Gabriela Rios Stahelin

Um Estudo Envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias Lineares De 2ª Ordem E Temas Relacionados

Florianópolis – SC

Novembro de 2007

Universidade Federal De Santa Catarina
Centro De Ciências Físicas E Matemáticas
Departamento De Matemática

Um Estudo Envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias Lineares De 2ª Ordem E Temas Relacionados

Gabriela Rios Stahelin
Orientador: Antonio Vladimir Martins

Florianópolis – SC

Novembro de 2007

Dados Gerais

Nome da orientanda: Gabriela Rios Stahelin

Curso: Matemática Licenciatura – Diurno

Orientador: Antonio Vladimir Martins(Departamento de Matemática da UFSC)

Monografia apresentada ao Curso de Graduação em Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção de Licenciado em Matemática.

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 67/CCM/07.

Profª Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da Disciplina

Banca Examinadora:

Prof. Antônio Vladimir Martins
Orientador

Prof. José Luiz Rosas Pinho

Prof. Profº Nereu Estanislau Burin

Agradecimentos

Agradeço aos meus familiares, especialmente aos meus pais e meu irmão pelo incentivo e apoio. Aos meus amigos, principalmente à Rosilene pelas horas que passamos juntas nestes quatro anos de estudo. E por fim, agradeço a todos os meus professores e em especial ao meu orientador, pela sua paciência e dedicação.

Sumário

Introdução

As equações diferenciais estudadas rapidamente no curso de Matemática são poderosas ferramentas de cálculo e têm aplicações em alguns problemas de Engenharia, Astronomia, Física, Biologia e Química.

Neste trabalho estarei desenvolvendo um estudo sobre Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de 2ª Ordem, apresentando a teoria, métodos para resolução destas equações e soluções de problemas com algumas aplicações na área da Biologia e da Física. Apresentarei também um gráfico no fim de cada problema resolvido, que desenvolvi no software Matlab, para que através da visualização deste seja possível obter também a solução do problema.

Um dos motivos que me levaram a desenvolver este tema foi o problema de ter alguns semestres conturbados por conta de greves. Semestres estes onde me encontrava realizando as disciplinas de Cálculo II e Cálculo III, sendo esta última a mais prejudicada. Durante a disciplina de Cálculo III, lecionada pelo orientador deste trabalho, além das greves ocorreram feriados que coincidiram com os dias das nossas aulas. Isto fez com que, pela falta de tempo, tivéssemos apenas uma pequena noção do que seriam Equações Diferenciais. Então, ao procurar o professor pedindo orientação e sugestão sobre um tema, surgiu a idéia de desenvolver algo sobre este assunto.

Todo o trabalho foi feito com o objetivo de ampliar os meus conhecimentos além de mostrar a relação das Equações Diferenciais com as aplicações nas áreas já citadas. Mas irei dar ênfase à Física, onde estarei dedicando um capítulo aos estudos das Vibrações Forçadas, destacando o fenômeno da Ressonância. É neste capítulo que transcrevo a título de curiosidade a história da queda da ponte de Tacoma.

No último capítulo apresento uma galeria de Equações Diferenciais Ordinárias de 2ª Ordem, desenvolvidas por grandes matemáticos. As equações citadas são as de Euler, Legendre, Bessel, Airy, Chebyshev, Hermite e de Laguerre. Após enunciar cada equação escrevi uma curta biografia de seu autor.

E para finalizar apresentei uma pequena conclusão sobre este trabalho.

Capítulo 1

Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem

Muitas idéias mais aprofundadas na área da matemática nasceram dos estudos dessas equações. Mas as equações diferenciais lineares de segunda ordem têm aplicação em muitos problemas de Engenharia, Física, Química e até mesmo da Biologia. Recebem grande destaque na Mecânica de Vibrações e na Teoria dos Circuitos Elétricos.

Podemos representar estas equações da seguinte forma:

$$y'' + f(t)y' + g(t)y = h(t)$$

ou

$$x'' + f(t)x' + g(t)x = h(t)$$

onde as funções $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ poderão estar em função de t ou são apenas constantes.

Para obter a solução destas equações devo determinar a função incógnita $y = y(t)$, (ou $x = x(t)$).

Vale destacar também que se $h(t)$ for igual a zero chamaremos as equações acima de homogêneas e se $h(t)$ for diferente de zero teremos, portanto equações não homogêneas.

A solução de uma equação diferencial é uma função $y(t)$ (ou $x(t)$) que satisfaz identicamente a equação.

Exemplo 1 $y_1(t) = \operatorname{sen}(at)$ e $y_2(t) = \cos(at)$ são soluções de $y'' + a^2y = 0$ com a constante.

Demonstração: Seja $y_1(t) = \operatorname{sen}(at)$.

Derivando:

$$y_1'(t) = a\cos(at)$$

$$y_1''(t) = -a^2\operatorname{sen}(at)$$

Substituindo na equação tenho

$$-a^2\operatorname{sen}(at) + a^2\operatorname{sen}(at) = 0$$

Portanto $y_1(t)$ é solução da equação diferencial.

Agora tomo $y_2(t) = \cos(at)$

Derivando:

$$y_2'(t) = -a\operatorname{sen}(at)$$

$$y_2''(t) = -a^2\cos(at)$$

Substituindo na equação:

$$-a^2\cos(at) + a^2\cos(at) = 0$$

Portanto $y_2(t)$ também é solução da equação.

Essas são denominadas como soluções particulares desta equação diferencial.

Para assegurar de que a equação diferencial realmente possui solução $y = y(t)$, tomarei como base o seguinte teorema, que será enunciado sem demonstração.

Teorema 1 Sejam $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ funções contínuas em um intervalo fechado $[a, b]$, sendo a e b números reais. Se t_0 é algum ponto em $[a, b]$ e se y_0 e y_0' são números quaisquer, então a equação $y'' + f(t)y' + g(t)y = h(t)$ tem uma e somente uma solução $y(t)$ definida em $[a, b]$, tal que $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y_0'$.

Nota: O teorema acima nos dá condições suficientes para que a equação diferencial, com as condições iniciais citadas, tenha uma e somente uma solução.

A seguir estarei apresentando resolvidos, dois dos problemas propostos no livro de G. Simmons:

Problema 1 Mostre que $y = t^2 \operatorname{sen} t$ e $y = 0$ são ambas soluções de

$$t^2 y'' - 4ty' + (t^2 + 6)y = 0$$

e que ambas satisfazem a condição $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$. Será que isto contradiz o Teorema 1? Se não, por quê?

Resolução: Primeiro vou verificar se $y = t^2 \operatorname{sen} t$ e $y = 0$ são soluções da equação diferencial acima.

Seja então

$$y = t^2 \operatorname{sen} t$$

$$y' = t^2 \cos t + 2t \operatorname{sen} t$$

$$y'' = -t^2 \operatorname{sen} t + 2t \cos t + 2t \cos t + 2 \operatorname{sen} t$$

Substituindo na equação diferencial:

$$t^2(-t^2 \operatorname{sen} t + 4t \cos t + 2 \operatorname{sen} t) - 4t(t^2 \cos t + 2t \operatorname{sen} t) + (t^2 + 6)t^2 \operatorname{sen} t =$$

$$= -t^4 \operatorname{sen} t + 4t^3 \cos t + 2t^2 \operatorname{sen} t - 4t^3 \cos t - 8t^2 \operatorname{sen} t + t^4 \operatorname{sen} t + 6t^2 \operatorname{sen} t = 0$$

Logo $y = t^2 \operatorname{sen} t$ é solução.

Seja agora $y = 0$, $y' = 0$ e $y'' = 0$.

Substituindo na equação diferencial:

$$t^2 \cdot 0 - 4t \cdot 0 + (t^2 + 6) \cdot 0 = 0$$

Logo $y = 0$ também é solução.

Agora vou verificar se ambas satisfazem a condição de $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$

Como $y(t) = t^2 \operatorname{sen} t$ e $y'(t) = t^2 \cos t + 2t \operatorname{sen} t$ tenho que

$$y(0) = 0^2 \cdot \operatorname{sen} 0 = 0$$

$$y'(0) = 0^2 \cdot \cos 0 + 2 \cdot 0 \operatorname{sen} 0 = 0$$

E para $y(t) = 0$ e $y'(t) = 0$ já satisfaz a condição para $t = 0$.

Mas isto não contradiz a Teorema 1, pois para que a equação satisfaça as condições iniciais do teorema é necessário dividi-la por t^2.

Assim tenho que

$$y'' - \frac{4}{t}y' + \frac{t^2+6}{t^2}y = 0$$

Logo esta equação diferencial não estará definida para $t = 0$.

Continua então verdadeiro o Teorema 1.

Problema 2 Se a solução da equação homogênea no intervalo $[a, b]$ com coeficientes contínuos é tangente ao eixo t em algum ponto do intervalo, então ela deve ser nula. Por quê?

Resolução: Seja a equação homogênea

$$y'' + f(t)y' + g(t)y = 0,$$

f e g contínuas em $[a, b]$

E seja $y(t)$ a solução desta equação (portanto derivável).

Tenho então que $y(t_0) = 0$ e $y'(t_0) = 0$ para $t_0 \in [a, b]$.

Suponho que $y(t)$ é uma função não nula Isto significa que:

$$y(t_1) \neq 0$$

para algum t_1 real.

Como $y(t)$ é derivável (portanto contínua) e $y'(t_1) \neq 0$, concluo pelo Teorema da Conservação do Sinal que $y(t) \neq 0$ para todo t pertencente a um pequeno intervalo J, sendo que $t_1 \in J$ e $J \subseteq [a, b]$

Tenho então que $y(t)$ e $y(t) = 0$ são as soluções da equação diferencial homogênea.

Mas se $y(t_0) = 0$ e $y'(t_0) = 0$, pelo Teorema 1 concluo que $y(t)$ é nula.

Chego assim em uma contradição.

Teorema 2 (Princípio de Linearidade) Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são duas soluções de $y'' + f(t)y' + g(t)y = 0$, então $k_1y_1(t) + k_2y_2(t)$ é também uma solução para quaisquer constantes k_1 e k_2.

Demonstração: Para provar basta colocarmos na equação a possível solução $k_1y_1(t) + k_2y_2(t)$.

$$y'' + f(t)y' + g(t)y = 0$$

$$(k_1y_1(t) + k_2y_2(t))'' + f(t)(k_1y_1(t) + k_2y_2(t))' + g(t)(k_1y_1(t) + k_2y_2(t)) =$$

$$= k_1y_1''(t) + k_2y_2''(t) + f(t)k_1y_1'(t) + f(t)k_2y_2'(t) + g(t)k_1y_1(t) + g(t)k_2y_2(t) =$$

$$= k_1(y_1''(t) + f(t)y_1'(t) + g(t)y_1(t)) + k_2(y_2''(t) + f(t)y_2'(t) + g(t)y_2(t)) =$$

$$= k_1 \cdot 0 + k_2 \cdot 0 = 0$$

Portanto está demonstrado.

A adição $(k_1y_1(t) + k_2y_2(t))$ é chamada de **combinação linear das soluções** $y_1(t)$ **e** $y_2(t)$, logo posso dizer também que qualquer combinação linear de duas soluções de uma equação homogênea é também uma solução.

Como estou falando de combinação linear, se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ têm a propriedade de que $y_1(t) = ky_2(t)$ para todo t pertencente a um intervalo, sendo k uma constante dizemos que as soluções são **linearmente dependentes** (LD), mas se caso isso não se satisfaça, dizemos então que as soluções são **linearmente independentes** (LI).

Uma solução geral da equação diferencial homogênea é uma solução da forma $y = k_1y_1(t) + k_2y_2(t)$, onde $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções linearmente independentes.

O termo “solução geral” é usado em Equações Diferenciais no sentido de que dada uma solução arbitrária da equação diferencial linear homogênea, ela pode ser expressa como $k_1y_1(t) + k_2y_2(t)$ para uma escolha apropriada das constantes k_1 e k_2.

Teorema 3 Se $y_g(t)$ é uma solução geral da equação homogênea e $y_p(t)$ é uma solução particular da equação $y'' + f(t)y' + g(t)y = h(t)$, então $y_g(t) + y_p(t) = y(t)$ é a solução geral desta equação

Demonstração: Tomo a equação homogênea ($h(t) = 0$)

$$y'' + f(t)y' + g(t)y = 0$$

Seja $y_g(t)$ a solução geral desta equação. E seja também $y_p(t)$ a solução particular da equação não homogênea.

Se $y(t)$ é solução arbitrária da equação não homogênea, consigo mostrar que $y(t) - \ y_p(t)$ é solução da equação homogênea. Veja:

$$y'' + f(t)y' + g(t)y = 0$$

$$(y(t) - y_p(t))'' + f(t)(y(t) - y_p(t))' + g(t)(y(t) - y_p(t)) =$$

$$= y''(t) - y_p''(t) + f(t)y'(t) - f(t)y_p'(t) + g(t)y(t) - g(t)y_p(t) =$$

$$= (y''(t) + f(t)y'(t) + g(t)y(t)) - (y_p''(t) + f(t)y_p'(t) + g(t)y_p(t)) =$$

$$h(t) - h(t) = 0$$

Mas então posso dizer que $y(t) - y_p(t) = k_1y_1(t) + k_2y_2(t)$, sendo k_1 e k_2 constantes.

Logo $y(t) = y_g(t) + y_p(t)$, como eu queria demonstrar.

1.1 Wronskiano

Seja $y(t)$ uma solução arbitrária da equação homogênea, devo mostrar que as constantes k_1 e k_2 podem ser calculadas tal que $y(t) = k_1y_1(t) + k_2y_2(t)$ para todo t em $[a, b]$, sendo y_1 e y_2 LI.

Derivando a solução da equação fico com

$$y'(t) = k_1y_1'(t) + k_2y_2'(t).$$

Assim fico com o seguinte sistema em k_1 e k_2:

$$\begin{cases} y(t) = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t) \\ y'(t) = k_1 y_1'(t) + k_2 y_2'(t) \end{cases} \qquad (*)$$

Para que este sistema tenha solução, basta que o determinante a seguir seja diferente de zero

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t) \cdot y_2'(t) - y_1'(t) \cdot y_2(t)$$

Esta função é conhecida como **wronskiano de $\boldsymbol{y_1}$ e $\boldsymbol{y_2}$**.

Para simplificar representarei esta função da seguinte maneira:

$$\mathcal{W}(y_1, y_2) = y_1 \cdot y_2' - y_1' \cdot y_2$$

Lema 1 Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são duas soluções da equação homogênea em $[a, b]$, então seu wronskiano é sempre igual a zero para qualquer ponto do intervalo, ou não é igual a zero em nenhum ponto de $[a, b]$.

Demonstração: Sei que $\mathcal{W}(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2$

Derivando: $\mathcal{W}' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - (y_1' y_2' + y_1'' y_2)$

$$\mathcal{W}' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$$

Mas se y_1 e y_2 são duas soluções da equação homogênea, tenho que:

$$y_1'' + f(t) y_1' + g(t) y_1 = 0$$

e

$$y_2'' + f(t) y_2' + g(t) y_2 = 0$$

Vou multiplicar a primeira equação por y_2 e a segunda por y_1. Fico então com

$$y_1'' y_2 + f(t) y_1' y_2 + g(t) y_1 y_2 = 0$$

e

$$y_2'' y_1 + f(t) y_2' y_1 + g(t) y_2 y_1 = 0$$

Subtraindo a segunda da primeira:

$$y_1''y_2 - y_2''y_1 + f(t)y_1'y_2 - f(t)y_2'y_1 + 0 = 0$$

$$y_1''y_2 - y_2''y_1 + f(t)(y_1'y_2 - y_2'y_1) = 0$$
$$\frac{d\mathcal{W}}{dt} + f(t)\mathcal{W} = 0$$

Um fator integrante para esta equação diferencial é $I(t) = e^{\int f(t)dt}$.

Se $\frac{d\mathcal{W}}{dt} + f(t)\mathcal{W} = 0$, ao multiplicarmos a equação por $I(t)$ vale:

$$I(t)\frac{d\mathcal{W}}{dt} + I(t)f(t)\mathcal{W} = 0$$

ou

$$(I(t)\mathcal{W})' = 0$$

Integrando:

$$\int (I(t)\mathcal{W})' = \int 0$$
$$I(t)\mathcal{W} = k$$

com k constante

Logo

$$\mathcal{W} = \frac{k}{I(t)}$$
$$\mathcal{W} = \frac{k}{e^{\int f(t)dt}}$$
$$\mathcal{W} = \mathcal{W}(t) = ke^{-\int f(t)dt}, \qquad \forall t$$

Se para algum t_0, $0 = \mathcal{W}(t_0) = ke^{-\int f(t)dt}$, implicará que $k = 0$, já que o fator exponencial nunca se anula, e daí $\mathcal{W}, = 0$.

Lema 2 Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são duas soluções da equação homogênea em um intervalo fechado $[a, b]$, elas são linearmente dependentes se, e somente se, o seu wronskiano for nulo.

Demonstração: Assumo que as soluções são linearmente dependentes e que nenhuma delas é nula. Então $y_1(t) = ky_2(t)$, sendo k uma constante.

Sei que $\mathcal{W} = y_1y_2' - y_1'y_2$

Se $y_1 = ky_2$ e $y_1' = ky_2'$

Substituindo no wronskiano:

$$\mathcal{W} = ky_2y_2' - ky_2'y_2$$

$$\mathcal{W} = 0.$$

Agora vou assumir que $\mathcal{W} = 0$, e que nenhuma das soluções é nula (uma das soluções não se anula em ponto algum de $[a, b]$).

$$y_1y_2' - y_1'y_2 = 0$$

Divido a equação por y_1^2

$$\frac{y_1y_2' - y_1'y_2}{y_1^2} = 0$$

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0$$

Integrando:

$$\int \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \int 0$$

$$\frac{y_2}{y_1} = k$$

$$y_2 = ky_1$$

$$y_2(t) = ky_1(t)$$

Portanto as soluções são linearmente dependentes, se e somente se o wronskiano for nulo.

Exemplo 2 $y_1(t) = e^t \operatorname{sen} t$ e $y_2(t) = e^t \cos t$ são soluções LI de $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Demonstração: Para confirmar, basta calcular o wronskiano.

$$\begin{aligned}
\mathcal{W} &= \begin{vmatrix} e^t \operatorname{sen} t & e^t \cos t \\ e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t & e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t \end{vmatrix} \\
&= e^{2t} \operatorname{sen} t \cos t - e^{2t} \operatorname{sen}^2 t - e^{2t} \operatorname{sen} t \cos t - e^{2t} \cos^2 t \\
&= -e^{2t}(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t) \\
&= -e^{2t} \neq 0, \quad \forall t
\end{aligned}$$

Portanto são soluções LI.

Conclusão: O Lema 2 garante que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são linearmente independentes se, e somente se, $\mathcal{W} \neq 0$ para todo t. E $\mathcal{W} \neq 0$ garante a existência de k_1 e k_2 no sistema linear $(*)$.

Capítulo 2

Métodos Para Encontrar a Solução de Uma Equação Diferencial Linear de Segunda Ordem

2.1 Equações Homogêneas de Coeficientes Constantes

Já conheço a equação homogênea que é do tipo $y''+f(t)y'+g(t)y=0$. Vou estudar o caso em que as funções $f(t)$ e $g(t)$ são constantes, e assim encontrar a solução geral desta equação.

Nomeio então como $f(t)=a$ e $g(t)=b$ com a e b constantes. Substituindo fico com a seguinte equação

$$y''+ay'+by=0$$

Vou então buscar uma solução desta equação, a solução $y(t)$.

Uma função que é uma provável solução é a função exponencial e^{rt}, pois possue a propriedade de que suas derivadas são constantes multiplicadas por ela mesma.

Vou então considerar $y(t)=e^{rt}$, com r devidamente escolhido para que satisfaça a solução da equação homogênea acima citada.

Derivando: $y'=re^{rt}$ e $y''=r^2e^{rt}$

Substituindo na equação:

$$y'' + ay' + by = 0$$

$$r^2 e^{rt} + are^{rt} + be^{rt} = 0$$

$$e^{rt}(r^2 + ar + b) = 0$$

Como e^{rt} nunca é nulo, tenho que obrigatoriamente

$$r^2 + ar + b = 0$$

Esta equação acima é conhecida como **equação característica**.

As raízes desta equação do 2º grau são dadas por:

$$r_1; r_2 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Assim terei duas soluções: $y_1 = e^{r_1 t}$ e $y_2 = e^{r_2 t}$. Estas poderão ser reais ou complexas.

Pode ser visto que estas soluções são LI através do wronskiano e, portanto, a combinação linear destas soluções será a solução geral da equação homogênea de coeficientes constantes.

Ou seja, $y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$, com c_1 e c_2 constantes é a solução geral.

Nota: Quando $r_1 = r_2$, $y_1(t) = e^{r_1 t}$ é uma solução. Uma segunda solução linearmente independente com $y_1(t)$ é $y_2(t) = te^{r_1 t}$.

Para mostrar que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são LI, basta calcular $\mathcal{W}(y_1, y_2)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & te^{r_1 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & tr_1 e^{r_1 t} + e^{r_1 t} \end{vmatrix} \\ &= tr_1 e^{2r_1 t} + e^{2r_1 t} - tr_1 e^{2r_1 t} \\ &= e^{2r_1 t} \neq 0\end{aligned}$$

Exemplo 3

$$y'' + y' + \frac{1}{4} y = 0$$

Tomando a equação característica para resolver esta equação tenho:

$$r^2 + r + \frac{1}{4} = 0$$

Logo

$$r_1 = r_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1/4}}{2}$$
$$r_1 = r_2 = \frac{-1}{2}$$

Pela nota acima tenho que $y_1(t) = e^{\frac{-1}{2}t}$ e $y_2(t) = te^{\frac{-1}{2}t}$.

Vou agora verificar se são realmente soluções LI da equação.

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} e^{\frac{-1}{2}t} & te^{\frac{-1}{2}t} \\ \frac{-1}{2}e^{\frac{-1}{2}t} & \frac{-1}{2}te^{\frac{-1}{2}t} + e^{\frac{-1}{2}t} \end{vmatrix} \\ &= \frac{-1}{2}te^{-t} + e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} \\ &= e^{-t} \neq 0 \end{aligned}$$

Agora devo verificar se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções particulares da equação. Se isto for verdade, já sei que a combinação linear $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ será a solução geral de $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$.

Tomo primeiramente $y_1(t) = e^{\frac{-1}{2}t}$.

Logo, $y_1'(t) = \frac{-1}{2}e^{\frac{-1}{2}t}$ e $y_1''(t) = \frac{1}{4}e^{\frac{-1}{2}t}$.

Substituindo na equação fico com:

$$\frac{1}{4}e^{\frac{-1}{2}t} - \frac{1}{2}e^{\frac{-1}{2}t} + \frac{1}{4}e^{\frac{-1}{2}t} = 0$$

Então $y_1(t)$ é um solução.

Tomo agora $y_2(t) = te^{\frac{-1}{2}t}$

$$y_2'(t) = \frac{-1}{2}te^{\frac{-1}{2}t} + e^{\frac{-1}{2}t}$$

$$y_2''(t) = \frac{1}{4}te^{\frac{-1}{2}t} - \frac{1}{2}e^{\frac{-1}{2}t} - \frac{1}{2}e^{\frac{-1}{2}t}$$
$$y_2''(t) = \frac{1}{4}te^{\frac{-1}{2}t} - e^{\frac{-1}{2}t}$$

Substituindo na equação:

$$\frac{1}{4}te^{\frac{-1}{2}t} - e^{\frac{-1}{2}t} - \frac{1}{2}te^{\frac{-1}{2}t} + e^{\frac{-1}{2}t} + \frac{1}{4}te^{\frac{-1}{2}t} = 0.$$

$y_2(t)$ também é solução da equação.

Então $y(t) = c_1e^{\frac{-1}{2}t} + c_2te^{\frac{-1}{2}t}$ é a solução geral, com c_1 e c_2 constantes.

2.2 Método de Variação de Parâmetros

Apresento a seguir um método para encontrar a solução particular de uma equação diferencial não homogênea. É um método devido a José Luiz Lagrange (1736-1813). Exige cálculos de integrais, o que podem apresentar algumas dificuldades, sendo este considerado como um ponto negativo do mesmo.

A idéia deste método é encontrar "parâmetros variantes" $c_1(t)$ e $c_2(t)$ tal que $y_p = c_1(t)e^{r_1t} + c_2(t)e^{r_2t}$ seja a solução da equação diferencial não homogênea $y'' + f(t)y' + g(t)y = h(t)$.

Para isso monto o quadro a seguir.

$$\begin{array}{c|l}
g(t) & y_p = c_1(t)e^{r_1t} + c_2(t)e^{r_2t} \\
f(t) & y_p' = c_1(t)r_1e^{r_1t} + c_2(t)r_2e^{r_2t} + [c_1'e^{r_1t} + c_2'(t)e^{r_2t} = 0] \\
1 & y_p'' = c_1(t)r_1^2e^{r_1t} + c_2(t)r_2^2e^{r_2t} + c_1'(t)r_1e^{r_1t} + c_2'(t)r_2e^{r_2t}
\end{array}$$

Na segunda linha do quadro acima, a expressão entre colchetes é uma exigência do Método de Variação de Parâmetros (MVP).

Faço agora a seguinte conta

$$g(t)y_p + f(t)y_p' + 1y_p'' = h(t)$$

$$g(t)\left[c_1(t)e^{r_1t} + c_2(t)e^{r_2t}\right] + f(t)\left[c_1(t)r_1e^{r_1t} + c_2r_2e^{r_2t}\right] +$$

$$+c_1(t)r_1^2e^{r_1t} + c_2(t)r_2^2e^{r_2t} + c_1'(t)r_1e^{r_1t} + c_2'(t)r_2e^{r_2t} = h(t)$$

Reagrupando:

$$\left[c_1(t)r_1^2e^{r_1t} + f(t)c_1(t)r_1e^{r_1t} + g(t)c_1(t)e^{r_1t}\right] + \left[c_2(t)r_2^2e^{r_2t} + f(t)c_2(t)r_2e^{r_2t} +\right.$$

$$+g(t)c_2(t)e^{r_2t}\big] + c_1'(t)r_1e^{r_1t} + c_2'(t)r_2e^{r_2t} = h(t)$$

$$(0) + (0) + c_1'(t)r_1e^{r_1t} + c_2'(t)r_2e^{r_2t} = h(t)$$

Assim tenho duas equações, formando o sistema

$$\begin{cases} c_1'(t)e^{r_1t} & + & c_2'(t)e^{r_2t} & = & 0 \\ c_1'(t)r_1e^{r_1t} & + & c_2'(t)r_2e^{r_2t} & = & h(t) \end{cases}$$

Resolvendo por Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{r_1t} & e^{r_2t} \\ r_1e^{r_1t} & r_2e^{r_2t} \end{vmatrix} = e^{r_1t}\cdot r_2e^{r_2t} - e^{r_2t}\cdot r_1e^{r_1t}$$

Note que $\Delta = y_1y_2' - y_2y_1' = \mathcal{W}(y_1, y_2)$

$$\Delta c_1' = \begin{vmatrix} 0 & e^{r_2t} \\ h(t) & r_2e^{r_2t} \end{vmatrix} = -e^{r_2t}\cdot h(t)$$

$$\Delta c_1' = -y_2h(t)$$

$$\Delta c_2' = \begin{vmatrix} e^{r_1t} & 0 \\ r_1e^{r_1t} & h(t) \end{vmatrix} = e^{r_1t}\cdot h(t)$$

$$\Delta c_2' = y_1h(t)$$

Então tenho que:

$$c_1' = \frac{-y_2h(t)}{\mathcal{W}(y_1, y_2)} \qquad c_2' = \frac{y_1h(t)}{\mathcal{W}(y_1, y_2)}$$

Integrando:

$$\int c_1' = \int \frac{-y_2h(t)}{\mathcal{W}(y_1, y_2)}dt \qquad \int c_2' = \int \frac{y_1h(t)}{\mathcal{W}(y_1, y_2)}dt$$

$$c_1 = \int \frac{-y_2h(t)}{\mathcal{W}(y_1, y_2)}dt \qquad c_2 = \int \frac{y_1h(t)}{\mathcal{W}(y_1, y_2)}dt$$

Portanto se $y(t) = c_1y_1 + c_2y_2$

$$y(t) = y_1\int \frac{-y_2h(t)}{\mathcal{W}(y_1, y_2)}dt + y_2\int \frac{y_1h(t)}{\mathcal{W}(y_1, y_2)}dt$$

E esta é solução que eu estava procurando.

2.3 Alguns Problemas Envolvendo Equações Diferenciais

Problema 1 Duas espécies X e Y vivem em uma relação simbiótica. Ou seja, nenhuma delas tem autonomia, dependendo uma da outra para sua sobrevivência. Inicialmente há 15 indivíduos de X e 10 de Y. Se $x = x(t)$ e $y = y(t)$ são os tamanhos das populações respectivas decorridos t meses, as taxas de crescimento das duas populações são dadas pelo sistema:

$$\begin{array}{rcrcr} x' & = & -0,8x & + & 0,4y \\ y' & = & 0,4x & - & 0,2y \end{array}$$

Determine o que acontece a essas duas populações.

Este problema foi resolvido por dois métodos distintos.

Resolução 1: Para analisar o que acontece com cada população, preciso resolver este sistema.

Tomando primeiramente a primeira equação ($x' = -0,8x + 0,4y$) e derivando-a tenho que $x'' = -0,8x' + 0,4y'$.

Isolando: $0,4y' = x'' + 0,8x'$.

Ou melhor ainda: $y' = \dfrac{x'' + 0,8x'}{0,4}$.

Substituindo este y' na segunda equação:

$$y' = 0,4x - 0,2y$$

$$\frac{x'' + 0,8x'}{0,4} = 0,4x - 0,2y \tag{2.1}$$

Da primeira equação do sistema inicial tenho:

$$x' = -0,8x + 0,4y$$

$$y = \frac{x' + 0,8x}{0,4} \tag{2.2}$$

Substituindo (2.2) em (2.1):

$$\frac{x'' + 0,8x'}{0,4} = 0,4x - 0,2 \cdot \left(\frac{x' + 0,8x}{0,4}\right)$$

$$\frac{x'' + 0,8x'}{0,4} = 0,4x - \frac{0,2x' - 0,16x}{0,4}$$

$$x'' + 0,8x' = 0,16x - 0,2x' - 0,16x$$

$$x'' + x' = 0$$

A equação característica associada a esta equação é $r^2 + r = 0$. Resolvendo-a tenho que:

$$r(r+1) = 0$$

$$r = 0 \text{ ou } r = -1.$$

Como a solução desta equação é do tipo e^{rt}, neste caso esta equação admite como soluções $e^{0t} = 1$ e e^{-t}.

Então $x = x(t) = k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot e^{-t} = k_1 + k_2 e^{-t}$ é a solução geral da equação diferencial com k_1 e k_2 constantes.

Preciso encontrar o valor das constantes. Sei que em $t = 0$, $x(0) = 15$, então:

$$15 = k_1 + k_2 e^{-0}$$

$$15 = k_1 + k_2$$

Mas sendo $x = k_1 + k_2 e^{-t}$ derivando-a fico com $x' = -k_2 e^{-t}$.

Como $x' = -0,8x + 0,4y$, para $t = 0$ tenho que

$$x' = -0,8 \cdot 15 + 0,4 \cdot 10$$

$$x' = -8$$

Logo,

$$-k_2 e^{-t} = -8$$

$$-k_2 e^{-0} = -8$$

$$k_2 = 8$$

Mas se $k_1 + k_2 = 15$ e $k_2 = 8$, então $k_1 = 7$.

Portanto $x(t) = 7 + 8e^{-t}$

Agora falta apenas encontrar a solução geral para a espécie y.

Tomo agora então a segunda equação $y' = 0,4x - 0,2y$ e isolando x tenho que:

$$x = \frac{y' + 0,2y}{0,4}$$

Agora derivando esta equação fico com:

$$x' = \frac{y'' + 0,2y'}{0,4}$$

Substituindo x e x' na primeira equação do sistema inicial temos:

$$x' = -0,8x + 0,4y$$

$$\frac{y'' + 0,2y'}{0,4} = -0.8\left(\frac{y' + 0,2y}{0,4}\right) + 0,4y$$

$$y'' + 0,2y' = -0,8y' - 0,16y + 0,16y$$

$$y'' + y' = 0$$

Note que cheguei na mesma equação diferencial quando comparado ao da espécie X. Assim posso já concluir que $y = y(t) = k_3 + k_4e^{-t}$ é solução geral da equação diferencial com k_3 e k_4 constantes.

Para encontrar o valor de k_3 e k_4, sei que $y(0) = 10$, logo $k_3 + k_4 = 10$.

Mas sendo $y = k_3 + k_4e^{-t}$, derivando esta equação fico com $y' = -k_4e^{-t}$.

Como $y' = 0,4x - 0,2y$, para $t = 0$ tenho que

$$y' = 0,4 \cdot 15 - 0,2 \cdot 10$$

$$y' = 4$$

Logo,

$$-k_4e^{-t} = 4$$

$$-k_4e^{-0} = 4$$

$$k_4 = -4$$

Mas se $k_3 + k_4 = 10$ e $k_4 = -4$, então $k_3 = 14$.

Portanto $y(t) = 14 - 4e^{-t}$.

Tenho então, a solução do problema:

$$x(t) = 7 + 8e^{-t}$$

$$y(t) = 14 - 4e^{-t}$$

Resolução 2: Uma outra forma de resolver problemas desse tipo é através de autovalores e autovetores.

Sei que $x' = -0,8x + 0,4y$; $y' = 0,4x - 0,2y$; $x(0) = 15$ e $y(0) = 10$.

Este sistema de equações diferenciais pode ser escrito como $\vec{z'} = A\vec{z}$, onde

$$A = \begin{pmatrix} -0,8 & 0,4 \\ 0,4 & -0,2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Procuro uma solução do sistema do tipo $\vec{z} = \vec{z}_0 e^{\lambda t}$; $\vec{0} \neq \vec{z}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ com $\lambda \in \mathbb{C}$.

Então:$\vec{z} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} x_0 e^{\lambda t} \\ y_0 e^{\lambda t} \end{pmatrix}$

Derivando: $\vec{z'} = \begin{pmatrix} \lambda x_0 e^{\lambda t} \\ \lambda y_0 e^{\lambda t} \end{pmatrix}$

Mas $\vec{z'} = A\vec{z} = \begin{pmatrix} -0,8 & 0,4 \\ 0,4 & -0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 e^{\lambda t} \\ y_0 e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,8x_0 e^{\lambda t} + 0,4y_0 e^{\lambda t} \\ 0,4x_0 e^{\lambda t} - 0,2y_0 e^{\lambda t} \end{pmatrix}$

Igualando a matriz acima com a derivada de $\vec{z}$, tenho que:

$$\begin{pmatrix} \lambda x_0 e^{\lambda t} \\ \lambda y_0 e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,8x_0 e^{\lambda t} + 0,4y_0 e^{\lambda t} \\ 0,4x_0 e^{\lambda t} - 0,2y_0 e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,8 & 0,4 \\ 0,4 & -0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \vec{z}_0 = A\vec{z}_0$$

onde λ é chamado de autovalor e $\vec{z}_0$ de autovetor.

Para encontrar o valor de λ vou fazer uso dos conhecimentos aprendidos na disciplina de Álgebra Linear.

Já sei que $\rho(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$, onde I é a matriz identidade.

Assim tenho que:

$$\left| \begin{pmatrix} -0,8 & 0,4 \\ 0,4 & -0,2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -0,8-\lambda & 0,4 \\ 0,4 & -0,2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Calculando esse determinante chego a seguinte igualdade:

$$(-0,8-\lambda)(-0,2-\lambda) - 0,16 = 0$$

$$0,16 + \lambda + \lambda^2 - 0,16 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda + 1) = 0$$

Portanto posso concluir que ou $\lambda = 0$ ou $\lambda = -1$. Agora que já foram encontrados os autovalores, basta apenas achar os autovetores correspondentes a cada valor de λ.

Como encontrei dois valores para λ, vou dividir em dois casos para poder encontrar os autovetores.

Caso 1: $\lambda = 0$

Quando $\lambda = 0$ tenho que $0\vec{z}_0 = A\vec{z}_0$, ou seja,

$$0 = \begin{pmatrix} -0,8 & 0,4 \\ 0,4 & -0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{pmatrix} -0,8x_0 + 0,4y_0 \\ 0,4x_0 - 0,2y_0 \end{pmatrix}$$

Desta igualdade aparecem duas equações: $-0,8x_0+0,4y_0 = 0$ e $0,4x_0-0,2y_0 = 0$.

Basta então escolher qualquer uma das duas equações para encontrar o autovetor.

Seja a equação $-0,8x_0 + 0,4y_0 = 0$ a escolhida. Isolando a incógnita y_0:

$$-0,8x_0 + 0,4y_0 = 0$$

$$0,4y_0 = 0,8x_0$$

$$y_0 = 2x_0$$

Portanto, o autovetor correspondente ao autovalor $\lambda = 0$ é $\vec{z}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 2x_0 \end{pmatrix}$ com $x_0 \neq 0$.

Caso 2: $\lambda = -1$

Já para $\lambda = -1$ tenho que $-1\vec{z}_0 = A\vec{z}_0$, ou seja,

$$-1 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,8 & 0,4 \\ 0,4 & -0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,8x_0 + 0,4y_0 \\ 0,4x_0 - 0,2y_0 \end{pmatrix}$$

As duas equações que aparecem são: $-0,8x_0+0,4y_0 = -x_0$ e $0,4x_0-0,2y_0 = -y_0$

Escolho então uma delas. Seja a equação $-0,8x_0 + 0,4y_0 = -x_0$ a escolhida. Isolando a incógnita y_0:

$$-0,8x_0 + 0,4y_0 = -x_0$$

$$0,4y_0 = -0,2x_0$$

$$y_0 = -\frac{1}{2}x_0$$

Portanto o autovetor correspondente ao autovalor $\lambda = -1$ é $\vec{z}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ -\frac{1}{2}x_0 \end{pmatrix}$ com $x_0 \neq 0$.

Posso dizer então que a combinação linear

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} x_0 \\ 2x_0 \end{pmatrix} e^{0t} + c_2 \begin{pmatrix} x_0 \\ -\frac{1}{2}x_0 \end{pmatrix} e^{-1t}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 x_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 x_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} e^{-t},$$

com c_1 e c_2 constantes, é uma solução de $\vec{z'} = A\vec{z}$.

Chamo $c_1 x_0 = k_1$ e $c_2 x_0 = k_2$ com k_1 e k_2 constantes.

Então: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} e^{-t}$

Para $t = 0$, $x(0) = 15$ e $y(0) = 10$. Logo:

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} e^{0}$$

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ 2k_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_2 \\ -\frac{k_2}{2} \end{pmatrix}$$

Desta igualdade aparecem duas equações: $k_1 + k_2 = 15$ e $2k_1 - \frac{k_2}{2} = 10$.

Resolvendo este sistema: $k_1 = 15 - k_2$

Substituindo na segunda equação:

$$2(15 - k_2) - \frac{k_2}{2} = 10$$

$$30 - 2k_2 - \frac{k_2}{2} = 10$$

$$60 - 4k_2 - k_2 = 20$$

$$-5k_2 = -40$$

$$k_2 = 8$$

Se $k_2 = 8$, $k_1 = 15 - 8 = 7$

Então:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Portanto tenho a solução do problema: $x(t) = 7 + 8e^{-t}$ e $y(t) = 14 - 4e^{-t}$. Como já era de se esperar, é a mesma solução encontrada pela primeira resolução.

Agora que as duas equações em função do tempo foram encontradas, pode-se então fazer uma análise do que acontece com cada espécie com o passar do tempo. Os dados foram colocados na tabela a seguir:

Mês (t)	$x(t) = 7 + 8e^{-t}$	$y(t) = 14 - 4e^{-t}$	Mês (t)	$x(t) = 7 + 8e^{-t}$	$y(t) = 14 - 4e^{-t}$
0	$x(0) = 15$	$y(0) = 10$	6	$x(6) \approx 7,01983$	$y(6) \approx 13,99$
1	$x(1) \approx 9,943$	$y(1) \approx 12,53$	7	$x(7) \approx 7,0072$	$y(7) \approx 13,996$
2	$x(2) \approx 8,0826$	$y(2) \approx 13,46$	8	$x(8) \approx 7,0026$	$y(8) \approx 13,998$
3	$x(3) \approx 7,398$	$y(3) \approx 13,8$	9	$x(9) \approx 7,0009$	$y(9) \approx 13,999$
4	$x(4) \approx 7,1465$	$y(4) \approx 13,93$	10	$x(10) \approx 7,0003$	$y(10) \approx 13,998$
5	$x(5) \approx 7,0539$	$y(5) \approx 13,97$	11	$x(11) \approx 7,0001$	$y(11) \approx 13,999$

Com base nos dados da tabela pode-se perceber que a população da espécie X decresce a medida que vão passando os meses, porém tende a estacionar em 7 indivíduos.

Já a espécie Y cresce com o passar dos meses, sendo que também tende a estacionar em 14 indivíduos.

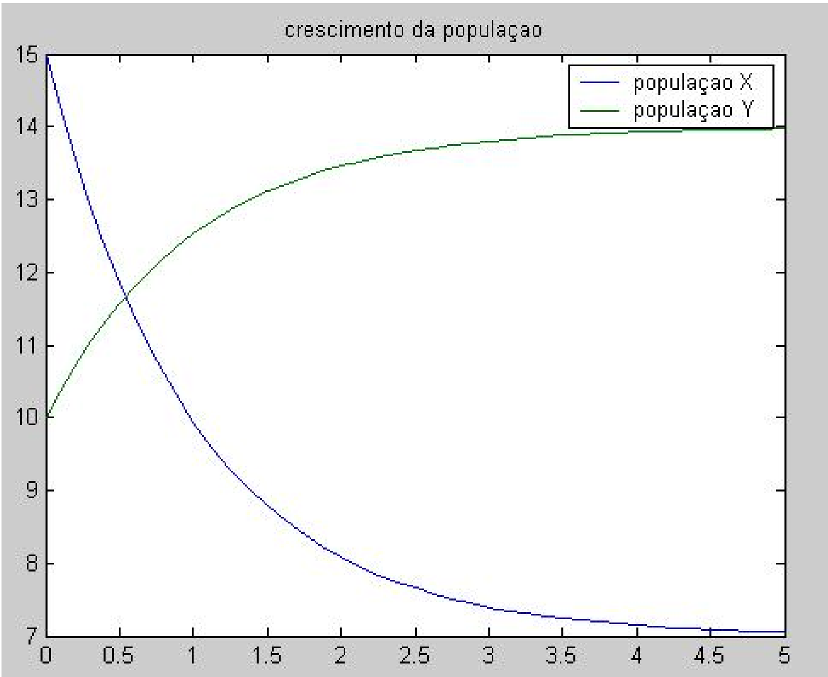
Isso ocorre porque e^{-t} tende a zero a medida que t tende ao infinito.

Esta situação também pode ser analisada visualmente por meio de um gráfico, onde se chegará a mesma conclusão acima. Veja o gráfico feito no software Matlab, e observe nos comandos a função ode45. Esta função do software é um método numérico explícito de um passo, de Runge Kutta de ordem média (quarta e quinta ordens), para resolver problema de valor inicial (PVI).

```
COMANDOS


function yp=prob1(t,y)
```

```
yp=[-.8*y(1)+.4*y(2);.4*y(1)-.2*y(2)]
```

```
>> t0=0;
>> tf=5;
>> y0=[15 10]';
>> [t,y]=ode45('prob1',[t0 tf],y0);
>> plot(t,y)
>> title('crescimento da populaçao')
>> legend('populaçao X','populaçao Y')
```



Problema 2 Neste problema temos a situação que a espécie X vitima a espécie Y. Os tamanhos das populações respectivas são representados por $x = x(t)$ e $y = y(t)$. A taxa de crescimento de cada população é governada pelo sistema de equações diferenciais $\vec{z'} = A\vec{z} + \vec{b}$, onde $\vec{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e b é um vetor constante. Determinar o que acontece com as

duas populações para A, b e as condições iniciais $\vec{z}(0)$ dadas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} -30 \\ -10 \end{pmatrix}; \quad \vec{z}(0) = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Resolução: Através da substituição dos dados iniciais no sistema de equações diferenciais tenho que:

$$\vec{z'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\vec{z} + \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -30 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ -x + y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -30 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Desta igualdade tenho duas equações: $x' = x + y - 30$ e $y' = -x + y - 10$, formando o sistema de equações

$$\begin{cases} x' = x + y - 30 & (1) \\ y' = -x + y - 10 & (2) \end{cases}$$

Vou resolver este sistema através de mudança de variáveis (translação)

Nomeio então as incógnitas x e y como sendo:

$$\begin{cases} x = u + a & (3) \\ y = v + b & (4) \end{cases}$$

onde u e v são as novas variáveis e a e b constantes que devem ser encontradas de modo que o sistema seja homogêneo.

Derivando as equações (3) e (4) tenho:

$$\begin{cases} x' = u' & (5) \\ y' = v' & (6) \end{cases}$$

Substituindo as equações (3), (4) e (5) em (1), e (3), (4) e (6) em (2):

$$\begin{cases} u' = u + a + v + b - 30 \\ v' = -u - a + v + b - 10 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} u' = u + v + a + b - 30 \\ v' = -u + v - a + b - 10 \end{cases}$$

Para que o sistema seja homogêneo: $a + b - 30 = 0$ e $-a + b - 10 = 0$. Então:

$$\begin{cases} a + b - 30 = 0 \\ -a + b - 10 = 0 \end{cases}$$

Somando as duas equações fico com $2b - 40 = 0$. Daí sai que $b = 20$.

Se $b = 20$, $a + 20 - 30 = 0$. Logo $a = 10$

Então sendo que $a = 10$ e $b = 20$, o sistema acima se reduz à:

$$\begin{cases} u' = u + v \\ v' = -u + v \end{cases}$$

Como u e v são as novas variáveis em função do tempo, posso dizer que $u = u(t)$ e $v = v(t)$.

Mas como $x = x(t) = u + a$ e $y = y(t) = v + b$, substituindo o que já tenho, fico com:

$$x(t) = u(t) + 10$$

$$y(t) = v(t) + 20$$

Basta portanto encontrar quem são $u(t)$ e $v(t)$ para resolver o problema.

Volto então para o sistema:

$$\begin{cases} u' = u + v \\ v' = -u + v \end{cases}$$

Tomo a primeira equação ($u' = u + v$) e derivando tenho que $u'' = u' + v'$, ou ainda que $v' = u'' - u'$. Substituindo na segunda equação:

$$u'' - u' = -u + v$$

Mas da primeira equação do sistema acima, pode-se dizer que $u' - u = v$. Logo

$$u'' - u' = -u + u' - u$$

$$u'' - 2u' + 2u = 0$$

Resolvendo esta equação diferencial:

$$r^2 - 2r + 2 = 0$$

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

Logo, temos que $r = 1 + i$ ou $r = 1 - i$.

Como já se sabe, e^{rt} é a solução da equação diferencial. Neste caso tenho como solução $e^{(1+i)t}$ e $e^{(1-i)t}$.

Mas então $u = c_1 e^{(1+i)t} + c_2 e^{(1-i)t}$, com c_1 e c_2 constantes.

Como $v = u' - u$ e $u' = c_1(1+i)e^{(1+i)t} + c_2(1-i)e^{(1-i)t}$, então:

$$v = c_1(1+i)e^{(1+i)t} + c_2(1-i)e^{(1-i)t} - c_1 e^{(1+i)t} - c_2 e^{(1-i)t}$$

$$v = c_1(1+i-1)e^{(1+i)t} + c_2(1-i-1)e^{(1-i)t}$$

$$v = c_1 i e^{(1+i)t} - c_2 i e^{(1-i)t}$$

Portanto:

$$\begin{cases} u(t) = c_1 e^{(1+i)t} + c_2 e^{(1-i)t} \\ v(t) = c_1 i e^{(1+i)t} - c_2 i e^{(1-i)t} \end{cases}$$

é a solução geral complexa do sistema $\begin{cases} u' = u + v \\ v' = -u + v \end{cases}$.

Falta encontrar o valor das constantes c_1 e c_2.

Podemos escrever o sistema abaixo em função de u e v:

$$\begin{cases} x = u + 10 \\ y = v + 20 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = x - 10 \\ v = y - 20 \end{cases}$$

Tenho que $x(0) = 20$ e $y(0) = 30$ (dados iniciais). Então:

$$\begin{cases} u(0) = x(0) - 10 = 20 - 10 = 10 \\ v(0) = y(0) - 20 = 30 - 20 = 10 \end{cases}$$

Como $u(0) = 10$ e $v(0) = 10$, posso substituir estes valores na solução geral complexa de $\begin{cases} u' = u + v \\ v' = -u + v \end{cases}$. Assim encontrarei o valor das constantes.

$$u(0) = c_1 e^{(1+i)0} + c_2 e^{(1-i)0} \Rightarrow 10 = c_1 + c_2$$

$$v(0) = c_1 i e^{(1+i)0} - c_2 i e^{(1-i)0} \Rightarrow 10 = c_1 i - c_2 i$$

Resolvendo o sistema: $\begin{cases} c_1 + c_2 = 10 \\ c_1 i - c_2 i = 10 \end{cases}$

Multiplicando a primeira equação por i: $\begin{cases} c_1 i + c_2 i = 10i \\ c_1 i - c_2 i = 10 \end{cases}$

Somando as duas equações:

$$2c_1 i = 10i + 10$$

$$c_1 = \frac{10i + 10}{2i} \cdot \frac{i}{i}$$

$$c_1 = \frac{-10 + 10i}{-2}$$

$$c_1 = 5 - 5i$$

Logo,

$$c_2 = 10 - c_1$$

$$c_2 = 10 - 5 + 5i$$

$$c_2 = 5 + 5i$$

Portanto:

$$\begin{cases} u(t) = (5 - 5i)e^{(1+i)t} + (5 + 5i)e^{(1-i)t} \\ v(t) = (5 - 5i)e^{(1+i)t} - (5 + 5i)e^{(1-i)t} \end{cases}$$

Aplicando a fórmula de Euler ($e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$), tenho:

$$\begin{cases} u(t) = (5-5i)e^t(\cos t + i \operatorname{sen} t) + (5+5i)e^t(\cos t - i \operatorname{sen} t) \\ v(t) = (5-5i)e^t(\cos t + i \operatorname{sen} t) - (5+5i)e^t(\cos t - i \operatorname{sen} t) \end{cases}$$

Desenvolvendo cada equação:

$$u(t) = e^t[5\cos t + 5i \operatorname{sen} t - 5i\cos t + 5\operatorname{sen} t + 5\cos t - 5i\operatorname{sen} t + 5i\cos t + 5\operatorname{sen} t]$$

$$u(t) = e^t[10\cos t + 10\operatorname{sen} t]$$

$$u(t) = 10e^t(\cos t + \operatorname{sen} t)$$

$$v(t) = e^t i[5\cos t + 5i \operatorname{sen} t - 5i\cos t + 5\operatorname{sen} t - 5\cos t + 5i\operatorname{sen} t - 5i\cos t - 5\operatorname{sen} t]$$

$$v(t) = e^t[-10\operatorname{sen} t + 10\cos t]$$

$$v(t) = 10e^t(\cos t - \operatorname{sen} t)$$

Mas se:

$$\begin{cases} x(t) = u(t) + 10 \\ y(t) = v(t) + 20 \end{cases}$$

tenho que a solução do problema é:

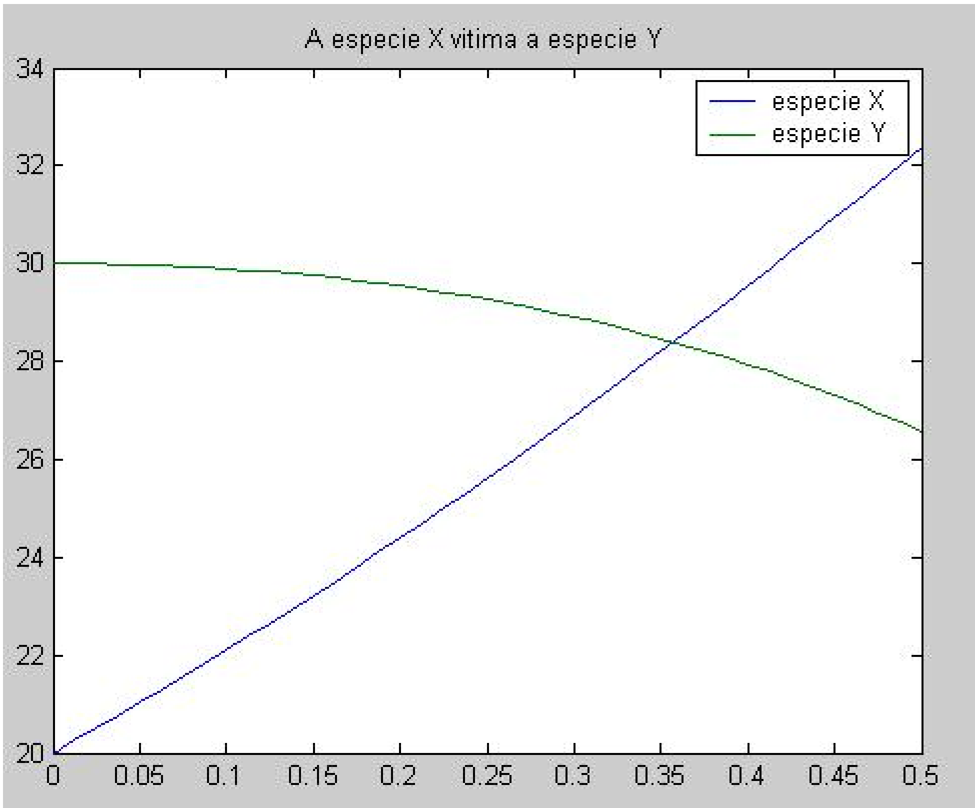
$$\begin{cases} x(t) = 10 + 10e^t(\cos t + \operatorname{sen} t) \\ y(t) = 20 + 10e^t(\cos t - \operatorname{sen} t) \end{cases}$$

Como já foram encontrada as duas equações em função do tempo, basta apenas analisar o que acontece com cada espécie. Observando o gráfico, fica fácil de perceber como a espécie X cresce e a Y decresce em um curto intervalo de tempo. Vale destacar que o gráfico quando plotado em um intervalo de tempo maior, será uma espirar.Mas no caso do problema é interessante analisar em um intervalo pequeno.

```
COMANDOS:

function yp=prob2(t,y)
```

```
yp=[y(1)+y(2)-30;-y(1)+y(2)-10]
```

```
>> t0=0;
>> tf=.5;
>> y0=[20 30]';
>> [t,y]=ode45('prob2',[t0 tf],y0);
>> plot(t,y)
>> title('A especie X vitima a especie Y')
>> legend('especie X','especie Y')
```



Problema 3 Resolver o sistema de equação diferencial não homogênea, sendo dados que $x(0) = 3$ e $y(0) = 2$ e que:

$$\begin{cases} x' = x + y - 5t + 2 \\ y' = 4x - 2y - 8t - 8 \end{cases}$$

Analisar, também, o que ocorre com $x(t)$ e $y(t)$ com o passar o tempo (t).

Resolução: Tomo a primeira equação e isolo y:

$$x' = x + y - 5t + 2$$

$$y = x' - x + 5t - 2$$

Derivando: $y' = x'' - x' + 5$

Então substituindo na segunda equação:

$$y' = 4x - 2y - 8t - 8$$

$$x'' - x' + 5 = 4x - 2(x' - x + 5t - 2) - 8t - 8$$

$$x'' - x' + 5 = 4x - 2x' + 2x - 10t + 4 - 8t - 8$$

$$x'' + x' - 6x = -18t - 9$$

Tomo a equação homogênea $x'' + x' - 6 = 0$, e resolvendo-a:

$$r^2 + r - 6 = 0$$

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$r = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

Logo $r = 2$ ou $r = -3$.

Portanto e^{2t} e e^{-3t} são soluções da equação diferencial homogênea e, daí, $x_h = c_1e^{2t} + c_2e^{-3t}$ é a solução geral da equação homogênea, sendo c_1 e c_2 constantes.

Preciso agora encontrar a solução da equação não-homogênea $x'' + x' - 6x = -18t - 9$.

Para isso vou utilizar do Método de Variação dos Parâmetros (MVP).

Logo tenho que:

$$\begin{cases} c_1'(t)e^{2t} + c_2'(t)e^{-3t} = 0 \\ c_1'(t)2e^{2t} + c_2'(t)(-3)e^{-3t} = -18t - 9 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} -6 & x = c_1(t)e^{2t} + c_2(t)e^{-3t} \\ 1 & x' = c_1(t)2e^{2t} + c_2(t)(-3)e^{-3t} + \left[c_1'(t)e^{2t} + c_2'(t)e^{-3t} = 0\right] \\ 1 & x'' = c_1(t)4e^{2t} + c_2(t)9e^{-3t} + c_1'(t)2e^{2t} + c_2'(t)(-3)e^{-3t} \\ \hline & \quad 0 \ + \ 0 \ + \ c_1'(t)2e^{2t} \ + \ c_2'(t)(-3)e^{-3t} \ = \ -18t - 9 \end{array}$$

Resolvendo o sistema pela regra de Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{-3t} \\ 2e^{2t} & -3e^{-3t} \end{vmatrix} = -3e^{-t} - 2e^{-t} = -5e^{-t}$$

$$\Delta c_1' = \begin{vmatrix} 0 & e^{-3t} \\ -18t - 9 & -3e^{-3t} \end{vmatrix} = -e^{-3t}(-18t - 9)$$

$$\Delta c_2' = \begin{vmatrix} e^{2t} & 0 \\ 2e^{2t} & -18t - 9 \end{vmatrix} = e^{2t}(-18t - 9)$$

Então

$$c_1' = \frac{\Delta c_1'}{\Delta} = \frac{-e^{-3t}(-18t - 9)}{-5e^{-t}} = \frac{-1}{5}e^{-2t}(18t + 9)$$

$$c_2' = \frac{\Delta c_2'}{\Delta} = \frac{e^{2t}(-18t - 9)}{-5e^{-t}} = \frac{1}{5}e^{3t}(18t + 9)$$

Mas preciso encontrar c_1 e c_2:

$$c_1 = \int c_1' dt = \int \frac{-1}{5}e^{-2t}(18t + 9)dt$$

$$c_1 = \frac{-1}{5}\int e^{-2t}(18t + 9)dt$$

$$c_1 = \frac{-1}{5}\int 18te^{-2t} + 9e^{-2t}dt$$

$$c_1 = \frac{-1}{5}\left[\int (18te^{-2t}dt + \int 9e^{-2t})dt\right]$$

Vou ter que resolver a integração por partes. Utilizando da tabela de integrais tenho que:

$$\int t^n e^{at}dt = \frac{t^n e^{at}}{a} - \frac{n}{a}\int t^{n-1}e^{at}dt$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\int 18te^{-2t}dt &= 18\int te^{-2t}dt \\
&= 18\left[\frac{te^{-2t}}{-2} + \frac{1}{2}\int t^0 e^{-2t}dt\right] \\
&= 18\left[\frac{te^{-2t}}{-2} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-2t}}{-2} + a_1\right)\right] \\
&= 18\left[\frac{-te^{-2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{4} + \frac{a_1}{2}\right]
\end{aligned}$$

onde a_1 é constante.

Portanto:

$$c_1 = \frac{-1}{5}\left[18\left(\frac{-te^{-2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{4} + \frac{a_1}{2}\right) + \int 9e^{-2t}dt\right]$$

$$c_1 = \frac{-1}{5}\left[-9te^{-2t} - \frac{9e^{-2t}}{2} + 9a_1 + \frac{9e^{-2t}}{-2} + 9a_2\right]$$

$$c_1 = \frac{-1}{5}\left[-9te^{-2t} - 9e^{-2t} + k_1\right] \quad \text{onde } k_1 = 9a_1 + 9a_2.$$

$$c_1 = \frac{9te^{-2t}}{5} + \frac{9e^{-2t}}{5} - \frac{k_1}{5}$$

Para encontrar c_2, parto do mesmo princípio que c_1:

$$c_2 = \int c_2' dt = \int \frac{1}{5}e^{3t}(18t+9)dt$$

$$c_2 = \frac{1}{5}\int 18te^{3t} + 9e^{3t}dt$$

$$c_2 = \frac{1}{5}\left[\int (18te^{3t}dt + \int 9e^{3t})dt\right]$$

Utilizando novamente a tabela de integração por partes:

$$\begin{aligned}
18\int te^{3t}dt &= 18\left(\frac{te^{3t}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3t}dt\right) \\
&= 18\left(\frac{te^{3t}}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{e^{3t}}{3} + b_1\right)\right) \quad b_1 \text{ constante} \\
&= 18\left(\frac{te^{3t}}{3} - \frac{e^{3t}}{9} - \frac{b_1}{3}\right) \\
&= 6te^{3t} - 2e^{3t} - 6b_1
\end{aligned}$$

Portanto:

$$c_2 = \frac{1}{5}\left[6te^{3t} - 2e^{3t} - 6b_1 + 9\int e^{3t}dt\right]$$

$$c_2 = \frac{1}{5}\left[6te^{3t} - 2e^{3t} - 6b_1 + 3e^{3t} + 9b_2\right] \quad b_2 \text{ constante}$$

$$c_2 = \frac{6te^{3t}}{5} + \frac{e^{3t}}{5} + \frac{k_2}{5}$$

onde $k_2 = -6b_1 + 9b_2$.

Como

$$x(t) = c_1(t)e^{2t} + c_2 e^{-3t}$$

$$x(t) = \left(\frac{9te^{-2t}}{5} + \frac{9e^{-2t}}{5} - \frac{k_1}{5}\right)e^{2t} + \left(\frac{6te^{3t}}{5} + \frac{e^{3t}}{5} + \frac{k_2}{5}\right)e^{-3t}$$

$$x(t) = \frac{9t}{5} + \frac{9}{5} - \frac{k_1e^{2t}}{5} + \frac{6t}{5} + \frac{1}{5} + \frac{k_2e^{-3t}}{5}$$

$$x(t) = 3t + 2 - \frac{k_1e^{2t}}{5} + \frac{k_2e^{-3t}}{5}$$

Mas $y(t) = x' - x + 5t - 2$

Se $x = 3t + 2 - \frac{k_1e^{2t}}{5} + \frac{k_2e^{-3t}}{5}$

$$x' = 3 - \frac{2k_1e^{2t}}{5} - \frac{3k_2e^{-3t}}{5}$$

Portanto

$$y(t) = 3 - \frac{2k_1e^{2t}}{5} - \frac{3k_2e^{-3t}}{5} - 3t - 2 + \frac{k_1e^{2t}}{5} - \frac{k_2e^{-3t}}{5} + 5t - 2$$

$$y(t) = 2t - 1 - \frac{k_1e^{2t}}{5} - \frac{4k_2e^{-3t}}{5}$$

Falta apenas encontrar o valor de k_1 e k_2. Mas sei que $x(0) = 3$ e $y(0) = 2$. Logo

$$x(0) = 3 \cdot 0 + 2 - \frac{k_1e^{2\cdot 0}}{5} + \frac{k_2e^{-3\cdot 0}}{5}$$

$$3 = 2 - \frac{k_1}{5} + \frac{k_2}{5}$$

$$15 = 10 - k_1 + k_2$$

$$k_2 - k_1 = 5$$

$$y(0) = 2 \cdot 0 - 1 - \frac{k_1e^{2\cdot 0}}{5} - \frac{4k_2e^{-3\cdot 0}}{5}$$

$$2 = -1 - \frac{k_1}{5} - \frac{4k_2}{5}$$

$$10 = -5 - k_1 - 4k_2$$

$$k_1 + 4k_2 = -15$$

Assim tenho que resolver o sistema:

$$\begin{cases} k_2 - k_1 = 5 \\ 4k_2 + k_1 = -15 \end{cases}$$

Somando as duas equações:

$$5k_2 = -10$$

$$k_2 = -2$$

Se $k_2 = -2$; $k_1 = -2 - 5 = -7$.

Então a resposta do problema e:

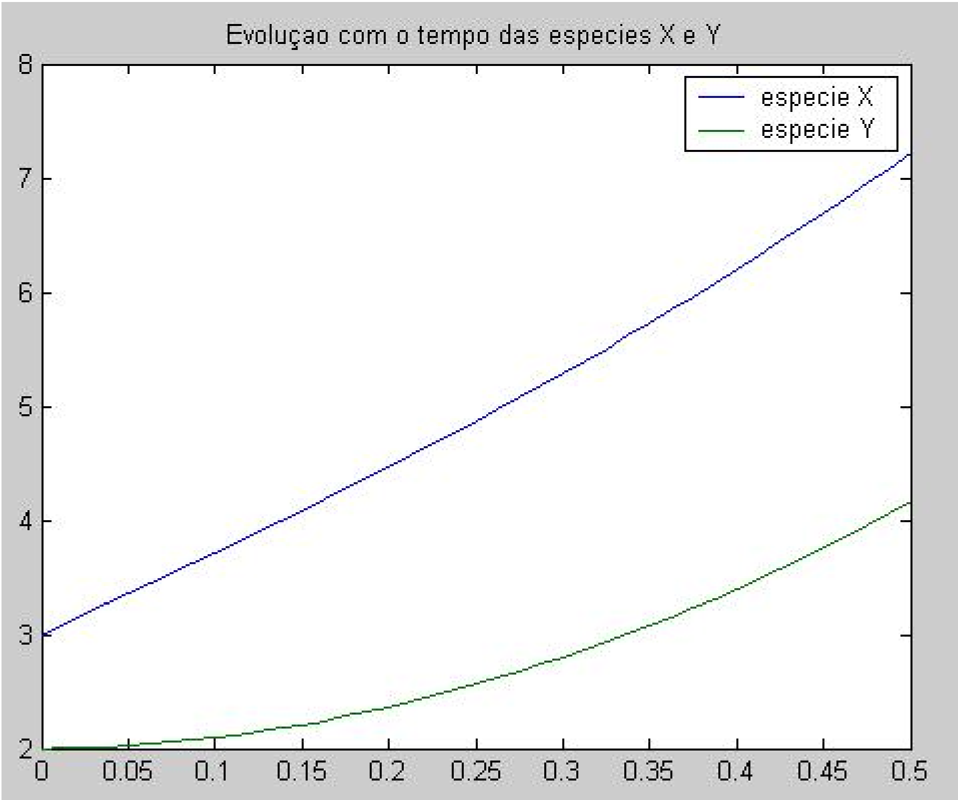
$$x(t) = 3t + 2 + \frac{7e^{2t}}{5} - \frac{2e^{-3t}}{5}$$

$$y(t) = 2t - 1 + \frac{7e^{2t}}{5} + \frac{8e^{-3t}}{5}$$

Analisando o gráfico destas funções é possível perceber o crescimento de cada uma em um curto intervalo de tempo, onde fica claro que a espécie X cresce muito mais rápido que a espécie Y.

```
COMANDOS:

function yp = prob3(t,y)


yp=[y(1)+y(2)-5*t+2 ; 4*y(1)-2*y(2)-8*t-8]



>> t0=0;

>> tf=.5;

>> y0=[3 2]';

>> [t,y]=ode45('prob3',[t0 tf],y0);
```

```
>> plot(t,y)
>> title('Evoluçao com o tempo das especies X e Y')
>> legend('especie X','especie Y')
```



Capítulo 3

Vibrações Livres Forçadas

O movimento de uma partícula é determinado pelas forças agindo sobre ela. A segunda Lei de Newton é uma equação diferencial que diz como a velocidade e a posição da partícula mudam.

De acordo com a segunda Lei de Newton, para um objeto de massa m tenho a seguinte equação do movimento:

$$F = m.a$$

onde F é a força resultante e a é a aceleração da massa m.

Mas posso dizer que $a = y''$ então fico com:

$$F = m.y''$$

A força resultante de um sistema massa-mola é o mesmo que a força de restauração do sistema (Lei de Hooke) acrescido da força externa, não levando em consideração o atrito.

Como $F = m.y''$, para um sistema massa-mola tenho que

$$-ky + F_0 \cos(\omega t) = my''$$

onde, $-ky$ representa a força de restauração do sistema massa-mola (Lei de Hooke) e $F_0 \cos(\omega t)$ representa uma força externa, sendo F_0 uma força inicial e ω freqüência angular constante.

Dividindo a equação pela massa m tenho:

$$y'' = \frac{-k}{m}y + \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

ou

$$y'' + \frac{k}{m}y = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

Para simplificar chamo $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ = constante. (ω_0 é chamada freqüência angular natural).

Logo tenho que:

$$y'' + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

Esta é, portanto, a equação diferencial que representa a segunda Lei de Newton para o sistema massa-mola.

3.1 Três Osciladores Forçados

A seguir estarei resolvendo e analisando três equações diferenciais lineares que apresentam a forma da equação da segunda Lei de Newton. São elas:

I) $y'' + 1.y = 0,5\cos(0,8t)$

II) $y'' + 0,85y = 0,5\cos(1.t)$

III) $y'' + 1.y = 0,5\cos(1.t)$

Sendo que todas estão sujeitas às seguintes condições: $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

Resolução da Equação I

$$y'' + 1y = 0,5\cos(0,8t)$$

Tomo primeiramente a equação homogênea $y'' + 1y = 0$, e resolvendo-a:

$$r^2 + 1 = 0$$

$$r^2 = -1$$

$$r = \pm\sqrt{-1}$$

$$r = \pm i$$

Portanto e^{it} e e^{-it} são soluções da equação diferencial homogênea, e daí $y_h = \ c_1e^{it} + \ c_2e^{-it}$ é a solução geral desta equação, sendo c_1 e c_2 constantes.

Preciso agora encontrar a solução da equação não homogênea

$$y'' + 1y = 0,5\cos(0,8t)$$

Para fazer isso, vou utilizar o Método de Variação dos Parâmetros, onde terei que encontrar os parâmetros variantes $c_1(t)$ e $c_2(t)$ tal que $y_p(t) = c_1(t)e^{it} + c_2(t)e^{-it}$ seja a solução da equação não homogênea.

Monto então o quadro:

$$\begin{array}{c|l}
1 & y_p = c_1(t)e^{it} + c_2(t)e^{-it} \\
0 & y_p' = c_1(t)ie^{it} + c_2(t)(-i)e^{-it} + \left[c_1'(t)e^{it} + c_2'(t)e^{-it} = 0\right] \\
1 & y_p'' = c_1(t)i^2e^{it} + c_2(t)i^2e^{-it} + c_1'(t)ie^{it} + c_2'(t)(-i)e^{-it} \\
\hline
 & \quad 0 \ + \ 0 \ + \ c_1'(t)ie^{it} \ + \ c_2'(t)(-i)e^{-it} \ = \ 0,5\cos(0,8t)
\end{array}$$

Logo tenho que:

$$\begin{cases} c_1'(t)e^{it} + c_2'(t)e^{-it} = 0 \\ c_1'(t)ie^{it} - c_2'(t)ie^{-it} = 0,5\cos(0,8t) \end{cases}$$

Resolvendo pela Regra de Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{-it} \end{vmatrix} = -i - i = -2i$$

$$\Delta c_1' = \begin{vmatrix} 0 & e^{-it} \\ 0,5\cos(0,8t) & -ie^{-it} \end{vmatrix} = -e^{-it}0,5\cos(0,8t)$$

$$\Delta c_2' = \begin{vmatrix} e^{it} & 0 \\ ie^{it} & 0,5\cos(0,8t) \end{vmatrix} = e^{it}0,5\cos(0,8t)$$

Então

$$c_1' = \frac{\Delta c_1'}{\Delta} = \frac{-e^{-it}0,5\cos(0,8t)}{-2i} = \frac{0,25e^{-it}\cos(0,8t)}{i}$$

$$c_2' = \frac{\Delta c_2'}{\Delta} = \frac{e^{it}0,5\cos(0,8t)}{-2i} = \frac{-0,25e^{it}\cos(0,8t)}{i}$$

Para encontrar $c_1(t)$ e $c_2(t)$ basta integrar c_1' e c_2' respectivamente.

$$c_1(t) = \int \frac{0,25e^{-it}\cos(0,8t)}{i}dt = \frac{0,25}{i}\int e^{-it}\cos(0,8t)dt$$

Utilizando a Tabela de Integrais tenho que:

$$\int e^{ct}\cos(bt)dt = \frac{e^{ct}}{c^2+b^2}(c\cos(bt) + b\,\mathrm{sen}(bt)) + K$$

com k constante.

Logo

$$c_1(t) = \frac{0,25}{i}\left[\frac{e^{-it}}{(-i)^2+(0,8)^2}(-i\cos(0,8t) + 0,8\,\mathrm{sen}(0,8t))\right] + K_1$$

$$c_1(t) = \frac{0,25e^{-it}}{-0,36i}(-i\cos(0,8t) + 0,8\,\mathrm{sen}(0,8t)) + K_1$$

$$c_1(t) = \frac{0,25e^{-it}\cos(0,8t)}{0,36} - \frac{0,2e^{-it}\,\mathrm{sen}(0,8t)}{0,36i} + K_1$$

com K_1 constante.

Falta encontrar $c_2(t)$

$$c_2(t) = \int \frac{-0,25e^{it}\cos(0,8t)}{i}dt = \frac{-0,25}{i}\int e^{it}\cos(0,8t)dt$$

$$c_2(t) = \frac{-0,25}{i}\left[\frac{e^{it}}{i^2+(0,8)^2}(i\cos(0,8t) + 0,8\,\mathrm{sen}(0,8t))\right] + K_2$$

$$c_2(t) = \frac{0,25e^{it}}{0,36i}(i\cos(0,8t) + 0,8\,\mathrm{sen}(0,8t)) + K_2$$

$$c_2(t) = \frac{0,25e^{it}\cos(0,8t)}{0,36} + \frac{0,2e^{it}\,\mathrm{sen}(0,8t)}{0,36i} + K_2$$

com K_2 constante.

Como $y(t) = c_1(t)e^{it} + c_2(t)e^{-it}$, substituindo tenho:

$$y(t) = \left(\frac{0,25e^{-it}\cos(0,8t)}{0,36} - \frac{0,2e^{-it}\,\mathrm{sen}(0,8t)}{0,36i} + K_1\right)e^{it} +$$

$$+\left(\frac{0,25e^{it}\cos(0,8t)}{0,36}+\frac{0,2e^{it}\,\mathrm{sen}(0,8t)}{0,36i}+K_2\right)e^{-it}$$

$$y(t)=\frac{0,25\cos(0,8t)}{0,36}+K_1e^{it}+\frac{0,25\cos(0,8t)}{0,36}+K_2e^{-it}$$

$$y(t)=\frac{0,5\cos(0,8t)}{0,36}+K_1e^{it}+K_2e^{-it}$$

Preciso encontrar o valor das constantes K_1 e K_2.

Para isso, vou utilizar das condições iniciais que foram dadas ($y(0)=0$ e $y'(0)=0$).

Se $y(0)=0$

$$0=\frac{0,5\cos 0}{0,36}+K_1+K_2$$

$$K_1+K_2=\frac{-0,5}{0,36}$$

Se $y'(0)=0$

$$y'(t)=\frac{-0,5\,\mathrm{sen}(0,8t)0,8}{0,36}+K_1e^{it}i+K_2e^{-it}(-i)$$

$$0=\frac{-0,5.0,8\,\mathrm{sen}\,0}{0,36}+iK_1-iK_2$$

$$iK_1-iK_2=0$$

$$K_1-K_2=0$$

Logo

$$\begin{cases}K_1+K_2=\dfrac{-0,5}{0,36}\\[2ex] K_1-K_2=0\end{cases}$$

$$2K_1=\frac{-0,5}{0,36}$$

$$K_1=\frac{-0,5}{0,72}$$

Então $K_2=\dfrac{-0,5}{0,72}$ já que $K_2=K_1$.

Portanto

$$y(t)=\frac{0,5\cos(0,8t)}{0,72}-\frac{0,5e^{it}}{0,72}-\frac{0,5e^{-it}}{0,72}$$

é a solução da equação $y''+1y=0,5\cos(0,8t)$.

Mas desejo escrever esta solução de uma forma mais simplificada.

Primeiramente, para eliminar a solução complexa, vou aplicar a fórmula de Euler.

Logo fico com:

$$y(t) = \frac{0,5\cos(0,8t)}{0,36} - \frac{0,5}{0,72}(\cos t + i\,\mathrm{sen}\,t) - \frac{0,5}{0,72}(\cos t - i\,\mathrm{sen}\,t)$$

$$y(t) = \frac{0,5\cos(0,8t)}{0,36} - \frac{\cos t}{0,72}$$

$$y(t) = \frac{\cos(0,8t) - \cos t}{0,72}$$

Note que, $\cos(0,8t) - \cos t = \cos(a+b) - \cos(a-b)$, onde:

$$\begin{cases} a + b = 0,8t \\ a - b = t \end{cases}$$

logo, $a = 0,9t$ e $b = -0,1t$.

Mas,

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = \cos a \cos b - \mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,b - [\cos a \cos b + \mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,b]$$

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\,\mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,b$$

Logo $\cos(0,8t) - \cos t = -2\,\mathrm{sen}(0,9t) \cdot \mathrm{sen}(-0,1t)$.

Como a função seno é ímpar

$$\cos(0,8t) - \cos t = 2\,\mathrm{sen}(0,9t)\,\mathrm{sen}(0,1t)$$

Logo,

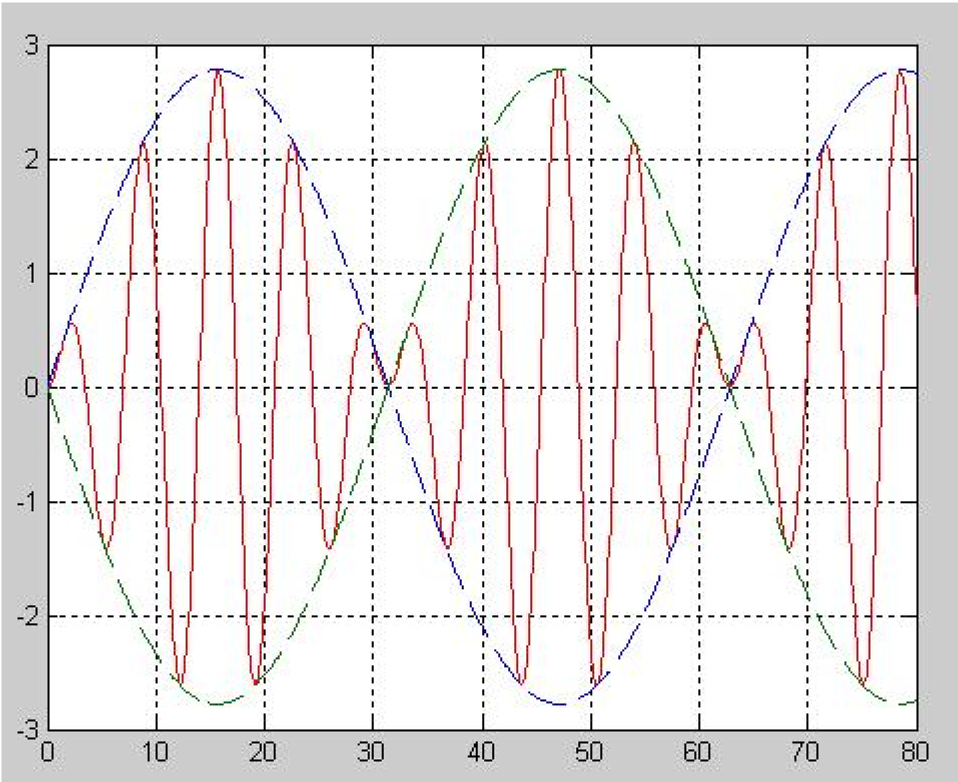
$$y(t) = \frac{2\,\mathrm{sen}(0,9t)\,\mathrm{sen}(0,1t)}{0,72}$$

$$y(t) = 2,77778\,\mathrm{sen}(0,9t)\,\mathrm{sen}(0,1t)$$

Esta solução pode ser representada através do gráfico que segue.

Analisando-o é possível perceber o comportamento das oscilações.

```
Comandos:

>> t=0:.1:80;

>> y=2.77778*sin(.1*t).*sin(.9*t);

>> y1=2.77778*sin(.1*t);

>> y2=-2.77778*sin(.1*t);

>> plot(t,y,'r',t,y1,'--',t,y2,'--')

>> grid on
```



Resolução da Equação II

$$y'' + 0,85y = 0,5\cos(1t)$$

Tomo a equação homogênea $y'' + 0,85y = 0$, e resolvendo-a:

$$r^2 + 0,85 = 0$$

$$r^2 = -0,85$$

$$r = \pm\sqrt{-0,85}$$

$$r = \pm\sqrt{0.85}i$$

Portanto $e^{\sqrt{0,85}it}$ e $e^{-\sqrt{0,85}it}$ são soluções da equação diferencial homogênea, e $y_h = c_1e^{\sqrt{0,85}it} + c_2e^{-\sqrt{0,85}it}$ é a solução geral desta equação, com c_1 e c_2 constantes.

Para encontrar a solução da equação não homogênea $y'' + 0,85y = 0,5\cos(1t)$, vou seguir o mesmo raciocínio que fiz para resolver a equação I, utilizando novamente o Método de Variação de Parâmetros.

Agora tenho o seguinte quadro:

$$\begin{array}{r|l}
0,85 & y_p = c_1(t)e^{\sqrt{0,85}it} + c_2(t)e^{-\sqrt{0,85}it} \\
0 & y_p' = c_1(t)e^{\sqrt{0,85}it}(\sqrt{0,85}i) + c_2(t)e^{-\sqrt{0,85}it}(-\sqrt{0,85}i) + \left[c_1'(t)e^{\sqrt{0,85}it} + c_2'(t)e^{-\sqrt{0,85}it} = 0\right] \\
1 & y_p'' = c_1(t)e^{\sqrt{0,85}it}.0,85i^2 + c_2(t)e^{-\sqrt{0,85}it}.0,85i^2 + c_1'(t)e^{\sqrt{0,85}it}\sqrt{0,85}i + c_2'(t)e^{-\sqrt{0,85}it}(-\sqrt{0,85}i) \\
\hline
 & 0 \ + \ 0 \ + \ c_1'(t)e^{\sqrt{0,85}it}(\sqrt{0,85}i) \ - \ c_2'(t)e^{-\sqrt{0,85}it}(\sqrt{0,85}i) \ = \ 0,5\cos t
\end{array}$$

Logo tenho que:

$$\begin{cases} c_1'(t)e^{\sqrt{0,85}it} + c_2'(t)e^{-\sqrt{0,85}it} = 0 \\ c_1'(t)e^{\sqrt{0,85}it}(\sqrt{0,85}i) - c_2'(t)e^{-\sqrt{0,85}it}(\sqrt{0,85}i) = 0,5\cos t \end{cases}$$

Resolvendo o sistema pela Regra de Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{0,85}it} & e^{-\sqrt{0,85}it} \\ e^{\sqrt{0,85}it}(\sqrt{0,85}i) & -e^{-\sqrt{0,85}it}(\sqrt{0,85}i) \end{vmatrix} = -\sqrt{0,85}i - \sqrt{0,85}i = -2\sqrt{0,85}i$$

$$\Delta c_1' = \begin{vmatrix} 0 & e^{-\sqrt{0,85}it} \\ 0,5\cos t & -e^{-\sqrt{0,85}it}(\sqrt{0,85}i) \end{vmatrix} = -0,5e^{-\sqrt{0,85}it}\cos t$$

$$\Delta c_2' = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{0,85}it} & 0 \\ e^{\sqrt{0,85}it}(\sqrt{0,85}i) & 0,5\cos t \end{vmatrix} = 0,5e^{\sqrt{0,85}it}\cos t$$

Então

$$c_1' = \frac{\Delta c_1'}{\Delta} = \frac{-0,5e^{-\sqrt{0,85}it}\cos t}{-2\sqrt{0,85}i} = \frac{0,25e^{-\sqrt{0,85}it}\cos t}{\sqrt{0,85}i}$$

$$c_2' = \frac{\Delta c_2'}{\Delta} = \frac{0,5e^{\sqrt{0,85}it}\cos t}{-2\sqrt{0,85}i} = \frac{-0,25e^{\sqrt{0,85}it}\cos t}{\sqrt{0,85}i}$$

Integrando c_1' e c_2' tenho:

$$c_1(t)=\int \frac{0,25e^{-\sqrt{0,85}it}\cos t}{\sqrt{0,85}i}dt=\frac{0,25}{\sqrt{0,85}i}\int e^{-\sqrt{0,85}it}\cos t dt$$

Utilizando a mesma integral da tabela de Integrais da equação I, tenho que:

$$c_1(t)=\frac{0,25}{\sqrt{0,85}i}\left[\frac{e^{-\sqrt{0,85}it}}{(-\sqrt{0,85}i)^2+1^2}(-\sqrt{0,85}i\cos t+1\,\mathrm{sen}\,t)\right]+K_1$$

$$c_1(t)=\frac{0,25e^{-\sqrt{0,85}it}}{0,15\sqrt{0,85}i}(-\sqrt{0,85}i\cos t+\mathrm{sen}\,t)+K_1$$

$$c_1(t)=\frac{-0,25e^{-\sqrt{0,85}it}\cos t}{0,15}+\frac{0,25e^{-\sqrt{0,85}it}\,\mathrm{sen}\,t}{0,15\sqrt{0,85}i}+K_1$$

com K_1 constante, e

$$c_2(t)=\int \frac{-0,25e^{\sqrt{0,85}it}\cos t}{\sqrt{0,85}i}dt=\frac{-0,25}{\sqrt{0,85}i}\int e^{\sqrt{0,85}it}\cos t dt$$

$$c_2(t)=\frac{-0,25}{\sqrt{0,85}i}\left[\frac{e^{\sqrt{0,85}it}}{(\sqrt{0,85}i)^2+1^2}(\sqrt{0,85}i\cos t+1\,\mathrm{sen}\,t)\right]+K_2$$

$$c_2(t)=\frac{-0,25e^{\sqrt{0,85}it}}{0,15\sqrt{0,85}i}(\sqrt{0,85}i\cos t+\mathrm{sen}\,t)+K_2$$

$$c_2(t)=\frac{-0,25e^{\sqrt{0,85}it}\cos t}{0,15}-\frac{0,25e^{\sqrt{0,85}it}\,\mathrm{sen}\,t}{0,15(\sqrt{0,85})i}+K_2$$

com K_2 constante.

Como $y(t)=c_1(t)e^{\sqrt{0,85}it}+c_2(t)e^{-\sqrt{0,85}it}$, substituindo $c_1(t)$ e $c_2(t)$ tenho:

$$y(t)=\left(\frac{-0,25e^{-\sqrt{0,85}it}\cos t}{0,15}+\frac{0,25e^{-\sqrt{0,85}it}\,\mathrm{sen}\,t}{0,15\sqrt{0,85}i}+K_1\right)e^{\sqrt{0,85}it}+$$

$$+\left(\frac{-0,25e^{\sqrt{0,85}it}\cos t}{0,15}-\frac{0,25e^{\sqrt{0,85}it}\,\mathrm{sen}\,t}{0,15\sqrt{0,85}i}+K_2\right)e^{-\sqrt{0,85}it}$$

$$y(t)=\frac{-0,25\cos t}{0,15}+K_1e^{\sqrt{0,85}it}-\frac{0,25\cos t}{0,15}+K_2e^{-\sqrt{0,85}it}$$

$$y(t)=\frac{-0,5\cos t}{0,15}+K_1e^{\sqrt{0,85}it}+K_2e^{-\sqrt{0,85}it}$$

Preciso agora encontrar o valor das constantes K_1 e K_2.

Para isso utilizo as condições iniciais ($y(0)=0$ e $y'(0)=0$).

Se $y(0) = 0$, tenho que:

$$0 = \frac{-0,5\cos 0}{0,15} + K_1 + K_2$$

$$K_1 + K_2 = \frac{0,5}{0,15}$$

Se $y'(0) = 0$, tenho que:

$$y'(t) = \frac{0,5\,\mathrm{sen}\,t}{0,15} + K_1 e^{\sqrt{0,85}it}(\sqrt{0,85}i) - K_2 e^{-\sqrt{0,85}it}(\sqrt{0,85}i)$$

$$0 = \frac{0,5\,\mathrm{sen}\,0}{0,15} + K_1(\sqrt{0,85}i) - K_2(\sqrt{0,85}i)$$

$$K_1(\sqrt{0,85}i) - K_2(\sqrt{0,85}i) = 0$$

$$K_1 - K_2 = 0$$

Logo tenho:

$$\begin{cases} K_1 + K_2 = \dfrac{0,5}{0,15} \\ K_1 - K_2 = 0 \end{cases}$$

$$2K_1 = \frac{0,5}{0,15}$$

$$K_1 = \frac{0,5}{0,3}$$

Então $K_2 = \dfrac{0,5}{0,3}$ já que $K_2 = K_1$.

Portanto $y(t) = \dfrac{-0,5\cos t}{0,15} + \dfrac{0,5e^{\sqrt{0,85}it}}{0,3} + \dfrac{0,5e^{-\sqrt{0,85}it}}{0,3}$ é solução da equação $y'' + 0,85y = 0,5\cos t$.

Mas quero escrever esta solução de uma forma mais simplificada.

Aplicando a Fórmula de Euler:

$$y(t) = \frac{-0,5\cos t}{0,15} + \frac{0,5}{0,3}(\cos(\sqrt{0,85}t) + i\,\mathrm{sen}(\sqrt{0,85}t)) + \frac{0,5}{0,3}(\cos(\sqrt{0,85}t) - i\,\mathrm{sen}(\sqrt{0,85}t))$$

$$y(t) = \frac{-0,5\cos t}{0,15} + \frac{\cos(\sqrt{0,85}t)}{0,3}$$

$$y(t) = \frac{-\cos t + \cos(\sqrt{0,85}t)}{0,3}$$

Posso dizer, como fiz na resolução da equação anterior, que $\cos(\sqrt{0,85}t) - \cos t = \cos(a+b) - \cos(a-b)$, onde:

$$\begin{cases} a+b = \sqrt{0,85}t \\ a-b = t \end{cases}$$

logo, $a = \dfrac{t(\sqrt{0,85}+1)}{2}$ e $b = \dfrac{t(\sqrt{0,85}-1)}{2}$.

Mas já sei que $\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\,\mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,b$.

Logo,

$$\cos(\sqrt{0,85}t) - \cos t = -2\,\mathrm{sen}\left(\frac{(\sqrt{0,85}+1)t}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{(\sqrt{0,85}-1)t}{2}\right)$$

$$\cos(\sqrt{0,85}t) - \cos t = -2\,\mathrm{sen}(0,96t)\,\mathrm{sen}(-0,04t)$$

$$\cos(\sqrt{0,85}t) - \cos t = 2\,\mathrm{sen}(0,96t)\,\mathrm{sen}(0,04t)$$

Logo

$$y(t) = \frac{2\,\mathrm{sen}(0,96t)\,\mathrm{sen}(0,04t)}{0,3}$$

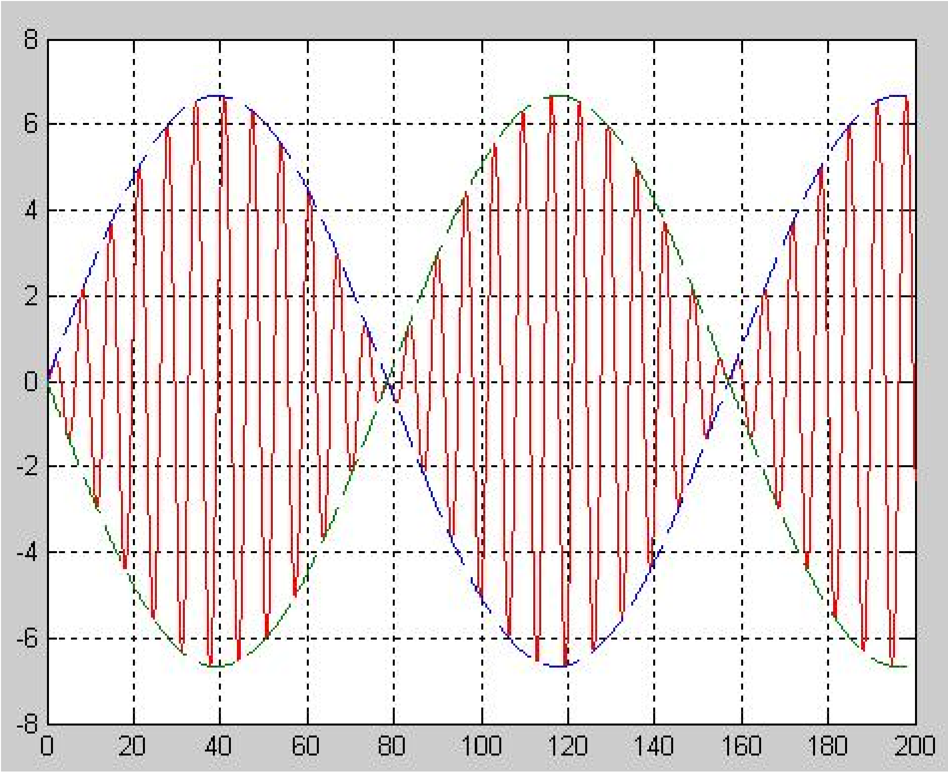
$$y(t) = 6,66667\,\mathrm{sen}(0,96t)\,\mathrm{sen}(0,04t)$$

A solução acima está representada no gráfico a seguir.

Analisando-o é possível perceber também o comportamento das oscilações.

Comparando com o gráfico da equação anterior, percebe-se semelhanças, porém com mudanças no valor da amplitude e do período. Logo, ambas possum freqüências distintas.

```
Comandos:
>> t=0:.1:200;
>> y=6.66667*sin(.04*t).*sin(.96*t);
>> y1=6.66667*sin(.04*t);
>> y2=-6.66667*sin(.04*t);
>> plot(t,y,'r',t,y1,'--',t,y2,'--')
>> grid on
```



Resolução da Equação III

$$y'' + 1y = 0,5\cos(1 \cdot t)$$

Tomo a equação homogênea $y'' + y = 0$, e resolvendo-a:

$$r^2 + 1 = 0$$

$$r^2 = -1$$

$$r = \pm\sqrt{-1}$$

$$r = \pm i$$

Portanto e^{it} e e^{-it} são soluções complexas da equação diferencial homogênea, e $y_h = c_1e^{it} + c_2e^{-it}$ é a solução geral desta equação, com c_1 e c_2 constantes.

Para simplificar os cálculos vou utilizar a fórmula de Euler em y_h, e em seguida, vou resolve-la pelo Método de Variação de Parâmetros.

Então posso escrever y_h como:

$$y_h = c_1(\cos t + i\,\mathrm{sen}\,t) + c_2(\cos t - i\,\mathrm{sen}\,t)$$

$$y_h = (c_1 + c_2)\cos t + (ic_1 - ic_2)\operatorname{sen} t$$

$$y_h = k_1 \cos t + k_2 \operatorname{sen} t$$

com k_1 e k_2 constantes.

Assim, tenho uma solução real da equação diferencial linear. Agora aplicando o MVP:

$$\begin{array}{c|l}
1 & y_p = k_1(t)\cos t + k_2(t)\operatorname{sen} t \\
0 & y_p' = -k_1(t)\operatorname{sen} t + k_2(t)\cos t + \left[k_1'(t)\cos t + k_2'(t)\operatorname{sen} t = 0\right] \\
1 & y_p'' = -k_1(t)\cos t - k_2(t)\operatorname{sen} t - k_1'(t)\operatorname{sen} t + k_2'(t)\cos t \\
\hline
 & \quad 0 \ + \ 0 \ - \ k_1'(t)\operatorname{sen} t \ + \ k_2'(t)\cos t \ = \ 0,5\cos t
\end{array}$$

Tenho então o sistema:

$$\begin{cases} k_1'(t)\cos t + k_2'(t)\operatorname{sen} t = 0 \\ -k_1'(t)\operatorname{sen} t + k_2'(t)\cos t = 0,5\cos t \end{cases}$$

Resolvendo-o:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

$$\Delta k_1' = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} t \\ 0,5\cos t & \cos t \end{vmatrix} = -0,5\cos t \operatorname{sen} t$$

$$\Delta k_2' = \begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ -\operatorname{sen} t & 0,5\cos t \end{vmatrix} = 0,5\cos^2 t$$

Logo:

$$k_1' = \frac{\Delta k_1'}{\Delta} = -0,5\cos t \operatorname{sen} t = -0,5\left(\frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\right)$$

$$k_2' = \frac{\Delta k_2'}{\Delta} = 0,5\cos^2 t$$

Integrando k_1' e k_2':

$$k_1(t) = \int \frac{-0,5\operatorname{sen}(2t)}{2} dt$$

$$k_1(t) = -\frac{1}{4}\int \operatorname{sen}(2t)dt$$

$$k_1(t) = -\frac{1}{4}\left(\frac{-\cos(2t)}{2}\right) + b_1$$

com b_1 constante

$$k_1(t) = \frac{1}{8}\cos(2t) + b_1$$

e

$$k_2(t) = \int 0,5\cos^2 t dt$$

$$k_2(t) = \frac{1}{2}\int \cos^2 t dt$$

$$k_2(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(t + \operatorname{sen} t \cos t)\right) + b_2$$

com b_2 constante

$$k_2(t) = \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} t \cos t + b_2$$

$$k_2(t) = \frac{t}{4} + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{8} + b_2$$

Como $y(t) = k_1(t)\cos t + k_2(t)\operatorname{sen} t$, substituindo tenho:

$$y(t) = \left(\frac{1}{8}\cos(2t) + b_1\right)\cos t + \left(\frac{t}{4} + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4} + b_2\right)\operatorname{sen} t$$

$$y(t) = \frac{\cos(2t)\cos t}{8} + b_1\cos t + \frac{t\operatorname{sen} t}{4} + \frac{\operatorname{sen}(2t)\operatorname{sen} t}{4} + b_2\operatorname{sen} t$$

Preciso encontrar o valor das constantes b_1 e b_2. Vou utilizar as condições iniciais, onde $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

Se $y(0) = 0$

$$0 = \frac{\cos(2.0)\cos 0}{8} + b_1\cos 0 + \frac{0.\operatorname{sen} 0}{4} + \frac{\operatorname{sen}(2.0)\operatorname{sen} 0}{4} + b_2\operatorname{sen} 0$$

Logo $b_1 = \dfrac{-1}{8}$.

Preciso, primeiramente, derivar a função $y(t)$.

$$y'(t) = \frac{1}{8}(\cos(2t)(-\operatorname{sen} t) + \cos t(-\operatorname{sen}(2t))2) - b_1\operatorname{sen} t + \frac{t}{4}\cos t +$$

$$+\frac{\operatorname{sen} t}{4} + \frac{1}{4}(\operatorname{sen}(2t)\cos t + \operatorname{sen} t\cos(2t)2) + b_2\cos t$$

$$y'(t) = \frac{-\cos(2t)\operatorname{sen} t}{8} - \frac{\operatorname{sen}(2t)\cos t}{4} - b_1 \operatorname{sen} t + \frac{t\cos t}{4} +$$
$$+\frac{\operatorname{sen} t}{4} + \frac{\operatorname{sen}(2t)\cos t}{4} + \frac{\operatorname{sen} t\cos(2t)}{2} + b_2 \cos t$$
$$y'(t) = \frac{3\cos(2t)\operatorname{sen} t}{8} - b_1 \operatorname{sen} t + b_2 \cos t + \frac{t\cos t}{4} + \frac{\operatorname{sen} t}{4}$$

Agora se $y'(0) = 0$

$$0 = \frac{3.\cos 0.\operatorname{sen} 0}{8} - b_1 \operatorname{sen} 0 + b_2 \cos 0 + \frac{0.\cos 0}{4} + \frac{\operatorname{sen} 0}{4}$$

Logo $b_2 = 0$

Portanto

$$y(t) = \left(\frac{1}{8}\cos(2t) - \frac{1}{8}\right)\cos t + \left(\frac{t}{4} + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{8}\right)\operatorname{sen} t$$

$$y(t) = \frac{\cos(2t)\cos t}{8} - \frac{\cos t}{8} + \frac{t\operatorname{sen} t}{4} + \frac{\operatorname{sen}(2t)\operatorname{sen} t}{8}$$
$$y(t) = \frac{(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t)\cos t}{8} - \frac{\cos t}{8} + \frac{t\operatorname{sen} t}{4} + \frac{(2\operatorname{sen} t\cos t)\operatorname{sen} t}{8}$$
$$y(t) = \frac{\cos^3 t}{8} - \frac{\operatorname{sen}^2 t\cos t}{8} - \frac{\cos t}{8} + \frac{t\operatorname{sen} t}{4} + \frac{2\operatorname{sen}^2 t\cos t}{8}$$
$$y(t) = \frac{\cos^3 t}{8} + \frac{\operatorname{sen}^2 t\cos t}{8} - \frac{\cos t}{8} + \frac{t\operatorname{sen} t}{4}$$
$$y(t) = \frac{\cos t}{8}\left(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t - 1\right) + \frac{t\operatorname{sen} t}{4}$$
$$y(t) = \frac{\cos t}{8}(1-1) + \frac{t\operatorname{sen} t}{4}$$
$$y(t) = \frac{t\operatorname{sen} t}{4}$$

ou

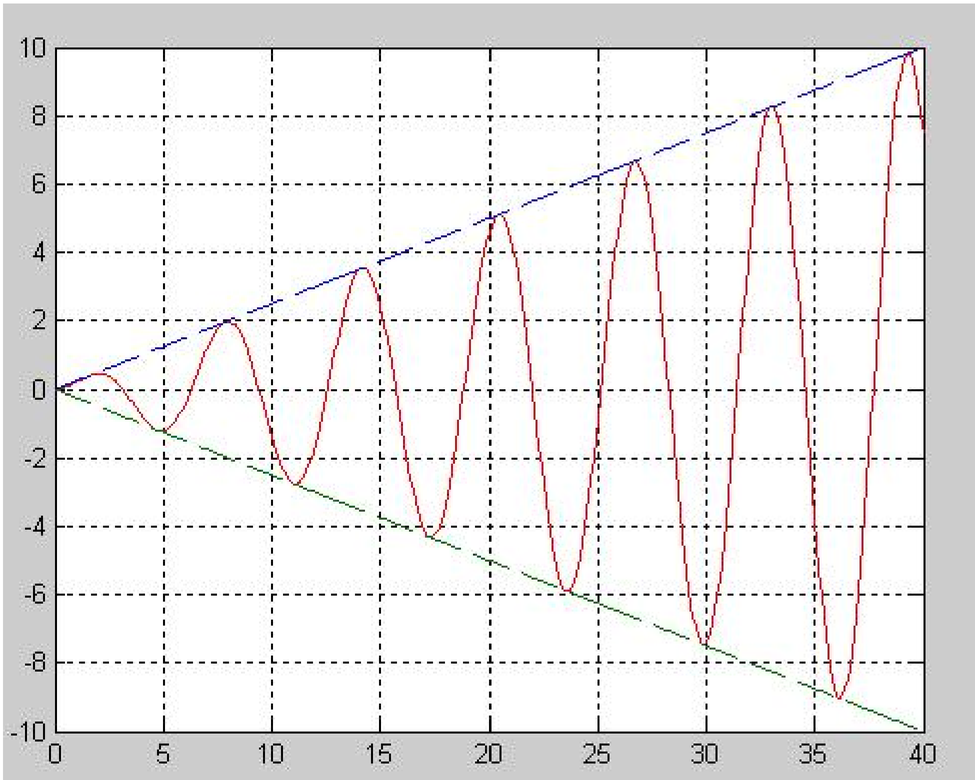
$$y(t) = 0,25t\operatorname{sen} t$$

Esta solução está representada geométricamente no gráfico que segue. Percebe-se que a amplitude das oscilações crescem infinitamente com o passar do tempo.

Este comportamento será melhor analisado no próximo tópico deste capítulo.

Comandos:

```
>> t=0:.1:40;
>> y=.25*t.*sin(t);
>> y1=.25*t;
>> y2=-.25*t;
>> plot(t,y,'r',t,y1,'--',t,y2,'--')
>> grid on
```



3.2 Ressonância

Ressonância Mecânica ou simplesmente ressonância é o fenômeno físico em que se registra a transferência de energia de um sistema oscilante para outro, quando a freqüência do primeiro coincide com a freqüência natural do segundo.

Este fenômeno tem aplicações importantes em todas as áreas da ciência.

Quando um sistema físico entra em ressonância, significa que este sistema passa a vibrar com amplitude progressivamente crescente, que tende ao maior valor possível.

Esta situação ocorreu na equação III, onde posso perceber que realmente as freqüências ω_0 e ω possuem o mesmo valor.

Um caso bastante interessante de ressonância foi o ocorrido com a Ponte de Tacoma.

Encontrei a história no livro Equações Diferenciais e Suas Aplicações, de Martin Braun e resolvi transcreve-la aqui como curiosidade.

A Catástrofe Da Ponte De Tacoma

Em 19 de julho de 1940, a estreita Ponte de Tacoma em Pudget Sound no Estado de Washington foi terminada e aberta ao público. Desde o dia de sua abertura a ponte começou a sofrer oscilações verticais, e breve foi apelidado a "Gertie Galopante". Estranho como possa parecer, o tráfego sobre a ponte aumentou extraordinariamente como resultado de seu novo comportamento. As pessoas vinham de centenas de quilômetros em seus carros para apreciar a curiosa emoção de rodar sobre uma ponte galopante, oscilante. Por quatro meses, a ponte foi um comércio próspero. À medida que os dias passavam, as autoridades encarregadas tornavam-se mais e mais confiantes da segurança da ponte – tanto que, de fato, estavam planejando cancelar a polícia de segurança na ponte.

A partir de aproximadamente 7 horas da manhã de 7 de novembro de 1940, a ponte começou a ondular persistentemente por três horas. Segmentos do vão foram levantados periodicamente para cima e para baixo cerca de noventa centímetros. Perto das 10 horas da manhã, alguma coisa pareceu quebrar-se e a ponte começou a oscilar violentamente. Em um momento, uma borda da estrada estava oito e meio metros mais alta que a outra; no próximo momento, estava oito e meio metro abaixo da outra borda. Às 10:30min da manhã a ponte começou a quebrar e, finalmente, às 11h10min da manhã a ponte inteira despedaçou-se. Felizmente, apenas um carro estava na ponte no instante de sua queda. Pertencia a um repórter de um jornal que abandonou o carro e seu único ocupante, um cachorro de estimação, que ficou no carro quando a ponte começou seu violento movimento de serpentar. O repórter *alcançou segurança, rasgado e sangrando, arrastando-se com as mãos e joelhos, desesperadamente agarrado ao meio-fio da ponte. Seu cão foi-se com o carro e o vão – a única vida perdida na catástrofe.*

Há muitos incidentes humorísticos e irônicos associados à queda da Ponte de Tacoma. Quando a ponte começou a ser violentamente levantada, as autoridades notificaram o Professor F. B. Farquharson, da Universidade de Washington. O Professor Farquharson tinha realizado numerosos testes com um modelo simulado da ponte e tinha assegurado a todos a sua estabilidade. O professor foi o último homem na ponte. Mesmo quando o vão estava se inclinando e se levantando mais de oito e meio metros, ele fazia observações científicas com pequena ou nenhuma antecipação da iminente queda da ponte. Quando o movimento aumentou em violência, ele voltou em segurança seguindo cientificamente a linha amarela no meio da estrada. O professor foi um dos homens mais surpreendidos quando o vão quebrou-se na água.

Uma das apólices de seguro que cobria a ponte tinha sido feita por um caixeiro viajante que tinha embolsado o prêmio e esquecido de informar a sua companhia sobre a apólice, no valor de US$800.000. Quando depois recebeu sua sentença de prisão, ele ironicamente assinalou que sua fraude poderia não ter sido descoberta nunca se a ponte tivesse permanecido por mais uma semana, pois as autoridades da ponte haviam planejado cancelar todas as apólices de seguro nesse período.

Um grande letreiro próximo da ponte anunciava um banco local com a frase "tão seguro quanto a Ponte de Tacoma". Imediatamente após a queda da ponte, vários representantes do banco saíram precipitadamente para remover o quadro.

Depois da queda da Ponte de Tacoma, o governador do Estado de Washington fez um discurso emocional, no qual declarou: "Vamos construir exatamente a mesma ponte, exatamente como antes". Depois de ouvir isso, o notável engenheiro Von Karman enviou um telegrama ao governador dizendo: "Se construir exatamente a mesma ponte, exatamente como antes, ela cairá exatamente no mesmo rio, exatamente como antes".

A queda da Ponte de Tacoma foi devida a um fenômeno aerodinâmico conhecido como stall flutter. *Isto pode ser explicado muito brevemente do seguinte modo. Se existe um obstáculo numa corrente de ar, ou líquido, então atrás do obstáculo forma-se um "redemoinho", com os vórtices fluindo para fora numa periodicidade* *definida, que depende da forma e dimensão da estrutura tanto quanto da velocidade da corrente. Como um resultado dos vórtices separando-se alternadamente de um e outro lado do obstáculo, age sobre ele uma força periódica perpendicular à direção da corrente, e de módulo* $F_0 \cos \omega t$. *O coeficiente* F_0 *depende da forma da estrutura. Quanto menor a aerodinâmica da estrutura, maior o coeficiente* F_0 *e portanto a amplitude da força. Por exemplo, a corrente em torno das asas de um aeroplano em ângulos pequenos de início é bastante plana, de modo que o redemoinho não é bem definido e o coeficiente* F_0 *é muito pequeno. A insuficiência da estrutura aerodinâmica de uma ponte suspensa é outro assunto e é natural esperar que uma força de grande amplitude a levantará. Portanto, uma estrutura suspensa na corrente de ar experimenta o efeito desta força e portanto fica num estado de vibrações forçadas. Quanto perigo este tipo de movimento apresenta depende de como a freqüência natural da estrutura (lembremos que as pontes são feitas de aço, um material altamente elástico) está próxima da freqüência da força que empurra. Se as duas freqüências são as mesmas, ocorre a ressonância, e as oscilações se tornarão destruidoras se o sistema não tiver uma suficiente quantidade de amortecimento. Agora foi estabelecido que oscilações deste tipo foram responsáveis pela queda da Ponte de Tacoma. Além disso, ressonâncias produzidas pela separação dos vórtices foram observadas nas chaminés de fábricas de aço e nos periscópios de submarinos.*

O fenômeno de ressonância foi também responsável pela queda da ponte suspensa de Broughton perto de Manchester, Inglaterra, em 1831. Isto ocorreu quando uma coluna de soldados marchou em cadência sobre a ponte, formando desse modo uma força periódica de amplitude bastante grande. A freqüência desta força foi igual à freqüência natural da ponte. Portanto, oscilações muito grandes foram induzidas e a ponte caiu. É por essa razão que se ordena aos soldados para quebrarem a cadência quando atravessam uma ponte.

Capítulo 4

Galeria: Equações Diferenciais Lineares de 2ª Ordem Desenvolvidas Por Grandes Matemáticos

Existem algumas equações diferenciais que são de extrema importância para estudos na área da Física, da Astronomia e principalmente da Matemática.

Estarei citando aqui algumas delas, seguido de uma pequena biografia de cada autor.

4.1 Equação Diferencial de Euler

Esta é a equação diferencial de Euler:

$$a_n t^n y^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 t y' + a_0 y = 0$$

com a_i constantes, $i = 0, 1, \ldots, n$, sendo que os expoentes entre parênteses de y indicam a ordem da derivada.

Usando $t = e^u$, Euler transformou esta equação diferencial em uma equação diferencial linear com coeficientes constantes.

Exemplo 4

$$2t^2y'' - 3ty' - 3y = 0$$

Usando $t = e^u$ ou $u = \ln t$, tenho que:

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt}$$

$$y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{1}{\frac{dt}{du}}$$

$$y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{1}{e^u}$$

$$y' = \frac{dy}{du} \cdot e^{-u}$$

e

$$y'' = \frac{d}{dt}(y') = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{du} \cdot e^{-u}\right)$$

$$y'' = \frac{d}{du}\left(\frac{dy}{du} \cdot e^{-u}\right) \cdot \frac{du}{dt}$$

$$y'' = \left[\frac{d^2y}{du^2}e^{-u} + \frac{dy}{du}(-e^{-u})\right]\frac{1}{t}$$

Substituindo na equação:

$$2t^2\left[\frac{d^2y}{du^2}e^{-u} - \frac{dy}{du}e^{-u}\right]\frac{1}{t} - 3t\frac{dy}{du}e^{-u} - 3y = 0$$

Mas se $t = e^u$, posso afirmar que $\frac{1}{t} = e^{-u}$.

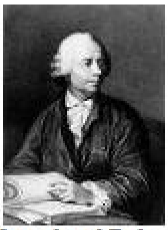
Logo,

$$2t^2\left[\frac{d^2y}{du^2} \cdot \frac{1}{t} - \frac{dy}{du} \cdot \frac{1}{t}\right]\frac{1}{t} - 3t\frac{dy}{du} \cdot \frac{1}{t} - 3y = 0$$

$$2\left[\frac{d^2y}{du^2} - \frac{dy}{du}\right] - 3\frac{dy}{du} - 3y = 0$$

$$2\frac{d^2y}{du^2} - 5\frac{dy}{du} - 3y = 0$$

Esta é, portanto, a equação diferencial linear com coeficientes constantes.



Leonhard Euler
(1707-1783)

Leonhard Euler, nasceu em 15 de abril de 1707, e morreu em 18 de setembro de 1783. Nasceu em Basel, Suíça. Seu pai, um pastor, queria que o filho seguisse os passos dele e o enviou para a Universidade de Basel a fim de prepará-lo para o ministério, mas era a geometria o assunto favorito dele. Pela intercessão de Bernoulli, Euler obteve o consentimento de seu pais para mudar para a matemática. Depois de não conseguir uma posição de físico em Basel em 1726, ele se uniu a St. Academia de Ciência de Petersburg em 1727. Tornou-se professor de Física na academia em 1730 e professor de Matemática em 1733.

Em matemática pura, ele integrou o cálculo diferencial de Leibniz e o método de Newton em análise matemática, refinou a noção de uma função e criou muitas notações matemáticas. Euler foi um pioneiro no campo da topologia. Em física, ele articulou a dinâmica Newtoniana e colocou a fundação de mecânica analítica, especialmente na sua Teoria dos Movimentos de Corpos Rígidos (1765).

Em 1741, se juntou à Academia de Ciência de Berlim, onde ele permaneceu durante 25 anos. Em 1744 ele se tornou o diretor da seção de matemática da academia.

Em 1766, Euler voltou à Rússia. Lá, tornou-se quase completamente cego depois de uma operação de catarata, mas pôde continuar com sua pesquisa e escrevendo. Ele teve uma memória prodigiosa e pôde ditar tratados em óticas, álgebra, e movimento lunar. Em sua morte em 1783, ele deixou uma reserva vasta de artigos. A Academia de St. Petersburg continuou a publicá-los durante os próximos 50 anos.

Os 866 livros e artigos dele representam aproximadamente um terço do corpo inteiro de pesquisa em matemática, teorias físicas, e engenharia mecânica publicadas entre 1726 e 1800.

4.2 Equação Diferencial de Legendre

Uma conhecidíssima e muito importante equação é denominada equação de Legendre, que se pode escrever como

$$(1-t^2)y'' - 2ty' + n(n+1)y = 0$$

onde n é arbitrário.

Pode, no entanto, mostrar-se necessário que n assuma valores inteiros para que a solução da EDO acima seja, juntamente com a sua derivada, uma função contínua em um intervalo $[a, b]$.

Impondo n como um número inteiro, teremos como solução desta equação os chamados de Polinômios de Legendre.

Adrien Marie Legendre
(1752 – 1833)

Adrien-Marie Legendre nasceu em Paris na França no dia 18 de Setembro de 1752, no seio de uma rica família parisiense que pôde dar-lhe o melhor estudo possível.

Desde a infância, os estudos de Legendre na área de Matemática foram favorecidos, já que teve a sorte de contar com o padre Joseph-Françóis Marie, grande matemático da época e professor de nível de pós-graduação, como seu mentor no Colégio Mazarim, também chamado Colégio das Quatro Nações.

Em 1770, aos dezoito anos de idade, Legendre defendeu sua tese de doutorado, sendo aprovado com honras e tendo parte de seus estudos aproveitada em uma publicação realizada pelo Padre Marie.

Graças a esta base firme e a sua inteligência singular, Legendre em seguida ministraria aulas na Escola Militar de Paris, onde foi colega de Laplace e permaneceu entre 1775 e 1780. Foi nesta época que se viu obrigado a aprofundar seus estudos sobre balística, o que lhe permitiu, em 1782, vencer um concurso organizado pela Academia de Berlim, que desafiava os jovens cientistas com o seguinte problema: "Determinar a curva descrita por balas de canhão e bombas, considerando a resistência do ar, e apresente as regras *para obter as variações correspondentes às diferentes velocidades iniciais". Foi em virtude deste desafio, principalmente, que desenvolveu sua teoria conhecida como Polinômios de Legendre.*

Foi por sua genialidade que em 2 de abril de 1783, o matemático foi nomeado membro da Real Academia de Ciências Francesa.

Entre suas maiores contribuições estão os estudos nas áreas de estatística, teoria dos números, álgebra abstrata e análise matemática. Acima de tudo está a dedicação de quarenta anos ao estudo das integrais elípticas.

Considerado um dos grandes matemáticos do período que compreendeu a Revolução Francesa, Adrien-Marie Legendre faleceu aos oitenta anos de idade em Paris no dia 10 de janeiro de 1833.

4.3 Equação Diferencial de Bessel

Esta é a equação diferencial de Bessel de ordem n.

$$t^2y'' + ty' + (t^2 - n^2)y = 0$$

com $t > 0$ e $n \in \mathbb{R}$.

A restrição $t > 0$ é essencial, pois não existe solução geral para intervalos que contenham $t = 0$.

É comum o aparecimento desta equação na resolução de equações diferenciais parciais na física.

Pertence ao tipo de equações estudadas na teoria de Sturm-Liouville.

Friedrich Wilhelm Bessel (1784 – 1846)

Friedrich Wilhelm Bessel era matemático, astrônomo e geodesista alemão. Nasceu em 22 de Julho de 1784 em Minden – Westfalia, e faleceu no dia 17 de Março de 1846 em Königsberg - Prússia. Era filho de um funcionário da administração pública e sua mãe era filha de um pastor de Rhéme. Pertencia a uma família numerosa constituída por seis mulheres e três homens. Dois *dos seus irmãos foram juizes na corte provincial.*

Aos 15 anos entrou numa firma de exportação e importação.

Durante a sua aprendizagem, sonhando em viajar, ele estudou línguas, geografia, costumes de povos distantes e os princípios da navegação, a qual o conduziu para a astronomia e a matemática. Trabalhando à noite, em 1804, escreveu um artigo sobre o cometa Halley no qual calculou a órbita desde as observações feitas em 1607. Enviou-as ao astronômo Wilhelm Olbers que ficou tão impressionado que arranjou a sua publicação no Monatliche Correspondez e propôs Bessel como assistente no observatório Lilienthal do célebre observador lunar J.H. Schröter.

Depois de ter passado apenas 4 anos em Lilienthal, o governo Pruciano encarregou-o da construção em Königsberg do primeiro grande observatório alemão. Em 1810, foi nomeado professor de astronomia da Universidade Königsberg, onde trabalhou assiduamente na reconstrução de toda a ciência das observações astronômicas, dirigindo o observatório desde a data em que ficou pronto (1813) até o fim da sua vida.

4.4 Equação Diferencial de Airy

Um exemplo de uma equação linear muito simples é a equação de Airy:

$$y'' = ty$$

As soluções desta equação diferencial têm aplicações na Teoria da Difração.

Airy estudou esta equação em conexão com seus cálculos da intensidade da luz na vizinhança de uma superfície cáustica.

George Biddell Airy
(1801- 1892)

George Biddell Airy nasceu no ano de 1801 e faleceu em 1892.

Airy era professor de Lucasian em Cambridge e o astrônomo real. Fez muitas contribuições principalmente na área da Matemática e da Astronomia.

4.5 Equação Diferencial de Chebyshev

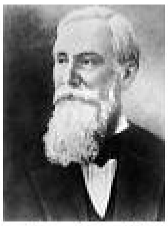
A equação de Chebyshev é da forma

$$(1-t^2)y'' - ty' + n^2y = 0$$

onde n é arbitrário.

Quando n é um número natural, esta equação diferencial tem solução polinomial (polinômio de Chebyshev). E estes são úteis em Análise Numérica.

Chebyshev obteve estes polinômios em 1857 quando procurava o polinômio mônico de grau n que desvia o mínimo de zero em $[-1;1]$.



Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894)

Patnuty Lvovich Chebyshev nasceu em 16 de maio de 1821 em Okatovo na Rússia e faleceu em 8 de dezembro de 1894 em St Petersburg, também na Rússia.

Chebyshev é lembrado por suas investigações na teoria dos números, na teoria da probabilidade pela desigualdade que leva seu nome e por seu trabalho com números primos onde determina o número de primos que não excedem um determinado valor.

Publicou um livro sobre teoria de congruências em 1849.

Em 1845 Bertrand conjeturou que sempre havia pelo menos um número primo entre n e $2n$, e em 1850 Chebyshev provou esta conjetura. Também chegou perto da prova do Teorema do Número Primo. A prova deste teorema foi completada dois anos após a sua morte por Hadamard.

Ele escreveu sobre diversos assuntos incluindo funções ortogonais, teoria de integrais, construções de mapas e sobre cálculos de volumes geométricos.

Em 1847 Chebyshev foi designado para a Universidade de St Petersburg. Tornou-se um membro estrangeiro do Institut de France, *em 1874, e também da Sociedade Real Inglesa.*

4.6 Equação Diferencial de Hermite

A equação de Hermite de ordem n é da forma

$$y'' - 2ty' + 2ny = 0$$

onde n é arbitrário.

Charles Hermite
(1822 – 1901)

Apesar de ter nascido em uma região disputada tanto pela França quanto pela Alemanha, no ano de 1822, Charles Hermite considerava-se francês.

Estudou no Colégio Henri IV, no Colégio Louis-le-Grand e na Escola Polytechnique de Paris. Após se formar, tornou-se professor e examinador.

Foi um excelente professor e um escritor prolífico, além de um dos fundadores da teoria analítica dos números que utiliza o cálculo para investigar as propriedades dos números. Ele é conhecido pela transcendência do número e.

Hermite mostrou que a equação do quinto grau pode ser solucionada por meio de funções elípticas. Apesar do seu trabalho teórico, os polinômios e funções de Hermite são muito úteis para solucionar equações diferenciais.

4.7 Equação Diferencial de Laguerre

A equação de Laguerre é dada por

$$ty'' + (1 - t)y' + ny = 0$$

com n arbitrário.

Edmond Nicolas Laguerre
(1834- 1886)

Edmond Nicolas Laguerre nasceu no dia 9 de abril de 1834 em Bar-le-Duc na França.

Destacou-se nos estudos dos métodos de aproximação e é melhor lembrado pelas suas funções especiais: os polinômios de Laguerre.

Laguerre faleceu também na França, no dia 14 de agosto de 1886, com apenas cinqüênta e dois anos de idade.

Conclusão

Os objetivos do trabalho foram plenamente atingidos. Ampliei meus conhecimentos sobre o assunto além de obter uma familiarização na área computacional ao trabalhar com o software Matlab na construção dos gráficos.

Sei que há ainda um vasto campo na área de Equações Diferenciais a ser estudado, já que desenvolvi o trabalho apenas sobre a parte das Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de 2ª Ordem.

Este é um trabalho onde apresento primeiramente a teoria, seguido de alguns problemas que são resolvidos passo a passo, tornando-se assim um texto de fácil entendimento. Aqui o leitor poderá ter uma visão mais concreta sobre o assunto além de perceber a relação que este tem com a Biologia e, em especial, com a Física.

Enfim, espero que este trabalho possa ser utilizado de apoio em estudos futuros por estudantes, quando estes necessitarem realizar alguma pesquisa na área de Equações Diferenciais.

Referências Bibliográficas

[1] SIMMONS, G. **Cálculo com Geometria Analítica, Vol. 2** Ed. McGraw-Hill, São Paulo, 1987.

[2] BOYCE, W. E. e DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e PVC**. Ed. Guanabara 2, 1979, 3ª Edição.

[3] BRAUN, M. **Equação Diferencial e suas Aplicações**. Ed. Campus, Rio de Janeiro, 1979.

[4] POOLE, D. **Álgebra Linear**. Ed. Thomson Learning (Pioneira), 2003.

[5] HIGHAM, D. J. e HIGHAM, N. J. **Matlab Guide**. Ed. SIAM, USA, 2000.

[6] **Biografia do autor Adrien Marie Legendre**. Disponível em: <http://www.ufpel.tche.br/clmd/bvm/detalhe_biografia.php?id_autor=26>. Acesso em: 15 setembro 2007.

[7] **Equação diferencial de Friedrich Wilhelm Bessel**. Disponível em: <http://www.ecientificocultural.com/Fismat/bessel07.htm>. Acesso em: 15 setembro 2007.

[8] **Biografia de George Biddel Airy**. Disponível em: <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/∼history/Mathematicians/Airy.html> Acesso em: 7 outubro 2007.

[9] **Equação diferencial de George Biddel Airy**. Disponível em:

<http://quark.fe.up.pt/deqwww/amiii/am-book/sec?7-2> Acesso em : 7 outubro 2007.

[10] **Biografia de Pafnuty Lvovich Chebyshev**. Disponível em:
< http://www.pucrs.br/uni/poa/famat/statweb/historia/daestatistica/biografias/Chebyshev.htm> Acesso em: 15 setembro 2007.

[11] **Equação diferencial de Pafnuty Lvovich Chebyshev**. Disponível em:
<http://sim.fc.ul.pt/sim_pt/MMFisica_Slides__eigen_methods#Equa.C3.A7.C3.A3o_param.C3.A9trica_de_Chebyshev> Acesso em: 15 setembro 2007

[12] **Equação diferencial de Charles Hermite**. Disponível em:
<http://www.ime.eb.br/~gloria/cad/teoria/conteudo/c3/hermite/hermitep.htm> Acesso em: 15 setembro 2007.

[13] **Biografia de Leonhard Euler**. Disponível em:
<http://pet.mtm.ufsc.br/bioeul.html>. Acesso em: 26 outubro 2007.