

# DIMENSÃO E HORIZONTE DE INVESTIMENTO EM CARTEIRAS IMUNIZADAS: UMA ANÁLISE SOB A PERSPECTIVA DAS ENTIDADES DE PREVIDÊNCIA COMPLEMENTAR

**Sérgio Jurandyr Machado**

[juramachado@globo.com](mailto:juramachado@globo.com)

IBMEC-SP / Brasil

**Antonio Carlos Figueiredo Pinto**

[figueiredo@iag.puc-rio.br](mailto:figueiredo@iag.puc-rio.br)

PUC-Rio / Brasil

## RESUMO

O termo imunização denota a construção de uma carteira de títulos de forma a torná-la imune a variações nas taxas de juros. No caso das entidades de previdência complementar, o objetivo da imunização é distribuir os recebimentos intermediários e finais dos ativos de acordo com o fluxo de pagamentos dos benefícios. Em geral, quanto maior a classe de alterações na estrutura a termo das taxas de juros, mais restritivo se torna o modelo. O artigo busca comparar o desempenho de modelos de gestão de risco de taxa de juros que, baseados em alternativas distintas de programação matemática, objetivam garantir o pagamento do fluxo futuro de benefícios. Embora exista uma vasta literatura sobre o aspecto estatístico e sobre o significado econômico dos modelos de imunização, o artigo inova ao prover uma análise detalhada do desempenho comparado dos modelos, sob três perspectivas complementares: o método escolhido, a dimensionalidade e, ainda, o horizonte de investimento. A análise permite concluir que os modelos de imunização tradicional, quando examinados sob a ótica conjunta da redução do risco, das restrições impostas à formatação da carteira e dos custos de transação associados, são mais eficientes, no médio e longo prazo, que os modelos multidimensionais de gestão do risco de taxa de juros, os quais se mostram superiores apenas na gestão restrita ao curto prazo.

**Palavras-chave:** risco de taxa de juros; duração; imunização; índice de renda fixa; entidade de previdência complementar.

## ABSTRACT

Immunization is defined as the investment in assets in such a way that the fixed income portfolio is immune to a change in interest rates. In the special case of pension funds, immunization seeks the distribution of the cash inflows in accordance with the outflows represented by the fund's liabilities. The article seeks to compare the performance of different models of immunization based on distinct mathematical programming constraints when applied to interest rate risk management of a predetermined flow of payments within a pension fund. Although there is a great amount of articles that try to tackle interest rate risk and deal with the statistical aspects and economic meaning of many sorts of immunization models, this article represents an attempt to provide a unique comprehensive analysis that takes into account not only the method itself, but also the dimension and the investment horizon of the pension fund industry. It is demonstrated that traditional duration models, when examined under the conjoint perspective of interest rate risk mitigation, imposed

constraints to set up the immunized portfolios and associated transaction costs, are more efficient, especially on the medium and long terms. Multidimensional models presented a better performance only on a short term basis.

**Keywords:** Interest rate risk management; duration; immunization; fixed income index; pension fund.

## 1. Introdução

Nos planos de contribuição variável, a criação de valor na indústria de previdência complementar está associada à capacidade do gestor em prover o beneficiário de uma alocação eficiente de capital, em dois momentos distintos: a) durante o período de diferimento, ou seja, durante o prazo de pagamento das contribuições para o fundo, ao maximizar a rentabilidade auferida pelos recursos, incrementando o *funding* a ser utilizado no pagamento futuro de benefícios; e b) após o período de diferimento, ao minimizar a probabilidade de insolvência da entidade de previdência complementar, doravante EPC, garantindo o pagamento do benefício pelo período estipulado em contrato.

Enquanto a alocação de recursos no período de diferimento busca basicamente garantir maior rentabilidade à carteira de investimentos, a alocação pós-diferimento também deve levar em consideração o fluxo de benefícios a ser pago aos beneficiários.

Partindo-se da premissa que tal fluxo pode ser descrito de forma análoga ao fluxo de um título de renda fixa, cria-se um incentivo natural para a utilização das reservas técnicas referentes aos benefícios concedidos na compra desse tipo de instrumento financeiro. Esse incentivo será tanto maior quanto menor o prêmio de risco oferecido pelos ativos de renda variável e quanto maior a aversão ao risco por parte do gestor.

A decisão sobre quais títulos de renda fixa devem fazer parte da carteira estará necessariamente associada à incerteza, uma vez que não é possível prever com exatidão a evolução futura das taxas de juros. Assim, é apropriado ajustar o fluxo de rendimentos auferidos ao fluxo de pagamentos a ser efetuado, de forma a minimizar o risco de taxa de juros.

Usualmente, adota-se uma estratégia de imunização de forma a atingir esse objetivo. O processo de imunização foi definido por Redington (1952) como a alocação de recursos de forma a tornar uma carteira “imune” a variações nas taxas de juros, garantindo um montante

determinado de recursos em uma data futura específica. Variações inesperadas das taxas de juros irão afetar ativos e passivos de forma semelhante, garantindo a solvência da EPC.

A imunização reduz a alocação de ativos a um problema de programação matemática que maximiza (ou minimiza) uma dada função objetivo, sujeita a restrições associadas às mudanças na estrutura a termo da taxa de juros descritas pelo modelo de imunização utilizado e aos limites de aplicação impostos pela legislação. Em geral, quanto maior a classe de alterações na estrutura a termo das taxas de juros (ETTJ) que se pretende imunizar, mais restritivo se torna o modelo. Nesse contexto, Soto (2004) define dimensionalidade como o número de fatores de sensibilidade às taxas de juros utilizado no modelo de imunização.

O objetivo principal de análise é comparar o desempenho de modelos de gestão de risco de taxa de juros que objetivam garantir o pagamento do fluxo futuro de benefícios de uma EPC. Foram testados modelos exponenciais, baseados em componentes principais e baseados em choques arbitrários, de um a quatro fatores. As diferentes estratégias de imunização foram comparadas por meio da ponderação de três indicadores de eficiência distintos (detalhados na seção 3): exposição líquida ao risco, diversificação e custos de transação. Foram adotadas três alternativas distintas de ponderação: na primeira, a ponderação da exposição líquida ao risco, da diversificação e do custo de transação é de 70%, 25% e 5%, respectivamente; na segunda e terceira alternativas, os custos de transação são negligenciados e a ponderação foi fixada em 70/30 e 50/50, respectivamente. Adicionalmente, busca-se explicitar como o horizonte de investimento influencia o desempenho dos métodos de imunização. Embora exista uma vasta literatura sobre o aspecto estatístico e sobre o significado econômico dos modelos de imunização, este artigo inova ao prover uma análise detalhada da performance comparada de tais modelos no mercado brasileiro, sob as perspectivas complementares da dimensionalidade e do horizonte de investimento.

A base de dados a ser utilizada é a disponibilizada pela Associação Nacional de Instituições do Mercado Financeiro – ANDIMA, a partir do ano de 2001, com as taxas efetivas e indicativas de negociação de títulos públicos no mercado secundário. A pesquisa se restringe aos títulos de responsabilidade do Tesouro Nacional passíveis de alocação de acordo com as resoluções CMN 2967/02 e 3121/03 (e modificações ulteriores), que impõem os limites a serem respeitados pelas EPC no que diz respeito à aplicação dos recursos referentes às reservas técnicas. Uma vez que a legislação obriga a correção anual dos valores dos benefícios por um índice de preços, serão utilizados na análise todos os vencimentos

disponíveis das Notas do Tesouro Nacional – Série C (NTN-C), títulos indexados ao IGP-M. Por conseguinte, a análise se dará no contexto da evolução das taxas de juros reais.

## **2. A Evolução dos Modelos de Imunização**

Os modelos de imunização representam uma forma simples de gerenciar o risco de taxa de juros, na medida em que “o gestor tem de monitorar apenas o preenchimento das condições associadas às restrições, não havendo a necessidade adicional de se estimar os processos estocásticos que governam os fatores de risco (SOTO, 2004, p. 1090)”. De estruturação relativamente simples e computacionalmente menos intensivos que os modelos estocásticos, os métodos baseados no conceito de *duration* permanecem extremamente populares entre os gestores de carteiras. Entretanto, é necessário analisar essa “simplicidade” no contexto da evolução das estratégias de imunização.

O modelo tradicional assume variações idênticas para todas as taxas de juros, independentemente do prazo. Historicamente, os movimentos nas taxas de curto prazo tendem a ser superiores aos das taxas de longo prazo e, conseqüentemente, a assunção de que a ETTJ irá se modificar apenas por meio de movimentos paralelos é restritiva. Isso não significa que o cômputo tradicional da *duration* deva ser negligenciado, mas tão somente que o acréscimo de medidas adicionais de sensibilidade ao risco de taxa de juros pode ser benéfico.

Assim, as estratégias de imunização evoluíram de forma a contemplar variações não apenas paralelas da ETTJ. Essa evolução ocorreu por meio de três vias distintas: a) os modelos passaram a incorporar, na programação matemática, novas restrições decorrentes do tipo de forma funcional da estrutura a termo que se pretende imunizar; b) foram incorporadas proteções para cada uma das alterações fundamentais – obtidas a partir da análise de fatores – da ETTJ; c) a imunização passou a contemplar movimentos puramente estocásticos da ETTJ, sem nenhuma restrição adicional decorrente de parametrização específica.

### **2.1. Imunização Baseada em Formas Funcionais da ETTJ**

A premissa de que a estrutura a termo pode ser descrita por uma forma funcional particular em cada momento do tempo, ensejou a criação de modelos de imunização baseados em um conceito expandido de *duration*. Nesse caso, a gestão do risco de taxa de juros está associada à equalização da sensibilidade de ativos e passivos a fatores de risco, sendo esses obtidos a partir da diferenciação da função de ajuste escolhida com relação a seus parâmetros.

Em geral, não existirá um conjunto específico de parâmetros capaz de ajustar a função para todos os vencimentos, o que implica a utilização de um critério que norteie a aproximação. Normalmente, os parâmetros são estimados por meio de métodos como mínimos quadrados.

Esse tipo de formulação do problema foi originalmente proposto por Chambers et al. (1988) e Prisman e Shores (1988), tendo sido posteriormente desenvolvido por Willner (1996). O autor propõe a imunização baseada na uniformização das sensibilidades ao nível, inclinação, curvatura e velocidade de convergência para a taxa de juros de longo prazo, sendo esses parâmetros de uma função de ajuste exponencial baseada no modelo parcimonioso de Nelson e Siegel (1987):

$$YC(m) = l + (s + c) \frac{(1 - e^{-m/\tau})}{m/\tau} - ce^{-m/\tau} \quad (1)$$

onde  $YC(m)$  é a taxa de juros,  $m$  representa o prazo de vencimento e  $l, s, c$  e  $\tau$  os parâmetros nível, inclinação, curvatura e velocidade de convergência para a taxa de juros de longo prazo, respectivamente. Ao diferenciar a função de ajuste de Nelson e Siegel com respeito a cada um de seus parâmetros obtém-se o vetor de *duration* descrito pelo modelo exponencial para cada um dos títulos em carteira.

Barrett et al. (2004) demonstraram que o ajuste de  $YC(m)$  é relativamente insensível à velocidade de convergência, de forma que a análise pode assumir um valor constante para o parâmetro  $\tau$ . O exame gráfico da ETTJ em vários pontos do tempo fornece indícios de que a curva de juros reais brasileira torna-se aproximadamente plana entre 60 e 120 meses. Dessa forma, adotar-se-á  $\tau$  igual a 90 meses, uma vez que esse representa o ponto médio do intervalo. Definido o valor de  $\tau$  é possível ajustar a curva por meio de uma regressão não-linear e obter os valores ótimos para os parâmetros  $l, s$  e  $c$ .

A tabela 1 exhibe os parâmetros e os valores de  $R^2$  para as ETTJ estimadas mensalmente no período compreendido entre outubro de 2002 e setembro de 2005. O modelo é capaz de explicar parcela significativa das variações ( $R^2$  médio igual a 0,73) e a existência de alguns valores especialmente baixos para  $R^2$  – como em fevereiro e setembro de 2004 – era de certa forma esperada, já que o ajuste tende a apresentar algumas aparentes discontinuidades na medida em que se estende o intervalo amostral. Tais discontinuidades podem ser conseqüência, por exemplo, de reduções na liquidez do mercado secundário de títulos.

Tabela 1 - Estatísticas Gerais

Mês	l	s	c	R <sup>2</sup>	Mês	l	s	c	R <sup>2</sup>
out/02	10,71	(2,15)	2,15	0,93	abr/04	8,30	(0,67)	0,67	0,98
nov/02	11,05	(3,16)	3,15	0,95	mai/04	8,34	(1,51)	1,51	0,90
dez/02	10,21	1,61	(1,60)	0,46	jun/04	8,24	(1,16)	1,16	0,96
jan/03	10,72	(0,33)	0,33	0,51	jul/04	8,08	(0,60)	0,59	0,76
fev/03	10,83	(1,72)	1,72	0,85	ago/04	7,98	0,62	(0,61)	0,71
mar/03	10,67	(0,64)	0,64	0,52	set/04	8,04	0,27	(0,26)	0,24
abr/03	9,98	1,67	(1,68)	0,70	out/04	7,99	0,84	(0,83)	0,80
mai/03	9,52	3,49	(3,48)	0,84	nov/04	8,07	0,99	(1,00)	0,85
jun/03	9,44	3,71	(3,71)	0,86	dez/04	8,08	1,05	(1,06)	0,85
jul/03	9,47	3,62	(3,62)	0,86	jan/05	7,93	2,28	(2,31)	0,85
ago/03	9,56	1,70	(1,69)	0,96	fev/05	8,01	2,83	(2,87)	0,81
set/03	9,51	0,05	(0,05)	0,38	mar/05	8,28	1,90	(1,94)	0,76
out/03	9,33	0,07	(0,07)	0,41	abr/05	8,27	1,48	(1,51)	0,75
nov/03	9,12	(0,37)	0,36	0,65	mai/05	7,97	3,36	(3,43)	0,74
dez/03	8,79	(0,29)	0,29	0,60	jun/05	7,91	3,92	(4,01)	0,73
jan/04	8,38	(0,30)	0,29	0,88	jul/05	7,90	3,96	(4,06)	0,73
fev/04	8,30	(0,06)	0,06	0,18	ago/05	7,59	4,55	(4,64)	0,72
mar/04	8,39	(0,44)	0,44	0,93	set/05	7,72	5,12	(5,22)	0,77

Fonte: Elaboração própria

Nota: O somatório das participações de cada título será necessariamente igual a 1 e os valores negativos correspondem às vendas a descoberto.

De posse dos parâmetros estimados para setembro de 2005, é possível calcular o vetor de *duration* para cada um dos títulos. Uma explicação detalhada de como proceder a esses cálculos pode ser obtida em Nawalkha et al. (2005).

## 2.2. Imunização Baseada na Análise dos Componentes Principais

Uma segunda vertente, a imunização baseada na análise dos componentes principais, também está alicerçada na equalização das sensibilidades aos fatores de risco. Entretanto, tais fatores não são obtidos a partir de uma função de ajuste, mas sim por uma análise de componentes principais (ACP).

Ao contrário dos modelos representados por aproximações funcionais ou obtidos por intermédio de premissas de não-arbitragem ou equilíbrio, na análise de componentes principais não há uma definição *a priori* dos fatores de risco. A assunção básica é a de que é possível detectar os fatores capazes de explicar parcela significativa da variabilidade dos retornos dos títulos, por meio de um procedimento de análise multivariada de dados conhecido como análise de fatores.

No caso específico da estrutura a termo, a análise busca estimar os componentes mais representativos das alterações no amplo espectro das taxas de juros representadas. De posse de uma série de dados sobre a ETTJ do mercado americano, Litterman e Scheinkman (1991) identificam três fatores ortogonais como os responsáveis pela maior parte (aproximadamente 98%) dos movimentos da estrutura a termo da taxa de juros americana: movimentos paralelos (nível), mudanças na inclinação e alterações na curvatura. Segundo Varga e Valli (2001), esses mesmos fatores respondem por 94,3% dos movimentos da ETTJ no mercado brasileiro.

O método baseado em componentes principais possui a vantagem de identificar os fatores explicativos das variações da curva de juros, fazendo uso de dados reais. Entretanto, o foco de virtude é ao mesmo tempo responsável pela principal deficiência do modelo, ao tornar a análise dependente da amostra. As aproximações funcionais padecem de deficiência semelhante, embora os fatores possam ser especificados de uma forma conveniente à análise engendrada pelo gestor de recursos.

Baseado no trabalho de Litterman e Scheinkman (1991), Barber e Copper (1996) sugerem a adoção de métodos de imunização alicerçados no *hedge* desses componentes principais. Partindo-se da premissa que a estrutura a termo se altera em múltiplas direções – e que a carteira só estará imunizada se prover proteção para cada uma das alterações de direção fundamentais – os autores sugerem a adoção da análise de componentes principais, já que “o único guia disponível para determinar o conjunto de movimentos independentes é a própria história destes (BARBER e COOPER, 1996, p. 99)”.

Suponha que a estrutura a termo de taxas de juros  $r(s)$  se altere por um montante  $u(s)h$ , onde  $u(s)$  representa uma função conhecida  $u$  com prazo de vencimento  $s$  e  $h$  representa uma variável randômica. Assuma, ainda, que  $x(s)$  representa a alteração  $r(s) - r_0(s)$  na data  $s$ . Se as alterações nas taxas a vista de diferentes prazos de vencimento não forem perfeitamente correlacionadas, teremos:

$$x(s) = \sum_{k=1}^K u_k(s)h_k \quad (2)$$

Se  $n$  fluxos de caixa irão ocorrer entre  $t_1$  e  $t_n$ ,  $x(s)$  e  $u_k(s)$  podem ser expressos como vetores coluna de dimensão  $n$ . Em notação vetorial a equação (x) se transforma em:

$$X = \sum_{k=1}^K h_k U_k \quad (3)$$

O objetivo da estratégia é aproximar  $X$  – definido como o vetor de mudanças nas taxas a vista – por meio da combinação linear de um pequeno conjunto de mudanças fundamentais expressas pelos componentes  $u_k$ . Assim, tem-se:

$$X_t = \bar{X} + \sum_{k=1}^k h_{t,k} u_k + E_t \quad (4)$$

onde  $\bar{X}$  representa o vetor de médias de mudança das taxas *spot* e  $E_t$  o vetor de erros. Os parâmetros  $h_{t,k}$  são obtidos por meio da regressão de  $X_t$  em  $U_1, \dots, U_k$ . Por sua vez, a análise de componentes principais permite determinar  $U_1, \dots, U_k$  de forma a minimizar a variância do erro total.

Portanto, para a construção da carteira imunizada baseada na ACP é necessário extrair, do histórico de mudanças das taxas a vista, um pequeno número de componentes principais capazes de explicar a parte máxima da variância dessas mudanças.

Para tanto, foram utilizados dados referentes ao período compreendido entre outubro de 2002 e outubro de 2005. Foram selecionados 23 pontos distintos para a ACP, espaçados de forma não uniforme, com maior concentração no curto prazo. A ausência de uniformidade segue os padrões propostos por Barber e Copper (1996) e se justifica pela maior volatilidade da parte inicial da ETTJ.

Tabela 2 – Quatro Primeiros Autovetores



<i>Prazo de Vencimento (em anos)</i>	<i>U1</i>	<i>U2</i>	<i>U3</i>	<i>U4</i>
0,083	0,423	0,887	0,160	0,084
0,166	0,424	0,889	0,145	0,089
0,249	0,431	0,888	0,130	0,094
0,500	0,477	0,869	0,072	0,109
1,000	0,671	0,719	(0,113)	0,128
1,500	0,861	0,381	(0,322)	0,084
2,000	0,915	0,203	(0,348)	(0,008)
2,500	0,928	0,270	(0,234)	(0,076)
3,000	0,904	0,399	(0,069)	(0,112)
3,500	0,881	0,449	0,066	(0,127)
4,000	0,893	0,406	0,143	(0,131)
4,500	0,942	0,273	0,150	(0,117)
5,000	0,987	0,065	0,103	(0,085)
5,500	0,982	(0,163)	0,042	(0,044)
6,000	0,936	(0,346)	0,001	(0,008)
6,500	0,882	(0,469)	(0,013)	0,019
7,000	0,836	(0,547)	(0,011)	0,037
7,500	0,801	(0,596)	0,002	0,050
8,000	0,779	(0,623)	0,022	0,058
8,500	0,769	(0,634)	0,045	0,062
9,000	0,769	(0,631)	0,071	0,064
9,500	0,777	(0,616)	0,097	0,064
10,000	0,792	(0,591)	0,125	0,062

Fonte: Elaboração própria.

Nota: Os autovetores correspondem aos coeficientes de cada um dos componentes principais, podendo ser compreendidos como a importância relativa de cada variável em relação aos componentes principais.

A cada fator  $U_k$  corresponderá uma medida de *duration*  $D_k$  definida por:

$$D_k = \sum_{i=1}^N W_t C_i u_k(t_i) t_i / P_{i(0)} \quad (5)$$

onde  $W_t$  representa o fator de desconto que traz a valor presente o valor do cupom a ser pago em  $t$ . Definindo-se  $D_k^A$  e  $D_k^P$  como a *duration* do ativo e do passivo, respectivamente, alcança-se a imunização mediante a escolha de ativos que viabilizem a igualdade entre  $D_k^A$  e  $D_k^P$ .

Tabela 3 – Poder Explanatório do Modelo

<i>Componente</i>	<i>Autovalor</i>	<i>% Variância</i>	<i>% Cumulativo</i>
1	14,897	64,768	64,768
2	7,44	32,346	97,114
3	0,458	1,991	99,105
4	0,157	0,682	99,787

Fonte: Elaboração própria.

Nota: O autovalor representa a quantidade de variância explicada por um fator. A variância total é igual a 23,00.

### 2.3. Imunização Baseada em Choques Arbitrários

Na imunização baseada em choques arbitrários, o procedimento de imunização não está necessariamente associado a uma forma funcional específica da ETTJ. Nesse sentido, busca-se imunizar uma carteira de ativos em um ambiente de choques arbitrários sobre a curva de taxa de juros.

Fong e Vasicek (1984) foram os primeiros a oferecer uma solução nesse contexto, baseada no conceito de dispersão ao redor da *duration*. A hipótese básica do modelo consiste na divisão do risco de taxa de juros em dois componentes básicos: a magnitude da alteração sofrida pela estrutura a termo e o tipo de título (ou conjunto de títulos) exposto a essa modificação. O segundo termo representa uma medida de risco de imunização. A minimização desse risco busca reduzir a variabilidade do valor de um título em função de movimentos aleatórios das taxas de juros.

Nawalkha et al. (2003) propuseram um método generalizado para o *hedge* do risco de taxa de juros em um ambiente de choques não paralelos e arbitrários da estrutura a termo onde não há imposição de limites à extensão dos choques. Ao contrário do modelo de Fong e Vasicek, os autores não assumem que o fluxo de caixa oriundo dos títulos tenha de ser necessariamente positivo, ou seja, permite-se a venda a descoberto. Assim, é possível:

a) Derivar o modelo do vetor  $M$  generalizado para título  $i$ , ou seja, uma série de medidas de risco de imunização de ordem  $m$ , descritas por:

$$M_i^m = \left[ \sum_{t=1}^n C_t \cdot W_t \cdot [g(t) - g(H)]^m / P_0 \right] \quad (6)$$

onde  $C_t$  representa o cupom em  $t$ ,  $W_t$  a função que traz o cupom a valor presente, e  $g(t)$  representa uma função polinomial que associa um expoente  $\alpha$  ao prazo  $t$  de cada fluxo de caixa oriundo dos títulos em carteira. O valor de  $\alpha=1$  corresponde ao caso clássico onde a distância entre o prazo de vencimento de cada fluxo de caixa e o horizonte de planejamento é elevada à potência inteira. Se definirmos  $0 < \alpha < 1$ , podemos creditar um maior peso aos fluxos de curto prazo, garantindo uma melhor imunização caso as taxas de juros de curto prazo se mostrem mais voláteis que as de longo prazo;

b) Igualar as medidas de risco a zero, independentemente do uso de títulos sem cupom.

O vetor  $M$  de medidas de risco pode ser especialmente interessante para aplicação no caso brasileiro, já que as taxas reais de curto prazo são mais voláteis que as de longo prazo. Assim, é de esperar uma performance mais eficiente dos modelos que contemplem  $0 < \alpha < 1$ . Matematicamente, esse intervalo garante que, dada a função polinomial  $g(t) = t^\alpha$ , a razão  $g(s)^m / g(t)^m$  seja maior que  $s^m / t^m$  para um prazo de vencimento  $s > t$ . Intuitivamente, a definição desse intervalo pode ser compreendida como a determinação de que a volatilidade da parte inicial da ETTJ terá maior ponderação. Para efeito desse artigo, serão construídas carteiras com  $\alpha$  igual a 0,25, 0,50, 0,75 e 1.

### 3. A Comparação entre os Modelos de Imunização

O primeiro passo no sentido de comparar os modelos de imunização consiste na estimação da ETTJ em um dado momento. Na medida em que o mercado brasileiro não conta com títulos sem cupom de longo prazo, é necessário calcular as taxas à vista a partir de títulos com cupom, por meio da técnica de *bootstrapping*.

Posteriormente, é preciso obter taxas de juros para uma série de prazos distintos, a partir de apenas alguns pontos. Normalmente, utiliza-se algum procedimento de interpolação, o que reduz a estimação da ETTJ a um exercício de cálculo numérico. Para efeito desse artigo, o cômputo das taxas à vista foi realizado por meio da utilização de *cubic splines*. As taxas de juro a termo resultantes desse tipo de ajuste variam suavemente ao longo do tempo e fazem mais sentido econômico do que as calculadas por métodos alternativos como, por exemplo, a capitalização das taxas a termo.

Para a simulação de curvas futuras condizentes com as expectativas de mercado obtidas a partir da estrutura a termo inicial, foi utilizado o modelo de Black, Derman e Toy (1990). Embora não necessariamente o mais realista, tal modelo goza de grande aceitação no mercado (LEVIN, 2004) e pode ser implementado de forma relativamente simples (apresenta rotinas de implementação predefinidas em MATLAB). Ademais, o modelo BDT não exige a definição *a priori* de uma taxa de juros real de equilíbrio, já que o processo de reversão à média não é tratado de forma explícita. Essa característica é bastante importante, na medida em que não existe consenso sobre qual seria essa taxa de equilíbrio no caso brasileiro. O fato da reversão à média ser endógena ao modelo, ou seja, determinada a partir dos parâmetros de entrada, resulta na vantagem adicional de que as taxas de juros não podem tornar-se negativas.

A principal deficiência do BDT se consubstancia na associação a apenas uma fonte de incerteza, o que instigou Heath, Jarrow e Morton (1992) a propor uma extensão do método, definindo um modelo lognormal de dois fatores. Entretanto, essa deficiência não parece ser demasiadamente restritiva, “uma vez que o método unifatorial implica todas as taxas movendo-se na mesma direção, mas não na mesma intensidade. A ETTJ não possui, como eventualmente se supõe, uma mesma forma sempre (HULL, 2000, p. 565)”.

Originalmente o modelo BDT foi derivado em tempo discreto, fazendo uso de uma árvore binomial com probabilidades idênticas de movimentos para cima e para baixo do preço do ativo-objeto. De modo geral, a aproximação discreta para a construção de uma árvore binomial procura aproximar a equação diferencial estocástica do ativo-objeto, tomando-se intervalos de tempo  $\Delta t$ .

Definido o número de passos, o valor do ativo financeiro é calculado por meio da “indução para trás”. Para cada título do Tesouro foi utilizada uma árvore com 12 passos e estrutura a termo da volatilidade consistente com o horizonte de análise.

Embora a estrutura a termo da volatilidade das taxas de juros vigente seja observável (além de representar um *input* de suma importância do modelo) é interessante confrontar o tipo de variação que se observa no preço do ativo financeiro quando o processo de simulação da ETTJ parte de estruturas a termo da volatilidade distintas. No limite, o que se está tentando observar é como e em que profundidade as diferentes árvores binomiais obtidas irão influenciar o ativo e o passivo da entidade de previdência complementar.

Por simplicidade, adotou-se um modelo *ad hoc* para a volatilidade, desconsiderando-se modelos de volatilidade condicional. O modelo de simulação contempla uma volatilidade da volatilidade, aqui definida como o desvio padrão da volatilidade calculada para períodos subsequentes de 12 meses cada. Trata-se, portanto, do cálculo do desvio padrão da volatilidade a partir de uma janela móvel com um número fixo de observações. Foram realizadas 1000 simulações para cada um dos títulos disponíveis para aquisição. Para cada simulação foi imputada uma estrutura a termo da volatilidade distinta. Cada ponto dessa estrutura foi calculado a partir de uma distribuição normal com média igual à volatilidade vigente para aquele termo e desvio padrão obtido a partir do cômputo da volatilidade da volatilidade. Assim, foi possível obter 1000 diferentes preços em  $t_0$  e calcular o efeito líquido sobre cada uma das estratégias de alocação de ativos.

Basicamente, a construção de uma carteira imunizada envolve dois passos:

a) o cômputo do vetor de risco dos títulos e, por conseguinte, do *portfolio*, por meio da equação:

$$M_{port} = M_i \times p_i \quad (7)$$

onde  $M_i$  representa o vetor de risco do título  $i$  e  $p_i$  o peso desse título na carteira;

b) a resolução de um problema de otimização.

A otimização, por sua vez, contempla:

b.1) uma função objetivo que maximiza a diversificação da carteira de ativos nos moldes propostos por Nawalkha et al. (2003) e Soto (2004):

$$\text{Min} \sum_{i=1}^j p_i^2 \quad (8)$$

b.2) uma restrição que condicione a igualdade do vetor de risco do *portfolio* ao vetor de riscos do passivo;

b.3) uma restrição que obrigue que o somatório das participações dos títulos presentes na carteira seja igual a 100%.

A tabela 4 retrata os títulos utilizados na análise. Os vencimentos originais foram ligeiramente alterados com vistas a simplificar as simulações. Assim, todos os títulos pagam cupons na mesma data. Ressalte-se que todos os preços foram recalculados com base na curva *spot* original, de tal forma que os fluxos calculados são idênticos aos que de fato ocorreriam na eventual existência dos títulos.

Tabela 4 – Títulos Utilizados

<i>Título</i>	<i>Vencimento Original</i>	<i>Novo Vencimento</i>
NTN-C	1/12/2006	1/10/2006
NTN-C	1/4/2008	1/10/2008
NTN-C	1/3/2011	1/10/2011
NTN-C	1/7/2017	1/10/2017
NTN-C	1/4/2021	1/10/2021
NTN-C	1/1/2031	1/10/2030

Fonte: Elaboração própria.

Embora o evento morte tenha natureza não-determinística, os fluxos de saída são normalmente tratados como fluxos predeterminados, sendo obtidos a partir da aplicação de tábuas de mortalidade. Os fluxos, embora fictícios, serão realistas, tendo sido computados por

meio da aplicação das tábuas de mortalidade de 2004 para os sexos feminino e masculino, disponibilizadas pelo IBGE.

Assume-se que: a) a entidade de previdência complementar concede o benefício da renda vitalícia para um grupo de 500 mulheres e 500 homens, todos com idade igual a 65 anos no momento da aposentadoria; e b) os benefícios não serão revertidos a novos beneficiários após a morte do participante. A data de corte é representada pelo mês de outubro de 2005 e estipulou-se um salário anual fixo e uniforme da ordem de R\$ 50.000,00. O fluxo aproximado de dispêndio da EPC para os próximos dez anos é descrito na tabela 5.

Tabela 5 – Dispêndio da EPC

<i>Ano</i>	<i>Mulheres</i>	<i>Homens</i>	<i>Total</i>
2006	24.592.700,00	24.367.875,00	48.960.575,00
2007	24.152.925,00	23.691.300,00	47.844.225,00
2008	23.676.300,00	22.964.150,00	46.640.450,00
2009	23.157.375,00	22.178.750,00	45.336.125,00
2010	22.590.900,00	21.327.925,00	43.918.825,00
2011	21.973.200,00	20.405.975,00	42.379.175,00
2012	21.300.525,00	19.408.850,00	40.709.375,00
2013	20.567.150,00	18.332.650,00	38.899.800,00
2014	19.766.450,00	17.174.300,00	36.940.750,00
2015	18.891.750,00	15.930.025,00	34.821.775,00

Fonte: Elaboração própria.

Nota: Dispêndio calculado a partir da multiplicação do montante salarial pelas probabilidades de sobrevivência.

O primeiro indicador de eficiência, a exposição líquida ao risco, é aqui definido como a mediana do desvio absoluto entre o valor presente dos fluxos futuros do ativo e do passivo, descontados pelas taxas obtidas no processo de modelagem da ETTJ.

As carteiras imunizadas obtidas apresentarão graus distintos de diversificação. As restrições adicionais impostas à otimização pelos modelos não-tradicionais de imunização terão como provável consequência uma menor diversificação da carteira e uma maior utilização de vendas a descoberto. Até o presente momento, estas últimas só são admitidas no âmbito das instituições financeiras e demais instituições autorizadas a funcionar pelo Banco Central do Brasil (Resolução CMN nº 2950/2002), o que obriga o gestor a replicá-las, ainda que parcialmente, por meio da utilização de derivativos, embora esses instrumentos não façam parte da análise contida nesse artigo. Entretanto, ao incluir instrumentos derivativos, o gestor estará agregando novos fatores de risco à sua carteira. Além do risco de base, devem ser levados em consideração a dificuldade em se realizar contratos durante o prazo e no montante necessários à estratégia, dados os limites impostos pela BM&F, e a eventual incapacidade de replicar a operação nos moldes requeridos. Assim, o segundo indicador de eficiência será

REAd – Edição 62 Vol 15 N° 1 jan-abr 2009

representado pela média da soma dos quadrados dos pesos de cada ativo no *portfolio*. Uma média da soma dos quadrados alta representa um forte indício de dificuldade na construção da carteira com o nível de restrições imposto.

Os custos de transação são formados por um componente fixo, a corretagem, e por um componente variável, a diferença entre o preço de compra e de venda de um título (*bid-ask spread*). A parcela fixa dos custos de transação é representada pelo custo de utilização do sistema especial de liquidação e custódia (SELIC) acrescido de um spread cobrado pela instituição financeira. Normalmente, trata-se de um custo pouco significativo. A parte variável depende basicamente das condições de mercado, sendo comum verificar um incremento em situações de estresse, o que pode tornar o “rebalanceamento” de carteiras pouco diversificadas ainda mais oneroso. O cenário base – conservador – refere-se à média do *bid-ask spread* verificada no ano de 2005, na compra e venda de títulos efetuada pelo Tesouro Nacional no ambiente do Tesouro Direto, e é igual a 0,06%.

Basicamente, existem duas formas de se conduzir a análise: a) calculando-se os valores futuros das carteiras em cada momento (de  $t_0$  até  $t_n$ ) e comparando-os ao montante necessário para o pagamento dos benéficos de responsabilidade da EPC; b) computando o valor presente líquido das carteiras (valor presentes dos ativos menos valor presente do passivo) nos moldes propostos por Serpa (2003).

A primeira perspectiva normalmente está associada à comparação da rentabilidade do *portfolio* ao retorno necessário para o pleno cumprimento das obrigações da EPC. Esse tipo de indicador parece apropriado ao exame em questão, uma vez que a construção de carteiras imunizadas representa a busca pela obtenção de uma taxa de retorno idêntica à do *benchmark*, que nesse caso é representado pelo passivo da EPC.

Ocorre que a formatação da análise sob essa perspectiva aumenta significativamente o número de simulações necessárias a cada período que se acrescenta ao horizonte de investimento. Isso acaba por praticamente inviabilizar a análise para horizontes de médio e longo prazo, reduzindo a viabilidade de sua utilização em estudos que envolvam entidades de previdência. De fato, os estudos comparativos de Soto (2004) e Bravo e da Silva (2006) restringem-se a um horizonte de investimento de 3 e 4 anos, respectivamente.

Nesse caso, a segunda alternativa mostra-se mais apropriada e será a utilizada nesse artigo. O cômputo do valor presente líquido da estratégia reduz o volume de simulações e concentra toda a análise em  $t_0$ , através do cômputo de um indicador de erro de aderência *ex-ante* – nos moldes definidos por Golub e Tilman (2000) – que penaliza simetricamente

desvios negativos ou positivos. Infelizmente, esse benefício é acompanhado por um custo. Sob essa perspectiva, não é possível calcular o custo de transação de forma direta. Nesse sentido, tais custos serão obtidos a partir do custo associado à transformação da carteira imunizada com base no horizonte de investimento subsequente ao horizonte no qual se apura o custo. Assim, por exemplo, o custo de transação referente a cada uma das carteiras em 2006 será igual a duas vezes (rebalanceamento semestral) o custo de transformação do *portfolio* de 2007 no *portfolio* de 2006, e assim sucessivamente.

Finalmente, é preciso definir a ponderação de cada um dos três indicadores de eficiência. A decisão sobre o peso de cada um dos indicadores é de suma importância, uma vez que a mesma deve levar em consideração as idiossincrasias de cada EPC e seus efeitos sobre a administração de recursos da entidade. Embora exista um número ilimitado de possibilidades a serem definidas pelo gestor, foram adotadas três alternativas distintas de ponderação as quais denominaremos cenários I, II e III, respectivamente.

No cenário I, a ponderação da exposição líquida ao risco, da diversificação e do custo de transação é de 70%, 25% e 5%, respectivamente. Os cenários II e III negligenciam os custos de transação e a ponderação foi fixada em 70/30 e 50/50, respectivamente. Os pesos associados a cada um dos indicadores de eficiência foram escolhidos de forma *ad hoc*, baseados em uma percepção preliminar do que seria razoável do ponto de vista do gestor de uma EPC. Entretanto, as entidades de previdência complementar têm perfil bastante heterogêneo, o que certamente irá se refletir sobre a forma de ponderação do gestor no que diz respeito aos indicadores e, por conseguinte, sobre os resultados de cada estratégia de imunização. Dessa forma, é fundamental que se compreenda que os resultados aqui apresentados devem ser analisados sob uma perspectiva mais ampla, que contemple as diretrizes individuais das EPC para a gestão do risco de taxa de juros.

A tabela 6 traz os valores referentes aos modelos mais eficientes em cada um dos cenários e horizontes de investimento. O modelo exponencial de um fator (EXP 1) é idêntico à imunização tradicional e equivale à base 100. Um valor inferior a 100 significa que o modelo é mais eficiente que esse *benchmark*.

Tabela 6 - Eficiência Média Ponderada



Ano	Modelo de Imunização	Cenário I	Cenário II	Cenário III
2006	EXP 4	95,05	-	-
	CA 4 (0,75)	-	70,40	-
	ACP 1	-	-	93,05
2007	CA 1 (0,50)	89,31	85,38	83,13
2008	CA 1 (0,75)	93,93	92,60	-
	CA 1 (0,50)	-	-	90,23
2009	EXP 1	100,00	100,00	100,00
2010	EXP 1	100,00	100,00	-
	CA 1 (0,75)	-	-	98,72
2011	EXP 1	100,00	100,00	100,00
2012	EXP 1	100,00	100,00	100,00
2013	EXP 1	100,00	100,00	100,00
2014	EXP 1	100,00	100,00	100,00
2015	EXP 1	100,00	100,00	100,00

Fonte: Elaboração própria.

Nota: Os termos EXP, ACP e CA correspondem aos modelos de imunização baseados em Willner (1996), Barber e Cooper (1996) e Nawalkha et al. (2003), respectivamente. O número associado a cada termo representa a quantidade de fatores. Os valores decimais entre parênteses representam o valor de  $\alpha$  escolhido para os modelos baseados em choques arbitrários.

A tabela 7 retrata os modelos mais eficientes de acordo com cada um dos três cenários, além de explicitar o modelo com menor exposição líquida ao risco, maior diversificação e menor custo de transação.

Levando-se em consideração apenas a exposição líquida ao risco, o efeito dimensionalidade não foi verificado em todo o horizonte de estudo. Em metade dos dez anos (2008, 2009, 2010, 2012 e 2015), modelos de apenas um fator se mostraram mais eficientes. Apenas no curto prazo, há evidências inequívocas de que a dimensão, até o limite de três fatores, é um elemento de redução de risco. A importância das variações não paralelas da ETTJ diminui sensivelmente no médio e longo prazo. Assim, as conclusões obtidas por Soto (2004) e Bravo e da Silva (2006) devem ser examinadas com cuidado, na medida em que há uma clara influência do horizonte de investimento sobre o desempenho dos modelos multifatoriais.

Tabela 7 – Modelos Mais Eficientes

Ano	ELR	Diversificação	CT	Cenário I	Cenário II	Cenário III
2006	CA 3 (0,75)	ACP 1	EXP 1	EXP 4	CA 4 (0,75)	ACP 1
2007	EXP 2	ACP 1	EXP 1	CA 1 (0,50)	CA 1 (0,50)	CA 1 (0,50)
2008	CA 1 (0,75)	CA 1 (0,25)	EXP 1	CA 1 (0,75)	CA 1 (0,75)	CA 1 (0,50)
2009	EXP 1	CA 1 (0,50)	ACP 1	EXP 1	EXP 1	EXP 1
2010	EXP 1	CA 1 (0,75)	EXP 1	EXP 1	EXP 1	CA 1 (0,75)
2011	ACP 2	EXP 1	CA 2 (0,25)	EXP 1	EXP 1	EXP 1
2012	ACP 1	EXP 1	CA 1 (0,25)	EXP 1	EXP 1	EXP 1
2013	CA 3 (0,50)	EXP 1	CA 1 (0,25)	EXP 1	EXP 1	EXP 1
2014	CA 3 (0,50)	EXP 1	ACP 1	EXP 1	EXP 1	EXP 1
2015	EXP 1	EXP 1	EXP 1	EXP 1	EXP 1	EXP 1

Fonte: Elaboração própria.

Nota: Os termos EXP, ACP e CA correspondem aos modelos de imunização baseados em Willner (1996), Barber e Cooper (1996) e Nawalkha et al. (2003), respectivamente. O número associado a cada termo representa a quantidade de fatores. Os valores decimais entre parênteses representam o valor de  $\alpha$  escolhido para os modelos baseados em choques arbitrários. Os termos ELR e CT correspondem à exposição líquida ao risco e o custo de transação respectivamente. O modelo exponencial de um fator (EXP 1) é idêntico à imunização tradicional.

A questão da diversificação também influencia sobremaneira os resultados. As carteiras baseadas em medidas multidimensionais são normalmente mais alavancadas. A alavancagem, por sua vez, acaba por impactar o desvio absoluto e, por conseguinte, tornar a estratégia menos eficiente.

Igualmente, a presença de custos de transação altera de forma expressiva a análise, uma vez que a estratégia baseada na imunização tradicional é significativamente mais barata, especialmente em horizontes de investimento mais longos. A influência é especialmente clara no caso dos modelos baseados em choques arbitrários de terceira e quarta ordem. Essa constatação é corroborada por Agca (2005) por meio da afirmação de que a escolha do método de imunização passa a ser uma função do horizonte de investimento, uma vez que os custos de transação impactam profundamente as carteiras imunizadas no médio e longo prazo.

Se considerarmos os cenários construídos a partir de ponderações dos três indicadores de eficiência, a imunização tradicional se mostra indubitavelmente superior do quarto ao décimo ano. A explicação para tamanha superioridade parece ser a fusão dos argumentos explicitados acima: as carteiras obtidas a partir do modelo tradicional, embora eventualmente expostas a um risco de taxa de juros marginalmente superior, são significativamente mais diversificadas, menos alavancadas e menos dispendiosas. O somatório desses fatores é plenamente favorável às estratégias tradicionais.

Embora as restrições impostas ao processo de otimização não incluam a obrigatoriedade de inclusão de um título de vencimento próximo ao horizonte de investimento, essa é uma característica que pode ser observada na grande maioria das carteiras formatadas nos moldes da imunização tradicional. Nesse sentido, os resultados são

consistentes com os obtidos por Bravo e da Silva (2006). Segundo os autores, a simples inclusão de um título com vencimento próximo ao horizonte de investimento torna a estratégia de imunização tradicional a mais eficiente dentre todas as estratégias analisadas.

#### **4. Conclusão**

A solvência econômica de uma EPC – caracterizada pela situação onde o total dos haveres supera o total das obrigações – deve ser acompanhada da solvência financeira – que não é assegurada pela solvência econômica e expressa a situação em que há disponibilidade de recursos líquidos para os pagamentos correntes das obrigações. Os métodos de imunização descritos buscam exatamente a garantia de que ambas serão alcançadas. O julgamento do desempenho de gestores baseado no retorno obtido por índices de mercado que negligenciam a questão da sensibilidade à taxa de juros tende a ser impróprio, na medida em que não guarda, necessariamente, relação direta com o passivo. Uma EPC com grande volume de benefícios a conceder no curto e médio prazo deve ter uma administração distinta de uma entidade cujos pagamentos encontram-se uniformemente distribuídos por 20 ou 30 anos.

A análise detalhada do desempenho comparado dos modelos de imunização, aplicados ao mercado brasileiro, demonstra que os modelos baseados na imunização tradicional são eficientes, especialmente se examinados sob as perspectivas complementares da dimensionalidade e do horizonte de investimento. Portanto, escolhida a imunização como método principal de gestão dos recursos, deve o gestor escolher entre um modelo multidimensional para horizontes mais curtos (com conseqüente rolagem até que se alcance o horizonte de investimento da EPC) ou um modelo unidimensional para horizontes mais distantes. Cada uma das estratégias tem prós e contras e a escolha final está necessariamente interligada aos aspectos intrínsecos de cada EPC.

A análise se baseou em simulações da evolução da ETTJ para computar a exposição ao risco de cada uma das carteiras imunizadas. Dessa forma, foi possível restringir o efeito negativo da reduzida disponibilidade de dados sobre preços no mercado secundário de títulos públicos federais, tornando a análise mais robusta. Análises futuras podem identificar a magnitude das alterações decorrentes da expansão (ou contração) da janela de dados.

Embora a teoria financeira moderna seja fartamente recheada de modelos que buscam descrever movimentos futuros das taxas de juros, esses não são explicitamente capturados pelos métodos de imunização analisados. Nesse sentido, os processos de imunização

examinados são “míopes”. Uma alternativa consiste na modelagem da incerteza referente à evolução da estrutura a termo das taxas de juros por meio de um processo estocástico e da inclusão desse na análise para a formatação da carteira de ativos. Significativamente mais demandante em termos computacionais, essa alternativa inclui a modelagem estocástica de forma associada à gestão de renda fixa, tratando a questão a partir de modelos de otimização dinâmica, tais como os desenvolvidos por Zenios et al. (1998) e Boulier et al. (2001). Os estudos empíricos sobre os ganhos de performance desse tipo de modelagem aplicada à gestão do risco de taxa de juros são inconclusivos (AGCA, 2005), havendo necessidade de pesquisa adicional sobre o efeito desse tipo de alteração.

Não obstante, a comprovação de que os modelos baseados no conceito tradicional de *duration* são eficientes na maioria dos cenários utilizados, principalmente no médio e longo prazo, representa um forte incentivo à utilização, pelos gestores de EPC, de *benchmarks* nos moldes dos índices IMA produzidos pela ANDIMA, com eventuais modificações no sentido de substituir o prazo de vencimento médio pela *duration*.

## REFERÊNCIAS

AGCA, S. The performance of alternative interest rate risk measures and immunization strategies under a Heath-Jarrow-Morton framework, **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 40, p. 645-669, 2005.

BARBER, J.R.; COPPER, M.L. Immunization using principal component analysis. **Journal of Portfolio Management**, v. 23, p. 99-105, 1996.

BARRETT, W.B.; GOSNELL, T.F.; HEUSON, A.J. Term-structure factor shifts and economic news, **Financial Analysts Journal**, v. 60, p.81-94, 2004.

BLACK, F.; DERMAN, E.; TOY, W. A one-factor model of interest rates and its application to Treasury bond options, **Financial Analysts Journal**, v. 46, p. 33-39, 1990.

BOULIER, J.F.; HUANG, S.; TAILLARD, G. Optimal management under stochastic interest rates: the case of a protected defined contribution pension fund, **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 28, p. 173-189, 2001.

BRAVO, J.M.V.; da SILVA, C.M.P. Immunization using a stochastic-process independent multi-factor model: The Portuguese experience, **Journal of Banking and Finance**, v.30, p. 133-156, 2006.

CHAMBERS, D.R.; CARLETON, W.T.; McENALLY, R.W. Immunizing default-free bond portfolios with a duration vector, **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v.23, p. 89-104, 1988.

FONG, H.G.; VASICEK, O.A. A Risk Minimizing Strategy for Portfolio Immunization, **The Journal of Finance**, v. 39, p. 1541-1546, 1984.

GOLUB, B.W.; TILMAN, L.M. **Risk Management: Approaches for Fixed Income Markets**, New York: John Wiley & Sons, 2000.

HEATH, D.; JARROW, R.; MORTON, A. Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation, **Econometrica**, v. 60, p. 77-105, 1992.

HULL, J. **Options, futures and other derivatives**, New Jersey: Prentice-Hall International, 2000.

LEVIN, A. Interest rate model selection, **The Journal of Portfolio Management**, v. 30, p. 74-86, 2004.

LITTERMAN, R.; SCHEINKMAN, J. Common factors affecting bond returns, **Journal of Fixed Income**, v. 1, p. 54-61, 1991.

NAWALKHA, S.K.; SOTO, G.M.; BELIAEVA, N.A. **Interest Rate Risk Modeling**, New Jersey: John Wiley & Sons, 2005.

NAWALKHA, S.K.; SOTO, G.M.; ZHANG, J. Generalized M-vector models for hedging interest rate risk, **Journal of Banking & Finance**, v. 27, p. 1581-1604, 2003.

NELSON, C.R.; SIEGEL, A. F. Parsimonious modeling of yield curves, **Journal of Business**, v. 60, p. 473-489, 1987.

PRISMAN, E.Z.; SHORES, M.R. Duration measures for specific term structure estimations and applications to bond portfolio immunization. **Journal of Banking and Finance**, v. 12, p. 493-504, 1988.

REDINGTON, F.M. Review of the principles of life-office valuations, **Journal of the Institute of Actuaries**, p. 286-340, 1952.

SERPA, M.C.S. O papel do gestor de riscos em fundos de pensão, In: DUARTE, A.; VARGA, G. (Org.). **Gestão de Riscos no Brasil**, Rio de Janeiro: Financial Consultoria, 2003, p. 693-707.

SOTO, G.M. Duration models and IRR management, **Journal of Banking and Finance**, v.28, p. 1089-1110, 2004.

VARGA, G.; VALLI, M. Movimentos da estrutura a termo da taxa de juros brasileira e imunização, **Economia Aplicada**, v.5, 2001.

WILLNER, R. A new tool for portfolio managers: level, slope and curvature durations, **Journal of Fixed Income**, v. 5, p. 48-59, 1996.

ZENIOS, S.A.; HOLMER, M.R.; McKENDALL, R.; VASSIADOU, C. Dynamic models for fixed-income portfolio management under uncertainty, **Journal of Economic Dynamics and Control**, v. 22, p. 1517-1541, 1998.