UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

Derivadas de Dini: resultados e aplicações

Versão final após defesa.

Esmael António Zage

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

Matemática para Professores

(2º Ciclo de Estudos)

Orientador: Prof. Doutor Nuno Miguel Ferreira Correia

Covilhã, julho de 2018

Dedicatória

À memória de minha mãe, Maria António “Mariazinha”, cujas lutas e sacrifícios, os frutos hoje colho e cujos sonhos hoje vivencio e ao meu irmão António Zage por sempre se ter sacrificado e arriscado para garantir um futuro para mim e para o meu irmão cassula.

Agradecimentos

Um trabalho sempre tem o contributo de vários intervenientes mesmo quando estes não sabem que o fazem. Nesta empreitada, aprendi vendo os outros fazerem, aprendi ouvindo os outros falarem. Com uns mais e com outros menos mas com todos eles aprendi e chegou o momento de à todos eles demonstrar o meu apreço e manifestar a minha gratidão. Certamente, alguns os seus nomes não constarão, pelo que peço as minhas desculpas, mas saibam que não é uma atitude intencional; entretanto, espero que todos que passaram por mim e não forem mencionados, bem como os que convivem comigo até ao momento, se identifiquem com o meu gesto de gratidão.
Assim, começo por agradecer ao Ser supremo que tem o domínio de tudo e que sem Ele nada acontece- o Deus Todo-Poderoso. A Ele que mesmo quando as circunstâncias pareciam desfavoráveis, deu-me forças para lutar e prosseguir até ao fim. À minha mãe, minha heroína, que sempre se mostrou incansável, dando tudo de si para que eu pudesse ter um futuro risonho. Aos meus irmãos: Tony, homem valente e de valor inestimável, por ser para mim mais do que um irmão; Duducho pelo apoio incondicional; São pelo carinho e apoio; Gaspar, meu maninho cassula, pela força e pelo constante auxílio na minha ausência. À minha esposa, pela pessoa maravilhosa que é, amiga, conselheira, amorosa, carinhosa e muito atenciosa, obrigado por tudo meu bem. Às minhas cunhadas pelo amor e carinho que têm por mim e aos meus sobrinhos. À minha filha Marília Samara, por suportar a minha ausência. Os meus agradecimentos em especial são para o meu orientador, Professor Nuno Correia, pelo zelo, dedicação, sabedoria, experiência e paciência. Sem ele não seria possível chegar neste estágio.
Aos meus professores da Escola Superior Politécnica de Malanje. Um agradecimento particular ao Professor Infeliz Coxe, o impulsionador da minha vinda à Portugal. Aos meus sogros pela atenção e encorajamento que me têm prestado. Aos meus padrinhos Manuel e Etelvina Osório pelos conselhos, apoio e encorajamento. Aos colegas do curso com os quais muito aprendi; aos colegas da Escola Superior Politécnica de Malanje pelo espírito de entreajuda e irmandade. Aos amigos: Stalin, Aires, Afonso, Quituxe, Luís, Filipe, Helder, Quiluanje, Teixeira, Gilson José, Félix Bunga, Isaac Campos, Teresa Zinga, Daniela Raquel, Odelma. Aos Professores da UBI pelos seus ensinamentos.
A todos o meu profundo sentimento de gratidão. Que Deus à todos abençoe!

Resumo

Neste trabalho lançámos o desafio de estudar derivadas de Dini, o porquê do seu aparecimento e algumas aplicações.
Para abordarmos este assunto de uma forma coerente foi necessário traçar um caminho no qual tivemos de recordar alguns conceitos lecionados no Ensino Secundário, como por exemplo: sucessões e subsucessões, limite, função contínua, função diferenciável, monotonia e extremos de uma função; assim como os resultados relacionados. Mas foi também necessário introduzir assuntos que vão além do Ensino Secundário, como limite superior e limite inferior, funções semicontínuas.
Para aplicar as derivadas de Dini recordamos os Teoremas de Rolle e de Lagrange, para os quais apresentamos uma generalização envolvendo as derivadas de Dini.
Tal como em qualquer curso de Cálculo, depois do cálculo diferencial surge a integração, pois isso no Capítulo final consta os conhecidos integrais de Riemann e Lebesgue e a construção do integral de Henstock-Kurzweil.

Palavras-chave

Derivada, Derivadas de Dini, Integral, Integral de Henstock-Kurzweil.

Abstract

In this work we launched the challenge of studying derivatives of Dini, the reason for its appearance and some applications.
In order to approach this subject in a coherent way, it was necessary to draw a path in which we had to remember some concepts taught in Secondary Education, such as: sequences and subsequences, limit, continuous function, differentiable function, monotony and extremes of a function; as well as related results. But it was also necessary to introduce subjects that go beyond Secondary Education, as upper limit and lower limit, semicontinuous functions.
To apply the Dini derivatives we recall the Rolle and Lagrange Theorems, for which we present a generalization involving the Dini derivatives.
As in any Calculus course, after the differential calculus arises integration, for this in the final Chapter consists of the well-known integrals of Riemann and Lebesgue and the construction of the Henstock-Kurzweil integral.

Keywords

Derivative, Dini derivatives, Integral, Henstock-Kurzweil Integral.

Conteúdo

Lista de Figuras

Introdução

O presente trabalho teve a sua origem nas notas elaboradas para as unidades curriculares de Projecto de Ensino I e II, do 2º Ciclo de Matemática para Professores.
As derivadas de Dini, introduzidas pelo matemático italiano U. Dini [Din92], tinham como objetivo generalizar o conceito de derivada, de modo a estudar o comportamento de funções que não têm derivada, isto é, funções não diferenciáveis.
Geometricamente, a derivada, a que para distinguir chamaremos derivada usual, de uma função f num ponto a é entendida como o declive da recta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a. Assim, a derivada de uma função f num ponto a pode ser determinada fazendo o limite da razão incremental, como explicitamos no Capítulo 1.
Porém, quando calculamos um limite, o mesmo pode não existir ou tomar um valor infinito e nesses casos dizemos que a derivada não existe, e como tal a função f não é diferenciável no ponto a. Uma primeira forma de contornar este problema é considerar os limites laterais e dessa forma obtemos a derivada à esquerda e a derivada à direita da função f no ponto a, conceito que também abordamos no Capítulo 1. Todos estes conceitos e resultados fazem parte do programa de Matemática A do Ensino Secundário [Min13].
No entanto, pode acontecer que mesmo assim as derivadas laterais (mais concretamente os limites em causa) não existam ou tomem valores infinitos, e nesse caso, dizemos que a função não é diferenciável à esquerda nem à direita do ponto.
Por isso, U. Dini definiu derivadas em que no lugar do conceito de limite usa o conceito de limite superior e limite inferior, o que resolve o problema da não existência de derivada; e ao admitir que as derivadas podem assumir o valor de $\pm\infty$ obteve as chamadas derivadas de Dini (ver Definição 2.1). Assim, existem quatro derivadas de Dini: à direita superior e inferior e à esquerda superior e inferior; que podem, porventura tomar o valor de $\pm\infty$.
Para introduzir as derivadas de Dini, recordamos no Capítulo 1 a definição e principais resultados relacionados com o limite inferior e limite superior, assunto que não faz parte do programa de Matemática A do Ensino Secundário.
No Capítulo 1 recordamos ainda algumas propriedades e resultados de: sucessões e subsucessões, funções contínuas e derivada usual; e introduzimos conceitos como funções semicontínuas.
Com a implementação do novo programa de Matemática A [Min13], no Ensino Secundário é utilizada a definição de limite em que se admite que x pode tomar o valor de a, por isso, na Secção 1.2 fazemos uma pequena abordagem para distinguir as duas definições: a do Ensino Secundário e a mais comummente utilizada.
No segundo Capítulo introduzimos a definição de derivada de Dini e apresentamos alguns resultados essenciais ilustrados com exemplos; recordamos alguns dos principais resultados sobre a derivada usual, como o Teorema de Rolle e de Lagrange, e apresentamos resultados semelhantes e de certa forma equivalentes para as derivadas de Dini, que são uma generalização dos teoremas bem conhecidos.
Na segunda parte do Capítulo 2 encontram-se alguns resultados sobre derivadas de Dini que permitem fazer um estudo sobre a monotonia e os extremos de uma função, à semelhança do que acontece para a derivada usual (como descrito no Capítulo anterior).
No terceiro e último Capítulo dedicado à integração, recordamos a construção do integral de Riemann e integral de Lebesgue, para em seguida introduzir a definição de relação de cobertura e, desse modo apresentar de uma forma sucinta o integral Henstock-Kurzweil que permite trabalhar com derivadas de Dini.

Capítulo 1

Revisão de Conceitos e Resultados

1.1 Sucessões

Definição 1.1. Chamamos *sucessão* de números reais (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a uma aplicação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$ ($u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$). À expressão $u_n = u(n)$ chamamos *termo geral da sucessão* (u_n) e ao conjunto $\{u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots, u_n, \ldots\}$ chamamos *conjunto dos termos da sucessão*. Dado $k \in \mathbb{N}$, a u_k chamamos *termo de ordem* k.

Nota 1.2. Quando não houver risco de confusão indicamos a sucessão (u_n) pelo respectivo termo geral u_n.

Exemplo 1.3. Consideremos a sucessão (u_n) com o termo geral dado por

$$u_n = n^2 - 2.$$

O conjunto dos termos da sucessão é:

$$\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots\} = \left\{-1, 2, 7, \ldots, n^2 - 2, \ldots\right\}.$$

1.1.1 Sucessões Limitadas

Definição 1.4. Dada um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, dizemos que $b \in \mathbb{R}$ é um *majorante de* X se $b \geqslant x$ para todo o $x \in X$, dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é um *minorante de* X se $a \leqslant x$ para todo o $x \in X$. Se o conjunto X admitir majorantes, dizemos que X é um conjunto limitado superiormente; se o conjunto X admitir minorantes, dizemos que X é um conjunto limitado inferiormente.

Definição 1.5. Dado um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ com majorantes, dizemos que o majorante M é *supremo de* X se para todos os majorantes M' de X tivermos $M \leqslant M'$, e indicamos por $\sup X$. Dado um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ com minorantes, dizemos que o minorante m é *ínfimo de* X se para todos os minorantes m' de X tivermos $m \geqslant m'$, e indicamos por $\inf X$.

Recordemos o Axioma do Supremo.
Axioma do Supremo: *Qualquer conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ não vazio e limitado superiormente tem supremo.*

Definição 1.6. Consideremos uma sucessão (u_n). Dizemos que (u_n) é uma *sucessão limitada superiormente* se o conjunto dos seus termos tiver majorantes, ou seja, se existir $K \in \mathbb{R}$ tal que $u_n \leqslant K$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.
Dizemos que (u_n) é uma *sucessão limitada inferiormente* se o conjunto dos seus termos tiver minorantes, ou seja, se existir $M \in \mathbb{R}$ tal que $M \leqslant u_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.
Mais geralmente, dizemos que (u_n) é uma *sucessão limitada* se o conjunto dos termos for limitado, isto é, se existir $M, K \in \mathbb{R}$ tais que $M \leqslant u_n \leqslant K$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.7. Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n = 1 + (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$. Então temos que

$$\begin{aligned}\left|1 + (-1)^n \frac{n}{n+1}\right| &\leqslant |1| + \left|(-1)^n \frac{n}{n+1}\right| = 1 + \frac{n}{n+1} \\ &= 1 + \frac{n+1-1}{n+1} = 1 + 1 - \frac{1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1} < 2,\end{aligned}$$

uma vez que $\dfrac{1}{n+1} > 0$. Assim, $-2 < u_n < 2$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, e a sucessão (u_n) é limitada inferiormente e superiormente, ou seja, é uma sucessão limitada.

Exemplo 1.8. A sucessão de termo geral $u_n = 2n - 4$ é uma sucessão limitada inferiormente. Com efeito,

$$n \geqslant 1 \Leftrightarrow 2n \geqslant 2 \Leftrightarrow 2n - 4 \geqslant -2 \Leftrightarrow u_n \geqslant -2,$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.9. Considere a sucessão de termo geral $u_n = 1 + (-1)^n$. A sucessão é limitada pois o conjunto de seus termos é $\{0, 2\}$, que é um conjunto limitado.

Exemplo 1.10. Dada a sucessão de termo geral $u_n = 2 - \dfrac{1}{n}$, a sucessão (u_n) é limitada. De facto, é fácil verificar que para todo o $n \in \mathbb{N}$, temos $0 < \dfrac{1}{n} \leqslant 1$, o que é equivalente a $0 > -\dfrac{1}{n} \geqslant -1 \Leftrightarrow 2 > 2 - \dfrac{1}{n} \geqslant 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant u_n < 2$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.11. Dada a sucessão de termo geral $u_n = (-1)^n n$, o conjunto dos termos é

$$\{-1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, 8, \ldots\}$$

que é um conjunto ilimitado, logo a sucessão (u_n) não é limitada.

1.1.2 Sucessões Monótonas

Definição 1.12. Consideremos uma sucessão (u_n). Dizemos que (u_n) é uma *sucessão monótona crescente* se $u_{n+1} \geqslant u_n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.
Dizemos que (u_n) é uma *sucessão monótona decrescente* se $u_{n+1} \leqslant u_n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.13. Consideremos a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$, então

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+2)(n+2) - (n+3)(n+1)}{(n+3)(n+2)} \\ &= \frac{n^2 + 4n + 4 - (n^2 + 4n + 3)}{(n + 3(n+2)} = \frac{n^2 + 4n + 4 - n^2 - 4n - 3}{(n+3)(n+2)} \\ &= \frac{1}{(n+3)(n+2)} \geqslant 0,\end{aligned}$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$, logo a sucessão é monótona crescente.

Exemplo 1.14. Consideremos a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = n - n^2$. Vamos verificar a monotonia

$$u_{n+1} - u_n = n + 1 - (n+1)^2 - \left(n - n^2\right) = n + 1 - n^2 - 2n - 1 - n + n^2 = -2n \leqslant 0,$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$. Logo a sucessão é monótona decrescente.

Exemplo 1.15. Dada a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = n^3 - 6n^2 + 5n$ temos que

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^3 - 6(n+1)^2 + 5(n+1) - n^3 + 6n^2 - 5n = 3n^2 - 9n.$$

Assim, a sucessão (u_n) não é monótona, pois é decrescente para $1 \leqslant n \leqslant 3$ e crescente para $n > 3$.

1.1.3 Subsucessões

Definição 1.16. Dadas duas sucessões (u_n) e (v_n), dizemos que (v_n) ***é subsucessão de*** (u_n) se existir um conjunto infinito de números naturais

$$\mathcal{N} = \{n_1 < n_2 < n_3 < \ldots\}$$

tal que $v_i = u_{n_i}$, para todo o $i \in \mathbb{N}$. Ou seja, o conjunto dos termos da sucessão (v_n) é um subconjunto infinito do conjunto dos termos da sucessão (u_n), no qual mantemos a ordem.

Dada uma sucessão (u_n) podemos construir algumas subsucessões (v_n), como por exemplo:

- a subsucessão dos termos de ordem par: $v_n = u_{2n}$ cujo conjunto dos termos é $\{u_2, u_4, u_6, \ldots\}$
- a subsucessão dos termos de ordem ímpar: $v_n = u_{2n-1}$ cujo conjunto dos termos é $\{u_1, u_3, u_5, \ldots\}$
- a subsucessão dos termos de ordem múltiplos de 3: $v_n = u_{3n}$ cujo conjunto dos termos é $\{u_3, u_6, u_9, \ldots\}$
- a subsucessão dos termos de ordem com número primo: v_n cujo conjunto dos termos é $\{u_2, u_3, u_5, u_7 \ldots\}$

Exemplo 1.17. Dada a sucessão de termo geral dado por $u_n = 2n + 3$, o conjunto dos termos da sucessão (u_n) é

$$\{5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, \ldots\}.$$

Podemos considerar as seguintes subsucessões:

- a subsucessão dos termos de ordem par: $v_n = u_{2n} = 4n + 3$ cujo conjunto dos termos é $\{7, 11, 15, 19, 23, \ldots\}$
- a subsucessão dos termos de ordem ímpar: $v_n = u_{2n-1} = 4n + 1$ cujo conjunto dos termos é $\{5, 9, 13, 17, 21, \ldots\}$
- a subsucessão dos termos de ordem com número primo: v_n cujo conjunto dos termos é $\{7, 9, 13, 17, \ldots\}$

Mas, a sucessão cujo conjunto dos termos é $\{7, 15, 11, 23, 5, \ldots\}$ não é uma subsucessão de (u_n).

Definição 1.18. Dada uma sucessão (u_n) limitada superiormente, definimos a *sucessão superior* de (u_n), que indicamos por $(\overline{u_n})$ cujo termo geral é dado por

$$\overline{u_n} = \sup\{u_k : k \geqslant n\}.$$

Dada uma sucessão (u_n) limitada inferiormente, definimos a *sucessão inferior* de (u_n), que indicamos por $(\underline{u_n})$ cujo termo geral é dado por

$$\underline{u_n} = \inf\{u_k : k \geqslant n\}.$$

Pelo Axioma do Supremo qualquer conjunto limitado, não vazio, que tenha majorantes tem supremo; da mesma forma, se o conjunto for limitado e tiver minorantes tem ínfimo. Assim, concluímos que a sucessão superior (e também a inferior) de uma dada sucessão limitada está bem definida, uma vez que o conjunto dos termos da sucessão está nas condições do Axioma Supremo.

Exemplo 1.19. Consideremos (u_n) a sucessão de termo geral $u_n = (-1)^{n+1}$. O conjunto dos termos da sucessão é $\{1, -1 \ldots\}$. Assim,

$$\overline{u_n} = \sup\{u_k : k \geqslant n\} = \sup\{-1, 1\} = 1$$

$$\underline{u_n} = \inf\{u_k : k \geqslant n\} = \inf\{-1, 1\} = -1.$$

Exemplo 1.20. Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$. O conjunto de termos da sucessão é $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right\}$. Logo

$$\overline{u_n} = \sup\{u_k : k \geqslant n\} = \sup\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\underline{u_n} = \inf\{u_k : k \geqslant n\} = \inf\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right\} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exemplo 1.21. Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$. Observemos que para n par temos $u_n = 2 + \frac{1}{n}$ e para n ímpar temos $u_n = 2 - \frac{1}{n}$. O conjunto dos termos da sucessão é

$$\left\{1, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{9}{4}, \frac{9}{5}, \frac{13}{6}, \frac{13}{7}, \ldots, \frac{2001}{1000}, \frac{2001}{1001}, \ldots\right\}.$$

Consideremos o conjunto $A_n = \{u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots\}$. Quando

1. n é par temos $A_n = \left\{2 + \frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n+1}, 2 + \frac{1}{n+2}, 2 - \frac{1}{n+3}, \ldots\right\}$
2. n é ímpar temos $A_n = \left\{2 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n+1}, 2 - \frac{1}{n+2}, 2 + \frac{1}{n+3}, \ldots\right\}$.

Para a sucessão $\overline{u_n} = \sup A_n$ temos que

1. se n é par, $\overline{u_n} = 2 + \frac{1}{n}$
2. se n é ímpar, $\overline{u_n} = 2 + \frac{1}{n+1}$.

Para a sucessão $\underline{u_n} = \inf A_n$ temos que

1. se n é par, $\underline{u_n} = 2 - \frac{1}{n+1}$
2. se n é ímpar, $\underline{u_n} = 2 - \frac{1}{n}$.

Exemplo 1.22. Dada a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = 1 - \frac{1}{n^2}$, o conjunto dos termos da sucessão é $\left\{0, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \frac{15}{16}, \frac{24}{25}, \frac{35}{36}, \frac{48}{49}, \frac{63}{64}, \frac{80}{81}, \frac{99}{100}, \ldots\right\}$. Logo para a sucessão $(\overline{u_n})$ temos

$$\overline{u_n} = \sup\left\{1 - \frac{1}{k^2} : k \geqslant n\right\} = 1,$$

para a sucessão $(\underline{u_n})$ temos

$$\underline{u_n} = \text{inf}\left\{1 - \frac{1}{k^2} : k \geqslant n\right\} = 1 - \frac{1}{n^2} = u_n.$$

Exemplo 1.23. Seja (u_n) a sucessão de termo geral

$$u_n = \begin{cases} 1 + \dfrac{2}{n+1} & \text{, se } n \text{ é ímpar} \\ 2 + \dfrac{2}{n} & \text{, se } n \text{ é par} \end{cases}.$$

O conjunto dos termos da sucessão é

$$\left\{2, 3, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \frac{6}{5}, \frac{11}{5}, \ldots\right\}.$$

Consideremos o conjunto $A_n = \{u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots\}$, quando

1. n é par temos $A_n = \left\{2 + \dfrac{2}{n}, 1 + \dfrac{2}{n+2}, 2 + \dfrac{2}{n+2}, 1 + \dfrac{2}{n+4}, \ldots\right\}$
2. n é ímpar temos $A_n = \left\{1 + \dfrac{2}{n+1}, 2 + \dfrac{2}{n+1}, 1 + \dfrac{2}{n+3}, 2 + \dfrac{2}{n+3}, \ldots\right\}$.

Para a sucessão $\overline{u_n} = \sup A_n$ temos que

1. se n é par, $\overline{u_n} = 2 + \dfrac{2}{n}$
2. se n é ímpar, $\overline{u_n} = 2 + \dfrac{2}{n+1}$.

Para a sucessão $\underline{u_n} = \inf A_n$ temos que

1. se n é par, $\underline{u_n} = 1$
2. se n é ímpar, $\underline{u_n} = 1$.

Da Definição 1.18 sai facilmente o seguinte resultado.

Lema 1.24. *Dada uma sucessão limitada (u_n), temos que $\underline{u_n} \leqslant u_n \leqslant \overline{u_n}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.*

Poposição 1.25. *A sucessão superior de (u_n) é decrescente e a sucessão inferior de (u_n) é crescente.*

Prova: No caso da sucessão superior de (u_n), basta notar que

$$\overline{u_n} = \sup\{u_k : k \geqslant n\} \geqslant \sup\{u_k : k \geqslant n+1\} = \overline{u_{n+1}}.$$

De modo análogo, para a sucessão inferior temos

$$\underline{u_n} = \inf\{u_k : k \geqslant n\} \leqslant \inf\{u_k : k \geqslant n+1\} = \underline{u_{n+1}}.$$

□

1.1.4 Limite de uma Sucessão

Definição 1.26. O número real L é *limite da sucessão* (u_n) se para qualquer $\delta > 0$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que para todo o $n \in \mathbb{N}$ com $n > p$ tivermos $|u_n - L| < \delta$, isto é

$$\forall_{\delta>0}\exists_{p\in\mathbb{N}}\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad n > p \Rightarrow |u_n - L| < \delta.$$

O que significa que para qualquer $\delta > 0$ existe uma ordem p a partir da qual todos os termos da sucessão pertencem ao intervalo $]L-\delta, L+\delta[$. Diz-se também que a sucessão (u_n) é *convergente* para L ou que tende para L e escrevemos

$$\lim u_n = L \qquad \text{ou} \qquad (u_n) \to L.$$

Exemplo 1.27. Podemos usar a definição para mostrar que $\lim 3 - \dfrac{2}{n} = 3$. Como

$$|u_n - L| = \left|3 - \frac{2}{n} - 3\right| = \left|-\frac{2}{n}\right| = \frac{2}{n} < \delta,$$

basta tomar p tal que $p > \dfrac{2}{\delta}$, desse modo para $n > p$ temos

$$n > \frac{2}{\delta} \Leftrightarrow \frac{2}{n} < \delta.$$

Exemplo 1.28. Podemos usar a definição para mostrar que $\lim \dfrac{2n+1}{n+3} = 2$. Como

$$|u_n - L| = \left|\frac{2n+1}{n+3} - 2\right| = \left|\frac{-5}{n+3}\right| = \frac{5}{n+3} < \delta,$$

basta tomar p tal que $p > \dfrac{5}{\delta} - 3$, desse modo para $n > p$ temos

$$n > \frac{5}{\delta} - 3 \Leftrightarrow n+3 > \frac{5}{\delta} \Leftrightarrow \frac{1}{n+3} < \frac{\delta}{5} \Leftrightarrow \frac{5}{n+3} < \delta.$$

Teorema 1.29. *[Fer90, Rud76] Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.*

Prova: Consideremos que a sucessão (u_n) é crescente e limitada. Seja U o conjunto dos termos da sucessão (u_n), o qual é limitado. Pelo Axioma do Supremo o conjunto U tem supremo $M \in \mathbb{R}$, logo $u_n \leqslant M$.
Tomemos $\delta > 0$, então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $M - \delta < u_p$. Como a sucessão é crescente, para todo o $n > p$ temos $M - \delta < u_p \leqslant u_n$.
Concluímos assim que $M - \delta < u_n < M + \delta$, ou seja a sucessão (u_n) é convergente para M.
No caso em que a sucessão é decrescente e limitada a prova é análoga.

□

Definição 1.30. Se $\lim u_n = 0$ dizemos que (u_n) é um *infinitésimo*.

Definição 1.31. Diz-se que a sucessão (u_n) tende para $+\infty$, ou que o limite é $+\infty$, se para todo $M > 0$ existir $p \in \mathbb{N}$ tal que para $n > p$ temos $u_n > M$, isto é

$$\forall_{M>0}\exists_{p\in\mathbb{N}}\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad n > p \Rightarrow u_n > M,$$

e escrevemos $\lim u_n = +\infty$ ou $(u_n) \to +\infty$.
Diz-se que a sucessão (u_n) tende para $-\infty$, ou que o limite é $-\infty$, se para todo $M > 0$ existir $p \in \mathbb{N}$ tal que para $n > p$ temos $u_n < -M$, isto é

$$\forall_{M>0}\exists_{p\in\mathbb{N}}\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad n > p \Rightarrow u_n < -M,$$

e escrevemos $\lim u_n = -\infty$ ou $(u_n) \to -\infty$.
Em qualquer dos casos dizemos que (u_n) é um *infinitamente grande*.

Teorema 1.32. *[Fer90] O limite de uma sucessão quando existe é único.*

Prova: Supomos que (u_n) é uma sucessão com dois valores distintos como limite, $a \neq b$, digamos $a < b$.
Tomemos $\delta = \dfrac{b-a}{2} > 0$. Usando a definição de limite (ver Definição 1.26) podemos afirmar que: existe uma ordem p_1, a partir da qual $|u_n - a| < \delta$ para todo o $n > p_1$; e existe uma ordem p_2, a partir da qual $|u_n - b| < \delta$ para todo o $n > p_2$. Seja $p = \max\{p_1, p_2\}$, logo para todo o $n > p$ temos

$$a - \delta < u_n < a + \delta \wedge b - \delta < u_n < b + \delta,$$

como $a < b$, em particular temos que $b - \delta < u_n < a + \delta \Leftrightarrow \dfrac{a+b}{2} < u_n < \dfrac{a+b}{2}$, o que é absurdo. Logo $a = b$, ou seja, o limite é único.

□

Poposição 1.33. *Dada uma sucessão (u_n) tal que* $\lim u_n = L$*, então para qualquer subsucessão (v_n) de (u_n) temos* $\lim v_n = L$.

Prova: Seja $L \in \mathbb{R}$. Como $\lim u_n = L$ temos que para todo o $\delta > 0$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $u_n \in]L - \delta, L + \delta[$, para todo $n > p$. Se (v_n) é uma subsucessão de (u_n), então podemos tomar $n_0 > p$ tal que $v_q = u_{n_0}$ para algum $q \in \mathbb{N}$, logo $v_n \in]L - \delta, L + \delta[$, ou seja $\lim v_n = L$.
Para $L = \pm\infty$ basta adaptar a prova.

□

Do Teorema 1.32 e da proposição anterior temos o seguinte:

Corolário 1.34. *Se (u_n) tem duas subsucessões (v_n) e (w_n) tais que $(v_n) \to a$ e $(w_n) \to b$ com $a \neq b$, então (u_n) não tem limite.*

Nota 1.35. Nos dois resultados anteriores a, b e L podem ser $\pm\infty$.

1.1.5 Teorema da Sucessão Enquadrada

Definição 1.36. Dizemos que (u_n) é uma *sucessão enquadrada* pelas sucessões (v_n) e (w_n) se $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.37. *Se (u_n) é uma sucessão enquadrada por (v_n) e (w_n) tais que* $\lim v_n = \lim w_n = L$*, então* $\lim u_n = L$.

Prova: Se $\lim v_n = L$ e $\lim w_n = L$, então para cada $\delta > 0$, existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo o $n \in \mathbb{N}$ com $n > p_1$ temos $L - \delta < v_n < L + \delta$; e existe $p_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo o $n \in \mathbb{N}$ com $n > p_2$ temos $L - \delta < w_n < L + \delta$. Tomamos $p_0 = \max\{p_1, p_2\}$, então para cada $\delta > 0$ e para todo o $n \in \mathbb{N}$ com $n > p_0$, temos que $L - \delta < v_n \leqslant u_n \leqslant w_n < L + \delta$, ou seja $\lim u_n = L$.

□

Nota 1.38. Na prova do teorema anterior tomámos $L \in \mathbb{R}$. Mas, dada uma sucessão enquadrada tal que $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$; se lim $v_n = +\infty$, então lim $u_n = +\infty$; por outro lado, se lim $w_n = -\infty$, então lim $u_n = -\infty$.

Exemplo 1.39. Dada a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \sqrt{9 + \frac{4}{n^2}}$ temos que

- $\frac{4}{n^2} > 0 \Leftrightarrow 9 + \frac{4}{n^2} > 9 \Leftrightarrow \sqrt{9 + \frac{4}{n^2}} > \sqrt{9} \Leftrightarrow u_n > v_n = 3$
- $9 + \frac{4}{n^2} < 9 + \frac{12}{n} + \frac{4}{n^2} \Leftrightarrow \sqrt{9 + \frac{4}{n^2}} < \sqrt{\left(3 + \frac{2}{n}\right)^2} \Leftrightarrow u_n < w_n = 3 + \frac{2}{n}$

Como lim $v_n = 3$ e lim $w_n = \lim 3 + \frac{2}{n} = 3$, então, pelo Teorema 1.37 temos que lim $u_n = 3$.

Exemplo 1.40. Consideremos a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \frac{\cos^2(n-2)}{3n+1}$. Como $-1 \leqslant \cos \alpha \leqslant 1$ para todo o α, temos que

$$0 \leqslant \cos^2(u_n - 2) \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant \frac{\cos^2(n-2)}{3n+1} \leqslant \frac{1}{3n+1}.$$

Tomando $v_n = 0$ e $w_n = \frac{1}{3n+1}$, pelo Teorema 1.37 vem que lim $u_n = 0$.

Exemplo 1.41. Dada a sucessão (u_n) de termo geral

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}.$$

O conjunto dos termos da sucessão (u_n) é $\left\{\frac{1}{2}, \frac{11}{15}, \frac{181}{220}, \ldots\right\}$.
Para todo o $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} \leqslant \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \ldots + \frac{n}{n^2+1} = \frac{n.n}{n^2+1},$$

ou seja $u_n \leqslant \frac{n^2}{n^2+1}$.
Por outro lado,

$$\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} \geqslant \frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} = \frac{n.n}{n^2+n},$$

ou seja $u_n \geqslant \frac{n^2}{n^2+n}$. Como

$$\lim \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \quad \text{e} \quad \lim \frac{n^2}{n^2+n} = 1,$$

logo lim $u_n = 1$.

1.1.6 Limite Superior e Limite Inferior de uma Sucessão

Definição 1.42. Dada uma sucessão (u_n), se (u_n) for limitada superiormente, chamamos *limite superior da sucessão* (u_n) ao limite da sucessão $(\overline{u_n})$, e indicamos lim sup $u_n = \lim \overline{u_n}$; e se a sucessão (u_n) for limitada inferiormente, chamamos *limite inferior da sucessão* (u_n) ao limite da sucessão $(\underline{u_n})$, e indicamos lim inf $u_n = \lim \underline{u_n}$.

No caso de (u_n) não ser limitada superiormente dizemos que $\limsup u_n = +\infty$. De forma análoga, quando (u_n) não é limitada inferiormente dizemos que $\liminf u_n = -\infty$.

Observação 1.43. Se (u_n) é uma sucessão limitada, logo as sucessões superior e inferior são também limitadas. Por outro lado, pela Proposição 1.25 temos que as sucessões superior e inferior são monótonas. Logo, pelo Teorema 1.29 as sucessões $(\overline{u_n})$ e $(\underline{u_n})$ são convergentes, ou seja, existe sempre o limite superior e o limite inferior da sucessão (u_n).

Exemplo 1.44. Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n = n$, o conjunto dos termos da sucessão é $\{1, 2, 3, \ldots\}$. A sucessão (u_n) não é limitada superiormente, então $\limsup u_n = +\infty$. Por outro lado, $\underline{u_n} = u_n$ e temos $\liminf u_n = \lim \underline{u_n} = \lim u_n = \lim n = +\infty$.

Poposição 1.45. *Dada a sucessão* (u_n), *temos que* $\lim u_n = L$ *se e só se* $\limsup u_n = \liminf u_n = L$.

Prova: Seja $L \in \mathbb{R}$. Se $\lim u_n = L$, então para todo o $\delta > 0$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $L - \delta < u_n < L + \delta$, para todo o $n > p$. Como na sucessão $(\underline{u_n})$ tomamos os ínfimos de (u_n) e na sucessão $(\overline{u_n})$ tomamos os supremos de (u_n) temos

$$L - \delta \leqslant \underline{u_n} \leqslant \overline{u_n} \leqslant L + \delta,$$

logo $\lim \underline{u_n} = L$ e $\lim \overline{u_n} = L$, ou seja $\limsup u_n = \liminf u_n = L$.
Por outro lado, se $\limsup u_n = \liminf u_n = L$ do Lema 1.24 e do Teorema 1.37 (das Sucessões Enquadradas) sai logo que $\lim u_n = L$.
A prova pode ser adaptada ao caso $L = \pm\infty$.

□

Exemplo 1.46. Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n = (-1)^n$. O conjunto de termos da sucessão é $\{-1, 1\}$. Logo, $\limsup u_n = \lim \overline{u_n} = \lim 1 = 1$ e $\liminf u_n = \lim \underline{u_n} = \lim -1 = -1$. Como o limite superior e o limite inferior de (u_n) são diferentes, o limite de (u_n) não existe.

Exemplo 1.47. Consideremos a sucessão de termo geral

$$u_n = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \dfrac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}.$$

O conjunto dos termos desta sucessão é

$$\left\{1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, 7, \frac{1}{8}, 9, \frac{1}{10}, \ldots\right\}.$$

Como (u_n) não é limitada superiormente, então $\limsup u_n = +\infty$. Como

$$\underline{u_n} = \inf\{u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots\} = 0,$$

logo $\liminf u_n = \lim \underline{u_n} = 0$. Assim, a sucessão (u_n) não tem limite.

Exemplo 1.48. Seja (u_n) a sucessão definida por recorrência por

$$u_1 = 0 \qquad , \qquad u_{2m} = \frac{u_{2m-1}}{2} \qquad , \qquad u_{2m+1} = \frac{1}{2} + u_{2m}.$$

O conjunto dos termos da sucessão é

$$\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{7}{16}, \frac{15}{16}, \frac{15}{32}, \frac{31}{32}, \frac{31}{64}, \dots\right\}.$$

Assim, como $\overline{u_n} = 1$ temos que $\limsup u_n = 1$. Mas, a sucessão $(\underline{u_n})$ é dada por

- $\underline{u_n} = \dfrac{2^{\frac{n}{2}-1} - 1}{2^{\frac{n}{2}}} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$, se n é par
- $\underline{u_n} = \underline{u_{n+1}}$, se n é ímpar

assim, $\liminf u_n = \lim \underline{u_n} = \dfrac{1}{2}$. Como $\limsup u_n \neq \liminf u_n$, concluímos que o limite de (u_n) não existe.

Lema 1.49. *Sejam (u_n) e (v_n) sucessões limitadas então:*

$$\limsup(u_n + v_n) \leqslant \limsup u_n + \limsup v_n$$

e

$$\liminf u_n + \liminf v_n \leqslant \liminf(u_n + v_n).$$

Prova: Como (u_n) e (v_n) são limitadas, então $\inf u_n \leqslant u_n \leqslant \sup u_n$ e $\inf v_n \leqslant v_n \leqslant \sup v_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, logo

$$\inf u_n + \inf v_n \leqslant u_n + v_n \leqslant \sup u_n + \sup v_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\ ,$$

então

$$\sup(u_n + v_n) \leqslant \sup u_n + \sup v_n$$

e

$$\inf u_n + \inf v_n \leqslant \inf(u_n + v_n)$$

Assim, tomando os limites temos o desejado.

□

Lema 1.50. *Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões limitadas, se (v_n) converge para a, ou seja $\limsup v_n = \liminf v_n = a$, então*

$$\limsup(u_n + v_n) = \limsup u_n + a$$

e

$$\liminf(u_n + v_n) = \liminf u_n + a$$

Prova: Provamos a primeira igualdade mostrando a dupla desigualdade. Pelo Lema 1.49 vem que

$$\limsup(u_n + v_n) \leqslant \limsup(u_n) + \limsup(v_n) = \limsup(u_n) + a.$$

Por outro lado, como $u_n = (u_n + v_n) + (-v_n)$ e recorrendo ao Lema 1.49 temos

$$\begin{aligned} \limsup(u_n) \leqslant \limsup(u_n + v_n) + \limsup(-v_n) &= \limsup(u_n + v_n) - a \\ &\Leftrightarrow \limsup(u_n) + a \leqslant \limsup(u_n + v_n) \end{aligned}$$

e temos a igualdade.
A outra igualdade prova-se de forma análoga.

□

Lema 1.51. *Sejam* (u_n) *e* (v_n) *duas sucessões limitadas, então:*

$$\limsup u_n + \liminf v_n \leqslant \limsup(u_n + v_n)$$

e

$$\liminf(u_n + v_n) \leqslant \liminf u_n + \limsup v_n$$

Prova: Se $\liminf v_n = t$, para cada $\epsilon > 0$ existe $K \in \mathbb{N}$ tal que para $n > K$, temos $t - \epsilon < v_n$ assim, $u_n + t - \epsilon < u_n + v_n$ e logo $\limsup(u_n + t - \epsilon) \leqslant \limsup(u_n + v_n)$. Do Lema anterior temos

$$\limsup(C + u_n) = C + \limsup u_n \text{ para qualquer } C \in \mathbb{R},$$

então, $\limsup(u_n) + t - \epsilon \leqslant \limsup(u_n + v_n)$ para todo o $\epsilon > 0$, assim $\limsup u_n + t \leqslant \limsup(u_n + v_n)$. Então

$$\limsup u_n + \liminf v_n \leqslant \limsup(u_n + v_n).$$

A prova da outra desigualdade é análoga a esta.

□

1.2 Limites de Funções Reais de Variável Real

O conceito de limite de uma função tem servido como base de pesquisa em vários ramos do Cálculo e Análise Matemática para estudar a continuidade e diferenciabilidade de funções.
O limite permite-nos analisar o comportamento de uma função f à medida que a variável x se aproxima a um determinado valor.

Exemplo 1.52. Seja $f(x) = 2x^2 + 1$. O que acontece a $f(x)$ quando x se aproxima de 3?
Criemos uma tabela de valores de $f(x)$ para alguns valores de x próximos de 3.

x	$f(x)$
$3,1$	$20,22$
$3,01$	$19,1202$
$3,001$	$19,012002$
$2,999$	$18,988002$
$2,99$	$18,8802$
$2,9$	$17,82$

Quando x se aproxima de 3, a função $f(x) = 2x^2 + 1$ fica próxima de $2.3^2 + 1 = 19$. Dizemos então, que o limite de $2x^2 + 1$ quando x se aproxima de 3 é 19 e escrevemos:

$$\lim_{x \to 3} (2x^2 + 1) = 19.$$

Vamos introduzir com rigor a definição de limite de uma função f quando x se aproxima de um dado valor.

Definição 1.53. Dado $a \in \mathbb{R}$ definimos a *vizinhança de* a *de raio* $\delta > 0$ como o conjunto $V_\delta(a) =]a-\delta, a+\delta[$. No caso em que $a = \pm\infty$ definimos a vizinhança de a de raio $M > 0$ como o conjunto $V_M(a) = \begin{cases}]M, a] & \text{, se } a = +\infty \\ [a, -M[& \text{, se } a = -\infty \end{cases}$.

Definição 1.54. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $X \subseteq \mathbb{R}$, dizemos que a *é ponto de acumulação de* X se para todo o $\delta > 0$ tivermos $X \cap (V_\delta(a) \setminus \{a\}) \neq \emptyset$. Indicamos o conjunto dos pontos de acumulação de X por X'.

Nota 1.55. O ponto a pode ser ponto de acumulação de X e não pertencer ao conjunto X.

Exemplo 1.56. O ponto $a = 0$ é ponto de acumulação do conjunto $X = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Definição 1.57 (Limite à Cauchy). Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e a um ponto de acumulação de D. Dizemos que *o limite de* f *no ponto* a *é* L se

$$\forall_{\delta>0} \exists_{\epsilon>0} \text{ tal que } \forall_{x \in D} : x \in V_\epsilon(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in V_\delta(L)$$

e escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Exemplo 1.58. Usando a definição de limite à Cauchy podemos provar que

$$\lim_{x \to 2} x^2 + 3 = 7.$$

Comecemos por observar que o domínio da função $f(x) = x^2 + 3$ é $\mathbb{R}$. Tomamos $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |x-2| < \epsilon$, então

$$\begin{aligned} |f(x) - 7| &= |x^2 + 3 - 7| = |x^2 - 4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2||x+2| \\ &< \epsilon|x - 2 + 4| \leqslant \epsilon\left(|x-2| + |4|\right) < \epsilon^2 + 4\epsilon < \delta, \end{aligned}$$

basta escolher $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon^2 + 4\epsilon < \delta$.

Definição 1.59 (Limite à Heine). Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e a um ponto de acumulação de D. Dizemos que o *limite da função* f*, quando* x *tende para* a *é* L, se para toda a sucessão (x_n) cujo conjunto dos termos pertence a D, $x_n \neq a$ e $(x_n) \to a$ tivermos que a sucessão $(f(x_n)) \to L$, e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Exemplo 1.60. Usando a definição de limite à Heine podemos provar que

$$\lim_{x \to 5} \frac{2x+3}{3x+2} = \frac{13}{17}.$$

Tomamos (u_n) uma sucessão qualquer tal que $(x_n) \to 5$. Então

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{2x_n + 3}{3x_n + 2} = \frac{2 \cdot 5 + 3}{3 \cdot 5 + 2} = \frac{13}{17},$$

ou seja, $\lim_{x \to 5} \frac{2x+3}{3x+2} = \frac{13}{17}$.

1.2.1 Equivalência da Definição de limite à Cauchy e limite à Heine

Nesta secção, vamos provar que as definições de limite à Cauchy e de limite à Heine de uma função são equivalentes.

Primeiro supomos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ à Cauchy, ou seja, dado $\delta > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x) \in]L-\delta, L+\delta[$, para todo o x tal que $0 < |x-a| < \epsilon$.
Tomamos uma sucessão (x_n) qualquer tal que $x_n \neq a$ e $(x_n) \to a$, ou seja, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $0 < |x_n - a| < \epsilon$, para todo o $n > p$. Então, por hipótese, temos $f(x_n) \in]L-\delta, L+\delta[$, isto é, $(f(x_n)) \to L$. Logo $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ à Heine.
Por outro lado, supondo que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ à Heine, para toda a sucessão (x_n) com $x_n \neq a$ e $(x_n) \to a$ temos que a sucessão $(f(x_n)) \to L$.
Vamos supor com vista a um absurdo que existe um $\delta > 0$, tal que para todo o $\epsilon > 0$ temos $f(x) \notin]L-\delta, L+\delta[$, sempre que $0 < |x-a| < \epsilon$.
Tomemos $\epsilon_n = \dfrac{1}{n} > 0$ e construímos a sucessão (x_n) de termo geral $x_n \neq a$ e que verifica $x_n \in]a-\epsilon_n, a+\epsilon_n[$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Logo $(x_n) \to a$, mas $f(x_n) \notin]L-\delta, L+\delta[$, ou seja $(f(x_n)) \nrightarrow L$, o que contradiz a definição de limite à Heine.

1.2.2 A definição de Limite no Ensino Secundário

Com a revisão do Programa e Metas Curriculares de Matemática A [Min13] iniciada em 2011 e implementada em 2015/2016 no 10º Ano, que prossegue para os anos seguintes, optou-se por usar a definição de limite em que se admite que x pode tomar o valor a [Fer90, Mac14, Fig11]; ao contrário da definição que usamos neste trabalho, e que é em geral mais usada, onde o limite é calculado por valores diferentes [Ste08, Lim06, Rud76].
Nesta secção apresentamos a definição de Limite tal como faz parte do novo Programa de Matemática A do Ensino Secundário em vigor em Portugal.

Definição 1.61. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $X \subseteq \mathbb{R}$, dizemos que a *é um ponto aderente de* X se para todo $\delta > 0$ tivermos

$$X \cap]a-\delta, a+\delta[\neq \emptyset.$$

Ao conjunto dos pontos aderentes de X chamamos aderência de X e indicamos por $\overline{X}$.

Definição 1.62. Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in X$, dizemos que a *é um ponto isolado de* X se existir $\delta > 0$ tal que

$$X \cap]a-\delta, a+\delta[= \{a\}.$$

Observação 1.63. Podemos concluir que $\overline{D} = D' \dot\cup \{\text{pontos isolados de } D\}$, onde $\dot\cup$ representa a união dijunta.

Definição 1.64. [Fer90] Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in \overline{D}$. Dizemos que o *limite da função* f *no ponto* a *é* L se

$$\forall_{\delta>0} \exists_{\epsilon>0} \text{ tal que } \forall_{x\in D} : x \in V_\epsilon(a) \Rightarrow f(x) \in V_\delta(L)$$

e escrevemos $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

Observação 1.65. Na definição anterior, no caso de $a \in D$, e o limite existir, temos de ter $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L = f(a)$, ou seja,

$$\forall_{\delta>0} \exists_{\epsilon>0} \text{ tal que } : x \in V_\epsilon(a) \Rightarrow f(x) \in V_\delta(f(a)).$$

Tendo presente a Observação 1.63, vamos ver como as duas definições de limite (Definição 1.57 e Definição 1.64) funcionam em diferentes situações.

1. Se $a \notin D$, logo $a \in D'$ e então a Definição 1.57 e a Definição 1.64 utilizada no Ensino Secundário coincidem. É o que acontece no ponto a_1 da Figura 1.1.

2. Se $a \in D$ e a é um ponto isolado de D, logo $a \notin D'$, assim:

   (a) a Definição 1.57 não faz sentido para o ponto a.

   (b) na Definição 1.64, utilizada no Ensino Secundário, a condição $x \in D \wedge |x - a| < \epsilon$ é equivalente a $x = a$ para $\epsilon > 0$ pequeno. Logo existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e pela Observação 1.65 esse limite coincide com $f(a)$.

   Por exemplo para a função f da Figura 1.1, no ponto a_6 não podemos calcular o limite usando a definição usual, enquanto que na Definição 1.64 temos $\lim\limits_{x \to a_6} f(x) = f(a_6)$.

3. Se $a \in D \wedge a \in D'$:

   (a) Na Definição 1.57 pode ou não existir o limite, caso exista podem acontecer várias situações.

   (b) Na Definição 1.64 utlizada no Ensino Secundário se existir $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, pela Observação 1.65 esse limite coincide com $f(a)$.

   Para a função f da Figura 1.1, no ponto a_2 existe limite tanto na Definição 1.57 como na Definição 1.64 e temos

   $$\lim_{x \to a_2} f(x) = f(a_2).$$

   No ponto a_3 na Definição 1.57 temos $\lim\limits_{x \to a_3} f(x) = b$ enquanto que na Definição 1.64 não existe limite.

   No ponto a_4 não existe limite para nenhuma das definições.

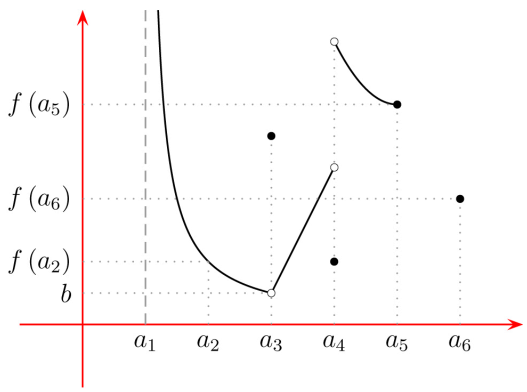

Figura 1.1: Gráfico da função $f :]a_1, a_5] \cup \{a_6\} \to \mathbb{R}$

1.2.3 Limites Laterais

Definição 1.66. Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Se a é um ponto de acumulação de $D \cap]a, +\infty[$, dizemos que o *limite à direita da função f quando x tende para a é L* se

$$\forall_{\delta>0} \exists_{\epsilon>0} \text{ tal que } \quad \forall_{x \in D} : x \in V_\epsilon(a) \Rightarrow f(x) \in V_\delta(L),$$

e escrevemos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

De forma análoga, se a é um ponto de acumulação de $D \cap]-\infty, a[$, dizemos que o *limite à esquerda da função f quando x tende para a é $L \in \mathbb{R}$*, se

$$\forall_{\delta>0} \exists_{\epsilon>0} \text{ tal que } \quad \forall_{x\in D} : x \in V_\epsilon(a) \Rightarrow f(x) \in V_\delta(L)$$

e escrevemos

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L.$$

Lema 1.67. *Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D. Então o limite da função f no ponto a existe e é igual a L se e só se os limites laterais existirem e forem ambos iguais a L.*

Prova: Se $\lim\limits_{x\to a} = L$, por definição para todo o $\delta > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x) \in]L-\delta, L+\delta[$ sempre que $x \in D$ e $0 < |x-a| < \epsilon$; mas esta condição é equivalente a termos $a < x < a+\epsilon$ e $a-\epsilon < x < a$; ou seja, os limites laterais existem e são iguais a L.
Se $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ por definição para cada δ temos que:

- existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $f(x) \in]L-\delta, L+\delta[$ sempre que $a-\epsilon_1 < x < a$
- existe $\epsilon_2 > 0$ tal que $f(x) \in]L-\delta, L+\delta[$ sempre que $a < x < a+\epsilon_2$.

Então, tomando $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ temos que $f(x) \in]L-\delta, L+\delta[$, sempre $0 < |x-a| < \epsilon$; ou seja, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

$\square$

Do resultado anterior, obtemos naturalmente o resultado seguinte:

Corolário 1.68. *Se existirem os limites laterais e forem diferentes, então o limite não existe.*

Exemplo 1.69. Consideremos a função f definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x > 0 \\ \cos x & \text{se } x \leqslant 0 \end{cases}.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \cos x = \cos 0 = 1$$

Os limites laterais da função f no ponto 0 existem e são iguais, logo o limite de f, quando x tende para 0, existe e é 1.

Exemplo 1.70. Consideremos a função f definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{se } x \geqslant 0 \\ \mathrm{e}^x - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2+1 = 1$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \mathrm{e}^x - 1 = 1-1 = 0$$

O limite da função f no ponto 0 não existe porque os limites laterais da função f no ponto 0 são diferentes.

Exemplo 1.71. Consideremos a função f definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ 1 - \ln|x| & \text{se } x < 0 \end{cases} \cdot$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 1 - \ln|x| = 1 - (-\infty) = +\infty$$

Como os limites laterais da função f no ponto 0 existem e são iguais, logo o limite da função f no ponto 0 existe e é $+\infty$.

Exemplo 1.72. Consideremos a função f dada por $f(x) = \operatorname{tg} x$ definida no seu domínio.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty$$

Os limites laterais da função f no ponto $\dfrac{\pi}{2}$ são diferentes, assim não existe limite da função f no ponto $\dfrac{\pi}{2}$.

1.2.4 Limite Superior e Limite Inferior de uma Função

Definição 1.73. Dada uma função $f : D \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de D. Consideremos o conjunto

$$A = \{L : x_n \to a, x_n \neq a \text{ e } \lim f(x_n) = L\}$$

definimos o *limite superior de f no ponto a* como

$$\limsup_{x\to a} f(x) = \sup A,$$

e definimos o *limite inferior de f no ponto a* como

$$\liminf_{x\to a} f(x) = \inf A.$$

Observação 1.74. Se existir $\epsilon > 0$, tal que para $x \in V_\epsilon(a)$ tivermos $f(x) \leqslant L$ e existir $x_n \to a,$ com $x_n \neq a$ tal que $\lim f(x_n) = L$, então

$$\limsup_{x\to a} f(x) = L.$$

Se existir $\epsilon > 0$, tal que para $x \in V_\epsilon(a)$ tivermos $f(x) \geqslant L$ e existir $x_n \to a,$ com $x_n \neq a$ tal que $\lim f(x_n) = L$, então

$$\liminf_{x\to a} f(x) = L.$$

No entanto, podemos ainda usar a seguinte definição equivalente.

Definição 1.75. Dada a função $f : D \to \mathbb{R}$ e a ponto de acumulação de D. Dizemos que o *limite superior de f no ponto a é $L \in \mathbb{R}$* se:

- Para cada $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $0 < |x - a| < \varepsilon \Rightarrow f(x) < L + \delta$

- Para cada $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ existe x_ε tal que $0 < |x_\varepsilon - a| < \varepsilon \Rightarrow L - \delta < f(x_\varepsilon)$.

Dizemos que o *limite inferior de f no ponto a é* $L \in \mathbb{R}$ se:

- Para cada $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $0 < |x - a| < \varepsilon \Rightarrow L - \delta < f(x)$
- Para cada $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ existe x_ε tal que $0 < |x_\varepsilon - a| < \varepsilon \Rightarrow f(x_\varepsilon) < L + \delta$.

Exemplo 1.76. Consideremos a função $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ com $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. O $\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe, no entanto, $\limsup_{x \to 0} f(x) = 1$. Usando as condições da definição anterior temos:

- Para cada $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que para $0 < |x| < \varepsilon$ temos $\operatorname{sen} \frac{1}{x} < 1 + \delta$, o que é sempre verdade pois $\operatorname{sen} \frac{1}{x} \leqslant 1$.
- Para cada $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ existe x_ε tal que $0 < |x_\varepsilon| < \varepsilon \Rightarrow 1 - \delta < \operatorname{sen} \frac{1}{x_\varepsilon}$. Para cada $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ e $x_\varepsilon = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ temos $0 < |x_\varepsilon| = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Assim $f(x_\varepsilon) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_\varepsilon}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1 > 1 - \delta$.

Usando as condições da definição de limite inferior, temos

$$\liminf_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = -1$$

visto que:

- Para cada $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que para $0 < |x| < \varepsilon$ temos $\operatorname{sen} \frac{1}{x} \geqslant -1 > -1 - \delta$
- Para cada $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ existe x_ε tal que $0 < |x_\varepsilon| < \varepsilon \Rightarrow \operatorname{sen} \frac{1}{x_\varepsilon} < -1 + \delta$. Dados $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{x} < \varepsilon$ e $x_\varepsilon = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ temos $0 < |x_\varepsilon| = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi} < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Assim $f(x_\varepsilon) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_\varepsilon}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = -1 < -1 + \delta$.

As sucessões referidas na Observação 1.74 para o limite superior e limite inferior, são dadas pelo x_ε, respectivamente.

Definimos o limite superior e limite inferior de uma função para o caso em que $L = \pm\infty$, da seguinte forma:

Definição 1.77. Dizemos que o limite superior de f no ponto a é $+\infty$ se para cada $M > 0$ e $\varepsilon > 0$ existe x_ε tal que que $0 < |x_\varepsilon - a| < \varepsilon$ tal que $f(x_\varepsilon) > M$. Dizemos que o limite inferior de f no ponto a é $-\infty$ se para cada $M > 0$ e $\varepsilon > 0$ existe x_ε tal que que $0 < |x_\varepsilon - a| < \varepsilon$ tal que $f(x_\varepsilon) < -M$.

Exemplo 1.78. Consideremos a função f definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, dada por $f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

$$\limsup_{x \to 0} \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\liminf_{x \to 0} \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = -\infty$$

Lema 1.79. *Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções e a um ponto de acumulação de D. Então*

$$\limsup_{x \to a} (f+g)(x) \leqslant \limsup_{x \to a} f(x) + \limsup_{x \to a} g(x)$$

$$\liminf_{x \to a} (f+g)(x) \geqslant \liminf_{x \to a} f(x) + \liminf_{x \to a} g(x)$$

Prova: Sem perda de generalidade tomamos $x_n \neq a$ com $x_n \to a$ tal que $\lim f(x_n), \lim g(x_n)$ e $\lim (f+g)(x_n)$ existem. Então, pelo Lema 1.49 temos que

$$\begin{aligned} \lim (f+g)(x_n) &= \limsup (f+g)(x_n) = \limsup (f(x_n) + g(x_n)) \\ &\leqslant \limsup f(x_n) + \limsup g(x_n) \\ &= \lim f(x_n) + \lim g(x_n) \end{aligned}$$

tomando os supremos, para todas as sucessões x_n, temos

$$\limsup_{x \to a} (f+g)(x) \leqslant \limsup_{x \to a} f(x) + \limsup_{x \to a} g(x).$$

A outra prova é análoga.

$\square$

Lema 1.80. *Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções e a ponto de acumulação de D, se $\lim_{x \to a} g(x) = L$, então*

$$\limsup_{x \to a} (f+g)(x) = \limsup_{x \to a} f(x) + L$$

$$\liminf_{x \to a} (f+g)(x) = \liminf_{x \to a} f(x) + L$$

Prova: Do lema anterior temos

$$\limsup_{x \to a} (f+g)(x) \leqslant \limsup_{x \to a} f(x) + \limsup_{x \to a} g(x) = \limsup_{x \to a} f(x) + L$$

Por outro lado, como $f(x) = (f+g)(x) + (-g)(x)$, pelo lema anterior

$$\begin{aligned} \limsup_{x \to a} f(x) \leqslant \limsup_{x \to a} (f+g)(x) + \limsup_{x \to a} (-g)(x) = \limsup_{x \to a} (f+g)(x) - L \\ \Rightarrow \limsup_{x \to a} (f+g)(x) \geqslant \limsup_{x \to a} f(x) + L \end{aligned}$$

$\square$

Lema 1.81. *Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções e a ponto de acumulação de D. Então*

$$\limsup_{x \to a} f(x) + \liminf_{x \to a} g(x) \leqslant \limsup_{x \to a} (f+g)(x)$$

$$\liminf_{x \to a} (f+g)(x) \leqslant \liminf_{x \to a} f(x) + \limsup_{x \to a} g(x)$$

Prova: Se $\liminf_{x \to a} g(x) = L$, para cada $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $L - \delta < g(x)$ para todo o $0 < |x - a| < \varepsilon$. Assim $f(x) + L - \delta < f(x) + g(x)$ e logo

$$\limsup_{x \to a} (f(x) + L - \delta) \leqslant \limsup_{x \to a} (f+g)(x)$$

$$\Rightarrow \limsup_{x \to a} f(x) + L - \delta \leqslant \limsup_{x \to a} (f+g)(x) \text{ para todo o } \delta > 0$$

logo $\limsup_{x\to a} f(x) + L \leqslant \limsup_{x\to a} (f+g)(x)$ ou seja temos o pretendido.

$\square$

1.3 Funções Contínuas

Recordamos o conceito de função contínua.

Definição 1.82. Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$, dizemos que f é uma *função contínua no ponto* a se

$$\forall_{\delta>0} \exists_{\epsilon>0} \text{ tal que } \forall_{x\in D} : x \in V_\epsilon(a) \Rightarrow f(x) \in V_\delta(f(a)).$$

Dizemos que f é uma *função contínua* se for contínua em todos os pontos do seu domínio.

Nota 1.83. Se usarmos a Definição 1.64 utilizada no Ensino Secundário, dizer que f é contínua no ponto a é equivalente a dizer que o limite de f no ponto a existe, pois nesse caso $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ (ver Observação 1.65).

Poposição 1.84. *Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função, $a \in D$ e a ponto de acumulação de D. A função f é contínua no ponto a se e só se existir o limite de f no ponto a e coincidir com $f(a)$.*

Exemplo 1.85. Consideremos a função $f(x) = x^2 + 3$. Vamos analisar a sua continuidade no ponto $x = 2$.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} x^2 + 3 = 2^2 + 3 = 7$$

e $f(2) = 7$, pela Proposição 1.84, f é uma função contínua no ponto $x = 2$.

Exemplo 1.86. Seja $k \in \mathbb{R}$, vamos ver para que valores de k, a função f dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + kx - 2 & \text{, se } x < 2 \\ 2x + 3 & \text{, se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

é contínua em $x = 2$.
Pela Proposição 1.84 vamos verificar se $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$. Temos $f(2) = 7$, e recorremos aos limites laterais

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 2x + 3 = 7$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 + kx - 2 = 2 + 2k.$$

O limite de f no ponto $x = 2$ existe se e só se $2 + 2k = 7 \Leftrightarrow k = \frac{5}{2}$; e nesse caso $\lim_{x\to 2} f(x) = 7 = f(2)$. Logo a função f é contínua no ponto $x = 2$ para $k = \frac{5}{2}$.

Exemplo 1.87. Consideremos a função $f(x)$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{, se } x \neq 0 \\ 1 & \text{, se } x = 0 \end{cases}.$$

Como $f(0) = 1$ e $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ pela Proposição 1.84 concluímos que f é contínua no ponto $x = 0$.

1.3.1 Funções Semicontínuas

O conceito que vamos introduzir não faz parte do Programa do Ensino Secundário mas será usado no Capítulo 2.

Definição 1.88. [GO03] Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$. Dizemos que f é *função semicontínua inferiormente no ponto* a se

$$\liminf_{x\to a} f(x) \geqslant f(a).$$

Dizemos que f é *função semicontínua superiormente no ponto* a se

$$\limsup_{x\to a} f(x) \leqslant f(a).$$

Exemplo 1.89. Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{, se } x \in [0,1[\\ x-1 & \text{, se } x \in [1,2] \end{cases}.$$

Neste exemplo, a função é contínua à direita no ponto $a = 1$ e semicontínua inferiormente no ponto $a = 1$, mas não se pode confundir continuidade lateral com a semicontinuidade, como provam os exemplos seguintes.

Exemplo 1.90. Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{, se } x \neq 0 \\ 1 & \text{, se } x = 0 \end{cases}.$$

Como $\limsup\limits_{x\to 0} f(x) = \limsup\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 1 \leqslant f(0) = 1$, pela Definição 1.88 f é semicontínua superiormente no ponto $x = 0$ e $\liminf\limits_{x\to 0} = \liminf\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = -1 < f(0) = 1$, pela Definição 1.88 f não é semicontínua inferiormente no ponto $x = 0$.

Exemplo 1.91. Consideremos a função f dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, se } x < 1 \\ 2 & \text{, se } x = 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{, se } x > 1 \end{cases}.$$

Como $f(1) = 2$ e $\limsup\limits_{x\to 1} f(x) = 1$, temos $\limsup\limits_{x\to 1} f(x) \leqslant f(1)$ logo, pela Definição 1.88 f é semicontínua superiormente no ponto $x = 1$.

Exemplo 1.92. Dada a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{, se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Se $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, como $\liminf\limits_{x\to a} f(x) = 0 \geqslant f(a) = 0$, f é semicontínua inferiormente no ponto a. Por outro lado, se $a \in \mathbb{Q}$, como $\limsup\limits_{x\to a} f(x) = 1 \leqslant f(a) = 1$, f é semicontínua superiormente no ponto a.

Teorema 1.93. *Dada $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$. A função f é contínua no ponto a se e somente se f é função semicontínua inferiormente e superiormente no ponto a.*

Prova: A prova deste Teorema é imediata. Pela definição de continuidade, f é contínua no ponto a se e somente se existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Então, o limite superior e inferior da função f no ponto a existe e $\limsup\limits_{x\to a} f(x) = \liminf\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ de onde concluimos que f é semicontínua superiormente e inferiormente no ponto a.
Se f for semicontínua superiormente e inferiormente no ponto a, então

$$\limsup_{x\to a} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \liminf_{x\to a} f(x).$$

Mas pela definição de limite superior e limite inferior concluímos que

$$\limsup_{x\to a} f(x) = \liminf_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Assim, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe e coincide com $f(a)$, ou seja, f é contínua no ponto a.

□

1.4 Extremos de uma função

Um problema muito comum e com muitas utilizações práticas consiste em determinar os pontos onde uma função atinge o seu valor máximo e mínimo, os chamados *extremos de uma função*.

Definição 1.94. Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$, dizemos que

1. A função f *tem um máximo local no ponto* a se existir $\epsilon > 0$ tal que $f(a) \geqslant f(x)$ para todo o $x \in V_\epsilon(a) \cap D$.

2. A função f *tem um mínimo local no ponto* a se existir $\epsilon > 0$ tal que $f(a) \leqslant f(x)$ para todo o $x \in V_\epsilon(a) \cap D$.

3. A função f *tem máximo absoluto no ponto* a se $f(a) \geqslant f(x)$ para todo o $x \in D$.

4. A função f *tem mínimo absoluto no ponto* a se $f(a) \leqslant f(x)$ para todo o $x \in D$.

Teorema 1.95 (Teorema de Weierstrass). *Seja f uma função contínua num conjunto fechado e limitado, então f tem valor máximo e mínimo absoluto nesse conjunto.*

Teorema 1.96 (Teorema de Weierstrass Generalizado). *Seja f uma função semicontínua superiormente num intervalo fechado e limitado, então f tem supremo nesse intervalo.*
Seja f uma função semicontínua inferiormente num intervalo fechado e limitado, então f tem ínfimo nesse intervalo.

1.5 Derivada Usual

O conceito de derivada é um dos mais importantes do Cálculo, dando origem ao ramo do Cálculo Diferencial. A utilização da derivada está ainda presente noutras áreas da ciência, por exemplo: na Economia, para calcular o custo ou lucro marginal; na Física, para calcular a taxa de variação da velocidade e a taxa de variação instantânea.

A definição de derivada provém do conceito de limite, vamos ver quais as implicações na definição de derivada quando usamos a Definição Usual de Limite (Definição 1.57) ou a Definição usada no Ensino Secundário (Definição 1.64). Recordemos a definição de derivada:

Definição 1.97. Sejam $D \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto aberto, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$, definimos a *razão incremental* de f no ponto a como

$$r_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

a qual tem domínio $D \setminus \{a\}$. Chamamos *derivada de f no ponto a* ao limite, se existir e for finito,

$$\lim_{x \to a} r_a(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

que indicamos por $f'(a)$. Neste caso, dizemos ainda que f é uma *função diferenciável no ponto a*.

Como a definição de derivada provém do conceito de limite, vamos ver quais as implicações na definição de derivada quando usamos a Definição 1.57 ou a Definição 1.64.

Observação 1.98. Como $a \in D$ não pertence ao domínio da função $r_a(x)$ estamos no Caso 1 da comparação das duas definições de limite (ver Secção 1.2.2), as quais coincidem; ou seja, para a definição de derivada não importa a definição de limite usada.

Observação 1.99 (*Interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto*). Podemos interpretar o conceito de derivada de uma função f num ponto a do seguinte modo: começamos por considerar a *razão incremental da função f no ponto a*

$$r_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

que geometricamente representa o declive da recta secante ao gráfico da função f nos pontos $A = (a, f(a))$ e $X = (x, f(x))$ (ver Figura 1.2).

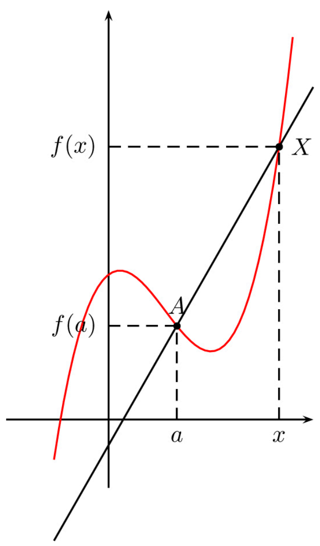

Figura 1.2: Interpretação Geométrica da Razão Incremental

Assim, fazendo $x \to a$ na razão incremental da função f no ponto a obtemos a definição de *derivada da função f no ponto a*, ou seja, a derivada pode ser interpretada geometricamente como o declive da tangente ao gráfico da função f no ponto $(a, f(a))$. (ver Figura 1.3).

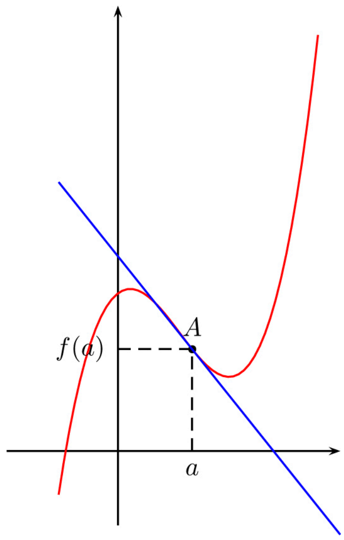

Figura 1.3: Interpretação Geométrica da Derivada

Exemplo 1.100. Para a função $f(x) = x^2$, a derivada de f no ponto 1 vem dada por

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} x + 1 = 2.$$

Mais geralmente, dado um ponto qualquer $a \in D = \mathbb{R}$, usando a definição de derivada, temos

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x - a} = \lim_{x\to a} x + a = 2a.$$

Portanto, para $f(x) = x^2$ temos $f'(x) = 2x$.

Exemplo 1.101. Dada a função f definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & , \text{se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Como

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0,$$

a função f é diferenciável no ponto $x = 0$ e $f'(0) = 0$.

Exemplo 1.102. Dada a função f definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & , \text{se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Como

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}}{x} = \frac{1}{0} = \infty,$$

a função f não é diferenciável no ponto $x = 0$.

Poposição 1.103. *[Rud76] Seja f uma função diferenciável no ponto $a \in D$, então f é uma função contínua no ponto a.*

Prova: Tomemos $r(x)$ a razão incremental de f no ponto a ou seja,

$$r_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow f(x) - f(a) = r_a(x)(x - a) \Rightarrow f(x) = f(a) + r(x)(x - a).$$

Como f é diferenciável no ponto a, existe $\lim_{x \to a} r_a(x) = f'(a) \in \mathbb{R}$. Logo

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(a) + r_a(x)(x - a) = f(a) + f'(a) \times 0 = f(a),$$

ou seja f é contínua no ponto a.

□

Observação 1.104. A recíproca da proposição anterior não é verdadeira, isto é, uma função f pode ser contínua num ponto a e não ser diferenciável no ponto a. Um exemplo típico desta situação é a função $f(x) = |x|$ a qual é contínua em $\mathbb{R}$, mas não é diferenciável no ponto $a = 0$. No Exemplo 1.125 voltamos a ter uma função f que não é diferenciável no ponto 0, mas é contínua no ponto 0, já que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x^2} = 0 = f(0).$$

Definição 1.105. Seja f uma função diferenciável em todos os pontos do seu domínio D. Podemos definir uma nova função, que indicamos por f', definida em D que a cada $x \in D$ faz corresponder $f'(x)$; a esta função chamamos *função derivada de* f.

1.5.1 Propriedades da Derivada Usual

Vamos recordar algumas propriedades da derivada usual da função f, de modo a futuramente comparar com as derivadas de Dini.

Poposição 1.106. *Qualquer função constante num domínio aberto D é diferenciável nesse domínio e tem derivada nula.*

Prova: Seja $f(x) = c \in \mathbb{R}$ para todo o $x \in D$, dado $a \in D$ temos que

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{0}{x - a} = 0.$$

□

Poposição 1.107. *Sejam $c \in \mathbb{R}$ uma constante e f uma função diferenciável em D. Então a função $c \cdot f$ é diferenciável em D e $(c \cdot f(x))' = cf'(x)$ para todo o $x \in D$.*

Prova: Seja $g(x) = c \cdot f(x)$, dado $a \in D$ temos que

$$\begin{aligned} g'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{c.f(x) - c.f(a)}{x - a} \lim_{x \to a} \frac{c[f(x) - f(a)]}{x - a} \\ &= c \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = cf'(a). \end{aligned}$$

□

Exemplo 1.108. Para a função $g(x) = 3x^2$, temos

$$g'(x) = \left(3x^2\right)' = 3\left(x^2\right)' = 3 \cdot 2x = 6x.$$

Poposição 1.109. *Dadas f e g duas funções diferenciáveis em D, então a função $f+g$ é diferenciável em D e $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$ para todo o $x \in D$.*

Prova: Consideremos $h(x) = f(x) + g(x)$. Dado $a \in D$ temos que

$$\begin{aligned} h'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{[f(x)+g(x)]-[f(a)+g(a)]}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a)+g'(a). \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 1.110. Para a função $f(x) = -3x+6$ temos

$$f'(x) = (-3x+6)' = (-3x)' + (6)' = -3 \cdot x + 0 = -3.$$

Poposição 1.111. *Consideremos a função $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$. A função f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = nx^{n-1}$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.*

Prova: Para qualquer $a \in \mathbb{R}$ temos que

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a}.$$

Fazendo a divisão de polinómios vem

$$x^n - a^n = \left(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1}\right)(x-a)$$

e logo

$$f'(a) = \lim_{x\to a} x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1} = na^{n-1}.$$

$\square$

Exemplo 1.112. Para a função $f(x) = x^3$ temos $f'(x) = 3x^2$.

Poposição 1.113. *Dadas f e g duas funções diferenciáveis em D, então a função $f \cdot g$ é diferenciável em D e $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ para todo o $x \in D$.*

Prova: Recordando a Proposição 1.103, como g é função diferenciável em qualquer ponto $a \in D$, logo g é função contínua no ponto a, ou seja

$$\lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

Considerando a função $h(x) = f(x)g(x)$ temos

$$\begin{aligned} h'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{g(x)[f(x)-f(a)]+f(a)[g(x)-g(a)]}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{g(x)[f(x)-f(a)]}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{f(a)[g(x)-g(a)]}{x-a} \\ &= f'(a)g(a)+f(a)g'(a). \end{aligned}$$

□

Exemplo 1.114. Para a função $f(x) = (2x-1)(x^2+x)$ temos

$$f'(x) = (2x-1)'(x^2+x) + (2x-1)(x^2+x)' = 2(x^2+x) + (2x-1)(2x+1).$$

Poposição 1.115. *Sejam f e g funções diferenciáveis em D tais que $g(x) \neq 0$ para todo o $x \in D$, então a função $\frac{f}{g}$ é diferenciável em D e $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ para todo o $x \in D$.*

Prova: Recordando a Proposição 1.103, como g é função diferenciável em qualquer ponto $a \in D$, logo g é função contínua no ponto a, ou seja

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

Considerando $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ temos

$$\begin{aligned}
h'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)}}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x-a)} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x-a)} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{g(a)[f(x) - f(a)] - f(a)[g(x) - g(a)]}{g(x)g(a)(x-a)} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)g(a)} \left(\lim_{x \to a} \frac{g(a)[f(x) - f(a)]}{x - a} - \lim_{x \to a} \frac{f(a)[g(x) - g(a)]}{x - a} \right) \\
&= \frac{1}{g^2(a)} (g(a)f'(a) - f(a).g'(a)) = \frac{f'(a)g(a) - f(a).g'(a)}{g^2(a)}.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 1.116. Para a função $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$, temos

$$\begin{aligned}
f'(x) = \left(\frac{2x+3}{x^2+1}\right)' &= \frac{(2x+3)'(x^2+1) - (2x+3)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{2x^2 + 2 - 4x^2 - 6x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2 - 6x + 2}{(x^2+1)^2}.
\end{aligned}$$

1.5.2 Derivada da Função Composta

Recordemos a definição de função composta.

Definição 1.117. Dadas uma função f de domínio D e uma função g com domínio E tal que $f(D) \subseteq E$ (o contra-domínio de f está contido no domínio de g), definimos a *função composta* $g \circ f$, da seguinte forma $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, para todo o $x \in D$.

Poposição 1.118. *Sejam f uma função diferenciável em D e g uma função diferenciável em $f(D) \subseteq E$, então a função $g \circ f$ é diferenciável em D e $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$ para todo o $x \in D$.*

Prova: Recordando a Proposição 1.103, como f é função diferenciável em qualquer ponto $a \in D$, logo f é função contínua no ponto a, ou seja

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Considerando $h(x) = (g \circ f)(x)$ temos

$$\begin{aligned} h'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = g'(f(a))f'(a), \end{aligned}$$

ao dividir e multiplicar a fração por $f(x) - f(a)$ estamos a supor que numa vizinhança do ponto a temos que $f(x) \neq f(a)$ para todo o x nessa vizinhança.
Uma prova mais geral pode ser consultada em [Fer90].

$\square$

Exemplo 1.119. Seja $h(x) = (3x^2 + 2x)^4$, podemos escrever $h(x) = (g \circ f)(x)$, sendo $f(x) = 3x^2 + 2x$ e $g(x) = x^4$. Então, como $g'(x) = 4x^3$ e $f'(x) = 6x + 2$ temos que $h'(x) = g'(f(x))f'(x) = g'(3x^2 + 2x)(6x + 2) = 4(3x^2 + 2x)^3(6x + 2)$.

1.5.3 Derivadas Laterais

Definição 1.120. Sejam $D \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto aberto, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$, dizemos que f tem *derivada à esquerda no ponto* a se $\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existir e for finito, o qual representamos por $f'_e(a)$. Dizemos que f tem *derivada à direita no ponto* a se $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existir e for finito, o qual representamos por $f'_d(a)$.

Exemplo 1.121. Seja f uma função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{, se } x \leqslant 1 \\ -(x-1)^3 & \text{, se } x > 1 \end{cases}.$$

Vamos calcular as derivadas laterais da função f no ponto 1. Como

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} x + 1 = 2,$$

então $f'_e(1) = 2$; por outro lado,

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{-(x-1)^3 - 1}{x - 1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty,$$

logo $f'_d(1)$ não existe.

Poposição 1.122. *A função f é diferenciável no ponto a, se e só se as derivadas laterais de f no ponto a existirem e forem iguais. Nesse caso, $f'(a) = f'_e(a) = f'_d(a)$.*

Prova: Uma vez que as definições de derivada e derivadas laterais são feitas à custa da definição de limite e de limites laterais, basta usar o Lema 1.67.

□

Exemplo 1.123. Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{, se } x \geqslant 2 \\ 2x^2 + 1 & \text{, se } x < 2 \end{cases}.$$

Como

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 3 - 1}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} x + 2 = 4,$$

então $f'_d(2) = 4$; por outro lado,

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{2x^2 + 1 - 1}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{2x^2}{x - 2} = \frac{8}{0^+} = +\infty,$$

logo $f'_e(2)$ não existe. Assim, a função f não é diferenciável no ponto $a = 2$.

Exemplo 1.124. Dada a função f definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & \text{, se } x \geqslant 1 \\ -x^2 + 2x & \text{, se } x < 1 \end{cases}.$$

Como

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 2x + 2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} x - 1 = 0, \end{aligned}$$

logo $f'_d(1) = 0$; por outro lado,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \to 1^-} \frac{-x^2 + 2x - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{-(x-1)^2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1^+} -(x - 1) = 0, \end{aligned}$$

e temos $f'_e(1) = 0$. Assim, f é diferenciável no ponto $a = 1$ e $f'(1) = 0$.

Exemplo 1.125. Consideremos a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Para obter a derivada de f no ponto $a = 0$ calculamos o limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} x^{\frac{2}{3} - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

o qual depdende de como nos aproximamos de 0, pois $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$, logo $f'_d(0)$ não existe; e $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$, logo $f'_e(0)$ não existe. Assim, não existe a derivada de f no ponto $a = 0$.

1.6 Aplicações da Derivada

Definição 1.126. Dada $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $a \in D$. Dizemos que f *é localmente estritamente crescente no ponto* a se existe $\epsilon > 0$ tal que:

$$f(a) < f(x) \text{ para todo o } x \in]a, a+\epsilon[$$

e

$$f(a) > f(x) \text{ para todo o } x \in]a-\epsilon, a[.$$

Dizemos que f *é localmente estritamente decrescente no ponto* a se existe $\epsilon > 0$ tal que:

$$f(a) > f(x) \text{ para todo o } x \in]a, a+\epsilon[$$

e

$$f(a) < f(x) \text{ para todo o } x \in]a-\epsilon, a[.$$

Lema 1.127. *Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R} \to$ uma função diferenciável, $I \subseteq D$ e $a \in I$.*

- *Se $f'(a) > 0$, então f é localmente estritamente crescente no ponto a*
- *Se $f'(a) < 0$, então f é localmente estritamente decrescente no ponto a.*

Prova: Dado $a \in I$, supomos que $f'(a) > 0$, logo

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Podemos tomar $\epsilon > 0$ tal que para todo $0 < |x - a| < \epsilon$ temos

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \quad (1.1)$$

Se $0 < x - a < \epsilon$ logo de (1.1) $f(x) - f(a) > 0$, ou seja $f(x) > f(a)$ para todo o $a < x < a + \epsilon$.
Se $-\epsilon < x - a < 0$ logo de (1.1) $f(x) - f(a) < 0$, ou seja $f(x) < f(a)$ para todo o $a - \epsilon < x < a$.
Assim f é localmente estritamente crescente no ponto a.
A segunda parte prova-se de forma análoga.

$\square$

Lema 1.128. *Seja f uma função localmente estritamente crescente (decrescente) em todos os pontos do intervalo fechado $[a, b]$. Então f é estritamente crescente (decrescente) no intervalo $[a, b]$.*

Prova: Seja f uma função localmente estritamente crescente em cada ponto $x \in [a, b]$, com vista a um absurdo supomos que existem $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que $x_1 < x_2$ e $f(x_1) > f(x_2)$.
Seja $X = \{x \in]x_1, x_2[: f(x) \geqslant f(x_1)\}$, como f é localmente estritamente crescente em x_1, logo $X \neq \emptyset$.
Tomamos $x_0 = \sup X$, por definição $x_1 < x_0 < x_2$.
Para todo o $x > x_0$ temos $x \notin X$ então $f(x) < f(x_1)$. Além disso, f é localmente estritamente crescente em x_0, assim existe $\delta > 0$ tal que para $x_0 < x < x_0 + \delta$ temos $f(x_0) < f(x)$. Logo $f(x_0) < f(x_1)$.
Por outro lado, existe $x \in]x_0 - \delta, x_0[$, para algum $\delta > 0$, tal que $x \in X$, ou seja, $f(x) \geqslant f(x_1)$. Além disso, f é localmente estritamente crescente em x_0, e temos $f(x) < f(x_0)$. Logo $f(x_0) > f(x_1)$, o que é absurdo.

□

Como consequência imediata dos dois lemas anteriores temos:

Poposição 1.129. *Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $I \subseteq D$ intervalo aberto. Se $f'(x) > 0$ para todo o $x \in I$, então f é uma função crescente no intervalo I. Se $f'(x) < 0$ para todo o $x \in I$, então f é uma função decrescente no intervalo I.*

Podemos aplicar este resultado ao estudo dos extremos de uma função diferenciável.

Poposição 1.130. *Sejam $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $x_0 \in]a, b[$ tal que $f'(x_0) = 0$.*

1. *Se existir $\epsilon > 0$ tal que $f'(x) > 0$ para todo o $x \in]x_0, x_0 + \epsilon[$ e $f'(x) < 0$ para todo o $x \in]x_0 - \epsilon, x_0[$, então x_0 é ponto de mínimo local da função f.*

2. *Se existir $\epsilon > 0$ tal que $f'(x) < 0$ para todo o $x \in]x_0, x_0 + \epsilon[$ e $f'(x) > 0$ para todo o $x \in]x_0 - \epsilon, x_0[$, então x_0 é ponto de máximo local da função f.*

O resultado anterior pode ainda ser melhorado no caso da função f ser duas vezes diferenciável, isto é, a função derivada f' é uma função diferenciável.

Lema 1.131. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável e $a \in D$. Se $f''(a) > 0$ a função f no ponto a tem a concavidade voltada para cima. Se $f''(a) < 0$ a função f no ponto a tem a concavidade voltada para baixo.*

Poposição 1.132. *Sejam $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável e $x_0 \in]a, b[$ tal que $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \neq 0$.*

1. *Se $f''(x_0) > 0$, então x_0 é um ponto de mínimo local de f.*

2. *Se $f''(x_0) < 0$, então x_0 é um ponto de máximo local de f.*

É do conhecimento geral que a derivada constitui uma ferramenta importante e poderosa no estudo e análise de funções.
É importante lembrar que existem várias aplicações para a derivada, uma das mais importantes aplicações é o problema de otimização. Estes problemas podem ser resolvidos encontrando os valores máximo e mínimo da função. A derivada de uma função mede a variação dessa função num determinado instante, ou seja, indica o crescimento ou decrescimento da função. Abordamos a aplicação da derivada em diversos campos do saber nomeadamente: Física, Engenharias, Economia, Medicina, etc.

1.6.1 Medicina

Na medicina, a derivada pode ser usada para obter um cálculo aproximado da velocidade de reprodução de células malignas (vírus, bactérias, etc.) e determinar a pressão sanguínea.

Exemplo 1.133. A virulência de certa bactéria mede-se numa escala de 0 a 50 e vem expressa pela função $v(t) = 40 + 15t - 9t^2 + t^3$, onde t é o tempo (em horas) decorrido desde que começa o estudo $(t = 0)$. Pretendemos obter os instantes de máxima e mínima virulência nas primeiras 6 horas e os intervalos em que esta cresce e decresce.
A derivada de $v(t)$ em cada ponto vem dada por

$$v'(t) = 15 - 18t + 3t^2.$$

Começamos por encontrar os pontos críticos, ou seja, pontos em que a derivada se anula:

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow 15 - 18t + 3t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \Leftrightarrow (t-5)(t-1) = 0 \Leftrightarrow t = 5 \wedge t = 1.$$

Como a função f é contínua e o intervalo $[0,6]$ é fechado e limitado, logo é compacto. Pelo *Teorema de Weiertrass*, existe máximo e mínimo absolutos em $[0,6]$, os quais podem ser atingidos nas extremidades do intervalo ou onde a derivada se anula. Como $v(0) = 40$, $v(1) = 47$, $v(5) = 15$ e $v(6) = 22$. Durante as primeiras 6 horas, a bactéria atinge a virulência máxima (47) ao fim de uma hora, e atinge a virulência mínima (15) ao fim de cinco horas. Além disso, a função derivada de v é positiva nos intervalos $[0,1]$ e $[5,6]$, e é negativa no intervalo $[1,5]$; portanto, a função v é crescente nos intervalos $[0,1]$ e $[5,6]$, e é decrescente no intervalo $[1,5]$.

Exemplo 1.134. Consideremos uma pessoa cuja pressão sanguínea P (em mm de mercúrio) é dada por:

$$P(t) = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1},$$

para $0 \leqslant t \leqslant 10$, onde t é medido em segundos. Derivando a função P em ordem a t, obtemos a variação da pressão nesse instante, ou seja,

$$P'(t) = \frac{(25t^2+125)'(t^2+1) - (25t^2+125)(t^2+1)'}{(t^2+1)^2} = \frac{50t^3 + 50t - 50t^3 - 250t}{(t^2+1)^2} = -\frac{200t}{(t^2+1)^2}.$$

No instante $t = 5$ temos

$$P'(5) = -\frac{200(5)}{(5^2+1)^2} = -\frac{1000}{676} = -1,48mm/s,$$

o que significa que a pressão está a cair a uma taxa de $1,48mm$ no instante $t = 5$.

1.6.2 Economia

Em Economia, os problemas envolvem, quase sempre, a maximização dos lucros e receitas e minimização dos custos. Usando a derivada, uma fábrica ou empresa pode maximizar o lucro dos seus produtos e minimizar os custos de produção.

Exemplo 1.135. Uma empresa determinou que o lucro anual P, em centenas de euros (€), é uma função do número de comerciais x, mais concretamente

$$P = f(x) = -12,5x^2 + 1375x - 1500.$$

Para determinar o número de comerciais a contratar de modo a obter o lucro máximo, começamos por calcular a derivada de f,

$$f'(x) = -25x + 1375.$$

Os pontos críticos da função f são: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -25x + 1375 = 0 \Leftrightarrow 25x = 1375 \Leftrightarrow x = 55$. Para analizar a natureza do ponto crítico calculamos a segunda derivada: $f''(x) = -25 < 0$. Como f'' é sempre negativa (também é negativa no ponto $x = 55$), logo f tem sempre a concavidade voltada para baixo; assim f tem um máximo local quando $x = 55$. Ou seja, a empresa tem lucro máximo quando tiver 55 comerciais. O valor da função no ponto $x = 55$ é

$$f(55) = -12,5(55)^2 + 1375(55) - 1500 = 36312,5,$$

ou seja, a empresa quando contratar 55 comerciais terá um lucro máximo de 3631250 €.

Exemplo 1.136. Se a produção total de uma empresa é de x (em centenas de unidades) de uma mercadoria, o custo $C(x)$ em euros (€) é estabelecido pela função $C(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$.
O custo médio de produzir x unidades é dado por

$$Q(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{2}x - 2 + \frac{5}{x}.$$

O custo marginal é dado pela derivada da função $C(x)$ logo,

$$C'(x) = x - 2.$$

Para encontrarmos a função custo médio marginal derivamos a função custo médio, ou seja

$$Q'(x) = \frac{1}{2} - \frac{5}{x^2}.$$

Se pretendemos minimizar o custo médio de cada unidade, calculamos os pontos críticos de $Q(x)$, ou seja $Q'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{10}$; como o domínio é positivo temos o ponto crítico $x = \sqrt{10}$. Uma vez que $Q''(x) = \frac{10}{x^3}$, logo $Q''(\sqrt{10}) = \frac{\sqrt{10}}{10} > 0$. Então Q tem um mínimo local em $x = \sqrt{10} \approx 3,16$. Assim, para uma produção de aproximadamente 316 unidades obtemos um custo médio mínimo por 100 unidades de $Q(\sqrt{10}) = \sqrt{10} - 2 \approx 1,16$, ou seja, $1,16$ euros; o que representa um custo total de $C(\sqrt{10}) = 5 - 2\sqrt{10} + 5 = 10 - 2\sqrt{10} \approx 3,68$, ou seja $3,68$ €.

Exemplo 1.137. Um agricultor pretende construir uma horta que tenha um formato rectangular. Para isso, ele dispõe de $40m$ de tela para cercar a horta, mas deseja cercar a maior área possível. Designando por x a largura da horta e com vista a manter os $40m$ de tela, o comprimento da região vedada é $20 - x$. Assim a área do rectângulo é dada por:

$$A(x) = (20 - x)x = 20x - x^2.$$

Para maximizar a área determinamos o máximo de $A(x)$. Começamos por derivar

$$A'(x) = 20 - 2x,$$

logo $A(x)$ tem pontos críticos em $A'(x) = 0 \Leftrightarrow 20 - 2x \Leftrightarrow x = 10$.
Assim, o agricultor para vedar a maior área possível com os $40m$ de tela de que dispõe, deverá construir uma horta de $10m \times 10m$ que corresponde a uma área útil de $100m^2$.

1.6.3 Física

Em Física podemos aplicar a derivada para obter a velocidade e a aceleração de um dado corpo quando é dada a sua posição. Para isso usamos a primeira derivada e segunda derivada.
Se a posição do corpo no instante t é dada pela função $s(t)$, então a velocidade a que o corpo se desloca em cada instante t é dada por $v(t) = s'(t)$. Mais, a aceleração instantânea (no instante t) é dada por $a(t) = v'(t)$

Exemplo 1.138. Consideremos um corpo que está em movimento retilíneo e que a sua posição $s(t)$ é dada por $s(t) = 10 + 18t - 3t^2$ em cada instante t onde $s(t)$ é medido em metros e o tempo t em segundos. A velocidade média do corpo entre o primeiro segundo e o terceiro segundo é dada por

$$\frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = \frac{37 - 25}{3 - 1} = \frac{12}{2} = 6m/s.$$

A velocidade desse corpo em cada instante t é $v(t) = s'(t) = 18 - 6t$. Em particular a velocidade no instante $t = 1$ é $v(1) = 18 - 6 = 12m/s$, enquanto que no instante $t = 3$ a velocidade é $v(3) = 0m/s$. A aceleração média entre o primeiro e o terceiro segundo é

$$a_m = \frac{v(3) - v(1)}{3 - 1} = \frac{0 - 12}{2} = -6m/s^2,$$

a aceleração em cada instante t é dada por

$$a(t) = s''(t) = -6m/s^2,$$

ou seja o movimento está a desacelerar. Como a aceleração é constante, coincide com a aceleração média, o que não acontece com a velocidade.

Capítulo 2

Derivadas de Dini

As Derivadas de Dini são uma generalização da derivada usual, foram introduzidas pelo matemático italiano Ulisse Dini (1845-1918) para podermos usar o conceito de "derivada" em funções que não são diferenciáveis. Pretendemos aplicar o conceito de "derivada" a funções como $f(x) = |x|$ que tendo derivadas laterais no ponto $x = 0$ não é diferenciável nesse ponto; mas também a funções que nem derivadas laterais possuem. Algumas definições alternativas de derivada foram desenvolvidas para situações específicas, como aconteceu com as Derivadas de Dini.
Relembramos agora a definição, posteriormente apresentamos alguns exemplos e comparamos resultados importantes da derivada usual com resultados similares das derivadas de Dini.

Definição 2.1. [Din92, KK96] Seja f uma função real de variável real definida num intervalo $[a, b]$ e $x_0 \in [a, b]$. Definimos as quatro derivadas de Dini no ponto x_0.
Se $x_0 < b$, a *derivada à direita superior de f no ponto x_0* é dada por

$$D^+ f(x_0) = \limsup_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

e a *derivada à direita inferior de f no ponto x_0* é dada por

$$D_+ f(x_0) = \liminf_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Se $x_0 > a$ a *derivada à esquerda superior de f no ponto x_0* é dada por

$$D^- f(x_0) = \limsup_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

e a *derivada à esquerda inferior de f no ponto x_0* é dada por

$$D_- f(x_0) = \liminf_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Observação 2.2. Da definição da derivada de Dini decorre que para qualquer função f temos $D_- f(x_0) \leqslant D^- f(x_0)$ e $D_+ f(x_0) \leqslant D^+ f(x_0)$.

Nota 2.3. As Derivadas de Dini existem sempre, podendo tomar valores $\pm\infty$.

Observação 2.4. Seja f uma função diferenciável no ponto x_0, então as derivadas de Dini de f no ponto x_0 coincidem com a derivada usual de f no ponto x_0.

Da definição de Derivadas de Dini e da derivada usual temos os seguintes resultados, cuja prova é imediata.

Poposição 2.5. *A função f é diferenciável à direita no ponto x_0 se e só $D_+ f(x_0)$ e $D^+ f(x_0)$ são finitas e iguais. Neste caso temos $f'_d(x_0) = D^+ f(x_0) = D_+ f(x_0)$.*

Poposição 2.6. *A função f é diferenciável à esquerda no ponto x_0 se e só $D_-f(x_0)$ e $D^-f(x_0)$ são finitas e iguais. Neste caso temos $f'_e(x_0) = D^-f(x_0) = D_-f(x_0)$.*

Teorema 2.7. *A função f é diferenciável no ponto x_0 se e só se todas as derivadas de Dini da função f no ponto x_0 são finitas e iguais. Neste caso a derivada usual e as derivadas de Dini coincidem.*

Definição 2.8. Seja f uma função real de variável real definida num intervalo $[a,b]$ e $x_0 \in]a,b[$. Definimos a *derivada superior de f no ponto x_0*

$$\overline{D}f(x_0) = \sup\{D^+f(x_0), D^-f(x_0)\}$$

e a *derivada inferior de f no ponto x_0*

$$\underline{D}f(x_0) = \inf\{D_+f(x_0), D_-f(x_0)\}.$$

Poposição 2.9. *Seja f uma função tal que $\overline{D}f(x_0) = \underline{D}f(x_0)$ então f é diferenciável no ponto x_0.*

Prova: Como

$$\overline{D}f(x_0) \geqslant D^+f(x_0), D^-f(x_0) \text{ e } \underline{D}f(x_0) \leqslant D_+f(x_0), D_-f(x_0)$$

e visto que

$$\overline{D}f(x_0) = \underline{D}f(x_0)$$

temos

$$D^+f(x_0), D^-f(x_0) \leqslant D_+f(x_0), D_-f(x_0).$$

Em particular temos $D^+f(x_0) \leqslant D_+f(x_0)$ e $D^-f(x_0) \leqslant D_-f(x_0)$, mas isso implica que são iguais. Da Proposição 2.5 temos que $D^+f(x_0) = D_+f(x_0) = f'_d(x_0)$ e da Proposição 2.6 temos que $D^-f(x_0) = D_-f(x_0) = f'_e(x_0)$. Então

$$\overline{D}f(x_0) = \sup\{D^+f(x_0), D^-f(x_0)\} = \sup\{f'_d(x_0), f'_e(x_0)\}$$

e $\underline{D}f(x_0) = \inf\{D_+f(x_0), D_-f(x_0)\} = \inf\{f'_d(x_0), f'_e(x_0)\}$, logo $f'_d(x_0) = f'_e(x_0)$, ou seja f é diferenciável no ponto x_0.

□

2.1 Exemplos

Exemplo 2.10. Consideremos a função f definida em $D = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ dada por $f(x) = \left|\dfrac{x}{\cos x}\right|$ (ver Figura 2.1). As derivadas de Dini no ponto $x_0 = 0$ são

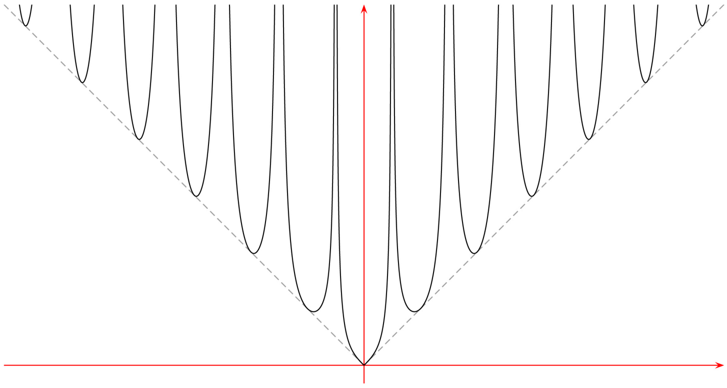

Figura 2.1: Gráfico da função $f(x) = \left|\dfrac{x}{\cos(x)}\right|$

$$
\begin{aligned}
D^+f(0) &= \limsup_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \limsup_{x\to 0^+} \frac{\left|\frac{x}{\cos x}\right| - 0}{x} = \limsup_{x\to 0^+} \frac{x}{x\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = 1\\
D_+f(0) &= \liminf_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \liminf_{x\to 0^+} \frac{\left|\frac{x}{\cos x}\right| - 0}{x} = \liminf_{x\to 0^+} \frac{x}{x\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = 1\\
D^-f(0) &= \limsup_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \limsup_{x\to 0^-} \frac{\left|\frac{x}{\cos x}\right| - 0}{x} = \limsup_{x\to 0^-} \frac{-x}{x\cos x} = \limsup_{x\to 0^-} \frac{-1}{\cos 0} = -1\\
D_-f(0) &= \liminf_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \liminf_{x\to 0^-} \frac{\left|\frac{x}{\cos x}\right| - 0}{x} = \liminf_{x\to 0^-} \frac{-x}{x\cos x} = \liminf_{x\to 0^-} \frac{-1}{\cos 0} = -1
\end{aligned}
$$

As quatro derivadas de Dini de f no ponto $x_0 = 0$ não são todas iguais, logo pelo Teorema 2.7 a função f não é diferenciável no ponto $x_0 = 0$. Além disso $\overline{D}f(0) = 1 \neq -1 = \underline{D}f(0)$, mas pela Proposição 2.6, f é diferenciável à esquerda no ponto $x_0 = 0$, pois $D^-f(0) = D_-f(0) = f'_e(0) = -1$; e pela Proposição 2.5 f é diferenciável à direita no ponto $x_0 = 0$, pois $D^+f(0) = D_+f(0) = f'_d(0) = 1$.

Exemplo 2.11. Consideremos a função definida em $\mathbb{R}$ (ver Figura 2.2) dada por

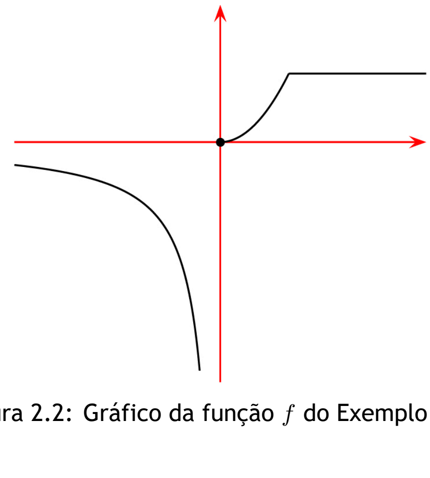

Figura 2.2: Gráfico da função f do Exemplo 2.11

$$
f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{, se } x < 0\\ x^2 & \text{, se } 0 \leqslant x \leqslant 1\\ 1 & \text{, se } x > 1 \end{cases} .
$$

As Derivadas de Dini no ponto $x_0 = 1$ são:

$$\begin{aligned}
D_+f(1) &= \liminf_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \liminf_{x\to 1^+} \frac{1-1}{x-1} = 0\\
D^+f(1) &= \limsup_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \limsup_{x\to 1^+} \frac{1-1}{x-1} = 0\\
D_-f(1) &= \liminf_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \liminf_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \liminf_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2\\
D^-f(1) &= \limsup_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \limsup_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \limsup_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2
\end{aligned}$$

Como $D_+f(1) = D^+f(1) = 0$, pela Proposição 2.5 a função f é diferenciável à direita no ponto $x_0 = 1$, ou seja, $f'_d(1) = 0$. Por outro lado, $D_-f(1) = D^-f(1)$, pela Proposição 2.6 a função é diferenciável à esquerda no ponto $x_0 = 1$, ou seja $f'_e(1) = 2$. Como as derivadas de Dini de f não são todas iguais no ponto $x_0 = 1$ ($D^{\pm}f(1) \neq D_{\pm}f(1)$), logo pelo Teorema 2.7 a função f não é diferenciável no ponto $x_0 = 1$.

As Derivadas de Dini no ponto $x_0 = 0$ são:

$$\begin{aligned}
D_+f(0) &= \liminf_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \liminf_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x} = \liminf_{x\to 0^+} x = 0\\
D^+f(0) &= \limsup_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \liminf_{x\to 0^-} \frac{x^2}{x} = \limsup_{x\to 0^+} x = 0\\
D_-f(0) &= \liminf_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \liminf_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{x}-0}{x} = \liminf_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty\\
D^-f(0) &= \limsup_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \limsup_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{x}-0}{x} = \limsup_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty
\end{aligned}$$

Como $D_+f(0) = D^+f(0) = 0$ logo pela Proposição 2.5 a função f é diferenciável à direita no ponto $x_0 = 0$, ou seja, $f'_d(0) = 0$. Outrossim, pela Proposição 2.6 a função f não é diferenciável à esquerda no ponto $x_0 = 0$ pois $D_-f(0) = D^-f(0)$ mas não são finitas. Como as derivadas de Dini de f no ponto $x_0 = 0$ não são todas iguais ($D^{\pm}f(0) \neq D_{\pm}f(0)$), logo pelo Teorema 2.7 a função não é diferenciável no ponto $x_0 = 0$.

Exemplo 2.12. Consideremos a função f (ver Figura 2.3) dada por

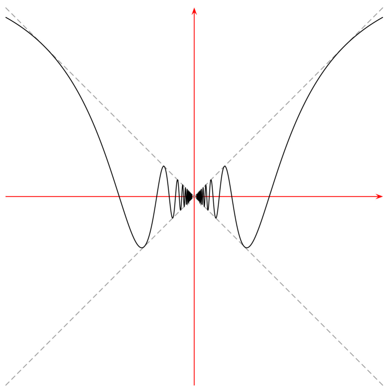

Figura 2.3: Gráfico da função f do Exemplo 2.12

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{, se } x \neq 0\\ 0 & \text{, se } x = 0 \end{cases}.$$

As Derivadas de Dini no ponto $x_0 = 0$ são:

$$D_{\pm}f(0) = \liminf_{x\to 0^{\pm}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \liminf_{x\to 0^{\pm}} \frac{x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - 0}{x} = \liminf_{x\to 0^{\pm}} \operatorname{sen}\frac{1}{x} = -1$$
$$D^{\pm}f(0) = \limsup_{x\to 0^{\pm}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \limsup_{x\to 0^{\pm}} \frac{x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - 0}{x} = \limsup_{x\to 0^{\pm}} \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 1$$

Como as derivadas de Dini de f no ponto $x_0 = 0$ não são todas iguais, pelo Teorema 2.7, f não é difrenciável no ponto $x_0 = 0$. Temos $\overline{D}f(0) \neq \underline{D}f(0)$, mas pela Proposição 2.5 e pela Proposição 2.6, como $D^+f(0) \neq D_+f(0)$ e $D^-f(0) \neq D_-f(0)$, não existem as derivadas laterais no ponto $x_0 = 0$, o que não acontece no Exemplo 2.10.

Exemplo 2.13. Consideremos a função f (ver Figura 2.4) dada por

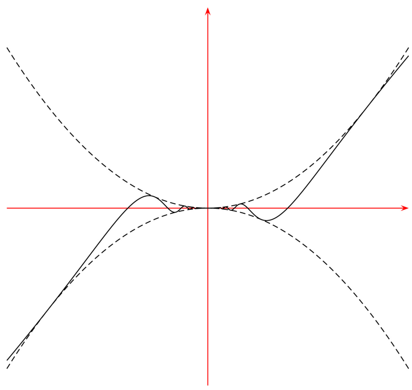

Figura 2.4: Gráfico da função f do Exemplo 2.13

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & , \text{ se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } x = 0 \end{cases}.$$

As suas Derivadas de Dini no ponto $x_0 = 0$ são:

$$D_{\pm}f(0) = \liminf_{x\to 0^{\pm}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \liminf_{x\to 0^{\pm}} \frac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} - 0}{x} = \liminf_{x\to 0^{\pm}} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$$
$$D^{\pm}f(0) = \limsup_{x\to 0^{\pm}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \limsup_{x\to 0^{\pm}} \frac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} - 0}{x} = \limsup_{x\to 0^{\pm}} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$$

Como todas as derivadas de Dini no ponto $x_0 = 0$ são finitas e iguais, pelo Teorema 2.7 f é diferenciável no ponto $x_0 = 0$. Por isso também temos

$$\overline{D}f(0) = \underline{D}f(0) = f'(0) = f'_e(0) = f'_d(0).$$

2.2 Primeiros Resultados

Começamos por apresentar alguns resultados acerca das derivadas de Dini que provêm directamente das propriedades de Limite Superior e Limite Inferior.

2.2.1 Limites Superior e Inferior nas Derivadas de Dini

Aplicando o Lema 1.79 à definição de Derivada de Dini temos o seguinte:

Poposição 2.14. *[GK92] Sejam f e g funções definidas em $[a, b]$, então temos*

$$\begin{cases} D^+(f+g)(x_0) \leqslant D^+f(x_0) + D^+g(x_0) \\ D_+(f+g)(x_0) \geqslant D_+f(x_0) + D_+g(x_0) \end{cases} \quad \textit{para todo o } x_0 \in [a, b[$$

$$\begin{cases} D^-(f+g)(x_0) \leqslant D^-f(x_0) + D^-g(x_0) \\ D_-(f+g)(x_0) \geqslant D_-f(x_0) + D_-g(x_0) \end{cases} \quad \textit{para todo o } x_0 \in]a, b].$$

Ao contrário da derivada usual em que temos sempre a igualdade, de facto, com as derivadas de Dini nem sempre temos a igualdade, como mostra o Exemplo seguinte.

Exemplo 2.15. Sejam f e g as funções dadas por

$$f(x) = \begin{cases} x \,\text{sen}\, \dfrac{1}{x} & , \text{se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -x \,\text{sen}\, \dfrac{1}{x} & , \text{se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Como $f(x) + g(x) = 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$ temos $D^+(f+g)(0) = 0$. Por outro lado

$$D^+f(0) = \limsup_{x \to 0^+} \frac{x \,\text{sen}\, \frac{1}{x}}{x} = \limsup_{x \to 0^+} \text{sen}\, \frac{1}{x} = 1$$

$$D^+g(0) = \limsup_{x \to 0^+} \frac{-x \,\text{sen}\, \frac{1}{x}}{x} = \limsup_{x \to 0^+} - \text{sen}\, \frac{1}{x} = 1$$

e logo

$$D^+(f+g)(0) < D^+f(0) + D^+g(0).$$

Aplicando o Lema 1.80 à definição de Derivada de Dini temos:

Poposição 2.16. *Sejam f e g funções definidas em $[a, b]$ e g diferenciável no ponto $x_0 \in [a, b]$. Então, temos*

$$\begin{cases} D^+(f+g)(x_0) = D^+f(x_0) + g'(x_0) \\ D_+(f+g)(x_0) = D_+f(x_0) + g'(x_0) \end{cases} \quad \textit{para todo o } x \in [a, b[$$

$$\begin{cases} D^-(f+g)(x_0) = D^-f(x_0) + g'(x_0) \\ D_-(f+g)(x_0) = D_-f(x_0) + g'(x_0) \end{cases} \quad \textit{para todo o } x \in]a, b].$$

Exemplo 2.17. Consideremos as funções f e g dadas por:

$$f(x) = \begin{cases} x \,\text{sen}\, \frac{1}{x} & , \text{se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \mathrm{e}^x$$

Pelo Exemplo 2.12 $D^+f(0) = 1$. Calculemos agora a derivada da função g

$$g'(x) = \mathrm{e}^x \Rightarrow g'(0) = \mathrm{e}^0 = 1.$$

$$\begin{aligned} D^+(f+g)(0) &= \limsup_{x\to 0^+} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(0)}{x-0} = \limsup_{x\to 0^+} \frac{x \operatorname{sen}\frac{1}{x} + \mathrm{e}^x - 1}{x} \\ &= \limsup_{x\to 0^+} \operatorname{sen}\frac{1}{x} + \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 2. \end{aligned}$$

Logo

$$D^+(f+g)(0) = D^+f(0) + g'(0).$$

Aplicando o Lema 1.81 à definição de Derivada de Dini temos:

Poposição 2.18. *[GK92] Sejam f e g funções definidas em $[a,b]$ e $x_0 \in [a,b]$, então temos*

$$\begin{cases} D^+(f+g)(x_0) \geqslant D^+f(x_0) + D_+g(x_0) \\ D_+(f+g)(x_0) \leqslant D_+f(x_0) + D^+g(x_0) \end{cases} \quad \textit{para todo o } x \in [a,b[$$

$$\begin{cases} D^-(f+g)(x_0) \geqslant D^-f(x_0) + D_-g(x_0) \\ D_-(f+g)(x_0) \leqslant D_-f(x_0) + D^-g(x_0) \end{cases} \quad \textit{para todo o } x \in]a,b].$$

Apesar de passarmos de um limite superior para um inferior e vice-versa, existem situações em que temos a igualidade.

Exemplo 2.19. Tomando as funções f e g do Exemplo 2.15 temos

$$D_+g(0) = \liminf_{x\to 0^+} \frac{-x \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x} = \liminf_{x\to 0^+} -\operatorname{sen}\frac{1}{x} = -1$$

Logo

$$D^+(f+g)(0) = 0 = D^+f(0) + D_+g(0).$$

2.2.2 Derivadas de Dini na Monotonia de Funções

Tal como a derivada usual é usada no estudo da monotonia de funções, também existem resultados semelhantes para as derivadas de Dini.

Lema 2.20. *Sejam f uma função definida no intervalo aberto I e $x_0 \in I$. Se $D_+f(x_0) > 0$ e $D_-f(x_0) > 0$, então f é localmente estritamente crescente no ponto x_0. Se $D^+f(x_0) < 0$ e $D^-f(x_0) < 0$ então f é localmente estritamente decrescente em x_0.*

Prova: Supomos que $D_+f(x_0) > 0$ e $D_-f(x_0) > 0$, então existe $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_0 < x_2$ tal que

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$$

para todo o $x \in]x_1, x_2[$, e $x \neq x_0$. Segue-se que

$$f(x) < f(x_0) \text{ sempre que } x \in]x_1, x_0[$$

$$f(x) > f(x_0) \text{ sempre que } x \in]x_0, x_2[.$$

Logo f é localmente estritamente crescente no ponto x_0.

Agora, supomos que $D^+f(x_0) < 0$ e $D^-f(x_0) < 0$, então existe $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_0 < x_2$ tal que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$$

para todo o $x \in]x_1, x_2[,$ e $x \neq x_0$. Segue-se que

$$f(x) > f(x_0) \text{ sempre que } x \in]x_1, x_0[$$

$$f(x) < f(x_0) \text{ sempre que } x \in]x_0, x_2[.$$

Logo f é localmente estritamente decrescente no ponto x_0.

□

Como consequência do Lema anterior e do Lema1.128, temos o seguinte Teorema:

Teorema 2.21. *Seja f uma função definida no intervalo aberto $]a, b[$.*

1. *Se $D_+f(x) > 0$ e $D_-f(x) > 0$ para todo o $x \in]a, b[$ então f é estritamente crescente em $]a, b[$.*
2. *Se $D^+f(x) < 0$ e $D^-f(x) < 0$ para todo o $x \in]a, b[$ então $f(x)$ é estritamente decrescente em $]a, b[$.*

O exemplo seguinte mostra que a condição $D_+f(x) > 0$ em si não nos dá total garantia de monotonia da função f.

Exemplo 2.22. Consideremos a seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{, se } x \in [0, 1[\\ x - 1 & \text{, se } x \in [1, 2] \end{cases}.$$

- Se $x \in]0, 1[$ temos $D_+f(x) = f'(x) = 1 > 0$
- Se $x \in]1, 2[$ temos $D_+f(x) = f'(x) = 1 > 0$

Além disso $D_+f(1) = \liminf\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \liminf\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x - 1 - 0}{x - 1} = 1$. Assim $D_+f(x) > 0$ para todo o $x \in]0, 2[$, no entanto, f não é estritamente crescente em $]0, 2[$.

No entanto, adicionando condições extra na função f podemos garantir a monotonia da função, como acontece no resultado seguinte:

Teorema 2.23. *[KK96] Seja f uma função definida no intervalo $[a, b]$ tal que*

- *para $a < x_0 \leqslant b$ temos $\limsup\limits_{x \to x_0^-} f(x) \leqslant f(x_0)$*
- *para $a \leqslant x_0 < b$ temos $\liminf\limits_{x \to x_0^+} f(x) \geqslant f(x_0)$*

e uma das duas condições seguintes acontece:

- *$D^+f(x) \geqslant 0$ para todo o $x \in [a, b] \setminus E$, onde E é um subconjuto numerável*
- *$D^-f(x) \geqslant 0$ para todo o $x \in [a, b] \setminus E$, onde E é um subconjuto numerável.*

Então f é crescente em $[a, b]$.

Podíamos ainda enunciar um resultado equivalente para funções decrescentes.

No Teorema 2.34 é ainda apresentada outra versão.

2.3 Comparação dos resultados da Derivada usual e das Derivadas de Dini

Recordando a Proposição 1.103 temos agora o seguinte.

Teorema 2.24. *[GK92] Seja f uma função definida no intervalo $[a,b]$ e $x_0 \in [a,b]$. Se $\overline{D}f(x_0)$ e $\underline{D}f(x_0)$ são ambas finitas, então f é contínua no ponto x_0.*

Prova: Queremos ver que f é contínua no ponto x_0, ou seja,

$$\forall_{\delta>0}\exists_{\epsilon>0} : x \in D \wedge |x - x_0| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta.$$

Como $\overline{D}f(x_0)$ e $\underline{D}f(x_0)$ são finitas, existe $\eta > 0$ tal que para $|x - x_0| < \eta$ e $x \in D$ temos $\left|\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| < M$, para algum $M \in \mathbb{R}^+$. Logo $|f(x) - f(x_0)| < M \times |x - x_0|$.
Para cada $\delta > 0$ tomamos $\epsilon = \min\{\eta, \frac{\delta}{M}\}$ e $|x - x_0| < \epsilon$. Assim $|f(x) - f(x_0)| < M \cdot \epsilon$.
Se tivermos

$$\epsilon = \eta \Rightarrow \eta < \frac{\delta}{M} \Leftrightarrow M < \frac{\delta}{\eta} = \frac{\delta}{\epsilon} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\delta}{\epsilon} \cdot \epsilon = \delta,$$

se tivermos

$$\epsilon = \frac{\delta}{M} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < M \cdot \frac{\delta}{M} = \delta.$$

O que prova que f é contínua no ponto x_0.

□

2.3.1 Teorema de Rolle

Começamos por recordar o *Teorema de Rolle*.

Teorema 2.25 (Teorema de Rolle). *Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$. Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

Prova: Como f é contínua em $[a,b]$, pelo Teorema de Weierstrass a função tem máximo (M) e mínimo (m) absoluto.
Se $M = m$ a função é contante em $[a,b]$ e logo $f'(x) = 0$ para todo $x \in]a,b[$.
Se $M > m$ e $f(a) = f(b)$ existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = M$ ou $f(c) = m$ e logo $f'(c) = 0$, pois c é um ponto de extremo (máximo ou mínimo).

□

Teorema 2.26. *[GK92] Seja f uma função definida no intervalo fechado $[a,b]$ com $f(a) = f(b)$. Então existem $x_1, x_2 \in [a,b]$ tais que*

$$D_+f(x_1) \leqslant 0 \text{ ou } D_-f(x_1) \leqslant 0$$

e

$$D^+f(x_2) \geqslant 0 \text{ ou } D^-f(x_2) \geqslant 0.$$

Prova: Com vista a um absurdo, supomos que não existe x_1 com as características exigidas. Então $D_+f(x) > 0$ e $D_-f(x) > 0$ para todo o $x \in [a,b]$. Segue-se pelo Lema 2.20 que f é localmente estritamente crescente em todos os pontos de $[a,b]$ e pelo Lema 1.128 f é estritamente crescente em $[a,b]$, o que contradiz a hipótese $f(a) = f(b)$. A segunda afirmação do Teorema demonstra-se de forma análoga.

□

Enunciamos agora o Teorema de Rolle adaptado às derivadas de Dini.

Teorema 2.27. *[GK92][Teorema de Rolle Generalizado] Seja f uma função definida no intervalo fechado $[a,b]$ tal que $f(a)=f(b)$. Suponhamos que m e M são, respectivamente, o mínimo e máximo da função f em $[a,b]$.*

1. *Se $m < f(a) = f(b)$ então existe $x_1 \in]a,b[$ tal que*

$$D^- f(x_1) \leqslant 0 \leqslant D_+ f(x_1). \quad (2.1)$$

Se $m = f(a) = f(b)$ temos que

$$D^- f(b) \leqslant 0 \leqslant D_+ f(a). \quad (2.2)$$

2. *Se $M > f(a) = f(b)$ então existe $x_2 \in]a,b[$ tal que*

$$D^+ f(x_2) \leqslant 0 \leqslant D_- f(x_2)$$

Se $M = f(a) = f(b)$ temos

$$D^+ f(a) \leqslant 0 \leqslant D_- f(b).$$

Prova: Por hipótese existe $x_1 \in [a,b]$ tal que $f(x_1)=m$, logo $f(x_1) \leqslant f(x)$ para todo o $x \in [a,b]$. Se $m < f(a) = f(b)$ então $x_1 \in]a,b[$, assim:

- para $x > x_1$ temos $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \geqslant 0$, então

$$\liminf_{x \to x_1^+} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \geqslant 0 \Rightarrow D_+ f(x_1) \geqslant 0.$$

- para $x < x_1$ temos $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant 0$. Então

$$\limsup_{x \to x_1^-} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant 0 \Rightarrow D^- f(x_1) \leqslant 0.$$

Logo temos (2.1).

Por outro lado, quando $m = f(a) = f(b)$ temos $f(x) \geqslant f(a) = f(b)$ para todo o $x \in [a,b]$, assim:

- para $x > a$ temos $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$, então

$$\liminf_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0 \Rightarrow D_+ f(a) \geqslant 0$$

- para $x < b$ temos $\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} \leqslant 0$, então

$$\limsup_{x \to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \leqslant 0 \Rightarrow D^- f(b) \leqslant 0.$$

Logo obtemos (2.2).

A segunda parte do teorema é provada de forma análoga.

□

2.3.2 Teorema de Lagrange

Agora recordemos o Teorema de Lagrange ou Teorema do Valor Médio.

Teorema 2.28. *[Teorema de Lagrange] Se f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$, existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Prova: Consideremos

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e a função

$$g(x) = f(x) - \lambda x, \text{ para todo o } x \in [a, b].$$

Como g é uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$ e $g(a) = g(b)$, pelo Teorema de Rolle 2.25, existe $c \in]a, b[$ tal que $g'(c) = 0$. Mas $g'(x) = f'(x) - \lambda$, logo tomando $x = c$ temos

$$g'(c) = f'(c) - \lambda \Leftrightarrow f'(c) = \lambda \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Do resultado anterior podemos deduzir o seguinte Corolário.

Corolário 2.29. *Seja f uma função contínua e diferenciável no intervalo aberto I. Se $f'(x) = 0$ para todo o $x \in I$, então f é constante no intervalo I.*

Prova: Sejam $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$. Aplicando o Teorema de Lagrange ao intervalo $[x_1, x_2]$ sabemos que existe $c \in]x_1, x_2[$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Como $f'(c) = 0$ temos $f(x_2) = f(x_1)$ visto que x_1 e x_2 são quaisquer, temos que f é constante no intervalo aberto I.

□

Teorema 2.30. *[KK96] Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Se uma das quatro derivadas de Dini é nula em todos os pontos do intervalo $[a, b]$, com excepção de um conjunto numerável, então f é constante no intervalo $[a, b]$.*

Prova: Supomos que E é um conjunto numerável tal que para todo o $x_0 \in [a, b] \setminus E$ temos

$$D^+ f(x_0) = \limsup_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Vamos supor com vista a um absurdo que a função não é constante no intervalo $[a, b]$. Então existirá $x_1 \in]a, b]$ tal que $f(x_1) - f(a) = p \neq 0$.
Se tivermos $p > 0$, dado $k \in \mathbb{R}^+$, definimos a função $\varphi_k(x) = f(x) - f(a) - k(x - a)$. Logo $\varphi_k(a) = 0$ e $\varphi_k(x_1) = f(x_1) - f(a) - k(x_1 - a) = p - k(x_1 - a)$.
Fixamos q tal que $0 < q < p$ e escolhemos k tal que $k < \dfrac{p - q}{x_1 - a}$, temos

$$\varphi_k(x_1) = p - k(x_1 - a) > p - \frac{p - q}{x_1 - a}.(x_1 - a) = p - p + q = q.$$

Para cada k consideramos o conjunto $A_k = \{x \in]a, x_1[: \varphi_k(x) \leqslant q\}$ e tomamos $\xi = \sup A_k$. Por definição do conjunto A_k e porque a função φ_k é contínua temos $\xi < x_1$ e $\varphi_k(\xi) = q$.
Como $\xi < x_1 \Rightarrow x_1 - \xi > 0$ podemos tomar h tal que $x_1 - \xi \geqslant h > 0$. Como $h > 0$ e $\xi = \sup A_k$ então $\varphi_k(\xi + h) > q$, logo $\dfrac{\varphi_k(\xi+h) - \varphi_k(\xi)}{h} > 0$, assim

$$D^+\varphi_k(\xi) = \limsup_{x\to\xi^+} \frac{\varphi_k(x) - \varphi_k(\xi)}{x - \xi} = \limsup_{h\to 0^+} \frac{\varphi_k(\xi+h) - \varphi_k(\xi)}{h} \geqslant 0.$$

Se $\xi \in]a, b[\backslash E$ logo $D^+f(\xi) = 0$ e temos

$$D^+\varphi_k(\xi) = D^+f(\xi) - k = -k < 0$$

o que é absurdo, logo $\xi \in E$.
Como q está fixo, ξ depende apenas de k, de facto, tomando $k' \in \mathbb{R}^+$ com $k' < \dfrac{p-q}{x_1 - a}$ tal que $\xi = \sup A_k = \sup A_{k'}$, temos $0 = \varphi_k(\xi) - \varphi_{k'}(\xi) = (k' - k)(\xi - a) \Leftrightarrow k = k'$. Assim, para diferentes $k \in \left]0, \dfrac{p-q}{x_1 - a}\right[$ (conjunto não numerável) temos diferentes $\xi = \sup A_k \in E$, ou seja E contém um conjunto não numerável, logo não é numerável. O que é absurdo, logo $p < 0$.
Agora tomávamos $\varphi_k(x) = f(x) - f(a) + k(x - a)$ e obtínhamos novamente absurdo. Então $p = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(a)$, para todo o $x_1 \in]a, b]$, logo f é constante no intervalo $[a, b]$.

$\square$

Do Teorema 2.28 também temos o seguinte Corolário.

Corolário 2.31. *Sejam f e g duas funções diferenciáveis no intervalo aberto I tais que $f'(x) = g'(x)$ para todo o $x \in I$, então $f(x) - g(x) = k$ para algum $K \in \mathbb{R}$.*

Prova: Como $f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow f'(x) - g'(x) = 0 \Leftrightarrow (f - g)'(x) = 0$, para todo o $x \in I$, pelo Corolário 2.29, temos que $(f - g)(x) = K$, para todo o $x \in I$ e para algum $K \in \mathbb{R}$.

$\square$

Para provar um resultado equivalente para as derivadas de Dini começamos por estabelecer o seguinte resultado.

Poposição 2.32. *Se f é uma função contínua em $[a, b]$ com uma das derivadas de Dini não negativa em $[a, b]$, excepto num conjunto numerável, então $f(a) \leqslant f(b)$.*

Prova: Como f é contínua, para todo o $x_0 \in [a, b]$ temos que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ e logo as duas primeiras condições do Teorema 2.23 são válidas.
Se $D^+f(x) \geqslant 0$ ou $D^-f(x) \geqslant 0$ para todo o $x \in [a, b] \setminus E$, onde E é um subconjunto numerável, pelo Teorema 2.23, f é crescente em $[a, b]$ e logo $f(a) \leqslant f(b)$.
Se $D_+f(x) \geqslant 0$ ou $D_-f(x) \geqslant 0$ para todo o $x \in [a, b] \setminus E$, então temos que $D^+f(x) \geqslant 0$ ou $D^-f(x) \geqslant 0$ e o resultado segue.

$\square$

Teorema 2.33. *Dadas duas funções contínuas definidas no intervalo fechado $[a, b]$, se para uma das quatro derivadas de Dini, essa derivada para as duas funções tem valores finitos e iguais em todos os pontos de $[a, b]$, excepto para um conjunto numerável, então as duas funções diferem uma da outra em $[a, b]$ por uma constante.*

Prova: Suponhamos que f e g são duas funções contínuas em $[a, b]$ tais que

$$D^+ f(x) = D^+ g(x)$$

para todo o $x \in [a, b] \setminus E$, com E um conjunto numerável. Seja $h(x) = f(x) - g(x)$, logo h é função contínua em $]a, b[$. Dado $\delta > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo o $x \notin E$, temos

$$\frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} > D^+ f(x) - \delta$$

e

$$\frac{g(x+\epsilon) - g(x)}{\epsilon} < D^+ g(x) + \delta.$$

Assim, para todo o $x \notin E$, temos

$$\begin{aligned}\frac{h(x+\epsilon) - h(x)}{\epsilon} &= \frac{f(x+\epsilon) - g(x+\epsilon) - f(x) + g(x)}{\epsilon} \\ &= \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} - \frac{g(x+\epsilon) - g(x)}{\epsilon} \\ &> D^+ f(x) - \delta - D^+ g(x) - \delta = -2\delta.\end{aligned}$$

Portanto, $D^+ h(x) > -2\delta$, como δ é arbitrário, concluímos que $D^+ h(x) \geqslant 0$. Pela Proposição 2.32 temos $h(a) \leqslant h(x)$. Por outro lado, tomando a função $-h(x) = g(x) - f(x)$ também concluímos que $D^+(-h)(x) \geqslant 0$, pela Proposição 2.32 temos $-h(a) \leqslant -h(x) \Leftrightarrow h(a) \geqslant h(x)$. Assim, $h(x) = h(a)$ para todo o $x \notin E$.
Como h é função contínua em $[a, b]$ e E é um conjunto numerável temos de ter $h(x) = h(a) = K$ para todo o $x \in [a, b]$, logo $f(x) - g(x) = K$ para todo o $x \in [a, b]$.

□

No Teorema anterior a condição da derivada de Dini ser finita é fundamental, de facto, Ruziewicz [Ruz20] apresentou um exemplo de funções com derivadas de Dini iguais mas não finitas, excepto num conjunto numerável em que a diferença não é uma constante.

Teorema 2.34. ***[GK92][Teorema de Lagrange Generalizado]*** *Seja f uma função definida no intervalo fechado $[a, b]$. Consideremos $h(x) = f(x) - f(a) - \lambda(x - a)$, para todo o $x \in [a, b]$, onde $\lambda = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. E sejam $m = \inf_{x \in [a,b]} h(x)$ e $M = \sup_{x \in [a,b]} h(x)$.*

1. *Se f é função semicontínua inferiormente em $[a, b]$ e $m < 0$, então existe $x_1 \in]a, b[$ tal que*

   $$D^- f(x_1) \leqslant \lambda \leqslant D_+ f(x_1),$$

   se $m = 0$ temos

   $$D^- f(b) \leqslant \lambda \leqslant D_+ f(a).$$

2. *Se f é função semicontínua superiormente em $[a, b]$ e $M > 0$ então existe $x_2 \in]a, b[$ tal que*

   $$D^+ f(x_2) \leqslant \lambda \leqslant D_- f(x_2),$$

   se $M = 0$ temos

   $$D^+ f(a) \leqslant \lambda \leqslant D_- f(b).$$

Prova: Pelo Teorema de Weierstrass Generalizado 1.96, qualquer função semicontínua inferiormente admite mínimo num intervalo fechado. A função h satisfaz as condições do Teorema de Rolle (2.27), pois $h(a) = h(b) = 0$. Se $m < h(a) = h(b) = 0$ existe $x_1 \in]a, b[$ tal que

$$D^- h(x_1) \leqslant 0 \leqslant D_+ h(x_1)$$

$$\Leftrightarrow D^- f(x_1) - \lambda \leqslant 0 \leqslant D_+ f(x_1) - \lambda \Rightarrow D^- f(x_1) \leqslant \lambda \leqslant D_+ f(x_1).$$

Se $m = h(a) = h(b) = 0$, temos

$$D^- h(b) \leqslant 0 \leqslant D_+ h(a)$$

$$\Leftrightarrow D^- f(b) - \lambda \leqslant 0 \leqslant D_+ f(a) - \lambda \Rightarrow D^- f(b) \leqslant \lambda \leqslant D_+ f(a).$$

A segunda parte prova-se de forma idêntica.

□

Corolário 2.35. *Seja f uma função semicontínua inferiormente no intervalo fechado $[a, b]$. Então existem $x_1, x_2 \in]a, b[$ tal que*

$$D_+ f(x_1) \geqslant \lambda \text{ e } D^- f(x_2) \leqslant \lambda.$$

Nota 2.36. Tendo em conta que $D_+ f(x_1) \geqslant \lambda$ logo $D^+ f(x_1) \geqslant \lambda$. De igual modo, se $D^- f(x_2) \leqslant \lambda$ o mesmo acontece com $D_- f(x_2) \leqslant \lambda$.

O Corolário seguinte é uma versão do anterior para funções semicontínuas superiormente.

Corolário 2.37. *Seja f uma função semicontínua superiormente no intervalo fechado $[a, b]$. Então existem $x_1, x_2 \in]a, b[$ tal que*

$$D^+ f(x_1) \leqslant \lambda \text{ e } D_- f(x_2) \geqslant \lambda.$$

Teorema 2.38. *Seja f uma função definida no intervalo fechado $[a, b]$.*

1. *Consideremos que f é semicontínua inferiormente em $[a, b]$. Se $D^- f(x) \geqslant 0$ para todo o $x \in]a, b[$, então f é crescente em $]a, b[$. Se $D_+ f(x) \leqslant 0$ para todo o $x \in]a, b]$, então f é decrescente em $[a, b[$.*

2. *Consideremos que f é semicontínua superiormente em $[a, b]$. Se $D^+ f(x) \geqslant 0$ para todo o $x \in [a, b[$, então f é crescente em $[a, b[$. Se $D_- f(x) \leqslant 0$ para todo o $x \in]a, b]$, então f é decrescente em $]a, b]$.*

Prova: Vamos provar o ponto 1 recorrendo ao Teorema do Valor Médio Generalizado (2.34). Seja f uma função semicontínua inferiormente tal que $D^- f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in]a, b[$. Com vista a um absurdo, supomos que f não é crescente. Então existem $s_1, s_2 \in]a, b[$ tal que $s_1 < s_2$ e $f(s_1) > f(s_2)$. Como f é semicontínua inferiormente no intervalo $[a, b]$, também é no intervalo $[s_1, s_2]$, logo pelo Corolário 2.35 existe $x_2 \in]s_1, s_2[$ tal que

$$D^- f(x_2) \leqslant \frac{f(s_2) - f(s_1)}{s_2 - s_1} < 0$$

o que contradiz a hipótese.

Se $D_+f(x) \leqslant 0$ para todo o $x \in]a,b[$, como vista a um absurdo, supomos que f não é decrescente. Então existem $s_1, s_2 \in]a,b[$ tais que $s_1 < s_2$ e $f(s_1) < f(s_2)$. Como f é semicontínua inferiormente no intervalo $[a,b]$, também é no intervalo $[s_1, s_2]$, logo pelo Corolário 2.35 existe $x_1 \in [s_1, s_2]$ tal que $D_+f(x_1) \geqslant \dfrac{f(s_2) - f(s_1)}{s_2 - s_1} > 0$, o que contradiz a hipótese.
Para provar o ponto 2 do Teorema usamos o Corolário 2.37.

□

Teorema 2.39. *Seja f uma função contínua no intervalo aberto $]a,b[$. Se para cada $x \in]a,b[$ qualquer uma das seguintes condições for válida, então f é uma função crescente (estritamente crescente) em $]a,b[$:*

$$D^+f(x) \geqslant 0 \quad (D^+f(x) > 0)$$

$$D_+f(x) \geqslant 0 \quad (D_+f(x) > 0)$$

$$D^-f(x) \geqslant 0 \quad (D^-f(x) > 0)$$

$$D_-f(x) \geqslant 0 \quad (D_-f(x) > 0)$$

Prova: O enunciado do teorema acima é uma consequência imediata do Teorema 2.38 uma vez que se f é contínua em $]a,b[$, logo é semicontínua inferiormente e superiormente em $]a,b[$.

□

2.3.3 Extremos de uma função

Quando f não é diferenciável num dado ponto não podemos usar os resultados da Secção 1.6, no entanto podemos usar as derivadas de Dini para estudar os extremos locais de f.
Começamos por enunciar as condições necessárias (não suficientes) em termos das derivadas de Dini para que existam extremos locais.

Teorema 2.40. *[GK92] Sejam f uma função definida no intervalo aberto $]a,b[$ e $x_0 \in]a,b[$.*

1. *Se f admite um mínimo local no ponto x_0 então*

$$D_+f(x_0) \geqslant 0 \quad \textit{e } D^-f(x_0) \leqslant 0.$$

2. *Se f admite um máximo local no ponto x_0 então*

$$D_-f(x_0) \geqslant 0 \quad \textit{e } D^+f(x_0) \leqslant 0.$$

Nota 2.41. Da prova do Lema 2.20 temos que:

- se $D_+f(x_0) > 0$ então existe $x_1 > x_0$ tal que $f(x_0) < f(x)$ para todo o $x \in]x_0, x_1[$.
- se $D_-f(x_0) > 0$ então existe $x_2 > x_0$ tal que $f(x) < f(x_0)$ para todo o $x \in]x_2, x_0[$.

Da prova do Lema 2.20 temos que:

- se $D^+f(x_0) < 0$ então existe $x_1 > x_0$ tal que $f(x) < f(x_0)$ para todo o $x \in]x_0, x_1[$.
- se $D^-f(x_0) < 0$ então existe $x_2 < x_0$ tal que $f(x_0) < f(x)$ para todo o $x \in]x_2, x_0[$.

A seguir apresentamos uma generalização das condições suficientes para a existência de extremos, usando as derivadas de Dini de segunda ordem.
À partida, qualquer função pode ter no máximo dezasseis derivadas de Dini de segunda ordem, definidas como indicamos a seguir:

Definição 2.42. Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in]a, b[$.
Seja $\epsilon > 0$ tal que $D_+f(x) \in \mathbb{R}$ para todo o $x \in [x_0, x_0 + \epsilon[$, então definimos a derivada de Dini à direita inferior e superior da função $D_+f(x)$ no ponto x_0, que indicamos por $D_+D_+f(x_0)$ e $D^+D_+f(x_0)$.
Seja $\epsilon > 0$ tal que $D_+f(x) \in \mathbb{R}$ para todo o $x \in]x_0 - \epsilon, x_0]$, então definimos a derivada de Dini à esquerda inferior e superior da função $D_+f(x)$ no ponto x_0, que indicamos por $D_-D_+f(x_0)$ e $D^-D_+f(x_0)$.
As restantes catorze derivadas de Dini de segunda ordem da função f no ponto x_0 são definidas de forma semelhante, se D^+f, D_-f e D^-f existirem e forem finitas numa vizinhança (à direita ou à esquerda) de x_0.

Nota 2.43. Se alguma das derivadas de Dini $D_+f(x_0), D^+f(x_0), D_-f(x_0), D^-f(x_0)$ não é finita, não podemos definir as derivadas de Dini de segunda ordem correspondente.

Teorema 2.44. *Sejam f uma função definida no intervalo $]a, b[$ e $x_0 \in]a, b[$.*

1. *Seja f semicontínua superiormente em $]a, b[$. Então f tem mínimo local no ponto x_0 se se verificarem as seguintes condições:*

   (a) $D_+f(x_0) \geqslant 0$ *e* $D_+D_+f(x_0) > 0$,

   (b) $D^-f(x_0) \leqslant 0$ *e* $D_-D^-f(x_0) > 0$.

2. *Seja f semicontínua inferiormente em $]a, b[$. Então f tem máximo local no ponto t_0 se se verificarem as seguintes condições:*

   (a) $D^+f(x_0) \leqslant 0$ *e* $D^+D^+f(x_0) < 0$,

   (b) $D_-f(x_0) \geqslant 0$ *e* $D^-D_-f(x_0) < 0$.

Prova: Vamos provar o ponto 1.
Como $D_+D_+f(x_0) > 0$, pela Nota 2.41 existe $x_1 > x_0$ tal que

$$D_+f(x_0) < D_+f(x) \text{ para todo o } x \in]x_0, x_1[.$$

Por hipótese do Teorema e da Definição das derivadas de Dini temos

$$0 \leqslant D_+f(x_0) < D_+f(x) \leqslant D^+f(x) \text{ para todo o } x \in]x_0, x_1[.$$

Do Teorema 2.38 como f é semicontínua superiormente e $D^+f(x) > 0$ para todo o $x \in]x_0, x_1[$, então f é estritamente crescente em $]x_0, x_1[$.
Por outro lado, como $D_-D^-f(x_0) > 0$, pela Nota 2.41 existe $x_2 < x_0$ tal que

$$D^-f(x) < D^-f(x_0) \text{ para todo o } x \in]x_2, x_0[.$$

Por hipótese do Teorema e da Definição das derivadas de Dini temos

$$D_-f(x) \leqslant D^-f(x) < D^-f(x_0) \leqslant 0 \text{ para todo o } x \in]x_2, x_0[.$$

Do Teorema 2.38, como f é semicontínua superiormente e $D_-f(x) < 0$ para todo o $x \in]x_2, x_0[$, então f é estritamente decrescente em $]x_2, x_0[$. Assim, f tem mínimo local no ponto x_0.
Vamos provar o ponto 2.
Como $D^+D^+f(x_0) < 0$, pela Nota 2.41 existe $x_1 > x_0$ tal que

$$D^+f(x_0) > D^+f(x) \text{ para todo o } x \in]x_0, x_1[.$$

Por hipótese do Teorema e da Definição das derivadas de Dini temos

$$D_+f(x) \leqslant D^+f(x) < D^+f(x_0) \leqslant 0 \text{ para todo o } x \in]x_0, x_1[.$$

Do Teorema 2.38 como f é semicontínua inferiormente e $D_+f(x) < 0$ para todo o $x \in]x_0, x_1[$, então f é estritamente decrescente em $]x_0, x_1[$.
Por outro lado, como $D^-D_-f(x_0) < 0$, pela Nota 2.41 existe $x_2 < x_0$ tal que

$$D_-f(x_0) < D_-f(x) \text{ para todo o } x \in]x_2, x_0[.$$

Por hipótese do Teorema e da definição das derivadas de Dini temos

$$0 \leqslant D_-f(x_0) < D_-f(x) \leqslant D^-f(x) \text{ para todo o } x \in]x_2, x_0[.$$

Do Teorema 2.38 como f é semicontínua inferiormente e $D^-f(x) > 0$ para todo o $x \in]x_2, x_0[$, então f é estritamente crescente em $]x_2, x_0[$. Assim f tem máximo local em x_0.

□

Teorema 2.45. *Sejam f uma função definida no intervalo aberto $]a, b[$ e $x_0 \in]a, b[$.*

1. *Seja f semicontínua superiormente em $]a, b[$. Então f tem mínimo local no ponto x_0 se se verificarem as seguintes condições:*

   (a) $D^+f(x_0) \geqslant 0$ *e* $D_+D^+f(x_0) > 0$*,*

   (b) $D_-f(x_0) \leqslant 0$ *e* $D_-D_-f(x_0) > 0$.

2. *Seja f semicontínua inferiormente em $]a, b[$. Então f tem máximo local no ponto x_0 se se verificarem as seguintes condições:*

   (a) $D_+f(x_0) \leqslant 0$ *e* $D^+D_+f(x_0) < 0$

   (b) $D^-f(x_0) \geqslant 0$ *e* $D^-D^-f(x_0) < 0$

Prova: Vamos provar o ponto 1.
Como $D_+D^+f(x_0) > 0$ logo, pela Nota 2.41 existe $x_1 > x_0$ tal que temos

$$D^+f(x_0) < D^+f(x) \text{para todo o } x \in]x_0, x_1[.$$

Por hipótese do Teorema temos

$$0 \leqslant D^+f(x_0) < D^+f(x) \text{para todo o } x \in]x_0, x_1[.$$

Do Teorema 2.38 f é semicontínua superiormente e $D^+f(x) > 0$ para todo o $x \in]x_0, x_1[$, então f é estritamente crescente em $]x_0, x_1[$. Por outro lado, como $D_-D_-f(x_0) > 0$, pela Nota 2.41

existe $x_2 < x_0$ tal que

$$D_- f(x) < D_- f(x_0) \text{ para todo o } x \in]x_2, x_0[.$$

Por hipótese do Teorema temos

$$0 \geqslant D_- f(x_0) > D_- f(x) \text{ para todo o } x \in]x_2, x_0[.$$

Do Teorema 2.38 f é semicontínua superiormente e $D_- f(x) < 0$ para todo o $x \in]x_2, x_0[$, então f é estritamente decrescente em $]x_2, x_0[$. Logo f tem mínimo local em x_0.
Vamos provar o ponto 2.
Como $D^+ D_+ f(x_0) < 0$, pela Nota 2.41 existe $x_1 > x_0$ tal que

$$D^+ f(x_0) > D^+ f(x) \text{ para todo o } x \in]x_0, x_1[.$$

Por hipótese do Teorema e da definição das derivadas de Dini temos

$$D_+ f(x) < D^+ f(x) < D_+ f(x_0) \leqslant 0 \text{ para todo o } x \in]x_0, x_1[.$$

Do Teorema 2.38 f é semicontínua inferiormente e $D_+ f(x) < 0$ para todo o $x \in]x_0, x_1[$, então f é estritamente decrescente em $]x_0, x_1[$. Por outro lado, como $D^- D^- f(x_0) < 0$, pela Nota 2.41 existe $x_2 < x_0$ tal que $D^- f(x_0) < D^- f(x)$ para todo o $x \in]x_2, x_0[$. Por hipótese do Teorema temos

$$0 \leqslant D^- f(x_0) < D^- f(x) \text{ para todo o } x \in]x_2, x_0[.$$

Do Teorema 2.38 f é semicontínua inferiormente e $D^- f(x) > 0$ para todo o $x \in]x_2, x_0[$, então f é estritamente crescente em $]x_2, x_0[$. Logo f tem máximo local em x_0.

□

Nota 2.46. Além do que é referido nos teoremas anteriores, se f é uma função semicontínua superiormente no ponto x_0, f também tem mínimo local no ponto x_0 se se verificarem as condições (1a) do Teorema 2.44 e (1b) do Teorema 2.45 ou as condições (1b) do Teorema 2.44 e (1a) do Teorema 2.45. Assim como, se f é uma função semicontínua inferiormente no ponto x_0, f tem máximo local no ponto x_0 se se verificarem as condições (2a) do Teorema 2.44 e (2b) do Teorema 2.45 ou as condições (2b) do Teorema 2.44 e a (2a) do Teorema 2.45.

Exemplo 2.47. Seja

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & , x \geqslant 0 \\ x^2 & , x < 0 \end{cases}.$$

Como

$$f'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

e

$$f'_e(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2}{x} = 0$$

temos que $f'_d(0) \neq f'_e(0)$ e, portanto f não é diferenciável no ponto $x_0 = 0$.
Como $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ logo $\limsup\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \leqslant f(0) = 0$, e pela Definição 1.88 f é semicontínua superiormente no ponto $x_0 = 0$.
Como f é diferenciável à direita no ponto $x_0 = 0$ logo $D_+ f(0) = f'_d(0) = 1 \geqslant 0$, e é diferenciável à esquerda no ponto $x_0 = 0$ logo $D^- f(0) = f'_e(0) = 0 \leqslant 0$. Para $x > 0$ a função f é diferenciável

e logo $D_+f(x) = f'(x) = e^x$. Para $x < 0$ a função f é diferenciável e logo $D^-f(x) = f'(x) = 2x$.

$$D_+D_+f(0) = \liminf_{x\to 0^+} \frac{D_+f(x) - D_+f(0)}{x - 0} = \liminf_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1 > 0$$

$$D_-D^-f(0) = \liminf_{x\to 0^-} \frac{D^-f(x) - D^-f(0)}{x - 0} = \liminf_{x\to 0^-} \frac{2x - 0}{x} = 2 > 0$$

Assim, pela parte 1 do Teorema 2.44 $x_0 = 0$ é um ponto de mínimo local da função f.

No exemplo seguinte não podemos aplicar os Teoremas anteriores.

Exemplo 2.48. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geqslant 0 \\ 1 - x^3 & , x < 0 \end{cases}.$$

Como $\limsup_{x\to 0} f(x) = 1$ e $f(0) = 0$, f não é semicontínua superiormente no ponto $x_0 = 0$. Por isso, não podemos aplicar os Teoremas anteriores apesar de ser fácil constatar que $x_0 = 0$ é um mínimo da função f.

Exemplo 2.49. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geqslant 0 \\ -\dfrac{x}{x+1} & , -1 < x < 0 \end{cases}$$

Como

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x} = 0$$

e

$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\dfrac{x}{x+1}}{x} = -1,$$

f não é diferenciável no ponto $x_0 = 0$. Como $\limsup_{x\to 0} f(x) = 0 \leqslant f(0) = 0$, então f é semicontínua superiormente no ponto $x_0 = 0$. Assim

$$D^+f(0) = f'_d(0) = 0 \geqslant 0 \text{ e } D_-f(0) = f'_e(0) = -1 \leqslant 0.$$

Como f é diferenciável para $x > 0$, logo $D^+f(x) = f'(x) = 2x$ e temos

$$D_+D^+f(0) = \liminf_{x\to 0^+} \frac{D^+f(x) - D^+f(0)}{x - 0} = \liminf_{x\to 0^+} \frac{2x}{x} = 2 > 0$$

Como f é diferenciável para $x < 0$, logo $D_-f(x) = f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$, e temos

$$D_-D_-f(0) = \liminf_{x\to 0^-} \frac{D_-f(x) - D_-f(0)}{x - 0} = \liminf_{x\to 0^-} \frac{-\dfrac{1}{(x+1)^2} + 1}{x} = \liminf_{x\to 0^-} \frac{-1 + x^2 + 2x + 1}{x(x+1)^2} = 2 > 0.$$

Então, pelo Teorema 2.45 f tem mínimo local no ponto $x_0 = 0$.

Exemplo 2.50. Seja $f(x) = \begin{cases} -x^{\frac{3}{2}} & , x \geqslant 0 \\ 2x - x\,\text{sen}(x) & , x < 0 \end{cases}$. Como

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x\sqrt{x}}{x} = 0$$

e
$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x - x\,\text{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} 2 - \text{sen}(x) = 2,$$

f não é diferenciável no ponto $x_0 = 0$. Como $\liminf_{x\to 0} f(x) = 0 \geqslant f(0) = 0$, logo f é semicontínua inferiormente no ponto $x_0 = 0$. Assim

$$D_+f(0) = f'_d(0) = 0 \leqslant 0 \text{ e } D^-f(0) = f'_e(0) = 2 \geqslant 0$$

Para $x > 0$ a função f é diferenciável, logo $D_+f(x) = f'(x) = -\frac{3}{2}\sqrt{x}$ e temos

$$D^+D_+f(0) = \limsup_{x\to 0^+} \frac{D_+f(x) - D_+f(0)}{x-0} = \limsup_{x\to 0^+} \frac{-\frac{3}{2}\sqrt{x}}{x} = -\infty < 0$$

Para $x < 0$ a função f é diferenciável, logo $D^-f(x) = f'(x) = 2 - \text{sen}\,x - x\cos x$ e temos

$$D^-D^-f(0) = \limsup_{x\to 0^-} \frac{D^-f(x) - D^-f(0)}{x-0} = \limsup_{x\to 0^-} \frac{2 - \text{sen}\,x - x\cos x - 2}{x} = -2 < 0$$

Logo, pela parte 2 do Teorema 2.45 f tem máximo local no ponto $x_0 = 0$.

2.4 Teorema de Denjoy-Saks-Young

Apesar de não fazermos a prova, apresentamos o Teorema de Denjoy-Saks-Young que de certa forma classifica as derivadas de Dini de uma função.

Teorema 2.51. *[KK96] Seja f uma função definida no intervalo fechado $[a,b]$. Então para cada $x \in [a,b] \setminus E$, onde E é um conjunto de medida nula, temos um dos seguintes casos:*

1. *as derivadas de Dini no ponto x são finitas e iguais*
2. *$D^+f(x)$ e $D_-f(x)$ são finitas e iguais, $D^-f(x) = +\infty$ e $D_+f(x) = -\infty$*
3. *$D^-f(x)$ e $D_+f(x)$ são finitas e iguais, $D^+f(x) = +\infty$ e $D_-f(x) = -\infty$*
4. *$D^+f(x) = D^-f(x) = +\infty$ e $D_+f(x) = D_-f(x) = -\infty$.*

O Exemplo 2.13 claramente enquadra-se no caso 1 do Teorema pois as derivadas de Dini no ponto $x_0 = 0$ (e nos restantes pontos $x \in \mathbb{R}$) são todas finitas e iguais, sendo por isso a função diferenciável.
No Exemplo 2.11, para os pontos $x_0 \neq 0, 1$ temos o caso 1 do Teorema, mas para $x_0 = 0, 1$ as conclusões referida no Teorema não se enquadram. No entanto, isso não contradiz o Teorema pois o conjunto $X = \{0, 1\}$ tem medida nula.

Exemplo 2.52. Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\,\text{sen}\,\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}.$$

Calculando as respectivas derivadas de Dini no ponto $x_0 = 0$ temos:

$$D^+f(0) = \limsup_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}\,\text{sen}\,\frac{1}{x} - 0}{x-0} = \limsup_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\,\text{sen}\,\frac{1}{x} = +\infty$$

$$D^- f(0) = \limsup_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{x}\,\text{sen}\,\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \limsup_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2}\,\text{sen}\,\frac{1}{x} = +\infty$$

$$D_+ f(0) = \liminf_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}\,\text{sen}\,\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \liminf_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\,\text{sen}\,\frac{1}{x} = -\infty$$

$$D_- f(0) = \liminf_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{x}\,\text{sen}\,\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \liminf_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2}\,\text{sen}\,\frac{1}{x} = -\infty$$

Como podemos observar $D^{\pm} f(0) = +\infty$ e $D_{\pm} f(0) = -\infty$. Assim, com esta função para todos os pontos $x_0 \neq 0$ obtemos o caso 1 do Teorema; e para o ponto $x_0 = 0$ temos o caso 4 do Teorema.

Exemplo 2.53. Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} \left|\frac{1}{x}\,\text{sen}\,\frac{1}{x}\right| & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}.$$

Calculando as derivadas de Dini no ponto $x_0 = 0$ temos:

$$D^+ f(0) = \limsup_{x\to 0^+} \frac{\left|\frac{1}{x}\,\text{sen}\,\frac{1}{x}\right| - 0}{x - 0} = \limsup_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\left|\text{sen}\,\frac{1}{x}\right| = +\infty$$

$$D_- f(0) = \liminf_{x\to 0^-} \frac{\left|\frac{1}{x}\,\text{sen}\,\frac{1}{x}\right| - 0}{x - 0} = \liminf_{x\to 0^-} -\frac{1}{x^2}\left|\text{sen}\,\frac{1}{x}\right| = -\infty$$

Para calcular $D_+ f(0)$ observemos que $\frac{1}{x^2}\left|\text{sen}\,\frac{1}{x}\right| \geqslant 0$, tomando a sucessão $x_n = \frac{1}{n\pi} \to 0^+$ temos que

$$D_+ f(0) = \liminf_{x\to 0^+} \frac{\left|\frac{1}{x}\,\text{sen}\,\frac{1}{x}\right| - 0}{x - 0} = \liminf_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\left|\text{sen}\,\frac{1}{x}\right| = \lim_{n\to +\infty} n^2\pi^2|\,\text{sen}(n\pi)| = 0.$$

Para calcular $D^- f(0)$ observemos que $-\frac{1}{x^2}\left|\text{sen}\,\frac{1}{x}\right| \leqslant 0$, tomando a sucessão $x_n = -\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \to 0^-$ temos que

$$D^- f(0) = \limsup_{x\to 0^-} \frac{\left|\frac{1}{x}\,\text{sen}\,\frac{1}{x}\right| - 0}{x - 0} = \limsup_{x\to 0^-} -\frac{1}{x^2}\left|\text{sen}\,\frac{1}{x}\right| = \lim_{n\to +\infty} -\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^2 \left|\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right| = 0.$$

Assim, com esta função para o ponto $x_0 = 0$ temos o caso 3 do Teorema e para os restantes temos o caso 1 do Teorema.

Capítulo 3

Integração

Neste capítulo estudamos um dos conceitos mais importantes da Matemática: integração. Apresentamos de forma sucinta o processo de integração recorrendo às somas de Riemann e o método de calcular integrais de uma forma simples desenvolvido por Newton e Leibniz chamado de primitivação. Este método mostra-nos que se uma determinada quantidade pode ser calculada através de somas de Riemann, então pode ser calculada com uma certa facilidade fazendo o uso da primitivação que é entendida como o processo de achar uma função conhecendo a sua derivada. O processo de relacionar derivadas e integrais deu origem a um dos mais importantes resultados da Matemática: o Teorema Fundamental do Cálculo. Entretanto, o estudo feito por Riemann apresenta algumas limitações, como por exemplo, a função de Dirichelet que não é integrável à Riemann. As limitações do integral de Riemann podem ser dissipadas mediante o estudo desenvolvido pelo matemático francês Henri Lebesgue que generaliza o integral de Riemann, e que chamamos de integral de Lebesgue. O método para introduzir o estudo do integral de Lebesgue basea-se no conceito de medida.

3.1 O Integral de Riemann

Definição 3.1. Dizemos que $P = \{(x_i', [x_{i-1}, x_i]) : i = 1, 2, \ldots, n\}$ é uma *partição do intervalo* $[a, b]$ se

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b \text{ e } x_i' \in [x_{i-1}, x_i]$$

e definimos a *soma da função f para a partição P* como

$$\sigma(f, P) = f(x_1')(x_1 - x_0) + f(x_2')(x_2 - x_1) + ... + f(x_n')(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i')(x_i - x_{i-1}).$$

Definimos o diâmetro da partição P de $[a, b]$ como $d(P) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{x_i - x_{i-1}\}$, no entanto, existe uma infinidade de partições com o mesmo diâmetro d.

Definição 3.2. Diz-se que f *é integrável à Riemann em* $[a, b]$ se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que, qualquer que seja $\delta > 0$, existe $\epsilon > 0$ de modo que para toda a partição P de $[a, b]$ com diâmetro $d < \epsilon$ tem-se $|\sigma(f, P) - \lambda| < \delta$. Ao número $\lambda = \lim\limits_{d \to 0} \sigma(f, P)$ dá-se o nome de integral de Riemann de f em $[a, b]$ que representamos por

$$\int_a^b f(x)dx,$$

onde f é a função integranda, x a variável de integração, a extremo inferior e b extremo superior do integral.

Uma das condições necessária mas não suficiente para que f seja integrável à Riemann, é a função f ser limitada em $[a, b]$.

Definição 3.3. Considerando f uma função limitada em $[a, b]$, P uma partição de $[a, b]$, $l_i =$

inf $f([x_{i-1}, x_i])$ e $L_i =$ sup $f([x_{i-1}, x_i])$. À soma

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x_i - x_{i-1})$$

chamamos *soma superior de Darboux de* f em $[a,b]$ relativamente à partição P. À soma

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} l_i(x_i - x_{i-1})$$

chamamos *soma inferior de Darboux de* f em $[a,b]$ relativamente à partição P. Definimos os integrais superior e inferior de Darboux da função f em $[a,b]$ que indicamos por:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_P S(f,P) \text{ e } \underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_P s(f,P).$$

Sejam $l = \inf f([a,b])$ e $L = \sup f([a,b])$, como $l_i \leqslant L_i$ e $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = b - a$, concluímos que

$$l(b-a) \leqslant s(f,P) \leqslant S(f,P) \leqslant L(b-a).$$

Teorema 3.4. *[Fig11] Consideremos as partições* $P = \{(x_i', [x_{i-1}, x_i]) : i = 1, 2, \ldots, n\}$. *A função* f *é integrável à Riemann em* $[a,b]$ *se e somente se* f *é limitada em* $[a,b]$ *e* $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$

Poposição 3.5. *[Fig11] Para toda a função* f *limitada temos* $\int_a^b f(x)dx = \lim_{d(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i')(x_i - x_{i-1})$.

No exemplo que se segue usamos a definição e o Teorema 3.4 para estudar o integral de Riemann.

Exemplo 3.6. Consideremos a função $f(x) = x^3$. Vamos provar que a função f é integrável à Riemann no intervalo $[0,1]$ e que $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$. Tomando uma partição com diâmetro $d = \frac{1}{n}$, por exemplo

$$P = \left\{ \left(x_i', \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right] \right) : i = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

no intervalo $[0,1]$ temos que L_i o supremo dos valores no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ é $f(x_i) = {x_i}^3$ e o ínfimo l_i é $f(x_{i-1}) = {x_{i-1}}^3$. Calculando as somas inferior e superior de f relativamente à partição P temos

$$\begin{aligned} s(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n} \right)^3 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 = \frac{1}{n^4} \left(\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - n^3 \right) \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} - \frac{n^3}{n^4} = \frac{(n+1)^2}{4n^2} - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

como $n \to \infty$, $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \frac{1}{4}$. Fazendo o cálculo similar temos que

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \frac{1}{4}.$$

Logo, f é integrável à Riemann em $[0,1]$ e

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}.$$

No próximo exemplo usamos a Proposição 3.5 para estudar o integral de Riemann.

Exemplo 3.7. Dada a função $f(x) = 1 - x^2$ definida em $[0,1]$. Usamos a mesma partição do exemplo anterior e vamos calcular o limite das somas de Riemann da função f.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[1 - \left(\frac{i}{n}\right)^2\right] \frac{1}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} \\
&= 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Exemplo 3.8. Consideremos a função de Dirichlet $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Fazendo uma partição P, facilmente percebemos que $l_i = 0$ e $L_i = 1$, o que implica $s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} l_i(x_i - x_{i-1}) = 0$ e $S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x_i - x_{i-1}) = 1$. Portanto $\underline{\int_a^b} f(x)dx = 0 \neq \overline{\int_a^b} f(x)dx = 1$, logo a função de Dirichlet não é integrável à Riemann em $[a,b]$.

3.2 O Integral de Lebesgue

Nesta secção, apresentamos uma generalização do integral de Riemann - integral de Lebesgue - no sentido em que podemos ampliar o grupo de funções integráveis. O conceito de integral originalmente proposto por Lebesgue baseia-se na noção de medida de um conjunto. O integral de Lebesgue foi introduzido afim de superar as limitações ou insuficiências registadas no integral de Riemann. Este novo conceito de integral permite integrar classes gerais de funções em espaços mais abstratos que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$.

Um dos exemplos da insuficiência do integral de Riemann, é a função de Dirichlet que não é integrável à Riemann como vimos no Exemplo 3.8, mas com a teoria da medida apresentada por Lebesgue, esta função é integrável. Isto porque, o conjunto dos x para os quais a função assume o valor $zero$ é o conjunto dos racionais que é enumerável e tem medida nula.

A definição de integral de Riemann consiste essencialmente em dividir um intervalo em sub-intervalos e multiplicar o valor que a função toma em cada sub-intervalo pelo comprimento:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \sum_{i=1}^{n} f(x_i')(x_i - x_{i-1}).$$

Ao passo que, para o integral de Lebesgue determinamos primeiro qual é a pré-imagem $E_i \subset [a,b]$ de cada valor y_i que a função simples assume, multiplicamos a medida da pré-imagem pelo valor da função e temos:

$$\int_a^b f\mu d\mu = \sum_{i=1}^n y_i \mu(E_i).$$

É claro que esses dois métodos levam ao mesmo valor do integral, quando a função é integrável. Em poucas palavras, podemos dizer que a diferença entre os dois integrais é que, para o integral de Riemann, importa os valores que a função integranda toma, enquanto no integral de Lebesgue importa mais a medida dos subconjuntos no domínio da função integranda. É esta noção de medida que vamos estudar a seguir que nos permitirá generalizar o integral de Riemann. Para adotar o caminho de Lebesgue, precisamos definir uma função que a cada subconjunto de $\mathbb{R}$ associa uma medida: $\mu(A)$.

Vamos agora apresentar o conceito de medida de Lebesgue. Normalmente, estamos acostumados a medir um intervalo $I \in \mathbb{R}$ utilizando a medida de comprimento $l(I) = |b - a|$. Portanto, quando se trata de conjuntos de números reais encontramos certas dificuldades teóricas ao tentar usar essa medida no caso em que não são intervalos. Para superar essas dificuldades construímos o conceito de medida de Lebesgue, que é uma extensão do conceito de comprimento de intervalo para subconjuntos reais mais gerais. A medida de Lebesgue é a restrição da medida exterior à σ-álgebra dos conjuntos μ-mensurável.

Definição 3.9. Dado um conjunto X e $\mathcal{A}$ um conjunto de partes de X, dizemos que $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de X se:

- $X \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$
- Para qualquer $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, com $A_n \in \mathcal{A}$, tivermos $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Definição 3.10. Consideremos X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de X. Chamamos *medida* à função $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ se se verificar o seguinte:

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- se $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é uma família disjunta de conjuntos de $\mathcal{A}$, então

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(E_i).$$

Definição 3.11. Consideremos uma colecção de intervalos abertos $\{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, dizemos que é uma *colecção de cobertura de* $E \subset \mathbb{R}$ se

$$E \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i.$$

Para toda a cobertura de E podemos associar um comprimento $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} l(I_i)$, onde $l(I_i)$ é o comprimento do intervalo I_i.

Definição 3.12. Dado $A \subset \mathbb{R}$, definimos a *medida exterior de Lebesgue de* A como

$$\mathcal{L}^*(A) = \inf\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}} l(I_i), \text{onde } \{I_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ é uma colecção de cobertura de } A\right\}.$$

Definição 3.13. Um conjunto $A \subset X$ é dito *μ-mensurável* se para todo o conjunto $B \subset X$ tivermos

$$\mathcal{L}^*(B) = \mathcal{L}^*(B \cap A) + \mathcal{L}^*(B \setminus A).$$

Definição 3.14. Dado um conjunto μ-mensurável E, à medida exterior de Lebesgue de E chamamos de *medida de Lebesgue* de E e temos $\mu(E) = \mathcal{L}^*(E)$.

Definição 3.15. Dizemos que φ é uma *função simples* se o seu contradomínio for um conjunto finito $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ e $\varphi^{-1}(a_i)$ é um conjunto μ-mensurável para todo o $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definição 3.16. Seja φ uma função simples que assume um conjunto finito de valores $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ definida numa colecção de conjuntos mensuráveis $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$. O *integral de Lebesgue de* φ em $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$ é

$$\int_E \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i)$$

onde $\mu(E_i)$ é a medida de Lebesgue de E_i.

3.2.1 Integração de Funções Mensuráveis

Definição 3.17. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to [-\infty, +\infty]$ uma função, dizemos que f é *função mensurável* se

$$f^{-1}(]a, +\infty]) = \{x \in X : f(x) > a\}$$

é conjunto mensurável para cada $a \in \mathbb{R}$.

Definição 3.18. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, E um subconjunto mensurável de X e $f : X \to \mathbb{R}_0^+$ uma função mensurável, definimos o *integral de Lebesgue de* f em E relativo à medida μ por

$$\int_E f d\mu = \text{sup}\left\{\int_E \varphi d\mu : \varphi \text{ é uma função mensurável simples } 0 \leqslant \varphi \leqslant f\right\}.$$

Dependendo da função f, este integral pode ser infinito, mas terá sempre um valor bem definido pertencente a $[0, +\infty]$.

Uma função mensurável f não negativa diz-se *integrável à Lebesgue* em E se o integral de Lebesgue $\displaystyle\int_E f d\mu$ é finito.
Para funções mensuráveis $f : X \to [-\infty, +\infty]$ com valores positivos e negativos, precisamos analisar a parte positiva e negativa de forma separada.

Definição 3.19. Sejam X um conjunto e $f : X \to [-\infty, +\infty]$ uma função. A parte positiva e negativa de f são funções $f^+, f^- : X \to [-\infty, +\infty]$ definidas por

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & , f(x) \geqslant 0 \\ 0 & , f(x) < 0 \end{cases} \text{ e } f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & , f(x) \leqslant 0 \\ 0 & , f(x) > 0 \end{cases}.$$

Como $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida, se f é função mensurável podemos escrever $f = f^+ - f^-$, onde f^+ e f^- são funções mensuráveis não negativas. Por definição $\int_E f^+ d\mu$ e $\int_E f^- d\mu$ existem para todo conjunto $E \in \mathcal{A}$. Se pelo menos um dos integrais $\int_E f^+ d\mu$ ou $\int_E f^- d\mu$ é finito, definimos o integral de Lebesgue de f em E como

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Se $\int_E f d\mu$ é finito, dizemos que f é integrável à Lebesgue em E.
O conjunto de todas as funções integráveis à Lebesgue é notado por $\mathcal{L}_E(\mu)$. A partir da definição f é integrável à Lebesgue se e somente se $\int_E f^+ d\mu$ e $\int_E f^- d\mu$ são finitos ou seja, $|f| = f^+ + f^-$ é integrável à Lebesgue. Consequentemente, se $f \in \mathcal{L}_E(\mu)$ então $|f| \in \mathcal{L}_E(\mu)$. Esta condição é mais restritiva que o caso da integração à Riemann.
Como o integral de Lebesgue generaliza o de Riemann, podemos dizer que todo o estudo feito para o integral de Lebesgue se aplica ao de Riemann mas o inverso não se aplica. Noutras palavras, o integral de Riemann é um caso particular do integral de Lebesgue.

Exemplo 3.20. Voltemos a considerar a função de Dirichlet $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Tomemos $E_0 = f^{-1}(0) = \{x \in [a, b] : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ e $E_1 = f^{-1}(1) = \{x \in [a, b] : x \in \mathbb{Q}\}$. Como $\mu(E_0) = 0$ e $\mu(E_1) = b - a$, temos

$$\int_a^b f \mu d\mu = 0 \cdot \mu(E_0) + 1 \cdot \mu(E_1) = 0 + 0 = 0,$$

ou seja, concluímos que a função de Dirichelet é integrável à Lebesgue no intervalo $[a, b]$.

3.3 O Teorema Fundamental do Cálculo

O Teorema Fundamental do Cálculo é um dos Teoremas mais importante em Análise Matemática e em Cálculo, pois estabelece uma ligação entre o cálculo diferencial e integral e mostra-nos que a derivação e integração são de certa forma operações inversas.

Lema 3.21. *Se f é contínua em $[a, b]$, então existe $c \in [a, b]$ tal que* $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$.

Prova: Pelo Teorema de Weierstrass, f tem máximo e mínimo absoluto em $[a, b]$, pois é contínua. Indicamos o máximo por M e o mínimo por m. Como

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

para todo o $x \in [a, b]$, logo

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b - a) \Rightarrow m \leqslant \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx \leqslant M.$$

Como f é contínua, pelo Teorema de Bolzano, para todo o $\mu \in [m, M]$ existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \mu$; fazendo $\mu = \dfrac{1}{b - a} \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ temos o pretendido.

□

Teorema 3.22. *[Ste08] Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$, então a função F definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (3.1)$$

é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$ e $F'(x) = f(x)$ para cada $x \in [a, b]$.

Prova: Pela definição de derivada de $F(x)$ temos

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}. \quad (3.2)$$

Substituindo $F(x)$ na equação (3.2) temos

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\displaystyle\int_a^{x+h} f(t) - \int_a^x f(t)dt}{h} dt.$$

Se $h \to 0^+$ temos $F'(x) = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt$ e aplicando o Lema anterior à função f no intervalo $[x, x+h]$, existe c com $x \leqslant c \leqslant x+h$ tal que

$$f(c)h = \int_x^{x+h} f(t)dt \Rightarrow f(c) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Então $F'(x) = \lim_{h \to {}^+0} f(c) = f(x)$.

Se $h \to 0^-$ temos $F'(x) = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt = -\lim_{h \to 0^-} \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_{x+h}^{x} f(t)dt$ e aplicando o Lema anterior à função f no intervalo $[x+h, x]$, existe c com $x+h \leqslant c \leqslant x$ tal que

$$f(c)(-h) = \int_{x+h}^x f(t)dt \Rightarrow f(c) = -\frac{1}{h} \int_{x+h}^x f(t)dt.$$

Então $F'(x) = \lim_{h \to 0^-} f(c) = f(x)$.

$\square$

Teorema 3.23. *[Ste08] Sejam f uma função contínua em $[a, b]$ e F uma primitiva de f, então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Prova: Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$, tomamos $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. Do Teorema 3.22, G é contínua em $[a, b]$, diferenciável em $]a, b[$ e $G'(x) = f(x)$. Sabemos que se F é outra primitiva de f, então, $F(x) = G(x) + K$ para todo o $x \in]a, b[$ com $K \in \mathbb{R}$ constante. Para $x = a$ temos $G(a) = \displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0$, então

$$F(b) - F(a) = G(b) + K - (G(a) + K) = G(b) = \int_a^b f(t)dt.$$

$\square$

Exemplo 3.24. Para calcular $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ com $f(x) = x^2$, começamos por encontrar uma primitiva

$F(x)$ para $f(x) = x^2$. É fácil encontrar $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, pelo Teorema 3.23 temos

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b x^2 dx = F(b) - F(a) = \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

Como a expressão $F(b) - F(a)$ aparece com muita frequência vamos notar por $F(x)\Big|_a^b$. Com essa notação, podemos escrever a fórmula do Teorema Fundamental do Cálculo da seguinte forma:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

3.4 Integral de Henstock-Kurzweil

Da Secção anterior podemos reescrever o Teorema Fundamental do Cálculo 3.3 da seguinte forma:

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a),$$

isto se F for função diferenciável e F' função contínua.
Mas, e se a função F não for diferenciável, mas tiver uma das derivadas de Dini (finita), será que podemos escrever um resultado semelhante?
Além disso, qual seria o integral envolvido nessa nova versão do Teorema Fundamental do Cálculo?
Sim, precisamos definir um novo integral, enquanto que no integral de Riemann usamos somas e no integral de Lebesgue usamos medidas; para este novo integral usamos o conceito de coberturas, que introduzimos em seguida.

Definição 3.25. [HT06] Chamamos *relação de cobertura* β a uma coleção de pares $(x, [s, t])$ tais que $s < t$ e $x \in [s, t]$. Dado o intervalo $[a, b]$ e β uma relação de cobertura de subintervalos de $[a, b]$, dizemos que β é uma *cobertura total de* $[a, b]$ se existir uma função $\epsilon : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ tal que para cada subintervalo $[s, t]$ de $[a, b]$, com $t < x + \epsilon(x)$ e $x - \epsilon(x) < s$ tivermos que $(x, [s, t]) \in \beta$.

O conceito de relação de cobertura está intimamente ligado aos conceitos de derivadas e integrais. Vamos supor que f é uma função diferenciável tal que $f'(x) = g(x)$ em todo o ponto x e para $\delta > 0$. Assim percebemos que uma relação de cobertura

$$\beta = \left\{(x, [s, t]) : g(x) - \delta < \frac{f(t) - f(s)}{t - s} < g(x) + \delta\right\}$$

é uma cobertura total em qualquer intervalo fechado limitado.
A ligação entre uma cobertura total e a noção de integral surge porque toda a cobertura total de um intervalo contém uma partição deste intervalo.

Lema 3.26. *[HT06] (Lema de Cobertura) Toda a cobertura total de um intervalo* $[a, b]$ *contém uma partição de qualquer subintervalo de* $[a, b]$.

Sejam f uma função contínua, $g(x) = D^+f(x)$ finita em $\mathbb{R}$ e $\delta > 0$. Como $D^+f(x) = \limsup\limits_{t \to x^+} \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x}$ então, existe um número positivo $\epsilon(x)$ tal que $\dfrac{f(t) - f(x)}{t - x} < D^+f(x) + \delta$ para todo o $t \in]x, x + \epsilon(x)[$.Como f é contínua, podemos escolher um número positivo $\eta(x, t)$ tal que $\dfrac{f(t) - f(s)}{t - s} <$

$D^+f(x)+\delta$ para todo o $s \in]x-\eta(x,t),x]$, logo $x \in [s,t]$; e construimos a seguinte relação de cobertura

$$\beta = \left\{(x,[s,t]) : \frac{f(t)-f(s)}{t-s} < g(x)+\delta\right\}.$$

Definição 3.27. [HT06] Uma relação de cobertura β é uma *cobertura total à direita* de um intervalo $[a,b]$ se para cada $x \in [a,b]$ existe um número positivo $\epsilon(x)$ com as seguintes propriedades:

1. para todo o t tal que $a < t < a+\epsilon(a)$, o par $(a,[a,t])$ pertence a β;

2. para todo o t tal que $b-\epsilon(b) < s < b$, o par $(b,[s,b])$ pertence β; e

3. para cada $x \in]a,b[$ e t satisfazendo $x < t < x+\epsilon(x)$ existe um número positivo $\eta(x,t)$ tal que $(x,[s,t])$ pertence a β sempre que $\eta(x,t) < s \leqslant x$.

Definição 3.28. [HT06] Uma relação de cobertura β é uma *cobertura adequada à direita* de um intervalo $[a,b]$ se para cada $x \in [a,b]$ existem pontos $l(x)$ e $r(x)$ que satisfaçam $l(x) < x < r(x)$ com as seguintes propriedades:

1. $r(a) \leqslant b$ e $(a,[a,r(a)])$ pertence a β;

2. $l(b) > a$ e todo o par $(b,[s,b])$ para o qual $l(b) < s < b$ pertence a β; e

3. para cada $x \in]a,b[$ é certo que $a < l(x) < r(x) < b$ e $(x,[s,r(x)])$ pertence a β sempre que $l(x) < s \leqslant x$.

Observamos que toda a cobertura total à direita de $[a,b]$ é uma cobertura adequada à direita.

Lema 3.29. *[HT06] Toda a cobertura adequada à direita de um intervalo* $[a,b]$ *contém uma partição de* $[a,b]$.

Observação 3.30. A afirmação do lema anterior é para a existência de pelo menos uma partição do intervalo $[a,b]$, não de partições de todos os subintervalos de $[a,b]$ como no Lema 3.26.

Existem duas características das coberturas totais que permitem o desenvolvimento de uma teoria de integração usando as somas de Riemann: toda a cobertura total de um intervalo contém uma partição daquele intervalo, e a interceção de duas quaisquer coberturas totais é também uma cobertura total.

Definição 3.31. Seja g uma função limitada definida num intervalo $[a,b]$. Então *o integral superior de* g em $[a,b]$ é definido por

$$\overline{\int_a^b} g(x)dx = \inf_{\beta} \sup_{\pi\subset\beta} S(g,\pi),$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições π de $[a,b]$ contidas numa cobertura total β de $[a,b]$ e o ínfimo é tomado sobre todas as coberturas totais β do intervalo $[a,b]$. *O integral inferior de* g em $[a,b]$ é definido por

$$\underline{\int_a^b} g(x)dx = \sup_{\beta} \inf_{\pi\subset\beta} S(g,\pi),$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as partições π de $[a,b]$ contidas numa cobertura total β de $[a,b]$ e o supremo é tomado sobre todas as coberturas totais β do intervalo $[a,b]$.

Definição 3.32. A função g *é integrável no sentido de Henstock-Kurzweil* em $[a,b]$ se os integrais superior e inferior definidos na Definição 3.31 forem finitos e iguais, neste caso o integral é o valor comum de ambos e denotamos por $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$.

Nota 3.33. Não desenvolvemos a teoria mas importa salientar que o integral de Henstock-Kurzweil, é equivalente ao integral de Denjoy-Perron[1], e inclui os integrais de Riemann e Lebesgue como caso especial.

Teorema 3.34. *[HT06] Sejam f uma função contínua à esquerda de todos os pontos de $\mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Se $D^+f(x) \geqslant g(x)$ em todos os pontos x, então*

$$f(b) - f(a) \geqslant \underline{\int_a^b} g(x)dx$$

para cada intervalo $[a,b]$. Se $D_+f(x) \leqslant g(x)$ em todos os pontos x, então

$$f(b) - f(a) \leqslant \overline{\int_a^b} g(x)dx$$

para cada intervalo $[a,b]$.

Prova: Seja β a relação de cobertura tal que:

- $(x,[s,t])$ onde $a \leqslant x < b$ com $\dfrac{f(t)-f(s)}{t-s} > g(x) - \delta$
- $(b,[s,b])$ com $f(b) - f(s) > -\delta + (g(b) - \delta)(b-s)$

como β_1 é uma cobertura total, escolhemos $\epsilon(x)$ positivo para todo o $x \in [a,b]$ tal que:

- $(a,[a,t]) \in \beta$ sempre que $a < t < a + \epsilon(a)$
- $(b,[s,b]) \in \beta$ sempre que $b - \epsilon(b) < s < b$
- $(x,[s,t]) \in \beta$ sempre que $x - \epsilon(x) < s < t < x + \epsilon(x)$.

Por hipótese, para todo o $x \in [a,b[$, $D^+f(x) \geqslant g(x)$, então podemos escolher $r(x)$ tal que:

- $x < r(x) < x + \epsilon(x)$
- $r(x) < b$
- $\dfrac{f(r(x)) - f(x)}{r(x) - x} > g(x) - \delta$ usando a definição de derivada de Dini.

Para $x \in]a,b[$ como por hipótese f é contínua à esquerda de x, então $\lim\limits_{s \to x^-} f(s) = f(x)$, assim podemos escolher $\ell(x)$ tal que:

- $x - \epsilon(x) < \ell(x) < x$
- $\dfrac{f(r(x)) - f(s)}{r(x) - s} > g(x) - \delta$ sempre que $\ell(x) \leqslant s \leqslant x$.

Apenas falta definir $\ell(b)$.
Como f é contínua à esquerda de b, $\lim\limits_{s \to b^-} f(s) = f(b)$, então escolhemos $\ell(b)$ tal que:

[1] O integral de Denjoy é uma generalização do integral de Riemann e de Lebesgue, esta generalização do integral de Lebesgue foi introduzida por A. Denjoy. Este tipo de integral é equivalente ao integral de Perron; daí o nome Denjoy-Perron.

- $b - \epsilon(b) < \ell(b) < b$
- $f(b) - f(s) > -\dfrac{\delta}{2}$ sempre que $\ell(b) \leqslant s \leqslant b$
- $\dfrac{\delta}{2} > (g(b) - \delta)(b - s)$ sempre que $\ell(b) \leqslant s \leqslant b$

então $f(b) - f(s) > -\delta + \dfrac{\delta}{2} > -\delta + (g(b) - \delta)(b - s)$. Logo β é uma cobertura adequada à direita. Assim, β contém uma partição π do intervalo $[a, b]$. Seja

$$\pi = \{({x_i}', [x_{i-1}, x_i]) : i = 1, 2, ..., n\}$$

então

$$\begin{aligned} S(g, \pi) &= \sum_{i=1}^{n} g({x_i}')(x_i - x_{i-1}) \\ &= \delta(b - a) + \sum_{i=1}^{n} g({x_i}')(x_i - x_{i-1}) - \delta(x_i - x_{i-1}) \\ &= \delta(b - a) + \sum_{i=1}^{n} (g({x_i}') - \delta)(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Por construção da colecção sabemos que

$\dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} > g({x_i}') - \delta \Rightarrow (g({x_i}') - \delta)(x_i - x_{i-1}) < f(x_i) - f(x_{i-1})$ para todo o $i = 1, 2, ..., n-1$,

e para $i = n$, temos $x_n = b$ e logo

$$f(x_n) - f(x_{n-1}) > -\delta + (g({x_n}') - \delta)(x_n - x_{n-1}) \Rightarrow (g(x_n)' - \delta)(x_n - x_{n-1}) < f(x_n) - f(x_{n-1}) + \delta.$$

Logo

$$\begin{aligned} S(g, \pi) &\leqslant \delta(b - a) + \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(x_{i-1}) + \delta \\ &= \delta(b - a + 1) + f(b) - f(a) \end{aligned}$$

tomando o ínfimo das partições temos $S(g, \pi) \leqslant f(b) - f(a)$ logo,

$$\underline{\int_a^b} g(x)dx \leqslant f(b) - f(a).$$

A segunda afirmação do Teorema é provado de forma idêntica.

$\square$

Teorema 3.35. *[HT06] Dada f uma função contínua com $D^+ f(x)$ finita, para todo o $x \in \mathbb{R}$, então*

$$\underline{\int_a^b} D^+ f(x)dx \leqslant f(b) - f(a) \leqslant \overline{\int_a^b} D^+ f(x)dx.$$

Prova: Tomando $g(x) = D^+ f(x)$ no Teorema 3.34 temos

$$\underline{\int_a^b} D^+ f(x)dx \leqslant f(b) - f(a).$$

Por outro lado, como $g(x) = D^+f(x) \geqslant D_+f(x)$ também temos

$$\overline{\int_a^b} D^+f(x)dx \geqslant f(b) - f(a)$$

pela segunda parte do Teorema 3.34.

$\square$

Assim, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.36. *[HT06] Seja f uma função contínua com D^+f finita, para todo o $x \in \mathbb{R}$, então*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b D^+f(x)dx$$

para cada intervalo $[a,b]$, com a condição de que D^+f é integrável à Riemann ou Lebesgue ou Henstock-Kurzweil em $[a,b]$.

Exemplo 3.37. Dada a função $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

Vamos encontrar o integral da derivada de Dini desta função em $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$. Comecemos por determinar a derivada de Dini da função f:

$$D^+f(0) = \limsup_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \limsup_{x \to 0^+} \frac{x \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x} = 1.$$

Como f é diferenciável para $x > 0$, então

$$D^+f(x) = f'(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}.$$

Integrando D^+f em $[0, \frac{2}{\pi}]$ vem

$$\int_0^{\frac{2}{\pi}} D^+f(x)dx = \int_0^{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} dx.$$

Do Teorema 3.35, como f é contínua, temos

$$\underline{\int_0^{\frac{2}{\pi}}} D^+f(x)dx \leqslant 0 \leqslant f\left(\frac{2}{\pi}\right) - f(0) \leqslant \overline{\int_0^{\frac{2}{\pi}}} D^+f(x)dx \Rightarrow \underline{\int_0^{\frac{2}{\pi}}} D^+f(x)dx \leqslant 0 \leqslant \overline{\int_0^{\frac{2}{\pi}}} D^+f(x)dx.$$

Bibliografia

[Din92] U. Dini. Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Grösse. Teubner, (translated from italian) edition, 1892. 1, 37

[Fer90] J. Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática. Fundação Calouste Gulbenkian, 1990. 8, 9, 15, 29

[Fig11] Mário Figeira. Fundamentos de Análise Infinitesimal, volume 5 of Textos de Matemática. Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 5ª edition, 2011. 15, 60

[GK92] G. Giorgi and S. Komlósi. Dini derivatives in optimization - part i. Riv. Mat. Sci. Econom. Social., 15(1):3–30, 1992. 42, 43, 45, 46, 49, 51

[GO03] Bernard R. Gelbaum and John M. H. Olmsted. Counterexamples in Analysis. Dover Publications, third edition, 2003. 22

[HT06] John W. Hagood and Brian S. Thomson. Recovering a function from a dini derivative. Amer. Math. Monthly, 113(1):34–46, 2006. 66, 67, 68, 69, 70

[KK96] R. Kannan and C. King Krueger. Advanced Analysis on the Real Line. University of Texas at Arlington, North America, 1996. 37, 44, 47, 56

[Lim06] E. Lages Lima. Análise Real. IMPA, 8ª edition, 2006. 15

[Mac14] Armando Machado. Análise Matemática I. Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa, 2014. 15

[Min13] Ministério da Educação e Ciência. Programa e Metas Curriculares - Matemática A - Ensino Secundário (Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas), 2013. 1, 15

[NC11] Cassio Neri and Marco Cabral. Curso de Análise Real. Instituto de Matemática-UFRJ, second edition, 2011.

[Rud76] W. Rudin. Principles of Mathematical Analysis. McGraw-Hill, third edition, 1976. 8, 15, 25

[Ruz20] S. Ruziewicz. Sur les fonctions qui ont la mème dérivée et dont la differénce n'est pas constante. Fundamenta Mathematicae, 1:148–151, 1920. 49

[Ste08] J. Stewart. Calculus - Early Transcendentals. Thomson Books/Cole, sixth edition, 2008. 15, 65

Índice