

Ponto de Fermat: uma solução computacional

Lucas V. Araujo¹, Matheus F. Nascimento¹, Matheus H. Fontenele¹,
Odilon F. Damasceno Neto¹, Francisco d. P. S. d. Araujo Junior¹

¹Universidade Estadual do Piauí (UESPI)
Campus Alexandre Alves de Oliveira
CEP 64200-001 – Parnaíba – PI – Brazil

lucas.vieira.ar@disroot.org

{fernandes.matheuscp, matheus.henriquefont}@gmail.com

odilondamasceno@protonmail.com, pjhatata@hotmail.com

Abstract. *Fermat's Point is a mathematical problem instigated even in the 17th century, which can be solved using advanced computational algorithms, such as minimal networks, but as well as many other complex problems, this can be solved in a simpler way, even if the implementation becomes more laborious. With this in mind, in this article, we seek to find a procedure to build Fermat's point, making use of tools from the computational and mathematical field, by applying algebraic methods of analytical geometry in an algorithm.*

Resumo. *O Ponto de Fermat é um problema matemático instigado ainda no século XVII, que pode ser resolvido usando algoritmos computacionais avançados, tais como redes minimais, porém assim como muitos outros problemas complexos, este pode ser solucionado de maneira mais simples, ainda que a implementação torne-se mais trabalhosa. Tendo isso em mente, no presente artigo, busca-se encontrar um procedimento para construir o ponto de Fermat, fazendo o uso de ferramentas do campo computacional e matemático, ao aplicar métodos algébricos da geometria analítica em um algoritmo.*

Introdução

Os computadores sempre foram utilizados para facilitar atividades outrora difíceis ou incômodas. O primeiro computador, utilizado na segunda guerra mundial, tinha por objetivo fazer cálculos matemáticos, tais como a trajetória de um projétil. Com o passar do tempo, o uso passou a ser comercial, focado na venda para empresas, pois eram robustos demais para serem comercializados com o público em geral. A partir de 1981, os computadores começaram a ser vendidos para todos, tornando-se ferramentas de pesquisa, trabalho e lazer [GADELHA 2009].

Segundo [LOCKWOOD et al. 2019], nas últimas décadas, com novas ferramentas tecnológicas e recursos sendo desenvolvidos regularmente, houve um grande aumento no interesse geral sobre computação e matemática.

A evolução tecnológica trouxe uma maior facilidade no ramo das ciências, ao transformar problemas, representando-os matematicamente e simulando o conhecimento humano em linhas de código, fazendo com que um computador, com maior capacidade de processamento, os resolva.

No século XVII, o matemático francês Pierre de Fermat propôs um desafio que consistia em, dado três pontos num plano, vértices de um triângulo, achar um quarto ponto cuja soma das distâncias até cada um dos três outros pontos dados seja mínima [Atractor 2000]. Diversos foram os matemáticos que, nos anos posteriores, estudaram esse problema e suas implicações.

O objetivo do presente trabalho foi o de desenvolver um método computacional para solucioná-lo e mostrar a abstração por trás do Ponto de Fermat, sendo resolvido por meios matemáticos e computacionais, obtendo um algoritmo que permita encontrar o ponto, tentando ser o mais próximo do resultado real possível.

MATERIAIS E MÉTODOS

Para o desenvolvimento deste trabalho, foram empregadas expressões matemáticas baseadas em álgebra e geometria analítica, de forma que estas pudessem ser sintetizadas em um algoritmo computacional. Com base nos resultados obtidos, partiu-se para softwares livres, tais como wxMaxima¹ para desenvolvimento de expressões, e GeoGebra² para o fornecimento de dados e verificação de soluções. O algoritmo aqui descrito foi inicialmente implementado em linguagem C e, posteriormente, reescrito em Python³.

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Será utilizado aqui a seguinte definição: dados os pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ pertencentes a um mesmo plano cartesiano, encontrar um ponto $F(x_F, y_F)$ para o qual o somatório das distâncias $AF + BF + CF$ é mínimo.

De forma geral, deve-se supor que os três pontos dados formarão um triângulo. No caso trivial em que A, B e C são colineares e $B \in AC$, a solução para este problema é o ponto B [ARAUJO Junior 2018].

Ao longo dos anos foram desenvolvidos diversos métodos geométricos para resolver este desafio. Apresentaremos aqui dois dos mais conhecidos.

Existem, no entanto soluções algébricas que apresentam resultado bastante satisfatório, como apresentado por [ARAUJO Junior 2018] ou [Hajja 1994].

O MÉTODO DE TORRICELLI

Toricelli foi um dos primeiros a encontrar uma solução para o desafio de Fermat, ao utilizar intersecções entre círculos. Segundo [Atractor 2000], seu método consistia na seguinte sequência de passos:

Os três pontos são considerados como vértices de um triângulo euclidiano simples, como na figura 1. Em seguida, são construídos três triângulos equiláteros externos em suas arestas.

¹Interface de código livre para o sistema de álgebra computacional Maxima. Download: <https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/download.html>

²Aplicação interativa para cálculos geométricos, algébricos e estatísticos. Download: <https://www.geogebra.org/download>

³Linguagem de programação interpretada e de alto nível. Download: <https://www.python.org/downloads/>

Por último, são desenhadas as circunferências que circunscrevem esses triângulos equiláteros. Haverá então um ponto H (interno ao triângulo, caso seus ângulos internos não ultrapassem 120°) onde os círculos irão se interceptar. H é chamado de ponto de Fermat, ponto de Torricelli e, algumas vezes, ponto de Steiner. Veja na figura 3.

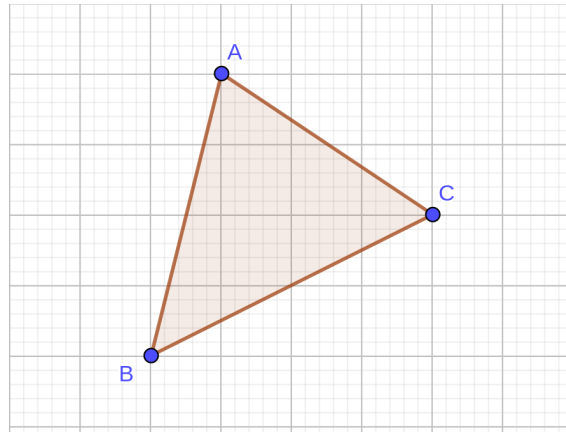


Figura 1. primeiro passo do método de Torricelli

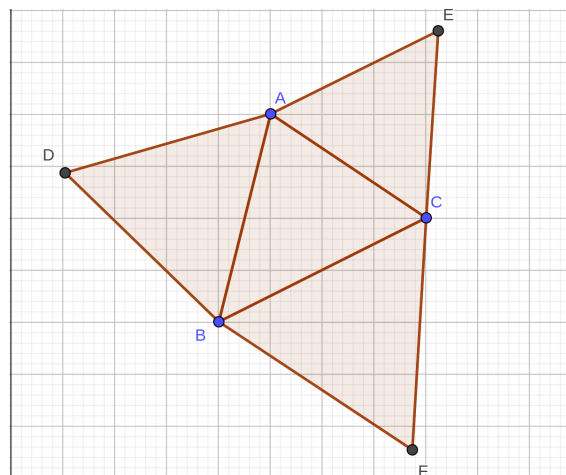


Figura 2. segundo passo do método de Torricelli

O MÉTODO DE SIMPSON

O matemático Thomas Simpson foi outro que encontrou um modo de construir o ponto de Fermat de forma geométrica. Neste método, os passos 1 e 2 são semelhantes aos de Torricelli, no entanto o terceiro consiste em uma abordagem mais simples, pois ao invés de procurarmos a intersecção entre três circunferências, procuramos a intersecção entre retas.

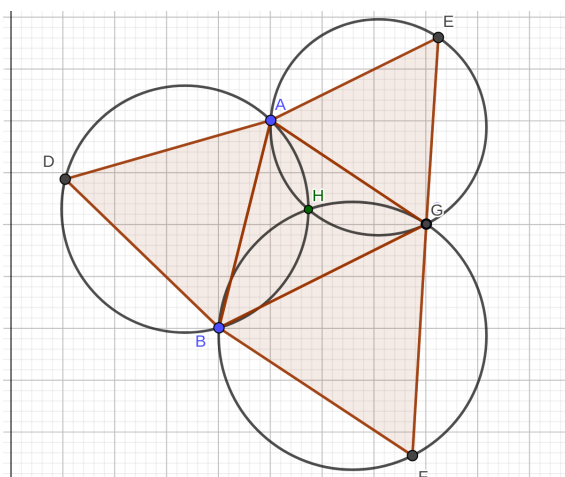


Figura 3. terceiro passo do método de Torricelli

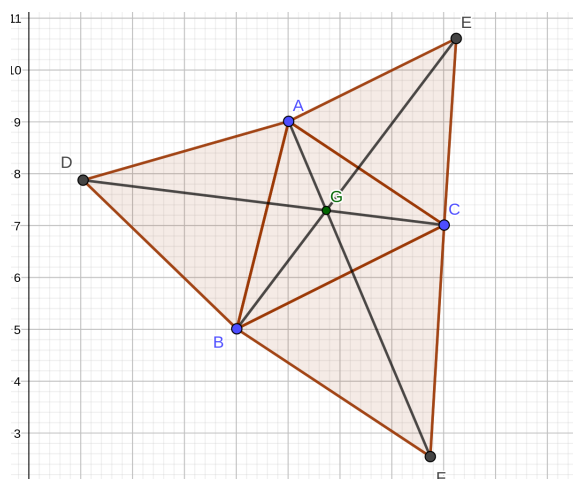


Figura 4. terceiro passo do método de Simpson

Tomando os três pontos como um triângulo euclidiano, são desenhados triângulos equiláteros em suas arestas e, em seguida, os segmentos de reta que passam pelo vértice externo do triângulo equilátero e pelo vértice oposto a ele no triângulo original.

Esses segmentos irão se interceptar num ponto G que equivale ao ponto H de Torricelli, o qual cumpre a condição de minimizar o somatório das distâncias até A, B e C.

FORMULAÇÃO ALGÉBRICA

Como foi visto, é bastante simples solucionar este problema aplicando-se algum dos métodos anteriormente citados, embora a precisão dos resultados possa, a primeira vista, parecer duvidosa em uma execução manual através de instrumentos como régua, esquadros e compassos. Mesmo ao utilizar softwares como o GeoGebra, ainda é necessário desenhar cada etapa até a resolução, o que em muitos casos mostra-se bastante inconveniente.

Para que seja possível a implementação computacional, devemos primeiro encontrar um modelo matemático que descreva o problema, de forma a eliminar a necessidade

de tais instrumentos e propiciar resultados igualmente confiáveis.

Com esse objetivo, foi utilizada uma expressão mais puramente matemática do procedimento criado por Simpson. Se os pontos dados forem colineares, apontamos como solução o ponto mais interno ao segmento que eles formam, caso contrário deve-se seguir a seguinte sequência de passos:

1. Obter as coordenadas do terceiro vértice de cada triângulo equilátero que seria desenhado nas arestas.
2. Obter a equação das retas que passam por cada um desses vértices e pelo vértice oposto do triângulo ABC.
3. Obter o ponto de intersecção entre essas retas.

Observe que os três segmentos de reta irão se interceptar em apenas um ponto, logo poderíamos obter o mesmo resultado com apenas dois deles.

O TERCEIRO VÉRTICE

Para descobrir as coordenadas do terceiro vértice conhecendo apenas os dois primeiros (e a distância entre eles, conseqüentemente) utilizamos a seguinte equação:

$$(P_1P_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

Essa fórmula, originada do clássico Teorema de Pitágoras, nos permite calcular a distância entre dois pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ a partir de suas coordenadas.

Pela definição de triângulo equilátero, sabemos que:

1. Todos os vértices possuem o mesmo ângulo, igual a 60° ;
2. Todas as arestas possuem mesmo comprimento.

Como exemplo encontraremos o vértice $D(x_D, y_D)$ de um triângulo equilátero ABD, supondo-se conhecidos os vértices $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.

Para a distância AD:

$$(AD)^2 = (x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2 \quad (1)$$

Para a distância BD:

$$(BD)^2 = (x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2 \quad (2)$$

Pela definição, sabemos que $AD = BD$. Logo podemos igualar as duas equações:

$$(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2 = (x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2$$

Expandindo o polinômio acima, encontramos a seguinte relação:

$$x_A^2 - 2x_Ax_D + x_D^2 + y_A^2 - 2y_Ay_D + y_D^2 = x_B^2 - 2x_Bx_D + x_D^2 + y_B^2 - 2y_By_D + y_D^2$$

Para simplificar, colocamos ambas as expressões do lado esquerdo e igualamos a zero.

$$(x_A^2 - 2x_Ax_D + y_D^2 + y_A^2 - 2y_Ay_D + y_D^2) - (x_B^2 - 2x_Bx_D + x_D^2 + y_B^2 - 2y_By_D + y_D^2) = 0$$

Simplificando, obtemos a equação (3) apresentada abaixo:

$$(-2x_A + 2x_B)x_D + (-2y_A + 2y_B)y_D + (y_A^2 - y_B^2 + x_A^2 - x_B^2) = 0 \quad (3)$$

Essa é uma equação do primeiro grau nas incógnitas x_D e y_D , na forma $ax + by + c = 0$, ou seja, a equação geral de uma reta no plano. Esta é a reta que passa pelo ponto médio entre A e B e pelo vértice D. É a partir dela que descobriremos as coordenadas de D.

Para isso, isolemos uma das incógnitas, definindo-a em função da outra. Veja a seguir:

$$y_D = \frac{-[(y_A^2 - y_B^2 + x_A^2 - x_B^2) + (-2x_A + 2x_B)x_D]}{-2y_A + 2y_B}$$

Vale lembrar que o denominador dessa expressão precisa ser um número real não-nulo. No exemplo acima, estamos supondo que $-2y_A + 2y_B \neq 0$, ou seja, é válida a desigualdade $y_A \neq y_B$, caso contrário deveríamos isolar x_D em função de y_D .

Agora, substituiremos o valor de y_D em (1):

$$(AD)^2 = x_A^2 - 2x_Ax_D + x_D^2 + y_A^2 - 2y_A \left[\frac{-((y_A^2 - y_B^2 + x_A^2 - x_B^2) + (-2x_A + 2x_B)x_D)}{-2y_A + 2y_B} \right] + \left[\frac{-((y_A^2 - y_B^2 + x_A^2 - x_B^2) + (-2x_A + 2x_B)x_D)}{-2y_A + 2y_B} \right]^2$$

Sabemos que a distância AD é igual a AB, logo podemos reescrever essa equação da seguinte forma:

$$x_A^2 - 2x_Ax_D + x_D^2 + y_A^2 - 2y_A \left[\frac{-((y_A^2 - y_B^2 + x_A^2 - x_B^2) + (-2x_A + 2x_B)x_D)}{-2y_A + 2y_B} \right] + \left[\frac{-((y_A^2 - y_B^2 + x_A^2 - x_B^2) + (-2x_A + 2x_B)x_D)}{-2y_A + 2y_B} \right]^2 - (AB)^2 = 0$$

Com a ajuda do programa wxMaxima, desenvolvemos a expressão acima, obtendo:

$$\begin{aligned} & \frac{y_B^2}{4y_B^2 - 8y_Ay_B + 4y_A^2} - \frac{2y_A^2y_B}{4y_B^2 - 8y_Ay_B + 4y_A^2} - \frac{4x_Bx_Dy_B}{4y_B^2 - 8y_Ay_B + 4y_A^2} + \frac{4x_Ax_Dy_B}{4y_B^2 - 8y_Ay_B + 4y_A^2} + \\ & \frac{2x_B^2y_B}{4y_B^2 - 8y_Ay_B + 4y_A^2} - \frac{2x_Ay_B}{4y_B^2 - 8y_Ay_B + 4y_A^2} + \frac{y_A^4}{4y_B^2 - 8y_Ay_B + 4y_A^2} + \frac{4x_Bx_Dy_A^2}{4y_B^2 - 8y_Ay_B + 4y_A^2} - \frac{4x_Ax_Dy_A^2}{4y_B^2 - 8y_Ay_B + 4y_A^2} - \\ & \frac{2x_B^2y_A^2}{4y_B^2 - 8y_Ay_B + 4y_A^2} + \frac{2x_Ay_A^2}{4y_B^2 - 8y_Ay_B + 4y_A^2} + \frac{4x_B^2x_D^2}{4y_B^2 - 8y_Ay_B + 4y_A^2} - \frac{8x_Ax_Bx_D^2}{4y_B^2 - 8y_Ay_B + 4y_A^2} + \frac{4x_A^2x_D^2}{4y_B^2 - 8y_Ay_B + 4y_A^2} - \\ & \frac{4x_B^3x_D}{4y_B^2 - 8y_Ay_B + 4y_A^2} + \frac{4x_Ax_B^2x_D}{4y_B^2 - 8y_Ay_B + 4y_A^2} + \frac{4x_Ax_Bx_D}{4y_B^2 - 8y_Ay_B + 4y_A^2} - \frac{4x_A^2x_D}{4y_B^2 - 8y_Ay_B + 4y_A^2} + \frac{x_B^4}{4y_B^2 - 8y_Ay_B + 4y_A^2} - \\ & \frac{2x_Ax_B^2}{4y_B^2 - 8y_Ay_B + 4y_A^2} + \frac{x_A^2}{4y_B^2 - 8y_Ay_B + 4y_A^2} - \frac{2y_Ay_B}{2y_B - 2y_A} + \frac{2y_A^3}{2y_B - 2y_A} + \frac{4x_Bx_Dy_A}{2y_B - 2y_A} - \frac{4x_Ax_Dy_A}{2y_B - 2y_A} - \frac{2x_B^2y_A}{2y_B - 2y_A} + \\ & \frac{2x_Ay_A}{2y_B - 2y_A} + y_A^2 + x_D^2 - 2x_Ax_D + x_A^2 - (AB)^2 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Uma análise desta igualdade, revela que esta é uma equação do segundo grau na incógnita x_D . Ao resolvê-la encontraremos dois possíveis valores (em alguns casos, iguais) para a coordenada x do ponto D . Se os valores forem diferentes, apenas um deles nos será útil, no entanto, como não sabemos ainda qual deles será, substituiremos ambos em (3), encontrando dois pontos D_1 e D_2 . Ambos os pontos encontrados podem ser o vértice que procuramos, porém um deles faria com que o triângulo equilátero ficasse, pelo menos em parte, interno a ABC , sendo portanto inútil em nossa solução.

Sabe-se que o vértice procurado é o mais distante do vértice oposto a ele em ABC , logo precisamos apenas descartar o ponto mais próximo.

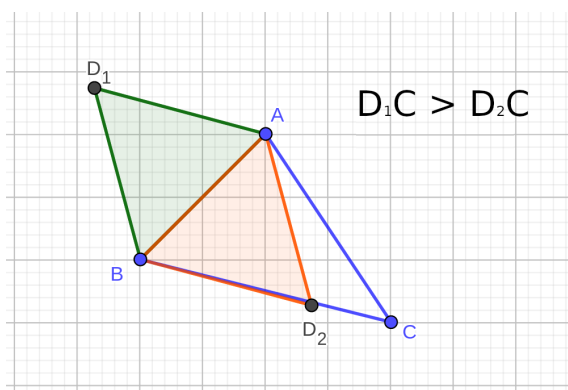


Figura 5. terceiro vértice do triângulo

Neste exemplo, suponha-se que seja D_1 o ponto que procuramos e parte-se para os próximos passos.

EQUAÇÕES DAS RETAS

Tomando como base o exemplo anterior, procurou-se pela equação da reta que passa pelos pontos D_1 e C . Sabemos que se $U(x, y)$ é um ponto genérico da reta que passa pelos pontos $D_1(x_{D_1}, y_{D_1})$ e $C(x_C, y_C)$, então

$$\det \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_{D_1} & y_{D_1} & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Com isso, encontramos a equação da reta desejada:

$$x(y_{D_1} - y_C) - y(x_{D_1} - x_C) + x_{D_1}y_C - x_Cy_{D_1} = 0 \quad (5)$$

INTERSECÇÃO DAS RETAS

Considerando duas retas $r_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $r_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, as coordenadas do ponto de intersecção entre elas (caso exista) podem ser encontradas solucionando o sistema linear (S) abaixo.

$$S: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 & (r_1) \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 & (r_2) \end{cases}$$

O sistema (S) foi resolvido pelo método da substituição. Para isso, escolhemos uma das equações, por exemplo utilizaremos a equação da reta r_1 :

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$b_1y = -a_1x - c_1$$

$$y = \frac{-a_1x - c_1}{b_1} \quad (6)$$

Estamos supondo que b_1 é um número real diferente de 0, caso contrário poderíamos encontrar uma solução direta para x :

$$x = \frac{-c_1}{a_1}$$

No caso geral em que $b_1 \neq 0$, substituímos (6) na equação da reta r_2 , encontrando o valor da coordenada x :

$$b_2\left(\frac{-a_1x - c_1}{b_1}\right) + a_2x + c_2 = 0$$

$$\frac{-a_1b_2}{b_1}x + a_2x + c_2 - \frac{b_2c_1}{b_1} = 0$$

$$\left(a_2 - \frac{a_1b_2}{b_1}\right)x = \frac{b_2c_1}{b_1} - c_2$$

$$x = \frac{\frac{b_2c_1}{b_1} - c_2}{a_2 - \frac{a_1b_2}{b_1}}$$

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Com isso, conseguimos definir x em função de valores que já serão conhecidos, facilitando encontrá-lo. Por fim, substituindo x em alguma das equações do sistema, obtém-se o valor da coordenada y :

$$y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Após finalizar a parte matemática, a etapa final foi transcrever todos passos aqui descritos em um código fonte na linguagem Python (versão 2.7), realizando as devidas adaptações.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Uma vez concluído, o algoritmo foi submetido a uma série de testes nos quais comparamos seus resultados com os obtidos apartir do programa GeoGebra, ao aplicarmos o método de Simpson.

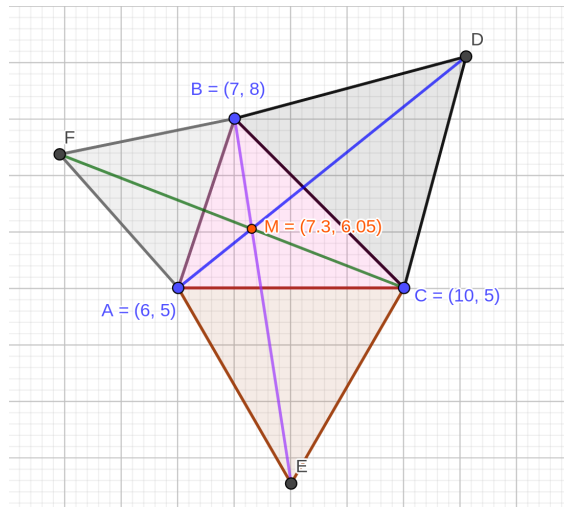


Figura 6. primeiro teste, GeoGebra

```
(7.302169479251963, 6.0467457811220555)
```

Figura 7. primeiro teste, saída do algoritmo

Na figura 6, pode-se observar o ponto obtido no GeoGebra e, ao comparar com a saída do algoritmo (figura 7), percebe-se uma significativa precisão obtida.

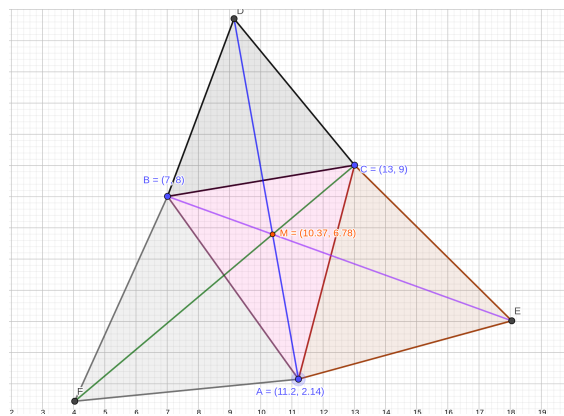


Figura 8. segundo teste, GeoGebra

(10.370008988538835, 6.782490174783162)

Figura 9. segundo teste, saída do algoritmo

Na Figura 8, observa-se o resultado do segundo teste, no qual utilizamos um outro triângulo de dimensões maiores. Novamente, a saída do algoritmo (figura 9) apresenta uma excelente precisão com relação ao GeoGebra. O mesmo se repete nas figuras 10 e 11, apresentadas a seguir.

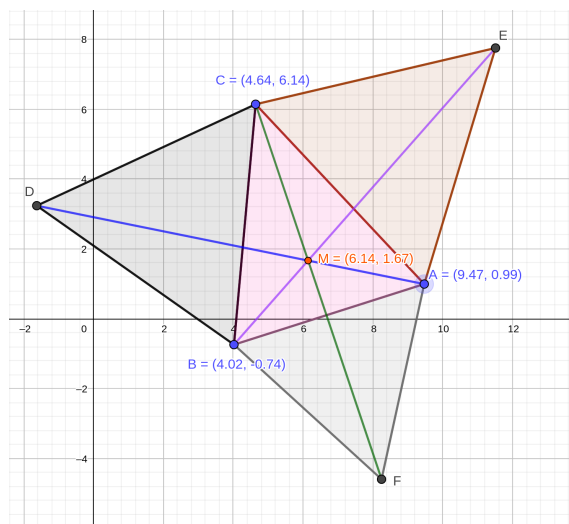


Figura 10. terceiro teste, GeoGebra

(6.142508651940171, 1.6636788277486578)

Figura 11. terceiro teste, saída do algoritmo

CONCLUSÃO

Após várias sequências de testes, além dos citados, foi constatado a capacidade do algoritmo implementado para encontrar o ponto de Fermat com uma precisão bastante satisfatória, se comparado aos valores obtidos por meio do GeoGebra, visto que este foi adotado como parâmetro.

O trabalho em si é uma oportunidade de rever conteúdos de geometria plana e analítica, tanto quanto de aplicar solução computacional para um problema matemático por meio de algoritmo baseado na utilização das coordenadas dos três pontos dados, atingindo assim o objetivo da pesquisa. O trabalho serve também para manifestar interesse em problemas de otimização geométrica, pois durante o desenvolvimento do mesmo, alguns tópicos sobre esta temática foram percebidos, abrindo possibilidade para outros estudos.

Diante dos mecanismos geométricos apresentados neste trabalho, uma boa proposta de continuidade para o mesmo, seria a implementação de um algoritmo que encontra o equivalente ao ponto de Fermat para um conjunto finito qualquer de pontos no plano cartesiano, e não somente para três pontos. Sendo assim acreditamos que o trabalho foi significativo para os autores como forma de desafio a apresentar uma solução de

problemas do tipo e poder manifestar em seus futuros leitores o mesmo desejo de pesquisa na área, podendo desencadear melhorias em vários aspectos, como por exemplo, na performance do algoritmo, na proximidade da solução, ou na solução geral.

Referências

ARAUJO Junior, F. d. P. S. d. (2018). Máximos e mínimos aplicados em geometria. Mestrado em matemática, UESPI, Teresina.

Atrator (2000). Redes minimais - o problema de steiner. atrator.

GADELHA, J. (2009). A evolução dos computadores.

Hajja, M. (1994). An advanced calculus approach to finding the fermat point. *Mathematics Magazine*, 67(1):29–34.

LOCKWOOD, E., DEJARNETTE, A. F., and THOMAS, M. (2019). Computing as a mathematical disciplinary practice. *Journal of Mathematical Behavior*, page 0–1.