



GEOMETRIA FRACTAL E PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS: ANÁLISE DE UM SIMULADOR DE FRACTAIS

Claudia Márcia Ribeiro de Azeredo, IF Fluminense Campus Campos-Centro
cmrazeredo@hotmail.com

Michelle Dinelli de Souza, IF Fluminense Campus Campos-Centro
michelledinellis@yahoo.com.br

Silvia Cristina Freitas Batista, IF Fluminense Campus Campos-Centro
silviac@iff.edu.br

Gilmar Teixeira Barcelos, IF Fluminense Campus Campos-Centro
gilmarab@iff.edu.br

RESUMO

Investigações geométricas podem contribuir para a aprendizagem de Matemática, ao favorecer visualizações e formulação de hipóteses. Assim, esse artigo visa analisar um objeto de aprendizagem (OA), o simulador de fractais “Progressões Geométricas em Fractais”, como instrumento mediador da aprendizagem. Para tanto, o referido OA foi avaliado por alunos de uma licenciatura em Matemática e experimentado em um estudo de caso no Ensino Médio. Neste artigo, inicialmente, aborda-se a geometria fractal e o relacionamento da mesma com as progressões geométricas. A seguir, o OA em questão é caracterizado e, então, são descritos os procedimentos metodológicos adotados na pesquisa. Finalizando, são analisados os dados obtidos. Os mesmos evidenciaram que o OA foi considerado adequado em relação aos critérios de avaliação considerados.

Palavras-chave: objeto de aprendizagem, simulador de fractais, geometria fractal, progressões geométricas

FRACTAL GEOMETRY AND GEOMETRIC PROGRESSIONS: FRACTALS SIMULATOR'S ANALYSIS

ABSTRACT

Geometric investigations can contribute to the learning of Mathematics by encouraging views and formulating hypotheses. Thus, this article aims to analyze a learning object (OA), the fractals simulator "Geometric Progressions in Fractals", as a mediating instrument of learning. The OA was evaluated by undergraduate students of Mathematics Education and experienced in a case study in High School. This article initially deals with the fractal geometry and its relationship with the geometric progressions. Next, the OA is characterized and the methodological procedures adopted in the research are described. Finally, the data obtained are analyzed. The data showed that OA was considered appropriate according to the evaluation criteria used.

Keywords: learning object, fractals simulator, fractal geometry, geometric progressions

1. Introdução

Objetos de aprendizagem (OA) são recursos que visam apoiar a construção do conhecimento. Os mesmos podem ser criados em qualquer mídia ou formato e podem

ser simples, como uma animação ou uma apresentação de *slides*, ou complexos, como uma simulação (Macêdo et al., 2007).

Tais recursos podem ser importantes para a aprendizagem de Matemática, contribuindo, por exemplo, para investigações geométricas. As tendências curriculares atuais convergem ao considerar que essas investigações são fundamentais para auxiliar a compreensão de temas matemáticos e do espaço em que se vive (Ponte; Brocado; Oliveira, 2009). No entanto, nem sempre os OA apresentam características adequadas em relação a aspectos como conteúdo, usabilidade, didática e público alvo, sendo essencial promover avaliações dos mesmos (Tarouco, 2004; Mussoi et al., 2010; Almeida et al., 2012).

Assim, considerando-se a possibilidade de identificar progressões geométricas (PG) nas iterações de fractais e a importância das visualizações favorecidas pelos recursos digitais, buscou-se analisar o simulador de fractais “Progressões Geométricas em Fractais” como instrumento mediador da aprendizagem. O referido simulador é um OA digital, de uso gratuito, elaborado por uma equipe de pesquisa e desenvolvimento da Universidade Federal do Paraná (UFPR). O mesmo está disponível no Banco Internacional de Objetos Educacionais (BIOE)¹.

Para a análise do simulador, foi promovida uma avaliação do mesmo, em termos do conteúdo, usabilidade e aspectos didáticos, com professores em formação de uma licenciatura em Matemática. Além disso, o simulador foi utilizado em um estudo de caso com alunos do Ensino Médio.

Tendo em vista o objetivo descrito, aborda-se, na seção 2, a geometria fractal e o relacionamento deste tema com as PG. Na seção 3, é caracterizado o simulador “Progressões Geométricas em Fractais”. Na seção 4, relata-se a metodologia adotada e, na seção 5, são analisados os resultados obtidos, tanto na avaliação promovida com os professores em formação quanto no estudo de caso no Ensino de Médio. Finalizando, na seção 6, são tecidas algumas considerações sobre o estudo realizado.

2. Geometria fractal

Por volta da primeira metade do século XIX, começaram a ocorrer questionamentos sobre a geometria euclidiana. Foi observado que, por exemplo, os contornos das montanhas, a superfície dos pulmões humanos, a trajetória das gotículas de água quando penetram na terra e diversos fenômenos na natureza não podem ser descritos por essa geometria (Oliveira, 1994). Nesse contexto surgiu a geometria fractal, fazendo uso de dimensões fracionárias, como a dimensão 0,5, por exemplo, típica de um objeto que é mais do que um simples ponto com dimensão zero, porém menos do que uma linha com dimensão 1 (Oliveira, 1994).

O estudo dos fractais está ligado à Teoria do Caos, que busca padrões organizados de comportamento em um sistema aparentemente aleatório. Essa ciência trouxe consigo a perspectiva de ver ordem e padrões onde anteriormente só se observava o irregular, o aleatório, o imprevisível (Barbosa, 2002). Na constituição de nosso mundo, da natureza em geral, temos componentes com suas formas nas quais dominam a irregularidade e o caos. Tentar simplificá-las, empregando formas usuais da geometria euclidiana, como círculos, esferas, cones, entre outras, seria completamente inadequado. Os fractais podem fornecer aproximações para essas formas (Barbosa, 2002).

É importante mencionar que não basta ter dimensão fracionária para ser um fractal. É preciso que o objeto seja auto-semelhante: suas partes devem se parecer muito entre si e representar o todo. Outra propriedade de um fractal é ser fruto de um processo iterativo, o que significa, em termos matemáticos, repetir uma fórmula inúmeras vezes. É dessa repetição que surge a imagem (Oliveira, 1994).

Benoit Mandelbrot (1924-2010) é considerado o “pai” da geometria fractal. Deve-se a esse matemático a denominação “fractais”, baseada no latim, do adjetivo *fractus*, cujo verbo *frangere* correspondente significa quebrar, criar fragmentos irregulares, fragmentar (Barbosa, 2002). Dois franceses Pierre Fatou (1878-1929) e Gaston Julia (1893-1978) também merecem ser lembrados pelos seus trabalhos, ainda que em pesquisas não conjuntas. Seus resultados forneceram as bases matemáticas para Mandelbrot, que soube aproveitá-los e desenvolvê-los com recursos computacionais para seu conjunto conhecido hoje como Conjunto de Mandelbrot e para o Conjunto de Julia (Barbosa, 2002).

Outros exemplos de fractais podem ser citados: i) Conjunto de Cantor - resultante da remoção sucessiva do terço central de um segmento de reta (Figura 1); ii) Triângulo de Sierpinski - conjunto resultante da remoção sucessiva do triângulo equilátero do centro, quando se divide um triângulo equilátero em quatro triângulos congruentes (Figura 2); iii) Curva de Koch - resultante da divisão sucessiva de um segmento em três partes congruentes e posterior substituição do segmento intermediário por um triângulo equilátero sem a base (que seria o segmento intermediário) (Figura 3).

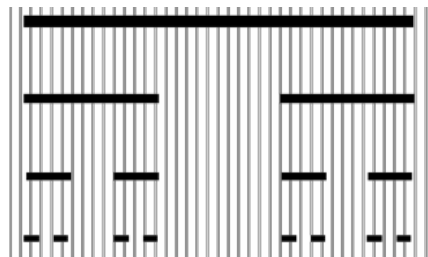


Figura 1 - Conjunto de Cantor
Fonte: SALLUM, 2005.

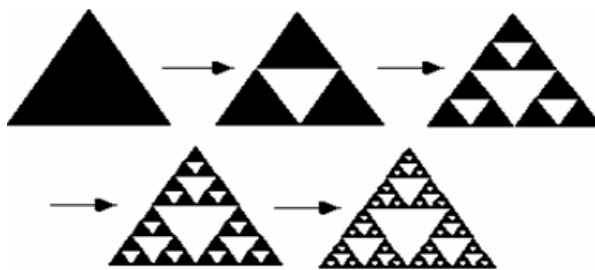


Figura 2 - Triângulo de Sierpinski
Fonte: SALLUM, 2005.

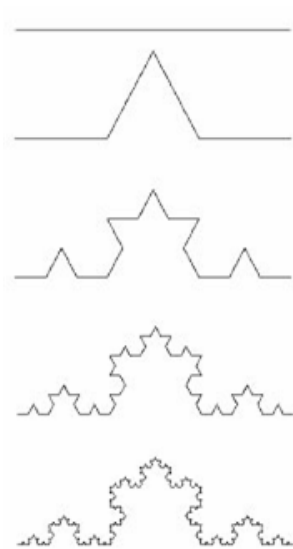


Figura 3 - Curva de Koch
Fonte: SALLUM, 2005.

2.1 Geometria fractal e progressões geométricas

Uma PG é toda sequência de números não-nulos na qual é constante o quociente da divisão de cada termo (a partir do segundo) pelo termo anterior. Esse quociente constante é chamado de razão (q) da progressão. Ou seja, uma PG é uma sequência na qual na taxa de crescimento relativo de cada termo para o seguinte é sempre a mesma (Dante, 2003).

Milani (2011) afirma que o ensino de progressões, tanto geométricas quanto aritméticas, no Ensino Médio, é feito, em geral, de forma pouco inovadora, por meio de manipulação de fórmulas e com exercícios tradicionais de sala de aula. Nesse sentido, o autor defende o trabalho com a generalização de padrões como fator motivador, pois, além de despertar a curiosidade dos alunos, apela intensamente para a estética e criatividade, gerando entusiasmo da descoberta de regularidades.

Nesse sentido, a introdução de fractais no Ensino Médio pode trazer contribuições para o estudo de PG (Sallum, 2005). O estudo de fractais, segundo a referida autora,

além de satisfazer a curiosidade dos alunos que já tiveram algum conhecimento dos mesmos, propicia a oportunidade de trabalhar com processos iterativos, escrever fórmulas gerais, criar algoritmos, calcular áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente e introduzir uma ideia intuitiva do conceito de limite.

Assim, diversas pesquisas têm sido promovidas investigando aspectos da relação entre geometria fractal e PG (Roman, 2004; Gonçalves, 2007; Pallesi, 2007; Faria, 2012). A pesquisa de Roman (2004) visou à construção de conceitos matemáticos relacionados à PG utilizando a geometria fractal, a partir dos recursos computacionais de um *software* de geometria dinâmica. Além de Roman (2004), também Gonçalves (2007), Pallesi (2007) e Faria (2012) utilizaram programas de geometria dinâmica.

Gonçalves (2007), em sua pesquisa no Ensino Médio, investigou a utilização dos fractais como fator motivador na percepção da auto-semelhança, assim como analisou a importância desse aspecto para o processo de generalização das fórmulas de PG. A análise dos resultados, segundo a autora, mostrou contribuições importantes para o processo de generalização dos elementos matemáticos que compõem o estudo de PG. Pallesi (2007) defende a introdução do estudo dos fractais aliado ao estudo de progressões geométricas e aritméticas no Ensino Médio, como forma de motivação. Segundo a autora, o estudo de fractais pode contribuir para tornar as aulas sobre progressões mais dinâmicas e atrativas. Faria (2012) investigou as contribuições da utilização de padrões fractais para o processo de generalização do conhecimento matemático. Os resultados obtidos indicaram que o trabalho com tais padrões contribuiu para o processo de generalização de conteúdos matemáticos, dentre os quais PG, por permitir trabalhar propriedades, como auto-semelhança e complexidade infinita.

Na seção seguinte, apresenta-se o simulador “Progressões Geométricas em Fractais”. Diferentemente de um *software* de geometria dinâmica, recurso mencionado nas pesquisas descritas, o referido simulador é direcionado apenas para o estudo de fractais e, mais especificamente, para o estudo de PG associado ao de fractais.

3. Simulador “Progressões Geométricas em Fractais”

O desenvolvimento da geometria fractal está intimamente relacionado ao uso do computador, uma vez que as imagens surgem a partir de procedimentos recursivos, bastante facilitados pelos recursos computacionais (Almeida, 2006).

O simulador de fractais “Progressões Geométricas em Fractais” é um OA que apresenta 15 telas de introdução intuitiva sobre fractais e, a seguir, propõe seis telas de exercícios. A Figura 4 mostra a tela do exercício 1.

Iteração	Fractal	Lado
2		$\frac{3}{2^2}$
3		$\frac{3}{2^3}$
4		$\frac{3}{2^4}$
n	figura limite	$\frac{3}{2^n}$

Figura 4 - Tela do exercício 1 – Simulador de fractais

O simulador foi elaborado por uma equipe da Universidade Federal do Paraná (UFPR), tendo como objetivo geral proporcionar aos alunos um ambiente para o tratamento do conceito de fractais, de maneira concreta (Bioe, 2009). Alguns dos objetivos específicos do simulador são: i) motivar os alunos em relação ao conceito de fractais; ii) oportunizar a identificação de vários relacionamentos matemáticos associados ao fractal Triângulo Sierpinsky; iii) possibilitar a investigação da ocorrência ou não de fenômenos matemáticos associados à Curva de Kock; iv) permitir investigar as propriedades e o comportamento das progressões geométricas "Área de um triângulo" e "Área total", associadas a cada um dos fractais focalizados (Bioe, 2009).

O simulador informa quando o usuário acerta ou erra, colocando as bordas do retângulo, respectivamente, em verde ou em vermelho. Quando ocorre erro, o usuário fica impedido de ir para o passo seguinte. O ambiente conta, ainda, com um teclado virtual personalizado que permite a entrada de dados. Além disso, oferece dicas dependentes de contexto, além de retroalimentação na ocorrência de erros conceituais registrados pelo usuário no sistema (Bioe, 2009).

4. Procedimentos metodológicos

A pesquisa realizada teve como objetivo geral analisar o simulador de fractais como instrumento mediador da aprendizagem, favorecendo a identificação de PG nas iterações de alguns fractais.

Na primeira parte foi realizada uma pesquisa descritiva², visando captar a opinião dos professores em formação sobre o simulador de fractais. Para tanto, foi promovido um minicurso, de 3 horas de duração, para nove alunos do 4º período da Licenciatura em Matemática de uma instituição federal. No mesmo foi utilizado o vídeo³ "A ordem na desordem", que apresenta situações que podem desencadear discussões sobre as características e sobre o cálculo de área e perímetro de um fractal. A seguir, foi exibida uma apresentação de *slides* sobre o tema e foram realizados três exercícios sobre PG associados a fractais. Após essas ações, o simulador foi apresentado e quatro atividades foram realizadas no mesmo. Ao final do minicurso foi promovida a avaliação do simulador. Para tanto, foi organizado um questionário que visou levantar dados sobre o conteúdo, a usabilidade e aspectos didáticos do OA.

A segunda parte da pesquisa foi de cunho qualitativo, por meio de estudo de caso, realizado em fevereiro/março de 2013. Para tanto, foi selecionada uma turma do Ensino Médio de uma instituição federal, que já havia estudado PG. A professora da turma cedeu horários de aula para que a experimentação se realizasse. A opção por uma turma com as características descritas foi decorrente do objetivo da pesquisa, que, entre outros aspectos, envolvia identificar PG nas iterações de fractais. Assim, o tema PG foi considerado um requisito básico para o estudo.

Foram promovidos três encontros, todos no horário regular de aula da turma, e os instrumentos de coleta de dados utilizados foram listas de exercícios de pré e pós-teste, observação e questionário. O primeiro encontro durou 30 minutos e no mesmo os alunos apenas responderam a um pré-teste que teve por objetivo diagnosticar conhecimentos sobre PG e sobre requisitos, tais como: classificação de triângulos quanto à medida dos lados, Teorema de Pitágoras e área de triângulos.

No segundo encontro, com duração de duas horas/aula de 50 minutos cada, foi exibido o vídeo "A ordem na desordem" e, em seguida, foi exibida uma apresentação de *slides* sobre fractais. Partindo de exemplos de fractais, as pesquisadoras levantaram hipóteses que relacionavam as iterações, perímetros e áreas dos mesmos com uma PG, para que os alunos investigassem e tirassem conclusões. Finalizando esse encontro, foram realizados exercícios sobre PG em fractais.

No terceiro encontro, que também teve duração de duas horas/aula, os alunos foram levados a um laboratório de informática e utilizaram o simulador de fractais. Ao final das atividades com o simulador, foi proposto um pós-teste contendo exercícios que visavam verificar a compreensão dos alunos em relação à associação entre os temas PG e fractais. Ainda nesse encontro, os alunos responderam a um questionário que buscou levantar dados sobre a percepção dos mesmos em relação às atividades desenvolvidas e sobre os recursos utilizados.

Na seção seguinte, promove-se a análise e discussão dos dados levantados.

4. Resultados e discussão

Nesta seção apresenta-se a análise da avaliação realizada pelos alunos da Licenciatura em Matemática e da experimentação feita com alunos do Ensino Médio.

4.1 Análise da avaliação realizada pelos alunos da Licenciatura em Matemática

O questionário apresentou afirmativas relativas aos aspectos conteúdo (cinco afirmativas), usabilidade (oito afirmativas) e didática (quatro afirmativas). Diante de cada afirmativa, os alunos deveriam assinalar uma das opções: Discordo Completamente (DC), Discordo (D), Não Concordo Nem Discordo (NC ND), Concordo (C), Concordo Completamente (CC). Os resultados obtidos são apresentados, respectivamente, nas Tabelas 1, 2 e 3.

Tabela 1: Conteúdo

Opções	DC %	D %	NC ND %	C %	CC %
Afirmativas					
Claro e conciso.	0	0	0	33,33	66,67
Altamente relevante.	0	0	11,11	22,22	66,67
Apresenta informações precisas.	0	0	0	33,33	66,67
Inclui quantidade apropriada de material.	0	0	11,12	44,44	44,44
Apresenta alta qualidade de redação e edição.	0	0	11,12	44,44	44,44

Os percentuais da Tabela 1 evidenciam que os alunos consideraram o conteúdo do simulador adequado e satisfatório para o estudo de PG em fractais. Em nenhum dos itens as opções “Discordo Completamente” e “Discordo” foram selecionadas.

Tabela 2: Usabilidade

Opções	DC %	D %	NC ND %	C %	CC %
Afirmativas					
É fácil de usar.	0	0	11,12	44,44	44,44
Têm instruções claras.	0	0	0	77,78	22,22
É engajador / motivador.	0	22,22	11,12	44,44	22,22
Visualmente atraente.	11,12	0	33,33	33,33	22,22
É interativo.	0	0	33,33	44,45	22,22
Navegação fácil e consistente ao longo de toda unidade.	0	11,12	0	44,44	44,44
Compatível com diferentes navegadores.	0	0	22,22	44,45	33,33
Projeto gráfico de alta qualidade.	0	0	22,22	44,45	33,33

Com relação ao aspecto usabilidade, a Tabela 2 mostra que, de maneira geral, o simulador foi bem avaliado. No entanto, cabe destacar que, para alguns alunos, o aspecto motivacional, a parte gráfica e a interatividade podem ser melhorados.

Tabela 3: Didática

Opções	DC %	D %	NC ND %	C %	CC %
Afirmativas					
Os objetivos de aprendizagem são claros.	0	0	0	44,44	55,56
Permite relacionamento entre conceitos.	0	0	11,11	33,33	55,56
Faz bom uso de animações e simulações.	0	0	33,34	33,33	33,33
Didaticamente eficiente.	0	0	11,11	33,33	55,56

Os dados da Tabela 3 mostram que o simulador foi muito bem avaliado em relação à didática, com percentuais expressivos em, praticamente, todos os itens. Os dados sinalizam, porém, que o item relativo a animações e simulações requer certa atenção.

Tomando-se por base os resultados apresentados nas Tabelas 1, 2 e 3, considera-se que, de modo geral, o simulador “Progressões Geométricas em Fractais” foi avaliado como adequado aos propósitos a que se destina, apresentando bom conteúdo, sendo amigável e atendendo bem aos aspectos didáticos.

Além das afirmativas que compõem as tabelas, o questionário continha uma pergunta aberta, solicitando alguma sugestão ou crítica sobre o simulador. Nessa questão, os graduandos sugeriram algumas melhorias técnicas na interface do OA, que facilitariam a navegação pelas telas, além de um teclado virtual “amigável”.

4.2 Análise do estudo de caso no Ensino Médio

O estudo de caso foi realizado em uma turma de 2º ano do Ensino Médio, com 23 alunos. No entanto, no primeiro encontro estavam presentes apenas 15 alunos e no terceiro, 22. Somente no segundo encontro, todos os 23 alunos estavam presentes.

O primeiro encontro ocorreu em 28/02/13. Durante o mesmo foi aplicado o pré-teste. Por meio da análise dos resultados do mesmo, foi possível verificar que a maioria dos participantes apresentava conhecimentos adequados sobre PG e sobre os requisitos considerados.

O segundo encontro ocorreu em 06/03/13. Após a apresentação do vídeo e dos *slides* sobre fractais, foram propostos exercícios envolvendo PG e fractais. Os alunos participaram ativamente, questionando e respondendo aos exercícios com seriedade.

O terceiro encontro ocorreu em 07/03/13. Os alunos foram para um laboratório de informática, no qual trabalharam com o simulador de fractais, demonstrando bastante interesse pelo mesmo. Ao final, responderam ao pós-teste e ao questionário final.

No pós-teste (respondido pelos 22 alunos presentes), foram apresentadas duas questões semelhantes aos exercícios do simulador. A questão 1 solicitava o preenchimento de uma tabela com o tamanho do lado do menor quadrado, em cada uma das diferentes iterações 0,1,2,3,4 e n do Tapete de Sierpinski. Na questão 2, os alunos deveriam utilizar o valor do lado do menor quadrado, identificado na questão 1, e calcular a área dos quadrados pretos, em cada iteração do Tapete de Sierpinski. A Tabela 4 mostra os resultados do pós-teste.

Tabela 4: Resultado do pós-teste

Questão	1	2
Percentual de acerto na questão (%)	100	77

Os resultados da Tabela 4 indicam um bom desempenho dos alunos, pois todos acertaram a questão 1 e 17 alunos acertaram a questão 2, mesmo com um espaço de tempo curto para a realização das atividades. Como essas atividades eram semelhantes às promovidas no simulador, entende-se que o mesmo trouxe contribuições.

Após a realização do pós-teste, os 22 estudantes responderam ao questionário final. Com parte desses dados foi possível traçar um perfil desses alunos: 13 eram do sexo masculino e a média de idade do grupo era de, aproximadamente, 17 anos. Cinco estudantes afirmaram já conhecerem fractais antes do estudo de caso. Três deles por meio de cursos extracurriculares, um por meio de leituras em *sites* relacionados e outro por meio de vídeo/filmes.

As tabelas seguintes apresentam dados também levantados por meio do questionário. São três afirmativas, diante das quais cada aluno deveria se posicionar em uma das opções dadas: Concordo completamente (CC), Concordo (C), Não Concordo Nem Discordo (NC ND), Discordo (D), Discordo completamente (DC).

Em relação à afirmativa “*Identificar a relação entre fractais e Progressões Geométricas foi fácil*”, a Tabela 2 mostra os resultados obtidos.

Tabela 5: Facilidade de identificação da relação entre fractais e PG

Opções	DC	D	NC ND	C	CC
Alunos (%)	0	9,10	27,27	27,27	36,36

Os dados da Tabela 5 mostram que a maioria da turma conseguiu identificar a relação entre fractais e PG. Os resultados obtidos foram considerados bastante positivos, diante das dificuldades, em geral, apresentadas pelos alunos em relação a temas matemáticos.

Quanto à afirmativa “O material utilizado (vídeo, *slides*, simulador de fractais) contribuiu para a compreensão do conteúdo”, a Tabela 6 mostra os resultados obtidos.

Tabela 6: Contribuição do material utilizado

Opções	DC	D	NC ND	C	CC
Alunos (%)	0	0	4,55	27,27	68,18

Os percentuais da Tabela 6 revelam que o material utilizado, na opinião da maioria dos alunos, contribuiu para a compreensão do conteúdo. Esses dados são coerentes com as manifestações dos alunos, observadas em sala de aula, que indicavam boa receptividade aos recursos utilizados. Além disso, estão em consonância, também, com a visão de pesquisadores da área (Marin e Penteado, 2011, Gravina e Meier, 2012) que defendem as tecnologias digitais como recursos didáticos.

A Tabela 7 mostra os dados relativos à afirmativa “Utilizar o simulador de fractais foi simples”.

Tabela 7: Simplicidade de utilização do simulador de fractais

Opções	DC	D	NC ND	C	CC
Alunos (%)	0	4,55	27,27	36,36	31,82

Os resultados apresentados na Tabela 7 mostram que as opções “Concordo completamente” e “Concordo” somam, aproximadamente, 68%, o que sinaliza que o simulador de fractais foi de fácil utilização para a maioria. Apenas um aluno discordou da afirmativa. Ressalta-se que o simulador apresenta, ao usuário, dicas dependentes de contexto e segue uma proposta de trabalho de complexidade crescente, começando por atividades mais simples e aumentando o grau de dificuldade gradativamente. Esses são fatores que podem contribuir para facilitar a utilização do mesmo.

De maneira geral, os resultados obtidos foram considerados positivos, permitindo observar a importância dos recursos utilizados, em particular do simulador de fractais, para o estudo de PG associado ao de fractais, no Ensino Médio.

A análise dos dados sinaliza que, tanto os professores em formação quanto os alunos do Ensino Médio, conseguiram identificar a associação entre PG e Fractais, seja por meio dos exercícios escritos, seja utilizando o simulador. Notou-se que o simulador,

proporcionou aos dois grupos, uma melhor visão do tema em questão, sintonizando imagens de fractais em cada iteração com fórmulas para calcular áreas e perímetros das figuras, utilizando PG. Além disso, contribuiu para o desenvolvimento da capacidade de percepção e generalização de expressões matemáticas de forma dedutiva, indicando inclusive se o usuário está correto em seu raciocínio ou não. Dessa forma, o mesmo favorece a autonomia e a motivação do aluno.

Finalizando, destaca-se a importância de promover avaliações de OA, de maneira geral. Como defendido por Tarouco (2004), avaliações desses objetos podem orientar um melhor uso dos mesmos e fornecer um *feedback* para os desenvolvedores a fim de que os recursos sejam aprimorados.

5. Considerações finais

A pesquisa promovida permitiu, entre outras coisas, observar o aspecto motivador que as tecnologias digitais representam para os alunos. Essas tecnologias já fazem parte do mundo fora da escola. Incorporá-las ao contexto de sala de aula pode trazer grandes contribuições, desde que as mesmas sejam utilizadas com critério e planejamento estratégico. Isso inclui a necessidade de avaliar os recursos a serem utilizados, analisando a adequação dos mesmos aos seus propósitos. O simulador de fractais, em particular, atende bem aos objetivos a que se destina, como foi possível observar pelos dados levantados na pesquisa.

Ressalta-se que a avaliação promovida pelos alunos da Licenciatura em Matemática contribuiu para incentivar, nos mesmos, o senso crítico na avaliação de um OA. Essa é uma prática importante que os ajudará, enquanto docentes, a escolher tecnologias digitais que sejam realmente significativas para a construção do conhecimento. De maneira geral, nos três aspectos em que o simulador foi avaliado (conteúdo, usabilidade e didática), o mesmo foi considerado adequado.

Foi possível observar que, por meio do apelo lúdico dos fractais, os alunos do Ensino Médio puderam investigar e explorar um conteúdo desconhecido pela maioria e descobrir como trabalhar com iterações, criação de fórmulas gerais, cálculo de área e perímetro de figuras de complexidade crescente e a aplicação de progressões geométricas intuitivamente ao conceito de limite.

Essa pesquisa, portanto, procurou mostrar a análise de um OA de dois ângulos diferentes, do ponto de vista do professor e do aluno e permitiu coletar dados importantes que poderão servir de referência para estudos correlatos posteriores.

Notas de Texto

¹ <<http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/handle/mec/11959>>.

² Segundo Gil (2008), pesquisas descritivas buscam apresentar características de uma população, fenômeno ou de uma experiência ou, então, estabelecer relações entre variáveis.

³ Episódio 5 do programa “O Mundo da Matemática”, disponível em:

<http://webeduc.mec.gov.br/portaldoprofessor/matematica/condigital1/episodios/ep_05.html> .

Referências Bibliográficas

- ALMEIDA, A. A. O. **Os Fractais na formação docente e sua prática na sala de aula.** Dissertação (mestrado profissional em Ensino de Matemática). São Paulo: PUC, 2006.
- ALMEIDA, R. R.; CHAVES, A. C. L.; ARAÚJO JUNIOR, C. F. de. Avaliação de Objetos de Aprendizagem: Aspectos a Serem Considerados neste Processo. In: **SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA**, Ponta Grossa, PR, 2012. Anais ..., Ponta Grossa, PR, 2012. 9 p.
- BARBOSA, R. M. **Descobrendo a Geometria Fractal para a sala de aula.** Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2002.

- BIOE – BANCO INTERNACIONAL DE OBJETOS EDUCACIONAIS. Progressões Geométricas em Fractais. 2009. Disponível em: <<http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/handle/mec/11959>>. Acesso em: 03 nov. 2012.
- DANTE, L. R. **Matemática contexto & aplicações**. São Paulo: Editora Ática, 2003.
- FARIA, R. W. S. **Padrões Fractais: Contribuições ao processo de Generalização de Conteúdos Matemáticos**. Dissertação de Mestrado, 2012.
- GIL, A. C. Como elaborar projetos de pesquisa. São Paulo: Atlas, 6. ed., 2008.
- GONÇALVES, A. G. N. **Uma sequência de ensino para o estudo de progressões geométricas via fractais**. Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. PUC. Dissertação de Mestrado, 2007.
- GRAVINA, M. A.; MEIER, M. Modelagem no GeoGebra e o desenvolvimento do pensamento geométrico no Ensino Fundamental. **Em Pauta - Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 1, p. 9583, 2012.
- MACÊDO, L. N. de; CASTRO FILHO, J. A. de; MACÊDO, A. A. M.; SIQUEIRA, D. M. B.; OLIVEIRA, E. M. de; SALES, G. L.; FREIRE, R. S. Desenvolvendo o pensamento proporcional com o uso de um objeto de aprendizagem. In: PRATA, C. L.; NASCIMENTO, A. C. A de (Org.). **Objetos de aprendizagem: uma proposta de recurso pedagógico**. Brasília: MEC, SEED, 2007. p. 17-26.
- MARIN, D.; PENTEADO, M. G. Professores que utilizam tecnologia de informação e comunicação para ensinar Cálculo. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 13, p. 509-526, 2011.
- MILANI, W. N. **A resolução de problemas como ferramenta para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas no ensino médio**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Ouro Preto. 2011.
- MUSSOI, E. M.; FLORES, M. L. P.; BEHAR, P. A. Avaliação de Objetos de Aprendizagem. In: **CONGRESSO IBEROAMERICANO DE INFORMÁTICA EDUCATIVA**, 2010, Santiago do Chile. Anais... IE 2010, Santiago do Chile, 2010.
- OLIVEIRA, L. H. A Matemática do Delírio. **Revista Superinteressante**. Out. 1994. ed. 85, p. 22-27. Disponível em: <<http://www.fractarte.com.br/artigos/superinteressante.php>>. Acesso em: 10 jan. 2013.
- PALLESI, D. M. **Motivação do Estudo de Progressões Aritméticas e Geométricas Através da Geometria Fractal**. Monografia de Curso de Especialização para Professores de Matemática, Universidade Federal do Paraná. 2007.
- PONTE, J. P. da; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.
- ROMAN, T. C. **A Geometria Fractal e o software cabri-géomètre II no estudo de Progressão Geométrica**. 2004. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Educação Matemática) – Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, SC, 2004. Disponível em: <<http://www.bib.unesc.net/biblioteca/sumario/000026/00002638.pdf>>. Acesso em: 10 jan. 2013.
- SALLUM, E. M.. Fractais no Ensino Médio. **Em pauta - Revista do professor de Matemática**, v. 57, 2005.
- TAROUCO, L. **Avaliação de Objetos de Aprendizagem**. 2004. Disponível em <<http://penta2.ufrgs.br/edu/objetosaprendizagem/sld001.htm>>. Acesso em: 10 jan. 2013.