



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

Engenharia

Afetação de Unidades Térmicas - Relaxação Lagrangeana

Filipe Manuel Fernandes Pina

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

Engenharia Eletrotécnica e de Computadores

(2º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Sílvio José Pinto Mariano

Covilhã, outubro de 2017

À minha avó e ao meu pai

Agradecimentos

A elaboração desta dissertação de mestrado é o culminar de uma etapa da minha vida, com altos e baixos que requereu dedicação e sacrifício pessoal, mas feita com enorme prazer. Quero agradecer o apoio de todos os que comigo se cruzaram ao longo desta etapa, com os quais aprendi e dei um pouco de mim.

Aos meus pais, avó, irmão e familiares próximos pelo seu amor e apoio dado, que sempre fizeram tudo o que lhes estava ao alcance para que eu pudesse alcançar objetivos e metas com sucesso em todas as áreas da minha vida. Expresso o meu agradecimento especial a todos os que me apoiaram e ajudaram na fase mais difícil da minha vida, família, amigos, e em especial às minhas Primas Isabel e Graça.

Expresso o meu agradecimento ao Professor Doutor Sílvio José Pinto Simões Mariano, responsável como orientador científico. O zelo com que conduziu a minha formação e orientou este trabalho mostra o enorme gosto pela Engenharia pela sua experiência e profundo conhecimento.

Enquanto aluno desta universidade quero também agradecer a todos os docentes que me capacitaram de conhecimentos e ensinamentos ao longo destes anos. Endereço também o meu agradecimento a todo o pessoal não docente desta universidade, em especial aqueles com quem tive o privilégio de lidar, pela sua simpatia e amabilidade que sempre me demonstraram. Agradeço ao pessoal da limpeza da residência VI, toda a ajuda prestada e carinho ao longo destes anos, bem como às funcionárias da cantina de Santo António, por todo o carinho e simpatia.

Endereço o meu agradecimento à Universidade da Beira Interior, por sempre ter conseguido superar e atender os meus pedidos de mobilidade, a fim de me possibilitar uma melhor integração e autonomia, em todos os espaços da mesma.

A todos que me ajudaram a ser a pessoa que sou, que partilharam e partilham o dia a dia comigo, o meu muito obrigado.

Resumo

Esta dissertação visa o problema da afetação ótima de unidades e a sua resolução. Nos dias atuais é impensável pensar numa sociedade sem energia elétrica. Assim, o sistema de energia elétrica tem de atender à demanda em cada hora do dia, respeitando as restrições operativas das unidades de geração, tentando produzir energia ao menor custo possível, tendo em conta as crescentes preocupações ambientais. Os sistemas de energia elétrica são sistemas de grande dimensão e complexidade, dessa forma, necessitam cada vez mais de um planeamento entre as suas centrais, ou seja, uma afetação ótima de unidades. A resolução deste problema de forma direta é de todo inviável, o que permite que este seja um tema de grande investigação, sendo aqui abordado um dos vários métodos de resolução, a Relaxação Lagrangeana. Este método permite a resolução do problema primal de uma forma indireta, apresentando, contudo, algumas dificuldades na obtenção de uma solução factível. São apresentadas essas mesmas dificuldades neste trabalho, quer ao nível da resolução do problema de forma direta, quer de forma indireta. A fim de demonstrar a aplicação do método da relaxação Lagrangeana é apresentado um problema de 5 unidades geradoras para um período de 24 horas, e são retiradas algumas conclusões.

Palavras-chave

Sistemas de energia elétrica; planeamento operacional; afetação ótima de unidades; Relaxação Lagrangeana; atualização dos multiplicadores de Lagrange.

Abstract

This thesis aims the optimal resource scheduling and their resolution. Nowadays it is unthinkable to think of a society without electric energy. The electric power system has to meet the demand at every hour of the day respecting the operating restrictions of the generation units, trying to produce energy at the lowest possible cost, taking into account the growing environmental concerns. The electric power systems are systems of great size and complexity, so they require an increasing planning between their plants, that is, an optimal Unit Commitment. The resolution of this problem in a direct way is totally impracticable, which allows this to be a subject of great research, the method here addressed is one of many possible resolution, the Lagrangian relaxation method. This method allows the resolution of the primal problem in an indirect way, having some difficulties in obtaining a realistic(better) solution. These same difficulties are presented in this work, either at the level of solving the problem directly or indirectly. For demonstrate the application of the Lagrangian relaxation technique, a problem of 5 generating units is presented for a period of 24 hours, and deduce some conclusion.

Keywords

Power systems; power production planning; optimal resource scheduling; Lagrangian Relaxation; Lagrangian multipliers updating.

Índice

Introdução	1
1.1 Enquadramento	2
1.2 Motivação	6
1.3 Organização do texto	7
1.4 Notação.....	8
Problema Primal	11
2.1 Introdução	12
2.2 Formulação	12
2.3 Problema Primal - Ilustração	17
Relaxação Lagrangeana	19
3.1 Função de Lagrange	20
3.1.1 Multiplicadores de Lagrange.....	22
Problema Dual de Lagrange	23
4.1 Problema dual de Lagrange	24
4.2 Formulação do problema Dual de Lagrange	24
4.3 Ilustração da função Dual de Lagrange	27
4.4 Horizonte temporal	28

Salto de Dualidade.....	33
5.1 Salto de dualidade	34
Atualização dos Multiplicadores de Lagrange	39
6.1 Introdução	40
6.2 Método de subgradiente.....	40
Caso de estudo, Resultados e Análise Crítica	43
7.1 Formulação do Problema.....	44
7.2 Resultados Numéricos	49
Conclusão.....	57
8.1 Conclusões principais	58
8.2 Direções de investigação.....	59
Referências Bibliográficas	61

Lista de Figuras

- Figura 5.1:** Gráfico correspondente a solução do problema primal, em D , para a ilustração geométrica do significado de salto de dualidade, e da relação entre a solução do problema primal e a solução do problema dual de Lagrange (figura retirada de [18]). 36
- Figura 7.1:** Ilustração de transição de estados para uma unidade geradora com programação dinâmica. (Figura retirada de [57])..... 46
- Figura 7.2:** Perfil da demanda prevista no período de 24 horas. 51
- Figura 7.3:** Evolução ao longo das iterações do valor da função dual $q(\lambda)$ para 87 iterações. A linha a tracejado representa o valor máximo obtido pela função dual, e a linha a traço contínuo representa o valor da função dual $q(\lambda)$ 52
- Figura 7.4:** Evolução ao longo das iterações do valor da norma média do gradiente $g(p\lambda)/K$, correspondentes aos valores da função dual representados na figura 7.3. 53

Lista de Tabelas

Tabela 7.1: Tabela que representa os parâmetros respeitantes a cada unidade geradora. ...	49
Tabela 7.2: A demanda a cumprir para o período de 24 horas em MW.	49
Tabela 7.3: Planeamento do compromisso das 5 unidades no período de 24 horas.	54
Tabela 7.4: Multiplicador de Lagrange final estimado para cada subintervalo.	54

CAPÍTULO

1

Introdução

Neste capítulo faz-se uma breve análise à problemática da afetação de unidades em sistemas térmicos, expondo alguns dados sobre as fontes de energia que satisfazem a demanda nos dias atuais, bem como a motivação que levou à abordagem deste tema, apresentado algumas ideias gerais sobre o mesmo e as linhas orientadoras desta dissertação.

1.1 Enquadramento

O âmbito desta dissertação enquadra-se no problema designado por afetação de unidades, que é um problema real com o qual todas as empresas produtoras de energia elétrica se deparam diariamente. Este problema possui diversas funções em que o objetivo final é igualar a demanda e, dessa forma, fornecer energia elétrica a todos os consumidores sejam indústria ou domésticos.

Um sistema de produção de energia elétrica é um sistema complexo e de grande dimensão. Este sistema tem início nas diversas centrais produtoras de energia elétrica passando depois pelas diversas redes de distribuição (Muito Alta tensão, Alta tensão, Média tensão, Baixa tensão) até chegar ao consumidor final, formando uma complexa rede toda interligada. Todas as centrais produtoras de energia estão interligadas entre si através das redes de distribuição, cuja operação visa satisfazer o consumo total, ou seja, a demanda de energia e as respetivas reservas de capacidade. Como a energia elétrica não pode ser armazenada em grandes quantidades (apenas pequenas baterias e albufeiras com bombagem), a sua produção tem de ser igual à demanda de energia, ou seja, é consumida ao mesmo ritmo que é produzida. Esta particularidade condiciona de forma absoluta a configuração, o planeamento, a exploração, a organização e a gestão dos sistemas de energia elétrica.

A energia elétrica assume nos dias de hoje suma importância numa sociedade desenvolvida e em constante mudança ávida por energia. A sua demanda varia ao longo do dia e atinge diferentes valores de pico [1]. Para que a energia elétrica esteja sempre disponível na altura em que é requerida, é fundamental que a operação do sistema de produção seja completamente planeada [2]. Assim a afetação ótima de unidades tem um enorme peso no sistema de energia elétrica. Este consiste em decidir qual a política/afetação a ser utilizada relativamente às unidades térmicas e/ou hídricas de modo a minimizar o custo total de operação durante um horizonte temporal definido e satisfazendo todas as restrições [1] [3] [4] [5] [6] [7] [8] [9].

Neste contexto um planeamento hidrotérmico de geração eficiente não só reduz os custos de operação, da enorme quantidade de recursos envolvidos, mas também aumenta a confiança do sistema (mercado) e o seu impacto nas tarifas [10]. As consequências económicas das decisões da afetação de unidades são muito importantes. Uma atitude racional, que propicie um melhor aproveitamento dos recursos disponíveis, pode representar uma vantagem num mercado competitivo para as empresas produtoras de energia elétrica [2].

Assim, podemos definir o planeamento de geração como sendo um problema de afetação de unidades, este é muito importante e um dos mais difíceis de resolver para a engenharia de sistemas de energia [11]. Pois resulta num problema de programação matemática complexo

[12] que tem sido objeto de intensas pesquisas na área de operação e otimização de sistemas de energia elétrica ao longo das últimas décadas [13] [14] [15] [16]. A afetação de unidades é um problema de natureza combinatória, não linear, não convexo de larga escala envolvendo frequentemente milhares de decisões 0-1, bem como variáveis contínuas, o que leva ao desenvolvimento de métodos matemáticos rigorosos capazes de resolver o problema no seu tamanho real. O problema da afetação de unidades decide a política de planeamento das unidades térmicas de tal forma que o custo total (custo de operação + custo de arranque) seja mínimo durante o intervalo de planeamento. Além de alcançar o custo mínimo de produção total, o planeamento de produção precisa ter em conta uma série de restrições operacionais que reduzem a liberdade de escolha de ligar ou desligar uma unidade de geração. As restrições a satisfazer são principalmente a restrição de balanço de energia, restrição de reserva girante, tempo mínimo ligado, tempo mínimo desligado, limites da capacidade de geração, restrições de grupo, restrições de água, etc [17].

O planeamento operacional pode compreender um horizonte temporal que no mínimo compreende um período de horas, enquanto no seu máximo compreende um período de várias décadas. No horizonte temporal mais longo (anos), o planeamento centra-se na construção de novas centrais elétricas, na modernização ou substituição de outras e na manutenção, de forma a satisfazer o consumo crescente ao longo dos anos. Este planeamento pretende minimizar os custos operacionais relacionados com a segurança do serviço e o investimento esperado [18].

Num horizonte temporal longo (meses), o planeamento centra-se na manutenção e nos contratos de transação de energia, por forma a minimizar o custo de operação, tendo em conta restrições que envolvam a segurança do serviço [18].

No horizonte temporal mais curto (tipicamente um período de uma semana), o planeamento visa minimizar o custo de operação esperado de um conjunto de recursos disponíveis, para um período de afetação predefinido, por forma a satisfazer os requisitos de geração e de capacidade em cada hora, observando restrições cumulativas de um ou mais recursos durante o período de afetação, bem como restrições físicas e operacionais de cada recurso - afetação ótima de unidades. Um recurso pode compreender uma unidade, uma central ou diversas centrais [18].

O problema de afetação de unidades, quer pela diversidade de recursos, quer pela dimensão do próprio sistema, como já foi referido, apresenta características que conduzem a um problema complexo de programação matemática de difícil resolução. Este problema envolve milhares de decisões de natureza discreta e contínua, onde todas as unidades disponíveis para produzir energia são consideradas, e a sua combinação ótima das unidades que vão operar é então determinada [18].

No horizonte temporal mais curto (minutos), o planeamento consiste na determinação do trânsito ótimo de potências por forma a minimizar o custo de operação em cada instante [18].

Esta dissertação irá abordar a problemática do planeamento operacional de curto prazo, mais especificamente a afetação de unidades num período temporal até uma semana.

Analisando o Sistema Electroprodutor Português ou Sistema Elétrico Nacional (SEN), este tem sofrido alterações (desde as fontes de potência, distribuição e comercialização) ao longo dos anos, no sentido de introduzir concorrência neste sector, desde a sua criação no sec. XIX até aos dias de hoje. Pois tem evoluído de um sector que era tradicionalmente considerado como um monopólio natural, que se encontrava organizado em termos de concessões atribuídas a entidades privadas e aos municípios até 1975. A partir de 1975 ocorreu a sua nacionalização e a integração vertical do sector com a criação da Energias de Portugal (EDP), uma empresa publica [19], que exercia as atividades de produção, transporte, distribuição e comercialização de energia elétrica.

Com a liberalização do sector elétrico, onde o objetivo é o de baixar o preço ao consumidor, a EDP acabou por ser reestruturada, sendo divididas as suas várias componentes. Alguns setores foram concessionados pelo estado, enquanto que outros foram abertos à concorrência [19]. O transporte e a distribuição continuam a ser tratados como monopólios naturais (pois não faz sentido a duplicação de serviços), a desverticalização situa-se nos extremos da rede, ou seja, na produção e na comercialização de eletricidade, desta forma inteiramente abertas à concorrência, estando sujeitas à obtenção de licenças e aprovações necessárias [18] [20]. Estas atividades são reguladas por uma entidade independente - Entidade Reguladora do Setor Elétrico (ERSE).

Em particular, no que diz respeito à produção de energia elétrica, no ano de 2016 a produção renovável abasteceu 57% do consumo nacional, tendo havido um acréscimo em relação a 2015 de 10 %. A produção hidráulica abasteceu 28 % do consumo, a eólica 22 %, a biomassa 5 %, e a fotovoltaica 1,4%. Em relação à produção não renovável, o carvão abasteceu 21 % do consumo e o gás natural, ciclo combinado e cogeração, igualmente 21 % e outras 1 %. Sendo o saldo importador de 0 %. Analisando dados disponibilizados pela REN, verifica-se que nos últimos anos o saldo importador vem diminuindo, sendo já neste momento o inverso. Portugal exporta energia elétrica e verifica-se também que tem havido uma aposta crescente nas energias renováveis como a solar e eólica, bem como novas centrais hídricas com o objetivo de reduzir a produção a partir de não renováveis. Portugal tem uma capacidade instalada de 19518 MW divididas entre renováveis e não renováveis [21].

Comparando com dados de 1999, por exemplo, em que 70 % era produção não renovável e apenas 30 % renovável [18], assistimos então a uma grande aposta nas energias renováveis na última década e meia, como vantagem as emissões de gases com efeito estufa foram reduzidas respeitando o cumprimento das metas assumidas no protocolo de Quioto.

A partir destes dados verifica-se que a procura de energia elétrica é satisfeita com base em recursos térmicos e hídricos para além de uma produção em regime especial (cogeração, mini-

hídrica, solar e eólica). Enquanto que a produção em regime especial tem de ser sempre despachada ao abrigo de legislação própria, a grande hídrica e a térmica necessitam de planeamento operacional, assim se o seu planeamento for otimizado poderemos melhorar a gestão dos recursos tanto térmicos como hídricos, este último um recurso que varia de ano para ano (está dependente da pluviosidade). Esta dissertação visa apenas os recursos térmicos.

Programação Matemática - Métodos de solução

A aplicação de modelos de otimização para sistemas de energia elétrica está marcada pelo constante desenvolvimento de novos algoritmos, tais como métodos exatos, meta heurísticos e estratégias híbridas [13]. No que se refere aos métodos que podem resolver o problema de afetação ótima de unidades de curto prazo, estes podem ser divididos em métodos heurísticos e métodos de programação matemática [17] [22].

Na literatura encontramos referência a diversas metodologias de resolução do problema de planeamento de curto prazo. Nos anos mais recentes observámos uma crescente aplicação de métodos evolutivos (estes baseiam-se no comportamento da natureza) e métodos de inteligência artificial em adição aos métodos tradicionais. Assim como métodos evolutivos encontramos o algoritmo de busca do cuco (CSA) [23], simulated annealing (SA) [24] [25] [26], programação evolucionária (EP) [27], algoritmos Genéticos (GA) [7], Evolução diferencial (DE) [8] [28] [29], Particle Swarm Optimization (PSO) [9] [30], Improved Bacterial Foraging Algorithm (IBFA) [5].

Estes métodos tentam encontrar uma solução próxima do ótimo para um problema complexo, contudo estes métodos de pesquisa meta-heurísticos são baseados numa população para procurar uma solução ótima, levando a despender bastante tempo em problemas de larga escala. Mais, estes métodos necessitam ser executados diversas vezes para obter uma solução ótima que não é apropriada para a obtenção de várias soluções não dominadas para um problema de otimização multiobjetivo [31].

Métodos baseados em inteligência artificial, como por exemplo redes neuronais [32], têm sido implementadas nos anos mais recentes.

Os métodos evolutivos e de inteligência artificial requerem um esforço computacional significativo para resolver o problema, para um horizonte temporal de uma semana, discretizado em intervalos horários. Além disso, devido à heurística usada no processo de pesquisa, apenas podem ser obtidas soluções subótimas [33].

Como procedimentos clássicos encontramos métodos tais como a Decomposição de Benders [34], Relaxação Lagrangeana [12] [16] [17] [35] [36], programação dinâmica (PD), Programação

não linear [37], Augmented Lagrangian [38] [39], programação linear inteira mista (PLIM) [40], programação não linear [33].

Encontramos ainda referência a métodos híbridos, ou seja, uma complementaridade entre métodos evolutivos e métodos clássicos. Tais como Hybrid Enhanced Lagrangian Relaxation and Quadratic Programming (Hybrid LRQP) [41], Coevolutionary Algorithm based on Lagrangian Method [42], Augmented Lagrange Hopfield Network [31], Krill Herd Algorithm [43].

Devido à presença de múltiplos conjuntos de restrições, as técnicas de decomposição aparecem como técnicas naturais a ter em consideração para resolver este problema [12] [14].

1.2 Motivação

O motivo para abordar este tema relaciona-se com a importância que a energia elétrica representa nos dias atuais. Visto que a energia elétrica está no cerne da sociedade moderna, sendo uma componente essencial no nosso estilo de vida e cada vez mais um dos bens essenciais à multiplicidade das tarefas constituintes da atividade humana [2] [44]. Desta forma a energia elétrica tornou-se imprescindível e com uma infinidade de usos, devido à sua versatilidade, fácil controlo e imediata utilização. O funcionamento das sociedades desenvolvidas e a qualidade de vida das mesmas dependem significativamente da disponibilidade da energia elétrica, que se assumiu como um bem de consumo essencial [45].

Sendo a demanda executada principalmente com recursos hídricos, térmicos [33], eólicos e um crescente de cogeração e de energia fotovoltaica, o valor de energia fotovoltaica no contexto português é ainda residual. Tanto os recursos eólicos, fotovoltaicos, cogeração e outros fazem parte do regime de produção especial (PRE) que corresponde à produção de eletricidade a partir de fontes endógenas e renováveis (exceto grandes centrais hidroelétricas), esta produção é injetada diretamente nas redes de distribuição de baixa, média e alta tensão em função da tecnologia e de produção associada [19] ao abrigo de legislação própria. Desta forma só os recursos térmicos e hídricos requerem mais atenção do ponto de vista de planeamento operacional.

Os recursos hídricos, particularmente fio de água são considerados por fornecer uma opção de energia limpa [33] [46]. Outra das vantagens das fontes de energia hidroelétrica, é ser uma fonte eficiente de energia, resposta rápida na ativação, desativação e ajustamento da produção numa ampla faixa de operação [47].

Os recursos térmicos particularmente baseados em combustíveis fósseis são considerados por fornecer uma opção de energia ambientalmente agressiva [33]. Este tipo de combustíveis liberta gases, tais como dióxido de carbono (CO_2), óxido de Nitrogénio (NO_x) e óxido de enxofre (SO_x) [47]. Mesmo assim, ainda hoje uma opção necessária [33]. Pois a conversão de energia de combustíveis fósseis em energia elétrica é a espinha dorsal do fornecimento de eletricidade em todo o mundo. Os combustíveis fósseis fornecem uma fonte de energia confiável e acessível. Sendo uma tecnologia bem desenvolvida e disponível praticamente em todos os países do mundo [48].

Assim a promoção de melhorias de eficiência na exploração dos recursos térmicos é cada vez mais importante, diminuindo assim as emissões de gases de efeito estufa que são os maiores contribuintes da mudança climática.

Esta dissertação visa abordar o problema da afetação de unidades produtoras de energia elétrica e, dessa forma, contribuir para melhorar a eficiência da exploração dos recursos naturais que, mediante a sua transformação, nos permitem obter energia elétrica.

Um outro argumento consiste no facto de a afetação de unidades fazer parte integrante das empresas do setor elétrico, não somente no que diz respeito à necessidade de recursos humanos especializados, mas também pelo valor económico que pode representar a otimização dos recursos energéticos.

1.3 Organização do texto

A dissertação encontra-se organizada em 8 capítulos, sendo o capítulo 2 destinado à formulação do problema, enquanto os restantes capítulos se destinam à descrição de aspetos da resolução do problema. O último capítulo destina-se às conclusões da dissertação. Seguindo-se uma breve descrição acerca do conteúdo de cada capítulo.

O capítulo 2 trata o problema da afetação de unidades para um sistema térmico de energia elétrica de curto prazo. É descrita a formulação do problema, um problema matemático de otimização complexo, que nos remete para uma função objetivo (problema primal) que engloba o custo de operação do sistema no período de afetação, assim como todas as restrições impostas pelo sistema.

O capítulo 3 trata a relaxação Lagrangeana, que conjuntamente com técnicas de otimização dual apresenta formas de superar as dificuldades encontradas na resolução do problema primal.

Apresentando as vantagens deste método para a solução do problema, assim como as suas dificuldades.

O capítulo 4 trata o problema dual de Lagrange, este permite encontrar a solução do problema primal de forma indireta. A resolução do problema primal resulta do enfraquecimento do mesmo recorrendo à relaxação Lagrangeana, ou seja, penalizando as restrições. Apresenta-se uma introdução geométrica da resolução do problema primal.

O capítulo 5 trata o salto de dualidade, que é a relação existente entre a solução do problema primal e a solução do problema dual de Lagrange. É apresentada a interpretação geométrica do salto de dualidade.

O capítulo 6 trata a atualização dos multiplicadores de Lagrange. A atualização dos multiplicadores de Lagrange é baseada no método de subgradiente, estes visam a resolução do problema de afetação ótima de unidades.

O capítulo 7 apresenta um exemplo de afetação de 5 unidades com planeamento de 24 horas, expondo uma análise aos resultados obtidos. Aplicando o método da relaxação Lagrangeana exposto nos capítulos anteriores.

O capítulo 8 apresenta as conclusões a retirar sobre esta temática, após a análise dos capítulos anteriores.

1.4 Notação

As expressões, figuras e tabelas apresentadas ao longo deste texto, são identificadas de forma sequencial ao longo de cada capítulo correspondente. Os problemas apresentados são identificados por letra maiúscula dentro de parênteses curvos (...). A identificação de expressões é apresentada dentro de parênteses curvos (...), enquanto as referências bibliográficas são apresentadas dentro de parênteses retos [].

Em seguida é apresentada uma lista abreviada de definição dos símbolos usados ao longo deste texto. Os símbolos usados vão sendo definidos aquando da sua introdução ao longo do texto, para que a lista de símbolos não seja exaustiva.

Lista de funções

- C_{ik} : função de custo associada com a afetação do recurso i na hora K
- R_{mi} : função de contribuição de capacidade associada com o recurso i para a reserva de capacidade do sistema tipo- m
- H_{ni} : função que descreve a contribuição do recurso i para a restrição cumulativa tipo- n
- A_{ik} : função de estado associada a cada recurso i na hora k
- P_{ik} : função de despacho
- c : função de custo ótimo
- \mathcal{L} : função de Lagrange
- q : função dual de Lagrange

Lista de conjuntos

- \mathcal{H}_n : conjunto de todos os recursos com restrições cumulativas tipo- m
- \mathcal{U}_{ik} : universo das variáveis de controlo (decisões) admissíveis para o recurso i na hora k
- \mathcal{D} : Conjunto dos valores admissíveis da demanda
- Ω : Conjunto dos vetores admissíveis para o vetor das variáveis de estado

Lista de Escalares e Vetores

- K : número total de horas
- I : número de recursos
- x_{ik} : estado do recurso i na hora k
- p_{ik} : potência entregue pelo recurso i na hora k
- u_{ik} : variável de controlo (decisão) para o recurso i na hora k
- D_k : demanda esperada na hora k

- R_{mk}^{req} : reserva de capacidade do sistema tipo- m na hora k
- M : número do tipo de reservas consideradas
- H_n^{req} : limite inferior da restrição cumulativa tipo- n
- N : número de restrições cumulativas
- X_i^0 : estado inicial do recurso i
- X_i^k : estado final do recurso i
- g : vetor do subgradiente da função dual
- d : vetor da demanda (ou carga) definido por $d = [d_1 \ d_2 \ \dots \ d_k]'$
- c^* : solução do problema primal
- λ : vetor das variáveis duais associadas à restrição de carga
- μ : vetor das variáveis duais associadas às restrições de capacidade
- γ : vetor das variáveis duais associadas às restrições cumulativas
- q^* : solução do problema dual de Lagrange
- ξ : salto de dualidade
- s : escalar positivo que define o valor do passo

Lista de símbolos identificadores de problemas

- (P) Problema Primal (afetação ótima de unidades)
- (\mathcal{L}) Problema de otimização (minimização) da função de Lagrange
- (L) Problema dual de Lagrange

CAPÍTULO

2

Problema Primal

Neste capítulo é descrito o modelo matemático tido em conta para o planeamento operacional térmico de curto prazo. Analisando a base matemática envolvida na resolução do problema de afetação de unidades, assim como as devidas restrições a cada grupo gerador mediante o tipo de recurso, bem como o modelo da função de custo (função objetivo) adequada à resolução do problema de otimização com vista a obtenção do melhor resultado.

2.1 Introdução

Como descrito no capítulo anterior, a formulação do problema é aqui exposta. A formulação proposta para este problema tem como bases as referências [18] [22], sendo a referência [22] uma das mais importantes no meio da investigação, contando com inúmeras citações.

O problema da afetação de unidades pode ser entendido como a tarefa de estabelecer um cronograma de operações factíveis, para cada unidade disponível no sistema de energia elétrica, obtendo o menor custo de produção. Num período de tempo predefinido de um a sete dias, ou seja, uma semana, por forma a satisfazer o diagrama de carga (demanda) esperado e outras condições impostas pelo sistema. Tipicamente este horizonte temporal é estabelecido com uma periodicidade de uma hora.

Este problema é tratado como sendo um problema determinístico, incluindo também grandezas estocásticas, tais como a demanda e as afluências aos reservatórios, os valores a incluir são os esperados.

2.2 Formulação

A formulação matemática para abordar o problema da afetação de unidades baseia-se na formulação citada em [18] [22]. Assim dado um conjunto de recursos, tenta-se minimizar o custo de operação num horizonte temporal predefinido, sujeito a (1) geração requerida pela demanda prevista em cada hora, (2) capacidade requerida pelos critérios de operação em cada hora, (3) restrições cumulativas de um ou mais recursos durante o horizonte temporal predefinido e (4) restrições físicas e de operação associadas a cada um dos recursos disponíveis.

Em termos matemáticos o problema Primal (P) pode ser definido da seguinte forma:

$$(P) \quad \underset{u}{Min} \quad \sum_{k=1}^k \sum_{i=1}^I C_{ik} (x_{i,k-1}, p_{ik}, u_{ik}) \quad (2.1)$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^I p_{ik} = D_k \quad k = 1, \dots, K \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^I R_{mi}(x_{ik}, p_{ik}) \geq R_{mk}^{req} \quad m = 1, \dots, M \quad e \quad k = 1, \dots, K \quad (2.3)$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{i \in \mathcal{H}_n} H_{ni}(x_{ik}, p_{ik}, u_{ik}) \geq H_n^{req} \quad n = 1, \dots, N \quad (2.4)$$

Em que

$$(x_{ik}, p_{ik}) = A_{ik}(x_{i,k-1}, u_{ik}) \quad i = 1, \dots, I \quad e \quad k = 1, \dots, K \quad (2.5)$$

Com

$$u_{ik} \in \mathcal{U}_{ik} \quad x_{i0} \in X_i^0 \quad x_{ik} \in X_i^K \quad (2.6)$$

$$i = 1, \dots, I \quad e \quad k = 1, \dots, K$$

Nesta formulação os símbolos têm o seguinte significado:

- K : número total de horas
- I : número de recursos
- C_{ik} : função de custo associada com a afetação do recurso i na hora k
- x_{ik} : estado do recurso i na hora k
- P_{ik} : potência entregue pelo recurso i na hora k
- u_{ik} : variável de controlo (decisão) para o recurso i na hora k
- D_k : demanda esperada na hora k

- R_{mi} : função de contribuição de capacidade associada com o recurso i para a reserva de capacidade do sistema tipo- m
- R_{mk}^{req} : reserva de capacidade do sistema tipo- m na hora k
- M : número do tipo de reservas consideradas
- \mathcal{H}_n : conjunto de todos os recursos com restrições cumulativas tipo- n
- H_{ni} : função que descreve a contribuição do recurso i para a restrição cumulativa tipo- n
- H_n^{req} : limite inferior da restrição cumulativa tipo- n
- N : número de restrições cumulativas
- A_{ik} : função de estado associada a cada recurso i na hora k
- \mathcal{U}_{ik} : universo das variáveis de controlo (decisões) admissíveis para o recurso i na hora k
- X_i^0 : estado inicial do recurso i
- X_i^k : estado final do recurso i

As expressões (2.1) a (2.6) são analisadas da seguinte forma:

A expressão (2.1) representa o custo total de operação para todos os recursos em todas as horas do período de planeamento previamente definido. O primeiro somatório incide sobre o horizonte temporal predefinido, enquanto o segundo somatório incide sobre todas as unidades de geração disponíveis.

$$\sum_{k=1}^k \sum_{i=1}^I C_{ik} (x_{i,k-1}, p_{ik}, u_{ik})$$

O duplo somatório resulta da soma de termos independentes e representa a função de custo total que podemos designar por função objetivo. Esta função avalia o desempenho de cada decisão válida sendo não decrescente e separável tanto em relação aos recursos bem como ao tempo de afetação.

A função de custo $C_{ik} (x_{i,k-1}, p_{ik}, u_{ik})$ expressa o custo relativamente à afetação da unidade i na hora k . Esta função avalia a decisão tomada em cada estado, ou seja, existe um custo de operação associado à transição de estado (de $x_{i,k-1}$ para x_{ik}), que fornece a potência p_{ik} , por ação do controlo u_{ik} , para cada unidade i na hora k (para um recurso, o custo de operação

depende do estado na hora anterior e na atual). Esta função de custo inclui custos operacionais, tais como, custos de combustível, custos de manutenção e custos de penalização das restrições associadas ao modelo matemático.

A expressão 2.2 representa toda a geração solicitada pelo sistema em cada hora (diagrama de carga esperado, ou seja, a demanda). Pode ser considerada como restrição coletiva, pois todos os recursos são chamados a contribuir, afim de satisfazer esta restrição.

A expressão 2.3 representa todas as restrições de capacidade do sistema em cada hora. Também estas restrições são coletivas, pois todos os recursos são chamados a contribuir para a satisfação desta restrição. Esta expressão representa um somatório sobre todos os recursos, e caso um dos recursos não contribua para a reserva de capacidade, o termo da função correspondente à cooperação desse recurso será nulo. Em regra, são considerados dois tipos de reserva ($M=2$), a reserva operacional ou estática e a reserva girante. A reserva operacional ou estática é definida como sendo o somatório da capacidade que possa vir a ser afetada nos 10 minutos seguintes à solicitação de afetação, em cada hora. A reserva girante, pode ser definida como sendo a diferença entre o somatório, sobre todos os recursos, da capacidade ainda disponível e o somatório da capacidade afetada em cada hora.

A expressão 2.4 representa todas as restrições cumulativas. São restrições que podem ser impostas sobre um determinado grupo de unidades durante o período de afetação, ou seja, são restrições coletivas ao subconjunto dos recursos a elas ligados e possuem um carácter cumulativo durante o período de afetação previamente definido. Um exemplo de restrição deste género é a limitação da quantidade de combustível disponibilizado numa central térmica. Pois um certo número de unidades térmicas possui um limite máximo no que diz respeito ao consumo de combustível e no número de arranques máximo especificado para um período de afetação predefinido. Esta restrição também pode ser aplicada numa única unidade de geração.

A expressão 2.5 representa a equação de estado para cada recurso. Esta equação permite obter o estado de cada recurso x_{ik} e a sua contribuição para satisfazer a demanda p_{ik} , qualquer que seja a decisão u_{ik} em cada hora. A função de despacho P_{ik} faz a correspondência que associa à variável de controlo u_{ik} e de estado x_{ik} resultante, o valor da variável p_{ik} em todo o seu domínio: $p_{ik} = P_{ik}(x_{ik}, u_{ik})$. Esta equação pode variar no tempo, de forma a englobar o carácter dinâmico de alguns recursos, imposto por restrições de estado variantes no tempo. Os tipos de recursos disponíveis, podem ser agrupados em categorias, mediante as suas restrições particulares, que descrevem o seu comportamento. As diferentes categorias de recursos são afetadas mediante a utilização dos métodos computacionais de otimização mais adequados por forma a obter a máxima eficiência computacional. Segue-se a identificação de algumas categorias.

Categoria 1. Os recursos que se incluem nesta categoria são conhecidos por não possuírem qualquer restrição de estado entre a hora $k-1$ e a hora k . Estes recursos não possuem restrições

de caráter dinâmico, ou seja, não dependem de decisões tomadas em horas anteriores, e os recursos são controláveis qualquer que seja o seu estado. Os recursos pertencentes a esta categoria possuem um custo de arranque constante, bem como tempos de arranque curtos (tempos menores que uma hora). São exemplos de unidades geradores pertencentes a esta categoria, turbinas a gás.

Categoria 2. Os recursos pertencentes a esta categoria caracterizam-se por possuírem custos de arranque dependentes do estado em que se encontrem e pela existência de restrições de caráter dinâmico durante o período de afetação. Possuem restrições à transição de estado entre a hora $k-1$ e a hora k , ou seja, uma vez ligada ou desligada, a unidade permanece afetada ou desafetada por períodos mínimos. Estes recursos possuem memória, ou seja, as decisões tomadas anteriormente influenciam as decisões a tomar posteriormente. Nesta categoria inserem-se as centrais térmicas com turbinas a vapor, devido às restrições termodinâmicas e de operação.

Categoria 3. Esta categoria inclui recursos cujo consumo de combustíveis seja restrito. Como exemplo de unidades pertencentes a esta categoria temos centrais térmicas que possuam um valor preestabelecido para a quantidade de combustível a consumir durante o período de afetação e as centrais hídricas com bombagem, que além das suas restrições operacionais, possuem restrições no volume de água bombada durante o período de afetação. Para definir estes recursos é introduzida uma nova variável de estado que define a quantidade de combustível/água utilizada ou disponível em cada hora k , impondo como condição de estado um valor final na última hora que conduza à satisfação do valor preestabelecido para a quantidade de combustível/água a consumir.

O problema (P) é definido como sendo o problema Primal. Apesar da função objetivo ser uma função separável em recursos e horas, este problema, tal como é formulado e devido às restrições coletivas, não permite que a função seja separável, fazendo com que este problema de minimização seja transformado num problema de grande complexidade. Em resumo, em termos do problema de otimização, conclui-se que o valor ótimo global não pode ser determinado pela soma dos diversos valores obtidos através da otimização em separado de cada recurso. No que respeita ao horizonte temporal, a sua separação também não é viável, devido à dinâmica que alguns recursos apresentam. Assim verificando a análise agora exposta, estamos na presença de um problema de grande dimensão e complexidade, para o qual uma abordagem direta se torna praticamente impossível, ainda, nos dias de hoje.

O problema enunciado como problema primal recorre a técnicas convencionais de otimização não linear, é um problema de enorme complexidade e que envolve programação inteira mista de larga escala. O que exige requisitos computacionais que aumentam exponencialmente com o número de recursos e com o número de estádios considerados no horizonte temporal.

Atualmente recorre-se a métodos baseados na resolução do problema dual, evitando assim, a resolução do problema primal de forma direta.

Em sistemas de pequena dimensão é possível encontrar uma solução para o problema primal. Recorrendo a essa solução poderemos verificar a complexidade da função de custo do problema primal e as limitações e vantagens da utilização da relaxação Lagrangeana na resolução deste problema.

No subcapítulo 2.3 caracteriza-se a solução do problema primal, recorrendo a ilustrações. Pretende-se com estas ilustrações realçar as qualidades e compreender as limitações, que advêm da aplicação do problema primal.

2.3 Problema Primal - Ilustração

Para os exemplos considerados, por simplicidade e com objetivo de tornar perceptível a ilustração do problema, evidenciando o mais importante do ponto de vista qualitativo, consideramos a única condição do sistema a demanda. A solução do problema primal, tendo em conta apenas a restrição da demanda, é conseguida recorrendo à programação dinâmica.

Considerando 3 recursos ($l=3$), onde cada recurso se caracteriza por possuir uma função de custo quadrática, um custo de arranque, uma restrição de potência mínima e potência máxima que cada um dos recursos consegue fornecer. Para este contexto, o número de configurações possíveis, na afetação de unidades será de 2^l . Para que o número de configurações aumente de forma exponencial, basta que a modelação dos recursos seja de maior complexidade, ou seja considerar um tempo mínimo ligado/desligado.

Os valores (D) existentes para a demanda resultam da seguinte condição:

$$D \in \{0\} \cup d \tag{2.7}$$

Em que

$$d = [p_1^{min}, p_1^{max}] \cup \dots \cup [p_l^{min}, p_l^{max}] \cup \left[\sum_{i=1}^2 p_i^{min}, \sum_{i=1}^2 p_i^{max} \right] \cup \dots \cup \left[\sum_{i=1}^l p_i^{min}, \sum_{i=1}^l p_i^{max} \right]$$

Analisando a condição conclui-se que esta obriga a que pelo menos uma das configurações possíveis para a afetação de unidades se encontre dentro dos limites da operação. É normal que no conjunto de decisões admissíveis, algumas configurações para a afetação de unidades

sejam impossíveis. Para cada uma das configurações admissíveis determina-se o nível de produção ótimo para cada unidade, e de todas as configurações admissíveis é escolhida a que tiver menor custo de operação. Para as seguintes ilustrações considere-se a seguinte função de custo ótimo.

$$c: \Omega^m \rightarrow R \text{ com } \begin{cases} m = 1 \text{ se } k = 1 \\ m = 2 \text{ se } k = 2 \end{cases} \quad (2.8)$$

A solução do problema primal (P) é representada na função de custo ótimo (2.8), em que existe apenas uma restrição (restrição de satisfação da demanda), sendo o horizonte temporal limitado a uma e a duas horas respectivamente. Nestes horizontes temporais de uma e duas horas é possível representar graficamente a função de custo ótimo. Se o espaço temporal for aumentado deixa de ser possível representar graficamente a função de custo ótimo.

Fazendo uma análise sobre os horizontes temporais de uma e duas horas poderemos retirar algumas ilações. A função de custo ótimo, que resulta da resolução do problema primal (P), para o horizonte temporal de uma hora é uma função $c: \Omega \rightarrow R$ com $d \in \Omega \equiv D$, ou seja, uma dimensão, enquanto a função para o horizonte temporal e duas horas é uma função $c: \Omega^2 \rightarrow R^2$ com $d \in \Omega^2 \equiv D^2$, ou seja, duas dimensões. No horizonte temporal de uma hora ou no horizonte de duas horas ou superior para cada restrição de carga, isto é para cada valor de carga d_1 , na hora um e d_2 , na hora dois, ou d_k , na hora k , obtém-se um valor para a função de custo ótimo, ao qual corresponde uma afetação ótima de unidades. As unidades têm de entregar em cada uma das duas horas um valor de potência, d_1 e d_2 , ao melhor preço possível (menor custo) c possível. Esse valor é obtido da configuração de menor custo (afetação ótima de unidades). O espaço de decisão para o horizonte temporal de uma hora (uma dimensão) é um problema de fácil ilustração e compreensão comparando com o horizonte temporal de duas horas (duas dimensões) em que a ilustração e compreensão apresenta já maior dificuldade. Tanto para o horizonte temporal de uma hora ou duas horas, a solução do problema de afetação de unidades para a função de custo ótimo, é mal-comportada sob o ponto de vista de otimização matemática, visto ser uma função não contínua e não convexa. No horizonte temporal de uma hora devido à falta de dinâmica verifica-se que para subconjuntos do conjunto das decisões admissíveis D , a função pode ser bem-comportada. O comportamento da função de custo ótimo tende a piorar com o aumento da dimensão do espaço de decisão. A introdução das restrições de tempo mínimo ligado e tempo mínimo desligado, para além de contribuírem para o aumento de dimensão do problema, introduzem uma maior dinâmica no problema.

O problema de afetação de unidades é um problema não linear que envolve decisões discretas. Devido à dimensão dos sistemas reais, qualquer tentativa para resolver o problema primal, utilizando os recursos computacionais atuais, é difícil pelo tempo computacional requerido. Para tentar melhorar a solução deste problema é aplicada a relaxação Lagrangeana.

CAPÍTULO

3

Relaxação Lagrangeana

Este capítulo aborda a Relaxação Lagrangeana que juntamente com técnicas de otimização dual visam ultrapassar as dificuldades observadas na resolução do problema primal, de uma forma indireta. A resolução do problema advém do enfraquecimento do problema primal, o que pode significar obter soluções diferentes.

3.1 Função de Lagrange

A metodologia designada de relaxação Lagrangeana começou a ser aplicada em 1976 em sistemas de energia elétrica mais propriamente na afetação de unidades térmicas [49]. Sofrendo melhoramentos ao longo dos anos após sucessivos contributos de muitos investigadores. Segundo [50] em 1983 a relaxação Lagrangeana era já utilizada pela EDF (Électricite de France) na afetação de unidades.

A vantagem mais relevante da aplicação desta metodologia assenta na decomposição do problema principal em subproblemas. Desta forma, a afetação de unidades é conseguida pela resolução dos subproblemas associados a cada uma das unidades, sendo estas otimizadas individualmente passando a constituir uma entidade única. O termo relaxação relaciona-se com o princípio básico da metodologia baseada na relaxação Lagrangeana, que consiste em violar as restrições que ligam os recursos entre si, penalizando a sua violação na função objetivo (problema primal) de forma linear recorrendo a multiplicadores, denominados de multiplicadores de Lagrange, por forma a desincentivar a violação das restrições. Ou seja, as restrições associadas a cada recurso são relaxadas, mas é adicionado um termo à função de Lagrange que constitui um custo relativamente a cada violação das restrições.

Do deslocamento das restrições para a função objetivo do problema primal (P) resulta a função de Lagrange (simbolicamente representada por \mathcal{L}). Assim, a função de Lagrange resultante do problema primal pode ser definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} (x_{i,k-1}, p_{ik}, u_{ik}, \lambda, \mu, \gamma) &= \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I C_{ik}(x_{i,k-1}, p_{ik}, u_{ik}) \\
 &+ \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(D_k - \sum_{i=1}^I p_{ik} \right) \\
 &+ \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \mu_{mk} \left(R_{mk}^{req} - \sum_{i=1}^I R_{mi}(x_{ik}, p_{ik}) \right) \\
 &+ \sum_{n=1}^N \gamma_n \left(H_n^{req} - \sum_{k=1}^K \sum_{i \in H_n} H_{ni}(x_{ik}, p_{ik}, u_{ik}) \right)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Nesta formulação vemos representados os multiplicadores de Lagrange (λ, μ, γ) que se encontram associados respetivamente, às restrições de carga, restrições de capacidade e

restrições cumulativas. A cada uma das restrições encontra-se associado um vetor dos multiplicadores de Lagrange, também designados por vetores das variáveis duais, os quais correspondem à relaxação das restrições. Desta forma qualquer restrição pode ser representada em termos matemáticos na função de Lagrange.

Devido às restrições locais, a afetação de unidades requer que a função de Lagrange tenha de ser minimizada. O problema da minimização da função de Lagrange é formulado como em (L):

$$(L) \quad \underset{u}{\text{Min}} \quad \mathcal{L}(x_{i,k-1}, p_{ik}, u_{ik}, \lambda, \mu, \gamma) \quad (3.2)$$

Com

$$\mu \geq 0, \gamma \geq 0$$

Sujeito a

$$(x_{ik}, p_{ik}) = A_{ik}(x_{i,k-1}, u_{ik})$$

$$u_{ik} \in \mathcal{U}_{ik} \quad x_{i0} \in X_i^0 \quad x_{ik} \in X_i^K$$

$$i = 1, \dots, I \quad e \quad k = 1, \dots, K$$

No que se refere às restrições de igualdade não existe restrição de sinal, enquanto nas restrições de desigualdade o seu multiplicador é restrito no sinal (maior ou igual a zero).

A relaxação Lagrangeana permite obter a resolução do problema primal em relação à afetação de unidades, relaxando as restrições que ligam os recursos entre si, penalizando a violação das mesmas.

Para encontrar a solução do problema (L), a relaxação Lagrangeana recorre a otimização dual.

3.1.1 Multiplicadores de Lagrange

O problema original (P) consiste na minimização da função objetivo expressa em (2.1), esta é uma função de custo, e assim sendo, possui dimensão de um custo, (\$). Os multiplicadores de Lagrange são representados em unidades de custo por unidade dos parâmetros da respetiva restrição associada.

Atribuindo a cada restrição o conceito de produção, poderemos atribuir uma interpretação económica aos multiplicadores de Lagrange. Supondo que se tem um nível de produção aliado a uma determinada restrição em defeito, mas o multiplicador de Lagrange é positivo, então o termo adicionado à função objetivo (\mathcal{L}) é positivo. Os multiplicadores de Lagrange são também designados de preços sombra, pois a cada um deles está associado um custo definido. Poderemos tirar algumas ilações, tais como: tendo uma produção por defeito e aumentando-se o valor da função objetivo, então é viável inferir uma compra ideada da quantidade em defeito num pseudo mercado. Da mesma forma, se for considerado que há excesso de produção (o termo adicionado à função objetivo (\mathcal{L}) do problema (L) é negativo) o valor da função objetivo decresce, sendo então possível inferir uma venda ideada da quantidade em excesso num pseudo mercado. O custo unitário para os dois casos é fixado pelo preço sombra [18] [51].

CAPÍTULO

4

Problema Dual de Lagrange

Neste capítulo é feita uma interpretação da formulação de resolução do problema dual. Apresentando algumas conclusões das vantagens da resolução do problema primal de forma indireta, recorrendo à relaxação Lagrangeana.

4.1 Problema dual de Lagrange

Quando temos um problema em Relaxação Lagrangeana, o problema original é designado de problema primal e o segundo problema associado ao principal é designado de problema dual de Lagrange. Mediante certas condições de convexidade, a resolução do problema primal e do problema dual de Lagrange pode ter o mesmo valor. Ou seja, a função objetivo de ambos os problemas têm o mesmo valor ótimo, resolvendo o problema dual obtemos a solução do problema primal de forma indireta [18] [51].

Como referenciado anteriormente, o problema primal é um problema complexo, ou seja, não convexo, não linear, e de difícil resolução. A fim de resolver o problema primal e as suas características, utilizamos a formulação do problema dual de Lagrange que nos conduz a diversos algoritmos de resolução de problemas lineares de grande dimensão. A vantagem da aplicação da técnica de otimização dual de Lagrange é que otimiza uma função côncava sobre um conjunto convexo, ou seja, há variáveis do problema que são limitadas inferiormente.

4.2 Formulação do problema Dual de Lagrange

A função dual de Lagrange (q) é definida da seguinte forma:

$$q(\lambda, \mu, \gamma) = \underset{u}{\text{Min}} \mathcal{L}(x_{i,k-1}, p_{ik}, u_{ik}, \lambda, \mu, \gamma) \quad (4.1)$$

Sujeito a

$$(x_{ik}, p_{ik}) = A_{ik}(x_{i,k-1}, u_{ik})$$

$$u_{ik} \in \mathcal{U}_{ik} \quad x_{i0} \in X_i^0 \quad x_{ik} \in X_i^K$$

$$i = 1, \dots, I \quad e \quad k = 1, \dots, K$$

A equação (4.1), função dual de Lagrange é uma função côncava e subdiferenciável, duas características importantes de realçar. Sendo uma função côncava, um ótimo local é também o ótimo global da função. Os seus subgradientes desempenham um papel importante na maximização da função dual. O subgradiente g da função dual de Lagrange (vetor dos desvios

ligados às restrições) é relativamente fácil de obter, para um determinado ponto definido pelos vetores dos multiplicadores de Lagrange [18].

O subgradiente g , da função dual de Lagrange pode ser representado no seguinte modo:

$$g = \begin{bmatrix} D_k - \sum_{i=1}^I p_{ik} \\ \dots \\ R_{mk}^{req} - \sum_{i=1}^I R_{mi}(x_{ik}, p_{ik}) \\ \dots \\ H_n^{req} - \sum_{k=1}^K \sum_{i \in H_n} H_{ni}(x_{ik}, p_{ik}, u_{ik}) \\ \dots \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

g : vetor do subgradiente da função dual

A formulação (4.3) representa o problema que deriva do enfraquecimento do problema primal através da relaxação Lagrangeana.

$$Max \quad q(\lambda, \mu, \gamma) \quad (4.3)$$

Sujeito a

$$\mu \geq 0, \lambda \geq 0$$

Visto que o problema de Lagrange advém da maximização de um mínimo (4.1). A função dual q pode ser reescrita da seguinte forma.

$$\begin{aligned} q(\lambda, \mu, \gamma) = & \sum_{i=1}^I q_i(\lambda, \mu, \gamma) \\ & + \sum_{k=1}^K \lambda_k D_k \\ & + \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \mu_{mk} R_{mk}^{req} \\ & + \sum_{n=1}^N \gamma_n H_n^{req} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Em que

$$\begin{aligned}
 q_i(\lambda, \mu, \gamma) = & \underset{u_i}{\text{Min}} \sum_{k=1}^K (C_{ik}(x_{i,k-1}, p_{ik}, u_{ik}) \\
 & - \gamma_k p_{ik} \\
 & - \sum_{m=1}^M \mu_{mk} R_{mi}(x_{ik}, p_{ik}) \\
 & - \sum_{n=1}^N \gamma_n H_{ni}(x_{i,k-1}, p_{ik}, u_{ik})) \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

Sujeito a

$$(x_{ik}, p_{ik}) = A_{ik}(x_{i,k-1}, u_{ik})$$

$$u_{ik} \in \mathcal{U}_{ik} \quad x_{i0} \in X_i^0 \quad x_{ik} \in X_i^K$$

$$k = 1, \dots, K$$

O problema original é decomposto num problema principal (o problema dual) e separado em I subproblemas. Os I subproblemas são necessários para a avaliação da função dual em qualquer ponto selecionado pelo problema principal. O número de restrições no problema do planeamento de recursos de curto prazo afeta a dimensionalidade do problema principal, mas não afeta significativamente o esforço requerido para resolver os subproblemas.

O esforço na resolução do problema dual comparado com o esforço necessário à resolução do problema primal, é significativamente menor. Desta forma podemos evidenciar algumas diferenças:

- A afetação de recursos, no problema primal é feita conjuntamente de forma ótima para todos os recursos, já no problema dual a afetação é feita recorrendo à decomposição, ou seja, cada recurso constitui uma entidade única sendo otimizado individualmente.
- Na função objetivo, o problema primal trata uma função não convexa e não contínua, enquanto no problema dual trata uma função côncava.

- A resolução do problema primal é diferente da resolução do problema dual, ou seja, são problemas diferentes, todas as formulações que visam obter o problema dual resultam do enfraquecimento do problema primal. Para que a solução do valor da resolução direta do problema primal e a solução da resolução do problema dual apresentem o mesmo valor no ponto ótimo, para a função objetivo, só mediante certas condições de convexidade relativamente ao problema primal.

A resolução do problema dual não é uma tarefa acessível como pode parecer à partida face ao exposto acima, visto que, não é necessariamente diferenciável em alguns pontos, ou seja pode não ter gradiente em alguns pontos (não é suave e apresenta arestas) e por não ser uma expressão analítica fácil de computar, a função dual de Lagrange só pode ser computada após a minimização de todos os subproblemas indicados em (4.5).

O problema primal é diferente do problema dual, pois, a afetação de unidades no problema dual não satisfaz as restrições, que foram sendo relaxadas, desse modo resulta em regra uma diferença no valor ótimo. Assim é necessário analisar a informação fornecida pela solução do problema dual e responder às seguintes questões:

- Qual é a afetação de unidades resultante da solução do problema dual?
- Será esta afetação de unidades, em termos de problema primal, uma afetação ótima?
- Sendo uma solução subótima em termos de problema primal, será possível satisfazer as restrições?

Para obter resposta às questões enunciadas pela função dual vamos ter em atenção exemplos do problema primal.

4.3 Ilustração da função Dual de Lagrange

A resolução do problema dual de Lagrange, como já foi referido, é uma tarefa de resolução complexa. Mas pode ser obtida para um determinado ponto, o cálculo do valor da função dual, para isso basta proceder à otimização de todos os subproblemas indicados em (4.5).

Para evidenciar a resolução do problema num ponto vamos utilizar os mesmos exemplos considerados no problema primal, sendo a função dual a seguinte:

$$q: \Theta^m \rightarrow \mathbb{R} \text{ com } \begin{cases} m = 1 \text{ se } k = 1 \\ m = 2 \text{ se } k = 2 \end{cases} \quad (4.6)$$

A expressão (4.6) é resultante de um problema primal no qual só existe a restrição de carga, à qual está aliado um multiplicador de Lagrange, que não se encontra limitado no sinal. E sendo o horizonte temporal limitado a uma ou duas horas. Com as condições acima mencionadas é possível calcular o valor da função dual na proximidade do valor máximo. Bem como a sua representação gráfica. Se o número de restrições do problema primal aumentar ou o horizonte temporal for alargado a representação gráfica da função dual deixa de ser possível. A representação gráfica para uma ou duas dimensões permite obter ilações para problemas de maior dimensão.

4.4 Horizonte temporal

Fazendo uma análise ao horizonte temporal de uma e de duas horas para o problema dual, a exemplo da mesma análise feita para o problema primal, vamos ter em conta apenas uma restrição, a restrição de carga.

Horizonte temporal de uma hora (k=1)

A função dual resulta do enfraquecimento do problema primal, para $k=1$ os valores obtidos resultam do subconjunto $\lambda \in \Theta \equiv \mathcal{R}$, em que para cada valor λ considerado obtém-se um valor para a função dual. A função dual obtida é uma função côncava e subdiferenciável, ou seja, quase sempre diferenciável, em que $\lambda^* \in \mathcal{R}$ é o valor correspondente ao multiplicador de Lagrange que leva à solução do problema dual, isto é:

$$q^*(\lambda^*) = \underset{\lambda \in \mathcal{R}}{\text{Max}} q(\lambda) \quad (4.7)$$

q^* : solução do problema dual de Lagrange

Tendo em conta as condições referidas, o subgradiente é dado por:

$$g = d_1 - \sum_{i=1}^I p_i \quad (4.8)$$

Após encontrarmos a solução do problema dual, determinando o valor $q^*(\lambda^*)$ podemos perguntar: qual o gradiente correspondente ao valor máximo da função dual?

Visto que a função dual não é diferenciável no seu ponto máximo, ou seja, a função não tem qualquer gradiente nesse ponto. Assim em termos numéricos podemos observar que ao ponto máximo correspondem dois subgradientes, os quais apresentamos de seguida.

- O valor ótimo do problema dual, $q^*(\lambda^*)$ valor da função dual para λ^* ;
- O valor da função dual para $(\lambda^* - \varepsilon)$ ou seja $q(\lambda^* - \varepsilon)$ (ε é uma variação infinitesimal de λ), ao qual corresponde o gradiente g_1 ;
- O valor da função dual para $(\lambda^* + \varepsilon)$ ou seja $q(\lambda^* + \varepsilon)$, ao qual corresponde o gradiente g_2 .

Em termos numéricos, é válida a seguinte igualdade:

$$q(\lambda^* - \varepsilon) = q(\lambda^* + \varepsilon) = q^*(\lambda^*) \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

Ao analisar esta igualdade verificamos que para o valor ótimo da função dual identificamos dois gradientes, g_1 e g_2 , isto leva-nos a concluir que para a mesma demanda d_1 existem duas possibilidades de afetação de unidades, dois valores distintos para $\sum_{i=1}^I p_i$.

Após esta análise podemos dar resposta às questões formuladas na secção anterior:

- O fato de existir apenas uma solução para a afetação de unidades no problema primal, e visto que, para o ponto ótimo do problema dual correspondem duas soluções distintas em termos de afetação de unidades, leva-nos a concluir que a solução ótima do problema dual é diferente da do problema primal. O custo ótimo do problema dual q^* é inferior ao custo ótimo do problema primal c^* , ou seja, $q^* < c^*$ a solução do problema dual é diferente da solução do problema primal;
- Esta solução do problema dual é uma solução subótima em termos do problema primal, visto que, minimiza um custo determinado pela função de Lagrange, mas não satisfaz a restrição de carga. Em termos do problema primal vamos obter uma solução que

corresponde a uma produção em excesso e temos outra solução que corresponde a uma produção em defeito.

Horizonte temporal de duas horas (k=2)

Para $k=2$ os valores obtidos resultam do subconjunto $\lambda \in \Theta \equiv \mathfrak{R}^2$. Como base neste subconjunto o vetor dos multiplicadores de Lagrange apresenta duas componentes $\lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2]'$, para cada valor das componentes obtém-se um valor para a função dual. Tal como em $k=1$, em $k=2$ a função dual obtida é também uma função côncava e subdiferenciável, $\lambda \in \mathfrak{R}^2$ é o vetor que possui os valores dos multiplicadores de Lagrange que levam à solução do problema dual,

ou seja,
$$q^*(\lambda^*) = \underset{\lambda \in \mathfrak{R}^2}{\text{Max}} \ q(\lambda)$$

Para $k=2$, tendo em conta as condições referidas, o subgradiente é dado por:

$$g = \begin{bmatrix} d_1 - \sum_{i=1}^I p_{i1} \\ d_2 - \sum_{i=1}^I p_{i2} \end{bmatrix} \quad 4.9)$$

Uma vez obtido o valor de $q^*(\lambda^*)$, ou seja, a solução do problema dual, poderemos perguntar:

- Qual é o gradiente ao qual corresponde o valor máximo da função dual?

Tal como em $k=1$ a função não é diferenciável no seu ponto máximo, ou seja, a função não tem gradiente nesse ponto. Em termos numéricos no ponto máximo da função dual para $k=2$ correspondem quatro subgradientes, esta é a diferença em relação a $k=1$ onde tínhamos apenas um multiplicador de Lagrange.

Pelo facto de existirem quatro subgradientes diferentes, concluímos que existem 4 possibilidades de afetação de unidades para a mesma demanda d_1 e d_2 , ou seja, quatro pares de valores diferentes para

$$\left(\sum_{i=1}^I p_{i1}, \sum_{i=1}^I p_{i2} \right)$$

Concluindo e respondendo as questões formuladas na secção anterior, poderemos afirmar:

- O facto de existir apenas uma solução para a afetação de unidades no problema primal, e visto que, para o ponto ótimo do problema dual correspondem quatro soluções distintas em termos de afetação de unidades, leva a concluir que a solução ótima do problema dual é diferente da solução ótima do problema primal. O custo ótimo do problema dual q^* é inferior ao custo ótimo do problema primal c^* , ou seja, $q^* < c^*$ a solução do problema dual é diferente da solução do problema primal;
- Esta solução do problema dual é uma solução subótima em termos do problema primal, visto que minimiza um custo determinado pela função de Lagrange, mas não satisfaz a restrição de carga (demanda). Em termos do problema primal vamos obter soluções que correspondem a produção em excesso e temos soluções que correspondem a produção em defeito tanto para d_1 como para d_2 .

Após estas conclusões, é de salientar quer para $k=1$ e $k=2$ que o valor ótimo do problema dual não é o mesmo do problema primal, logo existem várias afetações ótimas do ponto de vista do problema dual.

Com estas conclusões importa analisar:

- Qual o motivo da existência de várias soluções não ótimas em termos do problema primal, resultantes da resolução do problema dual para a afetação de unidades e o porquê de acomodar essas soluções na solução do problema primal;
- Analisar a relação existente entre o problema primal e o problema dual de Lagrange, verificar em que condições necessárias o valor da solução do problema dual de Lagrange é igual ao valor do problema primal.

CAPÍTULO

5

Salto de Dualidade

Nos capítulos anteriores, é feito um apanhado de como conseguir a resolução da solução ótima do problema primal e a resolução da solução ótima do problema dual. No capítulo 4 concluímos que a solução encontrada para o problema dual é uma solução subótima em termos de problema primal.

Neste capítulo será analisada a relação existente entre o valor da solução do problema primal e o valor da solução do problema dual de Lagrange, esta análise está relacionada com o conceito de salto de dualidade. A definição de salto de dualidade é a diferença entre estes dois valores.

5.1 Salto de dualidade

O conceito de salto de dualidade relaciona-se diretamente com a relação do valor da solução do problema primal e o valor da solução do problema dual. Sendo por definição, o salto de dualidade, a diferença entre estes dois valores. A expressão do salto de dualidade é a seguinte:

$$\xi = c^* - q^* \quad (5.1)$$

Sendo que:

ξ : salto de dualidade

c^* : valor da solução do problema primal

q^* : valor da solução do problema dual de Lagrange

De acordo com o descrito no capítulo anterior, verifica-se que o valor da solução do problema primal será sempre superior ou igual ao valor da solução do problema dual de Lagrange, ou seja:

$$c^* \geq q^*$$

Desta forma, conclui-se que o saldo de dualidade é a distância entre o valor da solução do problema primal e o valor da solução do problema dual. Sempre que prevalecer a desigualdade pode-se afirmar que existe salto de dualidade, o que devido às características do problema primal acontece quase sempre.

Em seguida é feita uma breve ilustração do significado geométrico do salto de dualidade e da solução ótima do problema dual de Lagrange e das soluções subótimas associadas ao mesmo, no que se refere ao problema primal.

Como exemplo para $k=1$, pretende-se ilustrar o salto de dualidade e a complexidade de convergência do valor ótimo do problema primal, com o valor ótimo do problema dual.

Horizonte temporal de uma hora (k=1)

Considere-se o problema primal e a função de custo ótimo $c : \Omega \rightarrow \Re$ com $\Omega \equiv \mathcal{D}$, cuja solução pertence ao domínio \mathcal{D} . Com base na figura 5.1 retiram-se algumas conclusões sobre a definição de salto de dualidade. Fazendo passar uma reta r_1 perpendicular ao eixo da demanda (eixo das abcissas), que passa pelo ponto cuja ordenada representa o valor da solução ótima do problema primal c^* e cuja abcissa é definida pela carga d_1 a satisfazer. A reta de suporte r_2 , que intersecta a reta vertical r_1 , é maximizante, ou seja, pode-se dizer que o ponto de interseção das retas r_1 e r_2 corresponde ao máximo da função dual q^* e o declive da reta r_2 é dado pelo valor do multiplicador de Lagrange λ^* , que maximiza a função dual.

A reta de suporte r_2 , com declive λ^* , é definida por dois pontos pertencentes à solução ótima do problema primal e são designados por pontos de suporte, definidos por $P^A(d_1^{sA}, c^{sA})$ e $P^B(d_1^{sB}, c^{sB})$. Estes pontos de suporte dizem respeito às duas afetações de unidades, definidas pelo máximo da função dual, em termos de problema primal.

A interpretação geométrica dos dois pontos de suporte pode ser definida da seguinte forma: dado um valor de carga a satisfazer, ao qual coincide um valor ótimo primal, a reta r_2 maximiza o problema dual de Lagrange quando a reta tangente for inferior a esse ponto, visto que, não consegue ser tangente a esse ponto, ela assenta nos pontos que a suportam, como pode ser observado na figura 5.1.

Da interseção das retas r_1 e r_2 resulta a interpretação geométrica para a solução dual de Lagrange, uma vez que r_2 não é tangente no ponto ótimo primal então podemos concluir que existe salto de dualidade. No início deste capítulo o salto de dualidade foi definido em (5.1) como sendo a diferença entre o valor da solução do problema primal e o valor da solução do problema dual de Lagrange. Analisando a interpretação geométrica com base na figura 5.1 concluímos que corresponde à distância, medida entre a reta vertical r_1 , para os valores compreendidos entre o valor ótimo do problema primal c^* e o valor do problema dual de Lagrange q^* . Representado pelo traço vertical a grosso na figura 5.1.

Visto algumas variáveis do problema primal serem inteiras, as propriedades de convexidade ficam comprometidas, daí resulta que a solução do problema dual de Lagrange seja diferente da solução do problema primal. No entanto, uma vez que se trata de um problema simplificado, é possível verificar que, se o problema fosse resolvido para uma restrição de carga superior a d_1^{sB} , a reta r_2 seria tangente a esse ponto, resultando um valor ótimo do problema primal igual ao valor ótimo do problema dual. Concluindo dessa forma que a solução do problema dual seria equivalente à solução do problema primal.

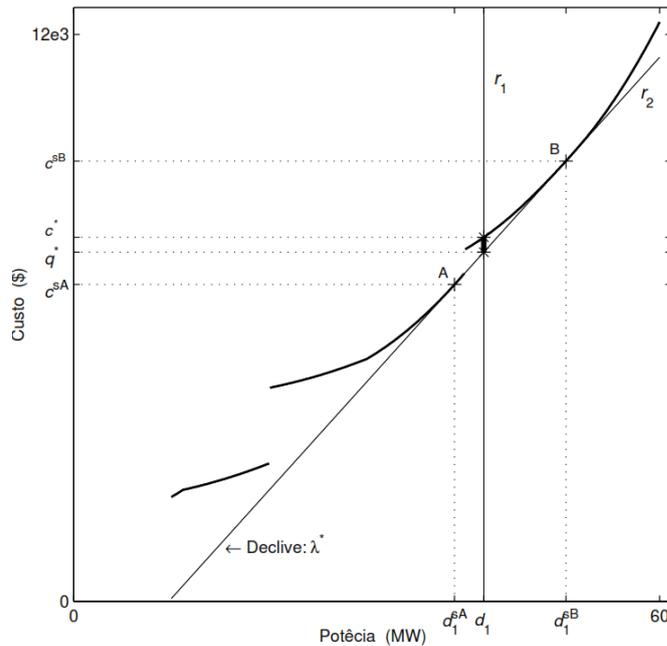


Figura 5.1: Gráfico correspondente a solução do problema primal, em \mathcal{D} , para a ilustração geométrica do significado de salto de dualidade, e da relação entre a solução do problema primal e a solução do problema dual de Lagrange (figura retirada de [18]).

Analisando a figura 5.1, verifica-se a existência de diversos pontos marcados em todo o domínio \mathcal{D} da solução do problema primal, designadamente:

- O valor ótimo do problema primal, com coordenadas $c^*(d_1, c^*)$.
- O valor ótimo do problema dual de Lagrange, com as coordenadas $q^*(d_1, q^*)$, sendo que este ponto diz respeito à interseção existente entre as retas r_1 e r_2 .
- O custo e a demanda correspondentes à solução do problema dual, no que diz respeito à afetação de unidades, pontos A e B definidos pelas coordenadas $P^A(d_1^{sA}, c^{sA})$ e $P^B(d_1^{sB}, c^{sB})$.

Como já referido em capítulos anteriores, para problemas de larga escala, não é possível obter um valor ótimo para o problema primal, dessa forma não é possível obter um valor para o salto de dualidade. Para alguns autores a definição de salto de dualidade é a diferença entre o custo obtido para uma afetação ótima fazível, que resulte de uma solução do problema dual de Lagrange, e o valor ótimo dessa mesma solução. De acordo com [18] para problemas de larga escala nem sempre se consegue uma afetação fazível que resulte da solução do problema dual de Lagrange. Pode-se conseguir uma solução fazível, no entanto não resulta da solução do problema dual de Lagrange. Se corresponder um custo a esta solução, designado por c^{admi} , este

custo será um majorante do custo ótimo primal. Desta forma, é possível estabelecer uma medida de proximidade desta afetação relativamente à solução do problema primal:

$$\xi < c^{admi} - q^*, \quad c^{sB} \text{ é um exemplo de } c^{admi} \quad (5.2)$$

Admitindo que a c^{admi} correspondesse uma solução ótima do problema dual de Lagrange, a medida de proximidade apresentada na expressão (5.2) é incerta no que diz respeito ao salto de dualidade, pois não se consegue saber o quão próxima se encontra a solução do problema dual de Lagrange da solução do problema primal.

Se aumentarmos o horizonte temporal, a complexidade do problema aumenta quer ao nível do problema primal quer do problema dual de Lagrange. A ilustração para $k=2$ ainda é possível através de um gráfico com 3 referenciais, mas para horizontes temporais superiores a ilustração já é impossível.

CAPÍTULO

6

Atualização dos Multiplicadores de Lagrange

Com este capítulo pretende-se fazer uma revisão aos métodos de subgradiente para resolução do problema de afetação de unidades, usando técnicas de relaxação Lagrangeana. Os métodos de subgradiente atualizam os multiplicadores de Lagrange segundo a direção do subgradiente proporcionalmente à violação das restrições correspondentes, existindo diversos métodos para atualização do valor do passo. Estes métodos de atualização do passo baseiam-se em heurísticas de tentativa e erro, na determinação dos parâmetros das fórmulas clássicas de atualização do valor do passo.

6.1 Introdução

Os métodos com base em técnicas de relaxação Lagrangeana têm todos por base comum a atualização dos seus multiplicadores. Como observado nos capítulos anteriores, a obtenção de um valor ótimo da função dual, depende em muito da escolha dos valores desses multiplicadores, essa escolha influencia o quão próximo nos encontramos da solução do problema dual e, sucessivamente, o quão próximos nos encontramos de uma boa solução a nível do problema primal. Na literatura encontramos diversos métodos para atualização destes multiplicadores [12] [16] [17] [47] [52] [53] [54] [55].

Após a análise de alguma literatura, os métodos do subgradiente aparecem como um método bastante utilizado e com bons resultados no que concerne ao nosso problema. Estes métodos prevaleceram devido à sua simplicidade e pelo facto do vetor dos desvios ligado às restrições, ser um subgradiente da função dual de Lagrange, sendo facilmente computado [18].

Estes métodos de subgradiente atualizam o valor dos multiplicadores, segundo a direção do subgradiente, de forma proporcional à violação das restrições correspondentes. Na literatura encontramos propostos diversos procedimentos para determinar o valor do passo, em [22] é proposto um método que tem sido referência para muitos trabalhos subsequentes, estes procedimentos são baseados em heurísticas.

Neste capítulo é feita uma revisão do método de subgradiente proposto por [22] e também descrito em [18] para atualização dos multiplicadores de Lagrange. E serve de base ao problema de afetação de unidades exposto no capítulo seguinte.

6.2 Método de subgradiente

Do exposto nos capítulos anteriores, verifica-se que a resolução do problema dual consiste na determinação de um vetor de variáveis duais $\lambda^* \in \Lambda$, o valor deste vetor deverá conduzir ao valor ótimo da função dual de Lagrange $q^*(\lambda^*)$. O problema dual (L) pode ser reformulado da seguinte maneira:

$$L \quad \text{Max } q(\lambda) \quad (6.1)$$

sujeito a $\lambda \in \Lambda$

em que

$$q(\lambda) = \min_{p \in P} \mathcal{L}(p, \lambda) = \min_{p \in P} \{C(p) + \lambda'g(p)\}$$

e o conjunto dos valores admissíveis Λ é dado por

$$\Lambda = \{\lambda = \lambda_k \in \Re, \text{ com } k = 1, 2 \dots K \text{ e } q(\lambda) \in \Re\}$$

Para qualquer valor de $\lambda \in \Lambda$, é possível obter um vetor p_λ que minimiza $\mathcal{L}(p, \lambda)$ em $p \in P$, conseguindo que $g(p_\lambda)$ seja um subgradiente de q no ponto λ .

A norma do vetor dos desvios apresenta uma medida de excelência da afetação de unidades, pois quanto menor for essa norma, melhor resultado obtemos do ponto de vista de afetação de unidades.

Através do método do subgradiente conseguem-se diversos valores da função dual, utilizando um único subgradiente em cada iteração. Uma das fórmulas do método do subgradiente mais utilizadas e simples encontrada na literatura é dada por:

$$\lambda^{v+1} = \left[\lambda^v + s^v \frac{g^v}{\|g^v\|} \right]^+ \quad (6.2)$$

em que

g^v : é o subgradiente $g(p_{\lambda^v})$,

$[\cdot]^+$: designa a projeção no subconjunto dos valores admissíveis Λ ,

s^v : é um escalar positivo que define o valor do passo.

A iteração $v + 1$ pode não melhorar o valor ótimo da função dual (mediante o valor do passo escolhido podemos caminhar no sentido do valor ótimo da função dual ou não), ou seja, em algumas iterações v podemos obter:

$$q \left(\left[\lambda^v + s^v \frac{g^v}{\|g^v\|} \right]^+ \right) < q(\lambda^v), \quad \forall s > 0$$

Quando o valor do passo for suficientemente pequeno, a distância entre o ponto obtido na corrente iteração e a solução ótima é reduzida.

Na prática, para uma melhor determinação do valor do passo é necessária a utilização de heurísticas. As mais usadas quer pela sua simplicidade de implementação, simples computação e que apresentam melhores resultados, advêm da regra de diminuição do valor do passo. Assim pela seguinte proposição garante-se a convergência do método:

Assumindo que o valor do passo s^v satisfaz

$$s^v > 0, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} s^v = 0, \quad \sum_{v=1}^{\infty} s^v = \infty$$

Assim, para a sequência de todos os valores $\{\lambda^v\}$ gerados pelo método, temos

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \text{Max } q(\lambda^v) = q^* \tag{6.3}$$

Desta forma, considere-se o caso onde o valor do passo s^v diminui até atingir o valor zero, mas satisfaz $\sum_{v=1}^{\infty} s^v = \infty$, assim, o método pode “viajar” tão longe quanto possível (até ao infinito) de forma a convergir para o valor ótimo da função dual [18] [36].

Após esta análise, conclui-se que é possível, com heurísticas que definam o valor do passo de forma apropriada, atingir o valor máximo da função dual.

No capítulo seguinte é aplicada uma adaptação deste método a um exemplo para a afetação ótima de cinco geradores durante um período temporal de 24 horas, fazendo uma análise sobre o assunto exposto nos capítulos anteriores.

CAPÍTULO

7

Caso de estudo, Resultados e Análise Crítica

Nos capítulos anteriores foi abordada a problemática da afetação de unidades para planeamento de curto prazo, vimos que a solução ótima para esse problema não pode ser obtida de forma direta através do problema primal. Assim a obtenção da solução ótima é conseguida através da resolução do problema dual de Lagrange de forma indireta.

Neste capítulo é apresentado um exemplo de afetação de 5 unidades para um horizonte temporal de 24 horas. A única restrição a cumprir é a demanda. É referida a metodologia utilizada na computação do mesmo, retirando as respetivas conclusões.

7.1 Formulação do Problema

Este capítulo tem como objetivo principal abordar a problemática exposta nos capítulos anteriores, propondo a aplicação de um caso prático, de configuração térmica. Inicialmente é apresentado o algoritmo aplicado. Em seguida são apresentados os dados relativos às unidades geradoras, para testar a metodologia proposta. O caso de estudo proposto tem como base [17] [18] [56].

O exemplo analisado é para uma afetação de 5 unidades num horizonte temporal de 24 horas, em que a única restrição a cumprir é a demanda. Considerando apenas dois estados, Ligado $U_i^k = 1$ e Desligado $U_i^k = 0$.

Para uma melhor análise do problema proposto, apresentam-se em seguida as restrições e a função objetivo usada na resolução do exemplo de afetação de unidades, a formulação adotada segue a formulação referida em [17] [56].

Um recurso possui uma estrutura de custos com uma função polinomial quadrática (7.1) com coeficientes $a_i, b_i, e c_i$.

$$F_i (P_i^k) = a_i + b_i P_i^k + c_i (P_i^k)^2 \quad (7.1)$$

P_i^k : corresponde à potência do gerador i na hora k ;

F_i : corresponde à função do gerador i .

Variável U_i^k :

$U_i^k = 0$ se o gerador i estiver desligado na hora k ;

$U_i^k = 1$ se o gerador i estiver ligado na hora k .

Restrições de carga:

$$P_{carga}^k - \sum_{i=1}^N P_i^k U_i^k = 0 \quad \text{para } k = 1, \dots, K$$

P_{carga}^k : corresponde à potência total entregue na hora k ;

Limites das unidades:

$$U_i^k P_i^{min} \leq P_i^k \leq U_i^k P_i^{max} \text{ para } k = 1, \dots, K \text{ e } i = 1, \dots, N$$

P_i^{min} : corresponde à potência mínima entregue pela unidade (gerador) i ;

P_i^{max} : corresponde à potência máxima entregue pela unidade (gerador) i .

A função objetivo é dada por:

$$\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N [F_i(P_i^k)] U_i^k = F(P_i^K, U_i^K)$$

Sendo esta a função objetivo para o exemplo a ser analisado.

A função de Lagrange é dada na forma:

$$\mathcal{L}(P, U, \lambda) = F(P_i^K, U_i^K) + \sum_{k=1}^K \lambda^k \left(P_{carga}^k - \sum_{i=1}^N (P_i^k U_i^k) \right)$$

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{k=1}^K \{ [F_i(P_i^k)] U_i^k - \lambda^k P_i^k U_i^k \} \right)$$

Sendo cada unidade otimizada em separado.

O mínimo da função dual de Lagrange é dado por:

$$\min q(\lambda) = \sum_{i=1}^N \min \sum_{k=1}^K \{ [F_i(P_i^k)] U_i^k - \lambda^k P_i^k U_i^k \}$$

E está sujeito a:

$$U_i^k P_i^{min} \leq P_i^k \leq U_i^k P_i^{max} \text{ para } k = 1, \dots, K$$

Agora, as restrições de acoplamento estão relaxadas e todas as unidades se encontram separadas umas das outras, o mínimo lagrangiano é encontrado resolvendo o mínimo de cada unidade de geração para todos os períodos horários [17]. Este problema, após a apresentação

das condições, é agora de fácil resolução com programação dinâmica, considerando apenas dois estados, ligado e desligado, como mostrado na figura 7.1.

A figura 7.1 ilustra a transição de estados de uma unidade de geração, que se pode considerar como um simples exemplo. Como dito anteriormente a unidade encontra-se em funcionamento quando $U_i = 1$ para uma determinada hora t (t no caso da figura apresentada), encontra-se desligada quando $U_i = 0$. Inicialmente em $t-1$ a unidade está desligada, no período horário seguinte, t , a unidade é colocada em operação $U_i = 1$, nos dois períodos horários subseqüentes, a unidade permanece ligada, $t+1$ e $t+2$, desta forma podemos calcular o valor da potência de operação em cada um dos períodos horários de funcionamento. Em $t+3$ a unidade é retirada de operação $U_i = 0$ e assim permanece em $t+4$.

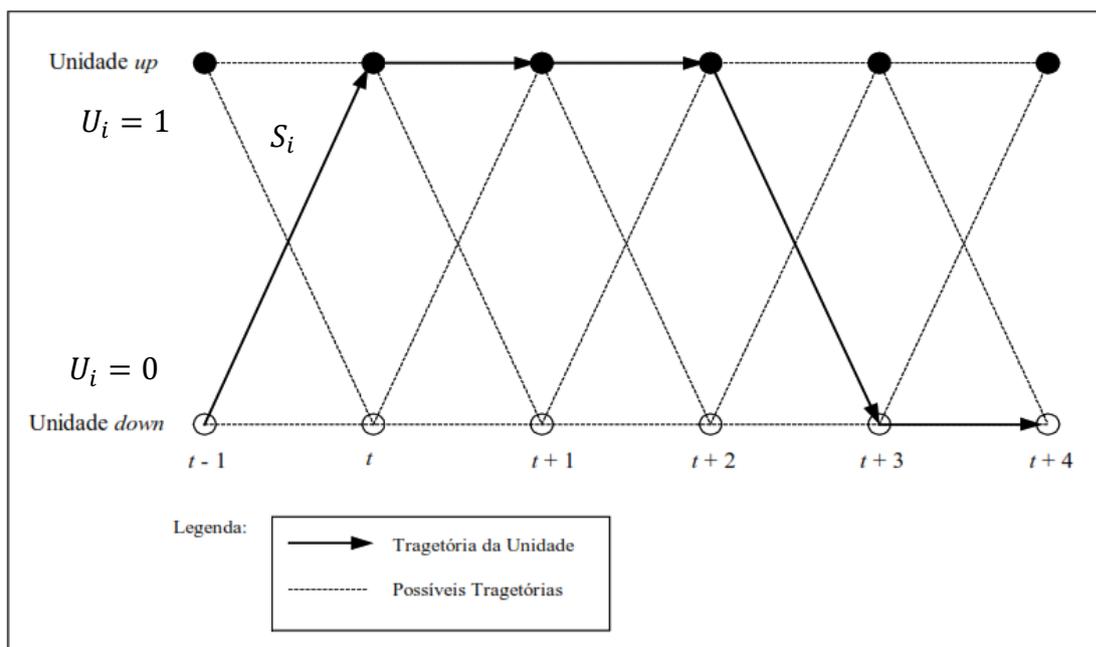


Figura 7.1: Ilustração de transição de estados para uma unidade geradora com programação dinâmica. (Figura retirada de [57])

Em que S_i é o custo de arranque para a unidade i . Quando o valor de $U_i^k = 0$, o valor da função a minimizar é obvio; quando $U_i^k = 1$, o valor da função a minimizar é $[F_i(P_i^k) - \lambda^k P_i^k]$, (o custo de arranque não depende de P).

O mínimo desta função pode ser facilmente obtido recorrendo à primeira derivada:

$$\frac{d}{dP_i} [F_i(P_i^k) - \lambda^k P_i^k] = \frac{d}{dP_i} F_i(P_i^k) - \lambda^k = 0$$

A solução desta equação é:

$$\frac{d}{dP_i} F_i (P_i^{opt}) = \lambda^k$$

P_i^{opt} : representa a potência ótima para o recurso i .

Assim temos de considerar 3 casos que dependem da relação de P_i^{opt} com os limites de geração da respetiva unidade:

1. Se $P_i^{opt} \leq P_i^{min}$, então:

$$\min [F_i (P_i^k) - \lambda^k P_i^k] = F_i (P_i^{min}) - \lambda^k P_i^{min}$$

2. Se $P_i^{min} \leq P_i^{opt} \leq P_i^{max}$, então:

$$\min [F_i (P_i^k) - \lambda^k P_i^k] = F_i (P_i^{opt}) - \lambda^k P_i^{opt}$$

3. Se $P_i^{opt} \geq P_i^{max}$, então:

$$\min [F_i (P_i^k) - \lambda^k P_i^k] = F_i (P_i^{max}) - \lambda^k P_i^{max}$$

Note-se que ao procurar minimizar $[F_i (P_i^k) - \lambda^k P_i^k]$ em cada hora, quando $U_i^k = 0$ este valor vai ser zero, assim a única forma de obter um valor mais baixo é ter $F_i (P_i^k) - \lambda^k P_i^k < 0$. Só quando esta condição se verifica a unidade é colocada em operação, ou seja, é obtido lucro.

O ajuste dos λ^k é feito de acordo com a fórmula (7.2):

$$\lambda^{v+1} = \lambda^v + \left[\frac{d}{d\lambda} q(\lambda) \right] \alpha \tag{7.2}$$

$\frac{d}{d\lambda} q(\lambda)$: representa o gradiente de $g(\lambda)$;

α : é um valor escalar que define o valor do passo no problema proposto;

v : é o valor correspondente à iteração.

Onde:

$\alpha = 0.0015$ quando $\frac{d}{d\lambda} q(\lambda)$ é positivo;

e

$\alpha = 0.0025$ quando $\frac{d}{d\lambda} q(\lambda)$ é negativo.

Procedimento de atualização dos valores dos multiplicadores de Lagrange para resolver o problema de afetação de unidades:

1. Escolher um valor inicial para o vetor das variáveis duais (λ^0) neste caso =0, e escolher $\alpha = 0.0015$.

Calcular o valor da função dual $q^0(\lambda^0)$ e do gradiente $g^0(q_{\lambda^0})$.

2. Atualizar o valor dos multiplicadores de Lagrange segundo a equação (7.2) em cada gerador, ou seja:

$$\lambda^{v+1} = \lambda^v + \left[\frac{d}{d\lambda} q(\lambda) \right] \alpha$$

3. Calcular o valor da função dual $q^v(\lambda^v)$ e o valor do gradiente $g^v(q_{\lambda^v})$

Se o critério de paragem for satisfeito, então terminar.

4. Definir o valor de α , mediante o cálculo do valor do gradiente se é positivo ou negativo, como definido anteriormente.

5. Fazer $v = v + 1$, e voltar ao ponto 2.

Em 1 a escolha do valor inicial das variáveis duais não é muito importante, influenciando apenas na rapidez do processo de convergência, sendo o ideal utilizar valores próximos do valor ótimo (depende um pouco em parte da experiência do utilizador). No nosso caso começamos com valores a zero.

Em 2 é usado o método de subgradiente, semelhante ao explicado no capítulo anterior, a única diferença centra-se na utilização da primeira derivada de $\frac{d}{d\lambda} q(\lambda)$.

Em 3 é calculado o valor da função dual $q^v(\lambda^v)$, o valor do gradiente $g^v(q_{\lambda^v})$ e avaliado o critério de paragem. O critério de paragem mais utilizado, é em regra, o de terminar a execução após

um determinado número de iterações previamente especificado. Outros critérios podem também ser utilizados tais como critérios com base em valores a atingir pelo valor da norma do gradiente, este foi o escolhido neste trabalho, ou regras de não melhoramento do valor da norma.

Em 4 é verificado o valor do gradiente, se este for positivo o valor de $\alpha = 0.0015$, se pelo contrário o valor do gradiente for negativo o valor de $\alpha = 0.0025$. Desta forma utiliza-se o valor de α no ponto 2 na iteração seguinte, caso não seja atingido o critério de paragem no ponto 3.

7.2 Resultados Numéricos

Após a apresentação da formulação no subcapítulo anterior 7.1, expõem-se agora os dados para o problema constituído por 5 unidades geradoras em que a única restrição a cumprir é a demanda. A resolução do problema foi conseguida mediante a utilização da aplicação informática MATLAB, através de simulação computacional, num PC com 4 GB de memória RAM instalada e um processador Intel CORE Duo a 1.3 GHz. Na tabela 1 representam-se os parâmetros respeitantes a cada unidade geradora, a sua potência máxima (Pmax), potência mínima (Pmin) bem como os coeficientes $a_i, b_i, e c_i$ da função polinomial quadrática (7.1). A tabela 7.1 apresenta os valores da demanda, ou seja, a carga em MW a satisfazer em cada hora num período horário de 24 horas. (Os dados da tabela 7.1 e 7.2 expostos são retirados de [17]).

Tabela 7.1: Tabela que representa os parâmetros respeitantes a cada unidade geradora.

Parâmetros	Unidade 1	Unidade 2	Unidade 3	Unidade 4	Unidade 5
P_{max} (MW)	455	130	130	80	55
P_{min} (MW)	150	20	20	20	10
a	1000	700	680	370	660
b	16,19	16,6	16,5	22,26	25,92
c	0,00048	0,002	0,00211	0,00712	0,00413

Tabela 7.2: A demanda a cumprir para o período de 24 horas em MW.

Horas	Demanda	Horas	Demanda	Horas	Demanda	Horas	Demanda
1	330	7	730	13	810	19	790
2	450	8	780	14	820	20	750
3	480	9	620	15	750	21	770
4	360	10	650	16	800	22	610
5	520	11	680	17	650	23	520
6	590	12	630	18	670	24	360

Os dados apresentados na tabela 7.2 estão representados no gráfico da figura 7.2, onde podemos observar a demanda ao longo das 24 horas do dia.

Com base nos dados apresentados nas tabelas 7.1 e 7.2, procedemos à afetação das unidades geradoras, a fim de cumprir a demanda prevista (perfil de carga), e desta forma verificar o comportamento do algoritmo.

Na figura 7.3 encontra-se representada a evolução da função Dual $q(\lambda)$ a cada iteração, onde se verifica que mediante um determinado número de iterações a função dual $q(\lambda)$ converge para o máximo de $q(\lambda)$. Não se pode afirmar que este máximo seja uma solução ótima para o problema primal, apenas que é a solução ótima para o problema dual. Assim não conseguimos inferir se este valor máximo está longe ou perto do valor ideal primal. Para esse objetivo recorreremos à análise através da norma média do gradiente $\|g(p_\lambda)\|/K$ na figura 7.4.

A convergência pode ser obtida em mais ou menos iterações mediante a escolha dos diferentes parâmetros do processo. Com os parâmetros acima mencionados a função dual aproxima-se do seu valor máximo para a convergência por volta da iteração 60, resultando uma oscilação junto do valor máximo muito pequena nas restantes iterações até suavizar junto do valor máximo. Com outros parâmetros utilizados, a oscilação em torno do valor máximo da função dual $q(\lambda)$ era maior, apesar de se obter um máximo da função dual em menos iterações. A escolha dos parâmetros recaiu sobretudo em conseguir um máximo da função dual de forma mais suave. Para este algoritmo, estipular mais ou menos iterações em termos de tempo de execução não é relevante, visto que, com os requisitos computacionais de hoje, o processo é relativamente rápido. Logo o número de iterações idealmente estipuladas é aquele que nos forneça melhor informação.

Como referido anteriormente, a afetação de unidades (problema primal) correspondente à solução do problema dual de Lagrange não conduz, em regra, a uma solução que seja factível. Desta forma, necessitamos de uma “medida” que nos forneça informação suficiente, a fim de saber se estamos perante uma solução do problema dual de Lagrange que seja factível. Esta medida é a norma média do gradiente $\|g(p_\lambda)\|/K$. Este valor pretende-se que seja o mínimo possível, dessa forma estaremos próximos de uma boa solução - o ideal seria um valor da norma média na ordem dos 0,5% do valor da potência máxima do diagrama de carga, o que se traduz em regra numa boa solução para o problema primal. Neste trabalho o valor ideal da norma média não se verifica. Sendo o valor mínimo obtido pela norma média do gradiente a rondar os 8 % (10.44 MW) do valor da potência máxima do diagrama de carga, este valor é conseguido após 87 iterações como pode ser visualizado na figura 7.4. Com este algoritmo o valor mínimo da norma média do gradiente não se altera mesmo utilizando 100000 iterações. Assim é possível afirmar que os valores obtidos não são os ideais, ou seja, os valores obtidos para a solução do problema dual de Lagrange não são de todo factíveis, encontrando-se longe de uma possível solução ótima factível para o problema primal.

O valor $\max q(\lambda)$, que se encontra assinalado na figura 7.3 apresentada em seguida, é tido como o melhor valor alcançado na atualização do valor do passo, para a solução do problema dual em 87 iterações. Se aumentarmos o número de iterações até 100000 apenas conseguimos uma melhoria de 0.22 % no valor $\max q(\lambda)$. O que não se traduz numa melhoria que possa ser relevante. Na prática obtemos um valor na vizinhança do valor máximo da função dual $q(\lambda)$.

Como referido acima, o valor mínimo da norma média de 8% é obtido após 87 iterações. Sendo a obtenção de 8 % no valor da norma média do gradiente, o critério de paragem do algoritmo.

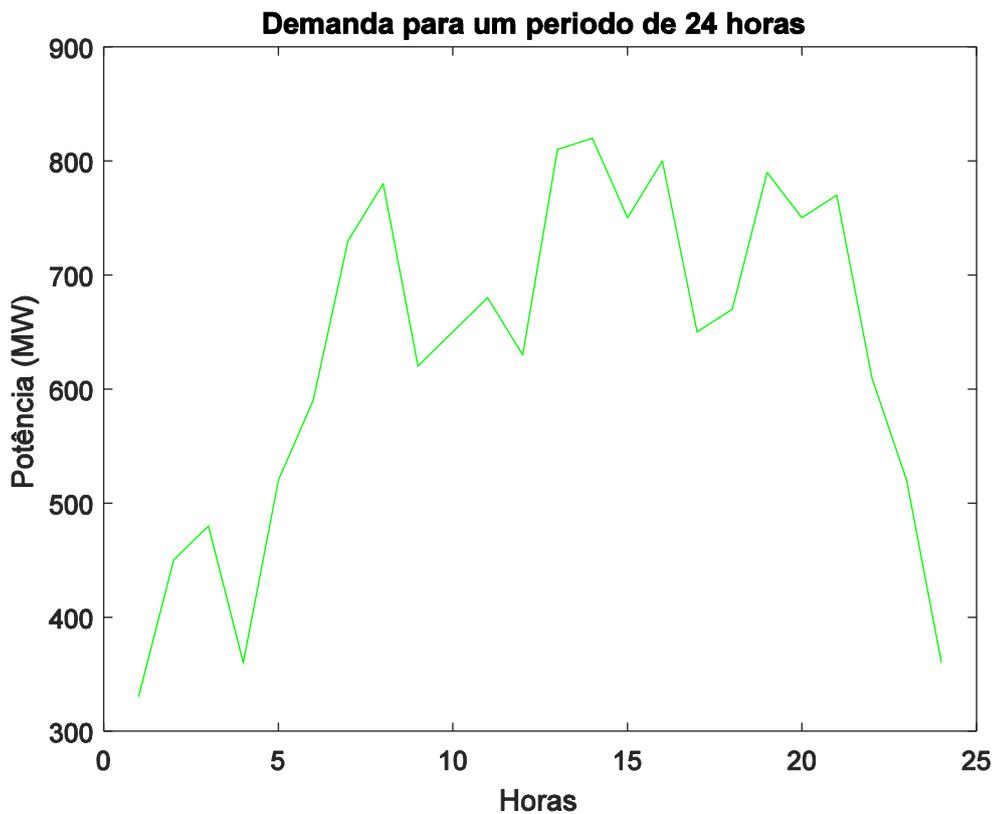


Figura 7.2: Perfil da demanda prevista no período de 24 horas.

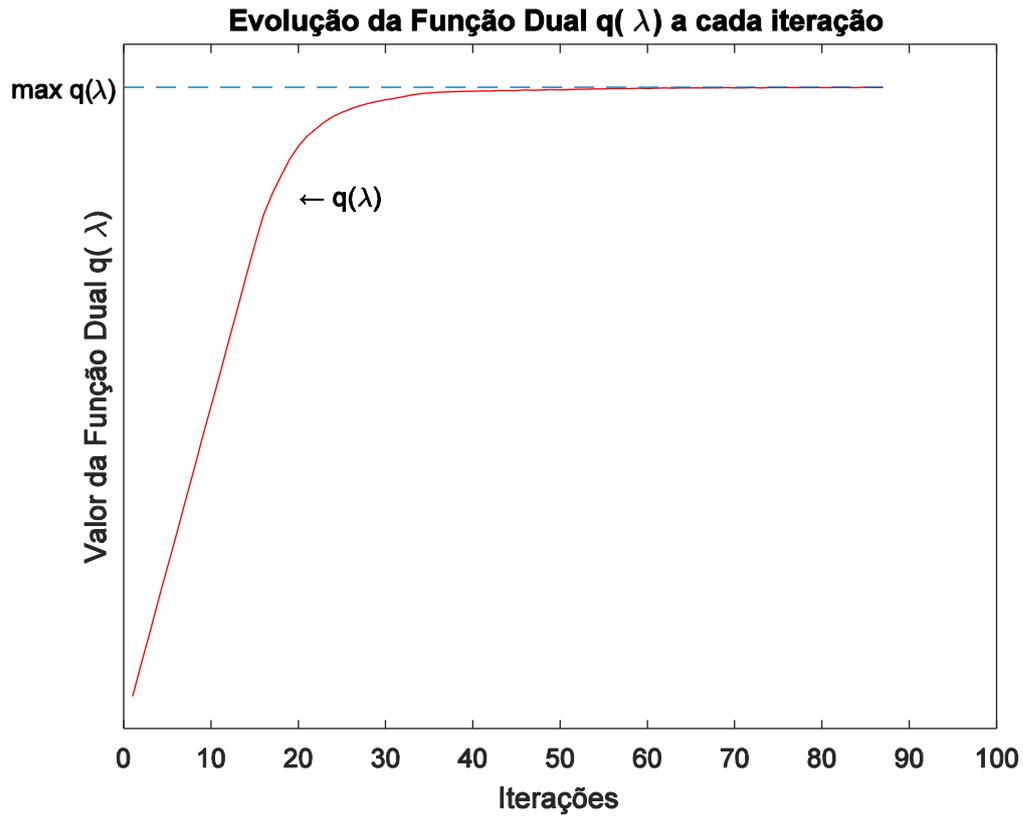


Figura 7.3: Evolução ao longo das iterações do valor da função dual $q(\lambda)$ para 87 iterações. A linha a tracejado representa o valor máximo obtido pela função dual, e a linha a traço contínuo representa o valor da função dual $q(\lambda)$.

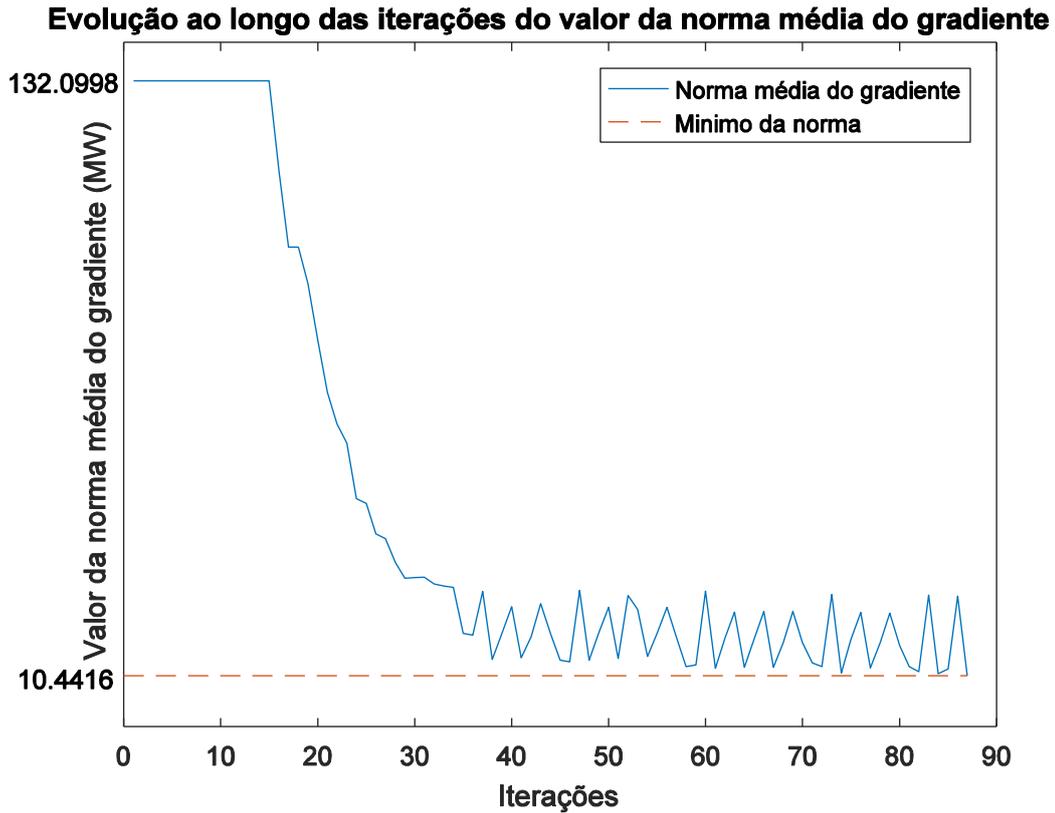


Figura 7.4: Evolução ao longo das iterações do valor da norma média do gradiente $\|g(p_\lambda)\|/K$, correspondentes aos valores da função dual representados na figura 7.3.

A tabela 7.3 apresenta quais as unidades geradoras em funcionamento em cada hora, afim de satisfazer a demanda prevista. O 0 representa que a unidade se encontra desligada enquanto o 1 indica que a unidade se encontra em funcionamento. Os valores obtidos são respeitantes ao funcionamento das unidades no momento que é conseguido o valor de 8 % da norma média, ou seja, na iteração 87. Analisando a tabela verifica-se que aquando do valor mínimo da norma média do gradiente a unidade 5 nunca é chamada a contribuir para satisfazer a demanda. A tabela 7.4 apresenta o valor do multiplicador de Lagrange final em cada hora aquando da convergência após 87 iterações, ou seja, no momento que alcança o valor de 8 % da norma média do gradiente. Este é o valor de custo para otimização da produção de todas as unidades em cada hora. Os valores registados nestas duas tabelas são os valores finais respeitantes à afetação das 5 unidades, ou seja, apenas os valores respeitantes à última iteração são considerados para estabelecer a afetação das unidades.

Tabela 7.3: Planeamento do compromisso das 5 unidades no período de 24 horas.

Horas	Unidade 1	Unidade 2	Unidade 3	Unidade 4	Unidade 5
1	1	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0
6	1	0	1	0	0
7	1	1	1	0	0
8	1	1	1	1	0
9	1	0	1	0	0
10	1	1	1	0	0
11	1	1	1	0	0
12	1	0	1	0	0
13	1	1	1	1	0
14	1	1	1	1	0
15	1	1	1	0	0
16	1	1	1	1	0
17	1	1	1	0	0
18	1	1	1	0	0
19	1	1	1	1	0
20	1	1	1	0	0
21	1	1	1	1	0
22	1	0	1	0	0
23	1	0	0	0	0
24	1	0	0	0	0

Tabela 7.4: Multiplicador de Lagrange final estimado para cada subintervalo.

Horas	λ
1	18,84
2	18,85
3	21,0075
4	18,99
5	22,0025
6	22,2425
7	23,7
8	27,4875
9	22,24
10	22,3275
11	22,35
12	22,1225
13	28,2225
14	28,7325
15	25,725
16	27,7125
17	22,3275
18	22,275
19	27,5525
20	25,725
21	27,46
22	22,125
23	22,0025
24	18,99

Se tivermos um bom valor inicial de λ^k , o método da relaxação Lagrangeana fornece ótimas soluções com menor esforço computacional [17]. Uma boa evolução da função dual está condicionada a uma boa escolha do valor inicial do valor do passo, o ideal é que este seja próximo do valor máximo, e de seguida com valores de passo pequenos o valor obtido seja melhorado. Como verificado este processo depende da sabedoria e experiência do utilizador [18].

CAPÍTULO

8

Conclusão

Este capítulo apresenta em síntese as principais conclusões sobre a problemática da afetação de unidades térmicas baseando-se na metodologia da Relaxação Lagrangeana.

8.1 Conclusões principais

Esta dissertação visa como principais objetivos compreender as dificuldades observadas na resolução do problema primal, bem como perceber as limitações da relaxação Lagrangeana na resolução do problema dual de Lagrange, para obtenção de uma solução no problema da afetação de unidades.

As ilustrações apresentadas ao longo desta dissertação visam expor as dificuldades encontradas na resolução da problemática da afetação de unidades. A resolução da solução do problema primal de forma direta apresenta diversas dificuldades, tendo em conta a dimensão e a complexidade real que o problema pode tomar. A relaxação Lagrangeana é um método de otimização que visa ultrapassar as dificuldades apresentadas na resolução do problema primal, resolvendo o problema de forma indireta, no entanto, a qualidade da solução obtida está muito dependente do utilizador e da sua experiência. Para salientar as vantagens e as desvantagens, bem como compreender a sua complexidade, aquando da aplicação desta técnica de otimização na resolução do problema primal, recorre-se à ilustração e análise do mesmo.

A decomposição do problema primal é alcançada mediante a aplicação do método da relaxação Lagrangeana que de forma indireta permite obter a solução do problema. Esta decomposição permite que cada recurso passe a constituir uma entidade única, podendo ser otimizado individualmente. Ao relaxarmos as restrições, nada garante que a solução do problema dual de Lagrange seja igual à solução do problema primal, visto que, os problemas reais de afetação de unidades, são problemas de larga escala, poderemos então afirmar que existe sempre salto de dualidade. Como a obtenção do valor ótimo do problema dual de Lagrange é algo complicado, bem como encontrar as soluções subótimas, tenta-se por norma convergir para um valor na vizinhança do ótimo do problema dual de Lagrange, ao qual corresponderá uma determinada afetação de unidades.

Por último e de forma a ter contacto com esta técnica de otimização, é conduzida uma análise para um problema de afetação ótima de unidades recorrendo à relaxação Lagrangeana, mostrando que o algoritmo consegue uma convergência, apesar de não ser idealmente fazível. Este método pode ser aplicado a sistemas de maior complexidade, obtendo uma rápida solução. Podemos concluir que para se conseguir uma boa fazibilidade com este método (neste exemplo apresentado), seria necessário recorrer a outros parâmetros, bem como a novas formas de atualização do valor do passo. Uma boa atualização do passo permite obter um bom valor de fazibilidade para o problema dual e dessa forma um valor fazível para o problema primal.

A capacidade do método da relaxação Lagrangeana em encontrar uma solução factível para sistemas de grande potência com uma seleção adequada dos multiplicadores de Lagrange é a principal vantagem do método, bem como uma fácil computação.

8.2 Direções de investigação

Tal como foi explicado, o problema primal não permite uma solução factível, desta forma o desenvolvimento de algoritmos aplicando novas técnicas é algo interessante, sendo a função desses algoritmos a de encontrar um método que conseguisse estabelecer, de forma ótima, uma solução factível para o problema de coordenação térmica de curto prazo. Bem como obter a coordenação integrando diversas fontes de energia. O desenvolvimento de novas técnicas de atualização do valor do passo para o método da relaxação Lagrangeana é também outra direção de investigação.

Referências Bibliográficas

- [1] V. K. Kamboj, "A novel hybrid PSO-GWO approach for unit commitment problem," *Neural Comput. Appl.*, vol. 27, no. 6, pp. 1643-1655, 2015.
- [2] J. P. S. Catalão, S. J. P. S. Mariano, V. M. F. Mendes, and L. A. F. M., "PLANEAMENTO OPERACIONAL DE CURTO PRAZO PARA UMA CENTRAL HIDROELÉCTRICA," *CEEL- Centro de Energia Elétrica de Lisboa*, 2003.
- [3] B. Bezerra, A. Veiga, L. A. Barroso, and M. Pereira, "Assessment of parameter uncertainty in autoregressive streamflow models for stochastic long-term hydrothermal scheduling," *Power Energy Soc. Gen. Meet. 2012 IEEE*, pp. 1-8, 2012.
- [4] C. Nallasivan, D. S. Suman, J. Henry, and S. Ravichandran, "A Novel Approach for Short Term Hydrothermal Scheduling Using Hybrid Technique," *Power India Conf. 2006 IEEE*, pp. 703-707, 2006.
- [5] I. A. Farhat and M. E. E.- Hawary, "Short-Term Hydro-Thermal Scheduling Using an Improved Bacterial Foraging Algorithm," *Electr. Power Energy Conf. IEEE*, pp. 1-5, 2009.
- [6] S. Thakur, C. Boonchay, and W. Ongsakul, "Optimal hydrothermal generation scheduling using self-organizing hierarchical PSO," *Power Energy Soc. Gen. Meet. 2010 IEEE*, pp. 1-6, 2010.
- [7] V. S. Bisht, G. Shah, N. Kushwaha, and V. Gupta, "Genetic Algorithm Solution for A Convex Hydro-Thermal Generation Scheduling," *Power India Conf. 2012 IEEE Fifth*, pp. 646-650, 2012.
- [8] H. Zhang, J. Zhou, Y. Zhang, N. Fang, and R. Zhang, "Short term hydrothermal

- scheduling using multi-objective differential evolution with three chaotic sequences,” *Electr. Power Energy Syst.*, vol. 47, pp. 85-99, 2013.
- [9] J. Zhang, J. Wang, and C. Yue, “Small Population-Based Particle Swarm Optimization for Short-Term Hydrothermal Scheduling,” *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 27, no. 1, pp. 142-152, 2012.
- [10] R. W. Jimenez and V. L. Paucar, “Long Term Hydrothermal Scheduling Linear Programming Model for Large Scale Power Systems,” *Power Eng. 2007 Large Eng. Syst. Conf.*, pp. 96-100, 2007.
- [11] Ü. Başaran Filik and M. Kurban, “Solving unit commitment problem using modified subgradient method combined with simulated annealing algorithm,” *Math. Probl. Eng.*, vol. 2010, pp. 1-15, 2010.
- [12] F. Y. K. Takigawa, E. C. Finardi, and E. L. da Silva, “A decomposition strategy to solve the Short-Term Hydrothermal Scheduling based on Lagrangian Relaxation,” *Transm. Distrib. Conf. Expo. Lat. Am. (T&D-LA), 2010 IEEE/PES*, pp. 681-688, Nov. 2010.
- [13] J. A. Marmolejo-Saucedo and R. Rodríguez-Aguilar, “A proposed method for design of test cases for economic analysis in power systems,” *J. Appl. Res. Technol.*, vol. 13, no. 3, pp. 428-434, 2015.
- [14] A. L. Diniz, C. Sagastizábal, and M. E. P. Maceira, “Assessment of Lagrangian Relaxation with Variable Splitting for Hydrothermal Scheduling,” *Power Eng. Soc. Gen. Meet. 2007. IEEE*, pp. 1-8, 2007.
- [15] D. P. Bertsekas, G. S. Lauer, N. R. Sandell, and T. A. Posbergh, “Optimal Short-Term Scheduling of Large-Scale Power Systems,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 28, no. 1, pp. 1-11, 1983.
- [16] H. Ye, Q. Zhai, Y. Ge, and H. Wu, “A revised subgradient method for solving the dual problem of hydrothermal scheduling,” *Power Energy Eng. Conf. (APPEEC), 2011 Asia-Pacific*, 2011.
- [17] P. K. Singhal, “Generation Scheduling Methodology for Thermal Units Using Lagrangian Relaxation,” *Eng. (NUICONE), 2011 Nirma Univ. Int. Conf.*, pp. 1-6, 2011.
- [18] S. J. P. S. Mariano, “Sistemas de Decisão Ótima em Coordenação Hidrotérmica para Planeamento Operacional,” Universidade da Beira Interior, 2000.
- [19] A. Pacheco, “Otimização da exploração de centrais hídricas utilizando EPSO , em ambiente de mercado,” Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2013.

- [20] G. M. Rochette, "O Mercado Ibérico de Energia : O Mercado de Derivados Energéticos e as Implicações do Real Decreto 216 / 2014 em Portugal," Universidade de Coimbra, 2014.
- [21] REN, "Dados técnicos 2016," 2016. [Online]. Available: <https://www.ren.pt/>.
- [22] L. A. F. M. Ferreira, T. Andersson, C. F. Irnparato, T. E. Miller, and C. K. Pang, "Short-term resource scheduling in multi-area hydrothermal power systems," *Int. J. Electr. Power Energy Syst.*, vol. 11, no. 3, pp. 200-212, 1989.
- [23] T. T. Nguyen, D. N. Vo, and A. V. Truong, "Cuckoo search algorithm for short-term hydrothermal scheduling," *Appl. Energy*, vol. 132, pp. 276-287, 2014.
- [24] S. Y. W. Wong, "Hybrid simulated annealing / genetic algorithm approach to short-term hydro-thermal scheduling with multiple thermal plants," *Electr. Power Energy Syst.*, vol. 23, pp. 565-575, 2001.
- [25] Y. W. Wong and K. P. Wong, "Short-term hydrothermal scheduling Part 1: simulated annealing approach," *IEE Proc. - Gener. Transm. Distrib.*, vol. 141, no. 5, pp. 497-501, 1994.
- [26] Y. W. Wong and K. P. Wong, "Short-term hydrothermal scheduling Part 2: parallel simulated annealing approach," *IEE Proc. - Gener. Transm. Distrib.*, vol. 141, no. 5, pp. 502-506, 1994.
- [27] P. C. Yang, H.-T. Yang, and C.-L. Huang, "Scheduling short-term hydrothermal generation using evolutionary programming techniques," *IEE Proc. - Gener. Transm. Distrib.*, vol. 143, no. 4, pp. 371-376, 1996.
- [28] M. Basu, "Improved differential evolution for short-term hydrothermal scheduling," *Electr. POWER ENERGY Syst.*, vol. 58, pp. 91-100, 2014.
- [29] H. Zhang, J. Zhou, Y. Zhang, Y. Lu, and Y. Wang, "Culture belief based multi-objective hybrid differential evolutionary algorithm in short term hydrothermal scheduling," *Energy Convers. Manag.*, vol. 65, pp. 173-184, 2013.
- [30] S. Gupta and N. Narang, "Integrated PSO-SQP technique for Short-term Hydrothermal Scheduling," *Int. J. Adv. Res. Comput. Eng. Technol.*, vol. 4, no. 4, pp. 1423-1428, 2015.
- [31] T. T. Nguyen and D. N. Vo, "Multi-Objective Short-Term Fixed Head Hydrothermal Scheduling Using Augmented Lagrange Hopfield Network," *J. Electr. Eng. Technol.*, vol. 9, no. 6, pp. 1882-1890, 2014.
- [32] M. Basu, "Hopfield neural networks for optimal scheduling of fixed head hydrothermal

- power systems,” *Electr. Power Syst. Res.*, vol. 64, pp. 11-15, 2003.
- [33] S. J. P. S. Mariano, J. P. S. Catalão, V. M. F. Mendes, and L. A. F. M. Ferreira, “Optimising power generation efficiency for head-sensitive cascaded reservoirs in a competitive electricity market,” *Electr. Power Energy Syst.*, vol. 30, pp. 125-133, 2008.
- [34] C. Josu and D. M. Ojeda-esteybar, “Hydrothermal Scheduling with Variable Head Hydroelectric Plants : Proposed Strategies using Benders Decomposition and Outer Approximation,” *Power Energy Conf. Illinois (PECI), 2016 IEEE*, pp. 1-8, 2016.
- [35] S. Rujic, “Optimal Distance Method for Lagrangian Multipliers Updating in Short-Term Hydro-Thermal Coordination,” *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 13, no. 4, pp. 1439-1444, 1998.
- [36] N. J. Redondo, “SHORT-TERM HYDRO-THERMAL COORDINATION BY LAGRANGIAN RELAXATION : SOLUTION OF THE DUAL PROBLEM,” *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 14, no. 1, pp. 89-95, 1999.
- [37] R. Kumar and V. Garg, “Hydro-Thermal Scheduling,” *Am. Int. J. Res. Sci. Technol. Eng. Math.*, pp. 145-148, 2013.
- [38] R. N. Rodrigues, E. L. Silva, E. C. Finardi, and F. Y. K. Takigawa, “Solving the Short-Term Scheduling Problem of Hydrothermal Systems via Lagrangian Relaxation and Augmented Lagrangian,” *Math. Probl. Eng.*, vol. 2012, pp. 1-18, 2012.
- [39] C. Beltran and F. J. H. H, “Short-Term Hydrothermal Coordination by Augmented Lagrangean Relaxation : a new Multiplier Updating,” *Investig. Oper.*, vol. 8, no. 1,2,3, pp. 63-76, 1999.
- [40] E. Gil and J. Araya, “Short-term Hydrothermal Generation Scheduling Using a Parallelized Stochastic Mixed-integer Linear Programming Algorithm,” *Energy Procedia*, vol. 87, pp. 77-84, 2016.
- [41] N. Petcharaks and W. Ongsakul, “Hybrid Enhanced Lagrangian Relaxation and Quadratic Programming for Hydrothermal Scheduling,” *Electr. Power Components Syst.*, vol. 35, no. 1, pp. 19-42, 2007.
- [42] R. Liang, M. Ke, and Y. Chen, “Coevolutionary Algorithm Based on Lagrangian Method for Hydrothermal Generation Scheduling,” *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 24, no. 2, pp. 499-507, 2009.
- [43] P. K. Roy, M. Pradhan, and T. Paul, “Krill herd algorithm applied to short-term hydrothermal scheduling problem,” *Ain Shams Eng. J.*, pp. 1-13, 2015.

- [44] J. Catalão, S. Mariano, V. Mendes, and L. Ferreira, "Previsão dos Preços da Energia Eléctrica através de Redes Neurais Artificiais," *APDIO - Associação Portuguesa de Investigação Operacional*, vol. 27, pp. 151-163, 2007.
- [45] P. D. S. Gomes, "Simulação de um Pool Simétrico com Validação Técnica do Despacho Provisório e Apresentação de Medidas Corretivas Baseadas num Despacho Ótimo," Instituto Superior de Engenharia do Porto, 2012.
- [46] J. P. S. Catalao, S. J. P. S. Mariano, V. M. F. Mendes, and L. A. F. M. Ferreira, "Scheduling of head-sensitive cascaded hydro systems: A nonlinear approach," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 24, no. 1, pp. 337-346, 2009.
- [47] S. Padmini, R. Jegatheesan, and D. F. Thayyil, "A Novel Method for Solving Multi-Objective Hydrothermal Unit Commitment and Sheduling for GENCO Using Hybrid LR-EP Technique," *Procedia Comput. Sci.*, vol. 57, pp. 258-268, 2015.
- [48] J. P. S. Catalão, S. J. P. S. Mariano, V. M. F. Mendes, and L. A. F. M. Ferreira, "A practical approach for profit-based unit commitment with emission limitations," *Electr. Power Energy Syst.*, vol. 32, no. 3, pp. 218-224, 2010.
- [49] J. A. Muckstadt and S. A. Koenig, "An Application of Lagrangian Relaxation to Scheduling in Power-Generation Systems," *Oper. Res.*, vol. 25, no. 3, pp. 387-403, 1977.
- [50] A. Merlin and P. Sandrin, "A New Method for Unit Commitment at Electricite de France," *IEEE Trans. Power Appar. Syst.*, vol. PAS-102, no. 5, pp. 1218-1225, 1983.
- [51] F. M. B. Ferreira, "Afetação de Unidades Térmicas - Relaxação Lagrangeana," Universidade da Beira Interior, 2011.
- [52] C. Lemaréchal, C. Sagastizábal, F. Pellegrino, and A. Renaud, "Bundle methods applied to the unit-commitment problem," *Syst. Model. Optim.*, pp. 395-402, 1996.
- [53] C. S. Chuang and G. W. Chang, "Lagrangian Relaxation-Based Unit Commitment Considering Fast Response Reserve Constraints *," *Energy Power Eng.*, vol. 5, pp. 970-974, 2013.
- [54] H. Zeynal, L. X. Hui, Y. Jiazhen, M. Eidiani, and B. Azzopardi, "Improving Lagrangian Relaxation Unit Commitment with Cuckoo Search Algorithm," *2014 IEEE Int. Conf. Power Energy*, pp. 77-82, 2014.
- [55] N. C. Nayak and C. C. A. Rajan, "An evolutionary programming embedded Tabu search method for hydro-thermal scheduling with cooling - banking constraints," *J. Eng. Technol. Res.*, vol. 5, no. 2, pp. 21-32, 2013.

- [56] S. J. P. S. Mariano, *Controlo e Operação de Sistemas de Energia Elétrica - Caderno de exercícios*. Universidade da Beira Interior.
- [57] F. Montibeller, “Aplicação do método de Feixes ao problema de Planeamento da Operação de Curto Prazo para Sistemas Hidrotérmicos,” Universidade Federal de Santa Catarina, 2003.