1161.

Jacobbe, T. e Carvalho, C. (2011). Teachers' understanding of averages. In: Batanero C., Burrill G., Reading C.(eds). In *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education.* New ICMI Study Series, vol.14. Springer, Dordrecht.

Lane, D. M. (2015). Simulations of the sampling distribution of the mean do not necessarily mislead and can facilitate learning. *Journal of Statistics Education*, **23**(2), 1-5.

Leadbetter, M. (1983). Extremes and local dependence in stationary sequences. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, **65**, 291–306.

Leadbetter, M. R., Lindgren, G. e Rootzén, H. (1983). *Extremes and related properties of random sequences and processes.* Springer-Verlag, New York.

Leavy, A. e O'Loughlin, N. (2006). Preservice teachers understanding of the mean: Moving beyond the arithmetic average. *Journal of mathematics teacher education*, **9**(1), 53–90.

Lipson, K. (2002). The role of computer based technology in developing understanding of the concept of sampling distribution. In *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics. Cape Town South Africa,* 1-6.

Lunsford, M. L., Rowell, G. H. e Goodson-Espy, T. (2006). Classroom research: Assessment of student understanding of sampling distributions of means and the central limit theorem in post-calculus probability and statistics classes. *Journal of Statistics Education*, **14**(3), 1–9.

Martins, C., Pires, M. V. e Barros, P. M. (2009). Conhecimento estatístico: Um estudo com futuros professores. *Actas do XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática-CD ROM*, 1-11.

Mokros, J. e Russell, S. J. (1995). Children's concepts of average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education*, **26**(1), 20–39.

Morais, M. C. (2007). *Fiabilidade e controlo de qualidade.* Lisboa, Instituto Superior Técnico.

Murteira, B. (1990). *Probabilidade e Estatística,* vol.1. 2ª edição. McGraw-Hill.

Pestana, D. D. e Velosa, S. F. (2010). *Introdução à Probabilidades e à Estatística,* vol.1. Fundação Calouste Gulbenkian.

Reis, E., Melo, P., Andrade, R. e Calapez, T. (1999). *Estatística aplicada.* Edições Sílabo, Lisboa.

Uccellini, J. C. (1996). Teaching the mean meaningfully. *Mathematics Teaching in the Middle School*, **2**(2), 112–15.

Apêndice A

Comandos do R para reproduzir as figuras

A.1 Figura 1.1

```
set.seed(12345)
dim<-50000
n1<-5
n2<-6
n3<-7
p<-0.1
X1<-rbinom(dim,n1,p)
X2<-rbinom(dim,n2,p)
X3<-rbinom(dim,n3,p)

S<-X1+X2+X3
fr<-table(S)/dim
x<-as.numeric(names(fr))
g<-barplot(fr,col="gray99")
lines(g,dbinom(x,n1+n2+n3,p),type="h",lwd=3)
```

A.2 Figura 1.2

```
set.seed(12345)
dim<-50000
lambda1<-1
lambda2<-2
lambda3<-3
X1<-rpois(dim,lambda1)
X2<-rpois(dim,lambda2)
X3<-rpois(dim,lambda3)

S<-X1+X2+X3
fr<-table(S)/dim
x<-as.numeric(names(fr))
g<-barplot(fr,col="gray99")
lines(g,dpois(x,lambda1+lambda2+lambda3),type="h",lwd=3)
```

A.3 Figura 1.3

```
set.seed(12345)
dim<-50000
```

```
alfa1<-1
alfa2<-2
alfa3<-3
lambda<-3
X1<-rgamma(dim,alfa1,lambda)
X2<-rgamma(dim,alfa2,lambda)
X3<-rgamma(dim,alfa3,lambda)

S<-X1+X2+X3
hist(S,probability=TRUE,col="gray99",xlab="",ylab="",main="")
curve(dgamma(x,alfa1+alfa2+alfa3,lambda),add=T,lwd=3)
```

A.4 Figura 1.4

```
set.seed(12345)
dim<-50000
alfa1<-1
alfa2<-2
alfa3<-3
lamda1<-3
lamda2<-2
lamda3<-1
X1<-rcauchy(dim,alfa1,lamda1)
X2<-rcauchy(dim,alfa2,lamda2)
X3<-rcauchy(dim,alfa3,lamda3)

S<-X1+X2+X3
cuts <- quantile(S,c(.05,.95))
hist(S[S>=cuts[1] & S<=cuts[2]],probability=TRUE,ylim=c(0,0.055),
col="gray99",xlab="",ylab="",main="")
curve(dcauchy(x,alfa1+alfa2+alfa3,lamda1+lamda2+lamda3,log=FALSE),add=T,lwd=3)
```

A.5 Figura 1.5

```
set.seed(12345)
dim<-50000
mu1<-1
mu2<-2
mu3<-3
sigma1<-2
sigma2<-3
sigma3<-1
X1<-rnorm(dim,mu1,sigma1)
X2<-rnorm(dim,mu2,sigma2)
X3<-rnorm(dim,mu3,sigma3)
```

```
S<-X1+X2+X3
hist(S,probability=TRUE,col="gray99",ylim=c(0,0.115),ylab="",xlab="",
main="")
curve(dnorm(x,mu1+mu2+mu3,sqrt(sigma1^2+sigma2^2+sigma3^2)),add=TRUE,lwd=3)
```

A.6 Figura 1.6

```
set.seed(12345)
dim<-5000
numamostra<-10000
lamda<-2

mat<-matrix(,nrow=dim,ncol=numamostra)
y<-matrix(,nrow=1,ncol=numamostra)
for(i in 1:numamostra){
  x<-rexp(dim,lamda)
  mat[,i]<-x
  y[i]<-sum(mat[,i])
}

Z<-(y-dim*(1/lamda))/(sqrt(dim*(1/lamda^2)))
hist(Z, probability=TRUE,col="gray99",xlab="",ylab="",ylim=c(0,0.4),main="")
curve(dnorm(x),add=TRUE,lwd=3)
```

A.7 Figura 1.7

```
set.seed(12345)
n<-50
p<-0.4

k<-seq(1,n,by=1)
plot(k,dbinom(k,n,p),type="n",xlab="",ylab="")
lines(k,dbinom(k,n,p),type="h",col="gray")
curve(dnorm(x,n*p,sqrt(n*p*(1-p))),add=TRUE,lwd=3)
```

A.8 Figura 1.8

```
set.seed(12345)
n<-50
lamda<-2

k<-seq(0, 2*n*lamda, by = 1)
plot(k,dpois(k,n*lamda),type="n",xlab="",ylab="")
lines(k,dpois(k,n*lamda),type="h",col="gray")
curve(dnorm(x,n*lamda,sqrt(n*lamda)),add=TRUE,lwd=3)
```

A.9 Figura 1.9

```
set.seed(12345)
dim<-5000
alfa<-50
lamda<-2

G<-rgamma(dim,alfa,lamda)
hist(G,probability=TRUE,col="gray99",ylab="",xlab="",
main="")
curve(dnorm(x,alfa/lamda,sqrt(alfa)/lamda),add=TRUE,lwd=3)
```

A.10 Figura 2.3

```
library(evd)
x<-seq(-4,4,0.1)
plot(x,dgumbel(x,0,1),type="l", lty=3,ylab="Densidade",ylim=c(0,1))
lines(x,dfrechet(x,0,1,1),lwd=2.5,lty=2)
lines(x, drweibull(x,0,1,1),lwd=2.5)
legend("topright",legend=c("Gumbel","Fréchet","Weibull"),bty="n",
lwd=c(1,2.5,2.5),lty=c(3,2,1))
```

Apêndice B

Programas

B.1 Matemática do 1º e 2º ciclos do ensino secundário geral de Angola

A6

INIDE
Instituto Nacional de Investigação e Desenvolvimento da Educação

República
ANGOLA

República de Angola
Ministério da Educação

PROGRAMAS DE

MATEMÁTICA

7ª, 8ª e 9ª classes

1.º CICLO DO ENSINO SECUNDÁRIO GERAL

Ficha Técnica

Título
Programas de Matemática - 7ª, 8ª e 9ª classes

Editora
Editora Moderna, S.A.

Pré-impressão, Impressão e Acabamento
GestGráfica, S.A.

Ano / Edição / Tiragem / N.º de Exemplares
2014 / 2.ª Edição / 1.ª Tiragem / 2.000 Ex.

EDITORA MODERNA

E-mail: geral@editoramoderna.com

INIDE
Instituto Nacional de Investigação e Desenvolvimento da Educação

ÍNDICE

INTRODUÇÃO GERAL DA MATEMÁTICA NO 1º CICLO DO ENSINO SECUNDÁRIO

A disciplina de Matemática contribui para a realização dos objectivos gerais da formação da jovem geração através de meios específicos da ciência Matemática.

Sendo assim, a Lei de Bases do sistema nacional define o sistema educativo como um conjunto de estruturas e modalidades, através da qual se realiza a educação tendente à formação harmoniosa e integral da personalidade, com vista a consolidação de uma sociedade progressiva e democrática.

Neste programa, os conteúdos apresentam-se por classe, proporcionando ao(à) professor(a) uma visão global, seguida com o roteiro proposto, isto é, para cada subtema: pré-requisitos, objectos, conteúdos, meios, sugestões metodológicas, tempo e instrumentos de avaliação.

Das sugestões dadas, o(a) professor(a) escolherá as que lhe pareçam mais oportunas e adequadas.

Neste programa desenvolveu-se um só subtema básico, dando assim ao(à) professor(a) uma ideia de que como desenvolver a planificação da sua aula.

OBJECTIVOS GERAIS DA MATEMÁTICA NO 1º CICLO DO ENSINO SECUNDÁRIO

O ensino da Matemática deverá desenvolver nos alunos:

› A capacidade de utilizar a linguagem matemática para comunicar ideias;

› A capacidade de aplicar conhecimentos na resolução de problemas do quotidiano, da Matemática e de outras disciplinas;

› A capacidade de raciocinar e analisar;

› O conhecimento e compreensão de conceitos e métodos;

› Uma atitude positiva em relação à Matemática por promover a sua autoconfiança na resolução de problemas matemáticos;

› A perseverança e o cuidado postos na realização das tarefas e a cooperação no trabalho;

› As capacidades mentais gerais;

› A capacidade criadora e a imaginação;

› O pensamento matemático na formação política, ideológica e intelectual.

7ª Classe

Programa da Disciplina

OBJECTIVOS DA MATEMÁTICA NA 7ª CLASSE

- Reconhecer e aplicar as leis da formação dos termos de uma sequência;
- Compreender e aplicar a decomposição dos números em factores primos;
- Compreender e aplicar o M.d.c. e o M.m.c. de dois números;
- Conhecer e aplicar as potências de expoente inteiro de um número inteiro;
- Conhecer e aplicar a sequência dos números racionais representados sob diversas formas;
- Compreender as operações com números racionais;
- Determinar o valor numérico de expressões com variáveis;
- Resolver equações utilizando os princípios de equivalência das equações do 1° grau com uma incógnita;
- Recolher e organizar informações;
- Compreender a construção das tabelas de frequência e gráficos circulares;
- Conhecer, em situações concretas, as posições relativas das rectas;
- Conhecer os triângulos;
- Conhecer as relações entre elementos dum triângulo;
- Conhecer os critérios de semelhança e de igualdade dos triângulos;
- Compreender e aplicar conhecimentos da geometria na resolução de problemas geométricos;
- Compreender e aplicar as noções de áreas e volumes de sólidos e de objectos da vida real;
- Aplicar conhecimentos sobre os perímetros, áreas e volumes;
- Conhecer, em situações concretas, as posições relativas de rectas e de planas.

DESENVOLVIMENTO DOS CONTEÚDOS POR TEMA

Tema A - Números e operações

Subtema 1 - Ampliação dos conhecimentos sobre:

1.1. Sequência de números;
1.2. M.d.c. e M.m.c. de dois ou mais números.

Subtema 2 - Números racionais absolutos: *

2.1. Multiplicação de números racionais absolutos;
2.2. Propriedades comutativa, associativa e distributiva da multiplicação em relação à adição e subtracção;
2.3. Quadrado e cubo de um número;
2.4. Potência de um número;
2.5. Expressões numéricas que envolvam os sinais +, - , x e ( );
2.6. Divisão de números racionais;
2.7. Expressões numéricas que envolvam os sinais +, - , x, : e ( ).

Subtema 3 - Números inteiros relativos:

3.1. Representação dos números inteiros relativos;
3.2. Comparação dos números inteiros relativos;
3.3. Valor absoluto de números inteiros;
3.4. Adição e subtracção de números inteiros relativos;
3.5. Multiplicação e divisão de números inteiros relativos.

Subtema 4 - Números racionais relativos. conjunto Q: *

4.1. Representação na recta dos números racionais relativos;
4.2. Relação de ordem entre números racionais relativos;
4.3. Adição e subtracção em Q;
4.4. Multiplicação e divisão em Q;
4.5. Valores aproximados de números racionais;
4.6. Propriedades das operações em Q;
4.7. Potenciação em Q (m, m Є Q e k Є /N);
4.8. Expressões com variáveis.

Subtema 5 - Equações do 1° grau:

5.1. Raiz ou solução de uma equação;
5.2. Equações equivalentes;
5.3. Resolução de equação do 1° grau com uma incógnita.

Tempo .... 65 Aulas

Sugestões metodológicas:

Ao abordar o tema A - Números e operações, o(a) professor(a) deve ter em conta os pré-requisitos do(a) aluno(a). O tema parece vasto, mas a maioria dos assuntos tratados são do conhecimento do(a) aluno(a). O tema é subdividido em subtemas. Entre eles, uns são básicos e requerem um tratamento adequado, e os temas básicos estão apresentados com um asterisco. Sugere-se que, através de exercícios e actividades, o(a) aluno(a) seja levado a evocar os assuntos já conhecidos. Assim, o(a) professor(a) ficará a saber quais os conhecimentos e quais as dificuldades de aprendizagem.

Deverá insistir particularmente nos conteúdos que apresentam maior dificuldades aos alunos.

O tratamento da sequência far-se-á a partir de situações simples como esta: escreva de forma ordenada crescente ou decrescente os múltiplos ou divisores de um número.

Tratar o M.d.c. e M.m.c. de dois ou mais números, partindo da intersecção dos divisores comuns ou dos múltiplos comuns, respectivamente.

Mais tarde, introduzir-se-á o cálculo do M.d.c. e do M.m.c. de números por meio da decomposição em factores primos.

A determinação das áreas de algumas figuras geométricas, divididas em partes iguais, pode servir de base à descoberta da regra para multiplicar números representados por fracções.

A descoberta das propriedades das operações com os números racionais absolutos poderá fazer-se a partir de actividades ligadas ao cálculo, que permitam verificar as propriedades.

O cálculo dos valores das expressões numéricas poderá ser feito do seguinte modo: Antes da multiplicação, envolver apenas os sinais +, -, : e ( ).

Depois da multiplicação envolver +, -, x e ( ), depois de tratar a divisão, e logo a seguir calcular as expressões numéricas com +, -, x, : e ( ).

Introduzir a divisão por meio da propriedade da invariância do quociente quando o dividendo e o divisor são multiplicados pelo mesmo número diferente de zero.

Exemplo:

$$\frac{5}{6} : \frac{4}{7} = \frac{(5 \text{ x } 7)}{(6 \text{ x } 4)} : \frac{(4 \text{ x } 7)}{(7 \quad 4)}$$

$$= \frac{(5 \text{ x } 7)}{(6 \text{ x } 4)} : 1$$

$$= \frac{(5)}{(6)} \text{ x } \frac{(7)}{(4)}$$

Introduzir os números relativos inteiros, partindo de situações concretas, que levem os alunos a corresponder à necessidade de utilizar números novos. Exemplos:

Pontos do globo terrestre situados acima do nível médio do mar e abaixo do nível médio.

Com os valores das temperaturas abaixo de zero, os alunos podem, também, realizar pequenos trabalhos escritos sobre a introdução dos números negativos através de jogos (envolvendo ganhos e perdas, receitas e despesas, deslocamentos para cima e para baixo, etc.).

Utilizar os pré-requisitos das operações com os números inteiros relativos e com os números racionais absolutos para introduzir os números racionais relativos.

As propriedades das operações com os números racionais serão feitas em paralelo com a verificação das propriedades das operações com os números inteiros relativos.

O estudo das equações é o prolongamento do estudo de variáveis. Para estudar as equações poderão partir de uma situação problemática simples, como por exemplo «qual o lado de um quadrado cujo perímetro e a área se exprimem pelo mesmo número». Uma tal pergunta fará surgir uma equação que os alunos irão resolver por tentativas, discutindo e confrontando ideias.

A descoberta das regras para a resolução de equações pode também surgir da comparação dos diferentes processos usados para encontrar as soluções, por exemplo da equação: $3x + 9 = 18$.

Poderão resolver também equações do tipo 1 x 1 = 3.

Se achar oportuna através da generalização de um problema o(a) professor(a) fará surgir os primeiros exemplos de equações literais.

Tema B - Estatística

Subtema 1 - Aprofundamento dos conhecimentos da 6ª Classe:

1.1. Recolha, organização e interpretação de dados;
1.2. Tabelas;
1.3. Frequência absoluta;
1.4. Medidas de tendência central (moda, média e mediana);
1.5. Gráficos.

Subtema 2 - Frequências absolutas acumuladas.

Subtema 3 - Frequência relativa:

3.1. Gráficos.

Tempo .... 65 Aulas

Sugestões metodológicas:
A Estatística é um conteúdo novo nos nossos programas e requer uma atenção particular.

A introdução dos seus conteúdos deve merecer uma boa preparação da parte do(a) professor(a) para não criar um desagrado que poderá provocar o repúdio deste tema. Para motivar os alunos, deve partir de situações reais para cada um dos conteúdos (notícias de jornal, número de alunos fora do sistema em relação ao número total de indivíduos das respectivas faixas etárias, aumento do custo da vida, as produções, as importações, as vendas, os aproveitamentos e as reprovações dos alunos duma escola etc.).

Tema C - Geometria

Subtema 1 - Semelhança de polígonos:

1.1. Ampliação e redução de figuras;
1.2. Razão de semelhança;

1.3. Noção de polígonos semelhantes;
1.4. Semelhança de triângulos:
  1.4.1. Critérios de semelhança;
  1.4.2. Razão entre perímetros de triângulos semelhantes.

Subtema 2 - Ângulos:
2.1. Ângulos verticalmente opostos;
2.2. Ângulos de lados paralelos;
2.3. Soma dos ângulos internos de um triângulo; *
2.4. Ângulo formado por duas rectas paralelas intersectadas por uma secante. *

Subtema 3 - Triângulos:
3.1. Relações entre os lados e os ângulos;
3.2. Desigualdade triangular;
3.3. Critérios de igualdade de triângulos. *

Subtema 4 - Geometria no espaço:
4.1. Sólidos com faces triangulares e quadrangulares.

Subtema 5 - Áreas e volumes de sólidos:
5.1. Área lateral e total de uma pirâmide;
5.2. Volume da pirâmide;
5.3. Área lateral e área total do cone;
5.4. Volume do cone.

Tempo .... 45 Aulas

Sugestões metodológicas:

A abordagem intuitiva da noção de semelhança poderá ser feita recorrendo aos exemplos de vida quotidiana, com objectos da mesma forma, mas de tamanho diferente.

(Pratos de mesa, tigelas, pacotes de vinho, moedas, etc.). O(a) professor(a) poderá levar os alunos a chegar à noção de semelhança.

› A partir de medidas dos diâmetros dos objectos semelhantes, chega-se à razão de semelhança.

- A desigualdade triangular poderá ser estudada confrontando as medidas dos lados de triângulos, comparando a soma das medidas de dois lados com o terceiro e concluir-se-á que «em todo triângulo, o comprimento de um lado é sempre menor ao comprimento da soma de dois outros». Com essa conclusão, pode decidir-se se pode construir ou não um triângulo dados os comprimentos dos três lados.

- Os critérios de igualdade de triângulos poderão ser dados de forma intuitiva com base na construção de triângulos. O(a) professor(a) terá de organizar actividades de construção de triângulos, dando três elementos, e comparar os vários triângulos obtidos.

- Os ângulos verticalmente opostos têm que ser entendidos como ângulos opostos pelo vértice, cujos lados são prolongamentos de uns e dos outros.

- As relações entre os ângulos de lados paralelos são tratadas com base na experimentação.

- A partir delas, os alunos poderão acompanhar a justificação das propriedades relativas ao ângulo externo e à soma dos ângulos internos de um triângulo.

- As noções destes ângulos vão aparecer naturalmente.

Este tema pode tratar-se antes do Tema B e Estatística.

Avaliação:
No ensino, a avaliação assume carácter eminentemente formativo, devendo favorecer a progressão pessoal e a autonomia como parte integrante do processo ensino/aprendizagem, permitindo ao aluno implicar-se no próprio processo e ao(à) professor(a) controlar melhor a sua prática lectiva.

A avaliação do processo do(a) aluno(a) deverá ser sistemática e contínua, quer em relação aos processos utilizados, quer em relação aos resultados obtidos.

A avaliação a realizar ao longo de cada ano deve ser prescrita e não deve assumir um carácter definitivo que discrimine desde logo o(a) aluno(a), impedindo de alcançar sucesso no imediato e, porventura, no seu futuro escolar.

Uma avaliação que contemple todos os domínios de aprendizagem e respeite o ritmo do(a) aluno(a), implica uma escolha adequada de formas e instrumentos de avaliação. Assim, podem constituir formas de avaliação trabalhos individuais ou de grupo, discussões e debates, exposições, entrevistas, trabalhos de casa, assim como o caderno diário.

Para avaliar a capacidade de resolução de problemas, o(a) professor(a) recolherá informações sobre os progressos verificados nas diferentes fases a considerar durante o processo. Poderá ser pedido aos alunos que entreguem pequenos relatórios onde descrevem, não só a sua resolução do problema, como igualmente a descrição de todo o processo percorrido, abordagem seguida, dificuldades, avanços, recuos, razões justificativas das opções tomada, entre outros.

A avaliação da capacidade de comunicação em Matemática faz-se observando o modo como o(a) aluno(a) descreve processos, enuncia propriedades, expressa conceitos, formula problemas, compreende e avalia ideias expressas em Matemática, devendo o(a) professor(a) estar particularmente atento(a) ao desenvolvimento da clareza, precisão e adequação da linguagem utilizada. Devem ser pedidas ao longo do ano frequentemente argumentações/descrições escritas e orais relativas a processos matemáticos seguidos pelos alunos.

Os trabalhos desenvolvidos deverão ser igualmente considerados para a avaliação. Esta poderá ter em conta, quer produções realizadas em grupos, quer trabalhos complementares individuais.

Tema A - Números e operações

Subtema 1.1. Sequências de números

Objectivo geral:

› Conhecer as leis da formação dos tenhas de uma sequência.

Pré-requisito:

› Conhecer os números e as operações.

Objectivos específicos:

› Continuar o estudo de sequências simples de números de múltiplos de números;
› Descobrir a lei da formação de sequência.

Conteúdo:
1. Sequências de números.

Meios:
› Quadro, giz e caderno.

Sugestões metodológicas:
› Nas sequências de números podem-se fazer perguntas do seguinte tipo: "Como encontrar a lei de formação de uma sequência".

Tempo .... 2 Aulas

Instrumentos de avaliação:
› Resolução de exercícios sobre as sequências.

Tema A - Números e operações

Subtema 2.3. Quadrado e cubo de um número

Objectivo geral:
› Conhecer o quadrado e o cubo de um número.

Pré-requisito:
› Conhece a multiplicação.

Objectivos específicos:
› Elevar um número ao quadrado;
› Identificar o número em que é dado o quadrado ou cubo.

Conteúdo:
2. Quadrado e cubo de um número.

Meios:
› Quadro, giz e caderno.

Sugestões metodológicas:
› Escolher das sugestões metodológicas do tema, as mais adequadas a este conteúdo.

Tempo .... 2 Aulas

Instrumentos de avaliação:
› Resolução de exercícios sobre as sequências.

Tema A - Números e operações
Subtema 2.4. Potência de um número

Objectivo geral:
› Calcular a potência de um número.

Pré-requisito:
› Conhecer os quadrados e cubos de um número.

Objectivos específicos:
› Elevar qualquer número a uma potência;
› Reconhecer a potência e a base.

Conteúdo:
3. Potência de um número.

Meios:
› Quadro, giz e caderno.

Sugestões metodológicas:
› Trabalhar da mesma forma que na elevação ao quadrado e ao cubo de um número.

Tempo .... 2 Aulas

Instrumentos de avaliação:
› Prova oral e escrita sobre esta matéria.

Tema A - Números e operações
Subtema 3 - Números inteiros relativos

Objectivo geral:
› Conhecer a sequência dos números racionais sob diferentes formas.

Pré-requisitos:
› Conhecer números inteiros positivos;
› Apresentar os números inteiros numa recta numérica;
› Conhecer o conceito de comparação.

Objectivos específicos:
› Definir números inteiros relativos;
› Representar números inteiros relativos;
› Reconhecer números inteiros relativos;
› Representar na recta numérica números relativos;
› Alterar a ordenação dos números relativos numa recta;
› Comparar dois ou mais números relativos;
› Ordenar uma série de números relativos.

Conteúdos:
Números inteiros relativos;

2. Representar números relativos numa recta numérica;
Tempo .... 1 Aula

3.1. Comparação dos números inteiros relativos;
3.2. Ordenação de números inteiros relativos
Tempo .... 2 Aulas

Meios:
› Quadro, giz e caderno.

Sugestões metodológicas:
› Escolha das sugestões metodológicas do tema, as mais adequadas a este conteúdo.
› A comparação e a ordenação podem ser feitas escrevendo os números numa recta numérica.

Tempo .... 3 Aulas

Instrumentos de avaliação:
› Observação.
› Resolução de exercícios orais e escritos.

Tema B - Estatística
Subtema 1.1. Recolha e organização dos dados

Objectivo geral:
› Organizar dados numa tabela.

Pré-requisito:
› Conhecer a moda e a média aritmética.

Objectivos específicos:
› Ordenar dados relativos a altura, idade e peso dos alunos;
› Colocar dados numa tabela.

Conteúdo:
› Organização de dados.

Meios:
› Metro e balança.

Sugestões metodológicas:
› A recolha dos dados relativos, por exemplo, à altura ou peso dos alunos, tempo gasto de casa à escola, hora de televisão a que assiste, bem como outras recolhidas em jornadas, empresas, etc., poderão constituir pontos de partida para a realização dos dados.

Tempo .... 3 Aulas

Instrumentos de avaliação:
› Observação.
› Preenchimento de tabelas.

Tema C - Geometria
Subtema 2.2. Critérios de igualdade de triângulos

Objectivo geral:
› Compreender os critérios de triângulos.

Pré-requisitos:
› Observação;
› Provas orais e escritas.

Objectivos específicos:
› Reconhecer através dos dados, dois triângulos geometricamente iguais;
› Identificar ângulos de dois triângulos geometricamente iguais;
› Reconhecer que dois triângulos geometricamente iguais quando têm dois lados e um ângulo adjacente iguais.

Conteúdo:
1. Critérios de igualdade de triângulos.

Meios:
› Régua, compasso, transferidor, quadro, giz e caderno.

Sugestões metodológicas:
› Os critérios de igualdade de triângulos serão dados de forma intuitiva com base na construção de triângulos;
› O(a) professor(a) pode pedir aos alunos para desenhar um triângulo dando dois ou três elementos, comparar vários triângulos obtidos;
› Os critérios de igualdade poderão ser apresentados como condições que, garantindo as igualdades de triângulos, vão ser utilizadas frequentemente na justificação de racionais sobre figuras.

Tempo .... 2 Aulas

Instrumentos de avaliação:
› Observação.
› Provas orais e escritas.

8ª Classe

Programa da Disciplina

OBJECTIVOS GERAIS DA MATEMÁTICA NA 8ª CLASSE

- Compreender a notação científica de potências de 10;
- Compreender a resolução de equações do 1° grau;
- Compreender tabelas e gráficos de função do tipo x –> k x + b;
- Conhecer a composição e decomposição de figuras geométricas;
- Aplicar a composição e a decomposição de figuras geométricas;
- Conhecer rectas perpendiculares a planos e planos perpendiculares;
- Compreender tabelas e gráficos relativos a situações representáveis por funções;
- Compreender a decomposição de um triângulo rectângulo;
- Compreender a recolha de dados.

DESENVOLVIMENTO DOS CONTEÚDOS POR TEMA

Tema A - 7.1. Números e operações

7.1.1. Potências:

- Potência de expoente inteiro negativo a^{-n};
- Potência de base 10 de expoente inteiro negativo.

7.1.2. Operações com polinómios:

- Monómios e Polinómios;
- Adição de monómios e polinómios;
- Simplificação de expressões com parênteses;
- Multiplicação de monómios e polinómios;
- Disjunção de condições e reuniões de conjuntos;
- Casos notáveis da multiplicação de binómios;
- Decomposição de polinómios em factores.

7.1.3. Equações do 1° grau a uma incógnita:

- Equações literais;
- Equações do 2° grau;
- Lei de Anulamento de produto.

Tempo .... 40 Aulas

Sugestões metodológicas:

O conhecimento de potência de expoente inteiro permitirá explicitar novas relações entre números, podendo propor vários exemplos como potência de base 10, como potência de base $\frac{1}{3}$ ou ainda que enquadrem um número entre duas potências consecutivas da mesma base.

Interessa-nos sobretudo o cálculo com potências de base 10, a escrita de números em notação científica e a sua utilização para interpretar e comparar números e grandezas físicas.

Para a introdução do estudo de equações do grau superior ao 1° propõe-se aos alunos que resolvam uma equação começando com alguns problemas.

Os polinómios a usar deverão ser do primeiro e do segundo grau e apenas numa variável. A disjunção de condições aparecerá ligada à Lei do Anulamento do produto, chamando-se à atenção para o facto de que a disjunção de condições corresponde à reunião dos conjuntos solução.

A decomposição de polinómios em factores deverá incidir sobre situações em que seja apenas necessário pôr um factor em evidência ou utilizar directamente um dos casos notáveis.

Tema B - 7.2. Funções

7.2.1. Noção de correspondência;
7.2.2. Conceito de função;
7.2.3. Representação de funções através de tabelas;
7.2.4. Função definida por uma expressão analítica;
7.2.5. A proporcionalidade directa como função $x \rightarrow k\,x$
- › Gráfico da função $x \rightarrow k$
- › Gráfico da função $x \rightarrow k\,x + b$

Tempo .... 18 Aulas

Sugestões metodológicas:
Partindo de exemplos concretos, o(a) professor(a) esclarece o conceito de função. Poderá também apresentar funções recorrendo a diferentes tipos de representação gráfica, analítica e em linguagem corrente, procurando que os alunos comecem a traduzir de uma linguagem para outra.

As funções ligadas à física, à geometria e à vida real ajudarão os alunos a compreender a amplitude deste conceito.

Os alunos devem traçar vários gráficos de funções do tipo $x \rightarrow k\,x$ e $x \rightarrow k\,x + b$ e destacar o papel de k como o declive da respectiva recta.

Tema C - 7.3. Geometria

7.3.1. Decomposição de figuras:
- › Decomposição de um polígono em triângulos e quadriláteros;
- › Decomposição de um triângulo por uma mediana;
- › Decomposição de um triângulo rectângulo pela altura relativa à hipotenusa;
- › Equivalência de polígonos; área do trapézio.

7.3.2. Teorema de Pitágoras:
- › Demonstração e aplicações.

7.3.3. Perpendicularidade entre recta e plano.
Perpendicularidade de dois planos.

7.3.4. Lugares geométricos: circunferência, circulo, superfície e esfera:

› Mediatriz de um segmento de recta;
› Circunferência;
› Conjunção de condições e intersecção de conjuntos.

7.3.5. Translações:

› Introdução do conceito de translação;
› Imagem de uma figura numa translação dada;
› Propriedades das translações.

7.3.6. Vectores:

› Noção de vector;
› Composição de translações; adição de vectores.

Tempo .... 56 Aulas

Sugestões metodológicas:

Nas primeiras actividades de composição a apresentar, poderá recordar exemplos que se podem recortar. Pode decompor-se um triângulo noutros triângulos. Construir um paralelogramo equivalente a um triângulo, um trapézio e relacionar as fórmulas das áreas.

O Teorema de Pitágoras pode verificar-se partindo da decomposição do quadrado. É oportuno neste momentos o uso de termos como: hipótese, tese, teorema e demonstração.

A perpendicularidade entre rectas e planos e entre planos pode introduzir-se a partir do exemplo de uma sala, uma mesa com pernas prismáticas, etc.

Os critérios de semelhança de triângulos também serão dados de forma intuitiva, com base na construção. Da semelhança de triângulo podem tirar conclusões sobre o paralelismo.

As propriedades das translações serão verificadas experimentalmente e usadas para relacionar figuras entre si. O conceito de vector surgirá naturalmente quando se pretender uma translação de uma figura sem apoio de uma quadrícula.

Obs.: O Teorema de Pitágoras mantém-se na 8ª Classe, pois irá só ser trabalhado sobre a raiz de quadrados perfeitos.

Tema D - 7.4. Estatística

7.4.1. Organização e representação de dados:
- Polígonos de frequência;
- Pictogramas.

7.4.2. Interpretação da informação.

Tempo .... 6 Aulas

Sugestões metodológicas:
Deverá propor-se uma actividade de organização, representação e interpretação de dados, estudando casos diferentes, relacionados sempre que possível com os interesses dos alunos.

São de referir dois tipos de pictogramas:
- Ampliação de uma figura;
- Repetição de uma figura.

Os alunos deverão ser solicitados a comunicar sob diversas formas como por exemplo: através de uma exposição oral, de um trabalho escrito, da organização de um placard, etc.

9ª Classe

Programa da Disciplina

OBJECTIVOS GERAIS DA MATEMÁTICA NA 9ª CLASSE

- Ser capaz de distinguir os números racionais dos irracionais, relacionando-os com dízimas infinitas.
- Relacionar números reais com as dizimas.
- Ser capaz de comparar números reais.
- Ser capaz de representar números reais numa recta real.
- Saber calcular em $\Re$.
- Compreender os intervalos dos números reais assim como a intersecção e a reunião de intervalos.
- Conhecer os princípios de equivalência para resolução das equações do 1° grau a duas incógnitas.
- Ser capaz de interpretar geometricamente as soluções.
- Conhecer sistemas de duas equações do 1° grau a duas incógnitas.
- Conhecer os métodos de resolução do sistema de duas equações do 1° grau a duas incógnitas.
- Ser capaz de interpretar geometricamente o conjunto de solução.
- Conhecer e saber resolver inequações do 1ª grau a uma incógnita.
- Ser capaz de identificar se um número é solução de uma inequação.
- Ser capaz de interpretar e de analisar as soluções de uma equação do 2° grau.
- Conhecer as regras de resolução da equação do 2° grau nomeadamente a lei de anualmente, a fórmula resolvente.
- Ser capaz de decompor um binómio ou trinómio em factores com vista a resolução de equações.
- Ser capaz de resolver inequações do 2° grau.

- Ser capaz de discutir e de apresentar argumentos, o processo usado na resolução de um problema.

- Reconhecer situações de proporcionalidade inversas apresentadas de diferentes formas indicando a constante de proporcionalidade.

- Saber ler e interpretar dados, construir tabelas e gráficos relativos a situações representáveis por funções da forma:

  $x \rightarrow \frac{k}{X}(\_K > 0 \text{ e } x > 0) \text{ e } x \rightarrow a\ x + b$

  e relacionando os com os tipos de proporcionalidade estudadas.

- Compreender tabelas e gráficos a partir da observação de dados.

- Analisar informação contida em gráficos que lhe sejam fornecidos.

- Conhecer as razões trigonométricas de um dado ângulo agudo.

- Ser capaz de determinar uma razão trigonométrica de um ângulo agudo conhecendo outra.

- Saber aplicar as fórmulas fundamentais das relações trigonométricas.

- Ser capazes de procurar estratégia adequada para determinar distâncias dos locais inacessíveis, altura de edifícios.

- Ser capaz de resolver problemas que envolvam razões trigonométricas.

- Compreender amplitudes de ângulos ao centro.

- Compreender relações existentes entre arcos, cordas, tangente e raios.

- Compreender as simetrias do círculo.

- Conhecer as amplitudes dos ângulos internos e externos de polígonos convexos.

DESENVOLVIMENTO DOS CONTEÚDOS POR TEMA

Tema A - Aprofundamento de Estudo dos Números e Operações.

Subtema A1 - Números Reais*

A.1.1 - Dizimas e números irracionais
A.1.2 - A recta real'
A.1.3 - Relações < e > em $\Re$
A.1.4 - Cálculos em $\Re$
A.1.5 - Intervalos de números reais

Subtema A2 - Equações do 1° grau a duas incógnitas

A.2.1 - Resolução
A.2.2 - Interpretação geométrica

Subtema A3 - Sistema de duas equações do 1°- grau a duas incógnitas*

A.3.1 - Métodos de Resolução:
- A.3.1.1 - Método de substituição
- A.3.1.2 - Método de comparação
- A.3.1.3 - Método de redução ao coeficiente simétrico

Subtema A4 - Inequação

A.4.1- Método de resolução
A.4.2 - Conjuntos definidos por condições.

Subtema A5 - Equações do 2° grau*

A.5.1 - Resolução de equações do 2° grau:
- A.5.1.1 - Resolução das equações do 2° grau incompleta e completa
- A.5.1.2 - Fórmula resolvente das equações do 2° grau
- A.5.1.3 - Discussão da existência de soluções de uma equação do 2° grau
- A.5.1.4 - Propriedade das raízes
- A.5.1.5 - Construção da equação quadrática dada as suas raízes
- A.5.1.6 - Equação biquadrática, raízes ou solução
- A.5.1.7 - Resolução de equações quadráticas nos diferentes domínios
- A.5.1.8 - Resolução de inequações quadráticas simples

Tempo .... 50 Aulas

Sugestões metodológicas:
Para introduzir os números reais, o professor poderá partir de um pequeno problema como o que a seguir se apresenta.

Qual é a medida de comprimento do diagonal dum quadrado cujo lado mede um metro.

A resposta a este problema despertará nos alunos a necessidade de ampliação do domínio numérico.

Outra forma de trabalhar os números reais é introduzi-los e relacioná-los com dizimas infinitas não periódicas.

Exemplos tais como:
$\prod$; 2, 10 100 1000 ...; 5, 1 2 3 4 56 7 8 9 10 11 12 ....

A marcação de alguns números irracionais como $\sqrt{2}$, $\prod$, ... e outros na recta poderá ainda ajudar o aluno a compreender este domínio numérico.

As equações do 1° grau a duas incógnitas e os sistemas de duas equações a duas incógnitas, serão introduzidos a partir de problema da vida quotidiana que os alunos irão traduzir da linguagem corrente para linguagem matemática (e reciprocamente).

O conhecimento das equações do 1 ° grau a duas incógnitas assim como o estudo da função linear serão considerados como pré-requisitos no estudo do sistema de duas equações a duas incógnitas. A verificação do conjunto de soluções será feita pela substituição dos valores de incógnitas ou através da representação gráfica das rectas definidas nas equações.

O conjunto de soluções das inequações será traduzido em intervalos com apoio de gráficos, que devem acompanhar todo este trabalho.

Uma revisão breve sobre as operações dos conjuntos facilitará a compreensão do estudo de conjuntos definidos por condições. De modo igual o estudo das equações do 2° grau deverá ser antecedido com apresentação da extracção de raiz quadrada, uma vez que a radiação não é ainda do domínio dos alunos.

As equações do 2° grau serão resolvidas, numa primeira fase, por meio da decomposição em factores. A fórmula resolvente não será demonstrada mas será apresentada como outro processo que permite a resolução das equações do 2° grau.

Esta metodologia é particularmente recomendada nos caso em que a decomposição em factores não é evidente.

Tema B - Proporcionalidade Inversa. Representações gráficas*

B.1 - Constante de proporcionalidade inversa.
B.2 - Tabelas e gráficos
B.3 - A proporcionalidade inversa como função $X \to \frac{K}{X}$
B.4 - Análise de gráficos que traduzem situações da vida real

Tempo .... 10 Aulas

Sugestões metodológicas:
A proporcionalidade inversa tratar-se-á da mesma forma como a directa.

Partindo de situações da vida concreta corrente o conhecimento do conceito de funções constituirá uma nova concretização deste conceito.

Para além do gráfico da função $X \to \frac{K}{X}$ sugerimos que se analise e interprete outros gráficos que traduzam situações de vida real.

Tema C - Trigonometria do Triângulo Rectângulo

C.1 - Razões trigonométricas de ângulos agudos:*
Seno - cosseno -tangente

C.2 - Relações entre as razões trigonométricas de um ângulo agudo.*

$$Sen^2\ a + \cos^2\ a = 1$$

$$tg\ a \frac{Sen\ a}{Cos\ a}$$

C.3 - tabelas de valores naturais

Tempo .... 15 Aulas

Sugestões metodológicas:
Uma breve história do surgimento da trigonometria antes de iniciar o tratamento do tema poderá ser útil para despertar o interesse do aluno. As noções básicas de trigonometria devem partir de noções concretas como a medição de sombra projectada por um edifício, o cálculo da medida de altura de uma árvore vista pelo alinhador. Para isso poderá ser útil propor trabalho fora da sala de aulas e incentivar não só o uso mas até a construção de novos instrumentos de medição. Como por exemplo um sextante rudimentar um compasso do agrimensor.

Tema D - Geometria: Circunferência e Polígonos, Rotações

Subtema D1 - Circunferência*

D.1.1 - Simetrias numa circunferência
D.1.2 - Cordas, arcos e ângulos ao centro correspondentes numa Circunferência.
D.1.3 - Polígonos inscritos. Polígonos regulares.
D.1.4 - Soma das amplitudes dos ângulos internos e soma das amplitudes dos ângulos externos de um polígono convexo.
D.1.5 - Áreas de polígonos:

Subtema D2 -Áreas e volumes de sólidos

D.2.1-Área e volume duma Esfera

Tempo .... 45 Aulas

Sugestões metodológicas:
Ao estudar a circunferência e círculo pretende-se relacionar outros elementos geométricos que lhes estão directamente ligados como por exemplo: Ângulos ao centro excêntricos, cordas, tangentes, poiígonos inscritos. - propriedades e relações.

As propriedades relativas a ângulos ao centro, arcos e cordas, deverão ser verificadas experimentalmente, desta forma o aluno pode por si mesmo concluir qual a relação entre a amplitude do ângulo inscrito e a do arco compreendido entre os seus lados.

O estudo dos polígonos regulares permitirá calcular áreas e volumes de sólidos no espaço.

A introdução dos polígonos far-se-á pela construção dos polígonos regulares habituais, como por exemplo: triângulo, quadrado, hexágono... Em seguida, deve determinar-se a amplitude do ângulo ao centro correspondente ao lado (de um hexágono, de um pentágono...).

A determinação da soma das amplitudes dos ângulos internos e externos de um polígono convexo far-se-á a partir da medição das amplitudes dos ângulos.

O tratamento das áreas e volumes de uma esfera, deve iniciar-se pela resolução de problemas sobre sólidos geométricos de forma a permitir interligar e sintetizar os conhecimentos já adquiridos (teorema de Pitágoras, proporcionalidade, área e volumes).

A determinação do volume de um tronco de cone ou pirâmide de bases paralelas poderá constituir um exemplo de uma nova situação a explorar.

No estudo da proporcionalidade inversa, para além da situação de vida real, poder-se-á fazer apelo a outros conhecimentos que o aluno já adquiriu noutras ciências, como por exemplo: a lei da atracção universal.

Em cada caso será identificada a constante de proporcionalidade e procurar-se-á o seu significado de forma clara para os alunos.

A proporcionalidade inversa sendo uma função, será reconhecida nas suas diferentes representações (gráficas analíticas e por meio das tabelas) convertendo-se sempre que necessário, de uma representação para as outras.

Deve trabalhar-se, essencialmente com os gráficos no 1° quadrante.

No entanto, relacionando valores negativos pode falar-se em hipérbole.

AVALIAÇÃO

No ensino, a avaliação assume carácter eminentemente formativo, devendo favorecer a progressão pessoal e a autonomia como parte integrante do processo ensino/aprendizagem, permitindo ao aluno implicar-se no próprio processo e ao(à) professor(a) controlar melhor a sua prática lectiva.

A avaliação do processo do(a) aluno(a) deverá ser sistemática e contínua, quer em relação aos processos utilizados, quer em relação aos resultados obtidos.

A avaliação a realizar ao longo de cada ano deve ser prescrita e não deve assumir um carácter definitivo que discrimine desde logo o(a) aluno(a), impedindo de alcançar sucesso no imediato e, porventura, no seu futuro escolar.

Uma avaliação que contemple todos os domínios de aprendizagem e respeite o ritmo do(a) aluno(a), implica uma escolha adequada de formas e instrumentos de avaliação. Assim, podem constituir formas de avaliação trabalhos individuais ou de grupo, discussões e debates, exposições, entrevistas, trabalhos de casa, assim como o caderno diário.

Para avaliar a capacidade de resolução de problemas, o(a) professor(a) recolherá informações sobre os progressos verificados nas diferentes fases a considerar durante o processo. Poderá ser pedido aos alunos que entreguem pequenos relatórios onde descrevem, não só a sua resolução do problema, como igualmente a descrição de todo o processo percorrido, abordagem seguida, dificuldades, avanços, recuos, razões justificativas das opções tomada, entre outros.

A avaliação da capacidade de comunicação em Matemática faz-se observando o modo como o(a) aluno(a) descreve processos, enuncia propriedades, expressa conceitos, formula problemas, compreende e avalia ideias expressas em Matemática, devendo o(a) professor(a) estar particularmente atento(a) ao desenvolvimento da clareza, precisão e adequação da linguagem utilizada.

Devem ser pedidas frequentemente, ao longo do ano, argumentações/descrições escritas e orais relativas a processos matemáticos seguidos pelos alunos. Os trabalhos desenvolvidos em grupos deverão ser igualmente considerados para a avaliação. Esta poderá ter em conta, quer produções realizadas em grupos, quer trabalhos complementares individuais.

C16

República de Angola
Ministério da Educação

PROGRAMA DE

MATEMÁTICA
11ª Classe

2.º CICLO DO ENSINO SECUNDÁRIO GERAL

ÁREA DE CIÊNCIAS FÍSICAS E BIOLÓGICAS

Ficha Técnica

Título
Programa de Matemática - 11ª Classe
(Área de Ciências Físicas e Biológias)

Editora
Editora Moderna, S.A.

Pré-impressão, Impressão e Acabamento
GestGráfica, S.A.

Ano / Edição / Tiragem
2014 / 2.ª Edição / 2.000 Ex.

EDITORA MODERNA

E-mail: geral@editoramoderna.com

INIDE
Instituto Nacional de Investigação e Desenvolvimento da Educação

ÍNDICE

INTRODUÇÃO GERAL À DISCIPLINA NO 2º CICLO DO ENSINO SECUNDÁRIO

A disciplina de Matemática contribui para a realização dos objectivos gerais da geração jovem, através da utilização de meios específicos da ciência matemática.

Sendo assim, a Lei de Bases do Sistema de Educação define o Sistema Educativo como um conjunto de estruturas e modalidades, através das quais se realiza a educação que proporciona a formação harmoniosa e integral da personalidade, com vista à consolidação de uma sociedade progressista e democrática.

Neste programa os conteúdos apresentam-se por temas que proporcionam ao professor uma visão global e planificada. Assim, cada tema compreende uma lista de itens, a saber: pré-requisitos, objectivos, conteúdos, meios, sugestões metodológicas, gestão de tempo e instrumentos de avaliação.

Neste programa desenvolveu-se um subtema básico na planificação para cada tema, dando desta maneira ao professor uma ideia de como desenvolver a planificação da sua aula.

Das sugestões dadas, o professor escolherá as que lhe pareçam mais oportunas e adequadas.

OBJECTIVOS GERAIS DA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA NO 2º CICLO DO ENSINO SECUNDÁRIO

O ensino da Matemática no 2.º ciclo, deverá desenvolver nos alunos, os seguintes objectivos:

1. Consolidar e alargar os conhecimentos e capacidades adquiridas no Ensino Primário e no 1º ciclo do Ensino Secundário.

2. Contribuir para a criação de condições científicas e intelectuais necessárias no Ensino Superior.

3. Introduzir intensamente nos alunos os métodos de pensamento do trabalho científico.

4. Apreciar o contributo da Matemática na evolução científica.

5. Usar correctamente o vocabulário específico e a simbologia matemática.

6. Aperfeiçoar as capacidades de definir, demonstrar, reconhecer e sistematizar problemas matemáticos.

7. Estudar sensivelmente as dificuldades de julgar com base nas capacidades adquiridas.

8. Criar as bases para o hábito da pesquisa científica.

OBJECTIVOS GERAIS DA MATEMÁTICA DA 11ª CLASSE PARA A ÁREA DE CIÊNCIAS FÍSICAS E BIOLÓGICAS

› Ampliar os conhecimentos dos alunos sobre ângulos e medida de ângulos mediante a generalização do conceito de ângulo e a introdução do sistema circular de medida de ângulos;

› Conhecer as razões trigonométricas para ângulos agudos num triângulo rectângulo e desenvolver a capacidade de aplicá-las no cálculo de triângulos e na solução de problemas relacionados com a vida prática;

› Conhecer a fórmula fundamental da trigonetria $(sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1)$ a partir do triângulo rectângulo e ser capaz de utilizá-la na dedução de outras fórmulas secundárias, como sejam $1 + \frac{1}{tg^2\alpha} = \frac{1}{sen^2\alpha}$ ou $tg^2\alpha + \frac{1}{\cos^2\alpha}$;

› Desenvolver a capacidade de deduzir e demonstrar diferentes expressões trigonométricas e habilidades de cálculo com tábuas trigonométricas;

› Compreender o conceito da função "seno" e as suas variantes mais importantes, como a função da forma $y = a\ sen\infty$, identificá-las a partir da sua representação gráfica e aplicá-las na resolução de problemas;

› Compreender as funções "co-seno", "tangente" e "co-tangente", assim como as suas propriedades e representação gráfica, a partir dos conhecimentos e capacidades adquiridas no estudo da função seno;

› Compreender equações trigonométricas;

› Reconhecer que o produto escalar de dois vectores no plano e no espaço é um número e não um vector;

› Aplicar o produto escalar na demonstração das propriedades geométricas, na dedução da fórmula do desenvolvimento de *cos(x-y)*, na resolução de triângulos não rectângulos, e a sua expressão nas coordenadas dos vectores em referencial ortonormado;

› Compreender conjuntos por condições;

› Solucionar problemas sobre perpendicularidade, paralelismo e ângulo no plano e no espaço;

- Explorar os conhecimentos sobre produto escalar e aplicá-los na determinação da distância de um ponto a um plano assim como a interpretação geométrica da intersecção de planos na resolução de sistemas de equações;

- Reconhecer os números infinitamente grandes, infinitésimos e progressões aritméticas ou geométricas associadas à resolução de problemas;

- Interiorizar os conceitos de sucessões quanto à monotonia, aos majorantes, aos minorantes e ao limite;

- Analisar termos que obedecem a uma condição dada;

- Fazer o estudo intuitivo da sucessão de termo geral $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ num contexto de modelação matemática. Primeira definição do número E;

- Dominar o conceito intuitivo de limite de uma sucessão, criando habilidades de cálculo;

- Reconhecer o surgimento de indeterminações nas operações com limites de sucessões e dominar os procedimentos que conduzam ao levantamento de tais indeterminações;

- Ampliar os conhecimentos já adquiridos no domínio da estatística em anos anteriores, assim como reconhecer a sua importância para o desenvolvimento da capacidade de análise, de crítica e de intervenção nos problemas sociais da vida quotidiana;

- Interpretar e comparar distribuições estatísticas, recorrendo às medidas de localização, de dispersão e a gráficos;

- Indicar situações em que a estatística presta serviços relevantes, tais como o senso ou recenseamento populacional, a sondagem e outros, utilizando diversos métodos científicos e de análise dos dados obtidos.

ESQUEMA PROGRAMÁTICO (11ª CLASSE)

Área de Ciências Físicas e Biológicas

30 Semanas / Ano Escolar
4 Aulas / Semana
Total 120 aulas / Ano

1º TRIMESTRE

Tema 1 - Trigonometria .... 40 aulas

2º TRIMESTRE

Tema 1 - Trigonometria .... 5 aulas

Tema 2 - Produto escalar de dois vectores no plano e no espaço. Perpendiculares de vectores e rectas. Intersecção de planos e rectas no espaço .... 25 aulas

Tema 3 - Sucessões .... 10 aulas

3º TRIMESTRE

Tema 3 - Sucessões .... 5 aulas

Tema 4 - Limite de uma sucessão. Número de Neper. Indução matemática .... 20 aulas

Tema 5 - Estatística .... 15 aulas

TEMAS / CONTEÚDOS

Tema 1 - Trigonometria

1.1. Medidas de um ângulo. Generalização da noção de ângulo. As razões trigonométricas.

- Medida de um ângulo.
- Generalização da noção de um ângulo.
- As razões trigonométricas para ângulos agudos.
- Fórmulas e resultados de referência.
- Resolução de triângulos.

1.2. As funções trigonométricas $y = sen\ \alpha,\ y = \cos\ en\ \alpha,\ = tg\ \alpha$ **para quaisquer ângulos. Equações trigonométricas. Redução ao 1º quadrante.**

- As funções trigonométricas no círculo trigonométrico.
- As funções trigonométricas num referencial em que a amplitude do ângulo é a abcissa.
  Função seno.
  Função co-seno.
  Função tangente.
- Transformações dos gráficos das funções trigonométricas.

1.3. Equações trigonométricas.

- Equações do tipo $sen\ \alpha = a$
- Equações do tipo $\cos\ \alpha = a$
- Equações do tipo $tg\ \alpha = a$
- Redução ao 1º quadrante.

Tempo .... 45 aulas

Sugestões metodológicas:

Para iniciar este tema, devem propor-se aos alunos problemas variados ligados a situações concretas, onde apliquem métodos trigonométricos (problemas ligados a sólidos, moldes, navegação, topografia, história), de modo a que percebam a importância da trigonometria para as várias ciências. Caso possuam calculadoras, os alunos têm a possibilidade de se preocupar menos com os cálculos e mais com a compreensão do problema.

A menos que possuam calculadoras, os alunos não devem trabalhar no cálculo de ângulos e arcos generalizados, embora seja importante que conheçam alguns valores exactos das funções trigonométricas, para poder confirmar pontos do traçado dos seus gráficos.

Depois de compreendidas as relações referidas por observação no círculo trigonométrico, deve evitar-se a realização de exercícios repetitivos de puras técnicas de cálculo e rotina.

É importante que os alunos verifiquem que se mantêm as relações:
$sen^2+\cos^2 x=1$, $tgx=\frac{senx}{\cos x}$ e $1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}$ e que sejam usadas na determinação de outras funções trigonométricas.

O professor deve seleccionar, para resolução, as equações trigonométricas mais simples, do tipo $(kx)=sen\ \alpha$, $\cos(kx+a)=\cos\ \alpha$ e $tg(kx)=tg\ \alpha$.

Deve fazer-se referência ao seno e co-seno como funções reais de variável real e aos gráficos dessas funções trigonométricas.

Tema 1 - Trigonometria para quaisquer ângulos.

Subtema: As funções trigonométricas $y = sen\ \alpha$, $y = \cos\ \alpha$ **e** $y = tg\ \alpha$

Objectivo(s) geral(ais):

› Compreender os conceitos das funções seno, co-seno e tangente para quaisquer ângulos.

Pré-requisitos:

› Conhecer as razões trigonométricas de ângulos agudos.
› Conhecer:
  • Seno;
  • Co-seno;
  • Tangente, num triângulo rectângulo.

Objectivos Específicos	Conteúdos
- Identificar o seno, co-seno e a tangente no círculo trigonométrico. - Determinar a seno e co-seno de um ângulo qualquer. - Representar funções trigonométricas num referencial em que a amplitude do ângulo é a abcissa.	• As funções trigonométricas $y = sen\ \alpha$ $y = \cos\ \alpha$ $y = tg\ \alpha$ • Representação gráfica das funções trigonométricas e suas transformações.

Meios:

› Giz, quadro, apagador, caderno.

Sugestões metodológicas:

› Considerando a importância do tema para o desenvolvimento das capacidades mentais do aluno, sugere-se iniciar por um problema em que se apliquem números trigonométricos.

Tempo:

› 8 aulas.

Instrumentos de avaliação:

› Exercícios escritos.

Tema 2 - Produto escalar de dois vectores no plano e no espaço. Perpendiculares de vectores e rectas. Intersecção de planos e rectas no espaço.

2.1. Produto escalar.

- O produto escalar de dois vectores no plano e no espaço.
- Projecção de um vector sobre outro vector.
- Propriedades do produto escalar de dois vectores.
- Expressão do produto escalar nas coordenadas dos vectores.
- O produto escalar na definição de lugares geométricos.
- Produto escalar no espaço. Ângulos de dois vectores no espaço.

2.2. Perpendicularidade de vectores e rectas. Conjuntos definidos por condições.

- Ângulos de duas rectas no plano.
- Inclinação de uma recta do plano.
- Rectas perpendiculares no plano.
- Relação entre declives de duas rectas perpendiculares no plano.
- Distância de um ponto a uma recta no plano.
- Bissectriz de um ângulo.
- Equações de uma recta no espaço.
- Distância de um ponto a uma recta no espaço.
- Determinação do ângulo de duas rectas no espaço.

2.3. Planos. Intersecção de planos e rectas no espaço.

- Equação de um plano.
- Distância de um ponto a um plano.
- Planos paralelos.
- Planos perpendiculares.
- Ângulos de dois planos.
- Ângulos de uma recta com um plano.
- Intersecção de planos e rectas no espaço.

Tempo .... 25 aulas

Sugestões metodológicas:

A noção de produto escalar e as suas aplicações ligadas à resolução de problemas possibilitam ao aluno melhorar as suas capacidades de visualização e de representação, aumentando a sua intuição geométrica. O professor deve continuar a explorar as ligações da geometria a outros conteúdos.

O estudo dos vectores e da equação vectorial assegura a base para a aquisição de novos conhecimentos pelos alunos. Deste modo, o professor terá maior facilidade em transmitir o conhecimento das equações cartesianas.

Deve ser dedicada atenção especial à análise e interpretação de figuras planas e mesmo tridimensionais, para que o aluno possa resolver problemas variados da vida corrente, no domínio da engenharia, arquitectura e outros.

De igual modo, no estudo da geometria, é necessário que o professor esteja seguro que o aluno não se limite à simples manipulação de condições isoladas em situações práticas, e que, pelo contrário, seja capaz de as interpretar, fazendo com que a aprendizagem dos novos conceitos surja relacionada com a resolução de problemas e como prolongamento da geometria já estudada (o aluno, após esta unidade, já poderá justificar propriedades das figuras usando representações em coordenadas).

Tema 2 - Produto escalar de dois vectores.

Subtema: Definição de produto escalar de dois vectores no plano e no espaço.

Objectivo(s) geral(ais):
› Conhecer produto escalar de dois vectores.

Pré-requisitos:
› Conhecer a definição de vectores e suas componentes.
› Conhecer a definição de vector livre no plano e no espaço, noção de força, distância e trabalho com auxílio da Física.
› Conhecer diferentes tipos de ângulos.

Objectivos Específicos	Conteúdos
- Reconhecer produto escalar de dois vectores no plano e no espaço como um número e não um vector. - Compreender as aplicações do produto escalar - Na demonstração das propriedades geométricas. - Dedução da fórmula *cos(x-y).* - Resolução de triângulos rectângulos. - Expressões nas coordenadas dos vectores em referencial ortonormado	• Definição de produto escalar de dois vectores no plano e no espaço e suas consequências. • Projecção de um vector sobre outro vector. • Propriedades do produto escalar de dois vectores.

Meios:
› Giz, quadro, apagador, caderno, régua, esquadro.

Sugestões metodológicas:
› O professor pode começar por apresentar um problema ligado à Física, para cuja resolução seja necessária a utilização de vectores e ângulos.

Tempo:
› 4 aulas

Instrumentos de avaliação:
› Tarefas individuais e exercícios escritos.

Tema 3 - Sucessões.

3.1. Sucessões. Sucessões monótonas e sucessões limitadas.

3.1.1. Definição de uma sucessão. Termos de uma sucessão.

- Representação geométrica de uma sucessão.
- Sucessões definidas por recorrência.
- Sucessões monótonas.
- Sucessões limitadas.
- Majorantes, minorantes e enquadramentos.

3.2. Progressões aritméticas e progressões geométricas.

3.2.1 Progressão aritmética. Definições.

- Termo geral de uma progressão aritmética.
- Soma dos termos de uma progressão aritmética.
- Monotonia de uma progressão aritmética.

3.2.2. Progressão geométrica. Definições.

- Termo geral de uma progressão geométrica.
- Soma dos termos de uma progressão geométrica.
- Monotonia de uma progressão geométrica.

Tempo .... 15 aulas

Sugestões metodológicas:

O estudo das sucessões é útil como meio de resposta a determinadas situações problemáticas da vida corrente, assim como no estudo de outras ciências. A introdução do conceito de sucessão e das suas propriedades pode ser feita recorrendo a problemas de carácter geométrico, conforme se propõe neste programa.

O estudo das sucessões como funções de variável real natural, deve realizar-se apenas depois de vários exemplos como modelo. A escrita de expressões deve ser processada como forma de representar as situações que se vão descrevendo. É também necessário que se introduzam as noções de termo, de ordem, de razão, etc.

No plano, o aluno deve descobrir as relações entre as coordenadas de pontos simétricos relativamente ao eixo das abcissas, ao eixo das ordenadas e à bissectriz dos quadrantes ímpares.

Os alunos podem utilizar livremente a calculadora (caso possuam) como meio auxiliar de resposta aos problemas que lhes são apresentados e usarem formas próprias de organização e expressão na modelação das situações.

Tema 3 - Sucessões.

Subtema: Sucessões monótonas e sucessões limitadas.

Objectivo(s) geral(ais):

› Conhecer a definição de sucessão. Determinar termos que obedecem a uma condição dada.

Pré-requisitos:

› Conhecer o conceito de função como conceito geral.
› Determinar quando um conjunto de pares ordenados é uma função.
› Representar graficamente uma função.

Objectivos Específicos	Conteúdos
- Interiorizar os conceitos de sucessão quanto à monotonia, majorantes, minorantes e limite. - Identificar e calcular os termos de uma sucessão.	• Sucessões monótonas e sucessões limitadas.

Meios:

› Giz, quadro, apagador, régua, esquadro, caderno.

Sugestões metodológicas:

› Pelo significado do conceito de sucessão na definição posterior de limite, é essencial que os alunos compreendam claramente esta definição, a partir da representação gráfica de algumas funções, determinando-se previamente os pares ordenados.
› Algumas sugestões de funções:

$$y = x - 1,\ \ y = \frac{1}{x}$$

$$y = x^2 + 4$$

Tempo:

› 3 aulas

Instrumentos de avaliação:

› Alguns exercícios do manual sobre o tema.

Tema 4 - Limite de uma sucessão. Cálculo de limite de sucessões. Número de Neper. Indução matemática.

4.1. Limite de uma sucessão.

4.1.1. Infinitamente grandes. Definição.
- Sucessões infinitamente grandes e sucessões monótonas.
- Sucessões infinitamente grandes e sucessões limitadas.
- Subsucessão de uma sucessão.
- Infinitamente grandes de referência.
- Teoremas sobre infinitamente grandes.

4.1.2. Infinitésimos. Definição.
- Infinitésimos de referência.
- Teoremas sobre infinitésimos.

4.1.3. Sucessões convergentes. Definição.
- Teoremas sobre sucessões convergentes.

4.1.4. Classificação das sucessões.

4.2. Cálculo de limite de sucessões. Número de Neper.
- Operações com sucessões convergentes.
- Operações com sucessões divergentes.
- Levantar algumas indeterminações $\left(\frac{\infty}{\infty} \ e \ \infty - \infty \right)$
- Soma de todos os termos de uma progressão geométrica.
- O número de Neper.
- O número de Neper na Matemática Financeira.

4.3. Indução matemática.
- Princípio de indução matemática.
- Extensão do princípio de indução matemática.

Tempo .... 20 aulas

Sugestões metodológicas:

O conceito de limite de uma sucessão servirá de base para este capítulo, ocupando sempre um lugar de destaque.

As maiores dificuldades dos alunos surgirão na compreensão do conceito de limite. O professor deve ser muito paciente ao longo destas primeiras aulas, de modo a poder assegurar cabalmente a compreensão dos conceitos por parte dos alunos.

É precisamente na elaboração do conceito de limite, donde surgirão maiores dificuldades para compreensão dos alunos. O professor deve ser muito paciente ao longo destas primeiras aulas de modo a poder assegurar cabalmente a compreensão dos conceitos por parte dos seus alunos.

Assim, é necessário explicar constantemente o sentido dos quantificadores que surgem nas definições, especialmente o conceito para quase todo o n.

Após a introdução das noções de sucessão como função de variável natural, de ordem, de termo geral, etc., podem apresentar-se alguns exemplos de sucessões definidas pelo seu termo geral e, utilizando a calculadora gráfica (caso possua) e através de cálculos e representações gráficas de sequências de termos, chegar aos conceitos de infinitamente grande, de infinitamente pequeno e de limite de uma sucessão. Cada definição deve ser enriquecida com exemplos e contra-exemplos que esclareçam as ideias imediatas e corrijam eventuais concepções alternativas e erradas. Desta maneira, cada estudante ganha confiança nos seus próprios conhecimentos e compreende as novas aquisições como complementares e que facilitarão o aprofundamento das suas aptidões para responder a situações cada vez mais complexas.

As definições deverão ser introduzidas em linguagem muito simples, facilitando assim as conclusões a tirar em cada exemplo e contra-exemplo. Deverão seguir-se uma redacção em simbologia matemática e exercícios rápidos para testar as definições simbólicas.

Tema 4 - Limite de uma sucessão.

Subtema: Cálculo do limite de uma sucessão.

Objectivo(s) geral(ais):

› Conhecer o domínio do cálculo com limite de uma sucessão e o procedimento de levantamento das indeterminações nas operações com sucessões convergentes e divergentes.

Pré-requisitos:

› Noção de função.
› Noção de sucessão.
› Sucessões monótonas.
› Sucessões limitadas.
› Sucessões convergentes.

Objectivos Específicos	Conteúdos
- Dominar o conceito intuitivo de limite de uma sucessão. - Criar habilidades no domínio do cálculo com limites. - Reconhecer e dominar os procedimentos que conduzam ao levantamento das indeterminações surgidas nas operações com sucessões convergentes e divergentes.	• Cálculo do limite de sucessão.

Meios:

› Giz, quadro, apagador, caderno.

Sugestões metodológicas:

› Observar as orientações em anexo sobre o tema.

Tempo:

› 3 aulas

Instrumentos de avaliação:

› Exercícios individuais e provas escritas.

Tema 5 - Estatística.

5.1. O objecto da estatística. Conceitos básicos.

- O objecto da estatística.
- Interpretar e dar informações.
- A estatística na modelação matemática.
- População e amostra.
- Censo e sondagem.
- Estatística descritiva e estatística indutiva.
- Caracteres, atributos ou variáveis estatísticas.
- Variável discreta e variável.

5.2. Organização e apresentação dos dados.

- Percentagens, estimativas e arredondamentos.
- Análise gráfica de atributos quantitativos.
- Distribuição de frequência e representação gráfica. Variáveis discretas e variáveis contínuas.
- Separador de frequência.

5.3. Medidas de localização.

- A média, a mediana e a moda.
- Somatórios.
- Consolidações gerais sobre a média, a mediana e a moda.

5.4. Medidas de dispersão.

- Amplitude.
- Variância e desvio padrão.

5.5. Distribuições binomiais.

- Relação estatística. Diagrama de dispersão.
- Ideia intuitiva de correlação.
- Coeficiente de correlações linear.
- Recta de regressão.

Tempo .... 15 aulas

Sugestões metodológicas:

Algumas das noções que se tratam neste tema já foram abordadas no 1º ciclo, sendo por isso possível em qualquer altura reinvestir nestes conhecimentos e completá-los progressivamente pela sua importância. Assim, o professor pode, se o considerar vantajoso, tratar este tema de uma forma descontínua ao longo do ano, nomeadamente sob forma de trabalho de projecto.

Para iniciar, os alunos podem recolher dados na turma, em revistas, em livros ou junto de instituições, empresas ou serviços públicos, devendo, no entanto, ter-se em conta a maturidade e sensibilidade dos alunos para os problemas apresentados.

O professor deve acentuar que o principal objectivo da Estatística Descritiva é organizar os dados observados (amostra) e extrair-lhes as características mais importantes, resumindo a informação neles contida (redução de dados).

Os alunos devem construir tabelas de frequência associadas a dados preferencialmente correspondentes a situações reais, construir e interpretar gráficos de barras, histogramas e gráficos poligonais (caso contínuo) e, eventualmente em ambos os casos, construir gráficos circulares e pictogramas.

Os alunos devem compreender e interpretar medidas de localização, em particular as medidas de tendência central, assim como as medidas de dispersão. Não se pedem fórmulas estatísticas além da média e do desvio padrão, devendo-se utilizar as funções estatísticas das máquinas calculadoras (caso os alunos e o professor a possuam) assim que os alunos tenham compreendido os conceitos aos quais essas fórmulas se referem.

A mediana e os quartis devem ser definidos a partir da função cumulativa, não devendo no entanto perder-se a interpretação corrente. No caso da mediana, por exemplo, são os valores que têm, à sua esquerda e à sua direita, o mesmo número de observação.

A partir do exemplo de nuvens de pontos, os alunos devem identificar o tipo de correlação. Não devem ser propostos exercícios que envolvam o cálculo (a não ser pela máquina), nem é de exigir o conhecimento da fórmula do coeficiente de correlação. Os alunos devem sim, a partir dos exemplos, saber verificar algumas propriedades do coeficiente referido.

Tema 5 - Estatística.

Subtema: Organização e apresentação dos dados.

Objectivo(s) geral(ais): Reconhecer a importância da estatística no desenvolvimento da capacidade de análise, de crítica e de intervenção nos problemas sociais da vida quotidiana.

Pré-requisitos:

› Conhecer o objecto da estatística e alguns conceitos básicos:
- Interpretar e dar informações.
- População e amostra.
- Censo e sondagem.

Objectivos Específicos	**Conteúdos**
- Recolher e tratar dados. - Interpretar e comparar distribuições estatísticas.	• Recolha, organização e diferentes formas de representação de dados estatísticos.

Meios:

› Quadro, giz, caderno, apagador, régua e esquadro.

Sugestões metodológicas:

› Observar a página das orientações metodológicas sobre o tema e escolher as que melhor convierem.

Tempo:

› 3 aulas

Instrumentos de avaliação:

› Trabalho individual e em grupo, prova escrita.

AVALIAÇÃO

No ensino, a avaliação assume carácter eminentemente formativo, devendo favorecer a progressão pessoal e a autonomia como parte integrante do processo de ensino e aprendizagem, permitindo ao aluno implicar-se no próprio processo e ao professor controlar melhor a sua prática lectiva. A avaliação do processo do aluno deverá ser sistemática e contínua, quer em relação aos processos utilizados, quer em relação aos resultados obtidos.

A avaliação a realizar ao longo de cada ano não deve ser prescritiva nem assumir um carácter definitivo que descrimine desde logo o aluno, impedindo-o de alcançar sucesso no imediato e, porventura, no médio prazo. Cabe ao professor gerir, de acordo com as experiências de aprendizagem desenvolvidas, os parâmetros enunciados.

Uma avaliação que complete todos os domínios de aprendizagem e respeite o ritmo dos alunos implica uma escolha adequada de formas e instrumentos de avaliação. Assim, podem constituir formas de avaliação os trabalhos individuais ou de grupo, as discussões e os debates, as exposições, as entrevistas, os trabalhos de casa, assim como a própria estrutura do caderno diário.

Para avaliar a capacidade de resolução de problemas, o professor deverá recolher informações sobre os progressos verificados nas diferentes fases a considerar durante o processo. Poderá ser pedido aos alunos que entreguem pequenos relatórios onde descrevam não só a sua resolução do problema como igualmente a descrição de todo o processo percorrido (primeira abordagem, seguida das dificuldades, avanços, recuos, razões justificativas das opções tomadas, etc…).

A avaliação da capacidade de comunicação em Matemática faz-se observando o modo como o aluno descreve processos, enuncia propriedades, expressa conceitos, formula problemas e compreende e avalia ideias expressas em Matemática, devendo o professor estar particularmente atento ao desenvolvimento da clareza, precisão e adequação da linguagem utilizada. Devem ser pedidas frequentemente ao longo do ano argumentações e descrições escritas e orais, relativas a processos matemáticos seguidos pelos alunos.

Os trabalhos desenvolvidos em grupo deverão ser igualmente considerados para a avaliação. Esta poderá ter em conta produções realizadas em grupo e trabalhos complementares individuais.

B.2 Estatística Aplicada à Educação do Instituto Superior de Ciências de Educação da Huíla

INSTITUTO SUPERIOR DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO DA HUÍLA

CURSOS: TODOS

CADEIRA: ESTATÍSTICA APLICADA A EDUCAÇÃO

PROGRAMA

OBJECTIVOS INSTRUTIVOS:

1. Explicar os conceitos básicos básicos associados à Estatística e à Teoria das Probabilidades.
2. Distinguir as subdivisões da Estatística.
3. Representar graficamente conjuntos de dados. Interpretar gráficos.
4. Interpretar tabelas e quadros.
5. Sintetizar e interpretar conjuntos de dados em medidas de tendência central, de dispersão, de posição, etc.
6. Dominar e efectuar procedimentos de cálculo.
7. Avaliar riscos e decidir com base em probabilidades.
8. Modelar problemas caracterizados por incerteza.
9. Identificar e aplicar procedimentos técnicos na selecção e composição de amostras.
10. Reconhecer e efectuar testes de hipótese, testes paramétricos e não paramétricos.
11. Reconhecer e aplicar correlação e regressão linear.

OBJECTIVOS EDUCATIVOS:

1. Cultivar e consolidar hábitos de estudo, particularmente estudo independente.
2. Descrever a importância da aquisição de competências para as suas carreiras profissionais.
3. Desenvolver a cultura econométrica na análise de fenómenos sociais.

DISTRIBUIÇÃO DE TEMPOS:

Tipologia: Semestral
Horas de contacto: 3 horas semanais
Total de tempos: 45 (duração de cada tempo: 45 minutos)
Total de Horas: 33,75 horas (2025 minutos)
Ano Curricular: 2ºano
Semestre: 2º
Tipo de unidade curricular: Obrigatória
Docente responsável
E-mail institucional:
Nível: Licenciatura
Modo de ensino: Presencial
Língua (s) de ensino: Português
Outros docentes que leccionam a unidade curricular

AVALIAÇÕES:

- Avaliação diagnóstica: com o intuito de verificar se os alunos estão, ou não, em posse das competências necessárias para a aprendizagem dos conteúdos da unidade curricular, na primeira semana de aulas, serão aplicados testes (ou feitas perguntas) e, em função dos resultados, serão feitas revisões e dadas recomendações aos alunos sobre que conteúdos rever. Desta maneira, pretende-se assegurar o nível de partida das aprendizagens.

- Avaliação formativa: ao longo das aulas serão feitas avaliações de controlo, com o objectivo de verificar se os alunos estão, ou não, a alcançar os objectivos previstos durante o desenvolvimento das actividades. Estas avaliações, sem prejuízo do Regulamento Académico, serão tidas em conta na classificação final.

- Avaliação sumativa: uma prova escrita de frequência no final de cada semestre. um exame escrito no final do ano académico. Caso o aluno não ficar aprovado no exame final, será submetido a um exame oral e/ou um exame de recurso.
De forma resumida apresentamos a seguir o sistema de avaliação de acordo o regime académico do ISCED-Huíla.

Metodologias de ensino (Avaliação incluída)
E desenvolvimento da disciplina e teórico e prático. Os estudantes individualmente confeccionaram trabalhos de pesquisa que resolva um problema de impacto social, com saída a perfil de profissional. Durante as aulas serão realizadas conferências, aulas practicas, seminários e laboratorios. Há duas modalidades de avaliação: contínua e por exame final. A avaliação contínua inclui a realização de testes e/ou uma ou mais frequências ao longo do semestre, podendo incluir a apresentação de trabalhos e a resolução de trabalhos de casa. A avaliação por exame final consiste na realização do exame no final do semestre. **Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objectivos da unidade curricular**
A combinação do trabalho teórico e prático é a chave para atingir os objectivos. Nas aulas far-se-á apresentação e desenvolvimento dos tópicos que constituem os conteúdos programáticos da unidade curricular e as competências a adquirir pelos estudantes. Estes devem ser incentivados a adoptar uma atitude participativa nas aulas e a resolver as tarefas propostas como trabalho independente (em casa), aplicando as metodologias apresentadas nas aulas.

METODOLOGIA:
- Conferência: aula em que o professor expõe conteúdos, apresenta exemplos, esclarece dúvidas e orienta exercícios. Métodos predominantes: exposição e elaboração conjunta.
- Aula prática: aula em que os alunos, sob orientação e acompanhamento do professor, resolvem exercícios e problemas. Métodos predominantes: elaboração conjunta e trabalho independente.

COMPETÊNCIAS NECESSÁRIAS:
- Representar graficamente no sistema de coordenadas cartesianas.
- Efectuar operações aritméticas com números reais.
- Efectuar operações com conjuntos numéricos.

MEIOS DE ENSINO:
- Calculadora científica (com as seguintes funcionalidades: tratamento de dados estatísticos).
- Computador (com software para tratamento de dados estatísticos).

UNIDADES:

Unidade I: Estatística e análise exploratória de dados
- Objectivos do capítulo
- Definições sobre Estatística
- Dados, casos, variáveis e informações
- Ordenando e contando os dados
- Agrupando em classes
- Analisando as informações tabuladas
- Exercícios

Unidade II: Gráficos
- Objectivos do capítulo
- Lendo as informações das figuras
- Gráficos de ramo e folha
- Histograma
  - Para dados não agrupados em classes
  - Para dados agrupados em classes
- Diagrama ou gráfico de colunas
- Diagrama ou gráfico de barras
- Diagrama ou gráfico de pareto
- Diagrama ou gráfico de ogiva
- Diagrama ou gráfico *boxplot*
- Gráfico ou diagrama de sectores
- Grafico ou diagrama de dispersão
- Graficos pictóricos ou pictogramas
- Falhas na elaboração de gráficos
- Exercícios

Unidade III: Medidas de Posição Central
- Objectivos do capítulo
- Os centros dos dados
- Médias,
  - Média aritmética simples para dados não agrupados
  - Media aritmética ponderada para tabulados
  - Média aritmética ponderada para dados agrupados em classes frequência
  - Média geométrica
  - Media harmónica
- Entendendo o uso da média harmónica
  - Mediana para dados não agrupados

Erro padrão do coeficiente de correlação
Intervalo de confiança do coeficiente de correlação
Intervalo de confiança para projecção
Análise de variância
Cuidados necessários na análise de regressão e correlação
Exercícios
Unidade XIV: Séries e previsões temporais
Objectivos do capítulo
Dados colectados ao longo do tempo
Componentes de series temporais
Tendência com médias móveis
Médias móveis simples
Médias móveis ponderadas
Alisamento exponenciais
Tendências com modelos de regressão
Sazonalidade
Sazonalidade em modelos de médias móveis
Sazonalidade em modelos de regressão
Exercícios
Unidade XV: Recursos do Excel ou do SPSS

BIBLIOGRAFIA:

1. Afonso, A., Nunes, C. (2011). *Probabilidades e Estatística – Aplicações e soluções em SPSS*; Escolar Editora;
2. BRUNI A. (2011): Estatística *Aplicada à Gestão Empresarial (3ª ed.)*. Editora Atlas.
3. Larson, R., & Farber, B. (2004). *Estatística Aplicada.* São Paulo: Pearson Education do Brasil.
4. Maroco, J. (2003). *Análise Estatística – Com utilização do SPSS, 2ª edição*: Edições Sílabo; 2003.
5. Morais, M. C. (2003). *Estatística Computacional*. Lisboa.
6. Murteira, B.J.F. (1998). *Probabilidades e Estatística, volume I*, 2ª edição; McGraw-Hill.
7. Nunes, C. F. (2012). *Probabilidades & Estatística.* Lisboa: Escolar Editora.
8. Pestana, M. H. & Gageiro, J. N. (2005). Descobrindo a Regressão – Com a Complementaridade do SPSS. Edições Sílabo.
9. TOUS J. (2004): *MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II. Pruebas de Acceso a la Universidad de Oviedo desde 1994*. Universidad de Oviedo.
10. SHIGUTI W., SHIGUTI V. (2006): *Apostila de Estatística*.
11. SPIEGEL M., SCHILLER J., SRINIVASAN R. (2013): *Schaum's Outlines of Probability and Statistcs (4th ed.)*. McGraw Hill.
12. LIPSCHUTZ S., LIPSON M. (2011): *Schaum's Outlines of Probability (2nd ed.).* McGraw Hill.
13. SPIEGEL M., STEPHENS L. (2014): *Schaum's Outlines of Statistics (5th ed.).* McGraw Hill.

ELABORADO POR:

Colectivo de docentes da disciplina