

LEONARDO KOLLER SACHT

Matriz de Pascal: aspectos teóricos e computacionais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Matemática - Habilitação Bacharelado
em Matemática e Computação Científica
Departamento de Matemática
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Universidade Federal de Santa Catarina

Orientador: Licio Hernanes Bezerra

Florianópolis
Novembro 2007

À minha mãe

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática - Habilitação Bacharelado em Matemática e Computação Científica, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 53/CCM/07.

Prof^a Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da disciplina

Banca Examinadora:

Prof. Licio Hernanes Bezerra (Orientador)

Prof. Jáuber Cavalcante de Oliveira

Prof. Paulo Rafael Bösing

Agradecimentos

Após esta jornada de quatro anos, tenho alguns agradecimentos a fazer, a pessoas que me ajudaram a chegar até aqui.

Agradeço, em primeiro lugar, à minha mãe, Etelca Koller, a quem dedico este trabalho. Sua presença (apesar da distância física) me incentivando e me ajudando o tempo todo foi meu maior estímulo a buscar meus sonhos.

Ao meu pai, Almir Sacht, pelo companheirismo nos primeiros momentos do curso e pela ajuda na decisão de vir para cá.

Ao meu irmão, Gustavo Koller Sacht, pela amizade, acima de tudo.

Aos amigos que cativei durante esta fase inesquecível da vida. Não vou citar nomes, com receio de esquecer alguém. Mas sintam-se agradecidos amigos do grupo PET-Matemática, amigos que também foram colegas de classe, amigos da pensão da dona Eunice, amigos de festas. Sem esquecer, é claro, dos amigos de Joinville, com os quais tive, sem dúvida, a amizade fortalecida durante estes anos.

À dona Eunice e à Ivana, por terem me acolhido em sua casa durante os últimos três anos.

Aos mestres, que não só me ensinaram Matemática como também lições importantes para seguir na carreira acadêmica e na vida. Em especial, gostaria de agradecer ao professor Licio Hernanes Bezerra, que me orientou durante este trabalho e durante quase toda minha graduação em trabalhos de iniciação científica. Além disso, agradeço pela amizade nestes últimos anos. Agradeço ao professor José Luiz Rosas Pinho, por ter me ensinado muitas coisas como tutor do PET e, é claro, pelos momentos de descontração. Agradeço também, em especial, ao professor Ruy Exel Filho, pela confiança sempre depositada em mim, através de cartas de recomendação para as atividades extra-curriculares das quais participei.

Ao Alcino e às *meninas da secretaria*, Silvinha e Iara, pela prestatividade e carinho.

Ao amigo Asteroide Santana, por me ajudar a fazer alguns gráficos deste trabalho.

Sumário

Introdução	2
1 Matriz de Pascal	3
1.1 Matriz de Criação	3
1.2 Matriz de Pascal, via Matriz de Criação	4
2 Matrizes Relacionadas à Matriz de Pascal	9
2.1 Matrizes Fundamentais para $y'(t) = Ay(t)$	9
2.2 Matriz de Vandermonde	10
2.3 Matriz de Stirling	15
2.3.1 Números de Stirling da Segunda Espécie	15
2.4 Forma de Jordan da Matriz de Pascal	19
3 Seqüências de Polinômios	22
3.1 Polinômios de Hermite	22
3.2 Polinômios de Bernoulli	25
3.2.1 Matriz de Bernoulli	31
3.3 Polinômios de Bernstein	32
4 Algoritmo de complexidade $O(n \log n)$ para resolução de sistemas do tipo Pascal simétrico	37
4.1 Sistema $\hat{P}x = b$	37
4.2 Produtos envolvendo matrizes de Toeplitz	38
4.2.1 Algoritmo	41
4.3 Aplicação ao sistema Pascal simétrico	42
4.4 Aplicações a outras situações	43
4.5 Análise de condicionamento	43
4.6 Pré-Condicionamento de P	44
5 Curvas de Bézier: aplicação da matriz de Pascal	54
5.1 Algoritmo de Casteljau	54

5.1.1	Custo Computacional	56
5.1.2	Algoritmo	56
5.2	Algoritmo envolvendo a matriz de Pascal	57
5.2.1	Algoritmos	58
5.3	Exemplos e comparações	59
5.3.1	n=10	59
5.3.2	n=20	61
5.3.3	n=30	62
5.3.4	n=40	64
5.3.5	Comparações	65
A	Equações Diferenciais Ordinárias e Exponenciais de Matrizes	67
A.1	Sistemas de E.D.O.'s	67
A.2	Exponenciais de Matrizes	73
B	Teoremas Clássicos	77
C	Fórmula de Somatório de Euler-Maclaurin: aplicação de números de Bernoulli	82
D	Transformada Rápida de Fourier de Ordem Qualquer	88
D.1	Definição	88
D.2	Formulação Matricial	88
D.3	Grafo de Fluxo de Sinais	91
D.4	Desenvolvimento teórico da FFT para o caso $N = 2^\gamma$	92
D.5	FFT para $N = r_1 r_2$	96
D.6	FFT para $N = r_1 r_2 \dots r_m$	97
D.7	A notação O grande	100
	Considerações Finais	101
	Referências Bibliográficas	102

Introdução

Nos últimos anos, a *matriz de Pascal*, cujas entradas são os coeficientes binomiais, vem sendo muito estudada e vários artigos têm sido publicados a seu respeito. Isto se deve a algumas aplicações desta matriz que têm surgido e à sua riqueza teórica.

Neste trabalho, propomo-nos a discutir alguns destes aspectos da matriz de Pascal.

O primeiro capítulo apresenta a conexão entre a matriz de Pascal (P) e a *matriz de criação* (H), mostrando que $P = e^H$. Além disso, algumas identidades de combinatória são mostradas.

O segundo capítulo estabelece relações entre P e outras matrizes conhecidas, como matrizes de Vandermonde, Companheira e de Stirling. Propriedades destas matrizes também são abordadas.

O terceiro capítulo é dedicado a apresentar relações da matriz P com as seqüências de polinômios de Hermite, Bernoulli e Bernstein. Essas conexões nos permitirão obter propriedades interessantes de tais famílias de polinômios.

Estes três primeiros capítulos foram desenvolvidos a partir de uma leitura crítica dos artigos [1] e [6].

No quarto capítulo, dedicamo-nos a analisar os artigos [10] e [11]. Estes artigos propõem um procedimento para resolver sistemas lineares envolvendo a *matriz de Pascal simétrica* em $O(n \log n)$ operações, usando uma fatoração de P que envolve matrizes de Toeplitz e matrizes diagonais. Métodos de Álgebra Linear Computacional para efetuação de produtos matriz-vetor envolvendo matrizes de Toeplitz são discutidos. Falamos também sobre a aplicação destas idéias a outras situações, que envolvem produto matriz-vetor.

No quinto capítulo propomos um algoritmo para computação rápida de curvas de Bézier. Este algoritmo usa as relações obtidas entre a matriz de Pascal e os polinômios de Bernstein, vistas no capítulo 3, juntamente com as ferramentas desenvolvidas no capítulo 4.

No final da monografia, apresentamos quatro apêndices que visam complementar o conteúdo do trabalho: sistemas de E.D.O.'s e exponenciais de matrizes, teoremas clássicos, fórmula de somatório de Euler-Maclaurin e Transformada Rápida de Fourier de ordem qualquer.

Capítulo 1

Matriz de Pascal

A Matriz de Pascal $n \times n$ que será abordada durante todo este trabalho possui as seguintes entradas:

$$[P]_{ij} = \begin{cases} \binom{i}{j}, & \text{para } i \geq j. \\ 0, & \text{para as demais.} \end{cases} \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

A seguir, introduziremos alguns conceitos preliminares que farão a Matriz de Pascal surgir de uma forma diferente da que muitos conhecem, que é através de fórmulas de análise combinatória.

1.1 Matriz de Criação

Definição 1.1 Seja $H = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & \ddots & & & \\ & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & n-1 & 0 \end{pmatrix}$. H é chamada de Matriz de Criação.

Observação: Nossa convenção para os vetores da base canônica de \mathbb{R}^n será $e_0 = (1 \ 0 \dots \ 0)^T$, $e_1 = (0 \ 1 \dots \ 0)^T$, ..., $e_{n-1} = (0 \ 0 \dots \ 1)^T$. Além disso, definimos $e_i \equiv 0$, $\forall i \geq n$.

Das definições acima, segue diretamente que $He_i = (i+1)e_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Definição 1.2 Sejam $i, j \in \mathbb{N}^*$. A potência fatorial, $(i+j)^{(j)}$, é o produto $(i+j)(i+j-1)\dots(i+2)(i+1)$.

Afirmção 1.1 Seja $j \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq j \leq n-1$. Então $H^j e_i = (i+j)^{(j)} e_{i+j}$.

Demonstração: $H^j e_i = H^{j-1} H e_i = (i+1)H^{j-1} e_{i+1} = (i+1)H^{j-2} H e_{i+1} = (i+1)(i+2)H^{j-2} e_{i+2} = \dots = (i+1)(i+2)\dots(i+j)e_{i+j} = (i+j)^{(j)} e_{i+j}$.

■

Afirmação 1.2 $H^n = 0$, ou seja, a Matriz de Criação é nilpotente.

Demonstração: Como $H e_i = (i+1)e_{i+1}$,

$$H e_0 = e_1, H^2 e_0 = H e_1 = 2e_2, H^3 e_0 = 2H e_2 = 2 \cdot 3e_3, \dots, H^n e_0 = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n e_n = 0.$$

$$H^n e_1 = H^n (H e_0) = H^{n+1} e_0 = 0.$$

$$H^n e_2 = H^n \left(\frac{H e_1}{2} \right) = H^n \left(\frac{H^2 e_0}{2} \right) = \frac{H^{n+2} e_0}{2} = 0.$$

⋮

$$H^n e_{n-1} = H^n \left(\frac{H^{n-1} e_0}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)} \right) = \frac{1}{(n-1)!} H^{2n-1} e_0 = 0.$$

Ou seja, o produto de H^n por todos os vetores da base canônica resulta no vetor nulo.

Logo, H^n é a matriz nula.

Corolário 1.1 $\forall j \geq n, H^j = 0$.

A Matriz de Criação também pode ser vista como uma matriz de derivação de polinômios.

Seja $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1}$ um polinômio de grau $n-1$ com coeficientes reais. Se representarmos $p(t)$ como $\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}$, o vetor de coeficientes de $p(t)$, teremos que $\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} H = \begin{pmatrix} a_1 & 2a_2 & 3a_3 & \dots & (n-1)a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$.

Tal resultado é exatamente a representação vetorial dos coeficientes do polinômio $a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \dots + (n-1)a_{n-1} t^{n-2} = \frac{dp}{dt}$.

Da mesma forma, temos que $\frac{d^2 p}{dt^2}$ é representado exatamente pelo vetor

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} H^2 \text{ e, assim, sucessivamente.}$$

Note que $H^j = 0, \forall j \geq n$, o que significa que as derivadas de ordem maior ou igual a n de $p(t)$ são o polinômio nulo.

1.2 Matriz de Pascal, via Matriz de Criação

Considere a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d}{dt} y(t) = H y(t), y_0 = y(0), t \in \mathbb{R},$$

em que H é a matriz de criação $n \times n$ definida na seção 1.1.

Conforme a teoria desenvolvida no Apêndice A, tal equação possui uma única solução para o vetor inicial y_0 , que é $y(t) = e^{Ht} y_0$. A matriz exponencial e^{Ht} denotaremos por $P(t)$. Portanto,

$$P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} H^k.$$

Mas note que tal série corresponde a um somatório finito, pois $H^j = 0$, para todo $j \geq n$, conforme o [Corolário 1.1](#). Logo,

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} H^k.$$

Algumas propriedades de $P(t)$:

$$(1) P(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H^k}{k!} = e^H.$$

$$(2) P(m) = e^{Hm} = (e^H)^m = P^m, \forall m \in \mathbb{R}.$$

$$(3) P(s+t) = P^{s+t} = P^s P^t = P(s)P(t), \forall s, t \in \mathbb{R}.$$

$$(4) P(0) = e^{H \cdot 0} = I \Rightarrow P(-1+1) = P(-1)P(1) = P(-1)P = I \Rightarrow P(-1) = P^{-1}.$$

Teorema 1.1 $P(1)$ é a matriz de Pascal.

Demonstração: $P(1) = e^H = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H^k}{k!}.$

Vejamos o que acontece a cada termo deste somatório. Seja k tal que $0 \leq k \leq n-1$:

$$\frac{H^k}{k!} = \frac{1}{k!} H^{k-1} H = \frac{1}{k!} H^{k-1} \begin{pmatrix} (0+1)e_{0+1} & (1+1)e_{1+1} & \cdots & (n-2+1)e_{n-2+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizando o resultado da [Afirmção 1.1](#) para cada coluna da matriz, chegamos a:

$$\frac{H^k}{k!} = \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} (0+1)(0+1+k-1)^{(k-1)}e_{0+k} & \cdots & (n-2+1)(n-2+1+k-1)^{(k-1)}e_{n-2+k} & 0 \end{pmatrix}.$$

De forma geral, temos que a coluna j de $\frac{H^k}{k!}$, $0 \leq j \leq n-1$, é

$$\frac{1}{k!} (j+1)(j+1+k-1)^{(k-1)} e_{j+k} = \frac{1}{k!} (j+1) \frac{(j+k)!}{(j+1)!} e_{j+k} = \frac{(j+k)!}{j!k!} e_{j+k} = \binom{j+k}{j} e_{j+k}.$$

Portanto, a coluna j de $\sum_{k=0}^n \frac{H^k}{k!}$ é

$$\binom{j}{j} e_j + \cdots + \binom{j+(n-1)-j}{j} e_{j+(n-1)-j} + \underbrace{\binom{j+n-j}{j} e_{j+n-j} + \cdots + \binom{j+n}{j} e_{j+n}}_0 =$$

$$\binom{j}{j} e_j + \cdots + \binom{j+(n-1)-j}{j} e_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \binom{j}{j} & \cdots & \binom{n-1}{j} \end{pmatrix}^T = P(:, j)$$

(coluna j da matriz de Pascal).

■

Teorema 1.2 As entradas de $P(t)$ são $[P(t)]_{ij} = \begin{cases} t^{i-j} \binom{i}{j} & , \text{ para } i \geq j. \\ 0 & , \text{ para os demais.} \end{cases}$

$i, j = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$, para $t \neq 0$.

Demonstração: Sabemos que $P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} H^k = I + tH + \frac{t^2 H^2}{2!} + \dots + \frac{t^{n-1} H^{n-1}}{(n-1)!}$.

Note que as frações $\frac{H^k}{k!}$ determinam, cada uma, as entradas de cada subdiagonal de P :

$$H^0 = I = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & & & \\ & \binom{1}{1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \binom{n-1}{n-1} \end{pmatrix}, \frac{H^1}{1!} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \binom{1}{0} & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \binom{n-2}{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

e assim sucessivamente.

Logo, $[P(t)]_{ij} = \begin{cases} t^{i-j} \binom{i}{j} & , \text{ para } i \geq j. \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$

■

Corolário 1.2 $\sum_{k=j}^i \binom{i}{k} \binom{k}{j} = 2^{i-j} \binom{i}{j}, i \geq j.$

Demonstração: Usando o teorema acima, junto com a propriedade $P(2) = P^2$, obtém-se a identidade desejada.

■

Definição 1.3 Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A e B são matrizes similares quando $A = MBM^{-1}$, para alguma matriz inversível M .

Afirmção 1.3 Matrizes similares possuem os mesmos autovalores.

Demonstração: Sejam A e B duas matrizes similares e x um autovetor de A associado a λ . Então, $Ax = \lambda x \Rightarrow MBM^{-1}x = \lambda x \Rightarrow B(M^{-1}x) = \lambda(M^{-1}x)$. Como $x \neq 0$ então $M^{-1}x \neq 0$ então $M^{-1}x \neq 0$ e, portanto, λ também é autovalor de B , associado ao autovetor $M^{-1}x$.

■

A próxima afirmação mostra que $P(t)$ é similar a $P, \forall t \neq 0$. Conseqüentemente, $P(t)$ e P possuirão os mesmos autovalores.

Afirmação 1.4 $P(t) = D(t)PD(t)^{-1}, \forall t \neq 0$, em que $[D(t)]_{ij} = \begin{cases} t^i & , \text{ para } i = j. \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$
 $i, j = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Demonstração: $t \neq 0 \Rightarrow D(t)PD(t)^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} t^0 & & & \\ & t^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^0 & & & \\ & t^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & t^{-(n-1)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t^0 & & & \\ & t^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^0 \binom{0}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ t^0 \binom{1}{0} & t^{-1} \binom{1}{1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ t^0 \binom{n-1}{0} & t^{-1} \binom{n-1}{1} & \cdots & t^{-(n-1)} \binom{n-1}{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t^0 \binom{0}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ t^1 \binom{1}{0} & t^0 \binom{1}{1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ t^{n-1} \binom{n-1}{0} & t^{n-2} \binom{n-1}{1} & \cdots & t^0 \binom{n-1}{n-1} \end{pmatrix} = P(t).$$

■

Note que $P(t)$ é não singular, $\forall t \neq 0$, pois $P(t)$ possui determinante 1, por se tratar de uma matriz triangular inferior com todas as entradas da diagonal principal iguais a 1.

Observe também segue que $P(t)H = HP(t)$, pois $P(t)$ é um polinômio em H .

Definição 1.4 A matriz PP^T é dita matriz de Pascal simétrica.

Afirmção 1.5 As entradas da matriz de Pascal simétrica são: $(PP^T)_{ij} = \binom{i+j}{j}$.

Demonstração: $(PP^T)_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} P_{ik}(P^T)_{kj} = \sum_{k=0}^{n-1} P_{ik}P_{jk}$.

Suponha $j = \min\{i, j\}$. Como P é triangular inferior, se $k > j$, $P_{ik}P_{jk} = 0$. Logo,

$$(PP^T)_{ij} = \sum_{k=0}^j P_{ik}P_{jk} = \binom{i}{0} \binom{j}{0} + \binom{i}{1} \binom{j}{1} + \cdots + \binom{i}{j} \binom{j}{j} = \binom{i}{0} \binom{j}{j} + \binom{i}{1} \binom{j}{j-1} +$$

$$\cdots + \binom{i}{j} \binom{j}{0} = \sum_{k=0}^j \binom{i}{k} \binom{j}{j-k}.$$

Mas, $\sum_{k=0}^j \binom{i}{k} \binom{j}{j-k} = \binom{i+j}{j}$ (veja em [7], p.125, a identidade (5.27), conhecida como *convolução de Vandermonde*).

Como, PP^T é simétrica, se $i < j$, $(PP^T)_{ij} = (PP^T)_{ji} = \binom{i+j}{i} = \binom{i+j}{j}$.

■

Observação: A afirmação acima analisada nos elementos da diagonal de PP^T , mostra que:

$$\sum_{k=0}^i \binom{i}{k}^2 = \binom{2i}{i} := (i+1)c_i,$$

em que $c_i = \frac{1}{i+1} \binom{2i}{i}$. Números desta forma são chamados de *números de Catalan*.

Capítulo 2

Matrizes Relacionadas à Matriz de Pascal

Neste capítulo, abordamos algumas importantes relações envolvendo a matriz de Pascal com alguns outros tipos de matrizes como matrizes de Vandermonde, matrizes companheiras e matrizes de Stirling.

2.1 Matrizes Fundamentais para $y'(t) = Ay(t)$

Definição 2.1 Uma matriz $\Psi(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é fundamental para o problema $\frac{dy}{dt} = Ay(t)$, $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se $\frac{d}{dt}\Psi(t) = A\Psi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $\Psi(0) = \Psi_0$ não singular.

Observação: Em outras palavras, cada coluna de $\Psi(t)$ é solução para $\frac{dy}{dt} = Ay(t)$. O fato de Ψ_0 ser não singular implica que as n colunas de $\Psi(t) = e^{At}\Psi_0$ (única solução do sistema para alguma matriz inicial Ψ_0) são linearmente independentes e, conforme teorema do Apêndice A, geram todo espaço das soluções de $\frac{dy}{dt} = Ay(t)$.

Façamos algumas considerações sobre matrizes fundamentais para $\frac{dy}{dt} = Hy(t)$, no caso que H é a matriz de criação.

Afirmção 2.1 Seja $\Phi(t)$ uma matriz fundamental para $\frac{dy}{dt} = Hy(t)$. Então, se Ψ_0 é não singular, $\Psi(t) = \Phi(t)\Phi_0^{-1}\Psi_0$, definida para $t \in \mathbb{R}$, é fundamental.

Demonstração: $\Phi(t)$ fundamental $\Rightarrow \frac{d}{dt}\Psi(t) = \frac{d}{dt}\Phi(t)\Phi_0^{-1}\Psi_0 = H\Phi(t)\Phi_0^{-1}\Psi_0 = H\Psi(t)$.

■

Corolário 2.1 $P(t) = e^{Ht}$ é uma matriz fundamental para $\frac{dy}{dt} = Hy(t)$.

Demonstração: Seja $\Psi(t)$ uma matriz fundamental qualquer. Então, $\Psi(t) = P(t)\Psi_0$. Como $P_0 = I$, $P(t) = \Psi(t)\Psi_0^{-1}P_0$. Logo, $P(t)$ é fundamental. ■

Afirmção 2.2 Se a função vetorial $y(t)$ é solução para $\frac{dy}{dt} = Hy(t)$, então $\Psi(t) = (y(t) \ Py(t) \ \dots \ P^{n-1}y(t))$ é uma matriz fundamental, se $\Psi(0)$ for não singular.

Demonstração: Como $y(t)$ é solução do sistema, então $y(t) = e^{Ht}y_0$, para algum $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Então $P^k y(t) = P^k e^{Ht}y_0 = e^{Hk}e^{Ht}y_0 = e^{H(k+t)}y_0 = y(t+k)$. Portanto, $\frac{d}{dt}P^k y(t) = \frac{d}{dt}(y(t+k)) = y'(t+k) = Hy(t+k) = HP^k y(t)$. ■

2.2 Matriz de Vandermonde

Definição 2.2 Uma matriz $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é chamada matriz de Vandermonde¹ se ela possui a seguinte estrutura:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}, \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Observação: A matriz de Vandermonde é muito utilizada para o problema de interpolação polinomial, ou seja, dados n pares (x_i, y_i) , $1 \leq i \leq n$, queremos um polinômio de grau menor ou igual a $n-1$, $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$, tal que $p(x_i) = y_i$. Os coeficientes são encontrados resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_1 + \dots + a_{n-1}x_1^{n-1} = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + \dots + a_{n-1}x_n^{n-1} = y_n \end{cases} \Leftrightarrow [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{n-1}] W = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]$$

No apêndice sobre teoremas clássicos, mostraremos que W é não singular, se $x_i \neq x_j$, para $i \neq j$, o que garante a unicidade do polinômio interpolador, neste caso.

¹Nascido em Paris, Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) era músico e químico e trabalhou com Bézout e Lavoisier. Sua principal contribuição para a Matemática foi o estudo da teoria de determinantes.

Considere a função vetorial $\xi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & \dots & t^{n-1} \end{pmatrix}^T$. Note que $\xi(t)$ satisfaz a equação diferencial $\frac{dy}{dt} = Hy(t)$, com $\xi_0 = e_0$, pois:

$$H\xi(t) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & \ddots & & & \\ & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & n-1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2t \\ \vdots \\ (n-1)t^{n-2} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\xi(t).$$

Definamos agora a seguinte matriz de Vandermonde:

$$W(t) = \begin{pmatrix} \xi(t) & P\xi(t) & P^2\xi(t) & \dots & P^{n-1}\xi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{Ht}e_0 & e^{H(t+1)}e_0 & e^{H(t+2)}e_0 & \dots & e^{H(t+n-1)}e_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \xi(t) & \xi(t+1) & \xi(t+2) & \dots & \xi(t+n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t & t+1 & \dots & t+n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^{n-1} & (t+1)^{n-1} & \dots & (t+n-1)^{n-1} \end{pmatrix}$$

Como $\xi(t)$ é solução para $\frac{dy}{dt} = Hy(t)$, pela Afirmção 2.2, $W(t)$ será matriz fundamental para tal equação diferencial, visto que $W(0)$ é não singular.

Sabemos que $W(t) = P(t)W(0)$. Logo, $PW(t) = PP(t)W(0) = P(t+1)W(0) = W(t+1)$ e, portanto, $P = W(t+1)W(t)^{-1}$. Note que obtemos uma matriz constante como produto de duas matrizes que dependem de t .

Analisemos, agora, as matrizes fundamentais para o problema

$$\frac{d}{dt}z(t) = -H^T z(t).$$

Podemos checar que, se $\Phi(t)$ é fundamental, então, para todo inteiro j , $\Phi(t)^T P^j W(t)$ é uma matriz constante, pois

$$\frac{d}{dt}(\Phi(t)^T P^j W(t)) = \frac{d\Phi(t)^T}{dt} P^j W(t) + \Phi(t)^T P^j \frac{dW(t)}{dt} = -\Phi(t)^T H P^j W(t) + \Phi(t)^T P^j H W(t)$$

Como $P^j H = H P^j$ (pois P é um polinômio em H), segue que $\frac{d}{dt}(\Phi(t)^T P^j W(t)) = 0$.

Reciprocamente, podemos demonstrar a seguinte afirmação:

Afirmção 2.3 *Se $[\Phi(t)]^T P^j W(t)$ é constante para algum $j \in \mathbb{Z}$, então $\Phi(t)$ é fundamental para o problema acima.*

Demonstração: $\frac{d}{dt}[\Phi(t)^T P^j W(t)] = 0 \Leftrightarrow \frac{d\Phi(t)^T}{dt} P^j W(t) + \Phi(t)^T P^j \frac{dW(t)}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\Phi(t)^T}{dt} P^j W(t) = -\Phi(t)^T P^j H W(t) \Leftrightarrow W(t)^T (P^j)^T \frac{d\Phi(t)}{dt} = -W(t)^T H^T (P^j)^T \Phi(t)$.
 Como $P^j H = H P^j$, ou seja, $H^T (P^j)^T = (P^j)^T H^T$, e $W(t)$ e P^j são inversíveis, segue que $\frac{d\Phi(t)}{dt} = -H^T \Phi(t)$.

■

Se tomarmos $j = 0$ e $\Phi(t) = W(t)^{-T}$, teremos o produto $\Phi(t)^T P^j W(t)$ constante (a matriz identidade) e, portanto, $W(t)^{-T}$ é uma matriz fundamental para $\frac{d}{dt}\Phi(t) = -H^T \Phi(t)$.

Para $j = 1$, obtemos a matriz constante $F := W(t)^{-1} P W(t)$. Como F é a mesma para todo t , podemos tomar $t = 0$. Como vimos anteriormente, a igualdade $P = W(1)W(0)^{-1}$ é válida. Portanto,

$$F = W(t)^{-1} P W(t) = W(0)^{-1} W(1) W(0)^{-1} W(0) = W(0)^{-1} W(1)$$

Note que, pela construção da matriz de Vandermonde, as colunas de $W(1)$, exceto a última, são as mesmas de $W(0)$ deslocadas uma posição para a esquerda. Segue então que as $n - 1$ colunas de F são e_i , $i = 1, 2, \dots, n - 1$, os vetores da base canônica de \mathbb{R}^n . Temos então que

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Por ter esta estrutura, F é chamada de *matriz companheira* (ou *matriz de Frobenius*). No apêndice sobre teoremas clássicos, teremos demonstrado que $\det(F - \lambda I) = (-1)^n (\lambda^n - a_{n-1} \lambda^{n-1} - a_{n-2} \lambda^{n-2} - \dots - a_1 \lambda - a_0)$.

Com isto, podemos determinar as entradas da última coluna de F . Como $F = W(t)^{-1} P W(t)$, então $\det(F - \lambda I) = \det(W(t)^{-1} P W(t) - W(t)^{-1} (\lambda I) W(t)) = \det(W(t)^{-1} (P - \lambda I) W(t)) = \det(W(t)^{-1}) \det(P - \lambda I) \det(W(t)) = \det(W(t)^{-1}) \det(W(t)) \det(P - \lambda I) = \det(P - \lambda I)$. Mas P é uma matriz triangular inferior com 1's na diagonal e, logo, seu polinômio característico é

$$\det(P - \lambda I) = (1 - \lambda)^n$$

Agora, pelo binômio de Newton,

$$(1 - \lambda)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 1^{n-i} (-\lambda)^i =$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{n}{0}(-\lambda)^0 + \binom{n}{1}(-\lambda)^1 + \binom{n}{2}(-\lambda)^2 + \dots + \binom{n}{n-1}(-\lambda)^{n-1} + \binom{n}{n}(-\lambda)^n = \\
&= (-1)^0 \lambda^0 \binom{n}{0} + (-1)^1 \lambda^1 \binom{n}{1} + (-1)^2 \lambda^2 \binom{n}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} \binom{n}{n-1} + (-1)^n \lambda^n \binom{n}{n} = \\
&= (-1)^{n+1} a_0 + (-1)^{n+1} a_1 \lambda + \dots + (-1)^{n+1} a_{n-2} \lambda^{n-2} + (-1)^{n+1} a_{n-1} \lambda^{n-1} + (-1)^n \lambda^n
\end{aligned}$$

Logo,

$$(-1)^{n+1} a_{n-1} = (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} \Leftrightarrow a_{n-1} = (-1)^{-2} \binom{n}{n-1} = (-1)^0 \binom{n}{n-1}$$

$$(-1)^{n+1} a_{n-2} = (-1)^{n-2} \binom{n}{n-2} \Leftrightarrow a_{n-2} = (-1)^{-3} \binom{n}{n-2} = (-1)^1 \binom{n}{n-2}$$

⋮

$$(-1)^{n+1} a_1 = (-1)^1 \binom{n}{1} \Leftrightarrow a_1 = (-1)^{-n} \binom{n}{1} = (-1)^{n-2} \binom{n}{1}$$

$$(-1)^{n+1} a_0 = (-1)^0 \lambda^0 \binom{n}{0} \Leftrightarrow a_0 = (-1)^{-n-1} \binom{n}{0} = (-1)^{n-1} \binom{n}{0}.$$

$$\text{Ou seja, } F = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & (-1)^{n-1} \binom{n}{0} \\ 1 & 0 & & \vdots & (-1)^{n-2} \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & (-1)^1 \binom{n}{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 1 & (-1)^0 \binom{n}{n-1} \end{pmatrix}.$$

Além de determinar todas as entradas da matriz companheira F , podemos também encontrar a sua inversa. Consideremos, primeiramente, a matriz de permutação

$$J = \begin{pmatrix} e_{n-1} & e_{n-2} & \dots & e_1 & e_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lema 2.1 $W(j)J = D(-1)W(1-n-j)$, para todo $j \in \mathbb{Z}$, em que $D(-1)$ é a matriz diagonal citada na Afirmção 1.4.

Demonstração: $W(j)J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ j & j+1 & \dots & j+n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j^{n-1} & (j+1)^{n-1} & \dots & (j+n-1)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ j+n-1 & \dots & j+1 & j \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (j+n-1)^{n-1} & \dots & (j+1)^{n-1} & j^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^0 & & & \\ & (-1)^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1-n-j & 2-n-j & \dots & -j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (1-n-j)^{n-1} & (2-n-j)^{n-1} & \dots & (-j)^{n-1} \end{pmatrix} = D(-1)W(1-n-j).$$

■

Afirmção 2.4 $F^{-1} = JFJ$.

Demonstração: Sabemos que $F = W(0)^{-1}PW(0)$. Portanto, $F^{-1} = W(0)^{-1}P^{-1}W(0)$. Também temos que $P^{-1} = P(-1) = D(-1)PD(-1)^{-1}$ (Afirmção 1.4). Mas note que $D(-1)^{-1} = D(-1)$. Logo, $F^{-1} = W(0)^{-1}P^{-1}W(0) = W(0)^{-1}D(-1)PD(-1)W(0) = JW(1-n)^{-1}PW(1-n)J = JFJ$.

■

Outra matriz constante que é produto de matrizes variáveis é $\log(F)$. Considere a matriz $M := W(t)^{-1}HW(t)$.

Afirmção 2.5 $M = \log(F)$.

Demonstração: $e^M = e^{W(t)^{-1}HW(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(W(t)^{-1}HW(t))^k}{k!}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, temos:

$$\frac{(W(t)^{-1}HW(t))^k}{k!} = \frac{(W(t)^{-1}HW(t))(W(t)^{-1}HW(t)) \dots (W(t)^{-1}HW(t))}{k!} = W(t)^{-1} \frac{H^k}{k!} W(t).$$

Logo, $e^{W(t)^{-1}HW(t)} = W(t)^{-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{H^k}{k!} \right] W(t) = W(t)^{-1}PW(t) \Rightarrow e^M = W(t)^{-1}PW(t) = F \Rightarrow M = \log(F)$.

■

Afirmção 2.6 $M = -JMJ$

Demonstração: Pelo [Lema 2.1](#), $W(0)J = D(-1)W(1-n)$ e, como $J^{-1} = J$, $W(0) = D(-1)W(1-n)J$.

Logo, $M = W(0)^{-1}HW(0) = JW(1-n)^{-1}[D(-1)HD(-1)]W(1-n)J$. Mas,

$$\begin{aligned}
 D(-1)HD(-1) &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & n-1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^{n-1} \end{pmatrix} = \\
 & \begin{pmatrix} 0 & & & \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & (-1)^{n-1}(n-1) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^{n-1} \end{pmatrix} = \\
 & \begin{pmatrix} 0 & & & \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -(n-1) & 0 \end{pmatrix} = -H.
 \end{aligned}$$

Portanto, $M = -J[W(1-n)^{-1}HW(1-n)]J = -JMJ$.

■

2.3 Matriz de Stirling

2.3.1 Números de Stirling da Segunda Espécie

Representados pelo símbolo $\left\{ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right\}$, eles denotam o número de maneiras de particionar i coisas em j subconjuntos não-vazios.

Exemplo: $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 7$, pois

$$\begin{aligned}
 \{1, 2, 3, 4\} &= \{1, 2, 3\} \cup \{4\} = \{1, 3, 4\} \cup \{2\} = \{1, 2, 4\} \cup \{3\} = \{2, 3, 4\} \cup \{1\} = \\
 &= \{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 3\} \cup \{2, 4\} = \{1, 4\} \cup \{2, 3\}.
 \end{aligned}$$

Vejamos o que acontece para valores pequenos de j . Quando $j = 0$, convencionamos que existe uma única forma de particionar um conjunto vazio em zero conjuntos não-vazios, ou seja, $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} = 1$; e que um conjunto não-vazio não pode ser particionado em

zero subconjuntos não-vazios, ou seja, $\left\{ \begin{matrix} i \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0$, para $i > 0$.

Há apenas uma forma de colocar i elementos em um único conjunto não-vazio. Logo, $\left\{ \begin{matrix} i \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1$. Por outro lado, $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 0$, pois um conjunto com zero elementos é vazio.

Para $j = 2$, claro que $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 0$. Se um conjunto de $i > 0$ elementos for dividido em 2 subconjuntos não-vazios, um deles contém o último elemento e algum subconjunto dos $i-1$ primeiros elementos (inclusive pode ser o conjunto vazio). Há 2^{i-1} formas de escolher esse subconjunto, já que cada elemento está ou não (2 possibilidades) no subconjunto. Mas não podemos colocar os $i-1$ elementos restantes, pois queremos dividir em duas partes não-vazias. Portanto, subtraímos 1 e, assim, obtemos $\left\{ \begin{matrix} i \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{i-1} - 1$, para $i > 0$.

Uma modificação neste argumento nos levará a uma relação de recorrência para $\left\{ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right\}$, para todo $j > 1$: dado um conjunto de $i > 0$ objetos, a serem divididos em j partes não-vazias, ou o último fica em um conjunto sozinho $\left(\left\{ \begin{matrix} i-1 \\ j-1 \end{matrix} \right\} \text{ maneiras possíveis} \right)$, ou o colocamos em algum subconjunto não-vazio dos $i-1$ primeiros objetos. No último caso, há $j \left\{ \begin{matrix} i-1 \\ j \end{matrix} \right\}$ possibilidades pois cada uma das $\left\{ \begin{matrix} i-1 \\ j \end{matrix} \right\}$ maneiras de distribuir os $i-1$ primeiros objetos em j partes não-vazias fornece j subconjuntos aos quais o i -ésimo objeto pode se agregar. Logo, obtemos uma fórmula recursiva para os números de Stirling da segunda espécie:

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right\} = j \left\{ \begin{matrix} i-1 \\ j \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i-1 \\ j-1 \end{matrix} \right\}, i, j > 0.$$

A seguir, provaremos uma identidade dos números de Stirling da segunda espécie que mostra que eles são os coeficientes da expansão de potências comuns em potências fatoriais.

Teorema 2.1 $t^i = \sum_{j=0}^i \left\{ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right\} t^{(j)}$, para todo $i \geq 0$, em que $t^{(j)} = t(t-1)(t-2)\dots(t-j+1)$ denota a potência fatorial.

Demonstração: Primeiramente, convençionemos que $\left\{ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right\} = 0$, se $i \geq 0$ e $j < 0$ e $t^{(0)} = 1$.

Para $i = 0$, a identidade vale:

$$t^0 = 1 = 1 \cdot t^{(0)} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} t^{(0)} = \sum_{j=0}^0 \left\{ \begin{matrix} 0 \\ j \end{matrix} \right\} t^{(0)}.$$

Suponha que para $i - 1$ temos $t^{i-1} = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} t^{(j)}$. Logo, $t^i = t \cdot t^{i-1} =$

$$t \cdot \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} t^{(j)}.$$

Note que $t \cdot t^{(j)} = t^{(j+1)} + j \cdot t^{(j)}$, pois $t^{(j+1)} = t^{(j)}(t - j)$.

$$\text{Então, } t^i = t \cdot \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} t^{(j)} = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} t^{(j+1)} + \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} j \cdot t^{(j)} =$$

$$\sum_{j=1}^i \binom{i-1}{j-1} t^{(j)} + \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} j t^{(j)} = \left[\left(\sum_{j=0}^i \binom{i}{j-1} t^{(j)} \right) - \binom{i-1}{-1} t^{(-1)} \right] +$$

$$\left[\left(\sum_{j=0}^i \binom{i}{j} j t^{(j)} \right) - \binom{i-1}{i} j t^{(i)} \right].$$

Como $\binom{i-1}{-1} = \binom{i-1}{i} = 0$, segue que

$$t^i = \left[\left(\sum_{j=0}^i \binom{i-1}{j-1} t^{(j)} \right) - \binom{i-1}{-1} t^{(-1)} \right] + \left[\left(\sum_{j=0}^i \binom{i-1}{j} j t^{(j)} \right) - \binom{i-1}{i} j t^{(i)} \right] =$$

$$\sum_{j=0}^i \binom{i-1}{j-1} t^{(j)} + \sum_{j=0}^i \binom{i-1}{j} j t^{(j)} = \sum_{j=0}^i \left(j \binom{i-1}{j} + \binom{i-1}{j-1} \right) t^{(j)} = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} t^{(j)}.$$

Logo, $t^i = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} t^{(j)}$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

■

Considere a matriz S com as entradas descritas abaixo:

$$S_{ij} = \binom{i}{j}, i, j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Ela é chamada *matriz de Stirling*². Nosso objetivo aqui é estabelecer conexões desta matriz com outras matrizes já discutidas anteriormente.

Vamos construir a matriz de Stirling 4×4 (até $i, j = 3$).

Da definição dos números de Stirling da segunda espécie, segue direto que $\binom{i}{j} = 0$, para $j > i$, pois cada um dos j subconjuntos deve ter pelo menos 1 elemento, o que excederia os i elementos disponíveis. Portanto, a matriz de Stirling será triangular inferior, qualquer que seja sua dimensão.

Podemos concluir rapidamente também que $\binom{i}{i} = 1$, pois a única forma de particionar i elementos em i subconjuntos não-vazios é dividir-los em conjuntos unitários.

²James Stirling (1692-1770) foi um importante matemático escocês do século XVIII. Seus principais legados foram a conhecida fórmula de Stirling ($n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$) e os números de Stirling de primeira e segunda espécies.

Conforme foi convencionado anteriormente, $\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 1$ e $\begin{Bmatrix} i \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$, para $i > 0$.

As outras entradas podem ser calculadas pela fórmula de recorrência:

- $\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = 1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = 1.$
- $\begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix} = 1 \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \end{Bmatrix} = 1.$
- $\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix} = 2 \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = 3.$

Portanto,

$$S_4 = \begin{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \end{Bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Devido à identidade obtida no [Teorema 2.3](#), segue que:

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^{n-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} & \dots & \vdots & \\ 0 & \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & \begin{Bmatrix} n-1 \\ 1 \end{Bmatrix} & \dots & \dots & \begin{Bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{Bmatrix} \end{pmatrix}}_S \begin{pmatrix} t^{(0)} \\ t^{(1)} \\ t^{(2)} \\ \vdots \\ t^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Logo, a matriz de Vandermonde $W(t)$, definida neste capítulo, satisfaz:

$$W(t) = S \underbrace{\begin{pmatrix} t^{(0)} & \dots & (t+n-1)^{(0)} \\ t^{(1)} & & (t+n-1)^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ t^{(n-1)} & \dots & (t+n-1)^{(n-1)} \end{pmatrix}}_{V(t)} := SV(t).$$

Uma matriz como $V(t)$ chamaremos de matriz *tipo-Vandermonde*. Note que, como S é triangular superior com todas as entradas da diagonal iguais a 1, $\det(S) = 1$ e, portanto,

$$\det W(t) = \det V(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Como $\det W(t) \neq 0$, a matriz tipo-Vandermonde é não-singular.

As entradas de $V(t)$ são $[V(t)]_{ij} = (t + j)^{(i)}$. Quando $t = 0$, $[V(0)]_{ij} = j^{(i)} = j(j-1)\dots(j-i+1)$. Logo, para $i > j$, $[V(0)]_{ij} = 0$ e concluímos que $V(0)$ é triangular superior.

Afirmção 2.7 $i^{(j)} = j! \binom{i}{j}$, $j \geq 0$, $i \geq j$.

Demonstração: $j! \binom{i}{j} = j! \frac{i!}{(i-j)!j!} = \frac{i!}{(i-j)!} = \frac{i(i-1)\dots(i-j+1)(i-j)!}{(i-j)!} = i^{(j)}$. ■

Definindo a matriz $D_f := \text{diag}(0!, 1!, 2!, \dots, (n-1)!)$ e utilizando a afirmação acima, obtemos que:

$$V(0) = \begin{pmatrix} 0^{(0)} & \dots & (n-1)^{(0)} \\ & \ddots & \vdots \\ & & (n-1)^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! & & \\ & \ddots & \\ & & (n-1)! \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \dots & \binom{n-1}{0} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \binom{n-1}{n-1} \end{pmatrix} = D_f P^T$$

Como $W(0) = SV(0)$, segue que $W(0) = SD_f P^T$ e, assim, obtemos uma fatoração LDU para a matriz de Vandermonde $W(0)$.

2.4 Forma de Jordan da Matriz de Pascal

Nesta seção, estabeleceremos uma relação mais profunda entre as matrizes de Pascal e de Stirling, que envolve a forma de Jordan da matriz de Pascal.

Note que o único autovalor de P é 1, pois é uma matriz triangular inferior com todas as entradas da diagonal iguais a 1.

Os autovetores de P podem ser determinados pela resolução do sistema abaixo:

$$Px = x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & & \\ \vdots & \ddots & \\ \binom{n-1}{0} & \dots & \binom{n-1}{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \binom{0}{0}x_0 = x_0 \\ \binom{1}{0}x_0 + \binom{1}{1}x_1 = x_1 \\ \binom{2}{0}x_0 + \binom{2}{1}x_1 + \binom{2}{2}x_2 = x_2 \\ \vdots \\ \binom{n-1}{0}x_0 + \binom{n-1}{1}x_1 + \dots + \binom{n-1}{n-1}x_{n-1} = x_{n-1} \end{cases}$$

Daí podemos concluir que $x_0 = x_1 = \dots = x_{n-2} = 0$ e x_{n-1} pode assumir qualquer valor. Logo, todos autovetores de P possuem a mesma direção, que é a do vetor da base canônica $e_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$.

Portanto, P é similar à matriz de Jordan

$$J_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Voltemos um pouco à matriz *tipo-Vandermonde* $V(t)$. Suas entradas são potências fatoriais e, considerando a identidade abaixo,

$$\begin{aligned} (t+1)^{(j)} - t^{(j)} &= (t+1) \cdot t \dots (t-j+2) - t(t-1) \dots (t-j+1) = \\ &= [t(t-1) \dots (t-j+2)] \cdot [(t+1) - (t-j+1)] = j[t(t-1) \dots (t-j+2)] = jt^{(j-1)} \\ &\Rightarrow (t+1)^{(j)} - t^{(j)} = jt^{(j-1)}, \end{aligned}$$

obtemos a equação matricial $V(t+1) - V(t) = HV(t)$.

Em particular, para $t = 0$, $V(1) = V(0) + HV(0)$ e, então, $V(1)V(0)^{-1} = I + H$.

Já vimos anteriormente que $SV(t) = W(t)$. Derivando ambos os lados, obtemos

$$\frac{d}{dt}V(t) = S^{-1} \frac{d}{dt}W(t).$$

Mas sabemos que a matriz de Vandermonde $W(t)$ é uma matriz que respeita a relação fundamental $\frac{d}{dt}W(t) = HW(t)$. Logo,

$$\frac{d}{dt}V(t) = S^{-1}HW(t) = S^{-1}HSV(t).$$

Esta última equação diferencial possui solução $V(t) = S^{-1}P^tSV(0)$, pois

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(S^{-1}P^tSV(0)) &= S^{-1} \frac{d}{dt}(P^t)SV(0) = S^{-1} \frac{d}{dt}(e^{Ht})SV(0) = \\ &= S^{-1}He^{Ht}SV(0) = S^{-1}HP^tSV(0) = S^{-1}HP^tW(0) = S^{-1}HW(t) = S^{-1}HSV(t). \end{aligned}$$

Para $t = 1$, segue que $V(1)V(0)^{-1} = S^{-1}PS$. Logo, $I + H = S^{-1}PS$ e, portanto, $D_f^{-1}S^{-1}PSD_f = I + D_f^{-1}HD_f$.

As entradas da matriz $D_f^{-1}HD_f := \tilde{H}$ estão calculadas abaixo:

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{0!} & & & \\ & \frac{1}{1!} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{(n-1)!} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & n-1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0! & & & \\ & 1! & & \\ & & \ddots & \\ & & & (n-1)! \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{0!} & & & \\ & \frac{1}{1!} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{(n-1)!} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1! & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & (n-1)! & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, $(SD_f)^{-1}PSD_f = I + \tilde{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} = J_P$, ou seja, a matriz de

Stirling normalizada SD_f é uma matriz de mudança de base que transforma similarmente a matriz de Pascal P na matriz de Jordan J_P .

Capítulo 3

Seqüências de Polinômios

Uma seqüência de polinômios consiste em um conjunto de funções polinomiais indexadas pelos números naturais, em que os índices correspondem ao grau de cada polinômio.

Nas próximas seções, falaremos sobre algumas famosas seqüências (Hermite, Bernoulli e Bernstein), colocando propriedades importantes de cada uma delas e tentando relacioná-las com a matriz de Pascal, que é o nosso principal objetivo.

3.1 Polinômios de Hermite

A seguir, definimos os polinômios de Hermite ¹, demonstramos algumas de suas propriedades e depois buscamos relações que nos permitam fazer uma associação com a matriz de criação e a matriz de Pascal.

Definição 3.1 *Os polinômios definidos pela fórmula*

$$H_k(t) := (-1)^k e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^k}{dt^k} e^{-\frac{t^2}{2}}, k = 0, 1, 2, \dots,$$

são denominados polinômios de Hermite. Para $k = -1$, definimos $H_{-1} \equiv 0$, o qual será útil para uma relação de recorrência que mostraremos posteriormente.

Não há só esta definição para polinômios de Hermite. Por exemplo, uma definição usada pelos físicos, que é aplicada à mecânica quântica na qual a fórmula dos polinômios de Hermite muda para:

$$H_k(t) := (-1)^k e^{t^2} \frac{d^k}{dt^k} e^{-t^2}, k = 0, 1, 2, \dots$$

¹Charles Hermite (1822-1901) foi um matemático francês que desenvolveu pesquisa em várias áreas como teoria de números, formas quadráticas, polinômios ortogonais, funções elípticas e álgebra. Um de seus principais feitos foi provar que e , a base natural dos logaritmos, é um número transcendente.

A primeira definição (com a qual trabalharemos, pois traz propriedades mais interessantes para nosso estudo) é mais utilizada por quem trabalha com probabilidade pois $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$ é função de densidade de probabilidade para a distribuição normal com valor esperado 0 e variância 1.

Exemplos: Pelo cálculo direto, obtemos:

$$H_0(t) = 1, H_1(t) = t, H_2(t) = t^2 - 1, H_3(t) = t^3 - 3t, H_4(t) = t^4 - 6t^2 + 3, H_5(t) = t^5 - 10t^3 + 15t.$$

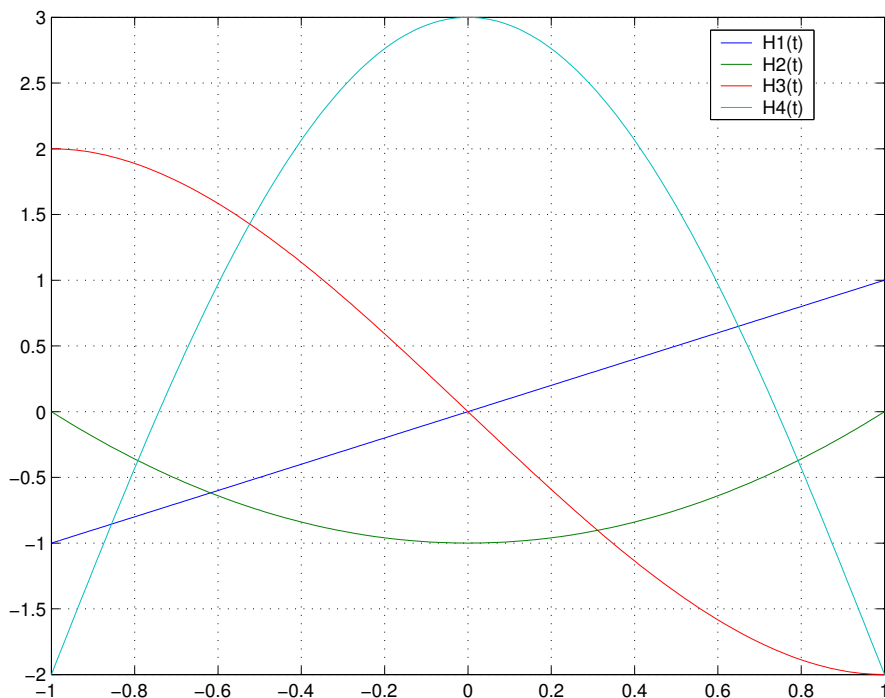


Figura 3.1: Gráfico dos 4 primeiros polinômios de Hermite não constantes no intervalo $[-1, 1]$.

De maneira geral (e como pode ser visto nos 6 primeiros exemplos), o coeficiente líder dos polinômios de Hermite é sempre 1, H_{2k} é sempre função par e H_{2k+1} é sempre função ímpar, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Observação: No apêndice de teoremas clássicos demonstramos que os polinômios de Hermite são ortogonais em relação ao produto interno definido por $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} f(t)g(t)dt$.

A seguir, demonstramos importantes identidades envolvendo os polinômios de Hermite.

Teorema 3.1 *Os polinômios de Hermite satisfazem as identidades:*

$$(i) H_{k+1}(t) = tH_k(t) - kH_{k-1}(t), k \geq 0.$$

$$(ii) H_{k+1}(t) = tH_k(t) - H'_k(t), k \geq 0.$$

Demonstração: (i) Esta demonstração envolve alguns conceitos de Análise Linear que estão fora do nosso contexto. Para o leitor interessado, recomendamos [8], pp. 518, 519.

(ii) Começemos com a fórmula de definição dos polinômios de Hermite:

$$H_k(t) := (-1)^k e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^k}{dt^k} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Ela pode ser reescrita como $\frac{d^k}{dt^k} e^{-\frac{t^2}{2}} = (-1)^k e^{-\frac{t^2}{2}} H_k(t)$. Derivando, temos:

$$\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} e^{-\frac{t^2}{2}} = (-1)^k [-tH_k(t) + H'_k(t)] e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Por outro lado, usando a definição para $H_{k+1}(t)$:

$$\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} e^{-\frac{t^2}{2}} = (-1)^{k+1} e^{-\frac{t^2}{2}} H_{k+1}(t) \Rightarrow H_{k+1}(t) = tH_k(t) - H'_k(t).$$

■

Corolário 3.1 $\frac{d}{dt} H_k(t) = kH_{k-1}(t)$

Demonstração: Do Teorema 3.1, segue que $tH_k(t) - kH_{k-1}(t) = H_{k+1}(t) = tH_k(t) - \frac{d}{dt} H_k(t)$. Logo, $\frac{d}{dt} H_k(t) = kH_{k-1}(t)$.

■

A identidade do Corolário 3.1 nos permite fazer uma conexão entre os polinômios de Hermite e o estudo de matrizes feito até aqui.

Seja $h(t) = \begin{pmatrix} H_0(t) & H_1(t) & \dots & H_{n-1}(t) \end{pmatrix}$ o vetor dos polinômios de Hermite. Pelo corolário, segue a identidade matricial:

$$\frac{d}{dt} h(t) = Hh(t).$$

Ou seja, $h(t)$ satisfaz a relação fundamental $\frac{d}{dt} y(t) = Hy(t)$ e, então, $h(t) = P(t)h(0)$. O que também podemos afirmar por essa relação é que $h(t+1) = Ph(t)$ e $h(t+n) = P^n h(t)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

3.2 Polinômios de Bernoulli

Definição 3.2 Os polinômios que satisfazem as seguintes relações:

$$\frac{d}{dt}B_k(t) = kB_{k-1}(t), \int_0^1 B_k(t)dt = \begin{cases} 1 & , \text{ se } k=0 \\ 0 & , \text{ se } k>0 \end{cases}, k \in \mathbb{N},$$

são chamados polinômios de Bernoulli.

Exemplos: A seguir calculamos, pela definição, os três primeiros polinômios de Bernoulli:

(0) $B_0(t) = c_0, c_0 \in \mathbb{R};$

$$1 = \int_0^1 B_0(t)dt = \int_0^1 c_0 dt = c_0 t \Big|_0^1 = c_0 \Rightarrow c_0 = B_0(t) = 1.$$

(1) $\frac{d}{dt}B_1(t) = B_0(t) \Rightarrow B_1(t) = \int B_0(t)dt \Rightarrow B_1(t) = t + c_1.$

Mas, $0 = \int_0^1 B_1(t)dt = \int_0^1 (t + c_1)dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 + c_1 t \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + c_1 \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2}.$

Portanto, $B_1(t) = t - \frac{1}{2};$

(2) $\frac{d}{dt}B_2(t) = 2B_1(t) = 2t - 1 \Rightarrow B_2(t) = \int (2t - 1)dt \Rightarrow B_2(t) = t^2 - t + c_2.$

Mas, $0 = \int_0^1 B_2(t)dt = \int_0^1 (t^2 - t + c_2)dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + c_2 t \right]_0^1 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{6}.$

Logo, $B_2(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}.$

Os 4 polinômios seguintes são:

(3) $B_3(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t;$

(4) $B_4(t) = t^4 - 2t^3 + t^2 - \frac{1}{30};$

(5) $B_5(t) = t^5 - \frac{5}{2}t^4 + \frac{5}{3}t^3 - \frac{1}{6}t;$

(6) $B_6(t) = t^6 - 3t^5 + \frac{5}{2}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{42}.$

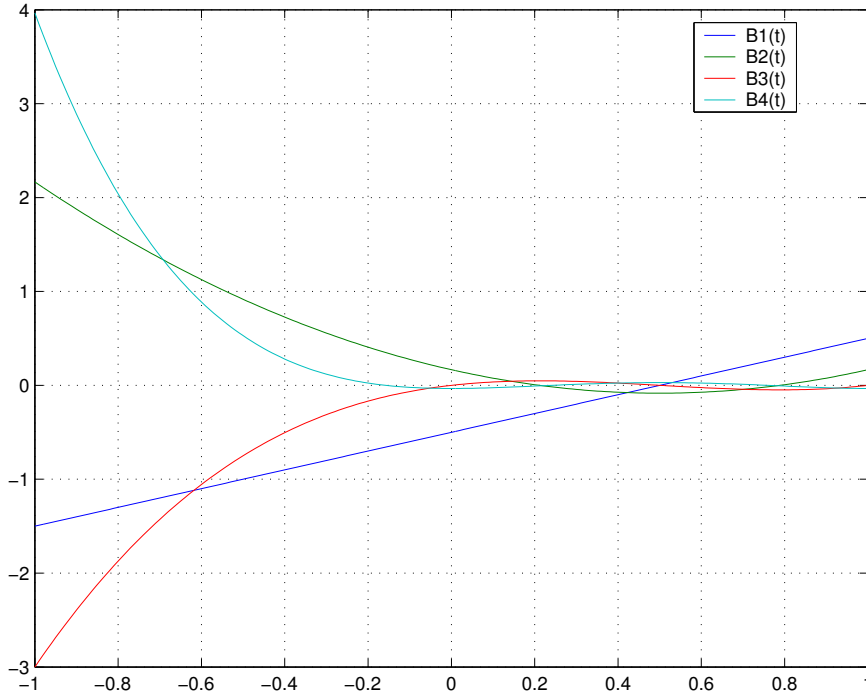


Figura 3.2: Gráfico dos 4 primeiros polinômios de Bernoulli não constantes no intervalo $[-1, 1]$.

Teorema 3.2 *O polinômio de Bernoulli de grau k é único.*

Demonstração: Será feita por indução:

Para $k = 0$, sabemos que $B_0(t) \equiv 1$ é o único polinômio de Bernoulli de grau zero.

Agora suponha que o único polinômio de Bernoulli de grau k seja

$B_k(t) = a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \dots + a_1 t + a_0$. Temos que $\frac{d}{dt} B_{k+1}(t) = (k+1) B_k(t)$. Portanto,

$$B_{k+1}(t) = (k+1) \int (a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \dots + a_1 t + a_0) dt = (k+1) \left(\frac{a_k}{k+1} t^{k+1} + \dots + \frac{a_1}{2} t^2 + a_0 t + C \right) = a_k t^{k+1} + \frac{(k+1)a_{k-1}}{k} t^k + \dots + \frac{(k+1)a_1}{2} t^2 + (k+1)a_0 t + (k+1)C.$$

Seja $c_{k+1} = (k+1)C$. Para mostrar que $B_{k+1}(t)$ é único, basta mostrar que c_{k+1} é único.

Como $0 = \int_0^1 B_{k+1}(t) dt = \int_0^1 \left[a_k t^{k+1} + \frac{(k+1)a_{k-1}}{k} t^k + \dots + \frac{(k+1)a_1}{2} t^2 + (k+1)a_0 t \right] dt + \int_0^1 c_{k+1} dt$, segue que $c_{k+1} = - \int_0^1 [a_k t^{k+1} + \dots + (k+1)a_0 t] dt$, que representa um único valor real. Logo, $B_{k+1}(t)$ é único. ■

Observação: Na demonstração acima, chegamos a uma fórmula recursiva para os polinômios de Bernoulli. Dado $B_k(t) = a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \dots + a_1 t + a_0$, obtemos

$$B_{k+1}(t) = a_k t^{k+1} + \frac{(k+1)a_{k-1}}{k} t^k + \dots + \frac{(k+1)a_1}{2} t^2 + (k+1)a_0 t - \int_0^1 [a_k t^{k+1} + \dots + (k+1)a_0 t] dt.$$

Olhando para a fórmula, nota-se também que o polinômio de grau k sempre terá coeficiente líder $a_k = 1$, pois $B_0(t) = 1$.

Definição 3.3 *Os números de Bernoulli são os polinômios de Bernoulli avaliados em $t=0$: $B_k(0) := B_k$.*

Observações: • De maneira geral, assim como nos exemplos vistos, $B_{2n+1}(0) = 0$, para $n \geq 1$.

• Uma aplicação importante dos números de Bernoulli à Análise Numérica será apresentada no Apêndice C: a fórmula de somatório de Euler-Maclaurin.

Os n primeiros números de Bernoulli são as entradas do vetor de polinômios de Bernoulli definido por $b(t) := \left(B_0(t) \ B_1(t) \ \dots \ B_{n-1}(t) \right)^T$, em $t=0$. Em relação a este vetor, segue direto da Definição 3.2 as identidades:

$$\frac{d}{dt}b(t) = Hb(t), \int_0^1 b(t)dt = e_0.$$

As duas igualdades acima garantem dois fatos:

(1) $b(t)$ satisfaz a relação $\frac{d}{dt}y(t) = Hy(t)$ e, portanto, $b(t) = P(t)b(0)$.

(2) $e_0 = \int_0^1 b(t)dt = \int_0^1 P(t)b(0)dt = \int_0^1 P(t)dt \cdot b(0)$.

Definindo $L = \int_0^1 P(t)dt$, segue que $e_0 = Lb(0)$.

Calculemos agora a matriz L :

$$L := \int_0^1 P(t)dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(tH)^k}{k!} dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 t^k \frac{H^k}{k!} dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H^k}{k!} \int_0^1 t^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H^k}{(k+1)!}.$$

Veja que, por L ser soma da matriz identidade com potências de H , ela é triangular inferior com as entradas da diagonal principal iguais a 1 e, portanto, não-singular.

Outra conclusão que podemos tirar a respeito de L é que $HL = LH$, pois L é um polinômio em H .

Abaixo, definimos outra matriz:

$$\begin{aligned} \tilde{L} &:= D(-1)LD(-1)^{-1} = D(-1)LD(-1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D(-1)H^k D(-1)}{(k+1)!} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D(-1)H \overbrace{D(-1)D(-1)}^I HD(-1) \dots D(-1)HD(-1)}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[D(-1)HD(-1)]^k}{(k+1)!}, \end{aligned}$$

em que $D(-1) = \text{diag}((-1)^0, (-1)^1, \dots, (-1)^{n-1})$. Observando que $D(-1)HD(-1) = -H$, temos

$$\tilde{L} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-H)^k}{(k+1)!}$$

Também podemos checar, sem muita dificuldade, que $I - H\tilde{L} = P^{-1}$:

$$I - H\tilde{L} = I + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-H)^{k+1}}{(k+1)!} = I - H + \frac{H^2}{2!} - \frac{H^3}{3!} + \dots + \frac{(-H)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-H)^n}{n!}.$$

Mas, como $(-H)^n = 0$, temos $I - H\tilde{L} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-H)^k}{k!} = P(-1) = P^{-1}$.

Agora estabeleceremos uma relação entre as matrizes L , \tilde{L} e P mostrando que $L = P\tilde{L}$. Mas, para isto, são necessários alguns resultados preliminares.

Afirmção 3.1 $P - LH = I$.

Demonstração: $P = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H^k}{k!}$, $L = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H^k}{(k+1)!} \Rightarrow LH = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H^{k+1}}{(k+1)!} = H + \frac{H^2}{2!} + \dots + \frac{H^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{H^n}{n!}$. Como $H^n = 0$, segue que $P - LH = I$.

■

Afirmção 3.2 $(L - P\tilde{L})H = 0$.

Demonstração: Sabemos que $I - H\tilde{L} = P^{-1}$. Logo, $P - PH\tilde{L} = I$. Pela **Afirmção 3.1**, temos que $P - LH = P - PH\tilde{L}$ e, portanto, $LH = PH\tilde{L} = P\tilde{L}H \Rightarrow (L - P\tilde{L})H = 0$.

■

Lema 3.1 (i) Se n é ímpar então $\binom{n}{n-1} - \binom{n}{n-2} + \dots + (-1)^{n-3}\binom{n}{2} + (-1)^{n-2}\binom{n}{1} = 0$.
(ii) Se n é par então $\binom{n}{n-1} - \binom{n}{n-2} + \dots + (-1)^{n-3}\binom{n}{2} + (-1)^{n-2}\binom{n}{1} = 2$.

Demonstração: (i) Basta notar que $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ e, como n é ímpar, $\binom{n}{n-1} - \binom{n}{n-2} + \dots + (-1)^{n-3}\binom{n}{2} + (-1)^{n-2}\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} - \binom{n}{n-2} + \dots + \binom{n}{2} - \binom{n}{1} = 0$.

(ii) Usaremos o binômio de Newton:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \dots + \binom{n}{n-1}xa^{n-1} + \binom{n}{n}a^n.$$

Se $x = 1$ e $a = -1$, segue que:

$$0 = (1-1)^n = \binom{n}{0} \cdot 1 + \binom{n}{1} \cdot 1^{n-1} \cdot (-1) + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot 1 \cdot (-1)^{n-1} + \binom{n}{n}(-1)^n = \binom{n}{n} - \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-2} - \dots + \binom{n}{2} - \binom{n}{1} + \binom{n}{0}, \text{ pois } n \text{ é par. Como } \binom{n}{n} + \binom{n}{0} = 2, \text{ temos que } \binom{n}{n-1} - \binom{n}{n-2} + \dots - \binom{n}{2} + \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} - \binom{n}{n-2} + \dots + (-1)^{n-3}\binom{n}{2} + (-1)^{n-2}\binom{n}{1} = 2.$$

■

Afirmação 3.3 $L - P\tilde{L}$ é um polinômio em H de grau menor ou igual a $n - 2$.

Demonstração:
$$P\tilde{L} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{H^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-H)^k}{(k+1)!} \right) = p_{n-1}H^{n-1} + p_{n-2}H^{n-2} + \dots + p_0H^0,$$

em que
$$p_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{2!(n-2)!} + \dots + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} =$$

$$\frac{1}{n!} \left[\frac{n!}{(n-1)!} - \frac{n!}{2!(n-2)!} + \dots + \frac{(-1)^{n-2}n!}{(n-1)!} + (-1)^{n-1} \right] =$$

$$\frac{1}{n!} \left[\binom{n}{n-1} - \binom{n}{n-2} + \dots + (-1)^{n-2} \binom{n}{1} + (-1)^{n-1} \right].$$

Usando a identidade do [Lema 3.1](#), segue que, independente da paridade de n ,

$$\left[\binom{n}{n-1} - \binom{n}{n-2} + \dots + (-1)^{n-2} \binom{n}{1} + (-1)^{n-1} \right] = 1 \Rightarrow p_{n-1} = \frac{1}{n!}.$$

Portanto,
$$L - P\tilde{L} = \left(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{H^k}{(k+1)!} + \frac{1}{n!}H^{n-1} \right) - \left(\frac{1}{n!}H^{n-1} + p_{n-2}H^{n-2} + \dots + p_0I \right) =$$

$$\sum_{k=0}^{n-2} \frac{H^k}{(k+1)!} + p_{n-2}H^{n-2} + \dots + p_0I.$$

■

Agora podemos estabelecer a seguinte relação:

Teorema 3.3 $L = P\tilde{L}$.

Demonstração: Sabemos que $(L - P\tilde{L})H = 0$ e $L - P\tilde{L}$ é polinômio em H de grau menor ou igual a $n - 2$. Logo, $(L - P\tilde{L})H$ possui grau menor que n . Mas o polinômio mínimo de H é H^n . Portanto $L - P\tilde{L} = 0$.

■

Como $\tilde{L} = D(-1)LD(-1)^{-1}$, segue que $L = P\tilde{L} = PD(-1)LD(-1)$ e obtém-se a identidade

$$LD(-1) = PD(-1)L.$$

Analisaremos agora a inversa da matriz L (já vimos que L é não-singular). Para tanto, usaremos um corolário do teorema de Cayley-Hamilton (ambos demonstrados no apêndice sobre teoremas clássicos):

Afirmação 3.4
$$L^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!} H^k.$$

Demonstração: Pelo [Corolário B.1](#), a matriz L^{-1} deve ser um polinômio em L que, por sua vez, é um polinômio em H . Portanto, L^{-1} é um polinômio em H . Seja $L^{-1} =$

$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k H^k$. Das relações $Lb(0) = e_0$ e $H^j e_i = (i+j)^{(j)} e_{i+j}$ (esta última nos mostra que $H^k e_0 = k! e_k$), obtemos:

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_k e_k = b(0) = L^{-1} e_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k H^k e_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k k! e_k.$$

Daí segue que $B_k = \alpha_k k!$ e, então, $\alpha_k = \frac{B_k}{k!}$. Poratanto, $L^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!} H^k$.

■

Afirmção 3.5 $b(t) = L^{-1}\xi(t)$, ou seja, a matriz L^{-1} transforma a base das potências monomiais na base dos polinômios de Bernoulli.

Demonstração: Das relações utilizadas para demonstrar a afirmação anterior e mais $b(t) = P^t b(0)$, segue que:

$$b(t) = P^t b(0) = P^t L^{-1} e_0 = L^{-1} P^t e_0 = L^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} H^k e_0 = L^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} t^k e_k = L^{-1} \xi(t).$$

■

A seguir, demonstramos algumas propriedades bem conhecidas dos polinômios de Bernoulli. Tais demonstrações faremos apenas lançando mão da teoria matricial desenvolvida até aqui.

Afirmção 3.6 $B_k(1-t) = (-1)^k B_k(t)$.

Demonstração: Multiplicando a igualdade $b(t) = L^{-1}\xi(t)$ por $D(-1)$, nos dois lados, obtemos:

$$D(-1)b(t) = D(-1)L^{-1}\xi(t).$$

Mas, $LD(-1) = PD(-1)L \Rightarrow D(-1) = L^{-1}PD(-1)L$. Logo,

$$D(-1)b(t) = L^{-1}PD(-1)\xi(t).$$

Agora, usando as igualdades $D(-1)\xi(t) = \xi(-t)$, $P\xi(-t) = \xi(1-t)$ e, novamente, $b(t) = L^{-1}\xi(t)$, segue que:

$$D(-1)b(t) = L^{-1}P\xi(-t) = L^{-1}\xi(1-t) = b(1-t).$$

Tomando a igualdade em cada coordenada, obtemos a relação desejada.

■

Observação: Em particular, se tomarmos $t = 0$, temos $D(-1)b(0) = b(1)$ e, como $D(-1)^{-1} = D(-1)$, $b(0) = D(-1)b(1)$. Usando o fato que $b(1) = Pb(0)$, obtemos $D(-1)Pb(0) = b(0)$, o que mostra que $b(0)$, o vetor dos números de Bernoulli, é autovetor da matriz $D(-1)P$, associado ao autovalor 1.

Afirmção 3.7 $B_k(j+1) - B_k = k \cdot \sum_{t=0}^j t^{k-1}$, $j \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Antes de provar esta igualdade, precisamos mostrar que $I + HL = P$ ($H = PL^{-1} - L^{-1}$):

Sabemos que $\tilde{L} = P^{-1}L$ e $I - H\tilde{L} = P^{-1}$. Logo, $I - HP^{-1}L = P^{-1}$. Como P^{-1} é polinômio em H , $HP^{-1} = P^{-1}H$. Segue então que $I - P^{-1}HL = P^{-1} \Rightarrow P - HL = I \Rightarrow P = I + HL$. Agora, usando também que $b(t) = L^{-1}\xi(t)$ e $b(t+1) = Pb(t)$, obtemos:

$b(t+1) - b(t) = Pb(t) - b(t) = (P - I)b(t) = (P - I)L^{-1}\xi(t) = (PL^{-1} - L^{-1})\xi(t) = H\xi(t)$. A igualdade $b(t+1) - b(t) = H\xi(t)$, tomando $t = 0, 1, \dots, j$, remete-nos ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} b(j+1) - b(j) & = H\xi(j) \\ b(j) - b(j-1) & = H\xi(j-1) \\ \vdots & \\ b(2) - b(1) & = H\xi(1) \\ b(1) - b(0) & = H\xi(0) \end{cases}$$

E, somando as equações, obtemos:

$$b(j+1) - b(0) = H(\xi(0) + \xi(1) + \dots + \xi(j-1) + \xi(j)) = H \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ \vdots \\ j^{n-1} \end{pmatrix} \right) =$$

$$H \begin{pmatrix} \sum_{t=0}^j t^0 \\ \sum_{t=0}^j t \\ \vdots \\ \sum_{t=0}^j t^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \cdot \sum_{t=0}^j t^0 \\ 2 \cdot \sum_{t=0}^j t^1 \\ \vdots \\ (n-1) \sum_{t=0}^j t^{n-2} \end{pmatrix}.$$

Tomando a igualdade em cada coordenada, obtém-se a relação desejada.

3.2.1 Matriz de Bernoulli

Definição 3.4 A matriz $B(t) := \begin{pmatrix} b(t) & Pb(t) & \dots & P^{n-1}b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(t) & b(t+1) & \dots & b(t+n-1) \end{pmatrix}$ é a matriz de Bernoulli.

Podemos relacionar a matriz de Bernoulli com a Matriz de Vandermonde $W(t)$ já definida anteriormente.

Por termos $b(t) = L^{-1}\xi(t)$ ($\xi(t) = Lb(t)$), concluímos que $W(t)$ pode ser reescrita como

$$W(t) = LB(t).$$

As matrizes F (matriz companheira) e M do Capítulo 3 também podem ser reescritas em termos de $B(t)$:

$$(1) F := W(t)^{-1}PW(t) = B(t)^{-1}L^{-1}PLB(t) = B(t)^{-1}PL^{-1}LB(t) = B(t)^{-1}PB(t);$$

$$(2) M := W(t)^{-1}HW(t) = B(t)^{-1}L^{-1}HLB(t) = B(t)^{-1}HL^{-1}LB(t) = B(t)^{-1}HB(t).$$

Nas igualdades acima foi usado o fato que P e L^{-1} comutam, pois ambas são polinômios em H .

Se definirmos $Q := W(t)^{-1}LW(t)$, fazendo um raciocínio análogo, obtemos $Q = B(t)^{-1}LB(t)$ e podemos observar também que

$$QM = B(t)^{-1}LB(t)B(t)^{-1}HB(t) = B(t)^{-1}LHB(t) = B(t)^{-1}(P-I)B(t) = B(t)^{-1}PB(t) - B(t)^{-1}B(t) = F - I.$$

3.3 Polinômios de Bernstein

Definição 3.5 *A matriz tal que*

$$[B_e(t)]_{ij} = \begin{cases} \binom{i}{j} t^j (1-t)^{i-j} & , \text{ para } i \geq j. \\ 0 & , \text{ para as demais.} \end{cases} \quad i, j = 0, \dots, n-1$$

*é a matriz de Bernstein*².

Afirmção 3.8 $B_e(t) = PD(t)P^{-1}$.

Demonstração: $PD(t)P^{-1} = P^{1-t}P^tD(t)P^{-1}$.

Pela Afirmção 1.4, $P^{1-t} = P(1-t) = D(1-t)PD(1-t)^{-1}$ e $P^tD(t)P^{-1} = P(t)D(t)P^{-1} = D(t)PD(t)^{-1}D(t)P^{-1} = D(t)$. Portanto,

²Sergei Natanovich Bernstein nasceu em 1880, na Ucrânia, e morreu em 1968, na antiga União Soviética. Suas principais áreas de atuação foram análise numérica, na qual trabalhou com a teoria de melhor aproximação de funções e interpolação, e probabilidade, a qual tentou axiomatizar, estudou a lei dos grandes números e os processos de Markov. Também buscou aplicações da probabilidade à genética

$$\begin{aligned}
[D(1-t)]P[D(1-t)]^{-1}D(t) &= \begin{pmatrix} (1-t)^0 & & & \\ & 1-t & & \\ & & \ddots & \\ & & & (1-t)^{n-1} \end{pmatrix} \times \\
&\times \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \dots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \dots & \binom{n-1}{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{(1-t)^0} & & & \\ & \frac{1}{1-t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{(1-t)^{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^0 & & & \\ & t & & \\ & & \ddots & \\ & & & t^{n-1} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \binom{0}{0}(1-t)^0 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{1}{0}(1-t)^1 & \binom{1}{1}(1-t)^1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \binom{n-1}{0}(1-t)^{n-1} & \binom{n-1}{1}(1-t)^{n-1} & \dots & \binom{n-1}{n-1}(1-t)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^0 & & & \\ & \frac{t^1}{(1-t)^1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{t^{n-1}}{(1-t)^{n-1}} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \binom{0}{0}(1-t)^0 t^0 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{1}{0}(1-t)^0 t^0 & \binom{1}{1}(1-t)^0 t^1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \binom{n-1}{0}(1-t)^{n-1} t^0 & \binom{n-1}{1}(1-t)^{n-1-1} t^1 & \dots & \binom{n-1}{n-1}(1-t)^{n-1-(n-1)} t^{n-1} \end{pmatrix} = Be(t).
\end{aligned}$$

■

Definição 3.6 As entradas $[B_e(t)]_{ij} := B_j^i(t)$ são os polinômios de Bernstein.

Exemplo: Matriz de Bernstein 3×3 :

$$B_e(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-t & t & 0 \\ (1-t)^2 & 2t(1-t) & t^2 \end{pmatrix}.$$

Segue então que os polinômios de Bernstein até o segundo grau são:

$$B_0^0(t) = 1;$$

$$B_0^1(t) = 1-t, B_1^1(t) = t;$$

$$B_0^2(t) = (1-t)^2, B_1^2(t) = 2t(1-t), B_2^2(t) = t^2.$$

Tais polinômios são muito úteis no estudo das curvas de Bézier. Uma curva de Bézier qualquer de grau n ($B^n(t)$) tem sua trajetória descrita por

$$B^n(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i,$$

em que P_i são os chamados *pontos de controle*.

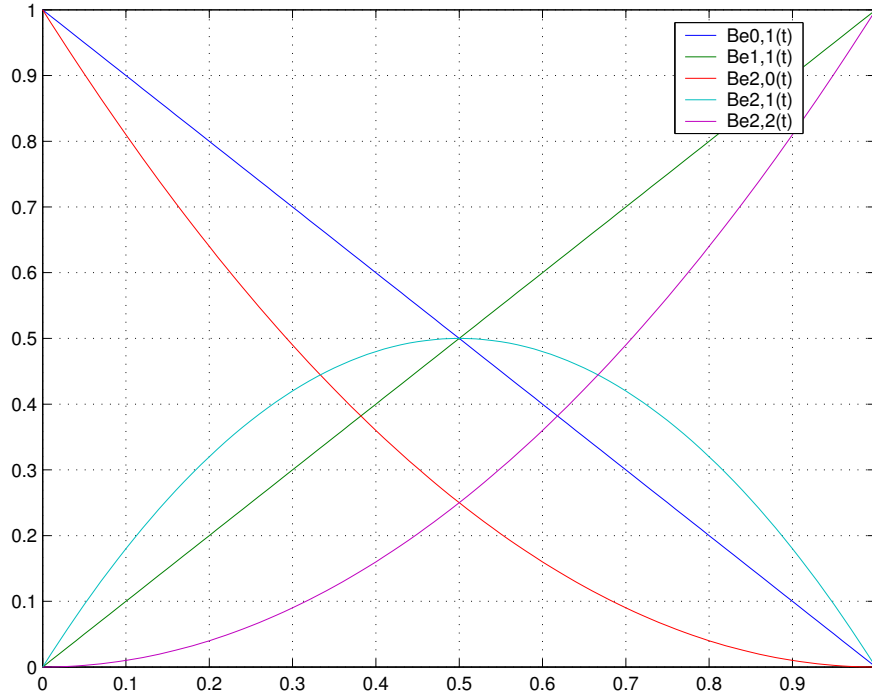


Figura 3.3: Gráfico dos polinômios de Bernstein de primeiro e segundo grau no intervalo $[0, 1]$.

As curvas de Bézier foram, a princípio, desenvolvidas para modelar as formas aerodinâmicas de automóveis modernos mas, hoje em dia, têm inúmeras aplicações, principalmente nos *softwares* de computação gráfica.

No capítulo 5, proporemos um algoritmo para computar curvas de Bézier usando a identidade da Afirmção 3.8. Este algoritmo usará também o que desenvolveremos no capítulo 4, para acelerar o cálculo das curvas.

Voltando aos polinômios de Bernstein, veremos que a definição matricial dada a eles nos permitirá demonstrar algumas interessantes propriedades.

Uma delas é a fórmula que os expressa como combinação linear das potências monomiais.

Afirmção 3.9 $B_j^i(t) = \sum_{k=j}^i (-1)^{k-j} \binom{i}{k} \binom{k}{j} t^k.$

Demonstração: Das definições 3.5 e 3.6, segue que:

$$\begin{aligned}
 B_j^i(t) &= e_i^T B_e(t) e_j = e_i^T P D(t) P^{-1} e_j = \\
 &= e_i^T P D(t) \begin{pmatrix} (-1)^{0-0} \binom{0}{0} & 0 & \dots & 0 \\ (-1)^{1-0} \binom{1}{0} & (-1)^{1-1} \binom{1}{1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ (-1)^{n-1} \binom{n-1}{0} & (-1)^{n-1-1} \binom{n-1}{1} & \vdots & (-1)^{n-1-(n-1)} \binom{n-1}{n-1} \end{pmatrix} e_j =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e_i^T PD(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (-1)^{j-j} \binom{j}{j} \\ \vdots \\ (-1)^{n-1-j} \binom{n-1}{j} \end{pmatrix} = e_i^T P \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ t^j (-1)^{j-j} \binom{j}{j} \\ \vdots \\ t^{n-1} (-1)^{n-1-j} \binom{n-1}{j} \end{pmatrix} = \\
&= e_i^T \begin{pmatrix} \sum_{k=j}^0 t^k (-1)^{k-j} \binom{0}{k} \binom{k}{j} \\ \vdots \\ \sum_{k=j}^{n-1} t^k (-1)^{k-j} \binom{n-1}{k} \binom{k}{j} \end{pmatrix} = \sum_{k=j}^i t^k (-1)^{k-j} \binom{i}{k} \binom{k}{j}.
\end{aligned}$$

■

Introduzimos agora o vetor $e := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}^T$. Vê-se claramente que $D(t)e = \xi(t)$.

Uma relação que dá os vetores $\xi(t)$ em termos de $B_e(t)$ pode ser conseguida da seguinte forma:

$$B_e(t)Pe = PD(t)P^{-1}Pe = PD(t)e = P\xi(t) = \xi(t+1).$$

Como $\xi(1) = e$, segue que:

$$B_e(t)Pe = B_e(t)P\xi(1) = B_e(t)\xi(2) \Rightarrow \xi(t+1) = B_e(t)\xi(2).$$

A seguir, colocamos mais algumas propriedades dos polinômios de Bernstein.

Afirmção 3.10 $\sum_{j=0}^i B_j^i(t) = 1$, ou seja, os polinômios de Bernstein de grau i constituem uma partição da unidade.

Demonstração: Note que $B_e(t)Pe_j = t^j Pe_j$, pois

$$B_e(t)Pe_j = PD(t)e_j = \begin{pmatrix} t^0 \binom{0}{0} & 0 & \dots & 0 \\ t^0 \binom{1}{0} & t^1 \binom{1}{1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ t^0 \binom{n-1}{0} & t^1 \binom{n-1}{1} & \dots & t^{n-1} \binom{n-1}{n-1} \end{pmatrix} e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ t^j \binom{j}{j} \\ \vdots \\ t^j \binom{n-1}{j} \end{pmatrix} = t^j Pe_j.$$

Esta relação nos conta que Pe_j (a j -ésima coluna da matriz de Pascal) é autovetor de $B_e(t)$ associado ao autovalor t^j . Em particular, para $j = 0$:

$$B_e(t)Pe_0 = t^0 Pe_0 \Rightarrow B_e(t) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tomando a igualdade em cada coordena, obtém-se a relação desejada.

■

Afirmção 3.11 $B_j^i(ct) = \sum_{k=0}^i B_k^i(c)B_j^k(t)$ (*propriedade de subdivisão*).

Demonstração: $B_e(c)B_e(t) = PD(c)P^{-1}PD(t)P^{-1} = PD(c)D(t)P^{-1} = PD(ct)P^{-1} =$
 $B_e(ct) \Rightarrow B_e(ct) = B_e(c)B_e(t) \Rightarrow B_j^i(ct) = \sum_{k=0}^i B_k^i(c)B_j^k(t).$

■

Capítulo 4

Algoritmo de complexidade $O(n \log n)$ para resolução de sistemas do tipo Pascal simétrico

Nesta seção exploraremos os artigos de Xiang, Linzhang e Jituan ([10] e [11]) que propõe um algoritmo rápido ($O(n \log n)$) para resolução de sistemas do tipo $\hat{P}x = b$, em que \hat{P} é a *matriz de Pascal simétrica* que possui as seguintes entradas:

$$[\hat{P}]_{ij} = \binom{i+j}{i}, \quad i, j = 0, \dots, n-1.$$

4.1 Sistema $\hat{P}x = b$

Sabemos, pela Afirmção 1.4, que

$$P^{-1} = P(-1) = \underbrace{\text{diag}((-1)^0, (-1)^1, \dots, (-1)^{n-1})}_{D(-1)} P \cdot \text{diag}((-1)^0, (-1)^1, \dots, (-1)^{n-1}).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \hat{P}x = b &\Leftrightarrow PP^T x = b \Leftrightarrow x = (PP^T)^{-1}b \Leftrightarrow x = P^{-T}P^{-1}b \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = [D(-1)PD(-1)]^T [D(-1)PD(-1)]b \Leftrightarrow x = D(-1)P^T \underbrace{[D(-1)]^2}_I PD(-1)b \Leftrightarrow \\ &x = D(-1)P^T PD(-1)b. \end{aligned}$$

Pela fórmula acima, notamos que se acharmos uma maneira rápida de avaliar o produto $D(-1)P^T PD(-1)b$, obteremos um algoritmo rápido para o sistema $\hat{P}x = b$.

O primeiro passo nesta direção será provar o seguinte teorema:

Teorema 4.1 $P = \text{diag}(d_1)T\text{diag}(d_2)$, em que $d_1 = \begin{pmatrix} 0! & 1! & \dots & (n-1)! \end{pmatrix}^T$, $d_2 =$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{0!} & \frac{1}{1!} & \dots & \frac{1}{(n-1)!} \end{pmatrix}^T e T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-3)!} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Demonstração: $\text{diag}(d_1)T\text{diag}(d_2) =$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 0! & & & & \\ & 1! & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & (n-1)! & \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{0!} & & & & \\ \frac{1}{1!} & \frac{1}{0!} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \dots & \frac{1}{0!} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{0!} & & & & \\ & \frac{1}{1!} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{1}{(n-1)!} & \\ & & & & \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0! & & & & \\ & 1! & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & (n-1)! & \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{0!0!} & & & & \\ \frac{1}{1!0!} & \frac{1}{0!1!} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \frac{1}{(n-1)!0!} & \frac{1}{(n-2)!1!} & \dots & \frac{1}{0!(n-1)!} & \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{0!}{0!0!} & & & & \\ \frac{1!}{1!0!} & \frac{1!}{0!1!} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \frac{(n-1)!}{(n-1)!0!} & \frac{(n-1)!}{(n-2)!1!} & \dots & \frac{(n-1)!}{0!(n-1)!} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & & & & \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \dots & \binom{n-1}{n-1} & \end{pmatrix} = P. \end{aligned}$$

■

Com esta nova relação envolvendo a matriz de Pascal podemos reescrever a solução do sistema $\hat{P}x = b$ como

$$\begin{aligned} x &= D(-1)P^T P D(-1)b = D(-1)(\text{diag}(d_1)T\text{diag}(d_2))^T (\text{diag}(d_1)T\text{diag}(d_2))D(-1)b = \\ &= D(-1)(\text{diag}(d_2))^T T^T (\text{diag}(d_1))^T \text{diag}(d_1)T\text{diag}(d_2)D(-1)b \\ &\Rightarrow x = D(-1)\text{diag}(d_2)T^T (\text{diag}(d_1))^2 T\text{diag}(d_2)D(-1)b. \end{aligned}$$

Como produto matriz-vetor envolvendo matriz-diagonal pode ser rapidamente computado (em n operações) basta acharmos uma estratégia para computar o produto matriz-vetor envolvendo T e T^T . É disto que trata a próxima seção.

4.2 Produtos envolvendo matrizes de Toeplitz

Para chegarmos a um algoritmo rápido para avaliar produtos matriz-vetor envolvendo matrizes de Toeplitz, que serão definidas mais adiante, precisaremos estudar primeiramente as matrizes denominadas *circulantes*.

Definição 4.1 Uma matriz $H_n(h) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita circulante se possui a seguinte estrutura:

$$H_n(h) = \begin{pmatrix} h & R_n h & R_n^2 h & \dots & R_n^{n-1} h \end{pmatrix},$$

em que

$$R_n = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_{n-1} & e_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(matriz de permutação).

Exemplo: $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T \Rightarrow H_3(h) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

No que segue, mostraremos que toda matriz circulante é similar a uma matriz diagonal por uma mudança de base determinada por

$$F_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \dots & \omega_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \dots & \omega_n^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

(denominada *matriz de Fourier*), em que $\omega_n = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$.

Lema 4.1 Seja $h = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_{n-1} \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$. Então $H_n(h) = h_0 I + h_1 R_n + \dots + h_{n-1} R_n^{n-1}$.

Demonstração: Primeiramente, introduzimos a seguinte notação: se $j \equiv k \pmod{n}$, então $k = \langle j \rangle_n$. Note que $R_n = \begin{pmatrix} e_{\langle 1 \rangle_n} & e_{\langle 2 \rangle_n} & \dots & e_{\langle n \rangle_n} \end{pmatrix}$ e, para j tal que $0 \leq j \leq n-1$, $R_n^j = \begin{pmatrix} e_{\langle j \rangle_n} & e_{\langle j+1 \rangle_n} & \dots & e_{\langle j+n-1 \rangle_n} \end{pmatrix}$. Então, $(h_0 I + h_1 R_n + \dots + h_{n-1} R_n^{n-1})e_j = h_0 e_j + h_1 R_n e_j +$

$$\dots + h_{n-1} R_n^{n-1} e_j = h_0 e_{\langle j \rangle_n} + h_1 e_{\langle j+1 \rangle_n} + \dots + h_{n-1} e_{\langle j+n-1 \rangle_n} = \begin{pmatrix} e_{\langle j \rangle_n} & \dots & e_{\langle j+n-1 \rangle_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ \vdots \\ h_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$R_n^j h = H_n(h)e_j$. Logo, a j -ésima coluna de $h_0 I + \dots + h_{n-1} R_n^{n-1}$ é igual à j -ésima coluna de $H_n(h)$, $0 \leq j \leq n-1$, ou seja, $h_0 I + \dots + h_{n-1} R_n^{n-1} = H_n(h)$.

■

Lema 4.2 $F_n R_n = D_n F_n$, em que $D_n = \operatorname{diag}(1, \omega_n, \dots, \omega_n^{n-1})$.

Demonstração: $[F_n R_n]_{kj} = [F_n(k, :)]^T [r_n(:, j)] = \begin{pmatrix} 1 & \omega_n^k & \omega_n^{2k} & \dots & \omega_n^{(n-1)k} \end{pmatrix} e_{j+1} =$

$$\omega_n^{k(j+1)} = \omega_n^k \omega_n^{kj} = \omega_n^k e_k^T \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_n^j \\ \vdots \\ \omega_n^{(n-1)j} \end{pmatrix} = (\omega_n^k e_k)^T \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_n^j \\ \vdots \\ \omega_n^{(n-1)j} \end{pmatrix} = [D_n(k, :)]^T [F_n(:, j)] =$$

$$[D_n F_n]_{kj}.$$

■

Teorema 4.2 $H_n(h) = F_n^{-1} \text{diag}(F_n h) F_n.$

Demonstração: Seja $D_n = \text{diag}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$. Pelo Lema 4.2, temos que $F_n R_n F_n^{-1} = D_n$. Então, pelo lema 4.1, $F_n H_n(h) F_n^{-1} = F_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} h_k R_n^k \right) F_n^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} h_k F_n R_n^k F_n^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} h_k (F_n R_n F_n^{-1})^k = \sum_{k=0}^{n-1} h_k D_n^k = p(D_n)$, em que $p(z) = h_0 + h_1 z + \dots + h_{n-1} z^{n-1}$. É claro que $p(D_n)$ é diagonal, pois é soma e produto de matrizes diagonais. Além disso, $[p(D_n)]_{kk} = p(\omega^k) = h_0 + h_1 \omega^k + \dots + h_{n-1} \omega^{k(n-1)} = [F_n h]_k$. Portanto, $F_n H_n(h) F_n^{-1} = \text{diag}(F_n h)$ e, então, $H_n(h) = F_n^{-1} \text{diag}(F_n h) F_n$.

■

A igualdade que acabamos de demonstrar é útil para efetuar o produto matriz-vetor envolvendo matrizes circulantes, devido à rapidez do algoritmo de Cooley-Tukey para efetuar produtos envolvendo matrizes de Fourier.

Tal algoritmo é conhecido como *transformada rápida de Fourier* (FFT - *fast Fourier transform*) e permite efetuar $F_n x$, $x \in \mathbb{R}^n$, em $O(n \log n)$ operações. A riqueza deste algoritmo é tão grande que separamos um apêndice (Apêndice D) para melhor explorá-la.

Dado $x \in \mathbb{R}^n$ e $H_n(h) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz circulante, calculamos $H_n(h)x$ da seguinte forma

$$x \leftarrow F_n x \text{ via FFT, } O(n \log n) \text{ operações}$$

$$b \leftarrow F_n h \text{ via FFT, } O(n \log n) \text{ operações}$$

$$x \leftarrow \text{diag}(b)x, O(n) \text{ operações}$$

$$x \leftarrow F_n^{-1} x \text{ via IFFT, } O(n \log n) \text{ operações}$$

Observação: IFFT é a transformada rápida de Fourier inversa, que também tem custo $O(n \log n)$ para ser efetuada.

Definição 4.2 Uma matriz $n \times n$ $T(a) = (t_{kj})$ é dita de *Toeplitz* se existe um vetor $a = \begin{pmatrix} a_{-n+1} & \dots & a_{-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}^T$ tal que $[T]_{jk} = a_{k-j}$, $\forall k, j = 0, \dots, n-1$.

Observação: Em outras palavras, a definição acima quer dizer que T é constante ao longo de suas diagonais.

Por exemplo, se $a = \begin{pmatrix} a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ teremos a matriz de Toeplitz 3×3 associada

$$T(a) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_{-1} & a_0 & a_1 \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

Para avaliar produtos de matrizes de Toeplitz por vetores, é comum o uso da técnica que descreveremos a seguir.

Dada uma matriz de Toeplitz $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, construímos uma matriz circulante $C_T \in \mathbb{R}^{(2n-1) \times (2n-1)}$ tal que $T = C_T(0 : n-1, 0 : n-1)$. Por exemplo, se T é como acima, obtemos

$$C_T = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_{-2} & a_{-1} \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & a_{-2} \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_{-2} & a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

De maneira geral, dada uma matriz de Toeplitz $T(a)$, construímos a matriz circulante $C_T = \begin{pmatrix} c & R_m c & \dots & R_m^{m-1} c \end{pmatrix} = H_n(c)$, em que $c = \begin{pmatrix} a(0 : -n+1) \\ a(n-1 : 1) \end{pmatrix}$ e R_m é a matriz de permutação definida na seção anterior. É claro que $C_T(0 : n-1, 0 : n-1) = T(a)$.

Agora, para efetuarmos o produto matriz-vetor Tx , em que $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é de Toeplitz e $x = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} \end{pmatrix}^T$, definimos C_T como acabamos de fazer e $\hat{x} = \begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_{n-1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T$ e efetuamos $z = C_T \hat{x}$ pelo algoritmo apresentado anteriormente (efetuando duas FFT's, uma IFFT e um produto diagonal-vetor).

Uma vez calculado z é fácil ver que

$$Tx = z(0 : n-1).$$

4.2.1 Algoritmo

No que se segue, apresentamos um algoritmo em MATLAB que efetua o produto Tx em que T é de Toeplitz, conforme apresentado na seção anterior.

```
function y = FastToep(T,v)
n = length(T);
v = [v',zeros(n-1,1)']';
d = T(:,1)';
d1 = T(1,n:-1:2);
```

```

d = [d,d1]';
z=ifft(fft(d).*fft(v));
y = z(1:n);

```

4.3 Aplicação ao sistema Pascal simétrico

Conforme mostramos na seção 4.1, o problema $\hat{P}x = b$ é solucionado por

$$x = D(-1)diag(d_2)T^Tdiag(d_1)^2Tdiag(d_2)D(-1)b,$$

em que T é a matriz de Toeplitz obtida no [Teorema 4.1](#).

A seguir, apresentamos um algoritmo que calcula x aproveitando as estruturas das matrizes diagonais e de Toeplitz e utilizando o algoritmo que acabamos de expor:

```

function x = FastalgPascal(b)
n = length(b);
x=b;
for i=2:2:n
    x(i) = -x(i);
end
d(1) = 1;
for i=1:n-1
    d(i+1) = d(i)*i;
end
d=d';
x = x./d;
t1 = 1./d;
t2 = [1,zeros(1,n-1)]';
T = toeplitz(t1,t2);
x = FastToep(T,x);
x= (d.^2).*x;
T=T';
x=FastToep(T,x);
x=x./d;
for i=2:2:n
    x(i) = -x(i);
end

```

4.4 Aplicações a outras situações

Nas seções anteriores, estudamos várias técnicas de Álgebra Linear com o objetivo de resolver sistemas lineares envolvendo a matriz de Pascal simétrica. Mas é fácil ver que pequenas modificações no algoritmo que acabamos de apresentar podem resolver outros problemas com a mesma complexidade:

• **Sistemas envolvendo a matriz de Pascal triangular inferior:** Pelas decomposições anteriores da matriz de Pascal P , sabemos que a solução do sistema $Px = b$ é

$$x = D(-1)diag(d_1)Tdiag(d_2)D(-1)b,$$

em que $D(-1) = diag((-1)^0, (-1)^1, \dots, (-1)^{n-1})$ e $diag(d_1)$, $diag(d_2)$ e T são as matrizes descritas no [Teorema 4.1](#).

Como podemos efetuar o produto matriz de Toeplitz-vetor em $O(n \log n)$ operações, conforme descrito na seção 4.2, podemos resolver o sistema acima em $O(n \log n)$ operações.

• **Produtos matriz-vetor com matrizes de Pascal:** Para efetuarmos os produtos Px e $\hat{P}x$ em $O(n \log n)$ operações basta, novamente usarmos as decomposições anteriores:

$$Px = diag(d_1)Tdiag(d_2)x, \quad \hat{P}x = PP^T x = diag(d_1)Tdiag(d_2)^2T^T diag(d_1)x.$$

4.5 Análise de condicionamento

Através de uma decomposição da matriz de Pascal triangular inferior envolvendo matrizes de Toeplitz e diagonais (veja [Teorema 4.1](#)) conseguimos, nas seções passadas, desenvolver algoritmos que resolvam problemas envolvendo matrizes de Pascal em $O(n \log n)$ operações.

Estes algoritmos, porém, são muito imprecisos. Considere, por exemplo, o problema de resolver o sistema linear $\hat{P}x = b$ em que

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 20 \\ 35 \end{pmatrix}.$$

A solução exata para o problema é $x^* = (1 \ 1 \ 1 \ 1)^T$, enquanto a obtida pelo algoritmo apresentado na seção 4.3 foi

$$\left(1.000000000000001 \ 0.999999999999998 \ 1.000000000000002 \ 0.999999999999999 \right)^T,$$

o que é inaceitável para um sistema tão pequeno.

Isso se deve ao fato dos vetores d_1 , d_2 e da matriz T do [Teorema 4.1](#) possuírem entradas de magnitudes muito diferentes.

Em termos de *número de condicionamento* temos, por exemplo, que

$$\begin{aligned}\kappa_2(\text{diag}(d_1)) &= \|\text{diag}(d_1)\|_2 \|\text{diag}(d_1)^{-1}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(\text{diag}(d_1)^2)} \sqrt{\lambda_{\max}((\text{diag}(d_1)^{-1})^2)} = \\ &= \sqrt{(n-1)!^2} \sqrt{1^2} = (n-1)!,\end{aligned}$$

pois os autovalores de $\text{diag}(d_1)^2$ são $(1!)^2, (2!)^2, \dots, (n-1)!^2$ e os autovalores de $(\text{diag}(d_1)^{-1})^2$ são $\frac{1}{(n-1)!^2}, \frac{1}{(n-2)!^2}, \dots, \frac{1}{1!^2}$.

Observamos que não é necessário n ser um número grande para termos $\kappa_2(\text{diag}(d_1)) = (n-1)!$ ser grande.

Além disso, as entradas do tipo $\frac{1}{k!}$, $1 \leq k \leq n-1$, são interpretadas como zero pelo computador, conforme n cresce, o que acarreta em imprecisões nas operações feitas.

Visando corrigir este problema, apresentaremos, na próxima seção, uma decomposição da matriz de Pascal muito similar à do [Teorema 4.1](#), diferindo apenas por um *escalamento* nas entradas das matrizes envolvidas.

4.6 Pré-Condicionamento de P

Teorema 4.3 $\forall t \neq 0$ $P = \text{diag}(d_1(t))T(t)\text{diag}(d_2(t))$, em que

$$d_1(t) = \begin{pmatrix} 0! & \frac{1!}{t} & \dots & \frac{(n-1)!}{t^{n-1}} \end{pmatrix}^T,$$

$$d_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{0!} & \frac{t}{1!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \end{pmatrix}^T$$

e

$$T(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{t}{1!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{t^2}{2!} & \frac{t}{1!} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}\text{diag}(d_1(t))T(t)\text{diag}(d_2(t)) &= \\ \begin{pmatrix} 0! & & & & \\ & \frac{1!}{t} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{(n-1)!}{t^{n-1}} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{0!} & & & & \\ \frac{t}{1!} & \frac{1}{0!} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} & \dots & \frac{1}{0!} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{0!} & & & & \\ & \frac{t}{1!} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \end{pmatrix} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0! & & & \\ & \frac{1!}{t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{(n-1)!}{t^{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{0!0!} & & & \\ \frac{t}{1!0!} & \frac{t}{0!1!} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{1}{(n-1)!0!} & \frac{t^{n-1}}{(n-2)!1!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{0!(n-1)!} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{0!}{0!0!} & & & \\ \frac{1!}{1!0!} & \frac{1!}{0!1!} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{(n-1)!}{(n-1)!0!} & \frac{(n-1)!}{(n-2)!1!} & \cdots & \frac{(n-1)!}{0!(n-1)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & & & \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} \end{pmatrix} = P.
\end{aligned}$$

■

No que segue, buscaremos o parâmetro $t \geq 1$ de modo que as entradas das matrizes $d_2(t)$ e $T(t)$, que são da forma

$$f(m) = \frac{t^m}{m!}, \quad m = 0, 1, \dots, n-1,$$

sejam as mais próximas possíveis, em grandeza. Ou seja, queremos t tal que o quociente do máximo de $f(m)$ pelo mínimo de $f(m)$ seja o menor possível.

Observe que uma escolha de t tal que $0 \leq t < 1$ agravaria o fato das entradas das matrizes serem muito próximas de zero. Por isso, buscamos $t \geq 1$.

Definição 4.3 Dado $\alpha \in \mathbb{R}$,

- (i) o chão de α é dado por $\lfloor \alpha \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq \alpha\}$,
- (ii) o teto de α é dado por $\lceil \alpha \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq \alpha\}$.

Lema 4.3 (i) $f(m) = \frac{t^m}{m!}$ é não decrescente para m tal que $m \leq \lfloor t \rfloor \leq t$.

(ii) $f(m)$ é não crescente para m tal que $t \leq \lceil t \rceil \leq m$.

Demonstração:

$$(i) \quad f(m-1) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} = \frac{m}{m} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \leq \frac{t^m}{m!} = f(m), \text{ pois } m \leq t.$$

$$(ii) \quad f(m) = \frac{t^m}{m!} = \frac{m+1}{m+1} \frac{t^m}{m!} \geq \frac{t^{m+1}}{(m+1)!} = f(m+1), \text{ pois } m+1 \geq t.$$

■

Baseado neste lema e separando o problema em casos, buscaremos o melhor valor para t .

Caso 1: $t \geq n - 1$.

Pelo Lema 4.3, temos que $f(m)$ é não decrescente e, portanto,

$$f_{min} = f(0) = 1, f_{max} = f(n - 1) = \frac{t^{n-1}}{(n - 1)!} \Rightarrow \frac{f_{max}}{f_{min}} = \frac{t^{n-1}}{(n - 1)!}.$$

Logo, neste caso, devemos selecionar $t = n - 1$.

Caso 2: $1 \leq t < n - 1$.

Se m é tal que $0 \leq m \leq t$, então, pelo lema,

$$f_{min} = f(1) = 1, f_{max} = f(\lfloor t \rfloor) = \frac{t^{\lfloor t \rfloor}}{(\lfloor t \rfloor)!} \Rightarrow \frac{f_{max}}{f_{min}} = \frac{t^{\lfloor t \rfloor}}{(\lfloor t \rfloor)!}.$$

E no caso em que $t \leq m \leq n - 1$, temos

$$\begin{aligned} f_{min} = f(n - 1) &= \frac{t^{n-1}}{(n - 1)!}, f_{max} = f(\lceil t \rceil) = \frac{t^{\lceil t \rceil}}{(\lceil t \rceil)!} \Rightarrow \frac{f_{max}}{f_{min}} = \\ &= \frac{t^{\lceil t \rceil} (n - 1)!}{t^{n-1} (\lceil t \rceil)!}. \end{aligned}$$

No que segue, denotaremos $f_1(t) = \frac{t^{\lfloor t \rfloor}}{(\lfloor t \rfloor)!}$ e $f_2(t) = \frac{t^{\lceil t \rceil} (n - 1)!}{t^{n-1} (\lceil t \rceil)!}$. O próximo teorema nos fornece um resultado importante que fará com que procuremos o parâmetro t apenas no intervalo $[1, n - 1]$.

Teorema 4.4 (i) $f_1(t) = \frac{t^{\lfloor t \rfloor}}{\lfloor t \rfloor!}$ é crescente, para $t > 0$;

(ii) $f_2(t) = \frac{t^{\lceil t \rceil} (n - 1)!}{\lceil t \rceil! t^{n-1}}$ é não crescente, para $t > 0$.

Além disso, $f_1(t)$ é contínua e $f_2(t)$ é descontínua apenas nos inteiros.

Demonstração:

(i) Observamos que para $t \in (k, k + 1)$, $k = 1, \dots, n - 2$, a função é diferenciável, pois se trata do polinômio $\frac{t^k}{k!}$. Além disto, $\frac{d}{dt} \left(\frac{t^k}{k!} \right) = \frac{t^{k-1}}{(k - 1)!} > 0$, pois $t > 0$. Portanto, $f_1(t)$ é crescente em cada intervalo do tipo acima.

Um rápido cálculo nos mostra que essa função é contínua nos pontos inteiros do domínio:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow k^-} \frac{t^{\lfloor t \rfloor}}{\lfloor t \rfloor!} &= \lim_{t \rightarrow k^-} \frac{t^{k-1}}{(k - 1)!} = \frac{k^{k-1}}{(k - 1)!} = \frac{k^k}{k(k - 1)!} = \\ &= \frac{k^k}{k!} = \lim_{t \rightarrow k^+} \frac{t^k}{k!} = \lim_{t \rightarrow k^+} \frac{t^{\lceil t \rceil}}{\lceil t \rceil!}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow k} f_1(t) = \lim_{t \rightarrow k} \frac{t^{\lfloor t \rfloor}}{\lfloor t \rfloor!} = \frac{k^k}{k!} = f_1(k).$$

Isto termina a demonstração de (i).

(ii) Se $t \in (n-2, n-1]$, afirmamos que $\frac{t^{\lceil t \rceil} (n-1)!}{\lceil t \rceil! t^{n-1}} \equiv 1$. De fato,

$$\frac{t^{\lceil t \rceil} (n-1)!}{\lceil t \rceil! t^{n-1}} = \frac{t^{n-1} (n-1)!}{(n-1)! t^{n-1}} \equiv 1.$$

Agora, se $t \in (k, k+1)$, $k = 1, \dots, n-3$, temos que

$$\frac{t^{\lceil t \rceil} (n-1)!}{\lceil t \rceil! t^{n-1}} = \frac{t^{k+1} (n-1)!}{(k+1)! t^{n-1}} = \frac{(n-1)!}{(k+1)! t^{n-k-2}},$$

que é diferenciável, pois é uma função racional com denominador diferente de zero.

Além disto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{(n-1)!}{(k+1)! t^{n-k-2}} \right) &= \frac{(n-1)!}{(k+1)!} \frac{d}{dt} t^{-(n-k-2)} = \\ &= \frac{(n-1)!}{(k+1)!} \underbrace{-(n-k-2)}_{<0} \underbrace{\frac{1}{t^{n-k-1}}}_{>0} < 0. \end{aligned}$$

Portanto, $f_2(t)$ é decrescente em cada sub-intervalo da forma acima.

Agora vamos provar que $f_2(t)$ é descontínua nos inteiros, mas que os pulos de descontinuidade são decrescentes:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{t \rightarrow k^-} \frac{t^{\lceil t \rceil} (n-1)!}{\lceil t \rceil! t^{n-1}} &= \lim_{t \rightarrow k^-} \frac{t^k (n-1)!}{k! t^{n-1}} = \frac{k^k (n-1)!}{k! k^{n-1}}; \\ \bullet \lim_{t \rightarrow k^+} \frac{t^{\lceil t \rceil} (n-1)!}{\lceil t \rceil! t^{n-1}} &= \lim_{t \rightarrow k^+} \frac{t^{k+1} (n-1)!}{(k+1)! t^{n-1}} = \\ &= \frac{k^{k+1} (n-1)!}{(k+1)! k^{n-1}} = \frac{k}{\underbrace{k+1}_{<1}} \frac{k^k (n-1)!}{k! k^{n-1}} < \frac{k^k (n-1)!}{k! k^{n-1}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow k^-} \frac{t^{\lceil t \rceil} (n-1)!}{\lceil t \rceil! t^{n-1}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow k^-} f_2(t) > \lim_{t \rightarrow k^+} f_2(t),$$

ou seja, os pulos de descontinuidade são decrescentes. ■

Lema 4.4 $n^n \geq (n!)^2$, para $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 1$.

Demonstração: Será feita por indução em n .

Para $n=1$ é obviamente válido pois

$$1^1 = (1!)^2.$$

Suponha válido para $n - 1$, ou seja,

$$(n - 1)^{n-1} \geq ((n - 1)!)^2.$$

Então $n^n = nn^{n-1} > n(n - 1)^{n-1} > n((n - 1)!)^2 = n \left(\frac{n!}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}(n!)^2 > (n!)^2 \Rightarrow n^n \geq (n!)^2$.

■

Corolário 4.1 *O parâmetro t procurado está no intervalo $[1, n - 1]$.*

Demonstração: Para $t \geq n - 1$, sabemos que $\min \left(\frac{f_{max}}{f_{min}}\right) = \frac{(n - 1)^{n-1}}{(n - 1)!}$.

Mas $\frac{(n - 1)^{n-1}}{(n - 1)!} = f_1(n - 1) \geq f_1(t), \forall t \in [1, n - 1]$, pelo Teorema 4.4.

Além disso, $\frac{(n - 1)^{n-1}}{(n - 1)!} > (n - 1)! = f_2(1) \geq f_2(t), \forall t \in [1, n - 1]$, em que a primeira desigualdade decorre do Lema 4.4 e a segunda decorre do Teorema 4.4.

■

Conforme vimos, dependendo do valor de t em $[1, n - 1]$, os inteiros m ($0 \leq m \leq n - 1$) podem cair em qualquer um dos dois sub-casos analisados no caso 2 e o quociente $\frac{f_{max}}{f_{min}}$ pode ser tanto $f_1(t)$ quanto $f_2(t)$.

Portanto, procuraremos t tal que o ínfimo do máximo entre $f_1(t)$ e $f_2(t)$ seja atingido, ou seja

$$t = \arg_{t \in [1, n-1]} \left(\inf \left(\max \left(\frac{t^{\lfloor t \rfloor}}{(\lfloor t \rfloor)!}, \frac{t^{\lceil t \rceil} (n-1)!}{(\lceil t \rceil)! t^{n-1}} \right) \right) \right).$$

Por causa do Teorema 4.4, é fácil ver que, caso exista $\tilde{t} \in [1, n - 1]$ tal que $f_1(\tilde{t}) = f_2(\tilde{t})$, este é o t procurado.

De fato,

- $t \in [1, \tilde{t}] \Rightarrow f_1(t) < f_1(\tilde{t}) = f_2(\tilde{t}) \leq f_2(t) \Rightarrow \max(f_1(t), f_2(t)) = f_2(t) \geq f_2(\tilde{t})$;
- $t \in [\tilde{t}, n - 1] \Rightarrow f_2(t) \leq f_2(\tilde{t}) = f_1(\tilde{t}) < f_1(t) \Rightarrow \max(f_1(t), f_2(t)) = f_1(t) > f_1(\tilde{t})$.

A figura 4.1 ilustra o que acabamos de analisar:

Analisemos algumas propriedades envolvendo f_1 e f_2 :

1. $f_1(1) = 1, f_2(1) = (n - 1)! \Rightarrow f_1(1) < f_2(1)$;
2. $f_1(n - 1) = \frac{(n - 1)^{n-1}}{(n - 1)!}, f_2(n - 1) = 1 \Rightarrow f_1(n - 1) > f_2(n - 1)$.

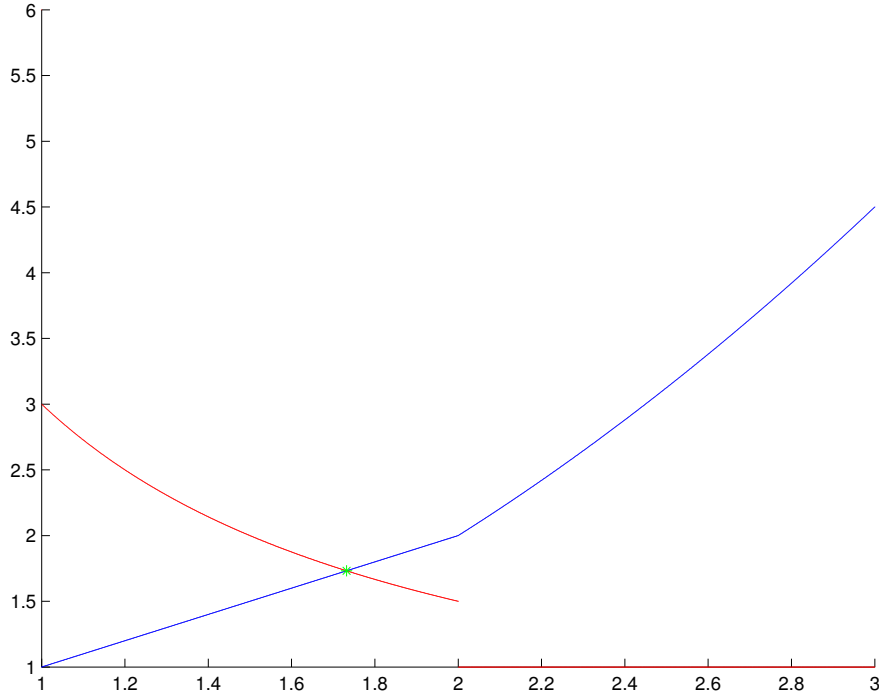


Figura 4.1: Gráfico das funções f_1 e f_2 para $n = 4$ com o ponto de interseção destacado (onde o ínfimo do máximo entre as funções é atingido).

Observamos que, caso ambas as funções fossem contínuas, a interseção entre os gráficos procurada existiria em decorrência do teorema do valor intermediário do cálculo elementar. Mas, conforme vimos no [Teorema 4.4](#), f_2 é descontínua nos inteiros.

Este problema nos inteiros fará com que busquemos \tilde{t} em intervalos da forma $(k, k + 1)$.

Lema 4.5 $\tilde{t} \in (k, k + 1) \Rightarrow \tilde{t} = \sqrt[n-2]{\frac{(n-1)!}{k+1}}$.

Demonstração: \tilde{t} é tal que $f_1(\tilde{t}) = f_2(\tilde{t})$. Como $\tilde{t} \in (k, k + 1)$, temos que

$$\frac{\tilde{t}^k}{k!} = \frac{\tilde{t}^{k+1}(n-1)!}{(k+1)!\tilde{t}^{n-1}} \Rightarrow \frac{k+1}{(n-1)!} = \frac{1}{\tilde{t}^{n-2}} \Rightarrow \tilde{t} = \sqrt[n-2]{\frac{(n-1)!}{k+1}}.$$

■

Teorema 4.5 $\tilde{t} \in (k, k + 1) \Rightarrow k = \lfloor \sqrt[n-1]{(n-1)!} \rfloor$.

Pelo lema anterior, se \tilde{t} é tal que $k < \tilde{t} < k + 1$ então $\tilde{t}^{n-2} = \frac{(n-1)!}{k+1}$. Logo, como t^{n-2} é crescente

$$k^{n-2} < \frac{(n-1)!}{k+1} < (k+1)^{n-2}.$$

Mas isto implica que

$$(n-1)! < (k+1)^{n-1} \quad \text{e} \quad (n-1)! > (k+1)k^{n-2} > k^{n-1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} k &= \max\{m \in \mathbb{N} | m^{n-1} < (n-1)!\} = \max\{m \in \mathbb{N} | m < \sqrt[n-1]{(n-1)!}\} \\ &= \lfloor \sqrt[n-1]{(n-1)!} \rfloor. \end{aligned}$$

■

Vamos calcular o t ótimo para alguns valores de n . Quando $n = 2$, o valor de t procurado é 1. Quando $n = 3$, $f_1(1) = 1$, $f_2(1) = 2$, $f_2(1^+) = 1$. Logo, o valor ótimo é 1. Observe que, neste caso, $f_2(1) > f_1(1) \geq f_2(1^+)$. Quando $n = 4$, $f_1(1) = 1$, $f_2(1) = 6$, $f_2(1^+) = 3$; $f_1(2) = 2$, $f_2(2) = 1.5$, $f_2(2^+) = 1$. Logo, o valor ótimo de t satisfaz

$$t = \sqrt[4-2]{\frac{(4-1)!}{1+1}},$$

isto é, $t = \sqrt{3}$.

Será que existem outros inteiros n , $n > 4$, tais que, para algum $1 \leq k \leq n-2$, $f_2(k) \geq f_1(k) \geq f_2(k^+)$? Note que isso acontece se, e somente se,

$$\frac{k^{k+1}(n-1)!}{(k+1)!k^{n-1}} \leq \frac{k^k}{k!} \leq \frac{k^k(n-1)!}{k!k^{n-1}},$$

ou seja,

$$k^{n-1} \leq (n-1)! \text{ e } k^{n-1} + k^{n-2} \geq (n-1)!.$$

Observe que, se $k \geq (n-1)/2$, então

$$k^{n-1} \geq \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} = \frac{(n-1)^{n-1}}{2^{n-1}}.$$

Mas, pelo [Lema 4.4](#),

$$\frac{(n-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \geq \frac{((n-1)!)^2}{2^{n-1}}.$$

Como, para $n > 3$, $2^{n-1} < (n-1)!$, conclui-se que $k^{n-1} > (n-1)!$.

Logo, se k satisfizer a desigualdade acima, $k \leq (n-1)/2$.

Por outro lado, k deve ser maior que $(n-1)/e$, porque

$$\begin{aligned} k \leq \frac{n-1}{e} &\implies k^{n-1} + k^{n-2} \leq \left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} \left[1 + \frac{e}{n-1}\right] < \\ &< \sqrt{2\pi(n-1)} \left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} < (n-1)!, \end{aligned}$$

pela desigualdade de Stirling.

Assim, se existe inteiro n , $n > 4$, tal que $k^{n-1} \leq (n-1)!$ e $k^{n-1} + k^{n-2} \geq (n-1)!$, para algum inteiro k , $1 \leq k \leq n-2$, então

$$\frac{n-1}{e} < k < \frac{n-1}{2}.$$

Calculamos em MATLAB os valores de n entre 5 e 10000 para os quais existia algum k tal que $f_2(k) \geq f_1(k) \geq f_2(k^+)$. Os valores encontrados estão na Tabela 4.1.

n	k
14	6
38	15
73	28
526	195
3170	1168
5907	2175
7035	2590
7533	3194
7536	3401

Tabela 4.1: $k^{n-1} \leq (n-1)!$ e $k^{n-1} + k^{n-2} \geq (n-1)!$

Para cada valor de n na tabela, o valor ótimo para t é o valor respectivo de k .

Para os outros valores de n , $5 \leq n \leq 10000$, o valor ótimo é dado por

$$\tilde{t} = \sqrt[n-2]{\frac{(n-1)!}{k+1}}$$

em que $k = \lfloor \sqrt[n-1]{(n-1)!} \rfloor$.

Segue abaixo o código em MATLAB que foi usado para fazer tais testes:

```
pares=[];
x=1:4;
for n=5:10000
x=[x n];
k0=floor(n/exp(1));
k1=floor(n/2);
for k=k0:k1
y=k./x;
w=prod(y);
z=(1+1/k)*w;
if w<=1& z>=1
```



```

pares=[pares;n k];
end
end
end

```

Vamos ilustrar a melhora alcançada com o *scaling* proposto fazendo o produto $P*x$ (em que P é a matriz de Pascal triangular inferior) através de dois algoritmos: um efetuando o produto através da decomposição simples apresentada no [Teorema 4.1](#) e o outro com a decomposição escalada com o parâmetro $\alpha = \sqrt[n-2]{\frac{(n-1)!}{k+1}}$. Os códigos de cada um destes algoritmos seguem abaixo:

```

function f = produto_direto_pascal(x)
n= length(x);
d(1)=1;
for i= 1:n-1
    d(i+1) = d(i)*i;
end
d=d';
x=x./d;
t1 = 1./d;
t2 = [1,zeros(1,n-1)]';
T =toeplitz(t1,t2);
x = FastToep(T,x);
f = d.*x;

```

```

function f = produto_direto_pascal_escalado(x)
n= length(x);
s=1:n-1;
r=s.^(1/(n-1));
alpha=prod(r);
k=floor(alpha);
alpha=alpha*(alpha/(k+1))^(1/(n-2));
d(1) = 1;
beta=1/alpha;
for i= 1:n-1
    d(i+1) = d(i)*i*beta;
end

```

```

d=d';
x=x./d;
t1 = 1./d;
t2 = [1,zeros(1,n-1)]';
T =toeplitz(t1,t2);
x = FastToep(T,x);
f = d.*x;

```

Os vetores-teste foram $x = \text{ones}(n,1)$. Chamamos de y_1 o vetor calculado pelo primeiro algoritmo (sem escalamento) e y_2 o vetor calculado pelo segundo. A seguir apresentamos uma tabela com os erros $\|Px - y_1\|_2$ e $\|Px - y_2\|_2$.

n	$\ Px - y_1\ _2$	$\ Px - y_2\ _2$
10	9.6800e-011	2.4315e-013
20	2.3635	2.3850e-010
30	1.5544e+015	1.3202e-007
40	2.7212e+030	2.1982e-004
50	6.3665e+045	0.3190

Tabela 4.2: Comparação dos erros entre os dois algoritmos.

Capítulo 5

Curvas de Bézier: aplicação da matriz de Pascal

As curvas de Bézier são ferramentas muito usadas por quem trabalha na área de CAD (*computer aided design*). Através delas podem ser projetadas, com bastante versatilidade, formas aerodinâmicas de carros e navios, por exemplo.

Estas curvas foram desenvolvidas, no início da década de 60, por dois franceses: Pierre Bézier (engenheiro, trabalhava para a Renault) e Paul de Casteljaeu (matemático e físico, trabalhava para a Citroën). Não houve colaboração entre os dois, pois as companhias mantinham sigilo sobre os trabalhos desenvolvidos.

Tratam-se de curvas definidas a partir de pontos $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^2$ (ou \mathbb{R}^3) chamados de *pontos de controle*. A poligonal $\overline{P_0P_1 \dots P_n}$ é chamada de *polígono de controle*.

Bézier definiu a curva $B_n(t)$, que futuramente levaria seu nome, pela equação paramétrica

$$B_n(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t), \quad t \in [0, 1],$$

em que $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$ são os *polinômios de Bernstein*, já estudados no Capítulo 3. Em [4], de autoria do próprio Bézier, pode ser visto como ele chegou a tal formulação.

Apesar de levarem o nome de Bézier, o processo mais utilizado para construir as curvas $B_n(t)$ é o *algoritmo de Casteljaeu*, que será discutido na próxima seção.

5.1 Algoritmo de Casteljaeu

Explicaremos o processo de construção de curvas de Bézier, através do algoritmo de Casteljaeu, com 4 pontos, para facilitar o entendimento. Observamos que o caso geral é totalmente análogo.

Dados $P_0, P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$ (ou \mathbb{R}^3), para cada t , defina os pontos

$$\begin{aligned}
P_0^{(1)} &= (1-t)P_0 + tP_1, \\
P_1^{(1)} &= (1-t)P_1 + tP_2, \\
P_2^{(1)} &= (1-t)P_2 + tP_3,
\end{aligned}$$

que estão sobre os segmentos $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{P_2P_3}$, respectivamente:

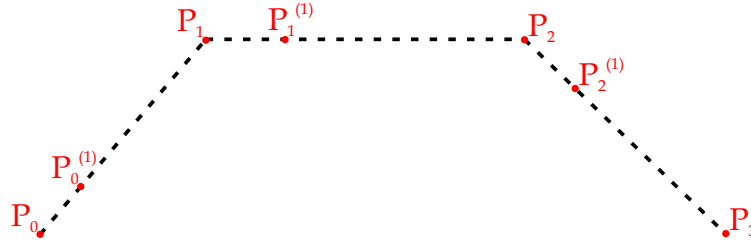


Figura 5.1: Construção dos pontos $P_0^{(1)}$, $P_1^{(1)}$ e $P_2^{(1)}$.

Da mesma forma, defina

$$\begin{aligned}
P_0^{(2)} &= (1-t)P_0^{(1)} + tP_1^{(1)}, \\
P_1^{(2)} &= (1-t)P_1^{(1)} + tP_2^{(1)}.
\end{aligned}$$

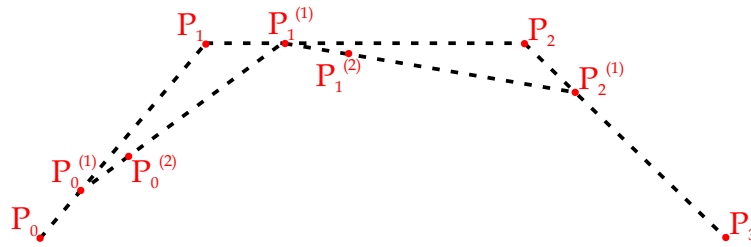


Figura 5.2: Construção dos pontos $P_0^{(2)}$ e $P_1^{(2)}$.

Por fim, defina

$$B_n(t) := P_0^{(3)} = (1-t)P_0^{(2)} + tP_1^{(2)}.$$

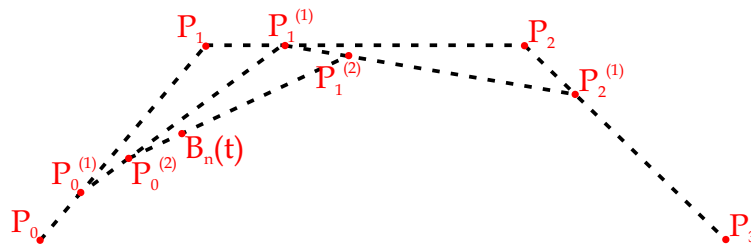


Figura 5.3: Construção do ponto $P_0^{(3)}$.

5.1.1 Custo Computacional

Baseado no processo que acabamos de descrever, podemos generalizar a construção para $n + 1$ pontos P_0, P_1, \dots, P_n , dividindo-a em etapas e calculando o custo computacional, em número de operações:

- Etapa 1: Cálculo dos pontos $P_0^{(1)}, \dots, P_{n-1}^{(1)}$: 1 subtração, 1 adição e 2 produtos por escalar para cada coordenada de cada ponto \Rightarrow 4 operações elementares para cada coordenada de cada ponto \Rightarrow 8 operações para cada ponto \Rightarrow $8(n-1)$ operações para obtenção dos pontos.

⋮

- Etapa k , $1 \leq k \leq n$: cálculo dos pontos $P_0^{(k)}, \dots, P_{n-k}^{(k)}$: $8(n-k)$ operações.

Somando o custo computacional em cada etapa, temos que o custo total é

$$8(n-1) + 8(n-2) + \dots + 8 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 8((n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1) = 8 \frac{n(n-1)}{2} = 4n^2 - 4n \approx O(n^2) \text{ operações elementares.}$$

5.1.2 Algoritmo

Abaixo, exibimos um código em MATLAB que computa curvas de Bézier. O dado de entrada é uma matriz cuja primeira coluna são as abcissas dos pontos de controle e a segunda coluna são as ordenadas.

```
function f=cast(A)

[a,b]=size(A);
t=linspace(0,1,50);
n=length(t);

for i = 1:a
    b1(i,1)=A(i,1);
end

for j=1:n
    for r = 2:a
        for i = 1:a-r+1
            b1(i,r) = (1-t(j))*b1(i,r-1) + t(j)*b1(i+1,r-1);
        end
    end
end
```

```

    x(j)=b1(1,a);
end

for i=1:a
    b2(i,1)=A(i,2);
end

for j=1:n
    for r=2:a
        for i = 1:a-r+1
            b2(i,r) = (1-t(j))*b2(i,r-1) + t(j)*b2(i+1,r-1);
        end
    end
    y(j)=b2(1,a);
end

```

5.2 Algoritmo envolvendo a matriz de Pascal

Pelo que acabamos de descrever, o custo do algoritmo de Casteljau para computar uma curva de Bézier definida a partir dos pontos de controle P_0, P_1, \dots, P_n é $O(n^2)$ operações, para cada t . Através da teoria que desenvolvemos neste trabalho podemos reduzir a complexidade do cálculo das curvas para $O(n \log n)$, como segue.

Sabemos que as equações paramétricas para a curva de Bézier definida por $P_i = (x_i, y_i)$, $0 \leq i \leq n$ são

$$x(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t)x_i, \quad y(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t)y_i.$$

Usando a matriz de Bernstein $Be(t)$ definida na Seção 3.3, obtemos

$$x(t) = e_n^T Be(t) \vec{x}, \quad y(t) = e_n^T Be(t) \vec{y},$$

em que $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T$ e $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}^T$.

Pela Afirmção 3.8

$$x(t) = e_n^T PD(t)P^{-1}\vec{x}, \quad y(t) = e_n^T PD(t)P^{-1}\vec{y}$$

e, pela Afirmção 1.4,

$$x(t) = e_n^T PD(t)D(-1)PD(-1)\vec{x}, \quad y(t) = e_n^T PD(t)D(-1)PD(-1)\vec{y}.$$

Portanto, para cada $t \in [0, 1]$, $x(t)$ e $y(t)$ podem ser computadas através de 3 produtos matriz-vetor por matrizes diagonais e 2 produtos matriz-vetor pela matriz de Pascal, que podem ser feitos em $O(n \log n)$ operações.

5.2.1 Algoritmos

Abaixo, colocamos os códigos para computar curvas de Bézier usando o que descrevemos na última seção.

```
function f = curva_bezier(A)
[a,b] = size(A);
ma=50;
t =linspace(0,1,ma);
n = a;
x = calculo_bezier(t,A(:,1),n);
y =calculo_bezier(t,A(:,2),n);

r=1:n-1;
s=wrev(r);
q=s./r;
q=[1 q];
pa=cumprod(q);
p=pa';

x=x*p;
y=y*p;

function f = calculo_bezier(t,x,n)
for i=2:2:n
    x(i) = -x(i);
end
x = produto_direto_pascal_escalado(x);
for i=2:2:n
    x(i) = -x(i);
end
ma=length(t);
s=0:n-1;
v=zeros(ma,n);
for i=1:ma
v(i,:)=t(i).^s;
v(i,:) = v(i,:).*x';
```

```
end
f=v;
```

Observações: • As linhas de 9 a 14 do primeiro código constroem, de maneira rápida, a última linha da matriz de Pascal ($e_n^T P$), que depois será multiplicada pelo produto $D(t)D(-1)PD(-1)$, que programamos separadamente, chamando-o de “calculo-bezier”.
• O programa “calculo-bezier” efetua, para todo t , o produto $D(t)D(-1)PD(-1)$ de uma vez só, tornando a computação destes dados mais eficiente.

5.3 Exemplos e comparações

Nesta seção, colocaremos exemplos bem simples de curvas de Bézier e discutiremos como cada um dos algoritmos listados nas seções anteriores (de Casteljau e o que envolve a matriz de Pascal) se comportaram.

Em cada exemplo, calcularemos os valores de $B_n(t)$ na malha uniforme de 51 pontos do intervalo $[0, 1]$ (em MATLAB, $t = linspace(0, 1, 50)$). Os pontos de controle serão geradas por uma matriz randômica $n \times 2$ (em MATLAB, $A = rand(n, 2)$). t_1 e t_2 são vetores que mostram o tempo de computação (dado pela função *etime* do MATLAB) em 10 testes de cada um dos algoritmos, Casteljau e com matriz de Pascal, respectivamente. Após todos estes dados em cada teste, exibiremos a plotagem dos resultados dados por cada algoritmo.

5.3.1 n=10

A =

0.4966	0.7271
0.8998	0.3093
0.8216	0.8385
0.6449	0.5681
0.8180	0.3704
0.6602	0.7027
0.3420	0.5466
0.2897	0.4449
0.3412	0.6946
0.5341	0.6213

t1 =

t2 =

0.0026	0.0189
0.0015	0.0055
0.0014	0.0056
0.0014	0.0057
0.0020	0.0057
0.0014	0.0060
0.0014	0.0061
0.0014	0.0058
0.0017	0.0055
0.0014	0.0055

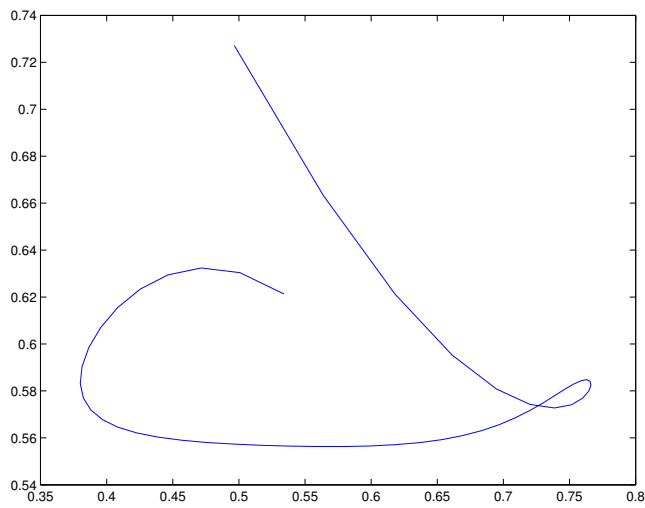


Figura 5.4: Curva gerada pelo algoritmo de Casteljau

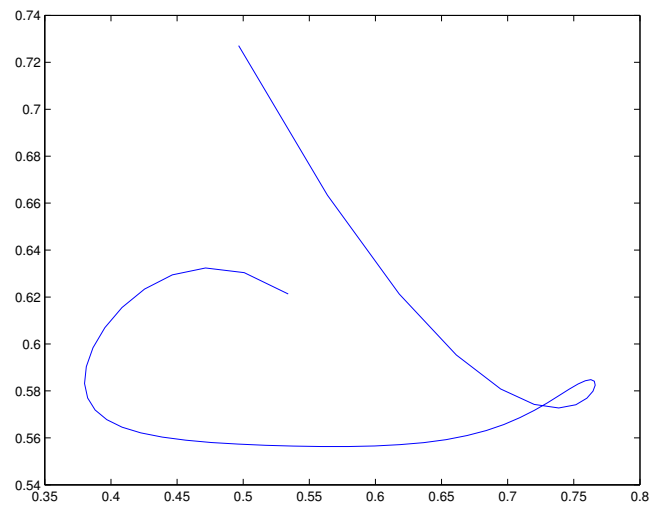


Figura 5.5: Curva gerada pelo algoritmo com a matriz de Pascal

5.3.2 n=20

A =

0.7948	0.5828
0.9568	0.4235
0.5226	0.5155
0.8801	0.3340
0.1730	0.4329
0.9797	0.2259
0.2714	0.5798
0.2523	0.7604
0.8757	0.5298
0.7373	0.6405
0.1365	0.2091
0.0118	0.3798
0.8939	0.7833
0.1991	0.6808
0.2987	0.4611
0.6614	0.5678
0.2844	0.7942
0.4692	0.0592
0.0648	0.6029
0.9883	0.0503

t1 =

t2 =

0.0055	0.0114
0.0045	0.0064
0.0045	0.0068
0.0045	0.0066
0.0045	0.0074
0.0045	0.0069
0.0045	0.0066
0.0046	0.0065
0.0045	0.0065
0.0045	0.0065

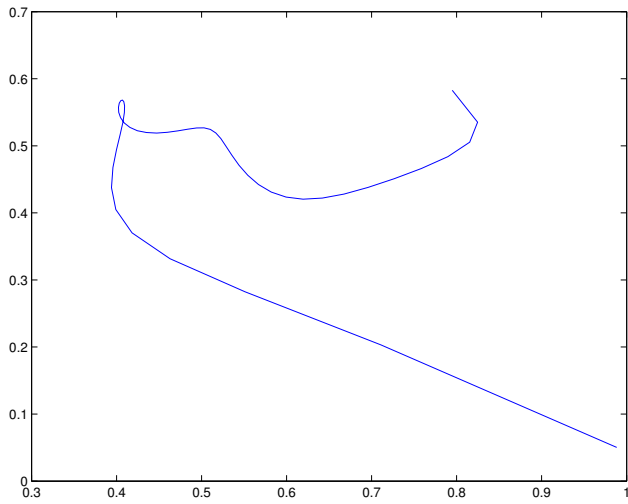


Figura 5.6: Curva gerada pelo algoritmo de Casteljau

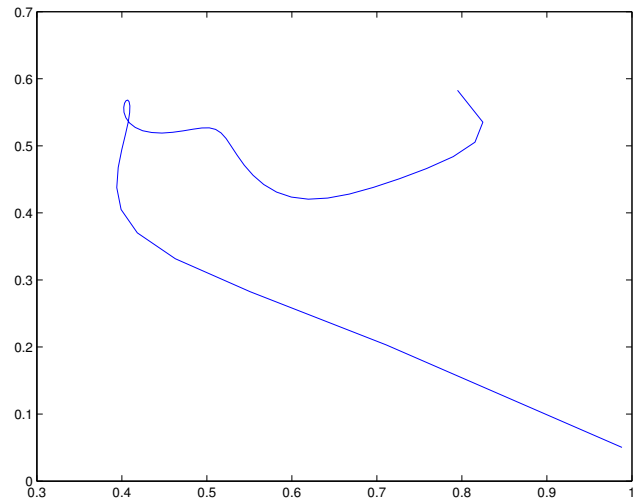


Figura 5.7: Curva gerada pelo algoritmo com a matriz de Pascal

5.3.3 n=30

A =

0.9501	0.0153
0.2311	0.7468
0.6068	0.4451
0.4860	0.9318
0.8913	0.4660
0.7621	0.4186
0.4565	0.8462
0.0185	0.5252
0.8214	0.2026
0.4447	0.6721
0.6154	0.8381
0.7919	0.0196
0.9218	0.6813
0.7382	0.3795
0.1763	0.8318
0.4057	0.5028
0.9355	0.7095
0.9169	0.4289
0.4103	0.3046
0.8936	0.1897

0.0579	0.1934
0.3529	0.6822
0.8132	0.3028
0.0099	0.5417
0.1389	0.1509
0.2028	0.6979
0.1987	0.3784
0.6038	0.8600
0.2722	0.8537
0.1988	0.5936

t1 =

0.0185
0.0097
0.0091
0.0091
0.0091
0.0093
0.0092
0.0090
0.0092
0.0090

t2 =

0.0184
0.0083
0.0082
0.0080
0.0077
0.0077
0.0077
0.0077
0.0080
0.0078
0.0077

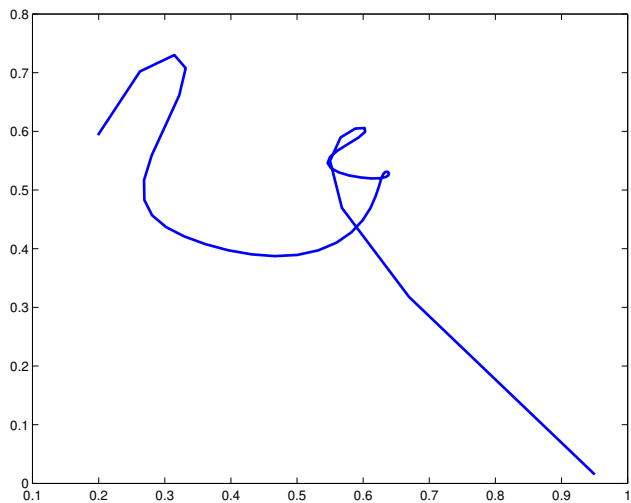


Figura 5.8: Curva gerada pelo algoritmo de Casteljau

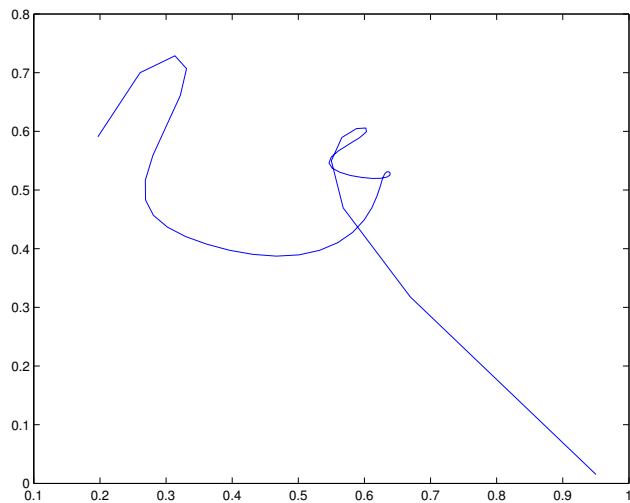


Figura 5.9: Curva gerada pelo algoritmo com a matriz de Pascal

5.3.4 n=40

A =

0.4154	0.6085
0.3050	0.0158
0.8744	0.0164
0.0150	0.1901
0.7680	0.5869
0.9708	0.0576
0.9901	0.3676
0.7889	0.6315
0.4387	0.7176
0.4983	0.6927
0.2140	0.0841
0.6435	0.4544
0.3200	0.4418
0.9601	0.3533
0.7266	0.1536
0.4120	0.6756
0.7446	0.6992
0.2679	0.7275
0.4399	0.4784
0.9334	0.5548
0.6833	0.1210
0.2126	0.4508
0.8392	0.7159
0.6288	0.8928
0.1338	0.2731
0.2071	0.2548
0.6072	0.8656
0.6299	0.2324
0.3705	0.8049
0.5751	0.9084
0.4514	0.2319
0.0439	0.2393
0.0272	0.0498
0.3127	0.0784

0.0129	0.6408
0.3840	0.1909
0.6831	0.8439
0.0928	0.1739
0.0353	0.1708
0.6124	0.9943

t1 =

t2 =

0.0165	0.0188
0.0155	0.0090
0.0154	0.0088
0.0156	0.0086
0.0159	0.0089
0.0156	0.0094
0.0154	0.0089
0.0154	0.0089
0.0155	0.0095
0.0155	0.0092

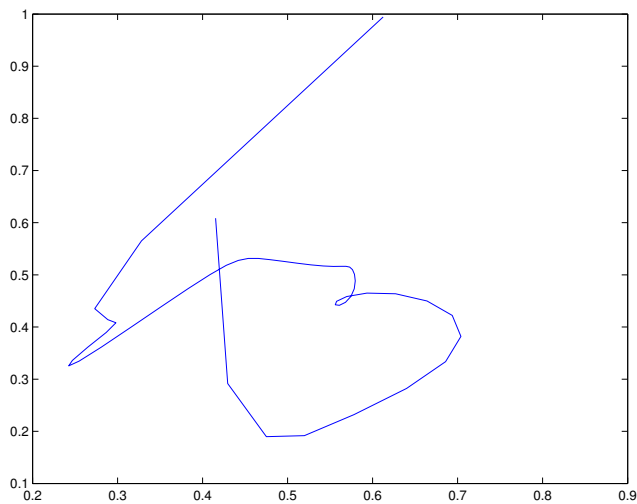


Figura 5.10: Curva gerada pelo algoritmo de Casteljau

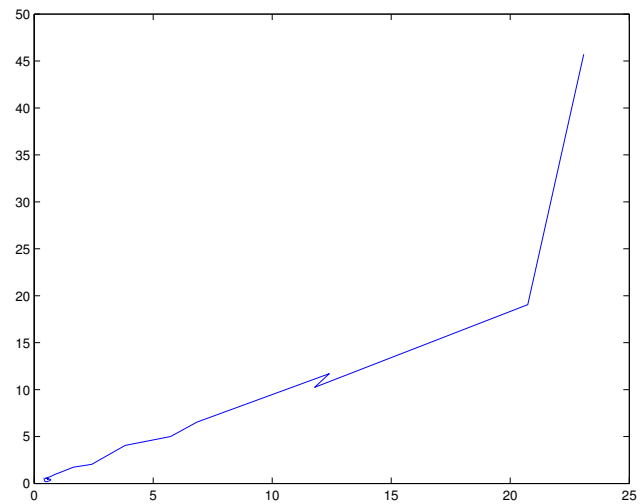


Figura 5.11: Curva gerada pelo algoritmo com a matriz de Pascal

5.3.5 Comparações

Pelo que podemos perceber nos testes feitos acima, o algoritmo envolvendo a matriz de Pascal se torna mais rápido conforme o número de pontos de controle cresce. Isso se deve ao fato do custo computacional dele ser de $O(n \log n)$ operações, contra $O(n^2)$ do algoritmo de Casteljau.

Porém, conforme a quantidade de pontos aumenta, o algoritmo com a matriz de Pascal se torna instável, conforme pode ser visto no exemplo $n = 40$. Isto se deve ao fato de, apesar de ter sido feito o melhor escalamento possível no capítulo passado, as matrizes envolvidas na decomposição de P ainda são mal condicionadas.

Fica então aberta a possibilidade de melhorar ainda mais este algoritmo para melhor computação de sistemas envolvendo as matrizes de Pascal. Se isso for feito, sem aumentar a complexidade do algoritmo que usamos anteriormente, poderemos ter um algoritmo rápido e estável para computação de curvas de Bézier de ordem n , com n qualquer.

Apêndice A

Equações Diferenciais Ordinárias e Exponenciais de Matrizes

A.1 Sistemas de E.D.O.'s

Nesta seção, propomo-nos a discutir alguns resultados importantes sobre a teoria básica das equações diferenciais ordinárias. Tais resultados complementam a discussão sobre o surgimento da matriz de Pascal, através da Matriz de Criação, tema abordado no Capítulo 1.

Teorema A.1 $\mathfrak{S} = \{y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n \mid y \text{ é função diferenciável}\}$, com as operações de soma e produto por escalar usuais, é espaço vetorial sobre \mathbb{C} .

Demonstração: Procederemos da seguinte forma: primeiro, mostraremos que $F(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) = \{y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n \mid y \text{ é função}\}$ é espaço vetorial sobre \mathbb{C} , com as operações de soma e produto por escalar usuais, e, depois, que $\mathfrak{S} \subset F(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ é subespaço vetorial de $F(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$.

(1) $F(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ é espaço vetorial sobre \mathbb{C} :

Dados $y_1, y_2 \in F(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ a soma usual é definida por:

$$(y_1 + y_2)(t) := y_1(t) + y_2(t).$$

Note que $(F(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n), +)$ é grupo abeliano, pois:

(a) $(y_1 + y_2)(y) = y_1(t) + y_2(t) = y_2(t) + y_1(t) = (y_2 + y_1)(t)$ (comutatividade).

(b) $(y_1 + y_2)(t) + y_3(t) = (y_1(t) + y_2(t)) + y_3(t) = y_1(t) + (y_2(t) + y_3(t)) = y_1(t) + (y_2 + y_3)(t)$ (associatividade).

(c) A função $f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ é o elemento neutro.

(d) A função $(-1) \cdot y$ é o simétrico de y , $\forall y \in F(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$.

Dado $c \in \mathbb{C}$ e $y \in F(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$, o produto por escalar usual é definido por:

$$(c \cdot y)(t) := c \cdot y(t).$$

Seguem as seguintes propriedades:

(a) $1 \cdot y(t) = y(t)$.

(b) $(c_1 \cdot c_2) \cdot y(t) = c_1 \cdot (c_2 \cdot y(t))$.

(c) $c \cdot [(y_1 + y_2)(t)] = c \cdot (y_1(t) + y_2(t)) = c \cdot y_1(t) + c \cdot y_2(t)$.

(d) $(c_1 + c_2) \cdot y(t) = c_1 \cdot y(t) + c_2 \cdot y(t)$.

Portanto, $F(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ é espaço vetorial sobre \mathbb{R} .

(2) \mathfrak{S} é subespaço vetorial de $F(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$:

(a) \mathfrak{S} é não vazio. A função nula, por exemplo, está em \mathfrak{S} .

(b) $y_1(t), y_2(t) \in \mathfrak{S} \Rightarrow (y_1 + y_2)(t) = y_1(t) + y_2(t) \in \mathfrak{S}$, pois a soma de duas funções diferenciáveis também é diferenciável.

(c) $y(t) \in \mathfrak{S}, k \in \mathbb{C} \Rightarrow k \cdot \frac{d}{dt}y(t) = \frac{d}{dt}(k \cdot y(t)) \Rightarrow k \cdot y$ é diferenciável $\Rightarrow k \cdot y \in \mathfrak{S}$.

■

Lema A.1 Se f é uma função contínua em (a, b) e, para algum $c \in (a, b)$, $f(c) \neq 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(t) \neq 0$ para $t \in (c - \delta, c + \delta)$.

Demonstração: Seja $\varepsilon = |f(c)|$, que é maior que zero. Como f é contínua, existe $\delta > 0$ tal que $|t - c| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(c)| < |f(c)|$. Como $|f(c)| - |f(t)| \leq |f(t) - f(c)| < |f(c)|$, $|f(c)| - |f(t)| < |f(c)| \Rightarrow |f(t)| > 0$. Logo, $f(t) \neq 0$, para $t \in (c - \delta, c + \delta)$.

■

Teorema A.2 Se $x \in F(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ é solução da equação diferencial $\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = ky(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$, k número complexo fixo, então $x(t) \equiv 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Suponha que $x(t_0) \neq 0$, para algum $t_0 \in (0, \infty)$. $x(t)$ é diferenciável e, portanto, é contínua. Pelo **Lema A.1**, $(\exists \delta > 0) x(t) \neq 0$, para $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Seja $(m, M) \subseteq (0, \infty)$ o intervalo maximal que contém t_0 tal que $x(t) \neq 0$, para $t \in (m, M)$.

Note que (m, M) é intervalo aberto pois, caso contrário, se $x(m) \neq 0$ (ou $x(M) \neq 0$), pelo **Lema A.1**, existiria $\delta' > 0$ tal que $t \in (m - \delta', m + \delta') \Rightarrow x(t) \neq 0$. Isso contradiz o fato de (m, M) ser maximal. Assim, $x(m) = 0$ (e $x(M) = 0$). Sejam $c \in (m, M)$ e $s > 0$ tais que $m < c < c + s < M$. Por hipótese, $\frac{dx}{dt} = kx(t) \Rightarrow \frac{1}{x(t)} \cdot \frac{dx}{dt} = k$, para $t \in \mathbb{R}$.

Supondo que $x(t) = a(t) + ib(t)$, temos que

$$\begin{aligned} \int_c^{c+s} \frac{x'(t)}{x(t)} dt &= \int_c^{c+s} k dt \Rightarrow \int_c^{c+s} \frac{a'(t) + ib'(t)}{a(t) + ib(t)} dt = ks \Rightarrow \int_c^{c+s} \frac{[a'(t) + ib'(t)][a(t) - ib(t)]}{a^2(t) + b^2(t)} dt = \\ ks &\Rightarrow \frac{1}{2} \int_c^{c+s} 2 \frac{a'(t)a(t) + b'(t)b(t)}{a^2(t) + b^2(t)} dt + i \int_c^{c+s} \frac{b'(t)a(t) - a'(t)b(t)}{a^2(t) + b^2(t)} dt = ks \Rightarrow \frac{1}{2} \log |x(t)|^2 \Big|_c^{c+s} + \\ i \arctan \frac{a(t)}{b(t)} \Big|_c^{c+s} &= ks \Rightarrow \frac{1}{2} \log \left| \frac{x(c+s)}{x(c)} \right|^2 + \left[i \arctan \frac{b(c+s)}{a(c+s)} - i \arctan \frac{b(c)}{a(c)} \right] = ks \Rightarrow \\ \frac{1}{2} \log \frac{|x(c+s)|^2}{|x(c)|^2} e^{2i(\arctan(\frac{b(c+s)}{a(c+s)}) - \arctan(\frac{b(c)}{a(c)}))} &= e^{2ks} \Rightarrow |x(c+s)|^2 e^{2i(\arctan(\frac{b(c+s)}{a(c+s)}) - \arctan(\frac{b(c)}{a(c)}))} = \\ e^{2ks} |x(c)|. \end{aligned}$$

Quando $c \rightarrow m$, temos que $|x(c)| \rightarrow |x(m)| = 0$. Daí, concluímos que $x(c+m) = 0$.

Absurdo, pois $m < m+s < M \Rightarrow x(m+s) \neq 0$. Logo, $x(t) = 0, \forall t \in (0, +\infty)$.

Da mesma forma, prova-se que $x(t) \equiv 0, \forall t \in (-\infty, 0)$. Portanto, $x(t) \equiv 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

■

Teorema A.3 Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz diagonalizável em $\mathbb{C}^{n \times n}$. Então o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{C}^n \end{cases} \text{ tem solução } x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n \text{ e é única.}$$

Demonstração: Existência: Como A é diagonalizável, suponha $A = PDP^{-1}$, sendo $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ a matriz dos autovalores de A e $P = (v_1 \dots v_n)$ a matriz dos autovetores v_i associados a λ_i .

$$\text{Sejam } c = P^{-1}x_0 \text{ e } x(t) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} c. \text{ Logo, } \frac{dx}{dt} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} c =$$

$$P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} c = PD \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} c =$$

$$AP \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} c = Ax(t). \text{ Ou seja, } \frac{dx}{dt} = Ax(t).$$

Logo, como $x(0) = PIP^{-1}x_0 = x_0$, $x(t)$ é solução do sistema.

Unicidade: Suponha $x(t)$ e $y(t)$ soluções para o sistema linear.

Seja $z(t) = x(t) - y(t)$. Logo, $z(0) = x(0) - y(0) = x_0 - x_0 = 0$. Note que $\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} =$

$$A(x(t) - y(t)) = Az(t).$$

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow Az(t) = PDP^{-1}z(t) \Rightarrow \frac{dz}{dt} = PDP^{-1}z(t) \Rightarrow \frac{dP^{-1}z}{dt} = DP^{-1}z(t).$$

Façamos uma troca de variável: seja $w(t) = P^{-1}z(t)$. Logo, $\frac{dw}{dt} = Dw(t)$ e

$$w(0) = P^{-1}z(0) = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$w(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ \vdots \\ w_n(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} w'_1(t) \\ \vdots \\ w'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1(t) \\ \vdots \\ w_n(t) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w'_1(t) = \lambda_1 w_1(t) \\ w_1(0) = 0 \end{cases}, \dots, \begin{cases} w'_n(t) = \lambda_n w_n(t) \\ w_n(0) = 0 \end{cases}.$$

Temos então n equações diferenciais com valor inicial zero e, pelo [Teorema A.2](#), $w_1(t) = \dots = w_n(t) = 0$.

$$z = Pw \Rightarrow z = P \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow z(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

E, como $z(t) = x(t) - y(t)$, $x(t) = y(t)$.

Logo, a solução é única. ■

Teorema A.4 A equação diferencial $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ky(t) + f(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$, em que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função contínua e $k \in \mathbb{C}$ possui uma única solução $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

Demonstração: Existência: Multiplicando ambos os lados da equação por e^{-kt} , obtemos:

$$e^{-kt} \frac{dy}{dt} - e^{-kt} ky(t) = e^{-kt} f(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}(e^{-kt} y) = e^{-kt} f(t).$$

Agora basta integrar ambos os lados em relação a t :

$$e^{-kt} y(t) - y(0) = \int_0^t e^{-ks} f(s) ds \Rightarrow y(t) = e^{kt} \int_0^t e^{-ks} f(s) ds + y_0 e^{kt}.$$

Unicidade: Suponha que $x(t)$ e $z(t)$ sejam soluções para equação diferencial. Então,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = kx(t) + f(t) \\ x(0) = y_0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \frac{dz}{dt} = kz(t) + f(t) \\ z(0) = y_0 \end{cases}$$

Defina $w(t) = x(t) - z(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Segue então que $\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}(x(t) - z(t)) = \frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} = kx(t) + f(t) - kz(t) - f(t) = k(x(t) - z(t)) = kw(t)$ e $w(0) = x(0) - z(0) = y_0 - y_0 = 0$.

Pelo [Teorema A.2](#), temos que $w(t) \equiv 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Ou seja, $x(t) - z(t) = 0 \Rightarrow x(t) = z(t)$. ■

Teorema A.5 Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz não-diagonalizável em $\mathbb{C}^{n \times n}$. Então a solução

do sistema linear $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{C}^n \end{cases}$ existe e é única.

Demonstração: Se A não é diagonalizável, ela possui a decomposição $A = PJP^{-1}$, em que J é uma forma de Jordan de A .

Veja que $\frac{dx}{dt} = PJP^{-1}x(t) \Rightarrow P^{-1}\frac{dx}{dt} = JP^{-1}x(t)$.

Façamos uma mudança de variável: seja $y(t) = P^{-1}x(t)$. Logo, $\frac{dy}{dt} = P^{-1}\frac{dx}{dt}$. Ou seja, $\frac{dy}{dt} = Jy(t)$.

Portanto, podemos supor que A é uma matriz de Jordan, pois sempre podemos fazer a mudança de variável descrita acima e obtermos uma equação diferencial com uma matriz de Jordan.

E mais: podemos supor que A é uma matriz de Jordan com um único bloco. Pois,

se $A = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_p \end{pmatrix}$, sendo J_1, \dots, J_p blocos de Jordan,

$\frac{dx}{dt} = Ax \Leftrightarrow \frac{dx_i}{dt} = J_i x_i$ em que $x_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ e, para cada i , x_i é um vetor de dimensão

igual a ordem de J_i .

Seja então $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ e $\frac{dx}{dt} = Ax(t)$, com $x(0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \lambda x_1(t) + x_2(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = \lambda x_2(t) + x_3(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = \lambda x_{n-1}(t) + x_n(t) \\ \frac{dx_n}{dt} = \lambda x_n(t) \end{cases}$$

Pela última igualdade temos $\frac{dx_n}{dt} = \lambda x_n(t)$ e $x_n(0) = a_n$. Logo, $x_n(t) = a_n e^{\lambda t}$.

Afirmação: $x_{n-1}(t) = a_n t e^{\lambda t} + a_{n-1} e^{\lambda t}$. Verificação:

$\frac{d}{dt}(a_n t e^{\lambda t} + a_{n-1} e^{\lambda t}) = a_n e^{\lambda t} + \lambda a_n t e^{\lambda t} + \lambda a_{n-1} e^{\lambda t} = \lambda(a_n t e^{\lambda t} + a_{n-1} e^{\lambda t}) + a_n e^{\lambda t} = \lambda x_{n-1}(t) + x_n t$. Também temos $x_{n-1}(0) = a_{n-1}$.

Afirmação: $x_{n-2}(t) = a_n \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} + a_{n-1} t e^{\lambda t} + a_{n-2} e^{\lambda t}$. Verificação:

$\frac{dx_{n-2}}{dt} = t a_n e^{\lambda t} + \lambda a_n \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} + a_{n-1} e^{\lambda t} + \lambda a_{n-1} t e^{\lambda t} + \lambda a_{n-2} e^{\lambda t} = \lambda x_{n-2} + x_{n-1}$ e $x_{n-2}(0) = a_{n-2}$.

Segue também que $x_{n-1}(t)$ e $x_{n-2}(t)$ são únicas, pelo Teorema A.4.

Hipótese de Indução: Suponha $x_{n-k} = \sum_{i=0}^k \frac{a_{n-i} t^{k-i}}{(k-i)!} e^{\lambda t}$, para $k \in \mathbb{N}$.

Temos então que $x_{n-(k+1)} = \sum_{i=0}^{k+1} \frac{a_{n-i} t^{k+1-i}}{(k+1-i)!} e^{\lambda t}$, pois:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=0}^{k+1} \frac{a_{n-i} t^{k+1-i}}{(k+1-i)!} e^{\lambda t} = \lambda \sum_{i=0}^{k+1} \frac{a_{n-i} t^{k+1-i}}{(k+1-i)!} e^{\lambda t} + \sum_{i=0}^k \frac{a_{n-i} t^{k-i}}{(k-i)!} e^{\lambda t} = \lambda x_{n-(k+1)} + x_{n-k}(t).$$

Temos então que a hipótese de indução é válida para qualquer k tal que $0 \leq k \leq n-1$.

Portanto, a solução do sistema existe para cada coordenada e é única (pelo Teorema A.4). ■

Corolário A.1 Se x é tal que $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$, em que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ então $x \equiv 0$.

Demonstração: $x \equiv 0$ verifica trivialmente o sistema e a condição inicial e, pelos teoremas anteriores, a solução é única. Logo, $x \equiv 0$ é única solução. ■

Corolário A.2 Se x é tal que $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$, em que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ então $x(t) \in \mathbb{R}^n$,

$\forall t \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Sabemos que, para o sistema acima, existe uma única solução $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$. Suponha que $x(t) = r(t) + is(t)$, em que $r(t), s(t) \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que $s \equiv 0$.

$$x'(t) = Ax(t), x(0) = x_0 \Rightarrow r'(t) + is'(t) = Ar(t) + iA(s(t)), r(0) = x_0, s(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r'(t) = Ar(t), r(0) = x_0 \\ s'(t) = As(t), s(0) = 0 \end{cases}.$$

Mas, pelo corolário anterior, o sistema $s'(t) = As(t), s(0) = 0$ possui única solução $s \equiv 0$ e isto conclui a demonstração. ■

Teorema A.6 Seja $W = \{x \in F(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \mid \frac{dx}{dt} = Ax(t)\}$. Então W é subespaço vetorial de $F(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ e $\dim(W) = n$.

Demonstração: Primeiro mostraremos que W é subespaço vetorial de $F(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$: Note que $W \subseteq F(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$.

$$\bullet \quad \begin{aligned} 0 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ t &\longmapsto (0, \dots, 0) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}0(t) = 0 = A \cdot 0(t) \Rightarrow 0 \in W.$$

$$\bullet \text{ Sejam } x_1, x_2 \in W \Rightarrow \frac{dx_1}{dt} = Ax_1(t) \text{ e } \frac{dx_2}{dt} = Ax_2(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}(x_1(t) + x_2(t)) = \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} = Ax_1(t) + Ax_2(t) = A((x_1 + x_2)(t)) \Rightarrow x_1(t) + x_2(t) \in W.$$

• Seja $x_1(t) \in W$ e $k \in \mathbb{C}$.

$$\frac{dx_1}{dt} = Ax_1(t) \Rightarrow k \frac{dx_1}{dt} = k \cdot Ax_1(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}(k \cdot x_1(t)) = A(k \cdot x_1(t)) \Rightarrow k \cdot x_1(t) \in W.$$

Logo, W é subespaço vetorial de V .

Agora calculemos a dimensão de W .

Suponha v_1, v_2, \dots, v_n vetores linearmente independentes (base de \mathbb{C}^n).

Sejam $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ tais que

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = Ax_1(t) \\ x_1(0) = v_1 \end{cases}, \begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = Ax_2(t) \\ x_2(0) = v_2 \end{cases}, \dots, \begin{cases} \frac{dx_n}{dt} = Ax_n(t) \\ x_n(0) = v_n \end{cases}.$$

Para todo t , $a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + \dots + a_nx_n(t) = 0 \Rightarrow a_1x_1(0) + a_2x_2(0) + \dots + a_nx_n(0) = 0 \Rightarrow a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ (pois v_1, v_2, \dots, v_n são l.i.).

Logo, $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ são linearmente independentes. Segue então que a dimensão de W é, no mínimo, n .

Agora seja $x \in W$ e $x(0) = v$, sendo v um vetor qualquer de \mathbb{C}^n :
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) \\ x(0) = v \end{cases}.$$

Note que $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$, ou seja, $x(0) = a_1x_1(0) + \dots + a_nx_n(0)$.

Segue então que $x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + \dots + a_nx_n(t)$, sendo a_1, a_2, \dots, a_n as constantes consideradas acima, pois tal combinação verifica a condição inicial e

$$\frac{dx}{dt} = a_1 \frac{dx_1}{dt} + \dots + a_n \frac{dx_n}{dt} = a_1Ax_1(t) + \dots + a_nAx_n(t) = A(a_1x_1(t) + \dots + a_nx_n(t)) = Ax(t).$$

Como, pelos [Teoremas A.3](#) e [A.5](#), $x(t)$ é única, conclui-se que $\forall x(t) \in W$, $x(t)$ é combinação de $x_1(t), \dots, x_n(t)$. Portanto, $\dim(W) = n$.

A.2 Exponenciais de Matrizes

A matriz de Pascal foi definida no Capítulo 1 como e^H . Esta seção é dedicada a mostrar que a exponencial de qualquer matriz converge e que $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$.

Quando nos referirmos a alguma norma matricial, fica subentendido que é uma norma que satisfaz a regra do produto, ou seja, $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, para quaisquer matrizes A e B .

Além disto, usaremos fortemente o fato que $\mathbb{R}^{n \times n}$ é um espaço métrico completo, isto é, os conceitos de seqüências convergentes e seqüências de Cauchy se equivalem neste espaço.

Teorema A.7 (*Critério de Cauchy para séries*): $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ converge \Leftrightarrow para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|A_{n+1} + A_{n+2} + \dots + A_{n+p}\| < \varepsilon$, quaisquer que sejam $n > n_0$ e

$p \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Note que $\|A_{n+1} + A_{n+2} + \dots + A_{n+p}\| = \|S_{n+p} - S_n\|$, em que $S_j = \sum_{k=0}^j A_k$. Como $\mathbb{R}^{n \times n}$ é um espaço completo, $(S_j)_{j \in \mathbb{N}}$ será convergente se, e somente se, for de Cauchy, ou seja, $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\|S_{n+p} - S_n\| < \varepsilon$, para todo natural p .

■

Definição A.1 Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $t \in \mathbb{R}$. $e^{At} := I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$.

Observação: Defina a seqüência das somas parciais $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(At)^k}{k!}$.

$$m > n \Rightarrow \|S_m - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m \frac{(At)^k}{k!} \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m \frac{A^k t^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{\|A^k\| \cdot |t^k|}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{\|A\|^k \cdot |t|^k}{k!} =$$

$|a_m - a_n|$, em que $a_i = \sum_{k=0}^i \frac{(\|A\| \cdot |t|)^k}{k!}$. Note que (a_i) é uma seqüência de valores reais e convergente, pois $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = e^{\|A\| \cdot |t|}$. Então, segue que (a_i) também é de Cauchy, ou seja, $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n > n_0)|a_m - a_n| < \varepsilon$. Logo, para os mesmos ε , m e n , $\|S_m - S_n\| < \varepsilon$ e, pelo critério de Cauchy (Teorema A.7), S_n é convergente.

Definição A.2 Uma série matricial $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ é dita absolutamente convergente quando

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\| \text{ é convergente.}$$

Teorema A.8 Toda série absolutamente convergente é convergente.

Demonstração: Seja $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ uma série absolutamente convergente. Como $\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\|$ converge, pelo Teorema 1.7, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|A_{n+1}\| + \dots + \|A_{n+p}\| < \varepsilon$, $\forall p \in \mathbb{N}$. Mas, por $\|\cdot\|$ ser uma norma matricial, $\|A_{n+1} + \dots + A_{n+p}\| \leq \|A_{n+1}\| + \dots + \|A_{n+p}\| < \varepsilon$ e, aplicando novamente o teorema, segue que $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ converge.

■

Lema A.2 Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Então $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{k+2} h^k}{k!}$ é uma série convergente em $\mathbb{R}^{n \times n}$, para $|h| < 1$.

Demonstração:
$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^{k+2}h^k}{k!} \right\| = \left\| \frac{A^2}{2!} \right\| + |h| \left\| \frac{A^3}{3!} \right\| + |h|^2 \left\| \frac{A^4}{4!} \right\| + \dots$$

Como $|h| < 1$,
$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^{k+2}h^k}{k!} \right\| \leq \left\| \frac{A^2}{2!} \right\| + \left\| \frac{A^3}{3!} \right\| + \left\| \frac{A^4}{4!} \right\| + \dots \leq \frac{\|A\|^2}{2!} + \frac{\|A\|^3}{3!} + \frac{\|A\|^4}{4!} + \dots =$$

$e^{\|A\|} - 1 - \|A\|$. Como $\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^{k+2}h^k}{k!} \right\|$ é uma seqüência crescente e limitada superiormente, ela converge. Então, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{k+2}h^k}{k!}$ é absolutamente convergente e, portanto, convergente. ■

Lema A.3 *Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se $AB = BA$, então $e^{A+B} = e^A e^B$.*

Demonstração:
$$\left(\sum_{k=0}^r \frac{A^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^s \frac{B^k}{k!} \right) = \sum_{r+s=0}^n \frac{A^r \cdot B^s}{r! \cdot s!} = \left(\frac{A^0 B^0}{0! \cdot 0!} \right) + \left(\frac{A^1 B^0}{1! \cdot 0!} + \frac{A^0 B^1}{0! \cdot 1!} \right) + \dots + \left(\frac{A^2 B^0}{2! \cdot 0!} + \frac{A^1 B^1}{1! \cdot 1!} + \frac{A^0 B^2}{0! \cdot 2!} \right) + \dots + \left(\frac{A^n B^0}{n! \cdot 0!} + \frac{A^{n-1} B^1}{(n-1)! \cdot 1!} + \dots + \frac{A^1 B^{n-1}}{1! \cdot (n-1)!} + \frac{A^0 B^n}{0! \cdot n!} \right) =$$

$$\sum_{k=0}^0 \frac{\binom{0}{k} A^k B^{0-k}}{0!} + \sum_{k=0}^1 \frac{\binom{1}{k} A^k B^{1-k}}{1!} + \sum_{k=0}^2 \frac{\binom{2}{k} A^k B^{2-k}}{2!} + \dots + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{n-1}{k} A^k B^{n-1-k}}{(n-1)!} + \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k} A^k B^{n-k}}{n!}.$$

Como A e B comutam,
$$\left(\sum_{k=0}^r \frac{A^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^s \frac{B^k}{k!} \right) = \frac{(A+B)^0}{0!} + \dots + \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(A+B)^k}{k!}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} \Rightarrow e^A e^B = e^{A+B}.$$
 ■

Teorema A.9 *Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Então $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$.*

Demonstração: Pelo [Lema A.3](#), $e^{A(t+h)} = e^{At} \cdot e^{Ah}$, pois $At \cdot Ah = Ah \cdot At$. Calculemos a derivada de e^{At} :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{At} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{At} \cdot e^{Ah} - e^{At}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{At} \frac{e^{Ah} - I}{h} = e^{At} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{Ah} - I}{h} = \\ &= e^{At} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\left(\frac{I}{h} + \frac{Ah}{h} + \frac{A^2 h^2}{h \cdot 2!} + \dots \right) - \frac{I}{h} \right] = e^{At} \lim_{h \rightarrow 0} \left(A + \frac{A^2 h}{2!} + \frac{A^3 h^2}{3!} + \dots \right) = \\ &= e^{At} \left[A + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{A^2 h}{2!} + \frac{A^3 h^2}{3!} + \dots \right) \right] = e^{At} \left[A + \lim_{h \rightarrow 0} h \left(\frac{A^2}{2!} + \frac{A^3 h}{3!} + \dots \right) \right]. \end{aligned}$$

Mas, pelo [Lema A.2](#), $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{k+2}h^k}{k!}$ é uma série convergente para valores próximos de zero,

ou seja, $\lim_{h \rightarrow 0} h \left(\frac{A^2}{2!} + \frac{A^3 h}{3!} + \dots \right) = 0$ e, portanto, $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$. ■

Corolário A.3 A equação diferencial $\frac{dy}{dt} = Ay(t)$, $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$, $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ possui única solução $y(t) = e^{At}y_0$.

Demonstração: $\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}e^{At}y_0 = \left(\frac{d}{dt}e^{At}\right)y_0 = Ae^{At}y_0 = Ay(t)$.

$$y(0) = e^{A \cdot 0}y_0 = \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(A \cdot 0)^k}{k!}\right)y_0 = Iy_0 = y_0.$$

Como vimos pelos Teoremas 1.3 e 1.5, a solução de tal sistema é única. Logo $y(t) = e^{At}y_0$ é a única solução. ■

Apêndice B

Teoremas Clássicos

Este apêndice visa complementar algumas informações do corpo do trabalho. As demonstrações que serão feitas aqui foram colocadas à parte para não interferir na parte principal do texto.

Teorema B.1 *Toda matriz de Vandermonde com $x_i \neq x_j$, para $i \neq j$ é não singular.*

Demonstração: Seja $W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ uma matriz de Vandermonde.

Vamos provar, por indução na dimensão da matriz, que $\det(W) = \prod_{n \geq k > j \geq 1} (x_k - x_j)$, $\forall n \geq 2$.

Para $n = 2$: $W = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(W) = x_2 - x_1 \neq 0$, pois $x_1 \neq x_2$.

Hipótese de indução: Suponha $\det(W_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq k > j \geq 1} (x_k - x_j)$.

Seja $W_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} & x_{n+1}^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n & x_{n+1}^n \end{pmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$.

Por cofatores, segue que $\det(W_{n+1}) = x_{n+1}^n \det(W_n) + \dots$, que é um polinômio de grau n em x_{n+1} .

Note que tal polinômio se anula em $x_{n+1} = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, pois teríamos colunas iguais

na matriz W_{n+1} , o que anularia o determinante.

Como o coeficiente líder do polinômio é $\det(W_n)$, podemos decompor $\det(W_{n+1})$ da seguinte forma:

$$\det(W_{n+1}) = \det(W_n)(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - x_{n-1}) \dots (x_{n+1} - x_1) = \prod_{n+1 \geq k > j \geq 1} (x_k - x_j).$$

Logo, $\forall n \geq 2$, $\det(W_n) = \prod_{n \geq k > j \geq 1} (x_k - x_j) \neq 0$, pois $x_i \neq x_j$, para $i \neq j$.

Portanto, qualquer matriz de Vandermonde é não singular. ■

Teorema B.2 *Seja $F = F(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ uma matriz companheira. Então $\det(F - \lambda I) = (-1)^n(\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - a_{n-2}\lambda^{n-2} - \dots - a_1\lambda - a_0)$.*

Demonstração: A demonstração será feita por indução na dimensão da matriz.

Para $n = 2$: $F_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_0 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \Rightarrow F_2 - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & a_0 \\ 1 & a_1 - \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \det(F_2 - \lambda I) = (-1)^2(\lambda^2 - a_1\lambda - a_0)$.

Hipótese de indução: Para $n \in \mathbb{N}$, temos $F_n - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & & \vdots & a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix}$.

Suponha que $\det(F_n - \lambda I) = (-1)^n(\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - a_{n-2}\lambda^{n-2} - \dots - a_1\lambda - a_0)$.

Para $n + 1$ teremos: $F_{n+1} - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & & \vdots & a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & -\lambda & a_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 1 & a_n - \lambda \end{pmatrix}$.

Fazendo a expansão por cofatores na primeira coluna:

$$\det(F_{n+1} - \lambda I) = -\lambda \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & & & a_1 \\ 1 & -\lambda & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & a_n - \lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & \dots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_n - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & & & a_1 \\ 1 & -\lambda & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & a_n - \lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot (-1)^{n+1} a_0 \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \\ \ddots & -\lambda & & \\ 1 & & & \end{vmatrix}$$

Pela hipótese de indução, obtemos uma expressão para o primeiro determinante e o segundo é claramente 1:

$$\det(F_{n+1} - \lambda I) = -\lambda(-1)^n(\lambda^n - a_n\lambda^{n-1} - \dots - a_2\lambda - a_1) - (-1)^{n+1}a_0 = (-1)^{n+1}(-\lambda^{n+1} - a_n\lambda^n - a_2\lambda^2 - a_1\lambda - a_0).$$

■

Teorema B.3 *Os polinômios de Hermite constituem uma seqüência ortogonal em relação ao produto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} f(t)g(t)dt$, com $\|H_n\|^2 = n!\sqrt{2\pi}$.*

Demonstração: $\langle H_m, H_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} H_m(t)H_n(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} H_m(t)(-1)^n e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^n}{dt^n} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(t) \frac{d^n}{dt^n} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$

Suponhamos agora $m \leq n$ e façamos a integração por partes:

$$\langle H_m, H_n \rangle = (-1)^n \left[H_m(t) \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (e^{-\frac{t^2}{2}}) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} H'_m(t) \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (e^{-\frac{t^2}{2}}) dt \right].$$

Analisemos o primeiro termo: a derivada de ordem $n - 1$ de $e^{-\frac{t^2}{2}}$ nada mais é que um polinômio multiplicado por $e^{-\frac{t^2}{2}}$ e isto tudo está multiplicado pelo polinômio $H_m(t)$, o que torna o primeiro termo todo um polinômio multiplicado por $e^{-\frac{t^2}{2}}$. Logo, quando $|t| \rightarrow \infty$, o primeiro termo se anula, pois a função exponencial cresce mais rapidamente que a polinomial, para valores grande de t . Então nos resta:

$$\langle H_m, H_n \rangle = (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} H'_m(t) \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (e^{-\frac{t^2}{2}}) dt.$$

Repetindo o mesmo processo num total de m vezes, obtemos

$$\langle H_m, H_n \rangle = (-1)^{n+m} \int_{-\infty}^{\infty} H_m^{(m)}(t) \frac{d^{n-m}}{dt^{n-m}} (e^{-\frac{t^2}{2}}) dt,$$

em que $H_m^{(m)}(t)$ designa a m -ésima derivada de $H_m(t)$. Mas $H_m^{(m)}(t) = m!$, pois H_m é um polinômio de grau m com coeficiente líder igual a 1. Então,

$$\langle H_m, H_n \rangle = (-1)^{n+m} m! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-m}}{dt^{n-m}} (e^{-\frac{t^2}{2}}) dt.$$

Suponha agora $m < n$. Logo,

$$\langle H_m, H_n \rangle = (-1)^{n+m} m! \left(\frac{d^{n-m-1}}{dt^{n-m-1}} (e^{-\frac{t^2}{2}}) \Big|_{-\infty}^{\infty} \right) = 0,$$

pois $\frac{d^{n-m-1}}{dt^{n-m-1}} (e^{-\frac{t^2}{2}})$ é um polinômio multiplicado por $e^{-\frac{t^2}{2}}$ e quando $|t| \rightarrow \infty$ o termo se anula.

Portanto, H_m e H_n são ortogonais, quando $m \neq n$. E, se $m = n$,

$$\langle H_n, H_n \rangle = (-1)^{2n} n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = n! \sqrt{2\pi}.$$

■

Teorema B.4 (Cayley-Hamilton) *Toda matriz é um zero do seu polinômio característico.*

Demonstração: Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $p_A(t) = \det(tI - A)$ o seu polinômio característico. Pelas propriedades de determinante, sabemos que $p_A(t)$ é um polinômio em t mônico (coeficiente líder é 1) e de grau n :

$$p_A(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0.$$

Defina, para t tal que $p_A(t) \neq 0$ (ou seja, $tI - A$ é inversível), $J(t)$ como sendo a adjunta clássica de $tI - A$, ou seja, a matriz dos cofatores de $tI - A$. Por ser uma matriz de cofatores, $J(t)$ possui, grau $n - 1$:

$$J(t) = J_{n-1}t^{n-1} + J_{n-2}t^{n-2} + \dots + J_1t + J_0,$$

em que J_i são matrizes independentes de t .

Claramente, $(tI - A)J(t) = \det(tI - A)I$, pois para toda matriz inversível $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$. Logo,

$$\begin{aligned} (tI - A)J(t) = \det(tI - A)I &\Leftrightarrow (tI - A)(J_{n-1}t^{n-1} + J_{n-2}t^{n-2} + \dots + J_1t + J_0) = (t^n + \\ &a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0)I \Leftrightarrow J_{n-1}t^n + (J_{n-2} - AJ_{n-1})t^{n-1} + (J_{n-3} - AJ_{n-2})t^{n-2} + \dots + \\ &(J_0 - AJ_1)t + (-AJ_0) = It^n + a_{n-1}It^{n-1} + \dots + a_1It + a_0I. \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes das potências de t :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{n-1} = I \\ J_{n-2} - AJ_{n-1} = a_{n-1}I \\ J_{n-3} - AJ_{n-2} = a_{n-2}I \\ \vdots \\ J_0 - AJ_1 = a_1I \\ -AJ_0 = a_0I \end{array} \right.$$

Multiplicando as equações por $A^n, A^{n-1}, \dots, A, I$, respectivamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} A^n J_{n-1} = A^n \\ A^{n-1} J_{n-2} - A^n J_{n-1} = a_{n-1} A^{n-1} \\ A^{n-2} J_{n-3} - A^{n-1} J_{n-2} = a_{n-2} A^{n-2} \\ \vdots \\ AJ_0 - A^2 J_1 = a_1 A \\ -AJ_0 = a_0 I \end{array} \right.$$

Enfim, somando as equações matriciais, chegamos a $0 = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I$, ou seja, $p_A(A) = 0$.

■

Corolário B.1 *Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz inversível. Então a inversa de A é um polinômio em A .*

Demonstração: Seja $\det(tI - A) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0$ o polinômio característico de A . Avaliando-no em $t=0$, obtemos $a_0 = \det(-A) = (-1)^n \det(A) \neq 0$, pois A é inversível. Agora, usando o teorema de Cayley-Hamilton, segue que $A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0$. Portanto, $(-1)^{n+1} \det(A)I = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A$, ou seja, $I = A \frac{(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_2A + a_1I)}{(-1)^{n+1} \det(A)}$. Logo,

$$A^{-1} = \frac{A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_2A + a_1I}{(-1)^{n+1} \det(A)}.$$

■

Apêndice C

Fórmula de Somatório de Euler-Maclaurin: aplicação de números de Bernoulli

Nesta seção, expomos uma aplicação importante dos polinômios e números de Bernoulli (seção 3.2) em Análise Numérica. Eles estão ligados ao erro gerado pelo cálculo da integral de uma função pelo método do trapézio repetido. Tal erro aparece na conhecida Fórmula de Somatório de Euler-Maclaurin.

Primeiramente, revisemos o método do trapézio de integração numérica: dada $f \in C[a, b]$, aproximamos sua integral pela área do trapézio com bases $f(a)$ e $f(b)$ e altura $b - a$ (como na Figura C.1):

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b - a) \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} \right].$$

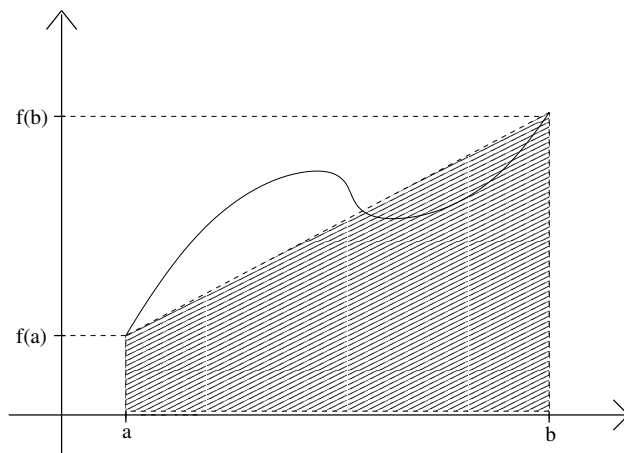


Figura C.1: Aproximação da integral de uma função pelo método do trapézio.

Tal aproximação pode não ser tão boa quanto a desejada. Nestes casos, pode ser aplicado o método do trapézio repetido: divide-se o intervalo $[a, b]$ em N subintervalos

iguais, cada um destes com comprimento $h = \frac{b-a}{N}$, e aplica-se o método do trapézio para cada subintervalo (veja a Figura C.2). A aproximação para $\int_a^b f(x)dx$ será, portanto:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left[\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + \dots + f(b-h) + \frac{f(b)}{2} \right] =: T(h)$$

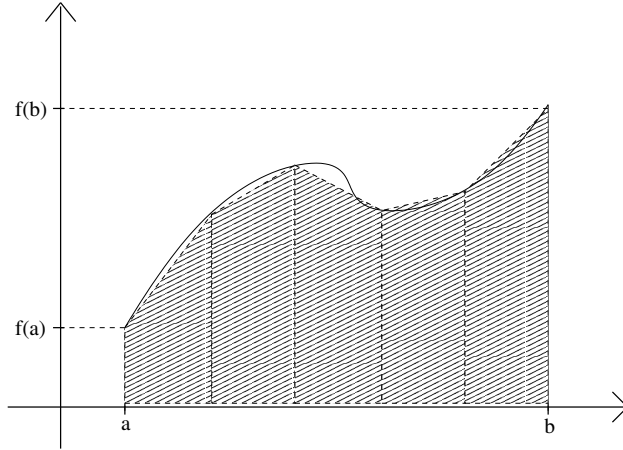


Figura C.2: Aproximação da integral de uma função pelo método do trapézio repetido com o intervalo $[a,b]$ dividido em 5 subintervalos.

Agora considere uma função $g \in C^{2m+2}[0, 1]$. Note que:

$$\int_0^1 g(t)dt = \int_0^1 1 \cdot g(t)dt = \int_0^1 B_1'(t)g(t)dt.$$

Da integração por partes, segue que:

$$\int_0^1 g(t)dt = [B_1(t)g(t)]_0^1 - \int_0^1 B_1(t)g'(t)dt.$$

Mas $B_1 = t - \frac{1}{2}$ e $B_k'(t) = kB_{k-1}(t)$, para $k > 0$. Logo:

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(t)dt &= \frac{g(0) + g(1)}{2} - \int_0^1 \frac{1}{2}B_2'(t)g'(t)dt = \frac{g(0) + g(1)}{2} - \left[\frac{1}{2}B_2(t)g'(t) \right]_0^1 + \\ &+ \int_0^1 \frac{1}{2}B_2(t)g''(t)dt = \frac{g(0) + g(1)}{2} - \left[\frac{1}{2}B_2(t)g'(t) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{3!}B_3'(t)g''(t)dt = \\ &\frac{g(0) + g(1)}{2} - \left[\frac{1}{2}B_2(t)g'(t) \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3!}B_3(t)g''(t) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3!}B_3(t)g'''(t)dt \end{aligned}$$

Desta forma, os números de Bernoulli aparecem no cálculo de integrais definidas. Note que temos que avaliar os polinômios de Bernoulli em $t = 1$. Mas, felizmente, pela Afirmção 3.6, sabemos que

$$(-1)^k B_k(1-t) = B_k(t).$$

Então conhecemos $B_k(1)$ pela definição dos números de Bernoulli ($B_k(0)$). Lembrando que os números de Bernoulli de índice ímpar maior que 1 são iguais a zero temos, para algum m natural:

$$\int_0^1 g(t)dt = \frac{g(0) + g(1)}{2} + \sum_{l=1}^m \frac{B_{2l}}{(2l)!} [g^{(2l-1)}(0) - g^{(2l-1)}(1)] + r_{m+1},$$

em que $r_{m+1} = -\frac{1}{(2m+1)!} \int_0^1 B_{2m+1}(t)g^{(2m+1)}(t)dt$.

Analisemos a integral deste termo restante:

$$\begin{aligned} \int_0^1 B_{2m+1}(t)g^{(2m+1)}(t)dt &= \int_0^1 \frac{B'_{2m+2}(t)}{2m+2} g^{(2m+1)}(t)dt = \\ &= \left[\frac{1}{2m+2} B_{2m+2}(t)g^{(2m+1)}(t) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{B_{2m+2}(t)}{2m+2} g^{(2m+2)}(t)dt \end{aligned}$$

Agora, $\int_0^1 \frac{B_{2m+2}(0)}{2m+2} g^{(2m+2)}(t)dt = \frac{B_{2m+2}(0)}{2m+2} [g^{(2m+1)}(1) - g^{(2m+1)}(0)]$ e, logo,

$$\begin{aligned} \int_0^1 B_{2m+1}(t)g^{(2m+1)}(t)dt &= \left[\frac{1}{2m+2} (B_{2m+2}(t) - B_{2m+2}(0))g^{(2m+1)}(t) \right]_0^1 - \\ &\quad - \int_0^1 \frac{1}{2m+2} (B_{2m+2}(t) - B_{2m+2}(0))g^{(2m+2)}(t)dt \end{aligned}$$

Mas, $B_{2m+2}(1) = B_{2m+2}(0)$ e, portanto,

$$r_{m+1} = \frac{1}{(2m+2)!} \int_0^1 [B_{2m+2}(t) - B_{2m+2}]g^{(2m+2)}(t)dt$$

A fim de simplificar tal termo, usaremos o teorema do valor médio para integrais e, para isto, teremos que provar que $B_{2m+2}(t) - B_{2m+2}$ não troca de sinal em $[0, 1]$.

Lema C.1 $\forall m \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} (-1)^m B_{2m-1} > 0 & , \text{ para } 0 < t < \frac{1}{2}. \\ (-1)^m (B_{2m}(t) - B_{2m}) > 0 & , \text{ para } 0 < t < 1. \\ (-1)^{m+1} B_{2m} > 0. \end{cases}$

Demonstração: Faremos a prova por indução:

• $m = 1$: $(-1)^1 B_1(t) > 0$, o que é verdadeiro para $0 < t < \frac{1}{2}$, pois $B_1(t) = t - \frac{1}{2}$.

Suponha que, para $m \geq 1$, $(-1)^m B_{2m-1}(t) > 0$, para todo $t \in (0, \frac{1}{2})$. Então

$$0 < (-1)^m \int_0^t B_{2m-1}(x)dx = \frac{(-1)^m}{2m} \int_0^t \frac{d}{dx} [B_{2m}(x) - B_{2m}]dx = \frac{(-1)^m}{2m} [B_{2m}(t) - B_{2m}],$$

$\forall t \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$. Pela Afirmção 3.6, para índices pares, $B_k(t)$ é simétrico em relação à reta

$t = \frac{1}{2}$. Então, para $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, $\frac{(-1)^m}{2m} [B_{2m}(t) - B_{2m}] = \frac{(-1)^m}{2m} [B_{2m}(1-t) - B_{2m}] = \frac{(-1)^m}{2m} [B_{2m}(x) - B_{2m}]$, para $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$. Logo, $(-1)^m [B_{2m}(t) - B_{2m}] > 0$, $\forall t \in (0, 1)$.

Ainda, como $\int_0^1 B_{2m}(t)dt = 0$ então $(-1)^{m+1}B_{2m} = (-1)^m \left[\int_0^1 B_{2m}(t)dt - \int_0^1 B_{2m}dt \right] = (-1)^m \int_0^1 B_{2m}(t) - B_{2m}dt$ que é, conseqüentemente, maior que zero.

Portanto, acabamos de mostrar que, se tivermos $(-1)^m B_{2m-1}(t) > 0$, para $t \in (0, \frac{1}{2})$, conseguimos as outras desigualdades. Logo, basta provarmos que $(-1)^{m+1} B_{2(m+1)-1}(t) > 0$, para $t \in (0, \frac{1}{2})$.

Pela Afirmção 3.6, para índices ímpares, $B_k(\frac{1}{2}) = 0$ e sabemos também que $B_k(0) = 0$. Suponha, por absurdo, que $B_{2m+1}(t)$ troca de sinal em $(0, \frac{1}{2})$. Então há um ponto de inflexão neste intervalo, isto é,

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} B_{2m+1}(t) \right|_{t=t_0} = 0, \text{ para algum } t_0 \in (0, \frac{1}{2})$$

Mas, $\left. \frac{d^2}{dt^2} B_{2m+1}(t) \right|_{t=t_0} = (2m+1)2m B_{2m-1}(t_0)$, ou seja, $B_{2m-1}(t_0) = 0$, para algum $t_0 \in (0, \frac{1}{2})$, o que contraria a hipótese de indução. Logo, $B_{2m+1}(t)$ não troca de sinal em $(0, \frac{1}{2})$.

Além disso, seu sinal será o mesmo de $\frac{d}{dt} B_{2m+1}(t)$, em $t = 0$, pois, como $B_{2m+1}(0) = 0$, se a derivada for negativa, $B_{2m+1}(t)$ será decrescente em $t = 0$ e se tornará negativo e, da mesma forma, se a derivada for positiva, $B_{2m+1}(t)$ será positivo em $(0, \frac{1}{2})$.

Agora, $\left. \frac{d}{dt} B_{2m+1}(t) \right|_{t=0} = (2m+1)B_{2m}(0) = (2m+1)B_{2m}$. Como $(-1)^{m+1} B_{2m} > 0$, temos que $(-1)^{m+1} B_{2m+1}(t) > 0, \forall t \in (0, \frac{1}{2})$.

■

Teorema C.1 (*Teorema do valor médio para integrais*): *Suponha que g é contínua em $[a, b]$ e que f é integrável e não-negativa em $[a, b]$. Então*

$$\int_a^b g(t)f(t)dt = g(\xi) \int_a^b f(t)dt,$$

para algum $\xi \in [a, b]$.

Demonstração: Como g é contínua no intervalo compacto $[a, b]$, ela admite máximo e mínimo neste intervalo. Por f ser não-negativa, segue que

$$\left[\min_{t \in [a, b]} g(t) \right] \cdot f(t) \leq g(t)f(t) \leq \left[\max_{t \in [a, b]} g(t) \right] \cdot f(t), \forall t \in [a, b].$$

e, então,

$$\left[\min_{t \in [a, b]} g(t) \right] \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)f(t)dt \leq \left[\max_{t \in [a, b]} g(t) \right] \int_a^b f(t)dt$$

Logo, existe $\xi \in [a, b]$ tal que $\int_a^b g(t)f(t)dt = g(\xi) \int_a^b f(t)dt$.

■

Corolário C.1 *Suponha que g é contínua em $[a, b]$, que f é integrável e não troca de sinal em $[a, b]$. Então*

$$\int_a^b g(t)f(t)dt = g(\xi) \int_a^b f(t)dt,$$

para algum $\xi \in [a, b]$.

Demonstração: Se f é não-negativa, já está demonstrado.

Agora, se f é não positiva em $[a, b]$, $-f$ será não negativa e, pelo Teorema C.1,

$$\int_a^b g(t)f(t)dt = - \left(\int_a^b g(t)(-f(t))dt \right) = -g(\xi) \int_a^b -f(t)dt = g(\xi) \int_a^b f(t)dt,$$

para algum $\xi \in [a, b]$.

■

Voltando à discussão sobre a fórmula de somatório de Euler-Maclaurin, temos que

$$\int_0^1 g(t)dt = \frac{g(0) + g(1)}{2} + \sum_{l=1}^m \frac{B_{2l}}{(2l)!} [g^{(2l-1)}(0) - g^{(2l-1)}(1)] + r_{m+1},$$

em que $r_{m+1} = -\frac{1}{(2m+2)!} \int_0^1 [B_{2m+2}(t) - B_{2m+2}]g^{(2m+2)}(t)dt$.

Mas, como $B_{2m+2}(t) - B_{2m+2}$ não troca de sinal em $[0, 1]$, podemos aplicar o corolário anterior:

$$\begin{aligned} r_{m+1} &= \frac{1}{(2m+2)!} g^{(2m+2)}(\xi) \int_0^1 [B_{2m+2}(t) - B_{2m+2}]dt = \\ &= \frac{g^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!} \left[\int_0^1 B_{2m+2}(t)dt - tB_{2m+2} \Big|_0^1 \right] = -\frac{g^{(2m+2)}(\xi)B_{2m+2}}{(2m+2)!} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^1 g(t)dt = \frac{g(0) + g(1)}{2} + \sum_{l=1}^m \frac{B_{2l}}{(2l)!} (g^{(2l-1)}(0) - g^{(2l-1)}(1)) - \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} g^{(2m+2)}(\xi),$$

para algum $\xi \in [0, 1]$.

Esta é a *Fórmula de Somatório de Euler-Maclaurin* para o intervalo $[0, 1]$. Para um intervalo do tipo $[0, N]$, $N \in \mathbb{N}$, basta notar que $\int_0^N g(t)dt = \int_0^1 g(t)dt + \int_1^2 g(t)dt + \dots + \int_{N-1}^N g(t)dt$ e aplicar o mesmo raciocínio que obteremos:

$$\frac{1}{2}g(0) + g(1) + \dots + g(N-1) + \frac{1}{2}g(N) =$$

$$= \int_0^N g(t)dt + \sum_{l=1}^m \frac{B_{2l}}{(2l)!} (g^{(2l-1)}(N) - g^{(2l-1)}(0)) + \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} \left(\sum_{i=1}^N g^{(2m+2)}(\xi_i) \right), (\star)$$

em que ξ_i é algum ponto do intervalo $[i-1, i]$.

Para conectarmos tal fórmula com a regra do trapézio, fazemos a seguinte mudança de coordenadas:

$$[0, N] \rightarrow [a, b] : t \mapsto a + ht, h = \frac{b-a}{N}, dx = hdt, \int_0^N g(t)dt = \int_a^b f(x) \frac{1}{h} dx.$$

As derivadas de $g(t)$ em (\star) podem ser reescritas em termos de $f(x)$ se observarmos que $g(t) = f(a + ht) = f(x)$ e aplicarmos a regra da cadeia:

$$g'(t) = hf'(x), \text{ e } \forall l : g^{(l)}(t) = h^l f^{(l)}(x).$$

E, fazendo as devidas substituições, (\star) se torna:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}f(a) + f(a+h) + \dots + f(b-h) + \frac{1}{2}f(b) = \int_a^b f(x) \frac{1}{h} dx + \\ & + \sum_{l=1}^m \frac{B_{2l}}{(2l)!} h^{2l-1} (f^{(2l-1)}(b) - f^{(2l-1)}(a)) + \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} h^{2m+2} \left(\sum_{i=1}^N f^{(2m+2)}(\beta_i) \right), \beta_i \in [a+(i-1)h, a+ih]. \end{aligned}$$

Enfim, multiplicando tudo por h , obtemos o erro do método de integração do trapézio repetido:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx \approx T(h) &= \int_a^b f(x)dx + \sum_{l=1}^m \frac{B_{2l}}{(2l)!} h^{2l} (f^{(2l-1)}(b) - f^{(2l-1)}(a)) + \\ &+ \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} h^{2m+3} \left(\sum_{i=1}^N f^{(2m+2)}(\beta_i) \right), \beta_i \in [a+(i-1)h, a+ih]. \end{aligned}$$

Apêndice D

Transformada Rápida de Fourier de Ordem Qualquer

Este apêndice visa complementar o Capítulo 4, no qual a Transformada Rápida de Fourier (FFT) foi fundamental para desenvolvermos algoritmos rápidos para resolver problemas envolvendo a matriz de Pascal.

Textos em matemática aplicada normalmente abordam a FFT para os casos em que a dimensão da matriz é uma potência de 2. Neste apêndice iremos além, mostrando como a Transformada é formulada para matrizes de Fourier de dimensão qualquer.

D.1 Definição

Dado $x \in \mathbb{C}^N$, $x = \left(x(0) \ \dots \ x(N-1) \right)$ sua *transformada discreta de Fourier* é dada por

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-2\pi i n \frac{k}{N}}, \quad (\text{D.1})$$

$n = 0, \dots, N-1$. Em geral, a computação dos dados acima é muito pesada. Para diminuir o custo computacional, apresentamos, a seguir, o algoritmo conhecido como *transformada rápida de Fourier* (FFT - *fast Fourier transform*), desenvolvido por Cooley e Tukey, em 1965.

D.2 Formulação Matricial

Denotemos, na equação (D.1), $x(k) = x_0(k)$ e $e^{-\frac{2\pi i}{N}} = W$. Então, (1) se torna

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_0(k)W^{nk}, \quad (\text{D.2})$$

$n = 0, \dots, N - 1$. Para o caso $N = 4$, por exemplo, é possível reescrever a expressão acima matricialmente:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

Examinando esta igualdade, notamos que, a princípio, são necessárias N^2 multiplicações e $N(N - 1)$ adições complexas para obtermos $X(n)$. O algoritmo FFT é famoso por reduzir substancialmente esta quantidade de operações.

Com $N = 4$, pela identidade de números complexos $W^{nk} = W^{nk(\text{mod } n)}$, reescrevemos (D.3) como

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^0 & W^2 \\ 1 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (\text{D.4})$$

O próximo passo é fatorar a matriz quadrada em (D.4) em duas outras matrizes:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ \mathbf{X}(2) \\ \mathbf{X}(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (\text{D.5})$$

A justificativa teórica para esta fatoração será dada mais adiante. Agora, é importante notarmos apenas que o produto das matrizes em (D.5) resulta na matriz em (D.4), exceto pelas linhas 1 e 2 (as linhas estão numeradas de 0 a 3), que estão trocadas entre si. O resultado final com as linhas trocadas denotaremos por

$$\overline{X(n)} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix}.$$

Examinaremos agora o número de multiplicações e adições necessárias para computar $\overline{X(n)}$. Primeiramente, seja

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (\text{D.6})$$

(o primeiro produto matriz-vetor em (D.6)).

Para computar $x_1(0) = x_0(0) + W^0 x_0(2)$ são necessárias uma multiplicação e uma adição complexas (W^0 não está escrito como 1, com o objetivo de desenvolvermos um resultado geral). $x_1(1)$ precisa da mesma quantidade de operações do que $x_1(0)$. Para computar $x_1(2)$, é preciso efetuar apenas uma adição complexa pois, como $W^0 = -W^2$,

$$x_1(2) = x_0(0) + W^2 x_0(2) = x_0(0) - W^0 x_0(2),$$

e o produto $W^0 x_0(2)$ já foi efetuado no cálculo de $x_1(0)$. Pela mesma razão, $x_1(3)$ é determinado por apenas uma adição complexa.

Agora, pela equação (D.5), temos que efetuar mais um produto matriz-vetor:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_2(1) \\ x_2(2) \\ x_2(3) \end{bmatrix} \quad (\text{D.7})$$

$x_2(0)$ é determinado por uma adição e uma multiplicação complexas:

$$x_2(0) = x_1(0) + W^0 x_1(1).$$

$x_2(1)$ é computado por apenas uma adição, pois $W^0 = -W^2$. Por razão similar, $x_2(2)$ por uma multiplicação e uma adição e $x_2(3)$ por uma adição.

Portanto, para o caso $N = 4$, pela FFT foram necessárias 4 multiplicações e 8 adições complexas enquanto, pela equação (D.3), seriam necessárias 16 multiplicações e 12 adições complexas. Isso se deve, principalmente, ao fato de a fatoração matricial em (D.6) envolver matrizes com muitos zeros.

De forma um pouco mais geral, para $N = 2^\gamma$, $\gamma \in \mathbb{N}$, o algoritmo FFT consiste em, simplesmente, fatorar uma matriz $N \times N$ em γ matrizes, cada uma $N \times N$, de forma a reduzir o número de operações. Se estendermos o resultado do exemplo anterior ($N = 4$) para o caso geral, a FFT vai requerer $\frac{N\gamma}{2} = 4$ multiplicações e $N\gamma = 8$ adições complexas, enquanto o método direto precisará computar N^2 multiplicações e $N(N - 1)$ adições complexas.

Se assumirmos que o custo computacional é proporcional à quantidade de multiplicações, a razão de custo computacional entre o método direto e a FFT é de

$$\frac{N^2}{\frac{N\gamma}{2}} = \frac{2N}{\gamma}.$$

Só há um pequeno problema no processo que acabamos de descrever: obtemos $\overline{X(n)} =$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} \text{ em vez de } \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = X(n). \text{ Para resolvermos isto, escrevemos os argumentos}$$

0, 1, 2 e 3 em notação binária e depois invertemos os dígitos:

$$\overline{X(n)} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(00) \\ X(10) \\ X(01) \\ X(11) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} X(00) \\ X(01) \\ X(10) \\ X(11) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = X(n).$$

Veremos, mais adiante, que esta inversão de bits funciona no caso geral.

D.3 Grafo de Fluxo de Sinais

Convertemos o processo descrito anteriormente em um grafo. Representamos o vetor de dados de coordenadas $x_0(k)$ em uma coluna de nós no lado esquerdo do grafo. A segunda coluna do grafo será as entradas $x_1(k)$ e a terceira coluna será $x_2(k)$.

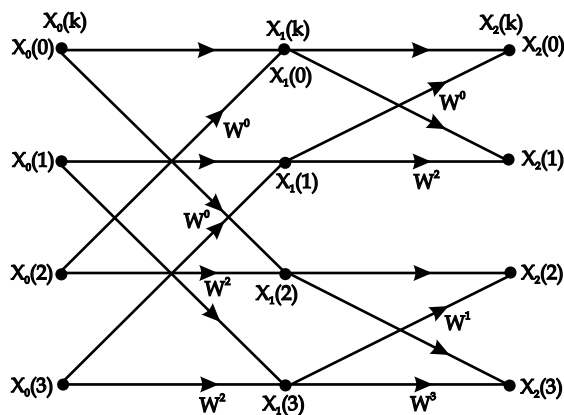


Figura D.1: Grafo de fluxo de sinais para o caso $N = 4$

O grafo deve ser interpretado da seguinte forma: cada nó recebe duas *linhas de transmissão* de nós anteriores. Essas linhas transmitem a informação do nó anterior multiplicada pelo fator W^p , indicado abaixo das setas. As linhas que não tiverem indicado W^p devemos assumir que o dado é multiplicado por 1. Os dados de cada linha de transmissão são combinados aditivamente no nó que vai as receber.

Para ilustrar, analisemos o nó $x_1(2)$. Ele recebe as linhas vindas de $x_0(0)$ e de $x_0(2)$, esta última multiplicada por W^2 :

$$x_1(2) = x_0(0) + W^2 x_0(2)$$

que era o que tínhamos obtido anteriormente.

O grafo de fluxo de sinais é um método conciso de descrever as operações necessárias para computar a FFT de um conjunto de dados.

D.4 Desenvolvimento teórico da FFT para o caso $N = 2^\gamma$

Nas seções anteriores, desenvolvemos, sem muito rigor, o algoritmo FFT (com $N = 4$) para computar rapidamente a transformada discreta de Fourier de um conjunto de dados. Agora, daremos um suporte teórico para tal método. Começaremos com os casos $N = 4$ e $N = 8$, para haver uma familiarização com a notação que usaremos para a obtenção do algoritmo para $N = 2^\gamma$.

Consideremos a transformada discreta de Fourier dada pela equação (D.2):

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_0(k)W^{nk} \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (\text{D.8})$$

em que $W = e^{\frac{-2\pi i}{N}}$. Vamos representar os inteiros n e k em notação binária. Quando $N = 4$ ($\gamma = 2$),

$$k = 0, 1, 2, 3 \longrightarrow k = (k_1, k_0) = 00, 01, 10, 11$$

$$n = 0, 1, 2, 3 \longrightarrow n = (n_1, n_0) = 00, 01, 10, 11$$

Uma forma de representar k e n em função de suas representações binárias é:

$$k = 2k_1 + k_0, n = 2n_1 + n_0, \quad (\text{D.9})$$

em que k_0, k_1, n_0 e n_1 podem assumir valores 0 e 1.

Usando a identidades em (D.9) podemos reescrever (D.8), para o caso $N = 4$, como

$$X(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0)W^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)} \quad (\text{D.10})$$

Notemos que o único somatório em (D.8) foi substituído por $\gamma = 2$ somatórios em (D.10).

O termo $W^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)}$ pode ser simplificado:

$$\begin{aligned} W^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)} &= W^{(2n_1+n_0)2k_1} W^{(2n_1+n_0)k_0} = \\ &= [W^{4n_1k_1}]W^{2n_0k_1} W^{(2n_1+n_0)k_0} = W^{2n_0k_1} W^{(2n_1+n_0)k_0}, \end{aligned}$$

pois $W^{4n_1k_1} = [(e^{\frac{-2\pi i}{4}})^4]^{n_1k_1} = [1]^{n_1k_1} = 1$.

Portanto, (D.10) pode ser reescrita:

$$X(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \left[\sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0)W^{2n_0k_1} \right] W^{(2n_1+n_0)k_0} \quad (\text{D.11})$$

Esta última equação é a fundamentação para o algoritmo FFT . Consideremos cada um dos somatórios separadamente. Primeiro, reescrevemos o somatório entre colchetes:

$$x_1(n_0, k_0) = \sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0) W^{2n_0 k_1} \quad (\text{D.12})$$

Notemos que (D.12) representa 4 equações, pois n_0 e k_0 assumem valores 0 e 1. Separando cada equação, temos:

$$\begin{aligned} x_1(0, 0) &= x_0(0, 0) + x_0(1, 0)W^0 \\ x_1(0, 1) &= x_0(0, 1) + x_0(1, 1)W^0 \\ x_1(1, 0) &= x_0(0, 0) + x_0(1, 0)W^2 \\ x_1(1, 1) &= x_0(0, 1) + x_0(1, 1)W^2 \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

As equações acima podem ser escritas de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1(0, 0) \\ x_1(0, 1) \\ x_1(1, 0) \\ x_1(1, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0, 0) \\ x_0(0, 1) \\ x_0(1, 0) \\ x_0(1, 1) \end{bmatrix} \quad (\text{D.14})$$

Esta igualdade é a mesma que em (D.6), com 0, 1, 2, 3 escritos em notação binária. Similarmente, se escrevermos a soma externa em (D.11) como

$$x_2(n_0, n_1) = \sum_{k_0=0}^1 x_1(n_0, k_0) W^{(2n_1+n_0)k_0} \quad (\text{D.15})$$

e colocá-la na forma matricial, teremos

$$\begin{bmatrix} x_2(0, 0) \\ x_2(0, 1) \\ x_2(1, 0) \\ x_2(1, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0, 0) \\ x_1(0, 1) \\ x_1(1, 0) \\ x_1(1, 1) \end{bmatrix} \quad (\text{D.16})$$

que, a propósito, é a mesma expressão de (D.7). Pelas equações (D.11), (D.12) e (D.15), concluímos que $X(n_1, n_0) = x_2(n_0, n_1)$ e este resultado final é exatamente o obtido na seção anterior, com o mesmo problema de bits trocados.

As mesmas equações, (D.11), (D.12) e (D.15), representam a formulação original de Cooley-Tukey do algoritmo FFT para $N = 4$.

Analisemos agora o algoritmo para $N = 8 = 2^3$. Neste caso,

$$n = 4n_2 + 2n_1 + n_0, k = 4k_2 + 2k_1 + k_0, \quad (\text{D.17})$$

em que n_i e k_i assumem valores 0 e 1. Neste caso, (D.8) se torna

$$X(n_2, n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 x_0(k_2, k_1, k_0) W^{(4n_2+2n_1+n_0)(4k_2+2k_1+k_0)}. \quad (\text{D.18})$$

Reescrevendo a potência de $W = e^{-\frac{2\pi i}{8}}$, obtemos $W^{(4n_2+2n_1+n_0)(4k_2+2k_1+k_0)} = W^{(4n_2+2n_1+n_0)(4k_2)} W^{(4n_2+2n_1+n_0)(2k_1)} W^{(4n_2+2n_1+n_0)(k_0)}$ e, como $W^8 = 1$,

$$\begin{aligned} W^{(4n_2+2n_1+n_0)(4k_2)} &= [W^{8(2n_2k_2)}][W^{8(n_1k_2)}]W^{4n_0k_2} = W^{4n_0k_2} \\ W^{(4n_2+2n_1+n_0)(2k_1)} &= [W^{8(n_2k_1)}]W^{(2n_1+n_0)(2k_1)} = W^{(2n_1+n_0)(2k_1)}. \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

Então, (D.18) pode ser expressa como

$$X(n_2, n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 x_0(k_2, k_1, k_0) W^{4n_0k_2} W^{2n_1+n_0(2k_1)} W^{(4n_2+2n_1+n_0)(k_0)} \quad (\text{D.20})$$

Definindo

$$x_1(n_0, k_1, k_0) = \sum_{k_2=0}^1 x_0(k_2, k_1, k_0) W^{4n_0k_2}, \quad (\text{D.21})$$

$$x_2(n_0, n_1, k_0) = \sum_{k_1=0}^1 x_1(n_0, k_1, k_0) W^{(2n_1+n_0)(2k_1)}, \quad (\text{D.22})$$

$$x_3(n_0, n_1, n_2) = \sum_{k_0=0}^1 x_2(n_0, n_1, k_0) W^{(4n_2+2n_1+n_0)(k_0)}, \quad (\text{D.23})$$

$$X(n_2, n_1, n_0) = x_3(n_0, n_1, n_2), \quad (\text{D.24})$$

podemos explicitar a fatoração matricial para o caso $N = 8$. Em vez disso, expomos a seguir o grafo de fluxo de sinais, para este caso:

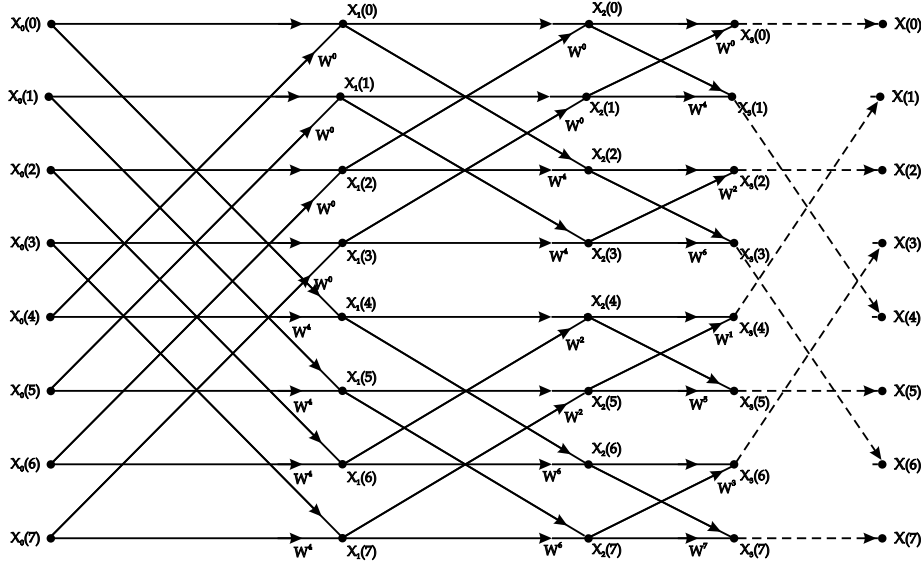


Figura D.2: Grafo de fluxo de sinais para o caso $N = 8$, em que a última coluna consiste na inversão de bits descrita anteriormente.

Analisemos agora o caso geral para potências de 2: 2^γ , $\gamma \in \mathbb{N}$. Neste caso, n e k podem ser representados como

$$\begin{aligned} n &= 2^{\gamma-1}n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2}n_{\gamma-2} + \dots + 2n_1 + n_0, \\ k &= 2^{\gamma-1}k_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2}k_{\gamma-2} + \dots + 2k_1 + k_0, \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

em que n_i, k_i assumem 0 ou 1, $i = 0, \dots, n-1$.

Com esta representação, reescrevemos (D.8) como

$$X(n_{\gamma-1}, n_{\gamma-2}, \dots, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \dots \sum_{k_{\gamma-1}=0}^1 x(k_{\gamma-1}, k_{\gamma-2}, \dots, k_0) W^p, \quad (\text{D.26})$$

em que $p = (2^{\gamma-1}n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2}n_{\gamma-2} + \dots + n_0)(2^{\gamma-1}k_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2}k_{\gamma-2} + \dots + k_0)$. Além disso,

$$\begin{aligned} W^p &= W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2}n_{\gamma-2} + \dots + n_0)(2^{\gamma-1}k_{\gamma-1})} W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2}n_{\gamma-2} + \dots + n_0)(2^{\gamma-2}k_{\gamma-2})} \dots \\ &\dots W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2}n_{\gamma-2} + \dots + n_0)(k_0)}. \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

Consideremos o primeiro termo em (D.27):

$$\begin{aligned} W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2}n_{\gamma-2} + \dots + n_0)(2^{\gamma-1}k_{\gamma-1})} &= [W^{2^\gamma(2^{\gamma-2}n_{\gamma-1}k_{\gamma-1})}] [W^{2^\gamma(2^{\gamma-3}n_{\gamma-2}k_{\gamma-1})}] \dots \\ &\dots [W^{2^\gamma(n_1k_{\gamma-1})}] [W^{2^{\gamma-1}(n_0k_{\gamma-1})}] = [W^{2^{\gamma-1}(n_0k_{\gamma-1})}], \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

pois $W^{2^\gamma} = W^N = (e^{\frac{-2\pi i}{N}})^N = 1$.

Da mesma forma, o segundo termo em (D.27) se torna

$$\begin{aligned} W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2}n_{\gamma-2} + \dots + n_0)(2^{\gamma-2}k_{\gamma-2})} &= [W^{2^\gamma(2^{\gamma-3}n_{\gamma-1}k_{\gamma-2})}] [W^{2^\gamma(2^{\gamma-4}n_{\gamma-2}k_{\gamma-2})}] \dots \\ &\dots [W^{2^{\gamma-1}(n_1k_{\gamma-2})}] [W^{2^{\gamma-2}(n_0k_{\gamma-2})}] = W^{(2n_1+n_0)2^{\gamma-2}k_{\gamma-2}}. \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$

Notemos que, conforme vamos avançando nos termos em (D.27), vai restando mais um fator que não se cancela pela condição $W^{2^\gamma} = 1$. O processo continua até o último termo, o qual não possui nenhum cancelamento. Portanto, reescrevemos (D.26) como

$$\begin{aligned} X(n_{\gamma-1}, n_{\gamma-2}, \dots, n_0) &= \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \dots \sum_{k_{\gamma-1}=0}^1 x_0(k_{\gamma-1}, k_{\gamma-2}, \dots, k_0) W^{2^{\gamma-1}(n_0k_{\gamma-1})} \\ &\dots W^{(2n_1+n_0)2^{\gamma-2}k_{\gamma-2}} \dots W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2}n_{\gamma-2} + \dots + n_0)k_0}. \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

Separando os somatórios e nomeando cada um deles, temos

$$\begin{aligned} x_1(n_0, k_{\gamma-2}, \dots, k_0) &= \sum_{k_{\gamma-1}=0}^1 x_0(k_{\gamma-1}, k_{\gamma-2}, \dots, k_0) W^{(2^{\gamma-1})(n_0k_{\gamma-1})} \\ x_2(n_0, n_1, k_{\gamma-3}, \dots, k_0) &= \sum_{k_{\gamma-2}=0}^1 x_1(n_0, k_{\gamma-2}, \dots, k_0) W^{(2n_1+n_0)(2^{\gamma-2}k_{\gamma-2})} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (\text{D.31})$$

$$x_\gamma(n_0, n_1, \dots, n_{\gamma-1}) = \sum_{k_0=0}^1 x_{\gamma-1}(n_0, n_1, \dots, k_0) W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2}n_{\gamma-2} + \dots + n_0)(k_0)}$$

$$X(n_{\gamma-1}, n_{\gamma-2}, \dots, n_0) = x_\gamma(n_0, n_1, \dots, n_{\gamma-1}).$$

Este conjunto de equações representa a formulação original de Cooley-Tukey para a FFT com $N = 2^\gamma$. Vejamos quantas operações são necessárias para computar as igualdades em (D.31). Analisemos a primeira equação: $x_1(n_0, k_{\gamma-2}, \dots, k_0) = x_0(k_{\gamma-1}, k_{\gamma-2}, \dots, k_0)$.

$\cdot \underbrace{W^{(2^{\gamma-1})(n_0 \cdot 0)}}_1 + x_0(k_{\gamma-1}, k_{\gamma-2}, \dots, k_0) W^{2^{\gamma-1}n_0} = x_0(k_{\gamma-1}, k_{\gamma-2}, \dots, k_0) + x_0(k_{\gamma-1}, k_{\gamma-2}, \dots, k_0) \cdot W^{2^{\gamma-1}n_0}$. Esta representa, na verdade, $N = 2^\gamma$ equações, pois $n_0, k_{\gamma-2}, \dots, k_0$ assumem, cada um, os valores 0 e 1. Como pode-se perceber, cada $x_1(n_0, k_{\gamma-1}, \dots, k_0)$ será dado por uma multiplicação e uma adição complexas. Então, a princípio, $x_1(n_0, k_{\gamma-1}, \dots, k_0)$ será computado com N multiplicações e N adições. Como todas as outras equações são computadas da mesma forma, podemos concluir que o conjunto de equações em (D.31) precisará de $N\gamma$ adições e $N\gamma$ multiplicações para serem computadas.

O número de multiplicações ainda pode ser reduzido: considerando a identidade complexa $W^{p+\frac{N}{2}} = W^p W^{\frac{N}{2}} = W^p (e^{-\frac{2\pi i}{N}})^{\frac{N}{2}} = W^p e^{-\pi i} = W^p (\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)) = W^{-p}$, podemos reduzir pela metade a quantidade de multiplicações complexas, como fizemos na abordagem matricial para o caso $N = 4$.

Portanto, para computar a FFT de um vetor, são necessárias um total de $\frac{N\gamma}{2} + N\gamma = \frac{N \log_2 N}{2} + N \log_2 N$ operações.

D.5 FFT para $N = r_1 r_2$

Na seção anterior, desenvolvemos o algoritmo de Cooley-Tukey para $N = 2^\gamma$, em que $\gamma \in \mathbb{N}$. A exigência de N ser desta forma pode ser muito restritiva. Por tal motivo, analisaremos o caso para $N = r_1 r_2 \dots r_m$ qualquer. Para nos familiarizarmos com a notação, começaremos com $N = r_1 r_2$. Por um lema que será demonstrado para o caso geral, na próxima seção, podemos escrever os índices n e k em (D.7) como

$$n = n_1 r_1 + n_0, n_0 = 0, 1, \dots, r_1 - 1, n_1 = 0, 1, \dots, r_2 - 1;$$

$$k = k_1 r_2 + k_0, k_0 = 0, 1, \dots, r_2 - 1, k_1 = 0, 1, \dots, r_1 - 1.$$

Com estas notações, reescrevemos (D.8) como

$$X(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^{r_2-1} \left[\sum_{k_1=0}^{r_1-1} x_0(k_1, k_0) W^{nk_1 r_2} \right] W^{nk_0}. \quad (\text{D.32})$$

Mas $W^{nk_1 r_2}$ pode ser simplificado:

$$W^{nk_1 r_2} = W^{(n_1 r_1 + n_0) k_1 r_2} = W^{n_1 r_1 k_1 r_2} W^{n_0 k_1 r_2} = [W^{r_1 r_2}]^{n_1 k_1} W^{n_0 k_1 r_2} = W^{n_0 k_1 r_2}, \quad (\text{D.33})$$

pois $W^{r_1 r_2} = W^N = 1$.

Substituindo (D.33) em (D.32), separando e nomeando cada somatório, temos o seguinte

conjunto de equações:

$$\begin{aligned}
x_1(n_0, k_0) &= \sum_{k_1=0}^{r_1-1} x_0(k_1, k_0) W^{n_0 k_1 r_2} \\
x_2(n_0, n_1) &= \sum_{k_0=0}^{r_2-1} x_1(n_0, k_0) W^{(n_1 r_1 + n_0) k_0} \cdot \\
X(n_1, n_0) &= x_2(n_0, n_1)
\end{aligned} \tag{D.34}$$

Como no caso *base 2*, o resultado $x_2(n_0, n_1)$ vem em ordem trocada. O algoritmo FFT para $N = r_1 r_2$ consiste, então, nas 3 relações em (D.34).

Vejamos um exemplo para $N = 16$ em *base 4*, ou seja, $N = 16 = 4 \cdot 4$. Escrevemos as variáveis n e k como

$$\begin{aligned}
n &= 4n_1 + n_0, \quad n_1, n_0 = 0, 1, 2, 3; \\
k &= 4k_1 + k_0, \quad k_1, k_0 = 0, 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{D.35}$$

Então, o conjunto de equações em (D.34) se torna

$$\begin{aligned}
x_1(n_0, k_0) &= \sum_{k_1=0}^3 x_0(k_1, k_0) W^{4n_0 k_1} \\
x_2(n_0, n_1) &= \sum_{k_0=0}^3 x_1(n_0, k_0) W^{(4n_1 + n_0) k_0} \cdot \\
X(n_1, n_0) &= x_2(n_0, n_1)
\end{aligned}$$

D.6 FFT para $N = r_1 r_2 \dots r_m$

Para analisarmos este caso, devemos provar o seguinte lema:

Lema: Seja $N = r_1 r_2 \dots r_m$. Então, dado $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq n < N$, existem n_0, n_1, \dots, n_{m-1} tais que $0 \leq n_0 < r_1, 0 \leq n_1 < r_2, \dots, 0 \leq n_{m-1} < r_m$ e $n = n_{m-1}(r_1 r_2 \dots r_{m-1}) + n_{m-2}(r_1 r_2 \dots r_{m-2}) + \dots + n_1 r_1 + n_0$.

Demonstração: Dividindo n por r_1 , pelo algoritmo de Euclides, existem $q_1, n_0 \in \mathbb{N}$, com $n_0 < r_1$, tais que $n = q_1 r_1 + n_0$. Pelo mesmo argumento, efetuando a divisão de q_1 por r_2 , existem $q_2, n_1 \in \mathbb{N}$, com $n_1 < r_2$ tais que $q_1 = q_2 r_2 + n_1$. Continuando o processo de dividir q_{j-1} por $r_j, j = 3 \dots, m$, obteremos o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned}
n &= q_1 r_1 + n_0, & n_0 < r_1; \\
q_1 &= q_2 r_2 + n_1, & n_1 < r_2; \\
&\vdots \\
q_{m-2} &= q_{m-1} r_{m-1} + n_{m-2}, & n_{m-2} < r_{m-1}; \\
q_{m-1} &= q_m r_m + n_{m-1}, & n_{m-1} < r_m.
\end{aligned}$$

Substituindo cada q_j na equação imediatamente acima, teremos $n = q_m r_m r_{m-1} \dots r_2 r_1 + n_{m-1}(r_1 r_2 \dots r_{m-1}) + n_{m-2}(r_1 r_2 \dots r_{m-2}) + \dots + n_1 r_1 + n_0$. É claro que $q_m = 0$, pois, caso contrário, teríamos $n \geq N$, o que seria absurdo. ■

Segue deste lema que podemos escrever n e k como

$$\begin{aligned} n &= n_{m-1}(r_1 r_2 \dots r_{m-1}) + n_{m-2}(r_2 \dots r_{m-1}) + \dots + n_1 r_1 + n_0 \\ k &= k_{m-1}(r_2 r_3 \dots r_m) + k_{m-2}(r_3 r_4 \dots r_m) + \dots + k_1 r_m + k_0 \end{aligned} \quad (D.36)$$

em que

$$n_{i-1} = 0, 1, \dots, r_i - 1, 1 \leq i \leq m;$$

$$k_i = 0, 1, \dots, r_{m-i} - 1, 0 \leq i \leq m - 1.$$

k foi composto desta forma usando no lema a ordem trocada dos fatores r_i de N , ou seja, $N = r_m r_{m-1} \dots r_2 r_1$.

Agora, reescrevemos (D.8) como

$$X(n_{m-1}, n_{m-2}, \dots, n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^{r_m} \sum_{k_1=0}^{r_{m-1}} \dots \sum_{k_{m-1}=0}^{r_1} x_0(k_{m-1}, k_{m-2}, \dots, k_0) W^{nk}. \quad (D.37)$$

Notemos que

$$W^{nk} = W^{n[k_{m-1}(r_2 r_3 \dots r_m) + \dots + k_0]} \quad (D.38)$$

e o primeiro termo acima se expande em

$$\begin{aligned} W^{nk_{m-1}(r_2 r_3 \dots r_m)} &= W^{[n_{m-1}(r_1 r_2 \dots r_{m-1}) + \dots + n_0][k_{m-1}(r_2 r_3 \dots r_m)]} \\ &= [W^{r_1 r_2 \dots r_m}]^{[n_{m-1}(r_2 r_3 \dots r_{m-1})]k_{m-1}} W^{n_0 k_{m-1}(r_2 \dots r_m)}. \end{aligned} \quad (D.39)$$

Como $W^{r_1 r_2 \dots r_m} = W^N = 1$, (D.39) pode ser reescrita como

$$W^{nk_{m-1}(r_2 r_3 \dots r_m)} = W^{n_0 k_{m-1}(r_2 \dots r_m)}. \quad (D.40)$$

Agora, substituindo (D.40) em (D.35), temos:

$$\begin{aligned} X(n_{m-1}, n_{m-2}, \dots, n_1, n_0) &= \sum_{k_0} \sum_{k_1} \dots \left[\sum_{k_{m-1}} x_0(k_{m-1}, k_{m-2}, \dots, k_0) W^{n_0 k_{m-1}(r_2 \dots r_m)} \right] \times \\ &\times W^{n[k_{m-2}(r_3 \dots r_m) + \dots + k_0]} \end{aligned} \quad (D.41)$$

A soma sobre k_{m-1} é apenas uma função de n_0, k_{m-2}, \dots, k_0 . Portanto, definimos um novo vetor:

$$x_1(n_0, k_{m-2}, \dots, k_0) = \sum_{k_{m-1}} x_0(k_{m-1}, \dots, k_0) W^{n_0 k_{m-1}(r_2 \dots r_m)}. \quad (D.42)$$

Então, (D.41) é reescrita como

$$X(n_{m-1}, n_{m-2}, \dots, n_1, n_0) = \sum_{k_0} \sum_{k_1} \dots \sum_{k_{m-2}} x_1(n_0, k_{m-2}, \dots, k_0) W^{n[k_{m-2}(r_3 \dots r_m) + \dots + k_0]}. \quad (\text{D.43})$$

Por argumentos análogos aos usados para o primeiro termo em (D.38), obtemos

$$W^{nk_{m-2}(r_3 r_4 \dots r_m)} = W^{(n_1 r_1 + n_0) k_{m-2}(r_3 r_4 \dots r_m)}. \quad (\text{D.44})$$

Definindo o vetor

$$x_2(n_0, n_1, k_{m-3}, \dots, k_0) = \sum_{k_{m-2}} x_1(n_0, k_{m-2}, \dots, k_0) W^{(n_1 r_1 + n_0) k_{m-2}(r_3 r_4 \dots r_m)}, \quad (\text{D.45})$$

Reescrevemos (D.43) como

$$X(n_{m-1}, \dots, n_0) = \sum_{k_0} \sum_{k_1} \dots \sum_{k_{m-3}} x_2(n_0, n_1, \dots, k_{m-3}, \dots, k_0) W^{n[k_{m-3}(r_4 r_5 \dots r_m) + \dots + k_0]} \quad (\text{D.46})$$

Se continuarmos reduzindo (D.46) desta forma, obteremos o seguinte conjunto recursivo de equações:

$$x_i(n_0, n_1, \dots, n_{i-1}, k_{m-i-1}, \dots, k_0) = \sum_{k_{m-i}} x_{i-1}(n_0, n_1, \dots, n_{i-2}, k_{m-i}, \dots, k_0) \times \\ \times W^{[n_{i-1}(r_1 r_2 \dots r_{i-1}) + \dots + n_0] k_{m-i}(r_{i+1} \dots r_m)}, \quad (\text{D.47})$$

$i = 1, 2, \dots, m$. Os resultados finais são dados por

$$X(n_{m-1}, \dots, n_0) = x_m(n_0, \dots, n_{m-1}).$$

As expressões em (D.47) são uma extensão de Bergland [3] para o algoritmo de Cooley-Tukey. Lembremos que cada x_i tem N entradas para serem calculadas. Cada entrada de x_1 , por exemplo, precisa de r_1 multiplicações e r_1 adições complexas para serem computados e, portanto, são necessárias Nr_1 multiplicações e Nr_1 adições para computar o vetor x_1 . Assim também acontece com os outros vetores: cada x_i requer Nr_i multiplicações e Nr_i adições para ser computado.

Portanto, o processo que acabamos de descrever precisa de $2N(r_1 + r_2 + \dots + r_m)$ operações para ser efetuado, sem considerar as possíveis simetrias da exponencial $e^{\frac{-2\pi i}{N}} = W$.

A FFT é muito usada em processamento de sinais de acústica e imagens, por exemplo. Além disso, é uma ferramenta importante em Álgebra Linear Computacional, como pudemos perceber no Capítulo 4, ao estudarmos produtos matriz-vetor envolvendo matrizes de Toeplitz.

D.7 A notação O grande

Introduzida em 1894, esta notação é uma ferramenta importante para análise do custo computacional de algoritmos.

Dizemos que $f(N) = O(g(N))$ se existe constante $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(N)| \leq C|g(N)|, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Pelo que vimos, o custo da FFT para o caso $N = 2^\gamma$, em número de operações, é de $f(N) = \frac{3}{2}N \log_2 N$. Logo, este custo é $O(N \log_2 N)$, tomando $C = \frac{3}{2}$ e $g(N) = N \log_2 N$ acima.

Para o caso $N = r_1 r_2 \dots r_m$, este custo depende de r_{\min} e r_{\max} . Para todo N cujo r_{\min} e r_{\max} da decomposição são os mesmos, o custo é da mesma ordem.

Sabemos que este custo é de $2N(r_1 + \dots + r_m)$. Observe que $r_{\min}^m \leq N = r_1 r_2 \dots r_m$ e, portanto, $m \leq \log_{r_{\min}} N$. Além disso, $r_1 + \dots + r_m \leq m r_{\max} \leq r_{\max} \log_{r_{\min}} N$. Logo, o custo da FFT no caso $N = r_1 \dots r_m$ é de $2N(r_1 + \dots + r_m) = O(N \log_{r_{\min}} N)$.

Considerações Finais

Neste trabalho, apresentamos várias situações em que a matriz de Pascal surge, desde relações teóricas com outras matrizes e famílias de polinômios até aplicações a curvas de Bézier, importante ramo da Computação Gráfica.

Além disso, exploramos aspectos computacionais da matriz de Pascal, apresentando uma forma rápida de resolução de sistemas lineares envolvendo-a. Boa parte da busca pelo melhor parâmetro que estabilize os problemas de mal-condicionamento nas matrizes envolvidas na decomposição de P foi feita pelo autor deste trabalho e seu orientador. A aplicação da matriz de Pascal à computação das curvas de Bézier também é idéia do autor e seu orientador.

Ainda há muito trabalho a ser feito envolvendo a matriz de Pascal. Cada vez mais ela tem surgido em problemas de Matemática aplicada. Por exemplo, em resolução numérica de equações diferenciais ordinárias (veja [2]), acústica, engenharia elétrica, etc. O algoritmo que desenvolvemos no Capítulo 4 é aplicável a várias dessas situações e a outras que possam surgir. Há, porém, uma necessidade de melhor estabilização do que foi feito no Capítulo 4, como pudemos perceber quando aplicamos o que foi desenvolvido à computação das curvas de Bézier e isto também é um trabalho interessante para o futuro.

Referências Bibliográficas

- [1] L. Aceto; D. Trigiante - The Matrices of Pascal and Other Greats. The American Mathematical Monthly, Volume 108, number 3, 232-245, 2001.
- [2] L. Aceto - Some applications of the Pascal Matrix to the study of numerical methods for differential equations, Bollettino dell Unione Matematica Italiana, vol 8, nº 3, 639-652, 2005.
- [3] G.D. Bergland - The Fast Fourier Transform Recursive Equations for Arbitrary Length Vectors. Math. Computations, Vol. 21, pp. 236-238, 1967.
- [4] P. Bézier - “Numerical Control, Mathematics and Applications”. London: J. Wiley, 1972.
- [5] E.O. Brigham - “The Fast Fourier Transform and Its Applications”. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1988.
- [6] A. Edelman; G. Strang - Pascal Matrices. The American Mathematical Monthly, Volume 111, number 3, 189-197, 2004.
- [7] R.L. Graham; D.E. Knuth; O. Patashnik - “Matemática Concreta”. 2ª edição, Rio de Janeiro: Editora LTC, 1995.
- [8] D. Kreider; R.C. Kuller; D.R. Ostberg; F.W. Perkins - “Introdução à Análise Linear”, vol. 2. Brasília: Ed. Universidade de Brasília, 1972.
- [9] C. F. Van Loan - “Computational Frameworks for The Fast Fourier Transform”, Philadelphia: SIAM, 1992.
- [10] W. Xiang, L. Linzhang - A fast algorithm for solving linear systems of the Pascal type, Applied Mathematics and Computation 175, 441-451, 2006.
- [11] W. Xiang, Z. Jituan - A fast eigenvalue algorithm for Pascal matrices, Applied Mathematics and Computation 183, 711-716, 2006.