UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

UNIVERSIDADE VIRTUAL DO ESTADO DO MARANHÃO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA NA MODALIDADE À DISTÂNCIA

SÉRIES NUMÉRICAS E SÉRIES DE POTÊNCIAS

CAXIAS - MA

SETEMBRO - 2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

UNIVERSIDADE VIRTUAL DO ESTADO DO MARANHÃO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA NA MODALIDADE À DISTÂNCIA

SÉRIES NUMÉRICAS E SÉRIES DE POTÊNCIAS

Este trabalho foi apresentado ao curso de pós-graduação em matemática da Universidade Federal de Santa Catarina, como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO, para a obtenção do grau de especialista em Matemática.

Francisco Portela Morais

Jandherson Moura Silva

Esta monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no curso de Especialização em Matemática e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora em 16/09/2009.   .

Banca Examinadora

____

Drª. Silvia Martini de Holanda Janesch

(CFM \ UFSC - Orientadora)

____

Dr. Roberto Correa da Silva

(CFM \ UFSC - Examinador)

____

Drª. Sonia Elena Palomino Bean

(CFM \ UFSC - Examinador)

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida e pela eterna proteção a nós concedida que se tornou essencial para essa vitória.

Aos nossos pais, namorada (Esposa) pela paciência, carinho, dedicação e eterno incentivo. E a cima de tudo por terem acreditado em nós. E aos nossos irmãos e familiares pelo exemplo de perseverança.

Aos nossos professores do curso de especialização da UFSC, que foram essenciais para a construção do nosso conhecimento. E em especial a professora Silvia Janesch pela paciência, incentivo e determinação que foram de fundamental importância na construção deste trabalho de monografia e também para o nosso crescimento com ser humano.

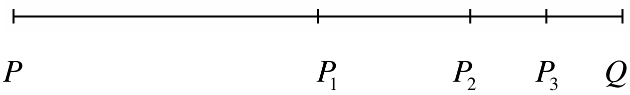
Aos nossos colegas do curso de especialização, que também estão nesta fase de grande importância em nossas vidas.

Enfim, por todos as pessoas que contribuíram de forma direta e indireta para nossa formação pessoal e profissional.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Daremos início ao nosso estudo de séries numéricas, lembrando de um dos paradoxos formulados, há mais de 2000 anos, pelo o filósofo grego Zenão. O filósofo imaginou um atleta, deslocando-se de um ponto P até outro ponto Q, e raciocinou de maneira que pode exprimir-se nos seguintes termos: chamaremos de P_1 o ponto médio do segmento PQ, por P_2 o ponto médio do segmento P_1Q e de P_3 o ponto médio do segmento P_2Q e assim por diante. Generalizando a divisão de cada segmento restante em seu ponto médio, para todo $n \in \mathbb{N}, P_{n+1}$, designará o ponto médio do segmento P_nQ como mostra a figura abaixo;



Se dissermos que t será o tempo gasto pelo atleta percorrer a distância que vai de P até P_1, será $\frac{t}{2}$ o tempo gasto de P_1 a P_2, $\frac{t}{2^2}$ o tempo necessário para ir de P_2 a P_3, etc. O tempo total necessário para completar a corrida, T, equivaleria assim à "soma" de uma infinidade de tempos parciais:

$$T = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{2^2} + \ldots + \frac{t}{2^n} + \ldots$$

Daqui julgava Zenão poder deduzir que esse tempo total era necessariamente infinito e que, portanto, o corredor jamais poderia atingir a meta.

A partir daí, surgiu à teoria das séries infinitas que foi estudada mais a fundo por vários matemáticos que o sucederam, tais como: Isaac Newton (1642-1727), sucessor de Barrow (1630-1677), teve suas descobertas iniciais datada dos primeiros meses de 1665 quando estudava no Trinity Colege de Cambridge. Dentre elas, podemos destacar a representação de funções por meio de termos de séries infinitas. Após esta descoberta, Newton incansavelmente continuou seus estudos, desta vez só, pois uma peste fez com que a escola fosse fechada. A partir daí retornou a sua terra natal, a cidade de Woolsthorpe na Inglaterra, onde fez descobertas incríveis tais como: o teorema binomial, que possibilitou a Newton verificar que as operações efetuadas com séries infinitas eram muito semelhantes as que eram usadas para expressões polinomiais infinitas.

Outros matemáticos de destaques como Leibniz (1646-1716) responsável pela soma das séries infinitas e Jacques Bernoulli (1623-1705) que se preocupou em encontrar o limite com $n \to \infty$ de expressões do tipo $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Porém, foi Euler (1707-1783) quem reuniu em uma de suas obras à sua idéia e as de Newton, Leibniz e Bernoulli, manipulando as séries infinitas e obtendo assim, resultados que nenhum de seus antecessores conseguiu chegar, pois, tomava cuidado em não trabalhar com séries divergentes.

O estudo das séries infinitas tornou se um instrumento muito importante para o entendimento do cálculo. Neste trabalho estudaremos séries numéricas e séries de potências com o objetivo de calcular integral de funções que não possuem primitivas expressas através de funções elementares. Exemplos de tais funções são e^{-x^2}, $\operatorname{sen} x^2$ e $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

O trabalho está dividido em quatro capítulos. No Capítulo 1, apresentamos as séries numéricas a partir de um exemplo prático, a definição de séries infinitas e em seguida estudamos as séries geométricas e série harmônica, onde analisamos a convergência destas séries.

No Capítulo 2, estudamos os critérios de convergência das séries de termos não negativos utilizando os testes de comparação e comparação por limite. Ainda foram abordados os testes da integral, da série alternada, da razão e da raiz para identificar se as séries são convergentes ou não. Tratamos também da convergência absoluta. Mostramos através de um exemplo a importância da convergência absoluta.

Iniciamos o Capítulo 3 com o estudo das séries de potências, que são séries que generalizam a noção de polinômio. Apresentamos o Teorema da Convergência de Série e ilustramos este teorema através de exemplos. Trabalhamos com o importante teorema sobre séries de potências, que diz que sob determinadas condições, podemos derivar e integrar termo a termo a série de potências. E representamos certos tipos de funções como série de potências pela manipulação da série geométrica, ou por derivação e integração de tais séries.

O Capítulo 4 trata de uma técnica mais geral para a construção de séries de potências. Estudamos série de Taylor, encontraremos representações em séries de potências para algumas funções que não possuem primitivas expressas por funções elementares e estudaremos um caso especial da série de Taylor chamada de série de Maclaurin, onde a única diferença entre estas séries é o centro delas, pois a série de Maclaurin está centrada em $a = 0$. Dando continuidade ao Capítulo 4, usamos a teoria de séries de potências para calcular valor aproximado para função logarítmica, calcular limite de função e calcular integrais que não possuem primitivas expressas por funções elementares.

E finalizando com a conclusão onde será exposto o que foi feito no trabalho assim como as dificuldades que tivemos no decorrer de sua escrita.

CAPÍTULO 1

SÉRIES NUMÉRICAS

Neste primeiro capítulo estudaremos as séries numéricas, partindo de uma situação problema que exemplifica uma situação semelhante a que foi proposta pelo filósofo Zenão para a formalização do conceito de série infinita (ver Introdução). Em nosso estudo veremos a *Série Geométrica* e a *Série Harmônica* partindo de suas definições até chegarmos à análise de sua convergência e de suas propriedades.

Partiremos da seguinte situação: Samuel Blaustein possui uma dívida no valor de R$ 100,00 que deseja liquidar efetuando pagamentos da dívida sempre à metade do que deve. Por exemplo, no primeiro mês efetua o pagamento no valor de R$ 50, 00, no segundo mês R$ 25,00 e no terceiro mês R$ 12,50 e assim por diante. Problema como este nos deixa a seguinte indagação, "será que em algum momento esta dívida será liquidada?" Se observarmos esta divisão sucessiva do saldo ao meio, teremos uma infinidade de resultados como mostra o esquema abaixo:

1º Pagamento $\dfrac{100}{2^1} = 50,00$

2º Pagamento $\left[\dfrac{\left(\dfrac{100}{2}\right)}{2}\right] = \dfrac{100}{2^2} = 25,00$

3º Pagamento $\left[\dfrac{\left(\dfrac{100}{2^2}\right)}{2}\right] = \dfrac{100}{2^3} = 12,50$

4º Pagamento $\left[\dfrac{\left(\dfrac{100}{2^3}\right)}{2}\right] = \dfrac{100}{2^4} = 6,25$

.

.

.

Se continuarmos a dividir o saldo indefinidamente, a soma destas parcelas será considerada uma soma infinita, isto é;

$$50 + 25 + 12{,}5 + 6{,}25 + \ldots,$$

ou ainda;

$$\frac{100}{2^1} + \frac{100}{2^2} + \frac{100}{2^3} + \frac{100}{2^4} + \cdots + \frac{100}{2^n} + \cdots$$

Esta soma nos leva a pensar que ao final teremos sanado a dívida, mas na verdade temos: uma soma infinita e assim, não será possível efetuar o pagamento total, pois sempre existirá um valor a ser pago.

Podemos considerar cada valor da soma anterior como elemento de uma seqüência $\{a_n\}$ escrita da seguinte forma:

$$a_1 = \frac{100}{2^1},\ a_2 = \frac{100}{2^2}\ ,\ a_3 = \frac{100}{2^3}\ ,\ a_4 = \frac{100}{2^4}\ \ldots,\ a_n = \frac{100}{2^n},\cdots$$

ou ainda;

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

Considere a sequência $\{S_n\}$ dada pela soma dos pagamentos sucessivos efetuados pelo Sr. Samuel Blaustein, daí vem:

$$\begin{aligned}
&S_1 = a_1 \\
&S_2 = a_1 + a_2 \\
&S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\
&S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\
&\vdots \\
&S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

A sequência $\{S_n\}$ formada a partir da sequência $\{a_n\}$ é chamada de *série infinita.* No que segue apresentamos a definição formal de série infinita.

Definição 1. Seja $\{a_n\}$ uma sequência de números reais. Chama-se de *série infinita* a sucessão $\{S_n\}$ definida da seguinte forma

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n.$$

Os números $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ são chamados de *termos da série infinita*. O número a_n diz-se *termo geral da série*.

O símbolo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + \ldots$$

é usado para denotar a série infinita.

Os números $S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots$ chamam-se *somas parciais* e S_n diz-se termo geral das somas parciais.

Exemplo 1. Encontre os quatro primeiros termos da sequência de somas parciais $\{S_n\}$, e obtenha uma fórmula para S_n em termos n para as séries abaixo:

$a)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ $\qquad$ $b)\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\frac{n}{n+1}$.

Solução.

O termo geral da série é $a_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Podemos reescrevê-lo usando frações parciais da seguinte forma

$$a_n = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}.$$

Então

$$S_1 = a_1$$

$$S_1 = \frac{1}{2(2-1)} - \frac{1}{(2+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.3} = \frac{1}{3}$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2.3}\right) + \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.5}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{2}{5}$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_3 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2.3}\right) + \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.5}\right) + \left(\frac{1}{2.5} - \frac{1}{2.7}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} = \frac{3}{7}$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$S_4 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2.3}\right) + \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.5}\right) + \left(\frac{1}{2.5} - \frac{1}{2.7}\right) + \left(\frac{1}{2.7} - \frac{1}{2.9}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} = \frac{4}{9}.$$

Como $a_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{1}{2(2n-1)} - \dfrac{1}{2(2n+1)}$, temos:

$$a_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2.3}\right), \qquad a_2 = \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.5}\right), \qquad a_3 = \left(\frac{1}{2.5} - \frac{1}{2.7}\right), \qquad a_4 = \left(\frac{1}{2.7} - \frac{1}{2.9}\right), \ldots$$

$$a_{n-1} = \frac{1}{2(2n-3)} - \frac{1}{2(2n-1)}, \; a_n = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}.$$

Assim, como $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$ vem que:

$$S_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2.3}\right) + \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.5}\right) + \left(\frac{1}{2.5} - \frac{1}{2.7}\right) + \ldots + \left[\frac{1}{2(2n-3)} - \frac{1}{2(2n-1)}\right] + \left[\frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}\right].$$

Eliminando os termos simétricos e simplificando a expressão, obtemos: a fórmula que define S_n , isto é,

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}, \text{ ou ainda, } S_n = \frac{n}{2n+1}.$$

b) Como $a_n = \ln \frac{n}{n+1}$, podemos reescrever o termo geral da série utilizando as propriedades dos logaritmos da seguinte forma,

$$a_n = \ln n - \ln(n+1).$$

Então

$$S_1 = a_1$$
$$S_1 = \ln 1 - \ln 2$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_2 = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) = \ln 1 - \ln 3 = \ln \frac{1}{3}$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_3 = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + (\ln 3 - \ln 4) = \ln 1 - \ln 4 = \ln \frac{1}{4}$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$S_4 = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + (\ln 3 - \ln 4) + (\ln 4 - \ln 5) = \ln 1 - \ln 5 = \ln \frac{1}{5}.$$

Como $a_n = \ln n - \ln(n+1)$, temos:

$$a_1 = (\ln 1 - \ln 2), \; a_2 = (\ln 2 - \ln 3), \; a_3 = (\ln 3 - \ln 4), \; a_4 = (\ln 4 - \ln 5), \ldots$$

$$a_{n-1} = \ln(n-1) - \ln n, \; a_n = \ln n - \ln(n+1).$$

Assim, como $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n$ vem que:

$$S_n = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + (\ln 3 - \ln 4) + (\ln 4 - \ln 5) +,...,+ [\ln(n-1) - \ln n] + [\ln n - \ln(n+1)].$$

Eliminando os termos simétricos e simplificando a expressão, obtemos: a fórmula que define S_n , isto é,

$$S_n = \ln 1 - \ln(n+1) \text{, ou } S_n = \ln\frac{1}{n+1} \text{ , ou ainda } S_n = -\ln(n+1).$$

1.1 Série Geométrica

Definição 2: Chama-se série geométrica, a série da forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + aq^3 + ... + aq^{n-1} + ...$$

onde a e q são números reais diferentes de zero. O número q é chamado de razão.

Exemplo 2. Encontre os quatro primeiros elementos da sequência de somas parciais $\{S_n\}$, e obtenha uma fórmula para S_n em termos de n para a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{12}{(-5)^n}$.

Solução.

$$S_1 = a_1$$

$$S_1 = \frac{12}{(-5)^1} = -2,4$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_2 = \frac{12}{(-5)^1} + \frac{12}{(-5)^2} = -2,4 + 0,48 = -1,92$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_3 = \frac{12}{(-5)^1} + \frac{12}{(-5)^2} + \frac{12}{(-5)^3} = -2,4 + 0,48 - 0,096 = -2,016$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$S_4 = \frac{12}{(-5)^1} + \frac{12}{(-5)^2} + \frac{12}{(-5)^3} + \frac{12}{(-5)^4} = -2,4 + 0,48 - 0,096 + 0,0192 = -1,9968$$

Como $a_n = \frac{12}{(-5)^n}$ temos:

$$a_1 = \frac{12}{(-5)^1}\ ,\ a_2 = \frac{12}{(-5)^2}\ ,\ a_3 = \frac{12}{(-5)^3}\ ,\ a_4 = \frac{12}{(-5)^4}\ ,\ \ldots\ ,\ a_{n-1} = \frac{12}{(-5)^{n-1}}\ ,\ a_n = \frac{12}{(-5)^n}\ .$$

Assim, como $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$ vem

$$S_n = \frac{12}{(-5)^1} + \frac{12}{(-5)^2} + \frac{12}{(-5)^3} + \frac{12}{(-5)^4} + \ldots + \frac{12}{(-5)^{n-1}} + \frac{12}{(-5)^n},$$

pondo o numerador em evidência obtemos:

$$S_n = 12.\left[\underbrace{\frac{1}{(-5)^1} + \frac{1}{(-5)^2} + \frac{1}{(-5)^3} + \frac{1}{(-5)^4} + \ldots + \frac{1}{(-5)^{n-1}} + \frac{1}{(-5)^n}}_{PG\ de\ razão\left(-\frac{1}{5}\right)}\right].$$

Portanto,

$$S_n = 2.\left[\left(-\frac{1}{5}\right)^n - 1\right].$$

1.2 Convergência e Divergência de Séries

Definição 3. Consideremos uma série infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, e sua seqüência de somas parciais $\{S_n\}$. Se $\lim_{n\to+\infty} S_n$ existir e for igual a *S* então a série é dita ***convergente*** e converge para *S*. Caso $\lim_{n\to+\infty} S_n$ não exista, ou tenda para o infinito a série será ***divergente***.

Exemplo 3. Determine se a série infinita é convergente ou divergente. Se for convergente, encontre a sua soma.

$a)\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ $\qquad$ $b)\displaystyle\sum_{n-1}^{+\infty} \ln\frac{n}{n+1}.$

Solução.

Do Exemplo 1 sabemos que a fórmula das somas parciais é dada por $S_n = \dfrac{n}{2n+1}$.

Calculando o limite de S_n, temos:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{n}{n}}{\frac{2n}{n}+\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2+\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{2}.$$

Da Definição 2 podemos concluir que a série infinita $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ é convergente e sua soma é $\frac{1}{2}$.

b) Do Exemplo 1 sabemos que a fórmula das somas parciais é dada por $S_n=-\ln(n+1)$.

Calculando o limite de S_n, temos:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[-\ln(n+1)\right]=-\infty.$$

De acordo com a Definição 2 temos: que a série infinita $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\frac{n}{n+1}$ é divergente.

Teorema 1 (Condição Necessária para Convergência). Se a série infinita $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ é convergente, então, o limite do termo geral da série será nulo, isto é, $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$.

Demonstração.

Seja $\{S_n\}$ a sequência das somas parciais para a série dada, e seja S a soma da série. Então $\lim_{n\to+\infty}S_n=S$. Temos: também que $\lim_{n\to+\infty}S_{n+1}=S$. Da definição de limite de seqüência, temos: que para todo $\varepsilon>0$ existe um número $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n>n_0$ implica

$$|S-S_n|<\frac{1}{2}\varepsilon \text{ e } |S-S_{n+1}|<\frac{1}{2}\varepsilon.$$

Então para todo $n>n_0$ temos:

$$|a_{n+1}|=|S_{n+1}-S_n|=|S-S_n+S_{n+1}-S|=|S-S_n|+|S_{n+1}-S|<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon.$$

Portanto, $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$.

Observação 1: Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, podemos concluir que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente. Este resultado é conhecido como Teste da Divergência.

Exemplo 4 Analise a convergência da série $\sum\limits_{n-1}^{+\infty} \dfrac{3n^2}{2n^2+5}$.

Solução.

Seja $a_n = \dfrac{3n^2}{2n^2+5}$ o termo geral da série $\sum\limits_{n-1}^{+\infty} \dfrac{3n^2}{2n^2+5}$, temos:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2}{2n^2+5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3n^2}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{5}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2+\frac{5}{n^2}} = \frac{3}{2}.$$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, pelo Teste da Divergência concluímos que a série $\sum\limits_{n-1}^{+\infty} \dfrac{3n^2}{2n^2+5}$ é divergente.

Observação 2: Se o $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, não implica necessariamente na convergência da série, pois existem séries divergentes para a qual o $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. O exemplo abaixo ilustra esta observação.

Exemplo 5 Considere a série $\sum\limits_{n-1}^{+\infty} \ln \dfrac{n}{n+1}$.

O termo geral da série é $a_n = \ln \dfrac{n}{n+1}$. Temos:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right] = \ln\left[\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)\right] = \ln\left[\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}\right)\right] == \ln\left[\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)\right] = \ln(1) = 0.$$

Portanto, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, mas como vimos no Exemplo 3-b a série é divergente, mostrando assim que a recíproca do Teorema 1 não é válida.

Proposição 1. Consideremos a série geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty} aq^{n-1}$. Se $|q|<1$ então a série é convergente e convergirá para soma $S=\frac{a}{1-q}$. Por outro lado, se $|q|\geq 1$ a série será divergente.

Demonstração.

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} aq^{n-1}$ a série geométrica, onde sua n-ésima soma parcial S_n é dada por:

$$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1}. \qquad (1)$$

Multiplicando os dois membros por q temos:

$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n. \qquad (2)$$

Subtraindo os termos de (1) por (2) membro a membro temos:

$$(S_n - qS_n) = \left(a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1}\right) - \left(aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n\right).$$

Observe que os termos irão se anular, resultando apenas em

$$(1-q)S_n = (a - aq^n) \text{ ou ainda } (1-q)S_n = a(1-q^n).$$

Portanto, $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ com $q \neq 1$.

Analisando o comportamento da seqüência de somas parciais $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ temos:

- Se $|q|<1$, observamos que q^n tende para zero quando n tende a ∞. Então S_n tende para $\frac{a}{1-q}$. Logo a série geométrica é convergente.
- Se $|q|>1$ observamos que q^n tende para o infinito, assim como S_n também tende para o infinito. Logo a série geométrica é divergente.
- Se $q=1$ então a n-ésima soma parcial será $S_n = a + a + a + \ldots + a$, ou seja, $S_n = na.$ Então $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty,$ se $a>0$ ou $\lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty$ se $a<0.$ Como $\lim_{n\to+\infty} S_n$ não existe, a série é divergente.
- Se $q=-1$ temos $S_n = \frac{a\left[1-(-1)^n\right]}{2} = \begin{cases} 0, \text{ se } n \text{ for par} \\ a, \text{ se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$. Assim $\lim_{n\to+\infty} S_n$ não existe. Logo a série geométrica diverge.

1.3 Série Harmônica

É toda série da forma $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}+...$

Exemplo 6. Mostre que a série harmônica $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ é divergente.

Solução.

Para mostrar que a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ é divergente, mostraremos que a subseqüência $\{S_{2^n}\}$ é divergente.

Temos:

$$S_{2^1}=1+\frac{1}{2}$$

$$S_{2^2}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=1+2\frac{1}{2}$$

$$S_{2^3}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=1+3\frac{1}{2}$$

$$S_{2^4}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+...+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+...+\frac{1}{16}\right)$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+...+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+...+\frac{1}{16}\right)=1+4\frac{1}{2}.$$

Generalizando chegamos a

$$S_{2^n}>1+\frac{n}{2}.$$

Na desigualdade acima, fazendo $n\to\infty$ temos: $S_{2^n}\to\infty$. Assim a subsequência $\{S_{2^n}\}$ é divergente.

Como a $\{S_n\}$ possui uma subseqüência divergente então a sequência $\{S_n\}$ é divergente.

Portanto, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ é divergente.

Teorema 2. Se $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ são séries infinitas convergentes com somas R e S, respectivamente, então

a) A série $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ é convergente e sua soma é $R + S$.

b) A série $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - b_n)$ é série convergente e que soma é $R - S$.

c) Consideremos c uma constante não-nula, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n$ será convergente e sua soma será $c.S$.

Demonstração

a) Sejam $R_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ e $S_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$ as somas parciais das séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, respectivamente. Então

$$\begin{aligned} T_n &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + ... + a_n) + (b_1 + b_2 + ... + b_n) \\ &= R_n + S_n, \end{aligned}$$

são as parciais da série $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$.

Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge para R e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge para S, temos que $\lim_{n\to\infty} R_n = R$ e $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty}(R_n + S_n) = \lim_{n\to\infty} R_n + \lim_{n\to\infty} S_n = R + S.$$

Portanto, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ é convergente e sua soma é $R + S$.

b) A demonstração é análoga ao item a).

c) Sejam $R_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ as somas parciais da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e c uma constante não nula.

Então

$$\begin{aligned} cT_n &= \mathrm{c}a_1 + ca_2 + \ldots + ca_n. \\ &= c(a_1 + a_2 + ... + a_n) \\ &= cR_n, \end{aligned}$$

são as somas parciais da série $\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n$. Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge para R temos que $\lim_{n\to\infty} R_n = R$. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} cT_n = \lim_{n\to\infty} cR_n = c\lim_{n\to\infty} R_n = cR.$$

Portanto, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n$ é convergente e sua soma é cR.

Exemplo 7. Encontre a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{3^n}+\frac{5}{2^n}\right]$.

Solução.

Sejam $a_n = \frac{1}{3^n}$ e $b_n = \frac{5}{2^n}$ os valores que formam o termo geral da série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{3^n}+\frac{5}{2^n}\right]$,

ou seja, $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{3^n}+\frac{5}{2^n}\right] = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n + b_n\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Vamos chamar $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = R$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = S$. Temos:

$$R = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots,$$

a série geométrica onde $a = \frac{1}{3}$ e $q = \frac{1}{3} < 1$. Logo pela Proposição 1, a série possui uma soma que é dada por $R = \dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$.

A série $S = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5}{2^n} = \frac{5}{2^1}+\frac{5}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\ldots+\frac{5}{2^n}+\ldots$, que pode ser escrita como,

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5}{2^n} = \frac{5}{2}\cdot 1+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$$

é também uma série geométrica onde $a = \frac{5}{2}$ e $q = \frac{1}{2} < 1$. Logo pela Proposição 1, a série possui uma soma que é dada por $S = \dfrac{\frac{5}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 5.1 = 5$.

Portanto, a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{3^n}+\frac{5}{2^n}\right]$ é $\frac{1}{2}+5 = \frac{11}{2}$.

O próximo teorema diz que o caráter de uma série não se altera quando se acrescenta ou se retira um número finito de termos.

Teorema 3. Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries infinitas, diferindo por um número finito de termos. Então ambas as séries são divergentes ou convergentes.

Exemplo 8. Analise a convergência da série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$.

Solução.

A série dada é:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = 1 + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots$$

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots$ é convergente, pois é a série geométrica com razão $q = \frac{1}{3} < 1$.

A série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$ difere da série geométrica de razão $\frac{1}{3}$ apenas por um termo. Logo, pelo Teorema 3, a série dada é convergente.

CAPÍTULO 2

Neste capítulo serão trabalhados os critérios de convergência para a série de termos não negativos, onde abordaremos os testes de comparação, comparação por limite e o teste da integral. Estudaremos as séries alternadas, seu critério de convergência e sua estimativa do resto. Além disso, estudaremos os testes da razão e da raiz que nos permitem analisar a convergência de séries que possuem termos negativos.

2. CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

2.1 Séries de termos não negativos

Definição 4. Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diz-se de termos não negativos se $a_n \geq 0$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 4. (Teste da Comparação) Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ séries de termos não negativos tais que $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

i) Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

ii) Se série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente.

Observação 3: Pelo Teorema 3 podemos observar que a omissão de um número finito de termos não altera a natureza da série. Assim, podemos aplicar o teste da comparação analisando a condição $a_n \leq b_n$ para $n \geq n_0$, onde n_0 é um número natural fixado.

Exemplo 9. Determine se as séries infinitas são convergentes ou divergentes.

$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{5^n+1}$ $\qquad$ $b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}$.

Solução.

a) A série dada é:

$$\frac{6}{6}+\frac{6}{26}+\frac{6}{126}+\frac{6}{626}+...+\frac{6}{5^n+1}+...$$

Comparando o n-ésimo termo dessa série com o n-ésimo termo da série geométrica convergente,

$$\frac{6}{5}+\frac{6}{25}+\frac{6}{125}+\frac{6}{625}+...+\frac{6}{5^n}+... \qquad \left(q=\frac{1}{5}<1\right)$$

Temos:

$$\frac{6}{5^n+1}<\frac{6}{5^n},\ \text{Para todo } n \text{ inteiro positivo.}$$

Assim sendo, pelo Teste de Comparação, (Teorema 4.*i*), a série dada é convergente.

b) A série dada é:

$$\frac{2}{\sqrt{1}+}\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{4}}+...+\frac{2}{\sqrt{n}}+...$$

Comparando o n-ésimo termo dessa série como o n-ésimo termo da série harmônica que é divergente, temos:

$$\frac{2}{\sqrt{n}}>\frac{1}{n} \text{ para todo } n \text{ inteiro positivo.}$$

Logo, pelo Teste de Comparação (Teorema 4.*ii*), a série dada é divergente.

Teorema 5. (Teste de Comparação por Limite)

Suponhamos $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries onde $a_n > 0$ e $b_n > 0$, para qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$

i) Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, com $c > 0$ então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ ambas convergem ou ambas divergem.

*ii)*Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

iii) Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ e se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Exemplo 10. Determine se as séries infinitas são convergentes ou divergentes:

$a)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6}{5^n+1}$ $\qquad$ $b)\sum_{n=1}^{+\infty}n.e^{-n}$ $\qquad$ $c)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$.

Solução.

a) Chamaremos de b_n o n-ésimo termo da série geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6}{5^n}$ que sabemos ser convergente, e de a_n o termo geral da série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6}{5^n+1}$.

Então,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{6}{5^n+1}}{\frac{6}{5^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{6}{5^n+1}.\frac{5^n}{6}=\lim_{n\to+\infty}\frac{5^n}{5^n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{5^n}{5^n}}{\frac{5^n}{5^n}+\frac{1}{5^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{5^n}}=1.$$

Assim sendo, (pela parte i) do Teste de Comparação por Limite, segue que a série dada é convergente.

b) Seja b_n o n-ésimo termo da série geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\frac{n}{2}}$ com razão $q=e^{-\frac{1}{2}}$ que é menor que 1, portanto é convergente (Proposição 1), e a_n o n-ésimo a série $\sum_{n=1}^{+\infty}n.e^{-n}$. Então,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n.e^{-n}}{e^{-\frac{n}{2}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{e^{\frac{n}{2}}}=0.$$

Assim sendo, (pela parte ii) do Teste de Comparação por Limite, segue que a série dada é convergente.

c) Seja a_n o n-ésimo termo da série dada por $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ e seja b_n o n-ésimo termo da série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ que sabemos ser a harmônica que é divergente. Então,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}.\frac{n}{1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\sqrt[3]{n}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n} = +\infty .$$

Assim sendo, (pela parte iii) do Teste de Comparação por Limite, segue que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ é divergente.

Teorema 6. (Teste de Integral) Consideremos a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e suponhamos que existem um número natural p e uma função $f:[p,+\infty) \to \mathbb{R}$, contínua, positiva e decrescente tal que $f(n) = a_n$ para $n \geq p$. Nestas condições temos:

i) Se $\int_p^{+\infty} f(x)dx$ for convergente então a série $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ também convergente.

ii) Se $\int_p^{+\infty} f(x)dx$ for divergente então a série $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ é divergente.

Observação 4: Nosso estudo abordará exemplos que tratam de funções f contínua, decrescente e com valores positivos para todo $n \geq 1$.

Então, a série infinita, $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(n) + ...$ ou ainda $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ será convergente, se a integral imprópria $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ existir e será divergente se a integral imprópria $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ for divergente.

Exemplo 11. Use o Teste da Integral para determinar se as séries são convergentes ou divergentes.

$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ $\qquad$ $b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Solução.

a) Seja $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Então $f'(x) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$.

Como $f'(x)<0$ para $x>0$, segue que *f* é decrescente para $x>0$. Além disso, *f* é contínua e seus valores são positivos para todo $x>0$. Assim, as hipóteses do Teste da Integral estão verificadas.

Temos:

$$\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{-1}{x} + c$$

Logo,

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b f(x)dx\,,$$

ou seja,

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\left.\frac{-1}{x}\right|_1^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{-1}{b}+\frac{1}{1}\right] = 1\,.$$

Portanto, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = 1$. Dessa forma, com a utilização do (Teorema 6), a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ é convergente.

b) Seja $f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$. Então $f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

Como $f'(x)<0$ para $x>0$, segue que *f* é decrescente se $x>0$. Além disso, *f* é contínua. Assim, as hipóteses do Teste da Integral são satisfeitas.

Temos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c\,.$$

Logo:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b f(x)dx$$

Isto é,

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{b\to+\infty}\left.\left(2\sqrt{x}\right)\right|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(2\sqrt{b}-2\right) = +\infty\,.$$

Portanto, pelo Teorema 6, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente.

Exemplo 12. Mostre que a série hiper-harmônica $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$, é convergente para $p>1$e divergente para $p\leq 1$.

Solução.

Se para $p<0$ temos: $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^p}=+\infty$, então pelo Teste da Divergência a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ é divergente.

Se para $p=0$ temos: $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^p}=1$ então pelo Teste da Divergência, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ é divergente.

Vamos analisar quando $p>0$. Consideremos uma função $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\frac{1}{x^p}$. É fácil ver que f é contínua e positiva no seu domínio. Ainda, f é decrescente para todos os pontos do domínio, pois $f'(x)=(x^{-p})'=-px^{-p-1}=-\frac{p}{x^{p+1}}$ é menor que zero para $x\geq 1$.

Lembrando, o Teste da Integral diz que a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ converge (diverge) se a integral imprópria $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ converge (diverge).

Se $p<1$, temos:

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^p}dx=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{-p+1}}{-p+1}-\frac{1}{-p+1}\right)=+\infty\,.$$

Logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ é divergente.

Se $p>1$, temos:

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^p}dx=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{-p+1}}{-p+1}-\frac{1}{-p+1}\right)=\frac{1}{p-1}.$$

Logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ é convergente.

Para $p=1$, encontramos a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, que sabemos ser divergente (Exemplo 6).

Portanto, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ (hiper-harmônica) será divergente para $p \le 1$ e será convergente se $p > 1$.

Exemplo 13. Determine se a série infinita é convergente ou divergente:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(n^2+4\right)^{1/5}}$.

Solução.

Seja $f(x) = \frac{1}{\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{5}}}$ função contínua e positiva em $\mathbb{R}$, com $f(n) = a_n$. A derivada de f é dada por $f'(x) = -\frac{2x}{5\left(x^2+4\right)^{\frac{6}{5}}} < 0$ para $x > 0$. Assim, f é decrescente para $x > 0$. Temos: as hipóteses do Teste da Integral satisfeitas.

Encontrando a família de primitivas para função f , temos:

$$\int \frac{1}{\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{5}}} dx = \int \left(x^2+4\right)^{-\frac{1}{5}} dx = \frac{5}{4}\left(x^2+4\right)^{\frac{4}{5}} + c = \frac{5}{4}\sqrt[5]{\left(x^2+4\right)^4} + c.$$

Então,

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b f(x)dx,$$

Ou seja,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{5}}} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{5}}} dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{4}{5}\left(x^2+4\right)^{\frac{4}{5}} \Bigg|_1^b \right]$$

$$= \frac{4}{5} \lim_{b\to+\infty} \left[\left(b^2+4\right)^{\frac{4}{5}} - \left(1^2+4\right)^{\frac{4}{5}} \right]$$

$$= +\infty.$$

Portanto, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{5}}} dx$ é divergente. Dessa forma, com a utilização do Teorema 6, a série

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(n^2+4\right)^{1/5}}$ dada é divergente.

2.2 Séries Alternadas

Definição 5. Uma série é dita alternada se seus termos são positivos e negativos, alternadamente. Assim, se $a_n > 0$, para todo inteiro positivo *n*, então podemos dizer que a série alternada pode ser escrita de duas formas $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ ou $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$.

Exemplo 14. Dê alguns exemplos de série alternadas.

$$a) \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n} = (-1)^{2+1} \frac{1}{\ln 2} + (-1)^{3+1} \frac{1}{\ln 3} + (-1)^{4+1} \frac{1}{\ln 4} + (-1)^{5+1} \frac{1}{\ln 5} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n} + \ldots$$

$$= -\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 4} + \frac{1}{\ln 5} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n} + \ldots$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+3}{n(n+2)} = (-1)^1 \frac{1+3}{1(1+2)} + (-1)^2 \frac{2+3}{2(2+2)} + (-1)^3 \frac{3+3}{3(3+2)} + (-1)^4 \frac{4+3}{4(4+2)} \ldots + (-1)^n \frac{n+3}{n(n+2)} + \ldots$$

$$= -\frac{4}{3} + \frac{5}{8} - \frac{6}{15} + \frac{7}{24} \ldots + (-1)^n \frac{n+3}{n(n+2)} + \ldots$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{3+n}{5+n} = (-1)^{1+1} \frac{3+1}{5+1} + (-1)^{2+1} \frac{3+2}{5+2} + (-1)^{3+1} \frac{3+3}{5+3} + (-1)^{4+1} \frac{3+4}{5+4} \ldots + (-1)^{n+1} \frac{3+n}{5+n} + \ldots$$

$$= \frac{4}{6} - \frac{5}{7} + \frac{6}{8} - \frac{7}{9} \ldots + (-1)^{n+1} \frac{3+n}{5+n} + \ldots$$

Teorema 7. (Teste de Séries Alternadas)

Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ ou $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$, onde $a_n > 0$ satisfaz as seguintes condições:

i) $a_{n+1} \leq a_n$,

ii) $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$,

então a série dada será convergente.

Exemplo 15. Determine se a série é convergente ou divergente, pelo método das séries alternadas:

$a)\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{n+3}{n(n+2)}$ $\qquad b)\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} \dfrac{3+n}{5+n}$ $\qquad c)\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{1}{n}$.

Solução.

a) A série dada é

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n+3}{n(n+2)} = \frac{4}{3}+\frac{5}{8}-\frac{6}{16}+\frac{7}{24}-\frac{8}{35}+...+(-1)^n \frac{n+3}{n(n+2)}+(-1)^{n+1}\frac{n+4}{(n+1)(n+3)}...$$

Comparando os termos a_{n+1} e a_n da série, observamos que a condição *i)* foi satisfeita, pois

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+4}{(n+1)(n+3)} - \frac{n+3}{n(n+2)}$$

$$= \frac{(n+4).n.(n+2)-(n+3)^2.(n+1)}{(n+1).(n+3).n.(n+2)}$$

$$= \frac{-n^2-7n-9}{(n+1).(n+3).n.(n+2)}$$

ou seja,

$a_{n+1} \leq a_n$ para todo n inteiro positivo.

Calculando o limite do n-ésimo termo, temos:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+3}{n(n+2)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}} = 0 .$$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, a condição *ii)* do Teorema 7, também foi satisfeita.

Portanto, segue do Teste de Séries Alternadas, que a série dada é convergente.

b) A série dada é

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{3+n}{5+n} = \frac{4}{6}-\frac{5}{7}+\frac{6}{8}-\frac{7}{9}...+(-1)^{n+1}\frac{3+n}{5+n}+(-1)^{n+2}\frac{4+n}{6+n}+...$$

Comparando os termos a_{n+1} e a_n da série, observamos que a condição *i)* não foi satisfeita, pois

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \frac{4+n}{6+n} - \frac{3+n}{5+n} \\
&= \frac{(4+n).(5+n) - (3+n)(6+n)}{(6+n).(5+n)} \\
&= \frac{(4+n).(5+n) - (3+n)(6+n)}{(6+n).(5+n)} \\
&= \frac{20}{(6+n).(5+n)} \quad \text{então } a_{n+1} > a_n .
\end{aligned}
$$

Calculando o limite do *n*-ésimo termo, temos:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3+n}{5+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3}{n}+1}{\frac{5}{n}+1} = 1.$$

Como $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$, a condição *ii)* do Teorema 7 não foi satisfeita, segue do Teste de Séries Alternadas, que a série é divergente.

c) A série dada é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + ... + (-1)^n \frac{1}{n} + (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1} + ...$$

Comparando os termos a_{n+1} e a_n da série, observamos que a condição *i)* foi satisfeita, pois

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\
&= \frac{n-(n+1)}{(n+1).n} \\
&= \frac{-1}{(n+1).n}
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$a_{n+1} \le a_n$ Para todo *n* inteiro positivo.

Calculando o limite do *n*-ésimo termo, temos:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Como $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, a condição *ii)* do Teorema 7, também foi satisfeita.

Portanto, segue do Teste de Séries Alternadas, que a série dada é convergente.

Observação 5: A série do exemplo anterior recebe um nome especial de série harmônica alternada.

Definição 6. (Definição de Resto) Se uma série infinita for convergente e sua soma for S, então o resto obtido quando aproximamos a soma da série pela *k*-esima soma parcial S_k, denotado por R_k, será dado por $R_k = S - S_k$.

Teorema 8. (Estimativa de Resto) Considere a série alternada $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ ou $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$, onde $a_n > 0$ e $a_{n+1} \leq a_n$ para todo *n* inteiro positivo, e $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$. Então, se R_k for o resto obtido quando aproximamos a soma da série pela soma dos *k* primeiros termos, $|R_k| \leq a_{k+1}$.

Exemplo 16. Encontre uma aproximação para soma da série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}$, com a precisão de até 4 casas decimais.

Solução.

Como podemos observar, a série dada é uma série alternada em que o termo de ordem $n+1$ é menor que o termo de ordem n, e ainda o limite de seu termo geral é igual à zero, satisfazendo as condições do Teorema 7. Logo, a série dada é convergente.

Sejam $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}$ e $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k k!}$ a *n*-ésima soma parcial.

Calculando os termos da série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}$ temos:

$n = 0 \to a_0 = \frac{(-1)^0}{2^0.0!} = 1$; $\quad n = 4 \to a_4 = \frac{(-1)^4}{2^4.4!} = \frac{1}{384} = 0{,}00260416$;

$n = 1 \to a_1 = \frac{(-1)^1}{2^1.1!} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$; $\quad n = 5 \to a_5 = \frac{(-1)^5}{2^5.5!} = -\frac{1}{3840} = -0{,}000260416$;

$n=2 \rightarrow a_2=\dfrac{(-1)^2}{2^2.2!}=\dfrac{1}{8}=0{,}125$; $\quad n=6 \rightarrow a_6=\dfrac{(-1)^6}{2^6.6!}=\dfrac{1}{46080}=0{,}0000217013$;

$n=3 \rightarrow a_3=\dfrac{(-1)^3}{2^3.3!}=-\dfrac{1}{48}=-0{,}020833$ $\quad n=7 \rightarrow a_7=\dfrac{(-1)^7}{2^7.7!}=-\dfrac{1}{645120}=-0{,}00000155$.

Para que possamos encontrar a soma dos termos com a aproximação de quatro casas decimais, devemos desconsiderar o termo a_6 no somatório das somas parciais, pois este termo possui quatro casas decimais nulas após a vírgula o que não afeta o somatório. Temos,

$$S_5=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$$

$$S_5=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}-\frac{1}{48}+\frac{1}{384}-\frac{1}{3840}\approx 0,6065.$$

Portanto, $S\approx 0,6065$ com precisão de quatro casas decimais. Assim podemos observar que $|R_5|\leq a_6$.

2.3 Convergência Absoluta

Definição 7. Uma série infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é dita absolutamente convergente se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ que é formada por valores absolutos também for convergente.

Exemplo 17. Verifique se as séries abaixo são absolutamente convergentes.

$a)\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.\left(\dfrac{5}{2^n}\right)$ $\qquad b)\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n^3}{n^5+1}$.

Solução.

a) A série dada é

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.\left(\frac{5}{2^n}\right)=-\frac{5}{2^1}+\frac{5}{2^2}-\frac{5}{2^3}+\frac{5}{2^4}+...+(-1)^n.\frac{5}{2^n}+...,$$

E a série de valores absolutos é dada por

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5}{2^n}=\frac{5}{2^1}+\frac{5}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{5}{2^4}+...+\frac{5}{2^n}+....$$

Como visto no Exemplo 7, a série de valores absolutos é convergente. Portanto a série dada inicialmente converge absolutamente.

b) A série dada é

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}.\frac{n^3}{n^5+1}=\frac{1}{2}-\frac{8}{33}+\frac{27}{244}+...+(-1)^{n+1}.\frac{n^3}{n^5+1}+...$$

E a série de valores absolutos é dada por

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3}{n^5+1}=\frac{1}{2}+\frac{8}{33}+\frac{27}{244}+...+\frac{n^3}{n^5+1}+...$, nesta série onde $a_n=\frac{n^3}{n^5+1}$, o seu denominador é $n^5+1\geq n^5 \Rightarrow \frac{1}{n^5+1}\leq\frac{1}{n^5}$, multiplicando a desigualdade por n^3, encontramos $\frac{n^3}{n^5+1}\leq\frac{n^3}{n^5}\Rightarrow\frac{n^3}{n^5+1}\leq\frac{1}{n^2}$, qualquer que seja $n\in IN$, com $n\geq 1$.

Como visto no Exemplo 11a) a série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ é convergente assim temos: que pelo Teste da Comparação, a série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^3}{n^5+1}$ e convergente, e assim a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{n^5+1}$ será absolutamente convergente.

2.4 Convergência Condicional

Definição 8. Uma série diz-se condicionalmente convergente se for convergente, mas não absolutamente convergente.

Exemplo 18. Verifique se a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+5}$ converge condicionalmente.

Solução.

A série dada é $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+5}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+...+\frac{(-1)^n}{n+5}+\frac{(-1)^{n+1}}{n+6}....$

Comparando os termos a_{n+1} e a_n da série, observamos que a condição *i)* do Teorema 7 foi satisfeita, pois

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+6}-\frac{1}{n+5}$$

$$= \frac{n+5-(n+6)}{(n+6).(n+5)} = \frac{-1}{(n+6).(n+5)},$$

ou seja, $a_{n+1} < a_n$ para todo n inteiro positivo.

Calculando o limite do n-ésimo termo, temos:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+5} = 0.$$

Como $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, a condição *ii)* do Teorema 7, também foi satisfeita.

Portanto, segue do Teste de Séries Alternadas, que a série dada é convergente.

Mas aplicando do Teste de Comparação por limite na série módulo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+5}$ em relação à série harmônica, temos:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+5}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+5}.\frac{n}{1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+5} = 1.$$

Como a série harmônica é divergente, concluímos que a série módulo também diverge, logo a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+5}$ é condicionalmente convergente.

2.5 Rearranjo de Séries

Definição 9. Por rearranjo de uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, queremos dizer uma série obtida simplesmente mudando a ordem dos termos, possivelmente um número infinito deles, ou seja, em uma série qualquer $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, se modificarmos a posição de seus elementos, obtemos uma nova série chamada de série rearranjada em relação a original.

Teorema 9.

i) Dada uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, se ela for absolutamente convergente com soma *R*, então qualquer mudança de posição em relação a seus elementos também terá soma *R*.

ii) Se uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, for condicionalmente convergente, então podemos rearranjá-la e encontrar uma nova soma.

O Teorema 9 poderá ser verificado fazendo-se algumas operações a série harmônica alternada observando o seu comportamento.

Como visto no Exemplo 15, a série harmônica alternada é convergente e pela Definição 8 ela é condicionalmente convergente. Então seja,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\frac{1}{13}-\frac{1}{14}+\frac{1}{15}-\frac{1}{16}+...=R \qquad (1)$$

Multiplicando a série por $\frac{1}{4}$ e inserindo três zeros entre cada elemento, temos:

$$0+0+0+\frac{1}{4}+0+0+0-\frac{1}{8}+0+0+0+\frac{1}{12}+0+0+0+\frac{1}{16}+...=\frac{R}{4} \qquad (2)$$

Adicionando (1) com (2) encontramos

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{14}+\frac{1}{15}-\frac{1}{8}+...=\frac{5R}{4},$$

assim podemos observar a aplicação do Teorema 9 observando que esta nova série possui os mesmo elementos da série (1), só que organizados de outra forma com soma diferente da série original.

Teorema 10. Se a série infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for absolutamente convergente, ela será convergente e $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$.

Teorema 11. (Teste da razão) Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ com $a_n \neq 0$.

i) Se $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente;

ii) Se $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ ou $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ será divergente;

iii) Se $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$, a série poderá ser convergente ou divergente, não podemos afirmar nada.

Exemplo 20. Determine se as séries são convergentes ou divergentes:

$a)\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}.\dfrac{1}{3^n}$ $\qquad b)\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}.\dfrac{n!}{2^{n+1}}$ $\qquad c)\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^3}$.

Solução.

a) Sejam $a_n=(-1)^{n+1}.\dfrac{1}{3^n}$ e $a_{n+1}=(-1)^{n+2}.\dfrac{1}{3^{n+1}}$.

Temos,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}.\frac{1}{3^{n+1}}}{(-1)^{n+1}.\frac{1}{3^n}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|(-1)^{n+2}.\frac{1}{3^{n+1}}.\frac{3^n}{(-1)^{n+1}}\right|=\frac{1}{3}<1.$$

Segue, pelo Teste da Razão, que a série dada é absolutamente convergente e, portanto, pelo Teorema 10, ela é convergente.

b) Sejam $a_n=(-1)^{n+1}.\dfrac{n!}{2^{n+1}}$ e $a_{n+1}=(-1)^{n+2}.\dfrac{(n+1)!}{2^{n+2}}$.

Temos:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}.\frac{(n+1)!}{2^{n+2}}}{(-1)^{n+1}.\frac{n!}{2^{n+1}}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|(-1)\frac{(n+1)!}{2^{n+2}}.\frac{2^{n+1}}{n!}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)}{2}.$$

Então, $\lim\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=+\infty$. Portanto, a série dada é divergente.

c) Sejam $a_n=\dfrac{1}{n^3}$ e $a_{n+1}=.\dfrac{1}{(n+1)^3}$.

Temos,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)^3}}{\frac{1}{n^3}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{n^3+3n^2+3n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^3}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3}+\frac{3n^2}{n^3}+\frac{3n}{n^3}+\frac{1}{n^3}} = 1.$$

Portanto, nenhuma conclusão quanto à convergência pode ser tirada do teste.

Mas podemos observar que a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$ corresponde a uma série do tipo $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ dita hiper-harmônica (Exemplo 12), onde $p>1$, logo a série converge.

Teorema 12 (Teste da Raiz) Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ uma série qualquer.

i) Se $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$ então $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente;

ii) Se $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ ou $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ então $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é divergente;

iii) Se $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L = 1$ nenhuma conclusão relativa à convergência pode ser tirada do teste.

Exemplo 21. Use o Teste da Raiz para determinar se as séries são convergentes ou divergentes:

$a)\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$ $\quad b)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{n+1}}{3^{2n-1}}$ $\quad$ c) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Solução.

a) Seja o termo geral da série $a_n = \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$. Aplicando o Teste da Raiz teremos;

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1.$$

Portanto, a série é convergente.

b) Seja o termo geral da série $a_n = \frac{n^{n+1}}{3^{2n-1}}$. Aplicando o Teste da Raiz temos,

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^{n+1}}{3^{2n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{1+\frac{1}{n}}}{3^{2-\frac{1}{n}}}=+\infty.$$

Portanto, a série dada é divergente.

c) Seja o termo geral da série $a_n=\dfrac{1}{n^2}$. Aplicando o Teste da Raiz, temos;

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Temos uma indeterminação do tipo 0^0. Chamaremos o limite de um número L e aplicaremos o $\ln$, então;

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=L\Rightarrow\ln\left[\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\right]=\ln L\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\right]=\ln L$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\left[\ln\left(n^2\right)^{-\frac{1}{n}}\right]=\ln L\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\left[\ln\left(n^2\right)^{-\frac{1}{n}}\right]=\ln L$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\left[-\frac{\ln n^2}{n}\right]=\ln L.$$

Aplicando a regra de L'Hospital para o cálculo do limite temos,

$$\lim_{n\to+\infty}\left[-\frac{\ln n^2}{n}\right]=\ln L\Rightarrow-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n}{n^2}\right)=\ln L\Rightarrow\ln L=-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n}{n^2}\right)\Rightarrow\ln L=0\Rightarrow L=1.$$

Portanto, nenhuma conclusão quanto à convergência pode ser tirada do teste.

Agora, observemos que a série dada é a série hiper-harmônica, e como visto no Exemplo 12, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$ é convergente.

CAPÍTULO 3

3.1 SÉRIES DE POTÊNCIAS

As séries de potências de *x* são uma generalização da noção de polinômio.

Definição 10. Chama-se série de potências de *x* com coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3, $a_4,...,a_n...$, a qualquer expressão da forma.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + ... + a_n x^n + ...$$

Um exemplo muito importante para os estudos das séries de potências é a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^n + ...,$$

onde $a_n = 1$ para qualquer que seja *n*. Como visto na Seção 1.1, temos: uma série geométrica onde o primeiro termo é 1 e a razão é x, daí podemos verificar pela Proposição 1, se $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ a série será convergente e convergirá para $\dfrac{1}{1-x}$, se $|x| \geq 1$ a série será divergente.

De forma geral, podemos representar uma série de potências por

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + a_4(x-a)^4 + ... + a_n(x-a)^n + ...,$$

que é denominada série de potências centrada em *a* (ou ainda ao redor de *a*).

Se considerarmos $a_n = 1$ para todo *n* na série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$, temos:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (x-a)^n = 1 + (x-a) + (x-a)^2 + (x-a)^3 + (x-a)^4 + ... + (x-a)^n + ...$$

que é uma série geométrica onde o primeiro termo é 1 e a razão é $x-a$. Analisando a convergência da série, temos: de acordo com a Proposição 1, que ela será convergente para $|x-a| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-a < 1 \Leftrightarrow -1+a < x < 1+a$ e divergente para $|x-a| \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1+a$ ou $x \leq -1+a$.

Uma série de potências pode convergir para alguns valores de x e divergir para outros, como pode ser observado na série apresentada acima. A série de potências convergente define uma função, cuja soma é dada por $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, e o seu domínio de convergência é o conjunto de todos os x para os quais a série converge.

Teorema 13 (Teorema da convergência para série de potência) Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ uma série de potências. Existem três possibilidades para a convergência da série:

i) A série converge apenas quando $x=a$;

ii) A série converge para todo $x \in \mathbb{R}$;

iii) Existe um número real positivo R tal que a série converge se $|x-a|<R$ e divergente se $|x-a|>R$.

O número R é chamado de *raio de convergência*. Convenciona-se que o raio $R=0$, quando a série converge apenas quando $x=a$, e o raio $R=\infty$ quando a série converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

O conjunto de todos os valores de x para os quais a série converge é chamado de *intervalo de convergência.*

Exemplo 19 Encontre o raio e o intervalo de convergência de cada uma das séries dadas.

$$a)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \qquad b)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n} \qquad c)\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{\left(\ln|n|\right)^n} \qquad d)\sum_{n=2}^{+\infty} n!(x-5)^n .$$

Solução.

a) Para a série dada temos:

$$a_n=\frac{x^n}{n+1} \text{ e } a_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{n+2}.$$

Assim, aplicando o teste da razão,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x\cdot(n+1)}{n+2}\right| = \lim_{n\to+\infty}|x|\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n+2} = |x|\cdot 1 = |x|.$$

Logo, pelo Teste da razão a série de potências é absolutamente convergente quando $|x| < 1$.

A série é divergente quando $|x| > 1$. O raio de convergência é $R = 1$.

Se $x = \pm 1$, o Teste da Razão falha. Quando $x = 1$, a série de potências dada torna-se:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1^n}{n+1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

que é divergente, pois corresponde a uma série harmônica.

Quando $x = -1$ temos:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

que é convergente, pois corresponde a uma série harmônica alternada do tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots .$$

Concluímos, então que o intervalo de convergência da série de potências dada é $-1 \leq x < 1$. A série é absolutamente convergente quando $-1 < x < 1$ e é condicionalmente convergente quando $x = 1$. Se $x < -1$ ou $x \geq 1$, a série é divergente.

b) Para a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n}$ temos:,

$$a_n = \frac{(x+3)^n}{2^n} \quad \text{e} \quad a_{n+1} = \frac{(x+3)^{n+1}}{2^{n+1}} \quad .$$

Assim, aplicando o teste da razão vem que

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\dfrac{(x+3)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\dfrac{2^n}{(x+3)^n}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{x+3}{2} \right| = \left| \frac{x+3}{2} \right| .$$

Logo, a série de potências é absolutamente convergente quando $\left| \frac{x+3}{2} \right| < 1$ ou equivalente $-1 < \frac{x+3}{2} < 1$, isto é, $-5 < x < -1$. A série será divergente quando $\left| \frac{x+3}{2} \right| > 1 \Leftrightarrow x > -1$ ou $x < -5$.

O raio de convergência é $R = 2$

Para os casos em que $x = -5$ e $x = -1$, temos:

se $x = -5$ a série é

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-5+3)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n=1-1+1-1+1+...$$

que corresponde a uma série geométrica de razão $q=-1$. Logo pela Proposição 1 a série é divergente.

Se $x=-1$ a série será

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1+3)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(1)^n=1+1+1+1+...,$$

que corresponde a uma série geométrica de razão $q=1$. Logo pela Proposição 1 a série é divergente.

c) Vamos utilizar o Teste da Raiz para obter:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{(\ln|n|)^n}\right|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|}{\ln|n|}=|x|\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln|n|}=0,$$

pelo Teorema 12 podemos observar que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0<1$ e assim concluir que a série converge para todos os valores de *x*, logo o intervalo de convergência é $]-\infty,+\infty[$ e o raio de convergência é $R=\infty$.

d) Como vimos no Teorema 13, a série converge em $x=a$, ou seja, a série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n!(x-5)^n$ converge para $x=5$, pois esta centrada neste valor.

Vamos utilizar o Teste da Razão para verificar se a série converge para valores de $x\neq 5$. Então,

$a_n=n!(x-5)^n$ e $a_{n+1}=(n+1)!(x-5)^{n+1}$ daí

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)!(x-5)^{n+1}}{n!(x-5)^n}\right|=\lim_{n\to+\infty}|(n+1).(x-5)|=+\infty.$$

Portanto, a série é divergente para todos os valores de $x\neq 5$ e convergente apenas para $x=5$ e o seu raio de convergência $R=0$.

3.2 Derivação e Integração de Séries de Potências

Vimos na Seção 3.1 que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^n + ...$, converge e converge para $\frac{1}{1-x}$ quando $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

Em geral dada uma série de potências, conseguimos determinar o intervalo de convergência, mas não encontramos uma expressão para a função soma. E a partir da manipulação da série geométrica poderemos representar algumas funções através das séries de potências, ou ainda utilizando diferenciação e integração de séries de potências conhecidas.

Manipulando a série geométrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^n + ... = \frac{1}{1-x} \tag{1}$$

com a substituição de x por alguns valores e admitindo $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ temos,

se substituirmos x por x^2, obtemos a igualdade

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + ... + x^{2n} + ... = \frac{1}{1-x^2}, \quad . \tag{2}$$

Assim podemos observar a série acima contém os termos da série (1), em que o expoente é par, mas se multiplicarmos a série por x obtemos uma soma de potencias ímpares, ou seja

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + ... + x^{2n+1} + ... = \frac{x}{1-x^2}.$$

Se substituir x por $-x$ em (1), temos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + ... + (-1)^n x^n + ... = \frac{1}{1+x}, \qquad |-x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Se substituirmos x por $-x^2$ em (1), temos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + ... + (-1)^n \cdot x^{2n} + ... = \frac{1}{1+x^2}, \qquad |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Outro exemplo de manipulação da série geométrica corresponde a determinação de uma série de potências para representar uma função. Ou seja, dada a função $f(x) = \frac{1}{2+x}$, podemos observar a sua semelhança com a série (1), então vamos manipular a função para chegar a série geométrica. Logo dividindo numerador e denominador por 2 temos,

$$f(x)=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{1+\frac{x}{2}}\right).$$

Podemos observar que a expressão entre parênteses é semelhante a função $\frac{1}{1+x}$ que tem representação em série dada por

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n=1-x+x^2-x^3+x^4+\ldots+(-1)x^n+\ldots=\frac{1}{1+x}.$$

Substituindo x por $\frac{x}{2}$ na série acima e chegamos a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{16}+\ldots+(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n+\ldots=\frac{1}{1+\frac{x}{2}}.$$

Portanto, $f(x)=\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{1+\frac{x}{2}}\right)=\frac{1}{2}.(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n$, ou ainda, $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^{n+1}}$, com intervalo de convergência $\left|\frac{x}{2}\right|<1\Leftrightarrow -2<x<2$.

Teorema 14. (Derivação e integração termo a termo)

Seja $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ uma série de potência com R > 0. Então a função $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ definida no intervalo $a-R<x<a+R$ é derivável, contínua e podemos calcular,

i) $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\,a_n(x-a)^{n-1}$;

ii) $\int f(x)dx=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}+C$.

Observação 6: O raio de convergência da derivada e da integral é o mesmo raio da série determinada pela função $f(x)$.

Exemplo 20. Encontre uma representação em séries de potências para cada uma das funções e determine o intervalo de convergência.

$a)\ f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^3}$ $\qquad$ $b)\ g(x)=\ln|2+x|$ $\qquad$ $c)\ h(x)=arctg\,x$.

Solução.

a) Observando a função $g(x)=\dfrac{1}{1+x}$, se calcularmos a sua derivada segunda, encontramos $g''(x)=\dfrac{2}{(1+x)^3}$, cujo resultado é semelhante a função $f(x)$.

Como queremos representar a função $f(x)$ como série de potências, então vamos utilizar o Teorema 14 e a manipulação da série geométrica como foi visto na Seção 3.2. Temos,

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot x^n \text{ , cujo o raio de convergência é } |-x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1.$$

Derivando ambos os membros da igualdade $\dfrac{1}{1+x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot x^n$ até a segunda ordem temos:

$$\frac{2}{(1+x)^3}=\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\cdot n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2} \text{ , ou seja, } \frac{1}{(1+x)^3}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}}{2}.$$

Logo, a representação em série de potências de $f(x)$ é $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}}{2}$, com $|-x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$.

b) A função $g(x)=\ln|2+x|$ pode ser obtida a partir da $\displaystyle\int\frac{dx}{2+x}=\ln|2+x|+C$. Então para que possamos representar $g(x)$ como série de potências, partiremos do que foi visto na Seção 3.2, ou seja, a função $f(x)=\dfrac{1}{2+x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^{n+1}}$ com $\left|\dfrac{x}{2}\right|<1 \Leftrightarrow -2<x<2$. Aplicando o Teorema 14 e integrando os dois membros da igualdade

$$\frac{1}{2+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^{n+1}} \text{ , obtemos}$$

$$\ln|2+x|+C=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}\cdot(n+1)} \text{ ,com raio de convergência } \left|\frac{x}{2}\right|<1 \Leftrightarrow -2<x<2.$$

Como a representação acima vale para todos os valores de x pertencentes ao intervalo $-2 < x < 2$, então vamos fazer $x = 0$, para eliminarmos a constante *C*. Logo, para $x = 0$, temos

$$\ln|2+0| + C = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{0^{n+1}}{2^{n+1} \cdot (n+1)} \Rightarrow C = -\ln 2 .$$

Portanto $\ln|2+x| - \ln 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{2^{n+1} \cdot (n+1)}$.

c) Calculando a derivada de $h(x) = arctg\, x$, obtemos $h'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Da Seção 3.2 temos

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} ,\ |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 .$$

Assim,

$$h(x) = arctg\, x = \int \frac{1}{1+x^2} dx .$$

Substituirmos $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}$ na integral temos

$$\int \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\int x^{2n} dx \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + c .$$

Para calcular o valor da constante c, faremos $x = 0$. Logo,

$$h(0) = arctg\, 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{0^{2n+1}}{2n+1} + c \Rightarrow c = 0 .$$

Portanto, a série de potências para a função $h(x) = arctg\, x$ é $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ com $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

CAPÍTULO 4

Até o momento, encontramos representações em séries de potências para certa classe restrita de funções. Nesta seção estudaremos uma técnica mais geral para a construção de séries de potências. Com o auxílio de séries calcularemos integrais de funções que não possuem primitivas expressas por funções elementares.

4.1 Séries de Taylor

Como foi visto anteriormente, uma série de potências pode representar uma função quando for convergente. Por exemplo:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \text{ para } |x| < 1.$$

Trabalhos notáveis realizados no sentido da associação de funções e séries foram desenvolvidos pelos matemáticos Brook Taylor (1685-1731) e Colin MacLaurin (1698-1746).

A idéia proposta por Taylor era supor que uma função poderia ser escrita na forma de uma série de potências, ou seja,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$$

ou

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + a_3(x-a)^4 + \ldots. + a_n(x-a)^n + \ldots$$

Como vimos no Teorema 14, as funções definidas por séries de potências possuem derivadas em todas as ordens, e as séries das derivadas convergem no mesmo intervalo de convergência da série inicial.

Calculando as derivadas até a ordem n temos:

$$f'(x) = a_1 + 2.a_2(x-a) + 3.a_3(x-a)^2 + 4.a_3(x-a)^3 + \ldots. + n.a_n(x-a)^{n-1} + \ldots$$

$$f''(x) = 1.2.a_2 + 2.3.a_3(x-a) + 3.4.a_3(x-a)^2 + \ldots. + (n-1).n.a_n(x-a)^{n-2} + \ldots$$

$$f'''(x) = 1.2.3.a_3 + 2.3.4.a_3(x-a) + \ldots. + (n-2).(n-1).n.a_n(x-a)^{n-3} + \ldots$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = 1.2.3\ldots(n-2).(n-1).n.a_n + 1.2.3\ldots(n-2).(n-1).n.(n+1)a_{n+1}(x-a) + \ldots.$$

Fazendo $x = a$, na função f e nas derivadas obtemos:

$$f(a) = a_0$$

$$f'(a) = 1 \cdot a_1$$

$$f''(a) = 1 \cdot 2 \cdot a_2$$

$$f'''(a) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(a) = n!a_n.$$

Isolando o n-ésimo termo obtemos,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Assim, substituindo o n-ésimo termos na função $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ encontramos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n,$$

ou seja,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}.(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n + \ldots,$$

esta expressão é denominada de **série de Taylor**.

Exemplo 22. Encontre a série de Taylor de ordem gerada por f em a.

$a)\ f(x) = e^x \quad a = 2$ $\qquad b)\ g(x) = senx \quad a = \dfrac{\pi}{4}$

$c)\ h(x) = \cos x \quad a = \pi$ $\qquad d)\ f(x) = \ln x \quad a = 1$.

Solução.

a) Calculando as derivadas de todas as ordens encontramos;

$$f'(x) = e^x,\ f''(x) = e^x,\ f'''(x) = e^x\ \ldots\ f^{(n)}(x) = e^x.$$

Avaliando $f(x) = e^x$ e suas derivadas em $x = a$ para $a = 2$, temos:

$$f(2) = f'(2) = f'(2) = \cdots = f^{(n)}(2) = e^2.$$

A série de Taylor é dada por

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}.(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n + \ldots$$

Como $a=2$ temos,

$$f(x)=f(2)+\frac{f'(2)}{1!}.(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}.(x-2)^2+\frac{f'''(2)}{3!}.(x-2)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(2)}{n!}.(x-2)^n+\cdots.$$

Portanto,

$$f(x)=e^2+\frac{e^2}{1!}.(x-2)+\frac{e^2}{2!}(x-2)^2+\frac{e^2}{3!}.(x-2)^3+\cdots+\frac{e^2}{n!}.(x-2)^n+\cdots$$

ou seja,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^2}{n!}.(x-2)^n$$

b) Calculando as derivadas de todas as ordens encontramos;

$$g'(x)=\cos x,\ g''(x)=-senx,\ g'''(x)=-\cos x$$

$$g^{(n)}(x)=\begin{cases}\cos x,\ para\ n=1,5,9,...\\ -senx,\ para\ n=2,6,10,...\\ -\cos x,\ para\ n=3,7,11,...\\ senx,\ para\ n=4,8,12,...\end{cases}.$$

Avaliando $g(x)=senx$ e suas derivadas em $x=a$ para $a=\frac{\pi}{4}$, temos:

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=sen\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad g''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-sen\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$g'''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad g^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=sen\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad g^{(5)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A série de Taylor é dada por

$$g(x)=g(a)+\frac{g'(a)}{1!}.(x-a)+\frac{g''(a)}{2!}.(x-a)^2+...+\frac{g^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n+...$$

Como $a=\frac{\pi}{4}$ temos,

$$g(x)=g\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{g'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1!}.\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{g''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2!}.\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{g'''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{3!}.\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\frac{g^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{4!}.\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4...$$

Portanto,

$$g(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1!}.\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2!}.\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{3!}.\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{4!}.\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4+...$$

$$g(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left\{1+\frac{1}{1!}.\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cdot\frac{1}{2!}.\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}.\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+...+(-1)^{2n}\cdot\left[\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]\cdots\right\}$$

c) Calculando as derivadas de todas as ordens encontramos;

$h'(x)=-senx$, $\quad h''(x)=-\cos x$, $\quad h'''(x)=senx$, $\quad h^{(4)}(x)=\cos x$,

$h^{(5)}(x)=-senx$

$$h^{(n)}(x)=\begin{cases}-senx,\ para\ n=1,5,9,...\\-\cos x,\ para\ n=2,6,10,...\\ \ \ senx,\ para\ n=3,7,11,...\\ \ \ \cos x,\ para\ n=4,8,12,...\end{cases}$$

Avaliando $h(x)=\cos x$ e suas derivadas em $x=a$ para $a=\pi$, temos:

$h(\pi)=\cos\pi=-1$, $\quad h'(\pi)=-sen\,\pi=0$, $\quad h''(\pi)=-\cos\pi=1$,

$h'''(\pi)=sen\,\pi=0$, $\quad h^{(4)}(\pi)=\cos\pi=-1$, $\quad h^{(5)}(\pi)=-sen\,\pi=0$.

A série de Taylor é dada por

$$h(x)=h(a)+\frac{h'(a)}{1!}.(x-a)+\frac{h''(a)}{2!}.(x-a)^2+...+\frac{h^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n+...$$

Como $a=\pi$ temos,

$$h(x)=h(\pi)+\frac{h'(\pi)}{1!}.(x-\pi)+\frac{h''(\pi)}{2!}.(x-\pi)^2+\frac{h'''(\pi)}{3!}.(x-\pi)^3+\frac{h^{(4)}(\pi)}{4!}.(x-\pi)^4+...$$

Portanto,

$$h(x)=-1+\frac{0}{1!}.(x-\pi)+\frac{1}{2!}.(x-\pi)^2+\frac{0}{3!}.(x-\pi)^3-\frac{1}{4!}.(x-\pi)^4+...$$

ou seja,

$$h(x)=-1+\frac{1}{2!}.(x-\pi)^2-\frac{1}{4!}.(x-\pi)^4+...+(-1)^{n+1}.\frac{(x-\pi)^{2n}}{2n!}+...$$

d) Calculando as derivadas de todas as ordens encontramos;

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $\quad f''(x)=-\frac{1}{x^2}$, $\quad f'''(x)=\frac{2}{x^3}$,

$f^{(4)}(x)=-\frac{6}{x^4}$, $\quad f^{(5)}(x)=\frac{24}{x^5}$,... $\quad f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n}$.

Avaliando $f(x) = \ln x$ e suas derivadas em $x = a$ para $a = 1$, temos:

$f(1) = \ln 1 = 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$, $f''(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$, $f'''(1) = \frac{2}{1^3} = 2$, $f^{(4)}(1) = -\frac{6}{1^4} = -6$,

A série de Taylor é dada por

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n + \ldots.$$

Como $a = 1$, temos

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}\cdot(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}\cdot(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}\cdot(x-1)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n + \ldots$$

ou seja,

$$f(x) = 0 + \frac{1}{1!}\cdot(x-1) + \frac{(-1)}{2!}\cdot(x-1)^2 + \frac{2}{3!}\cdot(x-1)^3 + \ldots + (-1)^{n+1}\cdot\frac{(n-1)!}{n!\cdot x^n}\cdot(x-1)^n + \ldots$$

ou ainda,

$$f(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot(x-1)^n + \ldots \text{ para } |x-1| < 1$$

Portanto,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot(x-1)^n \quad \text{para } |x-1| < 1.$$

4.2 Série de Maclaurin

A série de MacLaurin é um caso especial da fórmula de Taylor quando $a = 0$, ou seja, partindo da série de Taylor

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n + \ldots,$$

e fazendo $a = 0$, temos a forma geral da Série de MacLaurin que é dada por

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n + \ldots$$

ou ainda

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n.$$

Exemplo 23. Desenvolver as funções abaixo em série de MacLaurin.

$a)\ f(x) = e^x$ $\qquad b)\ g(x) = \operatorname{sen} x$ $\qquad c)\ h(x) = \cos x$.

Solução.

a) Calculando as derivadas em todas as ordens da função $f(x)=e^x$, e avaliando em $a=0$, temos:

$f(x)=e^x \to f(0)=e^0=1$, $\quad f'(x)=e^x \to f'(0)=e^0=1$, $\quad f''(x)=e^x \to f''(0)=e^0=1$,

$f'''(x)=e^x \to f'''(0)=e^0=1$, ... $f^{(n)}(x)=e^x \to f^{(n)}(0)=e^0=1$.

$$\mathrm{e}^x = f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n+\ldots$$

$$\mathrm{e}^x = e^0+\frac{e^0}{1!}.(x-0)+\frac{e^0}{2!}(x-0)^2+\frac{e^0}{3!}.(x-2)^3+\cdots+\frac{e^0}{n!}.(x-0)^n+\cdots$$

Logo a série de MacLaurin é dada por

$$\mathrm{e}^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

b) Calculando as derivadas em todas as ordens da função $g(x)=senx$, e avaliando em $a=0$, temos:

$g(x)=\operatorname{sen}x \to g(0)=0$, $\quad g'(x)=\cos x \to g'(0)=1$, $\quad g''(x)=-\operatorname{sen}x \to g''(0)=0$,

$g'''(x)=-\cos x \to g'''(0)=-1$, $\quad g^{(4)}(x)=\operatorname{sen}x$, então $g^4(0)=0$,...

Assim,

$$\operatorname{sen}x = g(0)+g'(0)\cdot x+\frac{g''(0)}{2!}\cdot x^2+\ldots+\frac{g^n(0)}{n!}\cdot x^n+\ldots$$

Logo a série de MacLaurin é dada por:

$$\operatorname{sen}x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}.$$

c) Calculando as derivadas em todas as ordens da função $h(x)=\cos x$, e avaliando em $a=0$, temos:

$h(x)=\cos x \to h(0)=1$, $\quad h'(x)=-senx \to h'(0)=0$, $\quad h''(x)=-\cos x \to h''(0)=-1$,

$h'''(x)=senx \to h'''(0)=0$, $\quad h^4(x)=\cos x \to h^4(0)=1$,...

Assim,

$$\cos x = h(0)+h'(0)\cdot x+\frac{h''(0)}{2!}\cdot x^2+\ldots+\frac{h^n(0)}{n!}\cdot x^n+\ldots$$

Logo a série de MacLaurin é dada por:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} .$$

4.3 Combinando Séries de Taylor

Nesta seção encontraremos série de Taylor para algumas funções a partir de séries de Taylor obtidas na seção anterior.

Exemplo 24. Determine a Série de Taylor para cada uma das funções abaixo.

$a)\ f(x) = e^{-x}$ $\quad b)\ g(x) = x \cdot e^{x}$ $\quad c)\ h(x) = sen^2 x$ $\quad d)\ i(x) = \cos^2 x$

$e)\ j(x) = x^2 \cdot senx$ $\quad f)\ l(x) = senx^2$ $\quad g)\ m(x) = \dfrac{arctg\, x}{x}$.

Solução.

a) Como vimos no Exemplo 23, a representação da função $g(x) = e^x$ em séries de potências é $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Para determinar $f(x) = e^{-x}$ vamos substituir *x* por –*x* em $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, ou seja,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n!} .$$

Portanto, a representação em série de Taylor para função $f(x) = e^{-x}$ é $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n!}$.

b) No exemplo anterior nos referimos a função $g(x) = e^x$, cuja representação em séries de potências é $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Queremos representar $g(x) = x \cdot e^x$, então vamos substituir e^x, pela expressão $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ daí vem que

$$g(x) = x \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} .$$

Portanto, a representação em série de Taylor para função $g(x) = x \cdot e^x$ é $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$.

c) Para a função $h(x) = sen^2 x$, podemos utilizar a identidade trigonométrica $sen^2 x = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2x)$ e assim como vimos no Exemplo 23 a função

$$f(x)=\cos x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Substituindo *x* por *2x*, temos

$$g(x)=\cos 2x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}.$$

Então,

$$h(x)=sen^2 x=\frac{1}{2}\cdot(1-\cos 2x)\Rightarrow h(x)=\frac{1}{2}\cdot(1-\cos 2x)$$

$$h(x)=\frac{1}{2}\cdot\left[1+(-1)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot(2x)^{2n}}{(2n)!}\right]\Rightarrow h(x)=\frac{1}{2}\cdot\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{2n}\cdot x^{2n}}{(2n)!}\right].$$

Portanto, a série de Taylor é $h(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{2n-1}\cdot x^{2n}}{(2n)!}$.

d) Uma identidade trigonométrica nos auxiliará na determinação da série de Taylor para a função $i(x)=\cos^2 x=\frac{1}{2}\cdot(1+sen\,2x)$. Como visto no Exemplo 23 a função $g(x)=senx=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Substituindo *x* por *2x* temos: $sen\,2x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Então,

$$i(x)=\cos^2 x=\frac{1}{2}\cdot\left[1+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]\Rightarrow i(x)=\frac{1}{2}\cdot\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$$

$$i(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot(2x)^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Portanto, a série de Taylor é $i(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n}\cdot x^{2n}}{(2n+1)!}$.

e) Vimos no Exemplo 23 que $senx=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Como queremos determinar a série de Taylor para a função $j(x)=x^2\cdot senx$, temos:

$$j(x)=x^2\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+3}}{(2n+1)!}.$$

Logo, a representação em série de Taylor é $j(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+3}}{(2n+1)!}$.

f) Para encontrarmos a série de Taylor para a função $l(x) = sen x^2$, vamos considerar $sen x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ e substituir x por x^2 onde encontraremos

$$sen\, x^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{(x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}.$$

Portanto, a representação em série de Taylor para a função $l(x) = sen x^2$ é $l(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$.

g) Para representar $m(x) = \frac{arc\,tg\, x}{x}$ como série de Taylor, vamos utilizar a representação para $f(x) = arc\,tg\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ vista no Exemplo 20. Como $m(x) = \frac{arc\,tg\, x}{x} = \frac{1}{x} \cdot arc\,tg\, x$, substituindo $arc\,tg\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, temos

$$m(x) = \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Portanto, a série de Taylor para a função proposta é $m(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$.

4.4. Convergência de séries de Taylor

Dada uma função com derivadas de todas as ordens, podemos escrever a série de Taylor corresponde. Surge a seguinte questão: a série, no seu intervalo de convergência, representa a função? Isto é, a função é igual à soma da série de Taylor no seu intervalo de convergência? Em geral, a resposta é negativa. No livro Thomas página 65, o autor apresenta um exemplo, que mostra uma função cuja série de Taylor converge para todo x, mas converge para $f(x)$ apenas em $x = 0$. O Teorema 16 fornece condição suficiente para que ocorra a igualdade. Antes de enunciá-lo precisamos da Definição 11 e do Teorema 15.

Definição 11. Consideremos uma função f com todas as derivadas até ordem n e um intervalo contendo a. Então para $n \in \mathbb{N}$ definimos *Polinômio de Taylor* por

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}.(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n .$$

Teorema 15. Se *f* uma função derivável até a ordem *n+ 1* em um intervalo aberto *I,* com $a \in I$, então para todo $x \in I$ existe um número c entre x e a tal que,

$$f(x) \; = P_n(x) + R_n(x),$$

onde $R_n\,(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ é chamado de resto.

Teorema 16. Se $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, onde P_n o polinômio de Taylor de grau *n* e $R_n(x)$ o resto da série de Taylor de *f* em *a*, e $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$ para $|x-a| < R$, então f é igual a soma da série de Taylor neste intervalo, e escrevemos $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$.

4.5 Aplicações das Séries de Potências

Nesta seção usaremos a teoria de séries de potências para calcular valor aproximado para função logarítmica, calcular limite de função e calcular integrais que não possuem primitivas expressas por funções elementares.

Exemplo 25. Calcule o valor aproximado do $\ln(0,8)$ com precisão de 4 casas decimais.

Solução.

Como vimos no Exemplo 22, a função $f(x) = \ln x$ é representada pela série de Taylor

$f(x) = \ln x = (x-1) - \dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{(x-1)^3}{3} - \dfrac{(x-1)^4}{4} + ... + \dfrac{(-1)^n \cdot (x-1)^{n+1}}{n+1}$, ou seja,

$f(x) = \ln x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot (x-1)^{n+1}}{n+1}$. Então vamos calcular o valor de $\ln(0,8)$, substituindo x por 0,8, na série. Logo,

$$f(0,8) = \ln(0,8) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot (0,8-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-0,2)^{n+1}}{n+1}.$$

Desenvolvendo o somatório obtemos

$$\ln(0,8) \approx (-0,2) - \frac{(-0,2)^2}{2} + \frac{(-0,2)^3}{3} - \frac{(-0,2)^4}{4} + \frac{(-0,2)^5}{5}$$

$$\ln(0,8) \approx -0,2 - 0,02 - 0,002667 - 0,0004 - 0,000064$$

$$\ln(0,8) \approx -0,223131.$$

Exemplo 26. Avalie a integral indefinida $\int \frac{arctg\, x}{x} dx$ como uma série de potências.

Solução.

Como vimos no Exemplo 24 a série $\frac{arctg\, x}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$. Então para calcularmos a integral indefinida $\int \frac{arctg\, x}{x} dx$, vamos substituir a função $\frac{arctg\, x}{x}$, por sua representação em séries de potências. Logo

$$\int \frac{arctg\, x}{x} dx = \int \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2n+1} \int x^{2n} dx \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)^2}.$$

Portanto,

a integral $\int \frac{arctg\, x}{x} dx$ em série de potências é $\int \frac{arctg\, x}{x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)^2} + C$.

Exemplo 27. Avalie as integrais abaixo utilizando a série de potências

$a)\ \int e^{-x^2} dx$ $\qquad\qquad$ $b)\ \int \frac{sen\, x}{x} dx$.

Solução.

a) No Exemplo 23 vimos que $f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, se substituirmos x por $-x^2$, obtemos

$g(x) = e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{n!}$, se substituirmos este valor na integral, temos;

$$\int e^{-x^2}dx = \int \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \left(\int x^{2n} dx \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \left(\int x^{2n} dx \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Portanto, a integral indefinida é dada por $\int e^{-x^2}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!}$.

b) Vimos na seção anterior que $sen\, x = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Queremos calcular a $\int \frac{sen\, x}{x} dx$, então vamos manipular a expressão da série do seno, ou seja, multiplicando ambos os membros da igualdade por $\frac{1}{x}$, obtemos:

$$\frac{1}{x} \cdot sen\, x = \frac{1}{x} \cdot \left[\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] \Rightarrow \frac{sen\, x}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Substituindo na integral temos

$$\int \frac{sen\, x}{x} dx = \int \left[\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \right] dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \left(\int x^{2n} dx \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \left(\int x^{2n} dx \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)! \cdot (2n+1)}.$$

Portanto, $\int \frac{sen\, x}{x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)! \cdot (2n+1)}$.

Exemplo 28. Calcule as integrais definidas como série de potências com precisão de até n casas decimais indicadas.

$a) \int_0^{0,2} \frac{1}{x^4+1} dx, \quad n = 6$ $\qquad$ $b) \int_0^1 sen\left(x^2\right) dx, \quad n = 3.$

Solução.

a) Como vimos na introdução de séries de potências a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^n + ... = \frac{1}{1-x}, \text{ para } |x| < 1.$$

Substituindo x por $-x^4$, temos

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-x^4\right)^n = 1 - x^4 + x^8 - x^{12} + x^{16} + ... + \left(-1\right)^n \cdot x^{4n} + ... = \frac{1}{1+x^4}\text{ , para } \left|-x^4\right| < 1,$$

ou seja, $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \cdot x^{4n} = \frac{1}{1+x^4}$. Vamos substituir esta expressão na integral e integrá-la termo a termo. Então,

$$\int \frac{1}{x^4+1}dx = \int (-1)^n \cdot x^{4n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \ (-1)^n \cdot \frac{x^{4n+1}}{4n+1} + C$$

ou seja,

$$\int \frac{1}{x^4+1}dx = x - \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{13}}{13} + \frac{x^{17}}{17} + ... + \left(-1\right)^n \cdot \frac{x^{4n+1}}{4n+1} + C + ...,$$

Adotando $C = 0$ e calculando a integral definida obtemos

$$\int_0^{1/5} \frac{1}{x^4+1}dx = \left[x - \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{13}}{13} + \frac{x^{17}}{17} + ... + \left(-1\right)^n \cdot \frac{x^{4n+1}}{4n+1} + ... \right]_0^{1/5}$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \frac{1}{9 \cdot 5^9} - \frac{1}{13 \cdot 5^{13}} + \frac{1}{17 \cdot 5^{17}} + ... + \frac{\left(-1\right)^n}{\left(4n+1\right) \cdot 5^{4n+1}} + ...$$

Negligenciando a partir do terceiro termo do somatório temos

$$\int_0^{0,2} \frac{1}{x^4+1}dx = 0,2 - 0,0000064 = 0,1999936\,.$$

b) Para a função $f(x) = sen\left(x^2\right)$, vimos no Exemplo 24 que era representada pela série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$. Então vamos substituir esta expressão na integral e integrá-la termo a termo. Então,

$$\int sen\left(x^2\right)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int \left[x^{4n+2} \right] dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-1\right)^n \cdot x^{4n+3}}{(2n+1)! \cdot (4n+3)} + C$$

$$\int sen\left(x^2\right)dx = \frac{x^3}{1! \cdot 3} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \frac{x^{11}}{5! \cdot 11} - \frac{x^{15}}{7! \cdot 13} + ... + \frac{\left(-1\right)^n \cdot x^{4n+3}}{(2n+1)! \cdot (4n+3)} + C + ...$$

Adotando $C = 0$ e calculando a integral definida obtemos;

$$\int_0^1 sen\left(x^2\right)dx = \left[\frac{x^3}{1! \cdot 3} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \frac{x^{11}}{5! \cdot 11} - \frac{x^{15}}{7! \cdot 13} + ... + \frac{\left(-1\right)^n \cdot x^{4n+3}}{(2n+1)! \cdot (4n+3)} + ... \right]_0^1$$

$$= \frac{1^3}{1! \cdot 3} - \frac{1^7}{3! \cdot 7} + \frac{1^{11}}{5! \cdot 11} - \frac{1^{15}}{7! \cdot 13} + ...$$

Negligenciando a partir do quinto termo do somatório chegamos que

$$\int_0^1 sen\left(x^2\right)dx == 0,3333 - 0,0238 = 0,3095\ .$$

Exemplo 29. Use as séries para avaliar os limites abaixo.

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{x - arctgx}{x^3} \qquad\qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{senx - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}\ .$$

Solução.

a) Vimos no Exemplo 20 que $arctgx = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$. Então vamos substituir $arctg\,x = 1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$, em $\lim_{x\to 0}\frac{x - arctg\,x}{x^3}$, temos;

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3} + -\frac{x^2}{5} + \frac{x^4}{7} + \ldots\right) = \frac{1}{3}\ .$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - arctg\,x}{x^3} = \frac{1}{3}\ .$$

b) No Exemplo 23 mostramos que $senx = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$, então substituindo $senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$ em $\lim_{x\to 0}\frac{senx - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$, temos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}\ldots\right) - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}\ldots}{x^5}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{5!} - \frac{x^2}{7!} + \frac{x^4}{9!}\ldots\right) = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}\ .$$

Portanto, $\lim_{x\to 0}\frac{senx - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} = \frac{1}{120}$.

Exemplo 30. Seja $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$. Calcule a série para $f''(x)$ e verifique que $f''(x)=-f(x)$.

Solução.

Como $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\ldots$, derivando a primeira vez obtemos;

$$f'(x)=0-\frac{2x^1}{2!}+\frac{4x^3}{4!}-\frac{6x^5}{6!}+\ldots$$

$$=-x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\ldots.$$

Derivando novamente temos

$$f''(x)=-1+\frac{3x^2}{3!}-\frac{5x^4}{5!}+\ldots$$

$$f''(x)=-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\ldots$$

$$f''(x)=-1\underbrace{\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right]}_{f(x)}.$$

Portanto, verificamos que $f''(x)=-f(x)$.

CONCLUSÃO

Nesse trabalho foram apresentadas as séries numéricas e os procedimentos adotados para determinação de uma fórmula para sua soma parcial, a partir de observações feitas nos termos de ordem n e ordem $n+1$. Vimos ainda alguns tipos especiais de séries, tais como a série geométrica, série harmônica, série alternada onde analisamos a sua convergência. Estudamos a estimativa de resto para série alternada. Analisamos convergência de séries numéricas usando os testes de comparação, comparação por limite, teste da integral, teste da razão e da raiz.

Na segunda parte do nosso trabalho, tivemos a oportunidade de trabalhar com as séries de Taylor e MacLaurin. Essas séries nos possibilitam o cálculo de aproximações das funções logarítmicas, exponenciais e trigonométricas. Calculamos integrais e limite de funções com auxílio de séries de potências.

Finalmente, este trabalho foi de grande importância para nós. Percebemos a deficiência que nosso curso de graduação nos deixou e por causa desta deficiência tivemos alguns problemas ao escrevê-lo, mas como tudo na nossa vida vem para o bem, esta monografia também teve um grande papel em nossa formação, assim continuaremos em nossa busca incansável pelo conhecimento, enfrentando barreiras e chegando cada vez mais longe.

BIBLIOGRAFIA

LEITHOLD, L., O Cálculo com Geometria Analítica, Vol. 2, 3ª edição. São Paulo, Harbra, 1994.

STEWART, J., Cálculo, Vol. 2, 5ª edição. São Paulo, Editora Thomson, 2006.

THOMAS, G.B., Cálculo, Vol.2, São Paulo, Pearson Brasil, 2003.

APOSTOL, T. M., Cálculo, Vol. 2, São Paulo, Ed. Reverté Ltda, 2006.

GUIDORIZZI, H. L., Um Curso de Cálculo, Vol. 1, 5ª edição. Rio de Janeiro, LTC – Livros Técnicos e Científicos, 2001.