

# DESEMPENHO DE MODELOS DE TURBULÊNCIA EM REGIME CONVECTIVO MISTO – APLICAÇÃO A CASO DE ESTUDO

P. D. Gaspar <sup>1</sup>, R. A. Pitarma <sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Universidade da Beira Interior*  
*Departamento de Engenharia Electromecânica*  
*Rua Fonte do Lameiro – Edifício 1 das Engenharias, 6201-001 Covilhã*  
*e-mail: [dinis@demnet.ubi.pt](mailto:dinis@demnet.ubi.pt)*

<sup>2</sup> *Instituto Politécnico da Guarda*  
*Escola Superior de Tecnologia e Gestão*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*  
*Avenida Dr. Francisco Sá Carneiro, n.º 50, 6300-559 Guarda*  
*e-mail: [rpitarma@ipg.pt](mailto:rpitarma@ipg.pt)*

Resumo: A turbulência é um tipo de movimentação fluida instável e altamente irregular no espaço e no tempo, tridimensional, sempre rotacional e a números de Reynolds elevados, dissipativa e fortemente difusiva. Face à crescente utilização da simulação numérica para a previsão de escoamentos nos mais diversos campos de engenharia, foram desenvolvidos diversos modelos de turbulência com características próprias. De um modo geral, o grau de complexidade de cada modelo de turbulência depende das simplificações e das suposições que acarreta. Neste trabalho é considerado um estudo numérico dum equipamento expositor refrigerado, cujo modelo foi desenvolvido com o código de Dinâmica de Fluidos Computacional (DFC) – FLUENT<sup>®</sup>. O modelo físico-matemático tem por base as equações gerais que regem os escoamentos com transmissão de calor, assumindo-se o escoamento bidimensional, não isotérmico em regime estacionário, considerando-se o fluido como um gás ideal e com diversas propriedades calculadas através da teoria cinética de gases. O processo de transferência de calor envolve os regimes de convecção natural e forçada. O propósito do estudo é analisar e comparar as previsões do campo de temperaturas utilizando os seguintes modelos de turbulência: *Spalart-Allmaras*, *k-ε padrão* e *k-ε RNG*. As previsões numéricas são comparadas com resultados experimentais, referindo-se sucintamente os méritos e limitações de cada modelo.

© 2003

Palavras Chave: Refrigeração; Equipamentos expositores abertos; Modelo computacional; Turbulência; Convecção mista; Validação experimental; Fluent.

## 1. INTRODUÇÃO

É amplamente aceite que as equações de conservação de quantidade movimento e de conservação de massa formam um conjunto completo de equações, cuja solução corresponde a uma descrição válida dos escoamentos laminares e turbulentos. Face à crescente necessidade industrial do cálculo dos campos de escoamento turbulento com as finalidades de projecto e de análise do desempenho de equipamentos e devido às dificuldades da simulação directa de escoamentos turbulentos de problemas típicos de engenharia, os estudos não analisam os detalhes da movimentação turbulenta, mas sim os seus efeitos nas propriedades do escoamento. Assim sendo, a resolução matemática é efectuada em função de quantidades médias e de flutuação. Um modelo de turbulência pode ser descrito por um conjunto de equações e das relações necessárias para determinar as correlações turbulentas desconhecidas que surgem a partir do processo de média. Os modelos de turbulência podem ser classificados como modelos baseados no conceito de “viscosidade turbulenta” ou modelos das tensões de Reynolds. O grau de precisão de cada modelo de turbulência depende da validade das suposições que acarreta.

O presente estudo é uma extensão do estudo numérico e experimental dum equipamento expositor refrigerado aberto ao ar ambiente descrito em pormenor em Gaspar (2002). Inicialmente foi realizada uma análise qualitativa do problema através de variados ensaios experimentais. Estes ensaios preliminares permitiram também, fornecer diversos valores experimentais necessários para especificação das condições de fronteira do modelo computacional. De seguida, foi desenvolvido o modelo computacional através da modelação física e matemática dos fenómenos físicos relevantes, a fim de efectuar as simulações numéricas do desempenho térmico do equipamento. Foram realizados ensaios experimentais adicionais com o objectivo de validar o modelo teórico. A concordância obtida, através da confrontação de valores medidos e calculados, é satisfatória para aplicação em engenharia. Por fim, com a finalidade de melhorar o desempenho térmico do equipamento, foram investigados diversos casos de estudo correspondentes a diversas configurações geométricas e funcionais.

Neste trabalho é investigado o desempenho de modelos de turbulência aplicados ao caso descrito. Trata-se de um escoamento assumido bidimensional, em regime convectivo misto, com marcada convecção forçada na zona da cortina de ar que estabelece uma vedação aerodinâmica com o ar ambiente. Assim, são analisadas e comparadas as previsões de uma das variáveis escalares transportadas (temperatura) fazendo uso de diferentes modelos de turbulência baseados no conceito de viscosidade turbulenta (*Spalart-Allmaras*, *k- $\epsilon$  padrão* e *k- $\epsilon$  RNG*) com os resultados experimentais, de modo a avaliar as suas vantagens e limitações.

Na simulação numérica do equipamento referido foram modificados alguns parâmetros relativamente ao estudo original (Gaspar *et. al*, 2002), pois embora se tenha continuado a assumir o escoamento como bidimensional, turbulento e não isotérmico em regime estacionário, o fluido (ar) considerou-se como um gás ideal e com diversas propriedades calculadas pela teoria cinética de gases. Outra diferença advém deste modelo numérico ser suportado pelo código *FLUENT*<sup>®</sup>, resolvendo as equações diferenciais discretizadas através do método das diferenças finitas – formulação de volumes de controlo, tal como exposto por Patankar (1980). Sendo baseado na correcção sucessiva do campo de pressão para satisfação da conservação de massa, o acoplamento entre a equação da conservação de massa e de quantidade de movimento foi realizado através do algoritmo SIMPLEC, segundo um processo numérico iterativo para a malha não-ortogonal com 14911 volumes de controlo do domínio computacional. As condições de fronteira adoptadas no domínio de cálculo para simulação das características funcionais do equipamento são as seguintes: para as paredes sólidas foi imposta a temperatura superficial e considerada a condição de não-deslizamento; nas aberturas de insuflação/aspiração

foram impostas a temperatura, a velocidade, a energia cinética turbulenta e a sua taxa de dissipação; na abertura ao ar ambiente foi imposta a temperatura e a pressão; por fim, para simular o ganho de calor inerente à iluminação interior foi considerada uma condição de fronteira do tipo fluxo de calor imposto correspondente ao valor da potência dissipada.

## 2. SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS TURBULENTOS

As equações que traduzem a evolução dos fenômenos físicos que se pretendem tratar são compostas pelas equações da conservação de massa e de quantidade de movimento, em termos de valores médios no tempo, descritas através da decomposição de Reynolds:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j}(-\rho \overline{u'_i u'_j}) \quad (2)$$

O processo de média introduz correlações turbulentas desconhecidas nas equações do escoamento médio. Fisicamente, representam o transporte turbulento de quantidade de movimento, calor e massa devido à movimentação turbulenta. O transporte de quantidade de movimento ( $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ ) age como uma tensão no fluido e é denominado por Tensor de Reynolds. Um modelo de turbulência pode ser descrito por um conjunto de equações e das relações necessárias para determinar as correlações turbulentas desconhecidas que surgem a partir do processo de média. Os modelos de turbulência podem ser classificados como modelos de viscosidade turbulenta ou modelos das tensões de Reynolds. A descrição detalhada de diversos modelos de turbulência com maior aceitação pode ser encontrado em Rodi (1980) e Launder & Spalding (1974).

A aproximação média de Reynolds para a modelação da turbulência requer que o Tensor de Reynolds seja modelado apropriadamente. Um método comum consiste na aproximação de Boussinesq que relaciona o Tensor de Reynolds com os gradientes das velocidades médias:

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left( \rho \kappa + \mu_t \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \delta_{ij} \quad (3)$$

## 3. MODELOS DE TURBULÊNCIA

A hipótese de Boussinesq é usada no modelo *Spalart-Allmaras* e nos modelo  $k-\varepsilon$  e suas variantes. A vantagem desta aproximação reside no relativo reduzido esforço computacional associado ao cálculo da viscosidade turbulenta,  $\mu_t$ . Nos modelos que fazem uso do conceito de viscosidade turbulenta, assume-se que as correlações desconhecidas são proporcionais aos gradientes espaciais das quantidades que transportam. A viscosidade turbulenta não é uma propriedade do fluido, mas depende do estado de turbulência em que o fluido em estudo se encontra. No caso do modelo de *Spalart-Allmaras*, apenas uma equação adicional (representativa da viscosidade turbulenta) é resolvida. No caso dos modelos  $k-\varepsilon$  e variantes, são resolvidas duas equações de transporte adicionais (para a energia cinética turbulenta,  $k$ , e para a sua taxa de dissipação,  $\varepsilon$ , sendo a viscosidade turbulenta calculada em função destas duas propriedades).

### Quadro 1. Expressão da viscosidade turbulenta nos diferentes modelos de turbulência testados

Modelo de turbulência	<i>Spalart-Allmaras</i>	<i>k-ε padrão e k-ε RNG</i>
Modelação da viscosidade turbulenta	$\mu_t = \rho \tilde{\nu} \left[ \frac{(\tilde{\nu}/\nu)^3}{(\tilde{\nu}/\nu)^3 + C_{v1}^3} \right]$	$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$

#### 3.1 Modelo de turbulência de 1 equação: Modelo *Spalart-Allmaras*

O modelo proposto por Spalart & Allmaras (1992) é um modelo de uma equação relativamente simples que resolve a equação de transporte modelada para a viscosidade cinemática turbulenta. Este modelo foi desenvolvido especificamente para aplicações aeroespaciais que envolvessem escoamentos limitados por paredes sólidas e tem apresentado bons resultados na simulação de camadas limite sujeitas a gradientes de pressão adversos. No entanto, trata-se de um modelo relativamente novo, pelo que ainda não é possível atribuir-lhe a capacidade de modelação da turbulência para todos os tipos de escoamentos complexos que se encontram no domínio da engenharia. Além disso, os modelos de uma equação são frequentemente criticados pela sua incapacidade de assumirem rapidamente variações no comprimento de escala, tal como sucede quando o escoamento varia abruptamente da limitação da parede sólida para escoamento livre. A variável transportada (Quadro 2.) no modelo *Spalart-Allmaras* é idêntica à viscosidade cinemática turbulenta,  $\tilde{\nu}$ , à excepção da região próxima das paredes sólidas afectadas pelos efeitos viscosos. Este considera uma modificação proposta por Dacles-Mariani, *et al.* (1995) que leva em conta os efeitos da tensão média na produção de turbulência.

#### 3.2 Modelo de turbulência de 2 equações: Modelo *k-ε padrão e a sua variante RNG*

O modelo *k-ε padrão* proposto por Launder & Spalding (1972), é um modelo semi-empírico assente no conceito de viscosidade turbulenta e baseado na modelação das equações de transporte (Quadro 2.) para a energia cinética turbulenta,  $k$ , e para a sua taxa de dissipação,  $\varepsilon$ . Os modelos de turbulência *k-ε* de duas equações têm sido muito utilizados nas previsões numéricas de escoamento de fluidos e na transmissão de calor devido às suas capacidades de simulação de uma gama elevada de escoamentos com ajuste mínimo dos coeficientes, e à sua relativa simplicidade de formulação. Apresentando-se como sendo um modelo robusto, económico e com precisão aceitável, é restrito a regiões em que o escoamento é turbulento completamente desenvolvido enquanto que o escoamento afectado pela viscosidade nas proximidades das paredes é ligado através do uso de Leis de Parede (Rodi, 1980).

As diferenças mais significativas entre o modelo *padrão* e as suas variantes consistem no método de cálculo da viscosidade turbulenta; nos Números de Prandtl turbulento que governam a difusão turbulenta de  $k$  e  $\varepsilon$ , e nos termos de geração e destruição presentes na equação da taxa de dissipação de energia cinética turbulenta. À medida que as capacidades e deficiências do modelo de turbulência *k-ε padrão* foram sendo conhecidas (Launder & Spalding, 1974), foram implementadas alterações ao modelo com o objectivo de melhorar o seu desempenho. Uma dessas variantes é o modelo *k-ε RNG* desenvolvido Yakhot & Orszag (1986), tal como exposto em Ferreira & Sousa (2002), obtido através da técnica estatística denominada teoria de renormalização por grupos. As suas equações de transporte são semelhantes ao modelo *padrão*, mas foi considerada uma reavaliação das constantes (Quadro 3.); também foi deduzida analiticamente uma equação diferencial para a viscosidade turbulenta devido ao procedimento de eliminação de escalas com base na teoria de renormalização por grupos; foi introduzido um termo

adicional na equação de  $\varepsilon$  (Eq. 4), função da taxa de deformação do escoamento que melhora significativamente a precisão na simulação de escoamentos.

$$R_\varepsilon = \frac{C_\mu \rho \eta^3 (1 - \eta/\eta_0)}{1 + \beta \eta^3} \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad \text{onde } \eta = Sk/\varepsilon \quad (4)$$

**Quadro 2. Equações de transporte dos diferentes modelos de turbulência testados**

Modelos	Equações de transporte
<i>Spalart-Allmaras</i>	$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \tilde{v}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \tilde{v} u_j) = G_v + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\mu + \rho \tilde{v}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right\} + C_{b2} \rho \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right)^2 \right] - Y_v + S_{\tilde{v}}$
<i>k-<math>\varepsilon</math> padrão</i>	$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \varepsilon - Y_M + S_k$
<i>k-<math>\varepsilon</math> RNG</i>	$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \varepsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + C_{3\varepsilon} G_b) - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + S_\varepsilon$

As constantes dos diferentes modelos testados neste estudo encontram-se listadas no Quadro 3.

**Quadro 3. Constantes dos diferentes modelos de turbulência testados**

Modelo	Constantes								
	$C_{b1}$	$C_{b2}$	$\sigma_{\tilde{v}}$	$C_{v1}$	$C_{\omega1}$	$C_{\omega2}$	$C_{\omega3}$	$\kappa$	
<i>Spalart-Allmaras</i>	0,1335	0,622	0,75	7,1	$C_{\omega1} = \frac{C_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + C_{b2}}{\sigma_{\tilde{v}}}$	0,3	2	0,4187	
<i>k-<math>\varepsilon</math> padrão</i>	$C_{1\varepsilon}$	$C_{2\varepsilon}$	$C_{3\varepsilon}$	$C_\mu$	$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$	$\eta_0$	$\beta$	
	1,44	1,92	1	0,09	1	1,3	-	-	
<i>k-<math>\varepsilon</math> RNG</i>	1,42	1,68	1	0,085	0,75	0,75	4,38	0,012	

Nos modelos de turbulência testados, o transporte de calor turbulento é modelado fazendo uso do conceito da analogia de Reynolds para a transferência de quantidade de movimento turbulenta. A equação da energia vem:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_i} [u_i (\rho E + p)] = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( k + \frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial x_j} + u_i (\tau_{ij})_{eff} \right] + S_h \quad (5)$$

#### 4. RESULTADOS

Nas Figs 1 e 3 são apresentados as previsões dos campos de temperatura e dos contornos das linhas de corrente, fazendo uso dos diferentes modelos de turbulência. As previsões obtidas com o modelo *Spalart-Allmaras* parecem fisicamente realistas.

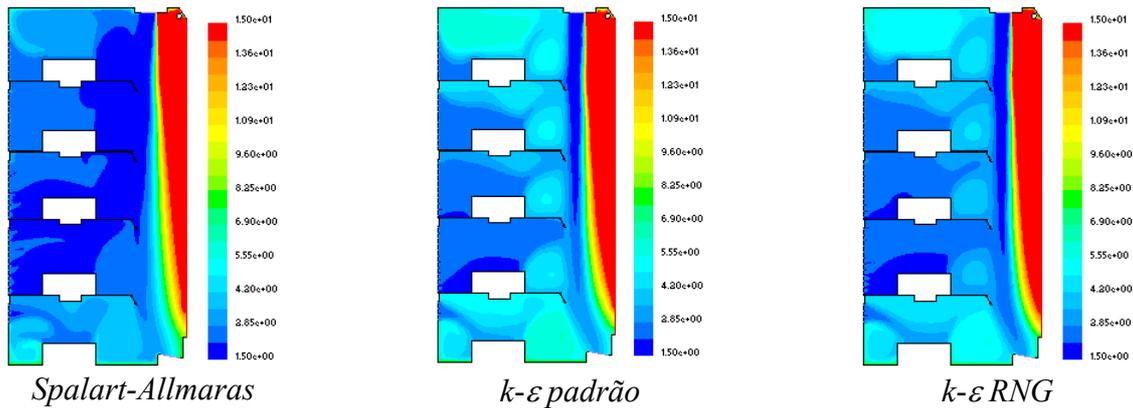


Fig. 1. Comparação das previsões dos campos de temperatura.

No entanto, dado que a gama de temperaturas encontra-se entre 1,5 °C e 25 °C, e tendo em consideração os perfis comparativos segundo a altura adimensional  $z/z_{max}$  das previsões numéricas com os valores experimentais para diversos planos  $x/x_{max}$  apresentados na Fig. 2, verifica-se que as previsões deste modelo são menos precisas. Nestes perfis, os valores experimentais encontram-se representados por ●, enquanto as previsões numéricas obtidas com os modelos *Spalart-Allmaras*, *k-ε padrão* e *k-ε RNG* são representadas respectivamente por ◆, ■ e ▲. Dos modelos testados, tanto com modelo *k-ε padrão* como com o *k-ε RNG* as previsões são mais coerentes para todo o domínio de cálculo. Ainda que as previsões para o domínio de cálculo sejam distintas, pela análise do Quadro 4. onde estão apresentados os valores do erro absoluto médio global, verifica-se que estes modelos prevêem com igual precisão o transporte da temperatura no escoamento. Ainda de salientar, que estas extensões ao modelo original desenvolvido com este código de Dinâmica de Fluidos Computacional (Gaspar *et al.*, 2003), quer baseadas no modelo *k-ε padrão* quer no *k-ε RNG*, apresentam uma redução do erro absoluto médio em 0,8 °C, o que se traduz numa eficácia adicional do modelo computacional.

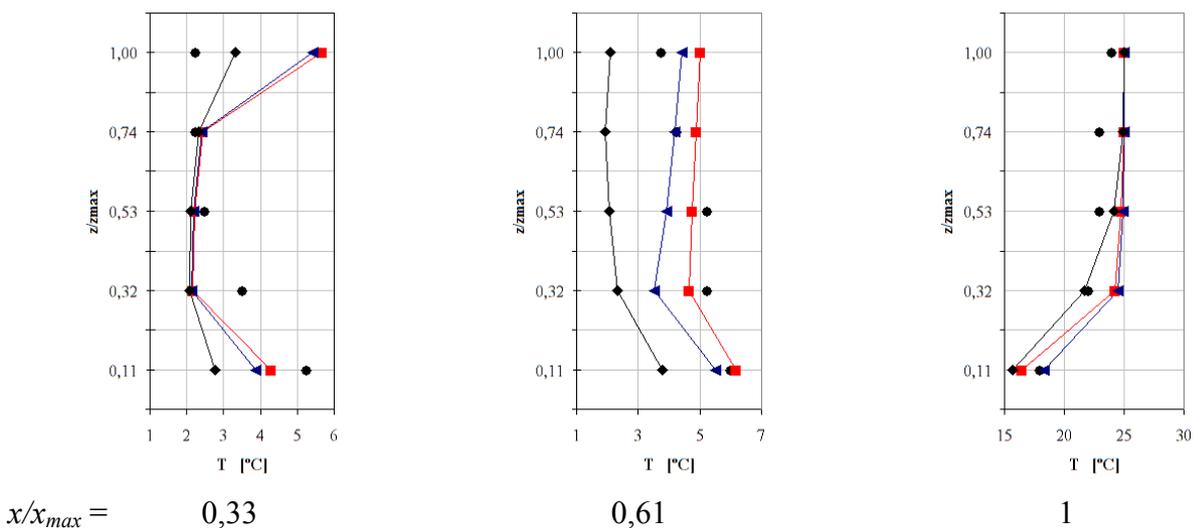


Fig. 2. Perfis comparativos das previsões numéricas da temperatura com os valores experimentais

Quadro 4. Erro absoluto médio das previsões da temperatura com os modelos testados

Modelo de turbulência	<i>Spalart-Allmaras</i>	<i>k-ε padrão</i>	<i>k-ε RNG</i>
Erro absoluto médio	1,6	1,2	1,2

Na Fig. 3 são expostas as previsões dos contornos das linhas de corrente que de um modo geral são muito semelhantes, tanto qualitativamente e quantitativamente, embora os modelos computacionais baseados no  $k-\varepsilon$  apresentem recirculações mais pronunciadas na área de exposição dos produtos alimentares.

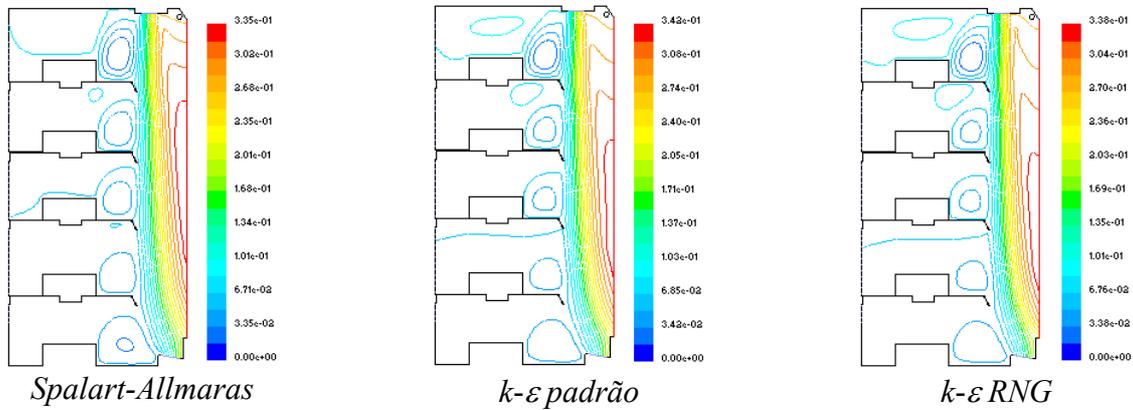


Fig. 3. Comparação das previsões dos contornos das linhas de corrente.

Esta situação é corroborada com a apresentação na Fig.4 dos perfis comparativos das previsões numéricas da magnitude da velocidade para os pontos de validação. Enquanto as previsões obtidas fazendo uso dos modelos  $k-\varepsilon$  e variante  $RNG$  são muito semelhantes, as obtidas com a implementação do modelo *Spalart-Allmaras*, na proximidade das paredes ora sub-prevêm ou sobre-prevêm a velocidade.

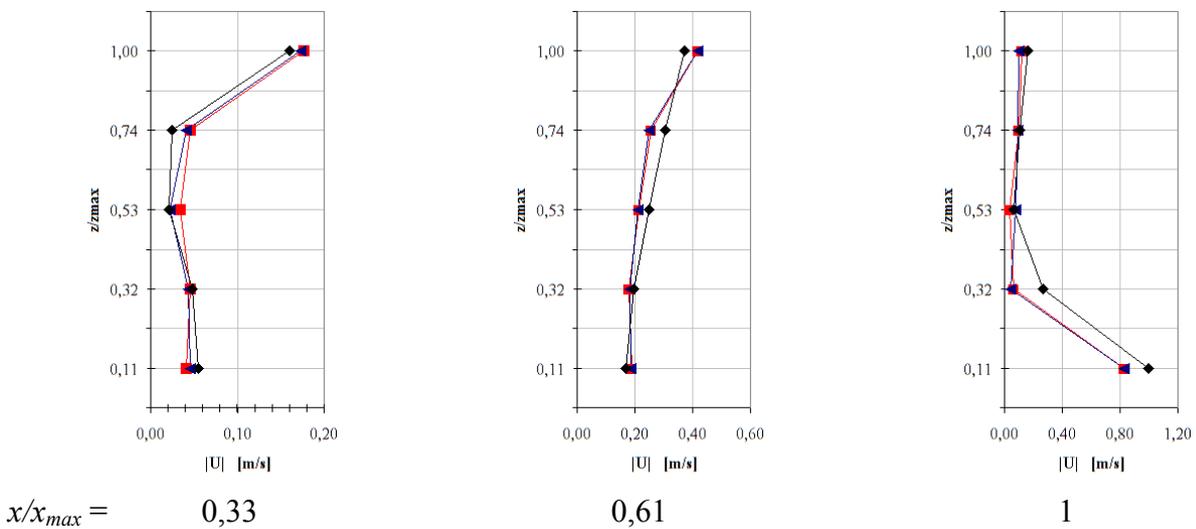


Fig. 4. Perfis comparativos das previsões numéricas da magnitude da velocidade.

## 5. CONCLUSÕES

Apresentou-se um estudo do desempenho de vários modelos de turbulência, aplicados a um caso prático de engenharia onde se desenrolam vários regimes convectivos. Sabendo que as variáveis escalares serão transportadas pelo escoamento, quanto mais adequado for o modelo de turbulência à situação física que se pretende simular, maior precisão terão os resultados numéricos. A comparação entre resultados numéricos e valores experimentais, mostram que para

este caso específico tanto o modelo computacional que fez uso do modelo de turbulência  $k-\varepsilon$  *padrão* como do  $k-\varepsilon$  *RNG* apresentam semelhante erro absoluto médio e inferior ao obtido utilizando o modelo *Spalart-Allmaras*. As previsões numéricas obtidas com este último apenas se aproximam das previsões obtidas com os outros dois modelos junto à fronteira livre ( $x/x_{max}=1$ ). Conforme pode ser encontrado em literatura científica diversa, a aplicação do modelo *RNG* ainda gera alguma controvérsia devido à derivação do modelo. Neste caso em particular, visto que o interesse residia na avaliação do transporte de escalares por um escoamento com regime convectivo misto, dá-se preponderância ao modelo  $k-\varepsilon$  *padrão*, embora em termos da aplicação prática em engenharia os dois modelos de turbulência possam ser colocados em pé de igualdade.

## NOMENCLATURA

$C_{\mu}, C_{1\varepsilon}, C_{2\varepsilon}, C_{3\varepsilon}$	Constantes do modelo.	<i>Índices Inferiores e Superiores</i>	
$C_{b1}, C_{b2}$	Constantes do modelo.	$i, j, k$	Componentes cartesianas.
$C_p$	Calor específico, [J/kg K].	$t$	Turbulento.
$E$	Energia total; Constante.		
$g$	Aceleração da gravidade.		
$G$	Termo de geração.	<i>Simbologia grega</i>	
$k$	Condutibilidade térmica [W/m K].	$\sigma$	Número de Prandtl.
$k$	Energia cinética turbulenta [m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ].	$\kappa$	Constante.
$p$	Pressão, [Pa].	$\rho$	Massa específica, [kg/m <sup>3</sup> ].
$Pr$	Número de Prandtl.	$\varepsilon$	Taxa de dissipação de $k$ , [m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup> ].
$S$	Termo fonte.	$\tau$	Tensor.
$T$	Temperatura, [K].	$\phi$	Variável genérica.
$u$	Velocidade, [m/s].	$\nu$	Viscosidade cinemática, [m <sup>2</sup> /s].
$x$	Coordenadas espaciais, [m].	$\mu$	Viscosidade dinâmica, [N·s/m <sup>2</sup> ].
$Y$	Termo de destruição.		

## REFERÊNCIAS

- Dacles-Mariani, J., G.G. Zilliac, J.S. Chow, and P. Bradshaw (1995). Numerical/Experimental Study of a Wingtip Vortex in the Near Field. *AIJA Journal*, **33(9)**, 1561-1568.
- Ferreira, A. e A.C.M. Sousa (2002). Modelo de turbulência *RNG*: Uma avaliação do seu desempenho. *V Congresso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, Madrid.
- Fluent 6 – User’s guide Volume, Fluent Incorporated, December 2001.
- Gaspar, P.D. (2002) *Estudo Numérico e Experimental do Desempenho Térmico de Equipamentos Expositores Refrigerados*, Dissertação de Mestrado, Universidade da Beira Interior, Covilhã.
- Gaspar, P.D., A. Miranda e R.A. Pitarma (2002). Numerical Study of Air Flow and Thermal Patterns in Refrigerated Display Cases. *V Congresso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, Madrid.
- Gaspar, P.D., A. Miranda e R.A. Pitarma (2003). Estudo Comparativo do Desempenho de Códigos de DFC na Modelação de Equipamentos de Refrigeração Abertos. *VII Congresso de Mecânica Aplicada e Computacional*, Évora.
- Launder, B.E. e D.B. Spalding (1972). *Lectures in Mathematical Models of Turbulence*. Academic Press, London, England.
- Launder, B.E. e D.B. Spalding (1974). The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **vol. 3**.
- Patankar, S. V. (1980). *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere Publishing Corporation.
- Rodi, Wolfgang (1980). *Turbulence models and their application in hydraulics. A state of the art review*. International Association for Hydraulics Research.
- Spalart, P. e S. Allmaras (1992). A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. Technical Report AIAA-92-0439, *American Institute of Aeronautics and Astronautics*.
- Yakhot, V. e S.A. Orszag (1986). Renormalization Group Analysis of Turbulence: I. Basic Theory. *Journal of Scientific Computing*, **1(1)**, 1-51.