UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

Números Reais
Números Irracionais e suas aproximações

Manuel Teodoro Agostinho Feijão

Relatório de Estágio para obtenção do Grau de Mestre em
Ensino da Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário
(2º ciclo de estudos)

Orientadora: Prof. Doutora Sandra Margarida Pinho da Cruz Bento

Covilhã, outubro de 2014

Dedicatória

À memória do meu pai

Agradecimentos

À professora Doutora Sandra Margarida Pinho da Cruz Bento, pela orientação e dedicação que demonstrou ao logo da realização dos seminários e consequente realização deste trabalho, assim como pelas sugestões ao longo do trabalho de investigação que desenvolvemos.

À professora Maria Isaura Fazendeiro Mendes, pela orientação e dedicação que demonstrou no decorrer do estágio pedagógico, que contribui para o enriquecimento do que deve ser uma boa prática pedagógica.

À escola Secundária Campos de Melo, e a todos os que nela trabalham, que nos acolheu permitindo a realização do estagio pedagógico.

À minha família pelo apoio demonstrado na realização desta tarefa a que me propus.

A todos aqueles que de uma forma, por vezes subtil, contribuíram para que conseguisse terminar este percurso.

Resumo

Na parte científica deste relatório efetuamos o estudo dos números reais e de alguns métodos para obter boas aproximações racionais para os números irracionais. Para tal efetuamos algumas experiências envolvendo números irracionais. Apresentamos igualmente provas da irracionalidade de $\sqrt{2}$ e de π. Para $\sqrt{2}$ apresentam-se duas provas, uma numérica e outra geométrica e para π uma prova numérica.
Efetuado este percurso vemos como aproximar bem números reais por números racionais, usando dois conceitos, as Frações Contínuas e a equação de Pell-Fermat. Apresentamos os dois conceitos numa perspetiva histórica, acompanhada de exemplos, seguindo-se a formalização e apresentação de alguns resultados teóricos. Por último observamos as conexões entre as Frações Contínuas e a Equação de Pell-Fermat.
Na parte da PES, apresentamos uma planificação para o 12º ano, subordinada ao tema *Introdução ao cálculo diferencial* e subtema *Limites de funções reais de variável real*. E três planificações de noventa minutos e dois blocos de quarenta e cinco minutos para o 9º ano, subordinadas ao tema *unidade 5 Números reais. Inequações*.

Palavras-chave

Aproximações, Incomensurabilidade, Equação de Pell-Fermat, Frações contínuas, Números irracionais, números racionais, Números reais

Abstract

On the scientific part of this report we have conducted a study of real numbers and some methods to obtain the best rational approximations to irrational numbers. For this we have carried out some experiences with irrational numbers. We also present proofs of $\sqrt{2}$ and π irrationality: numeric and geometric proofs for $\sqrt{2}$, and a numeric proof for π.
After this we explain how to obtain the best real numbers approximations to rational numbers using two concepts: Continued Fractions and the Pell-Fermat Equation. We present the two concepts in a historical perspective, accompanied by examples, followed by the formalization and presentation of some theoretical results. Finally, we observe the connections between Continued Fractions and the Pell-Fermat Equation.
For PES, we present a planning for the 12th year under the theme *Introduction to differential calculus* and subtheme *Limits of real functions of a real variable*. We also include three ninety minute blocks and two forty-five minute blocks planning for the 9th year under the unit five theme "Real numbers – Inequalities".

Keywords

Approximations, Incommensurability, Pell-Fermat equation, Continued fractions, Irrational numbers, Rational numbers, Real numbers

Índice

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

O Relatório de Estágio (RE) encontra-se dividido em duas partes: uma sobre a parte científica que surge como um desenvolvimento, natural, do trabalho realizado nas disciplinas de Seminário de Investigação Matemática I e II, e outra sobre a Prática de Ensino Supervisionada (PES), que resulta do trabalho aí efetuado, em particular a planificação de aulas e consequente lecionação.

No que concerne à parte científica, o tema escolhido surge das propostas sugeridas pela orientadora científica, Professora Doutora Sandra Bento, ou que sugeríssemos. Foi aceite um dos temas sugeridos - os Números Reais, o que sendo um tema global, permitiria focar o trabalho de investigação em subtemas que se enquadrassem nos níveis de ensino que lecionamos, 9ºano e 12ª ano. Ainda assim surgiram algumas dificuldades, nomeadamente como estabelecer conexões entre os assuntos investigados e a lecionação das aulas. Tendo em consideração os programas e metas curriculares para os anos de escolaridade acima mencionados, podem os temas desenvolvidos nos seminários e consequentemente neste RE, servir de complemento aos assuntos abordados aquando da prática letiva. Este complemento pode servir para um enriquecimento do vocabulário matemático dos alunos, assim como para uma melhor perceção dos conceitos introduzidos pelos manuais, e finalmente a capacidade de estabelecer conexões entre os temas estudados e o mundo dos números reais, que possuem características de alguma beleza.

Assim, no que à parte científica concerne, este relatório encontra-se divido em dois capítulos, um onde efetuamos experiências computacionais e geométricas com números reais, e outro onde verificamos como aproximar bem números reais por números racionais. No primeiro, como indica o título, procedemos a um passeio pelos números irracionais onde efetuamos algumas experiências com estes números. Apresentamos alguns conceitos tais como comensurabilidade e incomensurabilidade, as expressões decimais e aproximações de números irracionais por números racionais. Efetuamos o estudo dos números, $\sqrt{2}$ e π. No segundo usamos dois conceitos, Frações Contínuas e Equação de Pell-Fermat, onde começamos por fazer um resumo histórico e apresentação de exemplos, finalizando com a formalização e apresentação de alguns resultados teóricos. Por último procedemos à conexão entre os dois conceitos e o modo como permitem a aproximação de raízes quadradas, de números que não sejam quadrados perfeitos. Em particular usam-se frações contínuas para encontrar a solução mínima da equação de Pell-Fermat.

Na parte relativa à PES, a mesma é composta de um conjunto de aulas, que de algum modo permitem estabelecer uma ligação entre o trabalho desenvolvido na parte científica e as mesmas. Assim apresentamos uma aula do 12ºano, de noventa minutos, subordinada ao tema *Introdução ao cálculo diferencial* e subtema *Limites de funções reais de variável real*. E três aulas, de noventa minutos, e dois blocos de quarenta e cinco minutos, no 9º ano. Estas aulas referem-se à *unidade 5 Números reais. Inequações*.

Capítulo 1

Experiências computacionais e geométricas com números irracionais

Neste capítulo fazemos um percurso sobre os números irracionais. Apresentamos o conceito de comensurabilidade e incomensurabilidade, as expressões decimais, a irracionalidade de raiz de dois numa perspetiva numérica e geométrica, e de pi numa perspetiva numérica.

1.1 Comensurabilidade e Incomensurabilidade

Contar e *medir*, são operações com que nos deparamos na vida quotidiana. Quando controlamos o nosso peso, quando os pais medem a altura dos filhos em crescimento, o engenheiro quando procede à projeção de uma nova ponte, o agricultor que mede a quantidade de sementes a plantar, para obter determinada colheita. Todas as pessoas têm necessidade de *contar* e *medir*, seja na sua profissão ou em situações do dia a dia. Vamos no argumento que se segue proceder à formalização destes conceitos.

Consideremos um segmento de reta AB. Para que o possamos medir precisamos de um *segmento unitário*, que por definição tem medida igual a 1. Designemos por u esse segmento.
Se u couber q vezes em AB a medida de AB é igual a q. Neste caso estamos perante um processo de contagem. [3][4]

Pode acontecer que o segmento u não caiba um número exato de vezes no segmento AB. Então a medida de AB não será um número natural.
Procuremos então um segmento de reta w que caiba q vezes em u e p vezes no segmento AB. Diremos então que AB e u são ***comensuráveis***. A medida de w é a fração $\frac{1}{q}$ e a medida de AB é p vezes $\frac{1}{q}$, isto é, $\overline{AB} = \frac{p}{q}$. Agora estamos perante um processo de medição. [3][4]

Esta noção de comensurabilidade reinou durante muito tempo, até ao século IV antes de Cristo. Nesta época a escola liderada por Pitágoras sofreu uma enorme crise quando alguém, entre os próprios discípulos de Pitágoras, observou que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos de reta ***incomensuráveis***.

Proposição 1.1.1.
O lado e a diagonal de um quadrado são segmentos de reta incomensuráveis.

Demonstração:
Consideremos a seguinte figura

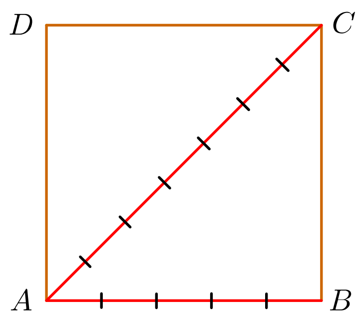


Fig. 1.1: Segmento u na diagonal e no lado do quadrado

Suponhamos que exista um segmento de reta u que caiba q vezes no lado AB e p vezes na diagonal AC do quadrado $ABCD$. Tomando AB como unidade de comprimento, a medida de AC será igual a $\frac{p}{q}$ enquanto a medida de AB será igual a 1.

Pelo Teorema de Pitágoras temos $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 1^2 + 1^2$ de onde $\frac{p^2}{q^2} = 2$ e $p^2 = 2q^2$. Mas esta última igualdade é absurda, pois na decomposição de p^2 em fatores primos o expoente do fator 2 é par enquanto em $2q^2$ é ímpar. [4] $\square$

A existência de segmentos incomensuráveis significa que os números naturais juntamente com as frações são insuficientes para medir todos os segmentos de reta. Assim ampliou-se o conceito de número, introduzindo os chamados ***números irracionais***, de tal modo que, fixando uma unidade de comprimento arbitrária, qualquer segmento de reta possa ter uma medida numérica. Deste modo, quando o segmento considerado é comensurável com a unidade escolhida a sua medida é um número *racional*, e pode exprimir-se como o quociente de números inteiros. Quando o segmento é incomensurável com a unidade escolhida dizemos que é um número *irracional*.

1.2 Expressões decimais

Para efetuar cálculos, a forma mais eficiente de representar os números reais é por meio de expressões decimais.

Definição 1.2.1.
Uma expressão decimal é um símbolo da forma $\alpha = a_0, a_1a_2...a_n...$
onde $a_0 \in \mathbb{N}_0$ *e* $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ *são dígitos , isto é, números inteiros tais que* $0 \leqslant a_n \leqslant 9$. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *tem-se um dígito* a_n, *chamado o n-ésimo dígito da expressão decimal* α. *O número natural* a_0 *chama-se a parte inteira de* α. *[4]*

Através da expressão decimal podemos aferir acerca do número que a mesma representa. Assim uma expressão decimal designa-se por dízima infinita periódica, quando os primeiros p dígitos após a vírgula se repetem indefinidamente na mesma ordem. Por exemplo $0,88888...$ e $0,737373...$, são dízimas infinitas periódicas, $0,25$ é uma dízima finita. Se não existir nenhum padrão de repetição numa dízima infinita então ela designa-se por dízima infinita não periódica.

Analisemos agora um caso simples, mas simultaneamente intrigante. [10]

Proposição 1.2.2.
$0,9999... = 1$

Demonstração 1:
Consideremos $x = 0,99999...$ (1) e multipliquemos ambos os membros da igualdade por 10, obtendo $10x = 9,99999...$ (2)
Calculemos agora a subtração de (2) por (1)

$$\begin{array}{l} 10x = 9,99999... \\ \underline{-x = 0,99999...} \\ 9x \ = 9 \end{array}$$

Temos que $9x = 9 \Leftrightarrow x = 1$. Logo $0,99999... = 1$ □

Demonstração 2:
Vamos usar a definição de progressão geométrica.

Definição 1.2.3.
Seja (a_n) *uma sucessão. Se o quociente entre cada termo e o seu termo anterior for constante (e diferente de zero). Então* (a_n) *denomina-se* ***progressão geométrica****. A essa constante denomina-se razão da progressão e representa-se por* r.

A soma dos n primeiros termos de (a_n), denota-se por S_n, e para $r \neq 0$ e $r \neq 1$ é dada por

$$a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Se $|r| < 1$ então $S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - r}$

No exemplo

$$0,9999... = 9 \times (0,1 + 0,01 + 0,001 + ...)$$

temos uma progressão geométrica com $r = 0.1$

$$|r| = 0,1 \quad \text{, logo} \quad S = \frac{9 \times 0,1}{1 - 0,1} = \frac{0,9}{0,9} = 1$$

□

1.3 Aproximações por números racionais

No argumento que se segue pretendemos dar sentido ao facto de $\sqrt{2}$ ser uma dízima infinita que elevada ao quadrado é 2 [7]

Proposição 1.3.1.
A raiz quadrada de 2 *é aproximadamente* $1,411421356$

Demonstração:
Sendo a raiz quadrada de 2 uma dízima infinita. Então existe uma dízima infinita cujo quadrado é 2. Partindo desta afirmação vejamos como podemos obter esta dízima e depois o que significa a sua multiplicação por si mesmo.
Gerar a dízima:
Terá que estar entre 1 e 2

$$\begin{aligned} \underline{1}^2 &= 1 < 2 \\ 2^2 &= 4 > 2 \end{aligned}$$

Calculemos agora

$$\begin{aligned} 1,1^2 &= 1,21 \\ 1,2^2 &= 1,44 \\ 1,3^2 &= 1,69 \\ 1,\underline{4}^2 &= 1,96 < 2 \\ 1,5^2 &= 2,25 > 2 \end{aligned}$$

Assim $\sqrt{2}$ deverá estar entre $1,4$ e $1,5$. Donde se conclui que a sua expansão decimal começa por $1,4$

Calculemos agora

$$\begin{aligned} 1,4\underline{1}^2 &= 1,9881 < 2 \\ 1,42^2 &= 2,0164 > 2 \end{aligned}$$

Donde se conclui que o próximo dígito é 1. Logo a sua expansão decimal é $1,41$
Calculemos agora

$$\begin{aligned} 1,411^2 &= 1,99092 \\ 1,412^2 &= 1,99374 \\ 1,413^2 &= 1,9657 \\ 1,41\underline{4}^2 &= 1,9994 < 2 \\ 1,415^2 &= 2,00223 > 2 \end{aligned}$$

Donde se conclui que o próximo dígito é 4. Logo a sua expansão decimal é $1,414$.
Calculemos agora

$$\begin{aligned} 1,4141^2 &= 1,99968 \\ 1,414\underline{2}^2 &= 1,99996 < 2 \\ 1,4143^2 &= 2.00024 > 2 \end{aligned}$$

Donde se conclui que o próximo dígito é 2. Logo a sua expansão decimal é $1,4142$.
Repetindo este processo podemos gerar quantos dígitos quisermos. Supondo que efetuamos os cálculos para nove dígitos e obtemos $1,41421356$

Seja x a dízima assim construída, o que nos permite estar confiantes que $x^2 = 2$? Procedamos à construção da seguinte tabela:

$$\begin{array}{rcl}
1^2 & = & 1 \\
1,4^2 & = & 1,9881 \\
1,4142^2 & = & 1,99996164 \\
1,41421^2 & = & 1,9999899241 \\
1,414213^2 & = & 1,99999409469 \\
1,4142135^2 & = & 1,99999982368225 \\
1,41421356^2 & = & 1,9999999933878736
\end{array}$$

Como pudemos observar pela tabela quantos mais dígitos usarmos para $\sqrt{2}$, mais noves obtemos após o ponto decimal quando multiplicamos o número por si mesmo.
Podemos conjeturar que, ao usarmos a expansão infinita de $\sqrt{2}$, obtemos uma infinidade de noves, depois de a multiplicarmos por si mesma. $\square$

Proposição 1.3.2.
$1,9999... = 2$

Demonstração:
Provamos na Proposição 1.2.2, que $0,99999... = 1$, então de $1,99999... = 1 + 0,99999...$ e atendendo a que $0,99999 = 1$ vem que $1 + 1 = 2$. Logo $1,99999... = 2$.
Portanto existe uma dízima infinita cujo quadrado é 2. $\square$

1.4 A irracionalidade de raiz quadrada de dois, uma prova numérica

Um número diz-se racional se puder escrever-se como o quociente de dois inteiros, $\frac{p}{q}$, e irracional se tal não for possível. A demostração que se segue é feita por redução ao absurdo. Queremos provar que $\sqrt{2}$ é irracional, vamos começar por admitir que $\sqrt{2}$ é um número racional e tentar extrair uma consequência absurda. [7]

Proposição 1.4.1.
$\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração:
Suponhamos, com vista à obtenção de um absurdo, que se $\sqrt{2}$ é racional. Podemos encontrar números inteiros p e q tais que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Por outro lado a fração $\frac{p}{q}$ é igual a uma outra, $\frac{r}{s}$, em que r e s não são simultaneamente pares. Portanto, se $\sqrt{2}$ é irracional, podemos encontrar dois inteiros não simultaneamente pares, r e s tais que $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$.
Se $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$, então $2 = \frac{r^2}{s^2} \Leftrightarrow 2s^2 = r^2$. Se $2s^2 = r^2$, então r^2 é par, o que implica que r é par. Sendo r par, então $r = 2t$ para algum inteiro t.
Se $2s^2 = r^2$ e $r = 2t$ então $2s^2 = (2t)^2 = 4t^2$. Logo $s^2 = 2t^2$. Se $s^2 = 2t^2$, então s^2 é par, o que implica que s é par. Absurdo
Como ao assumirmos que $\sqrt{2}$ é racional nos levou a concluir algo obviamente falso, a suposição tem de ser falsa, isto é, $\sqrt{2}$ é irracional. $\square$

1.5 A irracionalidade de raiz quadrada de dois, uma prova geométrica

Vamos demonstrar por redução ao absurdo com recurso a argumentos geométricos a irracionalidade de raiz quadrada de 2. [1]

O número $\sqrt{2}$ é a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles com catetos iguais a 1.

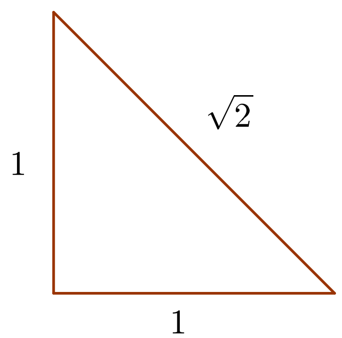


Fig. 1.2: Triângulo retângulo isósceles de lado 1 e hipotenusa $\sqrt{2}$

Suponhamos, com vista à obtenção de um absurdo, que $\sqrt{2}$ se pode exprimir como o quociente de dois números inteiros e sejam p e q os **menores inteiros** tais que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$. Nesta condições q é o menor número inteiro tal que $q\sqrt{2}$ é um inteiro.
Então, ampliando o triângulo retângulo com catetos iguais a 1 pelo fator q, obtemos o **menor** triângulo retângulo cujos catetos e hipotenusa são números inteiros, q e $q\sqrt{2}$ respectivamente. Vejamos como a partir deste triângulo se pode construir um mais pequeno com a mesma propriedade, o que é absurdo.

Construção:

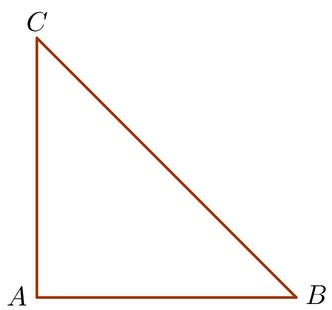


Fig. 1.3: Triângulo retângulo isósceles

Por hipótese a medida dos seus três lados AB, BC e AC são todos números inteiros positivos. Com centro em C e raio AC traçamos um arco de circunferência que interseta o lado BC em um ponto a que chamamos D.

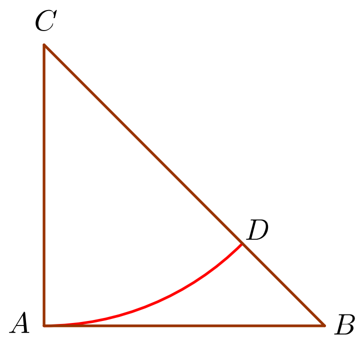


Fig. 1.4: Arco de circunferência que interseta a hipotenusa

Como AC e CD são raios da mesma circunferência, então medem o mesmo. AC é um inteiro, então CD também é um inteiro. $\overline{BD} = \overline{BC} - \overline{CD}$ é um inteiro positivo.
Traçamos agora a reta perpendicular ao lado BC que passa por D. A reta interseta o lado AB num ponto a que chamamos E. Traçamos o segmento de reta DE.

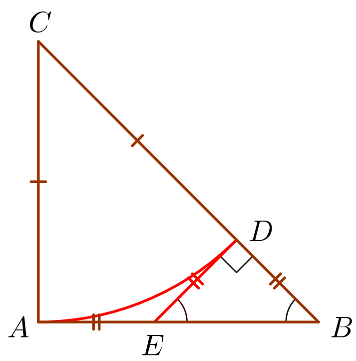


Fig. 1.5: Construção de triângulo retângulo isósceles

O comprimento DE é um número inteiro, pois BD é um número inteiro.
Os segmentos de reta AE e DE são tangentes a um arco de circunferência desde o mesmo ponto E, pelo que são iguais. $\overline{AE} = \overline{DE}$. Como DE é um número inteiro, então AE também é um número inteiro.
O triângulo ABC é um triângulo retângulo isósceles, logo o ângulo ABC mede $45°$. Como o triângulo BDE é um triângulo retângulo e o ângulo CBA mede $45°$, logo o angulo DEB mede $45°$. Então o triângulo BDE é um triângulo retângulo isósceles, onde BD e DE são os catetos iguais.
AB é um número inteiro positivo, então $\overline{BE} = \overline{AB} - \overline{AE}$ é um número inteiro positivo. Isso significa que o triângulo BDE é um triângulo isósceles, cuja medida dos lados são números inteiros positivos, que é menor que o que chamamos anteriormente **menor** triângulo retângulo. O que é absurdo, já que o triângulo anterior era o menor. Em consequência a nossa hipótese inicial que $\sqrt{2}$ era racional é falsa. Logo $\sqrt{2}$ é um número irracional.

1.6 Pi, uma breve história

O aparecimento dos números irracionais, contribui para estabelecer de forma rigorosa as relações entre grandezas geométricas. É *Eudoxo* (408 a.C. - 355 a.C.) que, com a introdução da noção de grandeza geométrica (comprimento área e volume), a definição de razão entre duas grandezas da mesma espécie, sem associar valores numéricos a estas grandezas, a definição da igualdade de duas razões chamada *proporção*, e também a noção de ordem entre grandezas, deu rigor a essas relações. Assim no livro V de *Euclides*, *A Teoria das Proporções* aplica-se tanto às grandezas comensuráveis como às incomensuráveis.
A Teoria das Proporções está na base do método da exaustão, desenvolvido por *Eudoxo* e desenvolvido por *Arquimedes* (287 a. C. - 212 a.C.) para resolver problemas como o cálculo de comprimentos de curvas, áreas e volumes. No cálculo do comprimento da circunferência encontra-se um número que não se pode escrever na forma de razão. Vejamos a seguir como designar este número.
Para o efeito consideremos dois círculos em que o diâmetro do primeiro é k vezes o diâmetro do segundo. Para algum k inteiro positivo, o perímetro do primeiro é igual a k vezes o perímetro do segundo, ou seja, o quociente entre o perímetro e o diâmetro é o mesmo para todos os círculos. Procedendo de forma análoga para as áreas concluímos que o quociente entre a área do círculo e o quadrado do raio é o mesmo para todos os círculos.
Temos agora a questão: dado um círculo de raio r, perímetro P e área A, que relação existe entre os quocientes $\dfrac{P}{d}$ e $\dfrac{A}{r^2}$? Como justificação, observemos que dividindo um círculo num número elevado e par de partes iguais, a partir do centro, é possível reordenar essas partes de modo a obtermos algo muito próximo de um retângulo com altura r e largura igual a metade do perímetro da circunferência. [15][18]

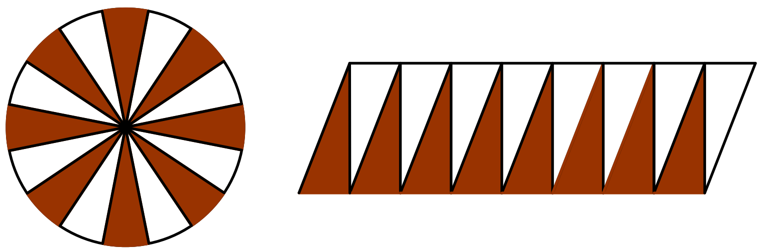


Fig. 1.6: Divisão da circunferência em 16 partes iguais

A sua área é

$$A = r\frac{P}{2}$$

Logo

$$\frac{A}{r^2} = \frac{P}{2r} \Leftrightarrow \frac{A}{r^2} = \frac{P}{d}$$

A este valor, igual ao quociente entre o perímetro da circunferência e o seu diâmetro ou entre a área do círculo e o quadrado do seu raio chamamos π.

A seguir mostramos como obter o valor aproximado de π, inscrevendo na circunferência um polígono com n lados, onde n toma valores cada vez maiores. [19]
O argumento deve-se a Francois Viéte (1540-1603).

A área de um quadrado inscrito numa circunferência de raio 1 é igual a 2.
Se se duplicar o número de lados, a área do octógono inscrito será igual a

$$2 \times \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Se o polígono tiver 16 lados a área será

$$2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

e assim sucessivamente. Conclui-se que, uma vez que quanto mais se aumenta o número de lados mais próxima está a área do polígono próxima da do círculo, que é igual a π, então

$$\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times \ldots \qquad (1.1)$$

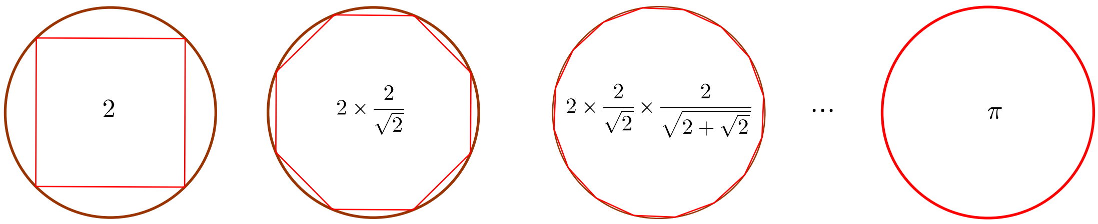


Fig. 1.7: Polígonos inscritos na circunferência

A fórmula (1.1) resulta de considerar polígonos com 2^n lados inscritos na circunferência de raio 1. A sua área tende para π, quando n tende para infinito.

1.7 A irracionalidade de pi, uma prova numérica

O número π é irracional. Mas se tal facto é facilmente aceite, já a sua demonstração não se torna tão óbvia. No argumento que se segue tomamos como referência a demonstração de Ivan Niven. [16]

Teorema 1.7.1.
O número π é irracional.

Mais uma vez se recorre à técnica de redução ao absurdo para demonstrar que um número é irracional. Neste caso a demonstração tem a autoria de Ivan Niven. [16] e parte do pressuposto de que π é um número racional para construir uma função. A aplicação do cálculo diferencial e integral a esta função vai permitir a demonstração do resultado.

Demonstração:
Suponhamos, com vista à obtenção de um absurdo, que π é um número racional. Para isso consideremos dois números inteiros a e b estritamente positivos tais que

$$\pi = \frac{a}{b}$$

Seja $f(x)$ a função polinomial de grau $2n$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{n!}x^n(a-bx)^n$$

Podemos verificar que $f(x)$ possui as seguintes propriedades:

$$f(0) = 0 \;\; e \;\; f(\pi) = 0 \quad \text{(1.2)}$$

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in \left]0, \pi\right[\quad \text{(1.3)}$$

$$0 < f(x)\sin x < \frac{\pi^n a^n}{n!} \quad \forall x \in \left]0, \pi\right[\quad \text{(1.4)}$$

$$f(x) = f(\pi - x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{(1.5)}$$

A verificação de (1.2) é imediata.

Para verificar (1.3) basta observar que

$$x > 0 \Rightarrow x^n > 0$$

e que

$$x < \pi \Leftrightarrow x < \frac{a}{b} \Rightarrow bx < a \Rightarrow a - bx > 0 \Rightarrow (a-bx)^n > 0$$

Para verificar (1.4) observemos que

$$0 < \sin x \leqslant 1 \quad \forall x \in \left]0, \pi\right[$$

logo por (1.3)

$$0 < f(x)\sin x \leqslant f(x) \quad \forall x \in \left]0, \pi\right[$$

por outro lado, tem-se que $x < \pi \Rightarrow x^n < \pi^n$. E também que $b > 0 \Rightarrow bx > 0 \; \forall x \in]0, \pi[$. Assim,

$$a + bx > a \Leftrightarrow a > a - bx \Rightarrow (a - bx)^n < a^n$$

e vem

$$f(x) = \frac{1}{n!} x^n (a - bx)^n < \frac{\pi^n a^n}{n!}$$

Então

$$0 < f(x) \sin x < \frac{\pi^n a^n}{n!}$$

Por último verifiquemos (1.5)

$$f(\pi - x) = f(\frac{a}{b} - x) = \frac{(\frac{a}{b} - x)^n (a - b(\frac{a}{b} - x))^n}{n!} = \frac{(\frac{a}{b} - x)^n (a - a + bx)^n}{n!} = \frac{(\frac{a}{b} - x)^n b^n x^n}{n!} =$$

$$= \frac{((\frac{a}{b} - x)b)^n x^n}{n!} = \frac{(a - bx)^n x^n}{n!} = f(x)$$

Usando agora algum cálculo diferencial e integral numa variável podemos estabelecer e demonstrar alguns resultados que permitirão fazer a demonstração do Teorema.

Lema 1.7.2.
A derivada de qualquer ordem de f no ponto $x = 0$ é um número inteiro, ou seja

$$f^i(0) \in \; \mathbb{Z} \;\; \forall i \geqslant 1$$

Demonstração:
Recorrendo ao Binómio de Newton podemos desenvolver

$$(a - bx)^n = a^n - a^{n-1}bx + ... + ab^{n-1}x^{n-1} - b^n x^n$$

Logo,

$$f(x) = \frac{1}{n!} x^n (a^n - a^{n-1}bx + ... + ab^{n-1}x^{n-1} - b^n x^n) \quad \textbf{(1.6)}$$

Como nenhum dos termos tem grau inferior a n tem-se que x é fator de $f^{(i)}(x) \; \forall \; i < n$, logo

$$f^{(i)}(0) = 0 \quad \forall i < n$$

Suponhamos então que a ordem de derivação i é tal que $n \leqslant i \leqslant 2n$. Em (1.6) os monómios em cada termo ficam definidos por

$$\frac{a^{n-j} b^j x^{n+j}}{n!}$$

Ou seja, para cada $0 \leqslant j \leqslant n$ existe uma constante $k \; \in \mathbb{N}$ tal que cada monómio em (1.6) se pode escrever como

$$\frac{k x^{n+j}}{n!}$$

Consideremos a ordem de derivação i nos três casos $i < n + j$, $i = n + j$ e $i > n + j$:
Se $i < n + j$, então todos os monómios em (1.6) têm x como fator, logo

$$f^{(i)}(0) = 0 \quad \forall i < n + j$$

Se $i > n + j$, então desaparecem todos os monómios com grau inferior ou igual a i quando se calcula a derivada de ordem i, e x é fator de todas as parcelas restantes que tenham grau superior a i. Mais uma vez

$$f^{(i)}(0) = 0 \quad \forall i > n + j$$

Por fim verifiquemos o caso $i = n + j$. Neste caso, apenas resta o termo $\dfrac{kx^{n+j}}{n!}$, cuja derivada de ordem $n + j$ vai ser

$$\frac{(n+j)(n+j-1)... \times 2 \times 1 \times k}{n!} = \frac{(n+j)!k}{n!} \quad \in \ \mathbb{Z}$$

□

Lema 1.7.3.
$f^{(i)}(x) = (-1)^i f^{(i)}(\pi - x) \quad \forall \ i \geqslant 1$

Demonstração:
Indução na ordem de derivação i
$i = 1 : \qquad f'(x) = -f'(\pi - x)$
Por hipótese suponhamos que é válido para $i = n$ e verifiquemos que é válido para $i = n + 1$

$$f^{(n+1)}(x) = \left[f^{(n)}(x)\right]' = \left[(-1)^n f^{(n)}(\pi - x)\right]' = (-1)^n f^{(n+1)}(\pi - x)\frac{d}{dx}[\pi - x] =$$
$$= (-1)^n f^{(n+1)}(\pi - x)(-1) = (-1)^{n+1} f^{n+1}(\pi - x)$$

□

Lema 1.7.4. *O número* $f^{(i)}(\pi)$ *é um inteiro* $\forall i \ \geqslant 1$

Demonstração:
Por aplicação do Lema 1.7.3 e de seguida o Lema 1.7.2 concluímos que:

$$f^{(i)}(\pi) = (-1)^i f^{(i)}(0) \ \in \ \mathbb{Z} \quad \forall \ i \geqslant 1$$

□

Lema 1.7.5.
A função definida por

$$F(x) = f(x) - f^{''}(x) + f^{(4)}(x) - ... + (-1)^n f^{(2n)}(x)$$

verifica

$$F^{''}(x) + F(x) = f(x)$$

e

$$F^{'}(x)\sin x - f(x)\cos x \textit{ é uma primitiva de } f(x)\sin x$$

Demonstração:
Provemos a igualdade
$F^{''}(x) + F(x) = (f^{''}(x) - f^{(4)}(x) + f^{(6)}(x)...) + (f(x) - f^{''}(x) + f^{(4)}() - f^{(6)}(x)...) =$

$= f(x) + (f^{''}(x) - f^{''}(x)) + (f^{(4)}(x) - f^{(4)}(x)) + ... = f(x) + 0 + 0 + ... + 0 = f(x)$

Vamos agora verificar que $F^{'}(x)\sin x - f(x)\cos x$ é uma função cuja derivada é $f(x)\sin x$

$$\frac{d}{dx}[F^{'}(x)\sin x - F(x)\cos x] = F^{''}(x)\sin x + F^{'}(x)\cos(x) - F^{'}(x)\cos x + F(x)\sin x =$$

$$= F^{''}(x)\sin x + F(x)\sin x = (F^{''}(x) + F(x))\sin x = f(x)\sin x$$ □

Lema 1.7.6.
O integral abaixo representa um número inteiro.

$$\int_0^\pi f(x)\sin x dx$$

Demonstração:

$$\int_0^\pi f(x)\sin x dx = [F^{'}(x)\sin x - f(x)\cos x]_0^\pi =$$
$$= [F^{'}(\pi)\sin\pi - F(\pi)\cos\pi] - [F^{'}(0)\sin 0 - F(0)\cos 0] = F(\pi) - F(0)$$

Pelos Lemas 1.7.2 e 1.7.4 temos que $F(\pi)$ e $F(0)$ são inteiros, logo $F(\pi) - F(0)$ é um número inteiro. □

Lema 1.7.7.
Se $x \in]0, \pi[$, *então*

$$0 < \int_0^\pi f(x)\sin x dx < \frac{\pi^{n+1}a^n}{n!}$$

Demonstração:
Por (1.4), no intervalo referido, sabemos que

$$0 < \int_0^\pi f(x)\sin x dx < \int_0^\pi \frac{\pi^n a^n}{n!}dx = \frac{\pi^n a^n}{n!}\int_0^\pi 1dx = \frac{\pi^n a^n}{n!}[x]_0^\pi = \frac{\pi^{n+1}a^n}{n!}$$

□

Finalizando, podemos recorrer a um critério de convergência das séries numéricas para deduzir

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^{n+1}a^n}{n!} = 0$$

logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\pi^{n_0+1}a^{n_0}}{n_0!} < 1$$

Sendo assim concluímos que quando $n = n_0$ na definição de f, vem

$$0 < \int_0^\pi f(x)\sin x dx < 1$$

Pelo Lema 1.7.6 resulta que existe um inteiro maior do que zero e menor do que um. O que é um absurdo. Como a única hipótese feita foi a de que π é um número racional ela deve, necessariamente, ser falsa. Portanto π é um número irracional.

□

Capítulo 2

Como aproximar bem números reais por números racionais

Vimos no capítulo anterior algumas experiências computacionais e geométricas com números irracionais, nomeadamente o $\sqrt{2}$ e o π. Vamos neste capítulo formalizar a ideia de aproximar bem números reais por números racionais, isto é, vamos usar alguns argumentos para mostrar que todo o número real pode ser bem aproximado por números racionais.

2.1 Frações Contínuas

Nesta seção vamos proceder à introdução do conceito de fração contínua e de como pode ser utilizado na aproximação de números reais por números racionais.

2.1.1 Aproximações por racionais

Considerando as inclusões $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, a transição de $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ é a mais difícil na medida em que a representação de um número real está diretamente ligada à noção de número real. Se um número natural é um conceito intuitivo, já um número inteiro é um número natural com com um sinal que pode ser de + ou - e um número racional é a razão entre um número inteiro e um natural não nulo.
Mas o que é um número real? Uma propriedade essencial de $\mathbb{R}$ é que todo o número real pode ser bem aproximado por números racionais. No seguinte argumento pretendemos dar uma resposta à questão formulada. [14]

Notação: Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos a *parte inteira* de x como o único inteiro $\lfloor x \rfloor$ tal que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, e a *parte fracionária* de x como $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$.

Assim para $x \in \mathbb{R}$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq x - k < 1$.

Podemos então escrever a representação decimal de

$$x - k = 0, a_1 a_2 ... a_n ..., \qquad a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$$

O que significa que se

$$r_n = a_n + 10 \times a_{n-1} + 100 \times a_{n-2} + ... + 10^{n-1} \times a_1$$

então

$$\frac{r_n}{10^n} \leq x - k < \frac{r_n + 1}{10^n}$$

E portanto temos como uma boa aproximação racional de x

$$k + \frac{r_n}{10^n}$$

Na medida em que o erro $\left|x - (k + \frac{r_n}{10^n})\right|$ é menor que $\frac{1}{10^n}$. Trata-se de um número bem pequeno se n for grande. A representação decimal de um número real fornece assim uma sequência de aproximações por racionais cujos denominadores são potências de 10.

Consideremos agora que dado qualquer $x \in \mathbb{R}$ e qualquer $q \in \mathbb{N}$, existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}$$

Para tal tomemos $p = \lfloor qx \rfloor$, e portanto

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q} \quad \text{e} \quad \left|x - \frac{p+1}{q}\right| \leq \frac{1}{q}$$

A representação decimal de x equivale a dar essas aproximações para os denominadores q que são potências de 10.

Observação: As aproximações decimais podem não ser tão boas como aquelas que resultam de usar racionais com denominadores que não são potências de 10.

Consideremos o número real $\pi = 3,1415926535....$ Uma boa aproximação para esse número é $\frac{22}{7} = 3,142857142857....$ Uma outra aproximação, ainda melhor, é $\frac{355}{113} = 3,1415929203539823....$ ver 2.1.2 exemplo 2

Notemos que

$$\left|\pi - \frac{22}{7}\right| < \frac{1}{700} < \left|\pi - \frac{314}{100}\right| \quad \text{e} \quad \left|\pi - \frac{355}{113}\right| < \frac{1}{3000000} < \left|\pi - \frac{3141592}{1000000}\right|$$

Portanto $\frac{22}{7}$ e $\frac{355}{113}$ são melhores aproximações de π que aproximações decimais com denominadores muito grandes, sendo de facto aproximações muito boas atendendo ao tamanho dos denominadores envolvidos. Como chegamos então aos números racionais $\frac{22}{7}$ e $\frac{355}{133}$ como boas aproximações de π?

2.1.2 A representação de números reais por frações contínuas

Antes de definir o conceito de fração contínua e exemplificar a sua construção listamos algumas referências históricas a respeito da sua origem.

Jonh Wallis (1616-1703) no livro Arithemetica Infinitorium (1655) desenvolveu e apresentou a identidade

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9...}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 9...}$$

O primeiro presidente da Royal Society, Lord Brouncker (1620-1684) transformou esta identidade em

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{\ddots}}}}$$

No livro *Opera Mathematica* (1695) Jonh Wallis, designou a identidade de Lord Brouncker por fração contínua. Foi a primeira vez que o termo "fração contínua" foi usado. Christiann Huygens (1629-1695) demonstrou uma aplicação prática das frações contínuas. Construiu um planetário mecânico. Leonard Euler (1707-1783) mostrou que todo o número racional pode ser expresso como uma fração contínua. Joseph Louis Lagrange (1736-1813) demonstrou que as raízes irracionais de equações quadráticas têm expansão na forma de fração contínua periódica.

Definição 2.1.1 (Representação por frações contínuas de x).
Seja x um número real. As frações contínuas de x são construídas do seguinte modo: [2]

Definimos recursivamente

$$\alpha_0 = x, \quad a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor$$

$$\textit{e, se para algum } n,\ \alpha_n \notin \mathbb{Z} \quad a_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se, para algum n, $\alpha_n = a_n$ temos

$$x = \alpha_0 = [\,a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n\,] \stackrel{def}{=} a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

Caso contrário,

$$x = [a_0; a_1, a_2, ...] \stackrel{def}{=} a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}$$

A representação de números reais por frações contínuas fornece-nos sempre aproximações por números racionais muito boas. Além disso não depende de nenhuma escolha artificial da base.

Descrevemos a seguir um algoritmo que permite obter a fração contínua de um número real x.

Algoritmo:
1) Se $x > 1$ siga para 2, se $0 < x < 1$ siga para 3 (o procedimento é análogo para os reais negativos)
2) Subtraia a x a sua parte inteira; se o resultado for zero, o processo pára, senão, siga para 3.
3) Inverta o número que se obtém e volte a 1. [17]

Os números inteiros não nulos que se vão obtendo ao longo do processo são os coeficientes da fração contínua do número real x.

Exemplo 1:

Vamos escrever a fração contínua para $x = \frac{15}{8} = 1,875$

$\frac{15}{8} - 1 = \frac{7}{8}$, 1 é a parte inteira de $\frac{15}{8}$

$\frac{8}{7} - 1 = \frac{1}{7}$, 1 é a parte inteira de $\frac{8}{7}$

$7 - 7 = 0$ termina o processo.

Subtraíram-se durante o processamento do algoritmo os números 1 (duas vezes) e 7, assim

$$\frac{15}{8} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7}}$$

Exemplo 2:

Vamos escrever a fração contínua para $\pi = 3,1415926535...$

$3,1415926535 - 3 = 0,141592$, invertendo $\frac{1}{0,141592} = 7,06251331$. 7 é a parte inteira.

$7,06251331 - 7 = 0,06251331$, invertendo $\frac{1}{0,06251331} = 15,9965932$. 15 é a parte inteira.

$15,9965932 - 15 = 0,9965932$, invertendo $\frac{1}{0,9965932} = 1,003418385$. 1 é a parte inteira.

$1,003418385 - 1 = 0,003418385$, invertendo $\frac{1}{0,003418385} = 292,535806$. 292 é a parte inteira.

Subtraíram-se durante o processamento do algoritmo os números 7, 15 ,1, 292 assim construímos parte da fração contínua de π como no exemplo 1. Como se trata de um número irracional o processo não termina, no entanto a fração contínua construída dá uma boa aproximação para π.

$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, ...]$

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

Se o processo de construção se limitar a uma ou três iterações tem-se

$$\pi \approx [3; 7] = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3.1428571428571$$

$$\pi \approx [3;7,15,1] = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{355}{113} = 3.141592920354$$

$$\left|\pi - \frac{22}{7}\right| < \frac{1}{700} < \left|\pi - \frac{314}{100}\right| \text{ e } \left|\pi - \frac{355}{113}\right| < \frac{1}{3000000} < \left|\pi - \frac{3141592}{1000000}\right| \quad [14]$$

Observação: Recorde-se que estes números racionais tinham já sido identificados como melhores aproximações de π que as decimais.

Exemplo 3:
De seguida vejamos como obter a fração contínua de um número racional recorrendo a um argumento geométrico. [11]

Dado o número real $\frac{9}{16}$, vejamos como obter a sua fração contínua.

Desenhamos um retângulo de dimensões 16 e 9. Dentro do retângulo desenhamos quadrados com o maior lado possível, neste caso desenhamos um quadrado de lado 9. Na área que resta desenhamos quadrados com o maior lado possível, podemos desenhar um quadrado de lado 7. Continuando o processo desenhamos na área livre quadrados com o maior lado possível, desenhamos três quadrados de lado 2. Finalmente podemos desenhar dois quadrados de lado 1. Obtemos assim o esquema como na seguinte figura.

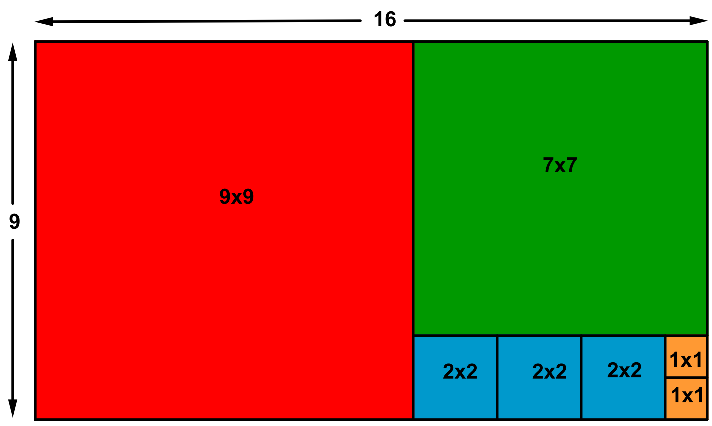


Fig. 2.1: Divisão de retângulo em quadrados

Afim de obtermos a fração contínua começamos pelo quadrado de maior para o de menor lado, contando os quadrados que tenham o mesmo lado. Assim temos um quadrado de lado 9, um quadrado de lado 7, três quadrados de lado 2 e finalmente dois quadrados de lado 1.

$$\frac{9}{16} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}}$$

Então a fração contínua para $\frac{9}{16}$ é $[\,0;1,1,3,2\,]$

2.1.3 Reduzidas de frações contínuas

Definição 2.1.2.
Seja $x=[a_0;a_1,a_2,...]$*. Sejam* $p_n\in\mathbb{Z}$ *e* $q_n\in\mathbb{N}\diagdown\{0\}$ *primos entre si tais que:*

$$\frac{p_n}{q_n}=[a_0;a_1,a_2,...,a_n],n\geq 0.$$

A fração $\frac{p_n}{q_n}$ *é chamada de* n*-ésima reduzida ou convergente da fração contínua de* x*.*

Note que se a representação por frações contínuas de x for finita então x é claramente racional.

Reciprocamente, se $x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, a sua representação será finita. Isto está diretamente ligado ao algoritmo de Euclides aplicado para determinar o máximo divisor comum de p e q, e os quocientes que aparecem no algoritmo de Euclides são os mesmos quocientes a_n que aparecem na fração contínua de x. [14]

Exemplo 4:
Frações reduzidas do número $5,387$ usando os quocientes do algoritmo de Euclides.

5387	1000	387	226	161	65	31	3	1	
	5	2	1	1	2	2	10	3	quociente
387	226	161	65	31	3	1	0		resto

Tabela 2.1: Algoritmo de Euclides em tabela

$$5,387=5+\cfrac{1}{2+\cfrac{226}{387}}$$

$$5,387=5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{161}{226}}}$$

Reduzidas

$$\frac{p_1}{q_1}=[5;2]=5+\frac{1}{2}$$

$$\frac{p_2}{q_2}=[5;2,1]=5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}$$

Observação: As frações obtidas em 2.1.2 exemplo 2, $\frac{22}{7}$ e $\frac{355}{113}$, são respetivamente as reduzidas $\frac{p_1}{q_1}$ e $\frac{p_3}{q_3}$ de π.

Proposição 2.1.3.

Dada uma sequência (finita ou infinita) $a_0, a_1, a_2.... \in \mathbb{Z}$ *tal que* $a_k > 0 \quad \forall k \geq 1$*, definimos sequências* p_m *e* q_m *por:*

$p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, $p_1 = a_0 a_1 + 1$, $q_1 = a_1$

$p_{m+2} = a_{m+2} p_{m+1} + p_m$

$q_{m+2} = a_{m+2} q_{m+1} + q_m \quad \forall m \geq 0$

temos então: $\forall n \geq 0$

$$x = [\, a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n \,] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} = \frac{p_n}{q_n}$$

Além disso, $p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n. \quad \forall n \geq 0$

Demonstração:

A demonstração será feita por indução em n.

Para $n = 0$ temos $[a_0] = a_0 = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}$

Para $n = 1$ temos $[a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}$

Para $n = 2$ temos $[a_0; a_1, a_2] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_2(a_0 a_1 + 1) + a_0}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_2 p_1 + p_0}{a_2 q_1 + q_0} = \frac{p_2}{q_2}$

Suponhamos agora que a afirmação é verdadeira para n, e provemos para $n + 1$

Por hipótese $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$ e $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$

$$[a_0; a_1, a_2, ..., a_{n+1}] = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}} =$$

$$= \frac{a_{n+1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} = \frac{a_n a_{n+1} p_{n-1} + p_{n-1} + p_{n-2} a_{n+1}}{a_n a_{n+1} q_{n-1} + q_{n-1} + q_{n-2} a_{n+1}} =$$

$$= \frac{\dfrac{a_n a_{n+1} p_{n-1} + p_{n-1} + p_{n-2} a_{n+1}}{a_{n+1}}}{\dfrac{a_n a_{n+1} q_{n-1} + q_{n-1} + q_{n-2} a_{n+1}}{a_{n+1}}} = \frac{a_n p_{n-1} + \dfrac{p_{n-1}}{a_{n+1}} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + \dfrac{q_{n-1}}{a_{n+1}} + q_{n-2}} =$$

$$= \frac{\left(a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right) q_{n-1} + q_{n-2}} = \left[a_0; a_1, a_2, ..., an + \frac{1}{a_{n+1}}\right]$$

Logo

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_{n+1}] = \left[a_0; a_1, a_2, ..., an + \frac{1}{a_{n+1}}\right]$$

Provemos agora a segunda afirmação

$$p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n, \quad \forall n \geq 0$$

A prova será feita por indução em n
Para $n = 0$
$p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_0 a_1 + 1) \times 1 - a_0 a_1 = a_0 a_1 + 1 - a_0 a_1 = 1 = (-1)^0$

Suponhamos agora que a afirmação é verdadeira para n e provemos para $n + 1$.
Por hipótese, $p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$.
Por definição, $p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n$ e $q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n$

$$p_{n+2}q_{n+1} - p_{n+1}q_{n+2} =$$

$= (a_{n+2}p_{n+1} + p_n)q_{n+1} - (a_{n+2}q_{n+1} + q_n)p_{n+1} =$
$= a_{n+2}p_{n+1}q_{n+1} + p_n q_{n+1} - a_{n+2}q_{n+1}p_{n+1} - q_n p_{n+1} =$
$= p_n q_{n+1} - q_n p_{n+1} = -(p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1}) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$

Logo

$$p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n.$$

$\square$

De seguida vamos provar que um número real x pode ser aproximado pela n-ésima reduzida da fração contínua de x e, reciprocamente, que existem racionais próximos de x que são reduzidas da fração contínua de x.

Teorema 2.1.4.
Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}$$

além disso

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2q_n^2} \quad \textit{ou} \quad \left| x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| < \frac{1}{2q_{n+1}^2}$$

Demonstração:

$$\left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1}}{q_{n+1}q_n} \right| = \left| \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}} \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

Como x está entre duas reduzidas consecutivas temos [17]

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}$$

Provemos agora a segunda parte do teorema, o que faremos por absurdo.
Se

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{1}{2q_n^2} \quad \text{e} \quad \left| x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \geq \frac{1}{2q_{n+1}^2}, \text{ então}$$

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} = \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| + \left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \geq \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2}$$

mas

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} \geq \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2} \Rightarrow \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2} - \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq 0$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{\sqrt{2}q_n} - \frac{1}{\sqrt{2}q_{n+1}})^2 \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}q_n} = \frac{1}{\sqrt{2}q_{n+1}} \Rightarrow q_n = q_{n+1}$$

O que é absurdo. □

Por outro lado todo o número racional $\frac{p}{q}$ próximo de x a uma distância inferior a $\frac{1}{2q^2}$ é uma reduzida.

Teorema 2.1.5.
Se $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$, *então* $\frac{p}{q}$ *é uma reduzida da fração contínua de* x.

Demonstração:
Seja n tal que $q_n \leq q < q_{n+1}$. Vamos supor que $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$

De [2] (prop. 3.15) $\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q_n q_{n+1}}$

Assim $\frac{p}{q}$ está fora do intervalo de extremos $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ [17]
Temos duas possibilidades:

a) se $q \geq \frac{q_{n+1}}{2}$, então $\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q_n q_{n+1}} \geq \frac{1}{2q^2}$ o que é absurdo.

b) Se $q < \frac{q_{n+1}}{2}$, então temos que

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p}{q}\right| - \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{qq_n} - \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \frac{q_{n+1} - q}{qq_n q_{n+1}} > \frac{1}{2qq_n} \geq \frac{1}{2q^2}$$

O que é absurdo. □

2.2 Equação de Pell-Fermat

"(...)toda a aritmética é apenas composta por quatro ou cinco operações, que são: a adição, a subtração, a multiplicação, a divisão e a extração das raízes, que pode ser entendida como uma espécie de divisão(...)" [9]

Nesta seção vamos abordar conceitos históricos usados para a extração de raízes quadradas e a formalização da teoria da Equação de Pell-Fermat.

2.2.1 A raiz quadrada na Mesopotâmia

Geometricamente o cálculo de $\sqrt{D}$, pode ser encarado como a procura de um quadrado com área D. [8]

Tomemos como exemplo $\sqrt{7}$

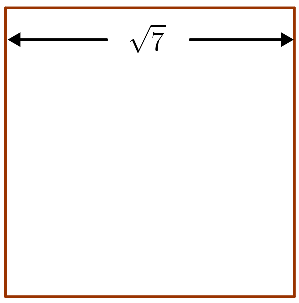


Fig. 2.2: Quadrado de lado raiz quadrada de 7

Comecemos por incluir nesse quadrado o maior quadrado possível com lado conhecido. Seja 2 o comprimento do lado desse quadrado.

Temos 2 como uma aproximação grosseira de

$$\sqrt{7} \approx 2.645751$$

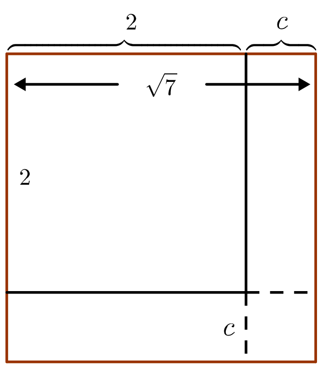


Fig. 2.3: Quadrado de lado $2 + c$

A região em forma de «L» refletido, chamado de *gnómon* [8], é composta por dois retângulos de lados 2 e c e um pequeno quadrado de lado c. Sendo a sua área dada por

$$2(2c) + c^2 = 7 - 4 = 3$$

No argumento que pretendemos usar vamos desprezar o quadrado de lado c.

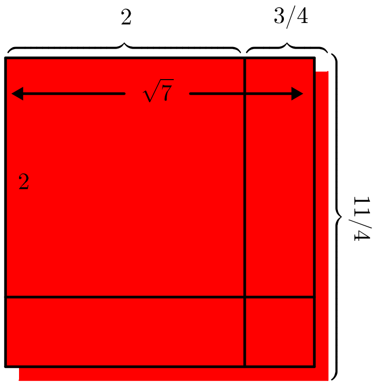


Fig. 2.4: Quadrado de lado $2+3/4$

Obtemos assim a aproximação

$$2(2c) \approx 3, \text{ ou seja } c \approx \frac{3}{4}$$

Uma melhor aproximação de $\sqrt{7} \approx 2.645751$ é

$$2+\frac{3}{4}=\frac{11}{4}=2.75$$

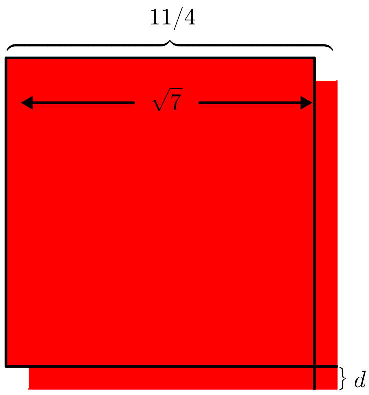


Fig. 2.5: Quadrado de lado 11/4

Subtraímos de $\frac{11}{4}$ o lado d do quadrado que compõe a nova região em "L" refletido.

$$\left(\frac{11}{4}\right)^2 = 7 + 2\left(\frac{11}{4}\right)d - d^2$$

Desprezando o quadrado de lado d obtemos

$$\left(\frac{11}{4}\right)^2 - 7 \approx 2\left(\frac{11}{4}\right)d \Leftrightarrow \frac{11}{2}d \approx \frac{121}{16} - 7 \Leftrightarrow d \approx \frac{9}{88}$$

Obtemos assim como nova aproximação de $\sqrt{7} \approx 2.645751$

$$\frac{11}{4} - \frac{9}{88} = \frac{233}{88} \approx 2.647728$$

Que é uma aproximação melhor.

Subtraímos agora de $\frac{233}{88}$ o lado d do quadrado que compõe a nova região em «L» refletido.

$$\left(\frac{233}{88}\right)^2 = 7 + 2\left(\frac{233}{88}\right)d - d^2$$

Desprezando o quadrado de lado d obtemos

$$\frac{233}{88}d \approx \frac{54289}{41008} - 7 \Leftrightarrow d \approx \frac{81}{41008}$$

Obtemos assim como nova aproximação de $\sqrt{7} \approx 2.645751$

$$\frac{233}{88} - \frac{81}{41008} = \frac{108497}{41008} \approx 2.645752$$

Mais geralmente, seja $a' \approx \sqrt{D}$, e a o maior natural tal que $a' > a$. [9]

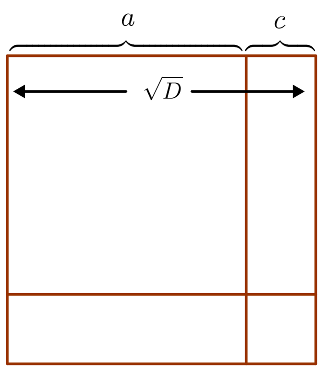


Fig. 2.6: Quadrado de lado raiz quadrada de D

Determinar a' não é mais do que encontrar uma boa aproximação de c, medida de um dos lados da região em forma de «L» refletido que envolve o quadrado de lado a. Este gnómon tem área igual a

$$D - a^2$$

É composto por dois retângulos de lados a e c e um quadrado de lado c. Logo

$$D - a^2 = 2ac + c^2$$

Desprezando o quadrado de lado c obtemos

$$2ac \approx D - a^2 \Leftrightarrow c \approx \frac{D - a^2}{2a}$$

Resulta que um melhor valor para $\sqrt{D}$ (em relação a a) é obtido tomando para a aproximação de $a + c$ a quantidade:

$$a_1 = a + \frac{D - a^2}{2a} \Leftrightarrow a_1 = \frac{D + a^2}{2a}$$

Recursivamente, podemos melhorar a aproximação fazendo iterações definidas por

$$a_{n+1} = \frac{D + a_n^2}{2a_n}$$

2.2.2 O algoritmo hindu

Vamos agora ver o algoritmo hindu para a extração de raízes quadradas. Este algoritmo foi descoberto pelo matemático indiano Brahmagupta (598-670), sendo chamado de *regra da composição de Brahmagupta*.

Teorema 2.2.1 (Regra da composição de Brahmagupta).
Se (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são soluções da equação $x^2 - Dy^2 = 1$, então

$$(x_3, y_3) = (x_1x_2 + Dy_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

também é uma solução da equação. [21]

Demonstração:
Dado que (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são solução da equação, $x_1^2 - Dy_1^2 = 1$ e $x_2^2 - Dy_2^2 = 1$
então,
$1 = (x_1^2 - Dy_1^2)(x_2^2 - Dy_2^2)$
$\Leftrightarrow 1 = (x_1 - y_1\sqrt{D})(x_1 + y_1\sqrt{D}) \times (x_2 - y_2\sqrt{D})(x_2 + y_2\sqrt{D})$
$\Leftrightarrow 1 = (x_1x_2 + Dy_1y_2)^2 - D(x_1y_2 + y_1x_2)^2$
$\Leftrightarrow 1 = x_3^2 - Dy_3^2$ $\square$

De entre as várias soluções da equação, existe uma a partir da qual podemos obter todas as outras.

Definição 2.2.2.
*Chama-se **solução fundamental** ou **solução mínima** de $x^2 - Dy^2 = 1$, ao par ordenado (x_1, y_1), onde x_1 e y_1 são os menores inteiros positivos que são solução da equação e que não são solução trivial, ou seja, $(x_1, x_2) \neq (1, 0)$.*

Exemplo:
Soluções de $x^2 - 3y^2 = 1$.
Por tentativa encontramos uma solução $(2, 1)$. Fazendo a composição com ela própria, obtemos a solução

$$(2 \times 2 + 3 \times 1 \times 1, 2 \times 1 + 1 \times 2) = (7, 4)$$
$$7^2 - 3 \times 4^2 = 49 - 48 = 1$$

Compondo agora $(2, 1)$ com $(7, 4)$ obtemos a solução

$$(2 \times 7 + 3 \times 1 \times 4, 2 \times 4 + 1 \times 7) = (26, 15)$$
$$26^2 - 3 \times 15^2 = 676 - 675 = 1$$

2.2.3 Equação de Pell-Fermat

Usamos a designação de Rodrigo Gondim [6], para nos referir à equação de Pell. No entanto há registos históricos de que foi Euler (1707-1783) que atribuíu erradamente a Pell (1611-1685) um método de resolução da equação. Sendo que a contribuição de Pell resulta na publicação de alguns resultados parciais de Wallis e Brouncker. A solução da equação foi considerada primeiro por Fermat, e uma solução completa foi dada por Lagrange [12][5]. Os argumentos a seguir expostos têm como referência base [13].

Definição 2.2.3 (Equação de Pell-Fermat).
Chama-se equação de Pell-Fermat à equação definida por

$$x^2 - Dy^2 = 1, \; D \in \mathbb{N} \;\; e \;\; \sqrt{D} \notin \mathbb{N}$$

Temos que os pares $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ são solução da equação, chamadas *soluções triviais*. Procuramos soluções (x, y), com $x, y \in \mathbb{Z}$, que não sejam triviais.
Vamos então verificar se a equação tem soluções para além das triviais e como proceder para encontrar as soluções. Para o efeito vamos considerar números da forma

$$x + y\sqrt{D}, \; x, y \in \mathbb{Z}$$

Proposição 2.2.4.
Os números $x + y\sqrt{D}$ têm uma única representação.

Demonstração:
Se $x_1 + y_1\sqrt{D} = x_2 + y_2\sqrt{D}$, com $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Z}$

Então $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Subtraindo $(y_1 - y_2)\sqrt{D} = x_2 - x_1$

Se $y_1 = y_2$ então $x_2 - x_1 = (y_1 - y_2)\sqrt{D} = 0$, logo $x_1 = x_2$

se $y_1 \neq y_2$ então $\sqrt{D} = \dfrac{x_2 - x_1}{y_1 - y_2} \in \mathbb{Q}$. O que é absurdo. □

Proposição 2.2.5.
Se $D \in \mathbb{N}$ e $\sqrt{D} \notin \mathbb{N}$, então $\sqrt{D}$ é irracional.

Demonstração:
Com vista à obtenção de um absurdo, vamos supor que $\sqrt{D} = \dfrac{x}{y}$, com $mdc(x, y) = 1$ e $y > 1$, porque podemos simplificar os fatores comuns de modo que x e y sejam primos entre si.
Assim $\sqrt{D} = \dfrac{x}{y} \Rightarrow D = \dfrac{x^2}{y^2}$ e $mdc(x, y) = 1 \Rightarrow mdc(x^2, y^2) = 1$

Como $y > 1 \Rightarrow y^2 > 1$. Obtemos um absurdo uma vez que $D \in \mathbb{N}$ □

Podemos definir uma função norma no conjunto dos números da forma $x + y\sqrt{D}$ de tal modo que as soluções da equação de Pell-Fermat sejam os elementos deste conjunto com norma 1. Assim,

Definição 2.2.6 (Função Norma).
Seja $\mathbb{Z}[D] = \{x + y\sqrt{D}, x, y \in \mathbb{Z}\}$
Consideremos a função

$$N : \mathbb{Z}[D] \to \mathbb{Z}$$

$$N(x + y\sqrt{D}) \overset{def}{=} x^2 - Dy^2 = (x + y\sqrt{D})(x - y\sqrt{D})$$

Provemos de seguida que a função norma definida é multiplicativa.

Proposição 2.2.7.
Dados $x + y\sqrt{D}$ *e* $u + v\sqrt{D}$ *então*

$$N((x + y\sqrt{D})(u + v\sqrt{D})) = N(x + y\sqrt{D})N(u + v\sqrt{D})$$

Demonstração:
$N((x + y\sqrt{D})(u + v\sqrt{D})) = N(xu + xv\sqrt{D} + yu\sqrt{D} + Dyv) =$
$= N((xu + Dyv) + (xv + yu)\sqrt{D}) = (xu + Dyv)^2 - D(xv + yu)^2 =$
$= (xu)^2 + 2Dxyuv + (Dyv)^2 - D(xv)^2 - 2Dxyuv - D(yu)^2 =$
$= (xu)^2 - D(xv)^2 - D(yu)^2 + (Dyv)^2$

$N(x + y\sqrt{D})N(u + v\sqrt{D}) = (x^2 - Dy^2)(u^2 - Dv^2) =$
$= (xu)^2 - D(xv)^2 - D(yu)^2 + (Dyv)^2$

Logo

$$N((x + y\sqrt{D})(u + v\sqrt{D})) = N(x + y\sqrt{D})N(u + v\sqrt{D})$$

□

Exemplo: $(3 + 2\sqrt{2})^2 = 17 + 12\sqrt{2}$
$N(17 + 12\sqrt{2}) = N(3 + 2\sqrt{2})^2 = 3^2 - 2 \times 2^2 = 1^2 = 1$

Procurar soluções da equação de Pell-Fermat é procurar números da forma $x+y\sqrt{D}$, com $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que

$$N(x + y\sqrt{D}) = x^2 - Dy^2 = 1$$

Proposição 2.2.8.
Se $x + y\sqrt{D} \neq 1$ *for solução, então todas as potências* $(x + y\sqrt{D})^k$ *também são solução* $\forall k \in \mathbb{N}$

Demonstração:
Se $N(x + y\sqrt{D}) = 1$, para $\forall k \in \mathbb{N}$, então
$N((x + y\sqrt{D})^k) = N(x + y\sqrt{D})^k = 1^k = 1$
Se $x + y\sqrt{D} \neq 1$, então recorrendo ao Binómio de Newton
$(x + y\sqrt{D})^k = x_k + y_k\sqrt{D}$, $x_k, y_k \in \mathbb{Z}$
$x_k^2 - Dy_k^2 = N((x + y\sqrt{D})^k) = 1$. □

Exemplo: $x_k + y_k\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^k$

$x_k^2 - 2y_k^2 = 1$

$(3 + 2\sqrt{2})^2 = 17 + 12\sqrt{2}$
$17^2 - 2 \times 12^2 = 1$

Assim, se a equação $x^2 - Dy^2$ tiver alguma solução (x, y), com, $x, y \in \mathbb{N}$, então ela vai ter infinitas soluções.

$(x+y\sqrt{D})^k$ é da forma $x_k + y_k\sqrt{D}$, $x_k, y_k \in \mathbb{Z}$. Então vamos usar o Binómio de Newton para calcular potências de elementos $x+y\sqrt{D} \in \mathbb{Z}[D]$.

$(x+y\sqrt{D})^k = x^k + \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} x^{k-1}y\sqrt{D} + \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} x^{k-2}y^2D + ... = x_k + y_k\sqrt{D}$

onde

$x_k = x^k + \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} x^{k-2}y^2D + \begin{pmatrix} k \\ 4 \end{pmatrix} x^{k-4}y^4D^2 + ... = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \begin{pmatrix} k \\ 2j \end{pmatrix} x^{k-2j}y^{2j}D^j$

$y_k = \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} x^{k-1}y + \begin{pmatrix} k \\ 3 \end{pmatrix} x^{k-3}y^3D + ... = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \begin{pmatrix} k \\ 2j+1 \end{pmatrix} x^{k-2j-1}y^{2j+1}D^j$

Exemplo:
Dada a equação de Pell-Fermat $x^2 - 2y^2 = 1$, com $x = 3$ e $y = 2$. Calculemos a potência de expoente 2 com o Binómio de Newton.

$x_2 = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{2}{2} \rfloor} \begin{pmatrix} 2 \\ 2j \end{pmatrix} x^{2-2j}y^{2j}D^j = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} x^0y^0D^0 + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} x^0y^2D = 3^2 + 2^2 \times 2 = 9 + 8 = 17$

$y_2 = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{2-1}{2} \rfloor} \begin{pmatrix} 2 \\ 2j+1 \end{pmatrix} x^{2-2j-1}y^{2j+1}D^j = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} x^{2-1}y^1D^0 = 2 \times 3 \times 2 = 12$

Vamos de seguida provar que se $x^2 - Dy^2 = 1$ tiver alguma solução então tem uma solução fundamental ou solução mínima. E que qualquer solução é uma potência da solução mínima.

Se existirem $x, y \in \mathbb{N}$ com $x^2 - Dy^2 = 1$, vamos considerar o menor elemento do conjunto

$$\mathbb{N}[D] = \{x + y\sqrt{D}, x, y \in \mathbb{N}, x^2 - Dy^2 = 1\}$$

De facto o conjunto $\mathbb{N}[D]$ tem um menor elemento. Estamos a considerar que o conjunto é não vazio, assim dado qualquer $M > 0$ se $x + y\sqrt{D} \leqslant M$, com $x, y > 0$, temos

$$x \leqslant M \text{ e } y\sqrt{D} \leqslant M \Rightarrow y \leqslant \frac{M}{\sqrt{D}} \Rightarrow y < M$$

Existe um número finito de possibilidades para x e y tais que $x + y\sqrt{D} \leqslant M$ e num conjunto finito existe um menor elemento.

Proposição 2.2.9.
$\forall x, y \in \mathbb{N},\ \exists\ k \in \mathbb{N}$ *tal que* $x + y\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^k$*, com* $x_1 + y_1\sqrt{D}$ *o menor elemento de* $\mathbb{N}[D]$

Demonstração:
Como $x_1 + y_1\sqrt{D} > 1$
$\exists k \in \mathbb{N}$ com $(x_1 + y_1\sqrt{D})^k \leqslant x + y\sqrt{D} < (x_1 + y_1\sqrt{D})^{k+1}$

Multiplicando por $(x_1 - y_1\sqrt{D})^k$, temos

$1 \leqslant (x + y\sqrt{D})(x_1 - y_1\sqrt{D})^k < x_1 + y_1\sqrt{D}$

Consideremos $u+v\sqrt{D}=(x+y\sqrt{D})(x_1-y_1\sqrt{D})^k$, então
$u+v\sqrt{D}\geqslant 1$

$u^2-Dv^2=N(u+v\sqrt{D})=$
$N((x+y\sqrt{D})(x_1-y_1\sqrt{D})^k)=N(x+y\sqrt{D})N(x_1-y_1\sqrt{D})^k$
$=(x^2-Dy^2)(x_1^2-Dy_1^2)^k=1\times 1^k=1$

Temos que $u+v\sqrt{D}$ dá uma solução da equação e $u+v\sqrt{D}\geqslant 1$

Se $u^2-Dv^2=1$ e $u+v\sqrt{D}<x_1+y_1\sqrt{D}$, absurdo porque $x_1+y_1\sqrt{D}$ é a solução mínima.

Portanto $u+v\sqrt{D}=1$, logo $v=0$ e $u=1$

$(x+y\sqrt{D})(x_1-y_1\sqrt{D})^k=1\Leftrightarrow x+y\sqrt{D}=(x_1+y_1\sqrt{D})^k$ □

As soluções da equação de Pell-Fermat fornecem "boas aproximações racionais" de $\sqrt{D}$.

Se $x,y\in\mathbb{Z}$ são tais que $x^2-Dy^2=1$, então $(x-y\sqrt{D})(x+y\sqrt{D})=1$ e, portanto

$$\frac{x}{y}-\sqrt{D}=\frac{1}{y(x+y\sqrt{D})}$$

À medida que x e y tomam valores cada vez maiores, a fração $\dfrac{x}{y}$ dá aproximações cada vez melhores de $\sqrt{D}$.
Vimos nos argumentos anteriores que as soluções de Pell-Fermat fornecem boas aproximações racionais de $\sqrt{D}$. No argumento que se segue pretendemos mostrar que existem infinitos racionais tão próximos de $\sqrt{D}$ quanto queiramos, que determinam infinitas soluções da equação de Pell-Fermat.

Teorema 2.2.10 (Dirichlet).
Dado $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *existem infinitos* $(p,q)\in\mathbb{Z}\times(\mathbb{N}\backslash\{0\})$ *com*

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}\quad\textit{[21]}$$

Demonstração:
Na demonstração do teorema vamos usar o princípio da casa dos pombos, que nos diz que se tivermos $n+1$ objetos para colocar em n caixas, então pelo menos duas caixas ficam com dois objetos.

Dado $x\in\mathbb{R}$, definimos a *parte inteira* de x como o único inteiro $\lfloor x\rfloor$ tal que $\lfloor x\rfloor\leq x<\lfloor x\rfloor+1$, e a *parte fracionária* de x como $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor\in[0,1[$.
Seja N um inteiro positivo (grande). Consideremos os $N+1$ números $0,\{\alpha\},\{2\alpha\},...,\{N\alpha\}\in[0,1[$ e dividamos o intervalo $[0,1[$ em n partes iguais

$$[0,1[=\bigcup_{k=1}^{n}\left[\frac{K-1}{N},\frac{K}{N}\right[$$

Usando o princípio da casa dos pombos $\exists\, 0 \leqslant i < j \leqslant N$ e $1 \leqslant k \leqslant N$, tais que

$$\{i\alpha\},\, \{j\alpha\} \in \left[\frac{K-1}{N}, \frac{K}{N}\right[\quad \Rightarrow \quad |\{j\alpha\} - \{i\alpha\}| < \frac{1}{N}$$

Definamos agora p e q como $0 < q = j - i \leqslant N$ e $p = \lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor \in \mathbb{Z}$
Pela definição de parte fracionária

$$|\{j\alpha\} - \{i\alpha\}| = |j\alpha - \lfloor j\alpha \rfloor - (i\alpha - \lfloor i\alpha \rfloor)| = |(j-i)\alpha - (\lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor)| = |q\alpha - p| < \tfrac{1}{N}$$

da definição de q temos $\dfrac{1}{N} \leqslant \dfrac{1}{q} \quad \Rightarrow \quad |q\alpha - p| < \dfrac{1}{q}$. Dividindo por q obtemos o resultado pretendido

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$$

$\square$

Em [6], o autor afirma que a existência de infinitas soluções para a equação de Pell-Fermat é consequência do Teorema de Dirichlet, remetendo a demonstração deste resultado para um artigo de M. Miranda no nº9 da revista FAMAT. Enuncia em alternativa a Proposição que a seguir apresentamos, sem a demonstrar. Aqui procedemos no entanto à demonstração de $i) \Rightarrow ii)$ [13], uma vez que ela resulta dos argumentos anteriormente apresentados. A prova da implicação $ii) \Rightarrow iii)$ requer o estudo de uma família mais geral de equações onde se inclui a de Pell-Fermat.

Proposição 2.2.11.
Seja D um inteiro que não é um quadrado. Então são equivalentes:

(i) Existem infinitos inteiros positivos x, y tais que $x^2 - Dy^2 = 1$;

(ii) Existem infinitos inteiros positivos x, y tais que $\left|\dfrac{x}{y} - \sqrt{D}\right| < \dfrac{1}{y^2}$;

(iii) Existe $m < 0$ para o qual existem infinitos inteiros positivos x, y satisfazendo $x^2 - Dy^2 = m$

Demonstração de $i) \Rightarrow ii)$:
Se $x^2 - Dy^2 = 1$, com x, y inteiros positivos, então

$$(x - y\sqrt{D})(x + y\sqrt{D}) = 1, \text{ ou seja}$$

$$x - y\sqrt{D} = \frac{1}{x + y\sqrt{D}}$$

Como $\dfrac{1}{x + y\sqrt{D}} > 0$, aplicamos módulos

$$\left|x - y\sqrt{D}\right| = \frac{1}{x + y\sqrt{D}} < \frac{1}{y\sqrt{D}} < \frac{1}{y}$$

dividindo por y

$$\left|\frac{x}{y} - \sqrt{D}\right| < \frac{1}{y^2}$$

$\square$

2.2.4 Curiosidades

Algumas equações de Pell-Fermat e respetivas soluções mínimas.

$x^2 - 60y^2 = 1 \quad x = 31, y = 4 \quad \frac{31}{4} \approx \sqrt{60}$

$x^2 - 61y^2 = 1 \quad x = 1766319049, y = 226153980 \quad \frac{1766319049}{226153980} \approx \sqrt{61}$

$x^2 - 62y^2 = 1 \quad x = 63, y = 8 \quad \frac{63}{8} \approx \sqrt{62}$

$x^2 - 96y^2 = 1 \quad x = 49, y = 5 \quad \frac{49}{5} \approx \sqrt{96}$

$x^2 - 97y^2 = 1 \quad x = 62809633, y = 6377352 \quad \frac{62809633}{6377352} \approx \sqrt{97}$

$x^2 - 98y^2 = 1 \quad x = 99, y = 10 \quad \frac{99}{10} \approx \sqrt{98}$

2.3 Frações Contínuas, Raízes Quadradas e Equação de Pell-Fermat

Nesta seção pretendemos estabelecer conexões entre as frações contínuas, a aproximação de raízes quadradas e a resolução da Equação de Pell-Fermat. Assim não procederemos à demonstração dos teoremas enunciados, uma vez que o nosso objetivo é o de estabelecer conexões entre os conceitos vistos nas seções anteriores.

2.3.1 Fração Contínua da raiz quadrada de D e Equação de Pell-Fermat

Notação: Seja $D \in \mathbb{N}$ e $\sqrt{D} \notin \mathbb{N}$. E seja a fração contínua de $\sqrt{D}$

$$\sqrt{D} = [a; b_1, b_2, ..., b_m, b_1, b_2, ..., b_m, b_1, b_2, ..., b_m, ...]$$

a $b_1, b_2, ..., b_m$ chamamos **período** de tamanho m da fração contínua de $\sqrt{D}$. Denotamos por

$$\sqrt{D} = [a; \overline{b_1, b_2, ..., b_m}]$$

Como visto na seção 2.1.2, sabemos calcular a fração contínua de um número. Tomemos como exemplo , com vista à demonstração do argumento exposto nesta seção, a fração contínua da raiz quadrada de um número inteiro positivo que não seja um quadrado perfeito. [20]

O número $\sqrt{23}$ tem como fração contínua

$$\sqrt{23} = [4; \overline{1, 3, 1, 8}]$$

Calculemos as primeiras frações reduzidas para $\sqrt{23}$

$$[4; 1] = 4 + \frac{1}{1} = \frac{5}{1}$$

$$[4; 1, 3] = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}} = \frac{19}{4}$$

$$[4; 1, 3, 1] = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{24}{5}$$

$$[4; 1, 3, 1, 8] = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8}}}} = \frac{211}{44}$$

$$[4; 1, 3, 1, 8, 1] = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1}}}}} = \frac{235}{49}$$

$$[4;1,3,1,8,1,3] = 4 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}}} = \frac{916}{191}$$

$$[4;1,3,1,8,1,3,1] = 4 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1}}}}}}} = \frac{1151}{240}$$

Se $\frac{p}{q}$ é uma reduzida para $\sqrt{D}$, então

$$\frac{p}{q} \approx \sqrt{D}, \text{ logo } \frac{p^2}{q^2} \approx D$$

Na tabela seguinte podemos observar a lista de valores das diferenças $p^2 - Dq^2$, para as primeiras reduzidas de $\sqrt{23}$

p	q	$p^2 - 23q^2$
5	1	2
19	4	-7
24	5	1
211	44	-7
235	49	2
916	191	-7
1151	240	1

Tabela 2.2: Diferenças $p^2 - 23q^2$

Por observação da última coluna da tabela, o número 1 surge na 3ª linha e reflete o facto de

$$24^2 - 23 \times 5^2 = 1$$

então a reduzida $\frac{24}{5}$ do número $\sqrt{23}$ fornece uma solução $(24, 5)$ da equação de Pell-Fermat.

$$x^2 - 23y^2 = 1$$

Este facto sugere uma conexão entre as reduzidas de $\sqrt{D}$ e a equação $x^2 - Dy^2 = 1$

A fração contínua de $\sqrt{23}$

$$\sqrt{23} = [4; \overline{1, 3, 1, 8}]$$

tem período 4, e a reduzida que fornece a solução para a equação de Pell-Fermat é

$$[4; 1, 3, 1] = \frac{24}{5}$$

D	Fração contínua de $\sqrt{D}$	Período
2	$[1; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, ...]$	1
3	$[1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, ...]$	2
5	$2; 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, ...$	1
7	$[2; 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4]$	4
11	$[3; 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6, ...]$	2
13	$[3; 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, ...]$	5
17	$[4; 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, ...]$	1
19	$[4; 2, 1, 3, 1, 2, 8, 2, 1, 3, 1, 2, 8, 2, 1, 3, 1, 2, 8, 2, 1, ...]$	6
23	$[4; 1, 3, 1, 8, 1, 3, 1, 8, 1, 3, 1, 8, 1, 3, 1, 8, 1, ...]$	4
29	$[5; 2, 1, 1, 2, 10, 2, 1, 1, 2, 10, 2, 1, 1, 2, 10, ...]$	5
31	$[5; 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10, 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10, 1, 1, ...]$	8
37	$[6; 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, ...]$	1

Tabela 2.3: Frações contínuas de algumas raízes quadradas

Examinando a tabela, podemos observar que as frações contínuas de $\sqrt{D}$ têm algumas características especiais. Vejamos alguns exemplos.

$$\begin{array}{ll} \sqrt{19} = [4; \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}] & \text{Período } 6 \\ \sqrt{23} = [4; \overline{1, 3, 1, 8}] & \text{Período } 4 \\ \sqrt{29} = [5; \overline{2, 1, 1, 2, 10}] & \text{Período } 5 \end{array}$$

Para $D = 23$ a reduzida que é solução da equação de Pell-Fermat é obtida a partir do período removendo o último dígito. Apresentamos na tabela seguinte os resultados para $D = 73$, $D = 89$, e $D = 97$.

$\sqrt{D}$	$\left[a; b_1, b_2, ..., b_{m-1} = \frac{p}{q}\right]$	$p^2 - Dq^2$
$\sqrt{23}$	$[4; 1, 3, 1] = \frac{24}{5}$	$24^2 - 23 \times 5^2 = 1$
$\sqrt{73}$	$[8; 1, 1, 5, 5, 1, 1] = \frac{1068}{125}$	$1068^2 - 73 \times 125^2 = -1$
$\sqrt{79}$	$[8; 1, 7, 1] = \frac{80}{9}$	$80^2 - 79 \times 9^2 = 1$
$\sqrt{97}$	$[9; 1, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1] = \frac{5604}{569}$	$5604^2 - 97 \times 569^2 = -1$

Tabela 2.4: Algumas reduzidas solução da equação de Pell-Fermat

Verificamos que não obtemos soluções para a equação de Pell-Fermat em todos os casos, mas encontramos uma solução para $p^2 - Dq^2 = 1$ ou uma solução para $p^2 - Dq^2 = -1$. Obtemos um sinal de mais quando o período de $\sqrt{D}$ é par e um sinal de menos quando o período é ímpar (notemos que na tabela acima removemos o último dígito do período).
Vamos proceder à formalização da nossa observação, com o seguinte teorema.

Teorema 2.3.1.
Seja $D \in \mathbb{N}$ e $\sqrt{D} \notin \mathbb{N}$. A fração contínua de $\sqrt{D}$ é

$$\sqrt{D} = [a; \overline{b_1, b_2, ..., b_{m-1}, b_m}] \quad \textit{e seja} \quad \frac{p}{q} = [a; b_1, b_2, ..., b_{m-1}]$$

Então (p, q) é a menor solução com positivos inteiros para a equação

$$p^2 - Dq^2 = (-1)^m \quad \textit{[20]}$$

No argumento que segue vamos ver como proceder, quando para resolver $x^2 - Dy^2 = 1$ obtemos uma solução para $x^2 - Dy^2 = -1$, ou seja, quando $\sqrt{D} = [a; \overline{b_1, b_2, ..., b_{m-1}, b_m}]$ e m é ímpar.

Vimos na seção 2.2.3 que qualquer solução, x_k, y_k, da equação $x^2 - Dy^2 = 1$, se pode obter como uma potência da solução mínima.

$$x_k + y_k\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^k, \qquad k = 1, 2, 3, ... \quad \text{(2.1)}$$

Suponhamos agora que (x_1, y_1) é solução da equação $x^2 - Dy^2 = -1$

$$x_k^2 - Dy_k^2 = (x_1^2 - Dy_1^2)^k = (-1)^k$$

Então se k for par, obtemos uma solução para a equação de Pell-Fermat $x^2 - Dy^2 = 1$. Supondo que m é ímpar na fórmula 2.1, então (p, q) satisfaz $p^2 - Dq^2 = -1$. Então calculamos o quadrado

$$(p + q\sqrt{D})^2 = (p^2 + q^2 D) + 2pq\sqrt{D}$$

encontrando assim a desejada solução

$$(p^2 + q^2 D, 2pq) \quad \text{para} \quad x^2 - Dy^2 = 1$$

Finalmente temos um modo eficiente de resolver a equação de Pell-Fermat em todos os casos, o que nos fornece um método para encontrar a solução mínima.

Teorema 2.3.2 (Teorema das Frações Contínuas e Equação de Pell-Fermat).
Seja a fração contínua de $\sqrt{D}$

$$\sqrt{D} = [a; \overline{b_1, b_2, ..., b_{m-1}, b_m}] \quad \textit{e seja} \quad \frac{p}{q} = [a, b_1, b_2, ..., b_{m-1}]$$

Então a solução mínima com inteiros positivos para a equação de Pell-Fermat

$$x^2 - Dy^2 = (-1)^m \qquad \textit{é dada por} \qquad (x_1, y_1) = \begin{cases} (p, q) & \textit{se m é par} \\ (p^2 + q^2 D, 2pq) & \textit{se m é ímpar} \end{cases} \quad \textit{[20]}$$

Todas as outras soluções são dadas pela fórmula

$$x_k + y_k\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^k, \qquad k = 1, 2, 3, ...$$

Finalizemos o nosso percurso pelas frações contínuas e a equação de Pell-Fermat com um exemplo.

Exemplo: Resolvamos a equação de Pell-Fermat

$$x^2 - 73y^2 = 1$$

A fração contínua de $\sqrt{73}$ é

$$\sqrt{73} = [8; \overline{1, 1, 5, 5, 1, 1, 16}]$$

Pelo Teorema 2.3.2 omitimos o último dígito e calculamos a fração

$$\frac{1068}{125} = [8; 1, 1, 5, 5, 1, 1]$$

O período m é igual a 7, então o par $(p, q) = (1068, 125)$ fornece uma solução para

$$1068^2 - 73 \times 125^2 = -1$$

Para encontrar a solução mínima, pelo teorema 2.3.2 calculamos

$$p^2 + q^2 D = 1068^2 + 125^2 \times 73 = 2281249$$
$$2pq = 2 \times 1068 \times 125 = 267000$$

Então a solução mínima para

$$x^2 - 73y^2 = 1 \quad \text{é} \quad (x, y) = (2281249, 267000)$$
$$2281249^2 - 73 \times 267000^2 = 1$$

2.3.2 Curiosidades

Apresentamos algumas curiosidades sobre a fração contínua de $\sqrt{D}$, onde D é um inteiro positivo que não seja um quadrado perfeito. [20]

$$\sqrt{D} = [a; \overline{b_1, b_2, ..., b_{m-1}, b_m}]$$

Então

$$b_m = 2a \qquad \text{e}$$
a lista de números $b_1, b_2, ..., b_{m-1}$ é simétrica, ou seja é uma capicua.

Consideremos, como exemplo, as duas frações contínuas

$\sqrt{19} = [4; \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}]$

$\sqrt{29} = [5; \overline{2, 1, 1, 2, 10}]$

Na primeira fração $8 = 2 \times 4$ e na segunda $10 = 2 \times 5$

Na primeira fração 21312 e na segunda fração 2112

2.3.3 Conclusão

A teoria dos números é uma área da matemática que pode ter uma abordagem lúdica e de carácter experimental. Neste sentido as aprendizagens sobre os números irracionais no ensino básico e secundário podem ser motivadas com curiosidades númericas obtidas a partir das teorias de aproximação de números irracionais por números racionais. Também o ensino de limites de sucessões pode ser enriquecido com exemplos daqui retirados. Este carácter experimental deve ser no entanto complementado com definições e resultados enunciados com rigor científico.

Capítulo 3

Prática De Ensino Supervisionada

Neste terceiro capítulo faremos uma breve descrição do Estágio Pedagógico, à qual se segue a apresentação de um conjunto de aulas lecionadas durante o mesmo. A numeração das aulas apresentadas está de acordo com a numeração global de todas as aulas lecionadas.

3.1 Breve descrição do Estágio Pedagógico

Introdução

A Prática de Ensino Supervisionada, genericamente designada por "estágio pedagógico" ou "estágio", doravante designado por PES, com a duração de um ano letivo, teve início a um de setembro de dois mil e treze e terminou a trinta de junho de dois mil e catorze. A realização do mesmo teve lugar na Escola Secundária Campos de Melo, situada na Covilhã, sendo a orientadora cooperante a Professora Maria Isaura Fazendeiro Mendes, a orientadora científica a Professora Doutora Sandra Margarida Pinho da Cruz Bento e Diretor de curso o Professor Doutor António Jorge Gomes Bento.
O núcleo de estágio era constituído por mim e pelas colegas de estágio Regina Maria da Silva Tomé e Maria Cristina Fernandes Martins.

Operacionalização

As turmas atribuídas à professora cooperante foram uma turma do 9º ano, uma do 12º ano do curso Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e uma turma do 10º ano do curso profissional de Técnico de Organização de Eventos. Foi com estas turmas que desenvolvemos a Prática de Ensino Supervisionada (PES). A planificação das nove aulas prevista no regulamento específico da PES, foi distribuída da seguinte forma: quatro aulas no 9º ano, quatro aulas no 12º ano e uma aula no 10º ano, permitindo deste modo que adquiríssemos uma maior experiência, pela diversidade de aulas que tivemos de planear, pela análise dos vários programas de cada ano e os diferentes ciclos envolvidos. Podemos também aferir a dinâmica de cada turma devido ao facto de serem turmas de ciclos diferentes e de um curso profissional, o que se tornou útil e enriquecedor numa futura prática letiva.

As turmas

A turma do 12º ano era composta, inicialmente por vinte e dois alunos. Mas devido a transferências ou anulação de matrícula no final do ano letivo, não se manteve constante durante o ano letivo. A turma do 9º ano inicialmente composta por vinte e três alunos. Devido a uma transferência no início do ano letivo manteve-se nos vinte e dois alunos. A turma do 10ºano era inicialmente composta por vinte e um alunos. Ao longo do ano letivo devido a transferências, anulação de matrícula ou outros, manteve-se irregular.

Percurso

No início da PES fomos apresentados à professora cooperante, igualmente coordenadora de departamento. A orientadora cooperante apresentou-nos ao orgão de gestão da escola, ao sub-coordenador de grupo, e aos restantes colegas do grupo de matemática. Fizemos uma visita pela escola de modo a ficar a conhecer as instalações. Ao longo do ano letivo tomámos conhecimento com colegas de outros grupos o que contribuiu para a nossa inserção no ambiente escolar. Assistimos às reuniões de departamento, assim como às de grupo. Assistimos igualmente às reuniões de conselho de turma. Nas reuniões podemos ficar a conhecer os problemas debatidos em cada reunião e como proceder à sua resolução em grupo, bem como as decisões que se revelaram necessárias. Paralelamente fomos desenvolvendo o nosso trabalho enquadrado na PES.

Planificação de aulas

No primeiro período e de acordo com a distribuição efetuada no início do ano letivo, procedi à planificação de três aulas, de noventa minutos, no 12º ano. Estas aulas referiam-se ao tema *Probabilidades e Combinatória* e subtema *Análise combinatória.*
No segundo período procedi à planificação de uma aula do 12ºano, de noventa minutos, subordinada ao tema *Introdução ao cálculo diferencial* e subtema *Limites de funções reais de variável real.* E duas aulas de noventa minutos mais dois blocos de quarenta e cinco minutos, no 9º ano. Estas aulas referiam-se à *unidade 5 Números reais. Inequações.*
No terceiro período planifiquei uma aula no 9ºano sobre o tema *unidade 5 Números reais. Inequações.* E uma aula do 10º ano, referente ao *módulo A3: Programação linear.* Na preparação destas aulas teve-se em conta o programa da disciplina para os anos envolvidos, as competências transversais, assim como os objetivos que pretendia atingir com a aula. A preparação das aulas assistidas teve a supervisão da professora cooperante assim como da orientadora científica, as quais contribuíam com sugestões de índole pedagógica ou científica, sugestões de cariz prático e postura na sala de aula, tornando assim os planos de aulas mais enriquecidos e a sua lecionação mais rica em termos pedagógicos e científicos. Todas as aulas foram assistidas pela professora cooperante, a qual no final da aula fazia uma análise crítica sobre a condução da aula, aspetos a melhorar ao nível de oralidade, ou outros que contribuíssem para um melhor desempenho em próximas aulas a lecionar. A orientadora científica assistiu a quatro das aulas que lecionei duas no 12º ano e duas no 9º ano. No final da aula a orientadora científica fazia igualmente uma análise crítica com os aspetos positivos e negativos sobre a prática letiva.
Ainda quanto à planificação das aulas, procedi à divisão de aulas no 9ºano, que resultaram nas aulas 5, 6, 7-1 e 7-2 aqui apresentadas, após concordância da orientadora científica e professora cooperante. Como factores que levaram ao não cumprimento dos planos de aula realço o facto de os mesmos serem ambiciosos o que os tornou um pouco extensos. Outros fatores a considerar são: as características da turma, os recursos de que o professor dispõe, entre outros. O que não torna possível programar de uma forma *milimétrica* o que se vai fazer. Contudo deve haver um esquema de trabalho que seja um fio condutor para a lecionação da aula, devendo o professor ter em conta situações inesperadas que ocorrem.

Reflexão sobre as aulas

Após a planificação das aulas tive a tarefa de proceder à sua lecionação. Aqui pretendo fazer uma breve síntese dos aspetos, do meu ponto de vista, negativos e positivos. Assim como aspetos negativos saliento o facto de nas aulas do 9º ano a gestão do tempo, para a planificação existente, não ser a mais eficaz. Tal deve-se à dinâmica da turma e ao seu processo de apreender os conteúdos o que nos leva a abrandar o ritmo da aula, tendo como consequência o não cumprimento do plano de aula. Mas penso ser preferível em certos conteúdos a lecionação da aula ser mais demorada, e os alunos compreenderem e assimilarem. Como aspetos positivos das aulas do 9º ano saliento o facto dos planos de aula estarem bem estruturados, pese embora um pouco ambiciosos, com vista a atingir os objetivos propostos para a aula. Este facto levou a que tivesse cumprido em cinquenta porcento o plano de uma aula. Como aspetos positivos saliento que nas aulas do 12º ano os planos de aula tivessem sido cumpridos quase na integra, sem que os alunos tivessem deixado de compreender a matéria em causa, estando a meu ver os planos bem estruturados. Como aspetos negativos os exemplo introdutórios serem complexos, sendo que deviam ser mais simples.

Atividades

No Decorrer da PES o núcleo de estágio participou ou dinamizou diversas atividades, que contribuíram para que a vida na escola não seja só a prática letiva. Assim dinamizou-se a atividade ESCMDesafios, no dia dez de janeiro de dois mil e catorze, que envolveu vários departamentos. Esta atividade tinha como objetivo que os alunos em grupos e perante desafios, partindo da escola, percorressem vários locais da cidade voltando à escola com os desafios realizados. De frisar que esta atividade teve uma forte adesão dos alunos atendendo ao número de alunos inscritos. Procedeu-se igualmente às comemorações do dia do π, que se realizaram no dia catorze de março de dois mil e catorze. A atividade que teve como objetivo dar a conhecer as maravilhas que envolvem este número. No dia dos Departamentos, realizado no dia vinte e quatro de abril de dois mil e catorze, o grupo de matemática e o núcleo de estágio dinamizaram atividades, jogos com fósforos, caricas e quebra-cabeças. Participaram quatro alunos no 10º Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos, que se realizou no Fundão no dia catorze de março de dois mil e catorze, estando o núcleo de estágio representado por um dos seus membros.

Outras tarefas

Durante a realização da PES além das atividades mencionas, desempenhei funções de vigilante na realização de testes, sempre que os alunos tinham faltado à sua realização na data marcada. Procedi igualmente à substituição de colegas de grupo, uma vez no 12º ano outra no 11º ano. Prestei apoio à professora cooperante em tarefas de índole logístico.

Conclusão

Embora já tivesse alguma prática de lecionação no grupo 550-Informática, e com todas as tarefas inerentes, nomeadamente realização de atas, vigilância de exames, correção de exames nacionais de Aplicações Informáticas B do 12º ano, dinamização ou participação em atividades desenvolvidas na escola, entre outras, foi com a realização da PES, agora no grupo 500-Matemática, que adquiri os conhecimentos pedagógicos necessários e também um enriquecimento dos conhecimentos científicos à realização de uma boa prática letiva. Isto é, embora esteja dotado dos conhecimentos científicos, foi através da PES que me valorizei em termos pedagógicos, para que as aulas que venha a lecionar tenham todos os ingredientes necessários a uma boa prática letiva. Para tal contribuíram a professora cooperante e a orientadora científica, através de conselhos, sugestões, do mostrar como se faz. De realçar também a disponibilidade dos docentes e pessoal não docente da escola para ajudar em qualquer situação que tive dificuldades.
A realização da PES, dado que o 9º ano e 12º ano são anos com realização de exames nacionais, ficou mais enriquecida uma vez que observei como proceder na preparação dos alunos para a realização dos exames tão importantes para eles e para o professor.
Penso que me encontro apto após a realização da PES, a desempenar funções docentes e contribuir para o que as escolas se propõem - desenvolver valores e atitudes nos alunos e contribuir para o seu sucesso escolar.

3.2 Planificação aula 4

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Direção Geral dos Estabelecimentos Escolares
Direção de serviços Região Centro

ESCOLA SECUNDÁRIA CAMPOS MELO

Disciplina: Matemática A.

Tema II: Introdução ao Cálculo Diferencial II.

Subtema: Limites de funções reais de variável real.

Pré-requisitos:

- Funções e gráficos do 10º ano.
  - Função, gráfico (gráfico cartesiano de uma função em referencial ortogonal) e representação gráfica.
  - Estudo intuitivo de propriedades das funções e dos seus gráficos.
- Introdução ao cálculo diferencial I do 11º ano.
  - Descrever o comportamento de uma função nos ramos infinitos.
  - Interpretar os resultados do estudo de uma função em diversos contextos.
- Sucessões de números reais.
  - Identificar sucessões de números reais a partir de situações diversas.
  - Utilizar a calculadora no estudo de sucessões para confirmar resultados e efetuar conjeturas.
  - Calcular limites de sucessões e valorizar a sua importância em diversas aplicações.

Data: 23/01/2014.

Duração: Um bloco de 90 minutos.

Ano: 12º ano do curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologia.

Turma: Turma A

Sumário: Limites de funções reais de variável real. Definição de limite segundo Heine

Nota: Quando escrevemos no quadro, desenharmos ou projetarmos é suposto que os alunos passem para o caderno, a menos que algo seja dito em contrário.

Objetivos

Compreender a definição de limite segundo Heine e a sua aplicação no cálculo de limites de funções reais de variável real.

Competências transversais

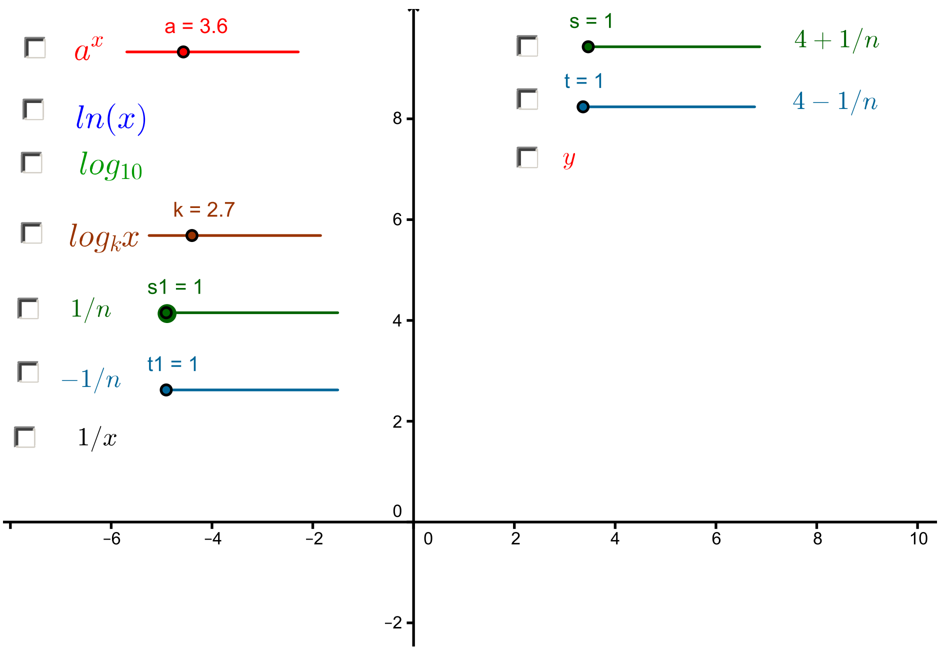
Neste tema são estudados conceitos que já foram utilizados de forma intuitiva de forma mais rigorosa, nomeadamente o conceito de limite, que é muito importante noutras disciplinas como Física, Química, Economia e Geografia. Deve haver uma colaboração entre o professor de Matemática e os das outras disciplinas. A utilização de exemplos concretos dessas disciplinas ou a lecionação de algum aspeto numa dessas disciplinas para posterior aprofundamento na disciplina de Matemática são algumas das possibilidades que se oferecem aos professores.

Materiais e recursos

Para os alunos: Calculadora e manual do aluno.
Para o professor: projetor e ter no seu computador instalado o emulador da calculadora.

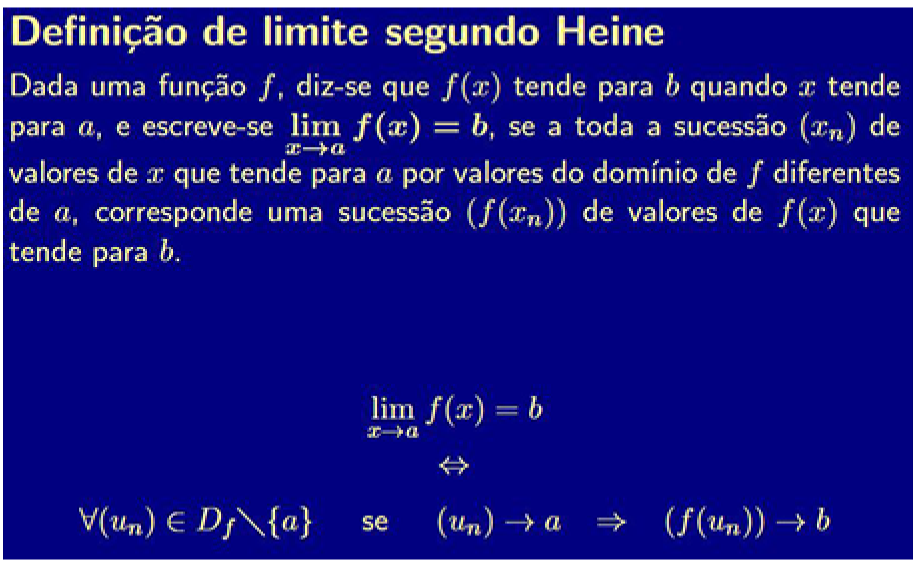
Indicações metodológicas para a aula

Após escrito o sumário no quadro falamos com os alunos sobre o conteúdo da aula, em que vamos proceder à introdução do conceito de limite segundo Heine, completando deste modo a noção intuitiva de limite.
Até ao momento, sempre que se falou em limites no estudo de funções, quer no estudo da função exponencial, da função logaritmo, ou mesmo, no 11º ano, no estudo de assíntotas ou derivadas, a abordagem foi sempre feita de forma intuitiva. Pretende-se dar significado matemático à frase "$f(x)$ tende para b quando x tende para a", que em escrita simbólica se escreve:
$\lim_{x \to a} f(x) = b$
Mas antes vamos proceder à visualização de um applet com a função exponencial, função logarítmica e sucessões, observando intuitivamente os seus limites, assim como a realização de uma tarefa.
Procedemos à projeção do applet (que os alunos não irão passar para o caderno) como na figura seguinte:



Usamos os vários seletores das várias funções e vamos intuitivamente ver qual o limite de cada uma. Damos também ênfase às sucessões e aos seus limites.
De seguida dizemos que vamos proceder à realização da tarefa, que tem por objetivo usar o conceito intuitivo de limite, recorrendo ao estudo de sucessões usando a calculadora para determinar os valores dos termos das sucessões e fazer conjeturas sobre os resultados obtidos. Procede-se à distribuição da tarefa 1, e que vamos proceder à realização da mesma até ao ponto cinco (inclusive). Sendo aqui introduzida a definição de limite segundo Heine. Durante a realização da tarefa acompanhamos os alunos na realização da mesma.

Em diálogo com os alunos dizemos que vamos proceder agora à formalização da noção de limite segundo Heine. O que nos vai permitir calcular limites de funções reais de variável real, recorrendo ao limite de sucessões.



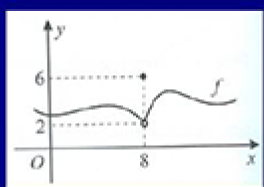
Vamos agora proceder a algumas considerações sobre a definição de limite segundo Heine.

Algumas considerações sobre a definição de limite segundo Heine

1. Por exemplo se o domínio de uma função f é $[1,3[\cup\{5\}$ só faz sentido escrever $\lim_{x\to a} f(x)$ se $a \in [1,3]$, porque tem de existir pelo menos uma sucessão que tenha todos os seus termos no domínio de f e que tenda para a, por valores diferentes de a. Diz-se que a é um **ponto de acumulação** do domínio de f.

Apesar de 5 pertencer ao domínio de f, não faz sentido escrever $\lim_{x\to 5} f(x)$, porque não é possível encontrar uma sucessão que tenha todos os seus termos em D_f e que tenda para 5, por valores diferentes de 5.
Diz-se que 5 é um **ponto isolado** do domínio de f

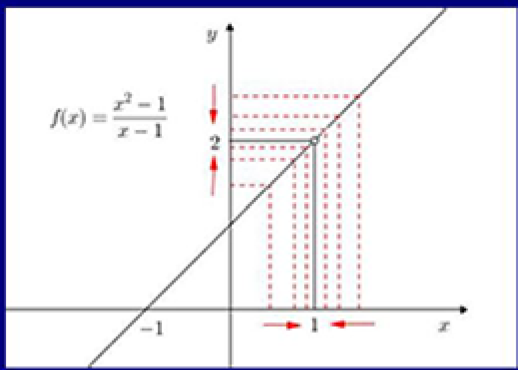
2. O limite de uma função, num ponto a, tem a ver com o comportamento da função numa vizinhança de a, e não com o valor da função no ponto a, pelo que pode acontecer $\lim_{x\to a} f(x)$ ser diferente de $f(a)$.



3. Pode acontecer que uma função f não esteja definida num ponto a, mas exista $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

Por exemplo, seja a função f de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ definida por $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

Para $x \neq 1$, tem-se $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$ portanto o gráfico de f é a reta de equação $y = x + 1$, sem o ponto de abcissa 1 (uma vez que o domínio de f é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$)



quadro: exemplo 1

Prove segundo a definição de Heine, que $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \dfrac{7}{13}$ sendo $f(x) = \dfrac{3x - 8}{x^2 - 12}$.
Consideremos qualquer sucessão (u_n) tal que $u_n \to 5$
$\lim f(u_n) = \lim \dfrac{3u_n - 8}{{u_n}^2} = \dfrac{3 \times 5 - 8}{5^2 - 12} = \dfrac{15 - 8}{25 - 12} = \dfrac{7}{13}$
Podemos então concluir, segundo a definição de Heine que $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \dfrac{7}{13}$

quadro: exemplo 2

Prove recorrendo à definição de Heine, que não existe $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ sendo $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{se} \quad x < 3 \\ x^2 - 2 & \text{se} \quad x \geqslant 3 \end{cases}$
Consideremos duas sucessões (u_n) e (v_n) tal que $u_n \to 3$ e $v_n \to 3$ e estudemos o limite das suas imagens $(f(u_n)($ e $(f(v_n))$
seja $u_n = 3 + \dfrac{1}{n}, u_n \to 3^+$ e $\lim f(u_n) = \lim({u_n}^2) - 2 = 3^2 - 2 = 9 - 2 = 7$
seja $v_n = 3 - \dfrac{1}{n}, v_n \to 3^-$ e $\lim f(v_n) = \lim(2v_n + 5) = 2 \times 3 + 5 = 6 + 5 = 11$
Uma vez que $\lim f(u_n) \neq \lim f(v_n)$ podemos concluir, pela definição de Heine que não existe $\lim f(x)$ conseguimos duas sucessões que tendem para o mesmo valor mas cujas imagens são valores diferentes.

quadro: exemplo 3

Dada a sucessão $u_n = 5 + \dfrac{1}{n}$ e $lim f(u_n) = 3$ então $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 3$. Diga se é verdadeira ou falsa a afirmação e porquê.
É falsa porque (u_n) não é uma sucessão qualquer. E segundo a definição de Heine, dada uma função f, diz-se que $f(x)$ tende para b quando x tende para a, se a **toda a sucessão** (x_n) de valores de x que tende para a por valores do domínio de f diferentes de a, corresponde uma

sucessão $(f(x_n))$ de valores de $f(x)$ que tende para b

retomar resolução da tarefa 1

Em diálogo com os alunos dizemos que vamos proceder à realização do restante da tarefa. Após a realização da tarefa vamos proceder à realização dos exercícios 171 e 172 da página 78 do manual.

Exercício 171 Se (x_n) e (u_n) são duas sucessões que tendem para 2 por valores do domínio de f diferentes de 2, e se $(f(x_n)) \to 1$ e $(f(u_n)) \to 3$, que podes afirmar acerca de $\lim_{x\to 2} f(x)$?

Resolução:

Não existe, porque pela definição de Heine se a toda a sucessão (x_n) de valores de x que tende para a por valores do domínio de f diferentes de a, corresponde uma sucessão $(f(x_n))$ de valores de $f(x)$ que tende para b. Logo $(f(x_n))$ e $(f(u_n))$ teriam de tender para o mesmo valor.

Exercício 172 Se (x_n) e (u_n) são duas sucessões que tendem para 1 por valores do domínio de f diferentes de 1, e se $(f(x_n)) \to 3$ e $f((u_n)) \to 3$, que podes afirmar acerca de $\lim_{x\to 1} f(x)$?

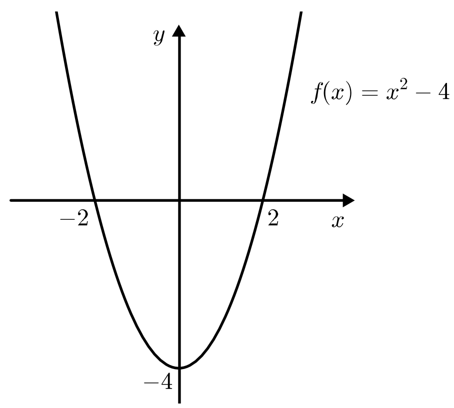
Resolução:

Se existir, é igual a 3. Mas pode não existir. Porque pela definição de Heine se a toda a sucessão (x_n) de valores de x que tende para a por valores do domínio de f diferentes de a, corresponde uma sucessão $(f(x_n))$ de valores de $f(x)$ que tende para b. Embora $(f(x_n))$ e $f((u_n))$ tendam para o mesmo valor, mas a definição de Heine diz que é para toda a sucessão e aqui temos só duas sucessões.

De seguida em diálogo com os alunos dizemos que vamos ver um exemplo em que o valor de $\lim_{x\to a} f(x)$ pode ser obtido substituindo x por a na expressão de $f(x)$.

quadro: exemplo 4

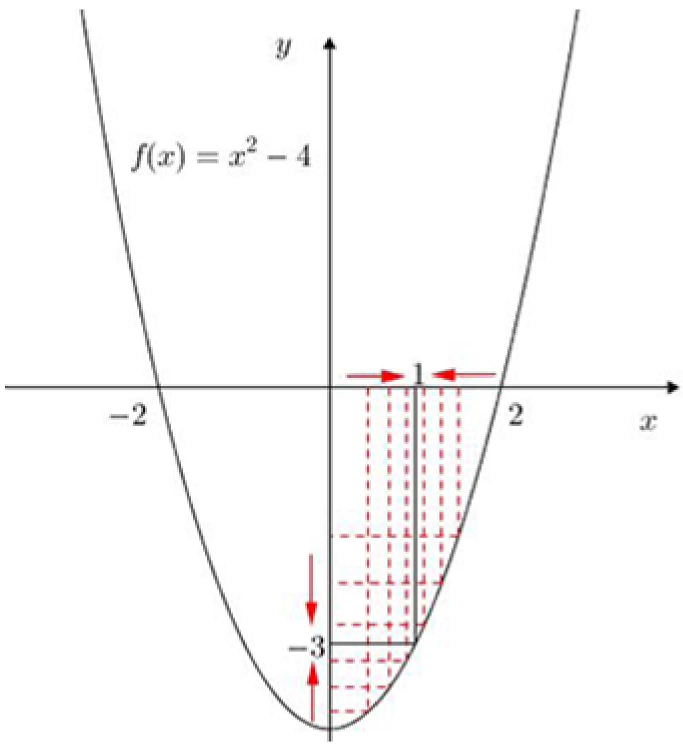
Desenhamos no quadro a seguinte figura:



Calcule $\lim_{x \to 1} f(x)$

$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x^2 - 4) = 1^2 - 4 = -3$

A seguir completamos a figura explicando aos alunos o significado de quando $x \to 1$ os valores das imagens $f(x) \to -3$. Explicamos igualmente o significado de $x \to 1$ por valores inferiores e superiores a 1.



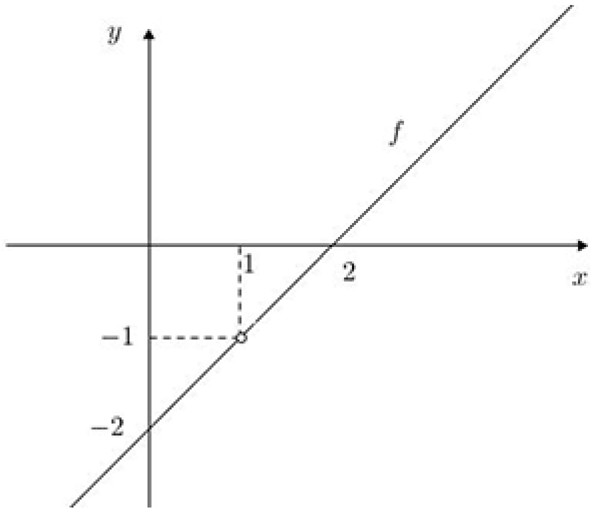
Procedamos agora à resolução do exercício 174 da página 79 do manual.

Exercício 174. Represente graficamente as funções f e g com as expressões analíticas seguintes e identifique o valor do limite no ponto indicado (repare que são pontos que não pertencem ao domínio das funções):

a) $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}, x = 1$

Resolução:

Desenhamos no quadro a seguinte figura.

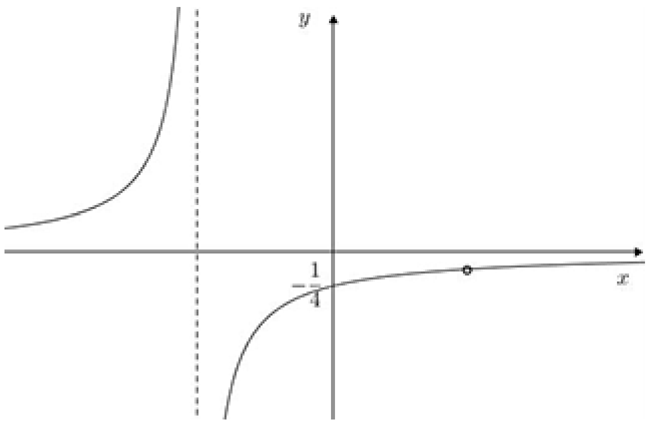


Como o valor de $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ não pode ser obtido pelo cálculo de $f(1)$ pois 1 não pertence ao domínio da função f. No entanto, a observação da representação gráfica da função sugere que esse limite existe, sendo igual a -1, isto é, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -1$.

b) $\dfrac{x-2}{4-x^2}, x = 2$

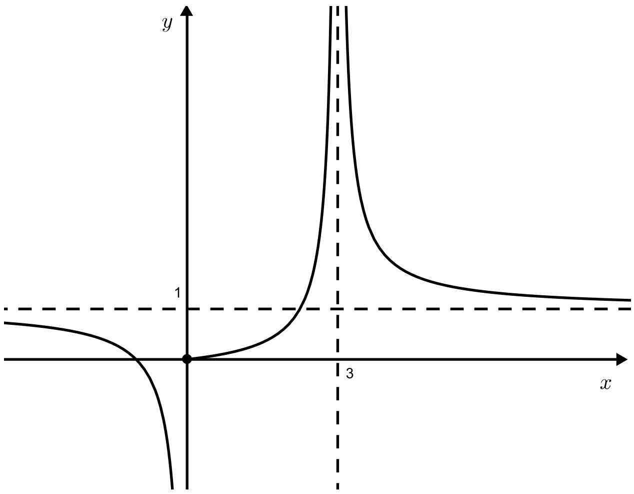
Resolução:

Desenhamos no quadro a seguinte figura.



Como o valor de $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ não pode ser obtido pelo cálculo de $f(2)$ pois 2 não pertence ao domínio da função f. No entanto, a observação da representação gráfica da função sugere que esse limite existe, sendo igual a $-\dfrac{1}{4}$, isto é, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\dfrac{1}{4}$.

Exercício Dado o seguinte gráfico



E a sucessão $u_n = -n^2 + 2$
Calcule $\lim f(u_n)$?

Resolução:

Para resolver este exercício precisamos de saber para onde tende (u_n)
Intuitivamente e pela expressão de (u_n) levamos os alunos a concluir que $u_n \to -\infty$
Agora por visualização do gráfico e intuitivamente levar os alunos a concluir que $\lim_{u_n \to -\infty} f(u_n) = 1$
Devemos realçar que não devemos visualizar o gráfico e ver que f tende para $-\infty$, mas sim (u_n) é que tende para $-\infty$.

Avaliação/Refelexão
A avaliação é efetuada por observação direta, procedendo-se ao preenchimento de uma grelha de observação de aula que contempla o comportamento, atitudes e valores, a sua participação na aula nomeadamente efetuar os exercícios propostos assim como o voluntariar-se para a sua resolução no quadro, quando para tal sejam solicitados.

TPC
Ficam como TPC os exercícios que não sejam resolvidos na aula.

Apoio Bibliográfico

[1] Programa de Matemática do Ensino Secundário 12º ano - Curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologia;

[2] Viegas C., Gomes F. & Lima Y. (2012). Xeqmat12 - volume 1 - Matemática A 12º Ano. Texto Editores, Lda.

[3] Jorge A., Alves C., Fonseca G. & Barbedo J. (2005). Infinito - Parte 1 - Matemática A 12º Ano. Areal Editores.

3.3 Planificação aula 5

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Direção Geral dos Estabelecimentos Escolares
Direção de serviços Região Centro

ESCOLA SECUNDÁRIA CAMPOS MELO

Disciplina: Matemática.

Unidade 5: Números reais. Inequações.

Subtema: Números reais.

Pré-requisitos:

- Conhecer os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais.
- Escrever números racionais como frações de números inteiros.
- Saber que qualquer fração de números inteiros representa um número inteiro ou uma dízima finita ou uma dízima infinita periódica.
- Identificar dízimas finitas e dízimas infinitas periódicas.

Data: 24/03/2014.

Duração: Um bloco de 90 minutos.

Ano: 9º ano.

Turma: Turma B

Sumário: Introdução ao estudo dos números reais.

Nota: Quando escrevemos no quadro, desenhamos ou projetamos é suposto que os alunos passem para o caderno, a menos que algo seja dito em contrário.

Objetivos:

- Representar números racionais por dízimas finitas ou dízimas infinitas periódicas.
- Indicar o período de uma dízima infinita periódica.
- Identificar se um número é natural, inteiro ou racional.

Competências transversais

O estudo dos números e operações, que surge em todos os ciclos, tem por base três ideias fundamentais: promover a compreensão dos números e operações, desenvolver o sentido de número e desenvolver a fluência no cálculo. As representações fracionária e decimal dos números racionais surgem em paralelo. Em cada situação o aluno deve ser capaz de usar a representação mais adequada, mas deve igualmente ser capaz de passar com facilidade de uma representação para outra. A representação dos números na reta numérica adquire também uma importância significativa. O desenvolvimento do cálculo mental, da capacidade de estimação e do uso de valores aproximados são objetivos igualmente valorizados.

Materiais e recursos

Para os alunos: Calculadora e manual do aluno.
Para o professor: projetor e ter no seu computador instalado o emulador da calculadora.

Indicações metodológicas para a aula

Após escrito o sumário no quadro falamos com os alunos sobre o conteúdo da aula, em que vamos proceder à introdução da unidade 5 (Números reais. Inequações), mas que primeiro vamos proceder à realização de uma ficha diagnóstico afim de aferirmos os pré-requisitos necessários à compreensão dos conceitos introduzidos na unidade.
Procedemos à distribuição da ficha de diagnóstico, a qual os alunos vão resolvendo podendo trabalhar a pares ou individualmente. Proceder-se-à à sua correção no quadro, sendo a correção efetuada pelo professor ou por alunos que se voluntariem para o efeito.

Em diálogo com os alunos, dizemos que o estudo dos números e das operações tem sido feito de forma progressiva de modo a consolidar e ampliar conhecimentos. Para o efeito questionamos os alunos sobre o conjunto de números que conhecem. Afim de consolidar o diálogo escrevemos no quadro.

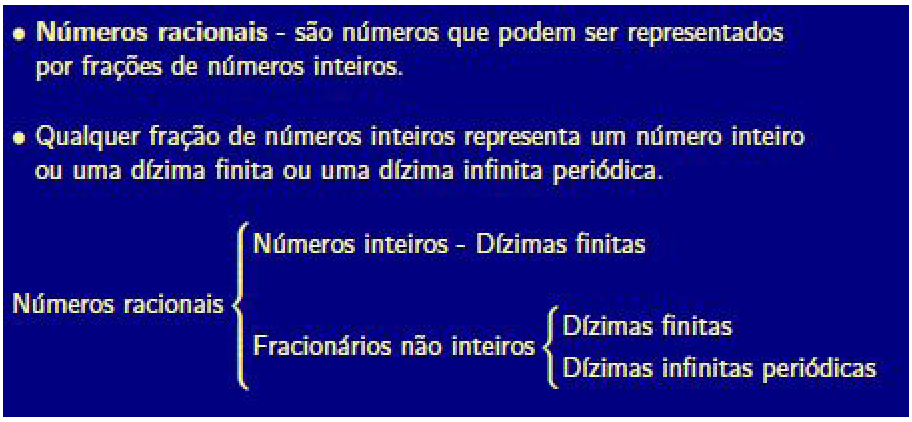
quadro:
$\mathbb{N}$ - conjunto dos números naturais

$\mathbb{Z}$ - conjunto dos números inteiros

$\mathbb{Q}$ - conjunto dos números racionais

Será pedido aos alunos exemplos de números de cada um dos conjuntos.

Vamos de seguida recordar conceitos sobre os números racionais.



Exercício 1 Representa na forma de fração irredutível.

1.1. 0,5
1.2. 0,22
1.3. 1,5
1.4. 3,25
1.5. 1,28

Resolução:

Na resolução do exercício chamamos a atenção dos alunos que não alteramos a expressão porque como estamos a dividir e multiplicar pelo mesmo valor é como se estivéssemos a multiplicar por 1 (elemento neutro da multiplicação). Chamamos igualmente a atenção para o conceito de fração irredutível, assim como para o cálculo do máximo divisor comum (m.d.c.).

1.1. Dado que a expressão decimal do número tem uma casa decimal vamos multiplicar por 10 de forma a obter um número inteiro, e dividimos por 10.
$0,5 = \frac{0,5 \times 10}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ dividindo ambos os membros da fração por 5 (m.d.c.)

1.2. Dado que a expressão decimal do número tem duas casas decimais vamos multiplicar por 100 de forma a obter um número inteiro, e dividimos por 100.
$0,22 = \frac{0,22 \times 100}{100} = \frac{22}{100} = \frac{11}{50}$ dividindo ambos os membros da fração por 2 (m.d.c.)

1.3. Dado que a expressão decimal do número tem uma casa decimal vamos multiplicar por 10 de forma a obter um número inteiro, e dividimos por 10.
$1,5 = \frac{1,5 \times 10}{10} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$ dividindo ambos os membros da fração por 5 (m.d.c.)

1.4. Dado que a expressão decimal do número tem duas casas decimais vamos multiplicar por 100 de forma a obter um número inteiro, e dividimos por 100.
$3,25 = \frac{3,25 \times 100}{100} = \frac{325}{100} = \frac{13}{4}$ dividindo ambos os membros da fração por 25 (m.d.c.)

1.5. Dado que a expressão decimal do número tem duas casas decimais vamos multiplicar por 100 de forma a obter um número inteiro, e dividimos por 100.
$1,28 = \frac{1,28 \times 100}{100} = \frac{128}{100} = \frac{32}{25}$ dividindo ambos os membros da fração por 4 (m.d.c.)

Exercício 2 Representa na forma de dízima e, no caso de ela ser infinita, indica o anteperíodo e o período.

2.1. $\frac{134}{5}$

2.2. $\frac{25}{12}$

2.3. $\frac{18}{25}$

2.4. $\frac{87}{11}$

Resolução:
Na resolução do exercício em que os alunos fazem uso da calculadora chamamos a atenção para as limitações das calculadoras em que no caso das dízimas infinitas apenas é visível um número finito de casas decimais.

2.1. $\frac{134}{5} = 26,8$. Dízima finita.

2.2. $\frac{25}{12} = 2,08(3)$. Dízima infinita periódica de anteperíodo 08 e período 3.

2.3. $\frac{18}{25} = 0,72$. Dízima finita.

2.4. $\frac{87}{11} = 7,(90)$. Dízima infinita periódica de período 90.

Exercício 3 Considera o número racional representado por $\frac{151}{37}$.

Sabe-se que $\frac{151}{37} = 4,(081)$.

Indica o algarismo correspondente à:
3.1. 12.ª casa decimal;
3.2. 20ª casa decimal;
3.4. 97ª casa decimal;

Resolução:

3.1. Atendendo a que o período é composto por três algarismos e o quociente 12:3 tem resto 0, então a 12ª casa decimal corresponde ao terceiro algarismo do período que é 1.

3.2. Atendendo a que o período é composto por três algarismos e o quociente 20:3 tem resto 2, então a 20ª casa decimal corresponde ao segundo algarismo do período que é 8.

3.4. Atendendo a que o período é composto por três algarismos e o quociente 97:3 tem resto 1, então a 97ª casa decimal corresponde ao primeiro algarismo do período que é 0.

Avaliação/Refelexão
A avaliação é efetuada por observação direta, procedendo-se ao preenchimento de uma grelha

de observação de aula que contempla o comportamento, atitudes e valores, a sua participação na aula nomeadamente efetuar os exercícios propostos assim como o voluntariar-se para a sua resolução no quadro, quando para tal sejam solicitados.

TPC

Ficam como TPC os exercícios que não sejam resolvidos na aula.

Apoio Bibliográfico

[1] Programa de Matemática do Ensino Básico;

[2] Costa B., Rodrigues E. (2012). Novo Espaço - parte 2 - Matemática 9º Ano. Porto Editora.

[3] Ferreira P., Marques M. (2012). Projeto Desafios Matemática 9º Ano. Santillana, Constância.

3.4 Planificação aula 6

Direção Geral dos Estabelecimentos Escolares
Direção de serviços Região Centro

ESCOLA SECUNDÁRIA CAMPOS MELO

Disciplina: Matemática.

Unidade 5: Números reais. Inequações.

Subtema: Números reais.

Pré-requisitos:

- Conhecer os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais.
- Escrever números racionais como frações de números inteiros.
- Saber que qualquer fração de números inteiros representa um número inteiro ou uma dízima finita ou uma dízima infinita periódica.
- Identificar dízimas finitas e dízimas infinitas periódicas.
- Representar números racionais na reta numérica.
- Comparar e ordenar números racionais.

Data: 26/03/2014.

Duração: Um bloco de 90 minutos.

Ano: 9º ano.

Turma: Turma B

Sumário: Noção de número real e reta real.

Nota: Quando escrevemos no quadro, desenhamos ou projetamos é suposto que os alunos passem para o caderno, a menos que algo seja dito em contrário.

Objetivos:

- Representar números reais na reta real.
- Identificar um número real (racional e irracional) como um número cuja representação decimal é uma dízima finita ou infinita.

Competências transversais

O estudo dos números e operações, que surge em todos os ciclos, tem por base três ideias fundamentais: promover a compreensão dos números e operações, desenvolver o sentido de número e desenvolver a fluência no cálculo. As representações fracionária e decimal dos números racionais surgem em paralelo. Em cada situação o aluno deve ser capaz de usar a representação mais adequada, mas deve igualmente ser capaz de passar com facilidade de uma representação para outra. A representação dos números na reta numérica adquire também uma importância significativa. O desenvolvimento do cálculo mental, da capacidade de estimação e do uso de valores aproximados são objetivos igualmente valorizados.

Materiais e recursos

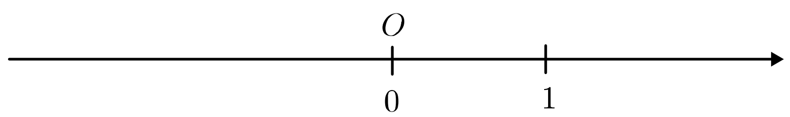
Para os alunos: Calculadora, manual do aluno, material de desenho e medida.
Para o professor: projetor e ter no seu computador instalado o emulador da calculadora.

Indicações metodológicas para a aula

Após ter escrito o sumário no quadro, procede-se à correção do trabalho de casa. Seguidamente em diálogo com os alunos, relembramos o estudo que efetuaram sobre os números racionais onde foi visto que qualquer número racional ou é inteiro ou pode ser representado por uma dízima finita ou infinita periódica. Foi igualmente visto que há uma correspondência entre os números racionais e os pontos da reta numérica.

Na reta numérica deve considerar-se a origem, a unidade e o sentido positivo.

quadro:



quadro:
Exemplo

Com a colaboração dos alunos, vamos marcar na reta numérica os pontos correspondentes aos seguintes números racionais: -2; $\frac{5}{3}$ e $-\frac{1}{2}$.

Relativamente ao número racional -2 marcamos duas unidades de medida para a esquerda da origem, e obtemos o ponto A que tem abcissa -2

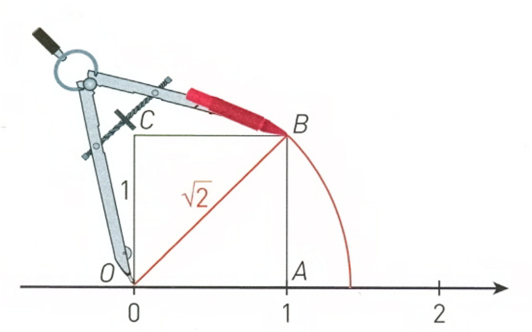
Número racional $-\frac{1}{2} = -0,5$ com a ajuda do compasso marcamos a mediatriz dos pontos 0 e -1, e obtemos o ponto C que tem abcissa $-0,5$

Número racional $\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$, a partir do ponto 1 marcamos uma reta que faça um ângulo agudo com a reta numérica, depois com o compasso marcamos uma distância qualquer e repetimos por 3 vezes no lado do ângulo agudo. Une-se o último ponto obtido com o ponto 2, e depois marcamos paralelas à reta traçada anteriormente que passem pelos pontos marcados com o compasso, e obtemos o ponto B que tem abcissa $\frac{5}{3}$.

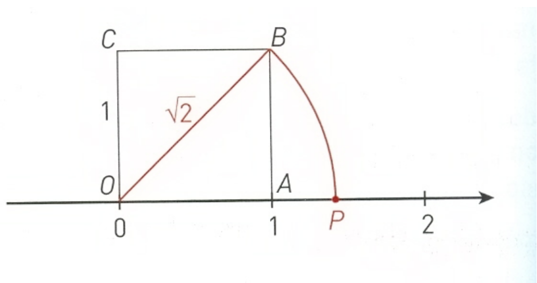
quadro:

Será que a qualquer ponto da reta corresponde um número racional?

Os alunos devem observar a seguinte figura no manual.



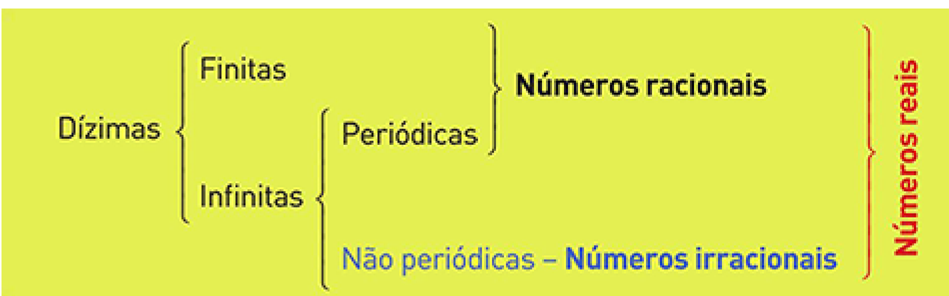
Sabe-se que $OABC$ é um quadrado de lado 1. Recorrendo ao teorema de Pitágoras conclui-se que $\overline{OB} = \sqrt{2}$.



Como $\overline{OP} = \overline{OB}$, tem-se que a abcissa do ponto P é $\sqrt{2}$. Mas $\sqrt{2}$ não é um número racional. $\sqrt{2}$ é uma dízima infinita não periódica.

Números irracionais: São números representados por uma dízima infinita periódica.

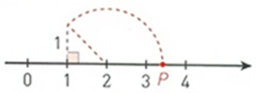
Exemplo: $\sqrt{2} = 1.41421...$. Em diálogo com os alunos pedimos mais exemplos de números irracionais.

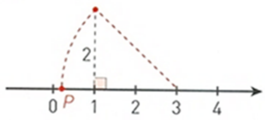


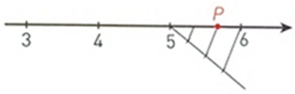
Os números irracionais tornam possível que a cada ponto da reta se associe um número real.

Agora a reta numérica passa a chamar-se **reta real**, a cada ponto da reta real corresponde um e um só número real e a cada número real corresponde um e um só ponto da reta.

Exercício 8 Que número é representado pelo ponto P, em cada caso?







Resolução:

8.1.
A abcissa do ponto P é $2+p$, em que p é a medida do comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos têm comprimento 1. Assim, $p=\sqrt{1^1+1^1}$, logo $p=\sqrt{2}$ e o número correspondente ao ponto P é $2+\sqrt{2}$.

8.2.
A abcissa do ponto P é $3-p$, em que p é a medida do comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos tem comprimento 2. Assim, $p=\sqrt{2^2+2^2}$, logo $p=\sqrt{8}$ e o número correspondente ao ponto P é $3-\sqrt{8}$.

8.3.
A abcissa do ponto P é $5+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}+\frac{15}{3}=\frac{17}{3}=5,(6)$.

TPC
Ficam como TPC os exercícios que não sejam resolvidos na aula.

Apoio Bibliográfico

[1] Programa de Matemática do Ensino Básico;

[2] Costa B., Rodrigues E. (2012). Novo Espaço - parte 2 - Matemática 9º Ano. Porto Editora.

[3] Ferreira P., Marques M. (2012). Projeto Desafios Matemática 9º Ano. Santillana, Constância.

3.5 Planificação aula 7-1

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Direção Geral dos Estabelecimentos Escolares
Direção de serviços Região Centro

ESCOLA SECUNDÁRIA CAMPOS MELO

Disciplina: Matemática.

Unidade 5: Números reais. Inequações.

Subtema: Números reais.

Pré-requisitos:

- Conhecer os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais.
- Escrever números racionais como frações de números inteiros.
- Saber que qualquer fração representa um número inteiro ou uma dízima finita ou uma dízima infinita periódica.
- Identificar dízimas finitas e dízimas infinitas periódicas.

Data: 27/03/2014.

Duração: Um temo de 45 minutos.

Ano: 9º ano.

Turma: Turma B

Sumário: Resolução da tarefa 1, página 50 do manual.

Nota: Quando escrevemos no quadro, desenhamos ou projetamos é suposto que os alunos passem para o caderno, a menos que algo seja dito em contrário.

Objetivos:

- Representar números racionais por dízimas finitas ou dízimas infinitas periódicas.
- Indicar o período de uma dízima infinita periódica.
- Identificar se um número é natural, inteiro ou racional.

Competências transversais

O estudo dos números e operações, que surge em todos os ciclos, tem por base três ideias fundamentais: promover a compreensão dos números e operações, desenvolver o sentido de número e desenvolver a fluência no cálculo. As representações fracionária e decimal dos números racionais surgem em paralelo. Em cada situação o aluno deve ser capaz de usar a representação mais adequada, mas deve igualmente ser capaz de passar com facilidade de uma representação para outra. A representação dos números na reta numérica adquire também uma importância significativa. O desenvolvimento do cálculo mental, da capacidade de estimação e do uso de valores aproximados são objetivos igualmente valorizados.

Materiais e recursos

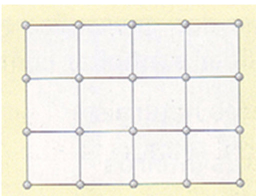
Para os alunos: Calculadora e manual do aluno.
Para o professor: projetor e ter no seu computador instalado o emulador da calculadora.

Indicações metodológicas para a aula

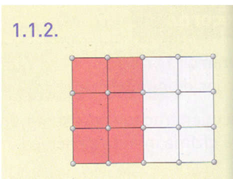
Após escrito o sumário no quadro falamos com os alunos sobre o conteúdo da aula, em que vamos proceder à resolução da tarefa 1. A qual será feita em pares ou em pequenos grupos.

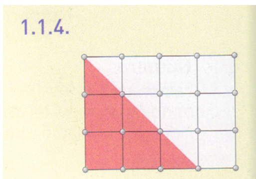
Tarefa 1 (Livro adotado pág.50 [2].)

1. O Pedro partiu de uma base quadriculada como a da figura, e coloriu uma região dessa base.



1.1. Representa, em cada caso, por uma fração na forma irredutível, a parte da base quadriculada que foi colorida.





Resolução:

1.1.2.(abordagem por colunas) A parte da base quadriculada que foi colorida é $\frac{2}{4}$, em 4 colunas 2 foram coloridas, que representada na forma irredutível é $\frac{1}{2}$.

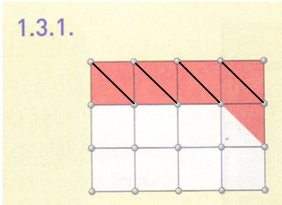
1.1.2.(abordagem por quadriculas) A parte da base quadriculada que foi colorida é $\frac{6}{12}$, que representada na forma irredutível é $\frac{1}{2}$.

1.1.4. A parte da base quadriculada que foi colorida é um triângulo retângulo cuja base tem dimensão 3 e a altura tem dimensão 3. Logo a área colorida é $\frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2}$.

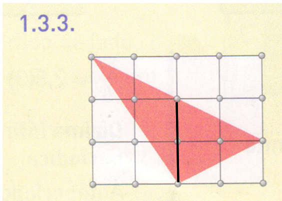
Representa $\frac{\frac{9}{2}}{12} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$ da base quadriculada.

1.3. Representa a parte da base quadriculada que foi colorida por uma dízima e classifica-a.

Resolução:



1.3.1. A parte da base quadriculada que foi colorida é $\frac{9}{24} = 0,375$, dízima finita.



1.3.3. A parte da base colorida é constituída por dois triângulos, como se pode verificar na figura. E representa.

$$\frac{\frac{2\times2}{2} + \frac{2\times2}{2}}{12} = \frac{\frac{4}{2} + \frac{4}{2}}{12} = \frac{\frac{8}{2}}{12} = \frac{8}{24} = 0,(3)$$

da base quadriculada. Dízima infinita periódica de período 3.

Avaliação/Refelexão

A avaliação é efetuada por observação direta, procedendo-se ao preenchimento de uma grelha de observação de aula que contempla o comportamento, atitudes e valores, a sua participação na aula nomeadamente efetuar os exercícios propostos assim como o voluntariar-se para a sua resolução no quadro, quando para tal sejam solicitados.

TPC

Ficam como TPC os exercícios que não sejam resolvidos na aula.

Apoio Bibliográfico

[1] Programa de Matemática do Ensino Básico;

[2] Costa B., Rodrigues E. (2012). Novo Espaço - parte 2 - Matemática 9º Ano. Porto Editora.

[3] Ferreira P., Marques M. (2012). Projeto Desafios Matemática 9º Ano. Santillana, Constância.

3.6 Planificação aula 7-2

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Direção Geral dos Estabelecimentos Escolares
Direção de serviços Região Centro

ESCOLA SECUNDÁRIA CAMPOS MELO

Disciplina: Matemática.

Unidade 5: Números reais. Inequações.

Subtema: Números reais.

Pré-requisitos:

- Conhecer os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais.
- Escrever números racionais como frações de números inteiros.
- Saber que qualquer fração de números inteiros representa um número inteiro ou uma dízima finita ou uma dízima infinita periódica.
- Identificar dízimas finitas e dízimas infinitas periódicas.
- Representar números racionais na reta numérica.
- Comparar e ordenar números racionais.

Data: 27/03/2014.

Duração: Um tempo de 45 minutos.

Ano: 9º ano.

Turma: Turma B

Sumário: Relações $<$ (menor que) e $>$ (maior que) em $\mathbb{R}$.

Nota: Quando escrevemos no quadro, desenhamos ou projetamos é suposto que os alunos passem para o caderno, a menos que algo seja dito em contrário.

Objetivos:

- Representar números reais na reta real.
- Identificar um número real (racional e irracional) como um número cuja representação decimal é uma dízima finita ou infinita.

- Comparar e ordenar números reais.

Competências transversais

O estudo dos números e operações, que surge em todos os ciclos, tem por base três ideias fundamentais: promover a compreensão dos números e operações, desenvolver o sentido de número e desenvolver a fluência no cálculo. As representações fracionária e decimal dos números racionais surgem em paralelo. Em cada situação o aluno deve ser capaz de usar a representação mais adequada, mas deve igualmente ser capaz de passar com facilidade de uma representação para outra. A representação dos números na reta numérica adquire também uma importância significativa. O desenvolvimento do cálculo mental, da capacidade de estimação e do uso de valores aproximados são objetivos igualmente valorizados.

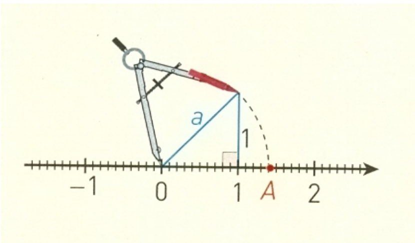
Materiais e recursos

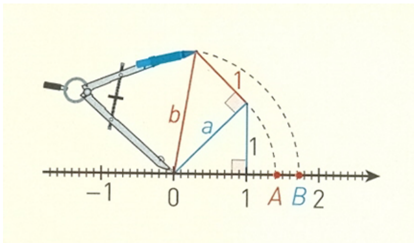
Para os alunos: Calculadora, manual do aluno, material de desenho e medida.
Para o professor: projetor e ter no seu computador instalado o emulador da calculadora.

Indicações metodológicas para a aula

Após ter escrito o sumário no quadro, procede-se à correção do trabalho de casa. Seguidamente em diálogo com os alunos, relembramos que há uma correspondência entre os números racionais e os pontos da reta numérica. Vamos agora proceder à introdução de relações entre números reais, mas antes vamos resolver a tarefa 2 do manual.

Tarefa 2 (Livro adotado pág.53 [2].)
1. Considera as figuras.





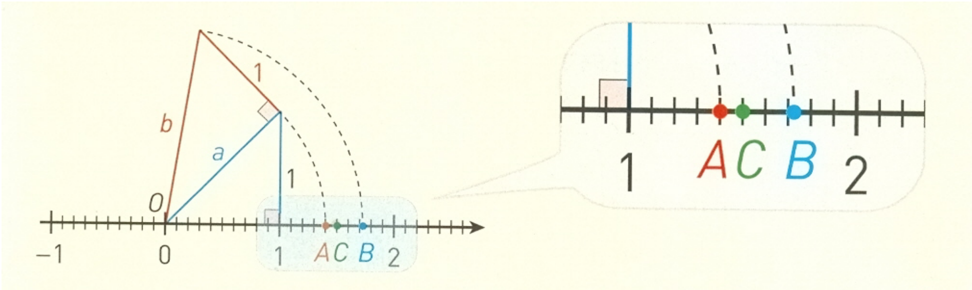
1.1. A partir da construção e da informação dada nas figuras, determina os valores correspondentes de a e de b.

Resolução:

O valor correspondente a a é o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos têm comprimento 1. Assim, $a = \sqrt{1^2 + 1^2}$, logo $a = \sqrt{2}$.

O valor correspondente a b é o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos têm comprimento 1 e $\sqrt{2}$. Assim, $b = \sqrt{1^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{1+2}$, logo $b = \sqrt{3}$.

1.2. Indica os números reais correspondentes aos pontos A, B e C assinalados na reta real, sabendo que C pode ser representado por uma dízima com uma casa decimal.



Resolução:

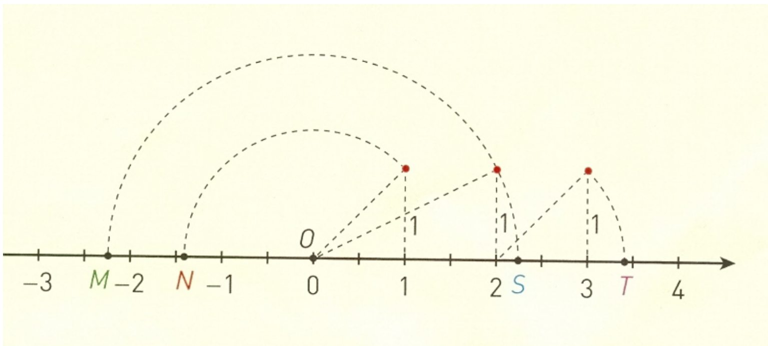
Os números reais correspondentes aos pontos A, B e C são respectivamente, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $1,5$ a sua abcissa é $1,5 = \dfrac{15}{10} = \dfrac{3}{2}$.

1.3. Ordena por ordem crescente, os números reais.
$\frac{3}{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{2}$

Resolução:

Tendo em conta a representação dos números reais $\frac{3}{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{2}$ na reta real, pode-se concluir que $\sqrt{2} < \frac{3}{2} < \sqrt{3}$.

2. Observa a figura e indica os números reais correspondentes aos pontos assinalados.



Resolução:

ponto S. A abcissa do ponto S é a medida do comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos têm comprimento 1 e 2.
Assim, $h = \sqrt{1^2 + 2^2}$, logo $h = \sqrt{5}$ e o número real correspondente ao ponto S é $\sqrt{5}$.

ponto T. A abcissa do ponto T é $2 + t$ em que t é a medida do comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos têm comprimento 1.
Assim, $h = \sqrt{1^2 + 1^2}$, logo $h = \sqrt{2}$ e o número real correspondente ao ponto T é $2 + \sqrt{2}$.

ponto N. A abcissa do ponto N é o número simétrico da medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos têm comprimento 1.
Assim, $h = \sqrt{1^2 + 1^2}$, logo $h = \sqrt{2}$ e o número real correspondente ao ponto N é $-\sqrt{2}$.

ponto M. A abcissa do ponto M é o número simétrico da medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos têm comprimento 1 e 2.
Assim, $h = \sqrt{1^2 + 2^2}$, logo $h = \sqrt{5}$ e o número real correspondente ao ponto M é $-\sqrt{5}$.

Exercício 10. Transforma em afirmações verdadeiras, completando os espaços com um dos sinais $<$ ou $>$.

10.1. $-\frac{7}{2} ... -4$

10.2. $5,2 ... \frac{21}{4}$

10.3. $\frac{7}{3} ... \sqrt{5}$

10.4. $\sqrt{3} ... 1,(7)$

10.5. $-2,25 ... \sqrt{8}$

Resolução:

10.1. $-\frac{7}{2} > -4$, pois $\frac{7}{2} = 3,5$

10.2. $5,2 < \frac{21}{4}$, pois $\frac{21}{4} = 5,25$

10.3. $\frac{7}{3} > \sqrt{5}$, pois $\frac{7}{3} = 2,(3)$ e $\sqrt{5} = 2,236...$ (dízima infinita não periódica).

10.4. $\sqrt{3} < 1,(7)$, pois $\sqrt{3} = 1,73...$ (dízima infinita não periódica).

10.5. $-2,25 < \sqrt{8}$, pois $-2,25$ é um número negativo e $\sqrt{8}$ é um número positivo.

Exercício 13 Dá exemplo de um número real a tal que:

13.1. $\frac{13}{5} < a < \sqrt{7}$

13.2. $-\sqrt{14} < a < -\sqrt{13}$

13.3. $\sqrt{26} < a < \frac{31}{6}$

13.4. $-\frac{5}{3} < a < -\sqrt{2}$

Resolução:

13.1. Recorrendo à calculadora, temos que:

$\sqrt{7} = 2,6457...$ (dízima infinita não periódica)
$\frac{13}{5} = 2,6$
Assim, por exemplo, $2,62$ é um número real compreendido entre $\frac{13}{5}$ e $\sqrt{7}$

13.2. Recorrendo à calculadora, temos que:
$-\sqrt{14} = -3,741...$ (dízima infinita não periódica)
$-\sqrt{13} = -3,605...$ (dízima infinita não periódica)
Assim, por exemplo, $-3,65$ é um número real compreendido entre $-\sqrt{14}$ e $-\sqrt{13}$

13.3. Recorrendo à calculadora, temos que:
$\sqrt{26} = 5.0990...$ (dízima infinita não periódica)
$\frac{31}{6} = 5,1(6)$ (dízima infinita periódica)
Assim, por exemplo, $5,1$ é um número real compreendido entre $\sqrt{26}$ e $\frac{31}{6}$

13.4 Recorrendo à calculadora, temos que:
$-\frac{5}{3} = -1,(6)$ (dízima infinita periódica)
$-\sqrt{2} = -1,41423...$ (dízima infinita não periódica)
Assim, por exemplo, $-1,5$ é um número real compreendido entre $-\frac{5}{3}$ e $-\sqrt{2}$

Avaliação/Reflexão
A avaliação é efetuada por observação direta, procedendo-se ao preenchimento de uma grelha de observação de aula que contempla o comportamento, atitudes e valores, a sua participação na aula nomeadamente efetuar os exercícios propostos assim como o voluntariar-se para a sua resolução no quadro, quando para tal sejam solicitados.

TPC
Ficam como TPC os exercícios que não sejam resolvidos na aula.

Apoio Bibliográfico
[1] Programa de Matemática do Ensino Básico;

[2] Costa B., Rodrigues E. (2012). Novo Espaço - parte 2 - Matemática 9º Ano. Porto Editora.

[3] Ferreira P., Marques M. (2012). Projeto Desafios Matemática 9º Ano. Santillana, Constância.

3.7 Planificação aula 8

GOVERNO DE PORTUGAL

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Direção Geral dos Estabelecimentos Escolares

Direção de serviços Região Centro

ESCOLA SECUNDÁRIA CAMPOS MELO

Disciplina: Matemática.

Unidade 5: Números reais. Inequações.

Subtema: Inequações.

Pré-requisitos:

- Conhecer o conjunto dos números reais.
- Saber operar com números reais.
- Saber resolver equações do 1º grau a uma incógnita.
- Conhecer as relações de ordem em $\mathbb{R}$.
- Identificar intervalos de números reais.

Data: 05/05/2014.

Duração: Um bloco de 90 minutos.

Ano: 9º ano.

Turma: Turma B

Sumário: Inequações. Resolução de inequações.

Nota: Quando escrevemos no quadro, desenhamos ou projetamos é suposto que os alunos passem para o caderno, a menos que algo seja dito em contrário.

Objetivos:

- Compreender as noções de inequação e de solução de uma inequação.
- Resolver inequações do 1º grau utilizando as regras de resolução.
- Resolver e formular problemas envolvendo inequações.

Competências transversais

As ideias algébricas aparecem logo no 1º ciclo no trabalho com sequências, ao estabelecerem-se relações entre números e entre números e operações. No 2º ciclo, a Álgebra já aparece como um tema matemático individualizado aprofundando-se o estudo de relações e regularidades. Finalmente no 3º ciclo institucionaliza-se o uso da linguagem algébrica, trabalha-se com expressões, equações, inequações e funções, procurando desenvolver no aluno a capacidade de lidar com diversos tipos de relações matemáticas e estudar situações de variação em contextos significativos.

Materiais e recursos

Para os alunos: Manual do aluno.
Para o professor: Projetor e quadro branco.

Indicações metodológicas para a aula

Após o registo do sumário no quadro, enunciamos os objetivos da aula.

Definição de inequação

Em diálogo com os alunos vamos, proceder à introdução do conceito de inequação, a qual será feita recorrendo ao estudo de um problema.

Quadro:
Problema: Adaptado de [3]
A D. Marta comprou uma t-shirt e uns calções para o André. Os calções custaram 12 €.

Questionamos os alunos sobre qual a incógnita no problema e qual o valor total da compra.

Quadro:
x - preço da t-shirt.
Valor da compra: $x + 12$.

Questionamos os alunos sobre que tipo de expressão é $x + 12$. Será uma equação? Concluímos que é uma expressão algébrica.
Seguidamente vamos determinar o preço da t-shirt, sabendo quanto a D. Marta pagou no total.

Quadro: A D. Marta pagou, no total, 30 €.
$x + 12 = 30$
$x + 12 = 30 \Leftrightarrow x = 30 - 12 \Leftrightarrow x = 18.$
O preço da t-shirt é de 18 €.

Em seguida é apresentada uma nova situação aos alunos: A D. Marta gastou menos de 30 €. Questionamos os alunos sobre se é possível traduzir esta situação por meio de uma equação. Conduzimos o diálogo para que tal não é possível, uma vez que não existe uma igualdade.
Sabemos apenas que o valor total da compra, representado por $x + 12$ foi inferior a 30 €.
Quadro:
A D. Marta gastou **menos** de 30 €.
$x + 12 < 30$

Dizemos que agora em vez do símbolo de igualdade, colocamos o símbolo de menor, $<$, obtendo-se uma desigualdade.

Quadro:
Definição: Uma **inequação** é uma desigualdade algébrica.

Observação: Numa inequação há dois membros separados por um dos seguintes sinais: $<$, $>$, $\leqslant$ ou $\geqslant$

Exemplos de inequações: [3]

- $3 > x$
- $5x - 7 \leqslant 9x + 8$.
- $2(y + 2) \geqslant 8y$.

Exemplos que não são inequações: [3]

- $4x - 1 = 9x + 3$ não é uma inequação, pois não é uma desigualdade.
- $5 + 7 \leqslant 12$ não é uma inequação, pois não tem variável.

Referimos que a terminologia usada nas equações mantém-se para as inequações.

Quadro:
$5x - 7 < 9x + 8$
1º membro: $5x - 7$
2º membro: $9x + 8$
Termos do 1º membro: $5x$ e -7
Termos do 2º membro: $9x$ e 8
Incógnita: x

Soluções de uma inequação

Considerando a inequação do problema anterior, vamos agora proceder ao cálculo das suas soluções.

Quadro: $x + 12 < 30$ onde:
x - preço da t-shirt.
12 - valor dos calções. 30 - a D. Marta pagou no total menos de 30 €.

Poderá o valor 25 ser solução da inequação?
Substituindo a incognita, x, por 25, obtém-se:
$25 + 12 < 30 \Leftrightarrow 37 < 30$.
Como $37 < 30$ é falso, 25 não é solução da inequação $x + 12 < 30$.

10 será solução da inequação?
Substituindo a incognita, x, por 10, obtém-se:
$10 + 12 < 30 \Leftrightarrow 22 < 30$.

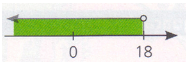
Como $22 < 30$ é verdadeiro, 10 é solução da inequação.

7 será solução da inequação?
Substituindo a incognita, x, por 7, obtém-se:
$7 + 12 < 30 \Leftrightarrow 19 < 30$.
Como $19 < 30$ é verdadeiro, 7 é solução da inequação.

Quadro:
Diz-se que um número é **solução de uma inequação** quando, ao substituir a incógnita por esse número, se obtém uma afirmação verdadeira.

Definição: O **conjunto-solução de uma inequação** é o conjunto de todos os valores que, atribuídos à incógnita satisfazem a desigualdade, isto é, dão origem a uma afirmação verdadeira.

O conjunto-solução (C.S.) da inequação $x + 12 < 30$, fora do contexto do problema, pode ser representado:
- em compreensão $\{x \in \mathbb{R} : x < 18\}$

- graficamente, na reta real 

- sob a forma de intervalos de números reais: C.S. = $]-\infty; 18[$

Em seguida vamos, determinar o conjunto-solução no contexto do problema.

Quadro:
No contexto do problema, para ser solução, a t-shirt teria custado menos de 18 € mas mais de 0 €.
Conjunto-solução:
- em compreensão $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 18\}$
- sob a forma de intervalos de números reais: C.S. = $]0; 18[$

De seguida procedemos à resolução de um exercício para a verificação da aprendizagem: Verificar se um dado número é ou não solução de uma inequação.

Exercício:[3] Verifica se o número entre parênteses é ou não solução da respetiva inequação.
a) $x + 8 < 10 \quad (4)$
b) $6 - x < 0 \quad (7)$
c) $3x - 4 > x - 7x \quad (-1)$

Resolução:
a) $x + 8 < 10 \Leftrightarrow 4 + 8 < 10 \Leftrightarrow 12 < 10$. Afirmação falsa, logo 4 não é solução da inequação.

b) $6 - x < 0 \Leftrightarrow 6 - 7 < 0 \Leftrightarrow -1 < 0$. Afirmação verdadeira, logo 7 é solução da inequação.

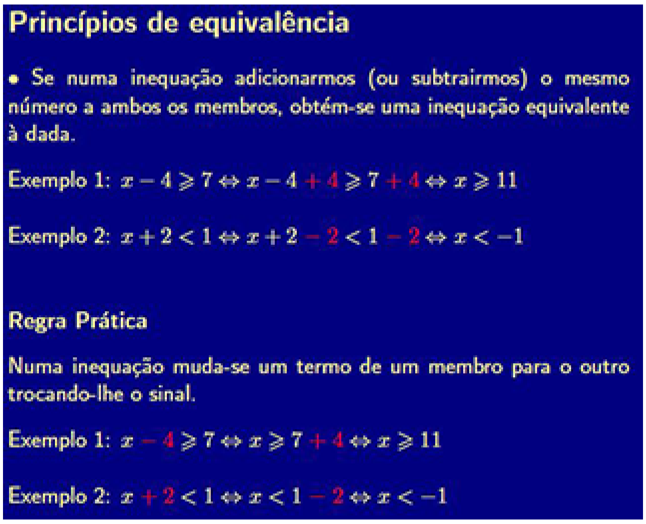
c) $3x - 4 > x - 7x \Leftrightarrow 3 \times (-1) - 4 > -1 - 7 \times (-1) \Leftrightarrow -3 - 4 > -1 + 7 \Leftrightarrow -7 > 6$. Afirmação falsa, logo não é solução da inequação.

Resolução de inequações

Quadro:
Como resolver a inequação $x + 12 < 30$?

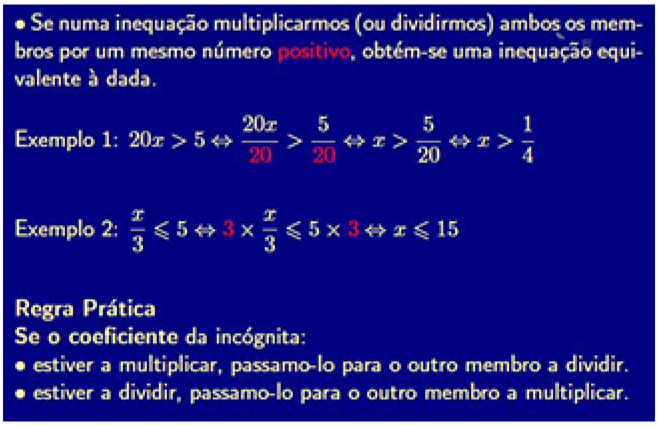
Referimos que tal como nas equações, também na resolução de uma inequação se pretende isolar a incógnita num dos membros da inequação.

Quadro:
$x + 12 - 12 < 30 - 12 \Leftrightarrow x + 0 < 18 \Leftrightarrow x < 18$



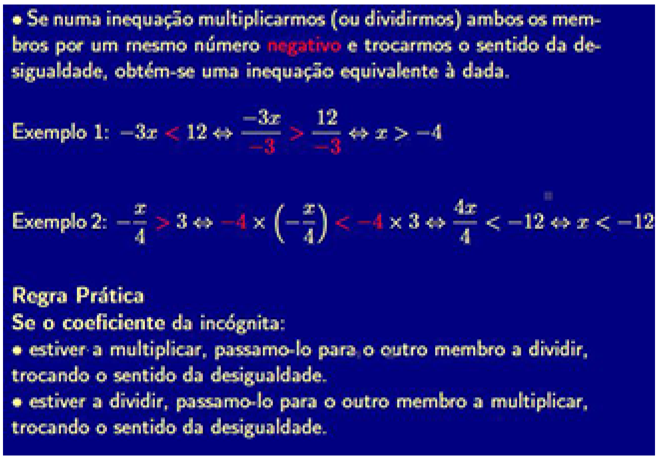
Quadro:
como resolver a inequação $2x < 10$?
Referimos que para isolar a incógnita x, dividem-se ambos os membros da inequação pelo coeficiente de x.

Quadro:
$2x < 10 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} < \frac{10}{2} \Leftrightarrow x < 5$



Quadro:
como resolver a inequação $-8x < 24$?
Em diálogo com os alunos pedimos para resolverem a inequação. Se os alunos resolverem sem mudar o sentido da desigualdade, concretizamos com valores de modo a que os alunos verifiquem que o conjunto-solução que obtiveram não satisfaz a desigualdade.
Referimos que para isolar a incógnita x, e como o coeficiente de x é **negativo** dividem-se ambos os membros da inequação pelo coeficiente de x e **troca-se o sentido da desigualdade**.

Quadro:
$-8x < 24 \Leftrightarrow \frac{-8x}{-8} > \frac{24}{-8} \Leftrightarrow x > -3$



De seguida procedemos à resolução de um exercício, tendo com objetivo verificar a aprendizagem: Resolução de inequações.

Exercício 35 (pág. 66 do manual adotado). Resolve as inequações e apresenta o resultado na forma de intervalo de números reais.
35.1. $5x - 3 \geqslant x + 9$

35.2. $3x < \frac{1}{2}$

35.3. $-3x > 6$

Resolução:

35.1. $5x - 3 \geqslant x + 9 \Leftrightarrow 5x - x \geqslant 9 + 3 \Leftrightarrow 4x \geqslant 12 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{12}{4} \Leftrightarrow x \geqslant 3$

O conjunto-solução é $[3, +\infty[$

35.2. $3x < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{6}$

O conjunto-solução é $\left]-\infty, \dfrac{1}{6}\right[$

35.3. $-3x > 6 \Leftrightarrow x < -\dfrac{6}{3} \Leftrightarrow x < -2$

O conjunto-solução é $]-\infty, -2[$

Avaliação/Reflexão

A avaliação é efetuada por observação direta, procedendo-se ao preenchimento de uma grelha de observação de aula que contempla o comportamento, atitudes e valores, a sua participação na aula nomeadamente efetuar os exercícios propostos assim como o voluntariar-se para a sua resolução no quadro, quando para tal sejam solicitados.

TPC

Ficam como TPC os exercícios que não sejam resolvidos na aula e fazer as restantes alíneas do exercício 35.

Apoio Bibliográfico

[1] Programa de Matemática do Ensino Básico;

[2] Costa B., Rodrigues E. (2012). Novo Espaço - parte 2 - Matemática 9º Ano. Porto Editora.

[3] Ferreira P., Marques M. (2012). Projeto Desafios Matemática 9º Ano. Santillana, Constância.

Bibliografia

[1] Apostol, T. Irrationality of the square root of two - a geometric proof. In *The Americam Mathematical Monthly* (2000), vol. 107, pp. 841--842. 9

[2] Brochero, F., Moreira, C., Saldanha, N., and Tengan, E. *Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*. Projeto Euclides, IMPA, 2010. 19, 25

[3] Caraça, B. *Conceitos Fundamentais de Matemática*. gradiva, 2010. 3

[4] Carvalho, P., Lima, E., Morgado, A., and Wagner, E. *A Matemática do Ensino Médio*. Sociedade Brasileira de Matemática, 1997. 3, 4, 5

[5] Clark, P. Math 4400/6400-number theory. `http://www.math.uga.edu/~pete/numbertheory2009.html`. Acedida Setembro 8, 2014. 29

[6] Gondim, R. Aproximações racionais e aritmética. In *Sociedade Brasileira de Matemática - Projeto Klein de Matemática em Língua Portuguesa* (2012). 29, 34

[7] Gowers, T. *Matemática - uma breve introdução*. gradiva, 2008. 6, 8

[8] Hodgson, B. Extraction d´une racine dans un carré. In *accromath* (2006), vol. 1, pp. 16--18. 26

[9] Hodgson, B. Uma breve história da quinta operação. In *Gazeta da Matemática, artigo convidado* (2006), pp. 7--30. 26, 28

[10] IMPA. Programa de aperfeiçoamento de professores de matemática do ensino médio - perguntas e respostas sessão 1. `http://video.impa.br/index.php?page=janeiro-de-2010`. Acedida Novembro 28, 2013. 5

[11] Koshy, T. *Elementary Number Theory with applications*. Elsevier, 2007. 21

[12] Machiavelo, A. A equação que nunca foi de Pell. In *Gazeta da Matemática* (2013), no. 171. 29

[13] Moreira, C. Teoria dos números (a equação de Pell 1ª parte) nível 3. `http://poti.impa.br/index.php/videos/tn`. Acedida Maio 6, 2014. 29, 34

[14] Moreira, C. Frações contínuas: como aproximar bem números reais por números racionais. In *Projeto Klein de Matemática em Língua Portuguesa* (2012). 17, 21, 22

[15] Neves, E. *Episódios da História da Matemática para o Ensino*. Departamento de Matemática da FCUL, 2007. 11

[16] Niven, I. A simple proof that π is irrational. In *Bulletin of the American Mathemical Society* (1947), vol. 5, p. 509. 13

[17] Paixão, J. Sucessões e frações contínuas. In *Gazeta da Matemática* (2012), no. 166, p. 38. 19, 24, 25

[18] Santos, J. Uma breve história de π. In *Gazeta da Matemática* (2003), no. 145. 11

[19] Serra, I., and Sousa, L. Números irracionais no ensino básico: Os desafios da história de π. In *Gazeta da Matemática* (2013), no. 171, pp. 24--31. 11

[20] Silverman, J. *Friendly Introduction to Number Theory*. Pearson, 2012. 36, 38, 39, 40

[21] Stillwell, J. *Elements of Number Theory*. Springer, 2003. 29, 33

Apêndice A

Anexos

A.1 Tarefa 1 e Resolução Aula 4

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

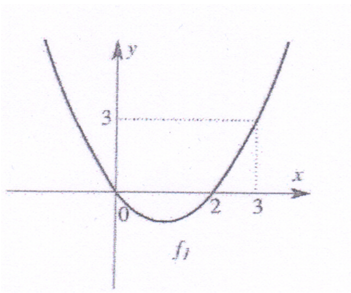
Direção Geral dos Estabelecimentos Escolares
Direção de serviços Região Centro

ESCOLA SECUNDÁRIA CAMPOS MELO

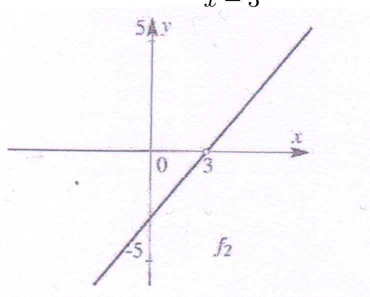
Tarefa 1 — **12ºano**
Assunto: Introdução ao Cálculo Diferencial II — **2013/2014**

Observe os gráficos.

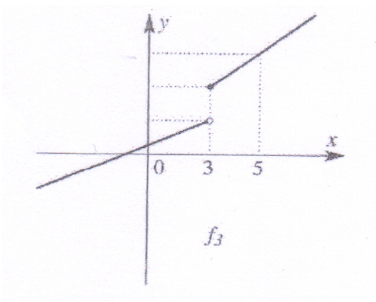
$$f_1(x) = x(x-2)$$



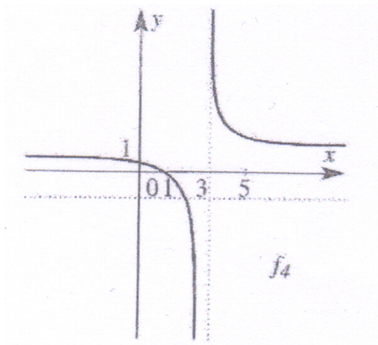
$$f_2(x) = \frac{(x-3)^2}{x-3}$$



$$f_3(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 3 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{se } x < 3 \end{cases}$$



$$f_4(x) = \frac{x-1}{x-3}$$



1. De acordo com o conceito intuitivo que tem de limite indique, para cada função, se existe ou não limite quando x tende para 3.

2. Para cada caso, escolha duas sucessões (x_n) e (y_n) de valores de domínio da função que tendam para 3, a primeira por valores superiores e a segunda por valores inferiores e escreva as expressões dos termos gerais dessas sucessões.

3. Estude numericamente, com a calculadora, para cada caso, a sucessão $(f_i(x_n)), i = 1, 2, 3, 4$ completando a tabela seguinte e tirando conclusões.

n	$x_n =$	$f_1(x_n)$	$f_2(x_n)$	$f_3(x_n)$	$f_4(x_n)$
1					
5					
10					
50					
100					
1000					
100000					

4. Estude numericamente, com a calculadora, para cada caso, a sucessão $(f_i(y_n)), i = 1, 2, 3, 4$ completando a tabela seguinte e tirando conclusões.

n	$y_n =$	$f_1(y_n)$	$f_2(y_n)$	$f_3(y_n)$	$f_4(y_n)$
1					
5					
10					
50					
100					
1000					
100000					

5. Compare os resultados obtidos em **3.** e **4.** e tente justificar a sua conjetura de **1.**

6. Utilizando a definição de limite segundo Heine e as propriedades que conhece de limites de sucessões prove a conjetura que fez acerca do limite da função f_2 no ponto de abcissa 3.

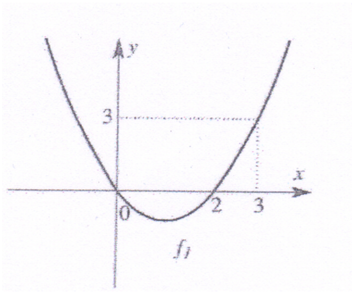
7. Considere, à sua escolha, dois infinitamente grandes positivos (a_n) e (b_n).
O que pode dizer de $lim f_4(a_n)$ e de $lim f_4(b_n)$?

Direção Geral dos Estabelecimentos Escolares
Direção de serviços Região Centro
ESCOLA SECUNDÁRIA CAMPOS MELO

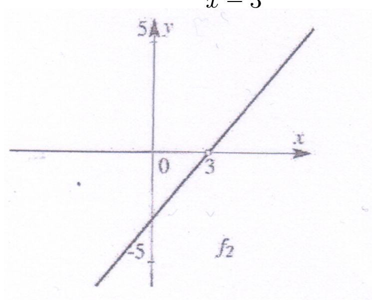
Tarefa 1 **12ºano**
Assunto: Introdução ao Cálculo Diferencial II **2013/2014**

Proposta de resolução.

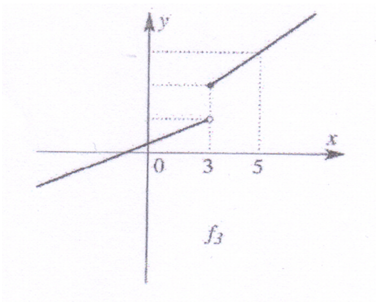
$$f_1(x) = x(x-2)$$



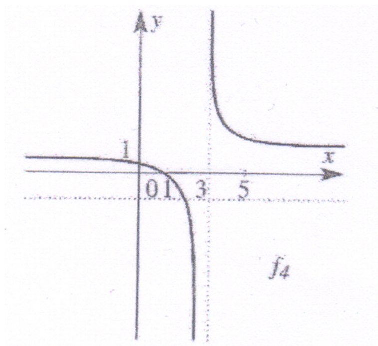
$$f_2(x) = \frac{(x-3)^2}{x-3}$$



$$f_3(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 3 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{se } x < 3 \end{cases}$$



$$f_4(x) = \frac{x-1}{x-3}$$



1. Observando os gráficos, conclui-se que:
$\lim\limits_{x\to 3} f_1(x) = 3$ e $\lim\limits_{x\to 3} f_2(x) = 0$
f_3 e f_4 não têm limite quando x tende para 3.

2. Para f_1, f_2, f_3 e f_4 podemos considerar as mesmas duas sucessões:
uma de termo geral $x_n = 3 + \frac{1}{n}$ e
outra de termo geral $y_n = 3 - \frac{1}{n}$.

3. Estude numericamente, com a calculadora, para cada caso, a sucessão $f_i(x_n), i = 1, 2, 3, 4$ completando a tabela seguinte e tirando conclusões.

n	$x_n = 3 + \frac{1}{n}$	$f_1(x_n)$	$f_2(x_n)$	$f_3(x_n)$	$f_4(x_n)$
1	$3 + \dfrac{1}{1} = 4$	8	1	5	3
5	$3 + \dfrac{1}{5} = 3,2$	3,84	0,2	4,2	11
10	$3 + \dfrac{1}{10} = 3,1$	3,41	0,1	4,1	21
50	$3 + \dfrac{1}{50} = 3,02$	3,0804	0,02	4,02	101
100	$3 + \dfrac{1}{100} = 3,01$	3,0401	0,01	4,01	201
1000	$3 + \dfrac{1}{1000} = 3,001$	3,004001	0,001	4,001	2001
100000	$3 + \dfrac{1}{100000} = 3,00001$	3,0000400001	0,00001	4,00001	200001

Analisando agora os resultados podemos concluir que:
quando o n aumenta à sucessão (x_n) que tende para 3 por valores maiores que 3
corresponde uma sucessão $(f_1(x_n))$ que parece tender para 3
uma sucessão $(f_2(x_n))$ que parece tender para 0
uma sucessão $(f_3(x_n))$ que parece tender para 4
finalmente uma sucessão $(f_4(x_n))$ que parece tender para $+\infty$

4. Estude numericamente, com a calculadora, para cada caso, a sucessão $f_i(y_n), i = 1, 2, 3, 4$ completando a tabela seguinte e tirando conclusões.

n	$y_n = 3 - \frac{1}{n}$	$f_1(y_n)$	$f_2(y_n)$	$f_3(y_n)$	$f_4(y_n)$
1	$3 - \dfrac{1}{1} = 2$	0	-1	1,5	-1
5	$3 - \dfrac{1}{5} = 2,8$	2,24	-0,2	1,9	-9
10	$3 - \dfrac{1}{10} = 2,9$	2,61	-0,1	1,95	-19
50	$3 - \dfrac{1}{50} = 2,98$	2,9204	-0,02	1,99	-99
100	$3 - \dfrac{1}{100} = 2,99$	2,9601	-0,01	1,995	-199
1000	$3 - \dfrac{1}{1000} = 2,999$	2,996001	-0,001	1,9995	-1999
100000	$3 - \dfrac{1}{100000} = 2,9999$	2,9999600001	-0,00001	1,999995	-199999

Analisando agora os resultados podemos concluir que:
quando o n aumenta à sucessão (y_n) que tende para 3 por valores menores que 3
corresponde uma sucessão $(f_1(y_n))$ que parece tender para 3
uma sucessão $(f_2(y_n))$ que parece tender para 0
uma sucessão $(f_3(y_n))$ que parece tender para 2
finalmente uma sucessão $(f_4(y_n))$ que parece tender para $-\infty$

5. Comparemos os resultados obtidos em **3.** e **4.**, tentando justificar a conjetura de **1.**
De facto tanto considerando (x_n) como considerando (y_n) as sucessões $(f_1(x_n))$ e $(f_1(y_n))$ parecem tender para o mesmo número (3) que deverá ser o valor para que tende f_1 quando x tende para 3.
De facto tanto considerando (x_n) como considerando (y_n) as sucessões $(f_2(x_n))$ e $(f_2(y_n))$ parecem tender para o mesmo número (0) que deverá ser o valor para que tende f_2 quando x tende para 3.
No caso de f_3, $f_3(x_n)$ tende para 4 e $(f_3(y_n))$ tende para 2 o que nos leva a querer que não existe $\lim\limits_{x\to 3} f_3(x)$
No caso de f_4, $f_4(x_n)$ tende para $+\infty$ e $(f_4(y_n))$ tende para $-\infty$ o que nos leva a querer que não existe $\lim\limits_{x\to 3} f_4(x)$.

6. Formalmente, segundo a definição de Heine, diz-se que uma função f tem por limite b quando x tende para a, se a qualquer sucessão (x_n) de valores de domínio da função f, que tenda para a por valores diferentes de a, corresponder uma sucessão $(f(x_n))$ a tender para b.
Utilizando esta definição e as propriedades que conhecemos de limites de sucessões vamos provar que $\lim\limits_{x\to 3} f_2(x) = 0$.
Provar que $\lim\limits_{x\to 3} f_2(x) = 0$ é provar que a qualquer sucessão (x_n) de valores do domínio da função f_2, que tenda para 3 por valores diferentes de 3, corresponde uma sucessão $(f_2(x_n))$ a tender para 0.
Temos $f_2(x_n) = \dfrac{(x_n - 3)^2}{x_n - 3} = \dfrac{(x_n - 3)^2}{x_n - 3} = x_n - 3$ (simplificação válida porque x_n tende para 3 por valores diferentes de 3).
Mas $x_n \to 3$ significa, por definição, que $(x_n - 3) \to 0$, logo provamos que $(f_2(x_n))$ tende para 0, como queríamos provar.

7. $\lim f_4(a_n) = 1$ e $\lim f_4(b_n) = 1$, quaisquer que sejam (a_n) e (b_n). Podemos considerar por exemplo: $(a_n) = n$ e $(b_n) = n + 1$

A.2 Ficha Diagnóstico e Resolução Aula 5

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Direção Geral dos Estabelecimentos Escolares

Direção de serviços Região Centro

ESCOLA SECUNDÁRIA CAMPOS MELO

Unidade - Números Reais. Inequações **9ºano**

Ficha de Trabalho 1 - Atividades diagnósticas **2013/2014**

Números racionais

1. Considera os números: $\frac{2}{3}$; 4; $\frac{13}{8}$; $\frac{9}{22}$; -10; $\frac{6}{7}$.

1.1 Usando a calculadora, representa cada um dos números sob a forma de dízima.

NOTA: O ecrã da calculadora tem apenas espaço para um número limitado de dígitos. Quando as dízimas são infinitas, a calculadora efetua um arredondamento.

1.2 Separa as dízimas que são finitas das que são infinitas periódicas.

1.3 No caso das dízimas infinitas periódicas, indica o seu período.

Recorda:

$\mathbb{N}$ = {números naturais}

$\mathbb{Z}$ = {números inteiros}

$\mathbb{Q}$ = {números racionais}

2. Completa com $\in$ (pertence) ou $\notin$ (não pertence).

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$
9			
-6			
4,5			
0			

3 Investiga as frações com denominador 37.

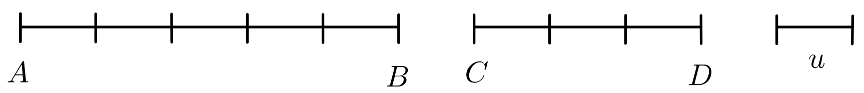
3.1 Usando a calculadora, representa $\frac{1}{37}, \frac{2}{37}, \frac{3}{37}, \frac{4}{37}$ e $\frac{5}{37}$ sob a forma de dízima.

3.2 Sem usar a calculadora, conjetura como ficarão representados, na forma de dízima, $\frac{6}{37}$ e $\frac{7}{37}$

3.3 Usando a calculadora, representa $\frac{38}{37}, \frac{39}{37}$ e $\frac{40}{37}$ sob a forma de dízima.

Um número não racional

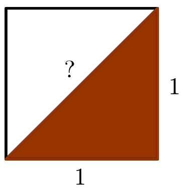
4 Dois segmentos de reta dizem-se **comensuráveis** quando existe um terceiro segmento que cabe um número inteiro de vezes neles os dois.
Por exemplo, $[AB]$ e $[CD]$ são comensuráveis porque $\overline{AB} = 5u$ e $\overline{CD} = 3u$.



Na Gréca Antiga, acreditava-se que dois segmentos de reta eram sempre comensuráveis, por isso, um dos maiores desafios que os matemáticos enfrentaram surgiu quando quiseram determinar a medida da diagonal de um quadrado de lado igual a 1: descobriram que a diagonal não era comensurável com o lado do quadrado!

Com a resolução deste problema, viria a nascer o primeiro número não racional. A descoberta de que existiam medidas não comensuráveis (ou incomensuráveis) revelou que os números inteiros e os fracionários não eram suficientes para descrever a realidade.

Qual é a medida exata da diagonal de um quadrado de lado igual a 1?



Direção Geral dos Estabelecimentos Escolares
Direção de serviços Região Centro

Escola Secundária Campos Melo

Unidade - Números Reais. Inequações **9ºano**
Ficha de Trabalho 1 - Atividades diagnósticas **2013/2014**

Resolução
Números racionais

1.

1.1

$\frac{2}{3} = 0,(6)$

$4 = 4,0$
$\frac{13}{8} = 1,625$

$\frac{9}{22} = 0,4(09)$

$-10 = -10,0$

$\frac{6}{7} = 0,(857142)$

1.2

Finitas: $4,0;\ 1,625;\ -10,0$

Infinitas: $0,(6);\ 0,4(09);\ 0,(857142)$

1.3

$0,(6)$ tem período 6

0,4(09) tem período 09

$0,(857142)$ tem período 857142

2.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$
9	$\in$	$\in$	$\in$
-6	$\notin$	$\in$	$\in$
4,5	$\notin$	$\notin$	$\in$
0	$\notin$	$\in$	$\in$

3

3.1

$\frac{1}{37}=0,(027)$ $\frac{2}{37}=0,(054)$ $\frac{3}{37}=0,(081)$ $\frac{4}{37}=0,(108)$ $\frac{5}{37}=0,(135)$

3.2 Por observação das dízimas calculadas no exercício anterior os alunos devem concluir que uma dízima se obtém da anterior somando 0,027.

$\frac{6}{37}=0,(162)$ e $\frac{7}{37}=0,(189)$

3.3

$\frac{38}{37}=1,(027)$ $\frac{39}{37}=1,(054)$ $\frac{40}{37}=1,(081)$

Um número não racional

4

Por aplicação do teorema de Pitágoras tem-se $1^2+1^2=d^2 \Leftrightarrow 2=d^2 \Leftrightarrow d=\pm\sqrt{2}, d>0$ então $d=\sqrt{2}$.