

Faculdade  
de Ciências Econômicas  
UFRGS

# análise econômica

- **APRESENTAÇÃO À "ANÁLISE SIMPLES DA MAXIMIZAÇÃO DO BEM-ESTAR" DE FRANCIS BATOR**

João Rogério Sanson

- **UMA ANÁLISE SIMPLES DA MAXIMIZAÇÃO DO BEM-ESTAR**

Francis M. Bator

- **O REGIME DE CÂMBIO FLUTUANTE NUMA ETAPA DE TRANSIÇÃO**

Francisco Eduardo Pires de Souza

- **AGREGADOS MONETÁRIOS, NÍVEL DE RENDA NOMINAL, TAXA DE INFLAÇÃO: UMA ANÁLISE DA CAUSALIDADE NO BRASIL, 1972 A 1987**

Divanildo Triches

- **A EXPLOÇÃO DE CONSUMO DO CRUZADO**

Marcelo Cortes Neri

- **METODOLOGIA DE PLANEJAMENTO DO SETOR ELÉTRICO: QUESTÕES DOS ANOS 90**

João Lizarolo de Araújo  
Adilson de Oliveira

- **CONCENTRAÇÃO INDUSTRIAL NO BRASIL SEGUNDO OS CENSOS, 1907-1980**

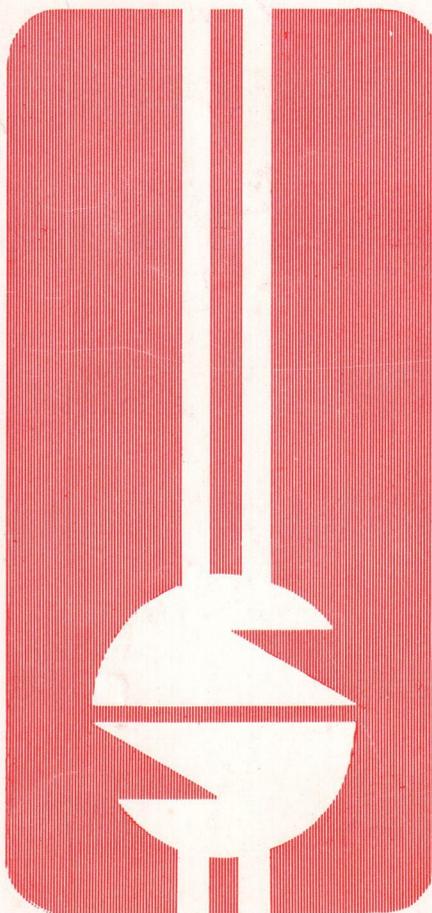
Olimpio J. de Arrouxelas Galvão

- **O VALOR, A RIQUEZA E A TEORIA DE SMITH**

Reinaldo A. Carcanholo

- **O "ESTADO ESTACIONÁRIO" E A ECONOMIA CLÁSSICA**

Gentil Corazza



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
Reitor: Prof Tuiskon Dick  
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS  
Diretora: Prof<sup>a</sup> Yeda Rorato Crusius  
CENTRO DE ESTUDOS E PESQUISAS ECONÔMICAS  
Diretor: Reinaldo Ignácio Adams  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS  
Chefe: Prof. Pedro Cezar Dutra Fonseca  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA  
Coordenador: Prof. Nali de Jesus de Souza  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA RURAL  
Coordenador: Prof. Atos Freitas Grawunder

CONSELHO EDITORIAL: Achyles Barcelos da Costa, Aray Miguel Fel-  
dens, Atos Freitas Grawunder, Carlos Augusto Crusius, Ernani Hick-  
mann, João Rogério Sanson, Juvir Luiz Mattuella, Maria Imilda da Costa  
e Silva, Nali de Jesus de Souza, Nuno Renan Lopes de Figueiredo Pin-  
to, Otilia Beatriz Kroeff Carrion, Otto Guilherme Konzen, Paulo Alexan-  
dre Spohr, Pedro Cezar Dutra Fonseca, Reinaldo Ignacio Adams, Rober-  
to Camps Moraes, Valter José Stülp, Yeda Rorato Crusius, David Gar-  
low (Wharton Econometrics Forecasts Association, E.U.A.), Edgar Au-  
gusto Lanzer (UFSC), Eleutério F. S. Prado (USP), Fernando Holanda  
Barbosa (FGV/RJ), Gustavo Franco (PUC/RJ), Joaquim Pinto de Andra-  
de (UNB), Juan H. Moldau (USP), Werner Baer (Univ. de Illinois, E.U.A.)

COMISSÃO EDITORIAL: Atos Freitas Grawunder, Pedro Cezar Dutra  
Fonseca, Reinaldo Ignacio Adams e Roberto Camps Moraes.

EDITOR: Nali de Jesus de Souza

SECRETARIA: Maria Ivone de Mello (normalização), Vanete Ricacheski  
(revisão de textos), Zélide Bregalda (Secretária)

FUNDADOR: Prof. Antônio Carlos Santos Rosa

Os materiais publicados na revista **Análise Econômica** são de ex-  
clusiva responsabilidade dos autores. É permitida a reprodução total ou  
parcial dos trabalhos, desde que seja citada a fonte.

Aceita-se permuta com revista congêneres. Aceitam-se, também,  
livros para divulgação, elaboração de resenhas ou resenhas.

Toda correspondência, material para publicação (vide normas na  
3<sup>a</sup> capa), assinaturas e permutas devem ser dirigidos ao seguinte desti-  
natário:

PROF. NALI DE JESUS DE SOUZA

Revista Análise Econômica

Av. João Pessoa, 52

90.040 – PORTO ALEGRE (RS), BRASIL

Telefones: (0512) 28.1633; 24.6022; 26.0012 – Ramals 3440 e 3507

FAX: (0512) 25.5253

# UMA ANÁLISE SIMPLES DA MAXIMIZAÇÃO DO BEM-ESTAR\*

Francis M. Bator\*\*

Aparentemente, e isto é pouco usual, não existe em nenhum lugar da literatura um tratamento completo e conciso, que não seja matemático, do problema de maximização de bem-estar nos seus aspectos da "nova economia do bem-estar". O propósito desta exposição é preencher esta lacuna para a situação estática e estacionária mais simples.

A Parte 1 consiste de uma determinação geométrica rigorosa da configuração ótima de insumos, produtos e distribuição de bens para uma situação de dois insumos, dois produtos e dois indivíduos, onde, além disto, todas as funções têm curvatura suave e onde existem rendimentos decrescentes em todas as direções, exceto numa. Os rendimentos de escala são supostos constantes. A Parte 2 identifica a configuração "preço-salário-renda" tendo em vista o problema de maximização onde, garantida a descentralização do comportamento maximizador de lucro e de preferência pelos competidores atomísticos, a posição de máximo bem-estar seria garantida. A Parte 3 explora os requisitos sobre a distribuição inicial dos fatores, se a distribuição de renda imputada pelo mercado (ou "como se" fosse imputada pelo mercado) deve ser consistente com a distribuição de bens da solução de máximo bem-estar. A Parte 4 consiste de breves comentários sobre certas ambigüidades técnicas, por exemplo, a suposição de que todas as tangências são em pontos internos. Também consiste de um número de extensões viá-

---

A presente tradução, não revisada pelo autor, do artigo "The Simple Analytics of Welfare Maximization", publicado originalmente na **American Economic Review**, v. 47, n. 1, p. 22-59, 1957, foi feita por Jolsa Campanher Dutra, Bolsista de Iniciação Científica do CNPq, e João Rogério Sanson, professor do CPGE-UFRGS, e publicada com a autorização da American Economic Association.

\*\* O autor, que é membro senior da equipe do Centro de Estudos Internacional do Massachusetts Institute of Technology, agradece a R. S. Eckaus e a R. M. Solow pelos úteis comentários.

ANÁLISE ECONÔMICA	ANO 9	Nº 15	MARÇO/91	p.9-57
-------------------	-------	-------	----------	--------

veis e não tão viáveis: para mais insumos, produtos e consumidores; elasticidade da oferta de insumos; produtos conjuntos e intermediários; rendimentos de escala decrescentes; e interações externas. A discussão é ainda estacionária em espírito. Então, na Parte 5, as conseqüências da violação de alguns pressupostos de curvatura neoclássicos são examinadas. Atenção é dada, num contexto geométrico, ao significado das exigências de convexidade, da economia matemática, e para o significado de um tipo importante de não-convexidade – rendimentos crescentes de escala – para uma alocação de mercado “real”, para a alocação do tipo Lange-Lerner, “como se” fosse mercado, e para a solubilidade do problema de máximo bem-estar. Finalmente, a Parte 6 contém alguns breves comentários sobre possíveis extensões dinâmicas. Uma nota a respeito das fontes da literatura conclui o artigo.<sup>1</sup>

## 1. INSUMOS, PRODUTOS E DISTRIBUIÇÃO DE MERCADORIAS

Tome como dado:

(1) Dois insumos homogêneos e perfeitamente divisíveis, com ofertas inelásticas, serviços de trabalho ( $L$ ) e terra ( $D$ ). Esta suposição “austriaca” viola a completa generalidade do modelo neoclássico; a elasticidade na oferta de insumos tornaria um tratamento gráfico simples impossível.

(2) Duas funções de produção,  $A = F_A(L_A, D_A)$ ,  $N = F_N(L_N, D_N)$ , com cada um dos bens homogêneos: ameixas ( $A$ ) e nozes ( $N$ ). As funções possuem curvaturas suaves, exibem rendimentos de escala constantes e taxas marginais de substituição decrescentes ao longo de qualquer isoquanta (isto é, as isoquantas são convexas em relação à origem).

(3) Duas funções de preferências ordinais,  $U_X = f_X(A_X, N_X)$  e  $U_Y = f_Y(A_Y, N_Y)$  – conjunto de curvas de indiferença lisas, convexas em relação à origem – uma para  $X$  e outra para  $Y$ . Isto reflete sem ambigüidades e de forma consistente ordenações de preferências para cada um dos indivíduos ( $X$  e  $Y$ ) por todas as combinações possíveis de

---

<sup>1</sup> Aqueles familiarizados com a moderna literatura perceberão minha dívida para com os escritos do Professor Samuelson. Faz-se especial referência ao capítulo 8 de “**Foundations of Economic Analysis**” (Cambridge, 1947); a “**Evaluation of Real National Income**”, **Oxford Economic Papers**, II: 1-29, Jan., 1950; e a “**Social Indifference Curves**”, **Quarterly Journal of Economics**, LXX: 1-22, Feb., 1956.

consumo de ameixas e nozes. Por conveniência, utilizamos para cada função um índice numérico arbitrário,  $U_x$  e  $U_y$ , para identificar as curvas de indiferença. Porém as funções não apresentam nenhuma implicação interpessoal e, para qualquer indivíduo, elas somente permitem dizer se o efeito de uma situação é pior, indiferente ou melhor que outra. Contudo, exigimos consistência: se X prefere uma situação  $\alpha$  a uma situação  $\beta$  e  $\beta$  a  $\gamma$ , então ele deve preferir  $\alpha$ , a  $\gamma$ ; as curvas de indiferença não podem se cruzar. Também fenômenos do tipo saciedade e efeitos de Veblen ou “externos” são excluídos.

(4) Uma função de bem-estar social,  $W = W(U_x, U_y)$ , que permite uma ordenação única de preferência para todas as possíveis situações, baseada somente nas posições de todos os indivíduos em seus próprios campos de preferências. É esta função que incorpora uma avaliação ética do relativo “merecimento” de X e Y.

O problema é determinar os valores maximizadores de bem-estar, do insumo trabalho para ameixas ( $L_A$ ), do insumo trabalho para nozes ( $L_N$ ), do insumo terra para ameixas ( $D_A$ ), do insumo terra para nozes ( $D_N$ ), da produção total de ameixas (A), da produção total de nozes (N) e, por último, da distribuição de ameixas e nozes entre X e Y ( $A_X, N_X, A_Y, N_Y$ ).

### 1.1 Das Dotações de Fatores e das Funções de Produção para a Curva de Possibilidade de Produção

Construa um diagrama da caixa de Edgeworth-Bowley, como na Figura 1, com dimensões horizontal e vertical exatamente iguais às ofer-

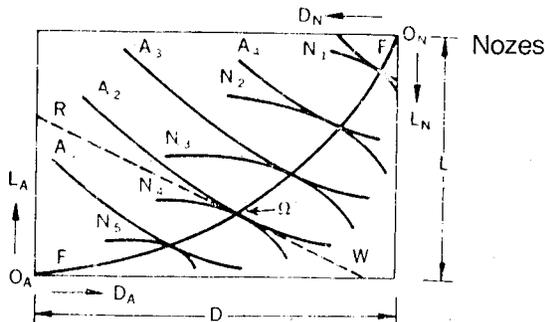


Figura 1 Ameixas

tas dadas, respectivamente, de D e L e desenhe as isoquantas para ameixas com origem no canto sudoeste e as isoquantas para nozes com origem no canto nordeste. Cada ponto na caixa representa seis variáveis:  $L_A$ ,  $L_N$ ,  $D_A$ ,  $D_N$ , A e N. O problema da produção eficiente consiste em encontrar o lugar dos pontos onde qualquer aumento na produção de ameixas implica necessariamente uma redução na produção de nozes (e vice-versa). O diagrama mostra este lugar geométrico como sendo  $\delta$  dos pontos de tangência entre as isoquantas de nozes e ameixas (FF).

Deste lugar de eficiência, podemos obter a máxima combinação possível de nozes e ameixas e representá-la no espaço de produtos (A, N). Dadas as nossas suposições de curvatura, obtemos a curva  $F'F'$  da

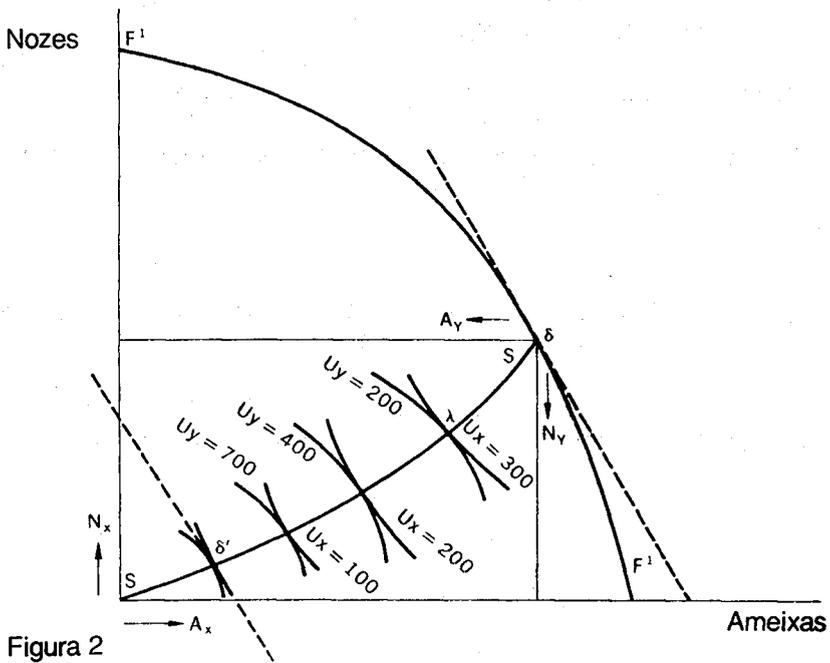


Figura 2

Figura 2, que é a curva de possibilidades de produção Pareto-eficiente; é côncava em relação à origem e lisa.<sup>2</sup> Esta curva, uma consolidação de

<sup>2</sup> Isso supõe, ademais, que as intensidades intrínsecas dos fatores A e N diferem. Caso contrário,  $F'F'$  seria uma linha reta – um caso especial sem maiores conseqüências. (Veja 5-3-c a seguir)

FF da Figura 1, representa configurações de insumo-produto, tal que a taxa marginal de substituição (TMgS) de terra por trabalho na produção de qualquer quantidade de ameixas – o valor absoluto da inclinação da isoquanta de ameixas – exatamente iguale a taxa marginal de substituição de terra por trabalho na produção de nozes.<sup>3</sup>

A inclinação (novamente esquecendo o sinal) em qualquer ponto da curva de possibilidade de produção da Figura 2, por sua vez, reflete a taxa marginal de transformação (TMgT) de ameixas em nozes, naquele ponto. Indica precisamente quantas nozes podem ser produzidas pela transferência de terra e trabalho da produção de ameixas para a produção de nozes (na margem), com uma realocação ótima de insumos na produção de ambos os bens de forma a manter as exigências de igualdade das TMgS da Figura 1. Ela é o custo marginal de uma ameixa “extra” em termos de nozes – ou a recíproca do custo marginal de nozes em termos de ameixas.

## 1.2 Da Curva de Possibilidade de Produção à Fronteira de Possibilidade de utilidade

Tome qualquer ponto,  $\delta$ , da curva de possibilidade de produção da Figura 2: este ponto denota quantidades específicas de ameixas e nozes. Construa uma caixa de Edgeworth-Bowley (de troca) precisamente com estas dimensões, traçando retas paralelas aos eixos a partir do ponto  $\delta$ , como na Figura 2. Então, desenhe as curvas de indiferença de X e de Y, uma com origem no canto sudoeste e outra, no canto nordeste-

<sup>3</sup> Em termos de produtividade marginal, a TMgS, em qualquer ponto, de terra por trabalho na, por exemplo, produção de ameixas – o valor absoluto da inclinação da isoquanta de ameixas (Figura 1) – é igual a

$$\left[ \frac{\text{Produto Físico Marginal da Terra}}{\text{Produto Físico Marginal do Trabalho}} \right]$$

na produção de ameixas neste ponto. No simbolismo do cálculo

$$\left| \frac{\partial L_A}{\partial D_A} \right|_{\Delta A = 0} = \left( \frac{\partial A}{\partial D_A} \right) \div \left( \frac{\partial A}{\partial L_A} \right)$$

te. Todo ponto na caixa, novamente, fixa seis variáveis: ameixas para X ( $A_X$ ) e para Y ( $A_Y$ ), nozes para X ( $N_X$ ) e para Y ( $N_Y$ ) e os “níveis” de satisfação de X e Y, medidos pelos índices ordinais  $U_X$  e  $U_Y$ , os quais caracterizam a posição do ponto em relação aos dois campos de preferência. Por exemplo, em  $\lambda$  na Figura 2,  $U_X = 300$  e  $U_Y = 200$ . Note de novo, contudo, que este 200 não é comparável ao 300: não significa que em  $\lambda$  X esteja em algum sentido melhor do que Y (ou indiferente, ou pior).

O problema da “eficiência de troca” consiste em encontrar o lugar geométrico dos pontos viáveis dentro da caixa de trocas, onde qualquer aumento na satisfação de X ( $U_X$ ) implica uma necessária redução na satisfação de Y ( $U_Y$ ). Viáveis em que sentido? No sentido de que devemos exaurir os totais fixos de ameixas e nozes, representados por  $\delta$ . Novamente, o lugar geométrico termina consistindo dos pontos de tangência, SS, pelas mesmas razões analíticas. Só que, agora, a taxa marginal de substituição subjetiva de ameixas por nozes que dá um nível fixo de satisfação para X – o valor absoluto da inclinação da curva de indiferença de X – deve ser igual à TMgS de ameixas por nozes de Y, isto é, à inclinação de **sua** curva de indiferença.

A partir deste lugar de eficiência de troca<sup>4</sup>, SS, que está associada a um único ponto de produção  $\delta$ , podemos ler as combinações máximas de  $U_X$  e  $U_Y$  que são possíveis de serem obtidas a partir de  $\delta$  e desenhá-las no espaço de utilidade ( $U_X U_Y$ ) – S’S’ na Figura 3. Cada um desses **pontos**  $\delta$ , no espaço de produto, transforma-se em uma **linha** no espaço de utilidade – a combinação  $U_X U_Y$  é sensível a como os totais fixos de ameixas e nozes são distribuídos entre X e Y.<sup>5</sup>

Contudo, existe um possível atalho analítico. Dadas nossas suposições de curvatura, podemos desenhar a grande fronteira de possibilidade de utilidade – a envoltória –, usando uma relação de eficiência pa-

<sup>4</sup> Esta é a curva de contrato de Edgeworth ou o que Boulding adequadamente chamou de curva de “conflito”; uma vez nela, vantagens mútuas de troca não são possíveis, e qualquer movimento que signifique um ganho para X implica uma perda para Y.

<sup>5</sup> Cada **ponto** no espaço de utilidade, por sua vez, transforma-se em uma linha no espaço de produto. Não apenas uma, mas muitas combinações ameixas-nozes possíveis podem satisfazer um requisito  $U_X U_Y$  específico. É este fenômeno ponto-linha recíproco que repousa no cerne da prova de Samuelson da não-existência de curvas de indiferença da comunidade tais que permitam a derivação das curvas de demanda por nozes e ameixas. A TMgS subjetiva da “comunidade” entre A e N para dados A e N, por exemplo, em  $\delta$  na Figura 2, dependeria certamente de como A e N estão distribuídos, isto é, de qual ponto  $U_X U_Y$  sobre SS é escolhido. Por esta razão, a inclinação de uma curva de indiferença “conjunta” XY em  $\delta$  não é fixada apenas por AN. (Veja a citação (11) na bibliografia.)

ra pegar justamente um ponto da curva de contrato SS de cada caixa de troca associada a cada ponto de produção  $\delta$ . Olhe de novo a Figura 2. A inclinação da curva de possibilidade de produção em  $\delta$  já se revelou como a taxa marginal de transformação, via produção, de ameixas em nozes. As inclinações (igualadas) dos dois conjuntos de curvas de indiferença ao longo da curva de eficiência de troca SS, por sua vez, representam a taxa marginal de substituição de ameixas por nozes. O grande critério de eficiência é que seja impossível, por qualquer mudança na produção com troca, aumentar  $U_X$  sem reduzir  $U_Y$ . Uma análise cuidadosa mostrará que este critério é violado a menos que a taxa marginal de transformação entre ameixas e nozes como produtos – a inclinação em  $\delta$  – seja exatamente igual à taxa marginal de substituição entre ameixas e nozes, como “insumos” de consumo, ao prover satisfação psíquica.

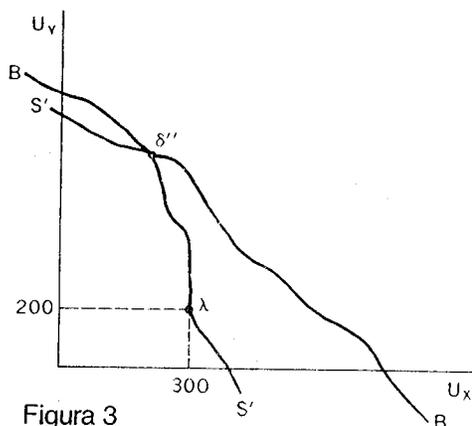


Figura 3

Se, por exemplo, em  $\delta$ , pode-se conseguir duas ameixas pela realocação de recursos e redução da produção de nozes em uma unidade, então um ponto em SS, onde a taxa marginal de substituição (equalizada) de nozes por ameixas ao longo das curvas de indiferença é, digamos, um para um, permite a seguinte operação de “arbitragem”. Desloque terra e trabalho de tal maneira a produzir duas ameixas a mais e uma noz a menos. Então, deixando X na mesma situação que antes, retire uma noz de Y e a substitua por uma ameixa. Pela nossa suposição de que  $TMgS = 1$ , ambos, X e Y, são deixados indiferentes:  $U_X$  e  $U_Y$  permanecem inalterados. Porém temos uma ameixa extra sobrando:

uma vez que esta permite aumentar  $U_X$  e/ou  $U_Y$ , a situação inicial não estava sobre a fronteira  $U_X U_Y$ .<sup>6</sup>

Para estar na grande fronteira de possibilidade de utilidade (BB na Figura 3), portanto,  $TMgT_\delta$  precisa igualar-se à  $TMgS$  das curvas de indiferença ao longo da  $SS$  associada a  $\delta$ . Este requisito fixa um único ponto  $U_X U_Y$  em  $SS$  que está na fronteira “envelope” de possibilidade de utilidade, dado o ponto de produção  $\delta$ . Tome este ponto em  $SS$ , de fato onde a inclinação conjunta das curvas de indiferença é exatamente paralela à inclinação em  $\delta$  da curva de possibilidade de produção. Na Figura 2, este ponto é  $\delta'$ , que dá uma combinação “eficiente”  $U_X U_Y$  associada à combinação  $AN$  em  $\delta$ . Esta combinação  $U_X U_Y$  pode, daí, ser mostrada, na Figura 3, como  $\delta''$ .<sup>7</sup>

A repetição deste processo para cada ponto na curva de possibilidade de produção – note que cada um destes pontos requer uma nova caixa de troca – gerará a grande fronteira de possibilidade de utilidade,  $BB$ , de combinações de insumos e produtos Pareto-eficientes. Cada ponto desta fronteira dá o máximo de  $U_X$  para qualquer nível factível dado de  $U_Y$ , e vice-versa.

### 1.3 Da Fronteira de Possibilidade de Utilidade ao “Ponto de Bem-Aventura sob Restrição”

Mas  $BB$ , a grã-função de possibilidade de utilidade, é uma curva e não um ponto. Mesmo após eliminar todas as combinações de insumos e produtos ineficientes num sentido paretiano, ainda permanece uma infinidade unidimensional de combinações “eficientes”: uma para cada ponto em  $BB$ . Para se chegar a uma única configuração **melhor** de todas, precisamos de uma função de bem-estar social do tipo Bergson-Samuelson, que denote a ética a ser “seguida” ou cujas implicações estamos interessados em estudar. Tal função – poderia ser a sua, ou a minha ou a de Mossadegh, embora a dele provavelmente não seja tran-

<sup>6</sup> O argumento acima pode ser rigorosamente desenvolvido em termos das variações infinitesimais do cálculo diferencial.

<sup>7</sup> Não se preocupe aqui com o caso de ótimos múltiplos. Isto até poderia ocorrer diante de nossos pressupostos especiais de curvatura. Se, por exemplo, ambos os conjuntos de curvas de indiferença mostrarem linhas de igual  $TMgS$ , as quais coincidam com linhas retas que passem pela origem e, além disso, as duas funções de preferência forem tão simétricas a ponto de dar uma  $SS_\delta$  que fique centrada ao redor da diagonal da caixa de trocas, então cada ponto em  $SS_\delta$  irá satisfazer o critério  $TMgS = TMgT$  ou nenhum ponto o fará. Para uma discussão destes e de pontos sutis relacionados, veja as Partes 4 e 5.

sitiva – é intrinsecamente não-científica.<sup>8</sup> Não existem considerações de **eficiência econômica** que nos permitam indicar se a função de Crusoé, a qual requer muitas ameixas e nozes para Crusoé e poucas para Sexta-Feira, é economicamente superior à de Sexta-Feira. Avaliações éticas estarão, em última análise, envolvidas.

Uma vez dada uma tal função de bem-estar, na forma de uma família de curvas de indiferença no espaço de utilidade, como na Figura 4,

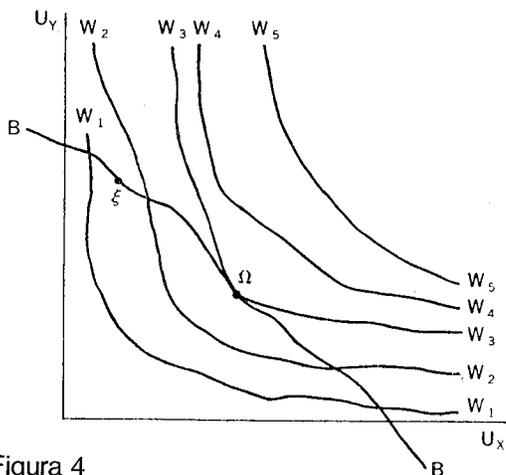


Figura 4

o problema se torna plenamente determinado.<sup>9</sup> O “bem-estar” está num máximo quando a fronteira envoltória da possibilidade de utilidade  $BB$  toca no mais alto contorno da função  $W$ .<sup>10</sup> Na Figura 4, isto ocorre em  $\Omega$ .

Note a característica singular daquele ponto  $\Omega$ . É o único ponto, de todos os pontos da fronteira de utilidade  $BB$ , que tem significância normativa ou prescritiva não-ambígua. A produção e a distribuição de

<sup>8</sup> Contudo isto provavelmente se constituiria em atrante material para estudo ao antropólogo ou psicólogo.

<sup>9</sup> Na ausência de redistribuição implícita de renda, estas curvas não poderão ser transpostas para o espaço de produto. Elas não se constituem em curvas de indiferença da comunidade, as quais permitiriam a derivação de curvas de demanda. Veja as notas de rodapé 5 e 12 e também 4-3.

<sup>10</sup> Caso existam vários desses pontos, não se preocupe. Se a “ética” em consideração for realmente indiferente, pegue qualquer um deles. Se não tem problema, não tem problema.

bens, ambas Pareto-eficientes - estando sobre  $F'F'$  e também sobre  $BB$  -, são condições necessárias, mas não suficientes, para um máximo de nosso tipo de função de bem-estar.<sup>11</sup> A alegação de que qualquer ponto “eficiente” é melhor do que configurações “ineficientes” que estão dentro de  $BB$  é indefensável. É verdade que, dado um ponto “ineficiente”, existirá **algum** ponto ou alguns pontos em  $BB$  que representam uma melhora; porém podem existir muitos pontos em  $BB$  que sejam piores, em vez de melhores. Por exemplo, em termos da ética denotada pela função  $W$  específica da Figura 4,  $\Omega$  em  $BB$  é melhor do que qualquer outro ponto factível. Mas o ponto eficiente  $\xi$  é distintamente inferior a qualquer ponto ineficiente sobre ou na parte nordeste de  $W_2$ . Se sou  $X$ , e se minha função  $W$ , que reflete a dose usual de interesse próprio, é o critério, pontos “eficientes” em  $BB$  que representam um elevado  $U_Y$  e um muito baixo  $U_X$  são visivelmente menos desejáveis do que uma porção de pontos ineficientes de maior  $U_X$ .<sup>12</sup>

#### 1.4 Do “Ponto de Bem-Aventura” aos “Melhores” Insumos, Produtos e Distribuição de Mercadorias

Podemos agora rever nossos passos. A  $\Omega$ , sobre  $BB$  na Figura 4, corresponde exatamente o ponto,  $\Omega'$ , na curva de possibilidade de produção  $FF'$  da Figura 5. (Derivamos  $BB$ , ponto por ponto, a partir de  $FF'$  da Figura 2, e a curva  $FF'$  da Figura 5 foi copiada da Figura 2.)  $\Omega'$  dá a

<sup>11</sup> Note, entretanto, que a eficiência de Pareto não é nem mesmo uma condição necessária para o máximo de praticamente qualquer função  $W$  concebível. A configuração de nosso tipo de função reflete algumas restrições de natureza ética, por exemplo, de que as funções de preferência dos indivíduos devem ser “levadas em conta”, e contadas positivamente.

<sup>12</sup> Note, entretanto, que não há requisitos de consistência entre meu mapa de indiferença e “minha” função  $W$ . O primeiro reflete uma ordenação de preferência pessoal baseada apenas no consumo próprio (e, no caso mais geral, nos serviços ofertados). A última denota também valores que tenho enquanto “cidadão”, e estes não precisam necessariamente ser consistentes com a maximização de minha satisfação “enquanto consumidor”.  $X$ , como cidadão, pode preferir uma situação com menos  $U_X$  e algum  $U_Y$  a mais  $U_X$  e zero  $U_Y$ . Existe também uma importante distinção analítica. A função de preferência de  $X$  é conceitualmente “observável”: confrontado com várias configurações de preço relativo e renda, suas respostas de consumo revelarão os contornos da função. Por outro lado, sua função  $W$  não é revelada pelo comportamento, a menos que se trate de um ditador, sujeito pela “natureza” a restrições. Em certo sentido, apenas uma sociedade, considerada como tendo um consenso político, tem uma função  $W$  sujeita à inferência empírica (conforme 4-3). A distinção – isto tem um sabor de Rousseau –, ainda que útil, é arbitrária. Tente-a para um masoquista, um puritano ...



## 2. PREÇOS, SALÁRIOS E ARRENDAMENTO

A análise anterior independe anti-septicamente do contexto institucional, em especial de instituições de mercados competitivos. Poderia constituir-se em um exercício intelectual para o homem de Marte, frequentemente invocado, sobre como fazer o “melhor” com recursos dados. No entanto, implícito na lógica desta formulação puramente “tecnocrática”, enraizado no problema, pode-se dizer, encontra-se um conjunto de constantes que levarão o economista a imaginá-las como preços. Porque isto acontece – e este teorema da “dualidade” é o cerne da moderna economia do bem-estar – é que as decisões descentralizadas, em resposta a estes “preços”, dos (ou “como se” feita por eles) maximizadores atomizados de satisfação e lucro resultarão naquela constelação de insumos, produtos e distribuição de mercadorias exigida por nosso máximo  $W$ .<sup>13</sup>

Podem estas constantes – preços, salários e rendas – serem determinadas na nossa representação gráfica?<sup>14</sup> Apenas parcialmente. A bidimensionalidade é, em parte, culpada, porém, como veremos adiante, uma indeterminação final está implícita nas próprias suposições visuais de curvatura.<sup>15</sup> Os gráficos, entretanto, nos levarão a uma boa parte do caminho, e um pouco de álgebra fará o resto.

O exercício consiste em encontrar um conjunto de quatro constantes, associadas à solução do problema de maximização, que tenham significado como o preço de ameixas ( $p_A$ ), o preço de nozes ( $p_N$ ), o salário do trabalho ( $w$ ) e a taxa de arrendamento da terra ( $r$ ).<sup>16</sup>

<sup>13</sup> Note que esta demonstração é neutra no que diz respeito a: (1) autênticos maximizadores de lucro, atuando em mercados “reais”, mas perfeitamente competitivos; (2) burocratas do tipo Lange-Lerner (“tome os preços como dados e maximize ou Sibéria”); (3) técnicos usando máquinas eletrônicas e tentando inventar rotinas eficientes de computação.

<sup>14</sup> Para evitar insinuações institucionais, a literatura desta teoria usualmente tenta desincorporações verbais e refere-se a elas como preços-sombra. Aqueles com maior orientação matemática, por sua vez, gostam de pensar nelas como multiplicadores de Lagrange.

<sup>15</sup> Essas mesmas suposições tornam esta indeterminação, a do nível absoluto de preços, totalmente inconseqüente.

<sup>16</sup> Uma vez que estamos assumindo que todas as funções têm as propriedades de curvatura neoclássicas, e daí que, por exemplo, a curva de possibilidades de produção deve ser côncava em relação à origem, podemos impor a **forte** condição às constantes de que exibam as características de otimização para autênticos, mas perfeitos, mercados. Acontecerá, entretanto, que duas condições progressivamente mais fracas tornar-se-ão possíveis, as quais permitem algumas não-convexidades (por exemplo, rendimentos crescentes de escala), ainda que mantenham para as constantes algumas qualidades essencialmente semelhantes aos preços. Mais sobre isso na Parte 5.

Primeiro, o que pode ser dito a respeito de  $w$  e  $r$ ? A maximização do lucro pelo produtor individual implica que, seja qual for o nível de produção escolhido como mais lucrativo, ele deve ser produzido a um custo total mínimo.<sup>17</sup> A teoria elementar da firma nos diz que, para esta condição se manter, o produtor, encontrando fixos os preços dos insumos – curva de oferta horizontal –, deve ajustar a composição de insumos até que a  $TMgS$  de terra por trabalho seja exatamente igual à razão arrendamento-salário. É fácil ver as possibilidades de “arbitragem”, se esta condição for violada. Se aumentarmos uma unidade de  $L$ , diminuindo duas de  $D$  e mantendo constante o nível de produção com  $w = \$10$  e  $r = \$10$ , é claro que o custo total será reduzido e, se continuarmos a substituição, faremos isso até que qualquer nova redução em  $D$ , por uma unidade, deva ser acompanhada pela redução de não menos que uma unidade de  $L$  para que o nível de produção não caia. Em termos gráficos usuais, então, o produtor ficará nos pontos de tangência entre as isoquantas e as linhas (de isocusto) cujas inclinações absolutas igualam a  $r/w$ .

Revertendo o raciocínio, a combinação de insumos denotada pelo ponto  $\Omega'''$  na Figura 1 implica uma razão  $r/w$  sombra que é exatamente igual à  $TMgS$  de terra por trabalho na produção de ambas, ameixas e nozes, no ponto  $\Omega'''$ . A  $TMgS$  em  $\Omega'''$  é dada pela inclinação (igualadas) das isoquantas em  $\Omega'''$ . A razão implícita  $r/w$ , entretanto, deve ser igual à inclinação da linha  $RW$  que é tangente às (duas) isoquantas em  $\Omega'''$ .<sup>18</sup>

A inclinação de  $RW$  identifica a razão arrendamento/salário implícita pela configuração de máximo. Um raciocínio essencialmente análogo estabelecerá a igualdade da inclinação das curvas de indiferença que passam por  $\Omega''$ , na Figura 5, como denotado pela razão  $p_A/p_N$ ,

<sup>17</sup> Em nosso modelo de fluxos, livre de capital, isto equivale a produzir nos níveis escolhidos com um mínimo de despesas com insumos.

<sup>18</sup> Novamente os valores absolutos destas inclinações estão implícitos na argumentação. Relembrando a nota de rodapé número 3, a  $TMgS$  de terra por trabalho, o valor absoluto da inclinação das isoquantas em  $\Omega'''$  como dado por  $RO_A / WO_A$ , é igual à razão

$$\left[ \frac{\text{Produto Físico Marginal da Terra}}{\text{Produto Físico Marginal do Trabalho}} \right]$$

Nossa  $r/w$  sombra torna-se, então, exatamente igual a esta razão.

implícita na solução. X, como também Y, a fim de maximizar sua própria satisfação, tal como medida por  $U_X$ , precisa alcançar qualquer nível de satisfação que sua renda permita, com um mínimo de gastos. Isto requer que ele escolha uma combinação nozes-ameixas tal que a taxa marginal de substituição psíquica entre nozes e ameixas se iguale, para uma situação de indiferença, à razão  $p_A / p_N$ . Ele e Y escolherão o ponto  $\Omega$  somente se  $p_A / p_N$  for igual ao valor absoluto da tangente ( $P_A P_N$ ) em  $\Omega$ . Esta inclinação fixa, portanto, o valor  $\Omega$  de  $p_A / p_N$ .<sup>19</sup>

Note que isto faz com que  $p_A / p_N$  seja também igual à inclinação da curva de possibilidade de produção  $F'F'$  em  $\Omega$ .<sup>20</sup> Isto é, como deveria ser. Se  $p_A / p_N = 10$ , isto é, se uma ameixa “vale” dez nozes no mercado, seria realmente estranho, no nosso mundo eficiente, sem fricção e com perfeito conhecimento, que a taxa marginal de transformação de nozes em ameixas, via produção, fosse diferente de dez para um. Os produtores, na verdade, não produziram a combinação de nozes e ameixas de  $\Omega$  se  $p_A / p_N$  diferísse da TMgT em  $\Omega$ .

Identificamos, pois, as razões  $r / w$  e  $p_A / p_N$  implícitas no máximo de  $W$ . Destas duas constantes provêm duas equações para se obter os quatro preços desconhecidos. Infelizmente, isto é tudo que podemos fazer em um gráfico de duas dimensões. Nenhum dos diagramas permite uma fácil identificação da relação entre os preços dos insumos e os preços do produto. Entretanto, tal relação está certamente implícita. Pela teoria da firma, sabemos que o produtor maximizador de lucro, que se depara com preços constantes para seu produto – uma curva de demanda horizontal da firma em concorrência perfeita –, irá expandir seu produto até o ponto onde a receita extra proveniente de uma unidade adicional de produto, isto é, o preço, seja exatamente igual ao custo marginal de produzir aquele produto.<sup>21</sup> E o custo marginal, por sua vez, é sensível a  $r$  e  $w$ .

\_\_\_\_\_ Seria fácil mostrar as relações implícitas de preço-salário e de pre-

<sup>19</sup> A razão de preços relaciona-se reciprocamente aos eixos:  $p_A / p_N = P_A O / P_N O$  na Figura 5. Ao longo, por exemplo, da curva de indiferença de X ( $U_X$  em  $\Omega$ ), um aumento em  $p_A / p_N$ , isto é, uma maior inclinação de  $P_A P_N$ , resulta em X substituir ameixas por nozes; o mesmo para Y.

<sup>20</sup> Lembre que, ao escolher o ponto em  $S_\Omega S_\Omega$  sobre a curva envoltória no espaço de utilidade, escolhemos o ponto onde as inclinações da curva de indiferença são exatamente iguais à taxa marginal de transformação (Veja p. 16.).

<sup>21</sup> Não se preocupe aqui com o requisito “total” – de que este preço supere o custo unitário – se o produtor da vida real, que visa a lucros, tiver que produzir algo. Mais sobre isto, na Parte 5.

ço-arrendamento pela introdução de noções de produtividade marginal. A maximização de lucro requer que a quantidade de cada insumo empregada seja aumentada até o ponto em que a sua produtividade marginal vezes o preço do produto extra se iguale exatamente ao preço do insumo acrescentado. Uma vez que estas produtividades marginais são propriedades determinadas de curvatura das funções de produção, esta regra dá uma terceira relação entre um preço de produto e um preço de insumo.

Alternativamente, dada a nossa suposição de que as funções de produção apresentam retornos constantes de escala, podemos fazer uso do teorema de “esgotamento do produto” de Euler. Seu conteúdo econômico é que, se vigoram rendimentos constantes de escala, o total da renda dos fatores de produção, como se fosse imputado pelo mercado, “exaure” o valor do produto. Isto significa, simplesmente, que  $wL + rD = p_A A + p_N N$ . Isto fornece uma terceira relação entre  $w$ ,  $r$ ,  $p_A$  e  $p_N$  para os valores  $\Omega$  de  $L$ ,  $D$ ,  $A$  e  $N$ .<sup>22</sup>

De qualquer maneira, a solução de máximo implica uma terceira equação de preços, daí podermos expressar três desses preços em termos do quarto. Porém o que dizer a respeito do quarto? Ele é indeterminado, dadas as características do modelo. Em um mundo de perfeita certeza, sem fricção, onde, por exemplo, ninguém pensaria em guardar algo como dinheiro, apenas os preços **relativos** importam. As três equações estabelecem as proporções, entre eles, implícitas na posição de máximo, e os valores absolutos não são relevantes. Se as proporções  $p_A : p_N : w : r$ , implícitas em  $\Omega$ , são  $20 : 15 : 50 : 75$ , os maximizadores de lucro e de satisfação tomarão as decisões de consumo, de insumos e de produtos necessárias à maximização de  $W$ , a despeito de quais sejam os níveis absolutos desses preços – quer sejam eles  $20 : 15 : 50 : 75$ , ou duas vezes isso, ou a metade disso, ou cinquenta vezes esse conjunto de números. Essa é a implicação do fato de que, para o problema de maximização, somente as várias **razões** de transformações e de substituição é que importam. Em tudo o que segue, simplesmente suporemos que as nozes são as unidades de conta, portanto  $p_N = 1$ .

<sup>22</sup> A condição também é válida para cada firma. Em um mundo competitivo e com retornos constantes de escala, a posição de maximização de lucros é uma de lucro zero: a receita total é exatamente igual aos custos. Deve-se atentar, entretanto, que o uso do Teorema de Euler para obter uma relação entre preço de insumo e preço de produto envolve uma certa dose de prestidigitação. É apenas como consequência das relações entre preço e produtividade marginal (conforme o parágrafo anterior) que o teorema assegura a igualdade entre a receita e o valor do produto.

Isto, então, torna  $p_A$ ,  $w$  e  $r$  constantes completamente determinadas.<sup>23</sup>

Em resumo, identificamos graficamente duas ou três relações de preços-sombra implícitas na solução do problema de máximo bem-estar e estabelecemos, de uma maneira um pouco diferente, a existência de uma terceira. O propósito era demonstrar a existência, pelo menos em nosso modelo neoclássico idealizado, de um conjunto de constantes, embutidas no problema “tecnocrático” de máximo bem-estar, que podem ser vistas como preço de um mercado competitivo.<sup>24</sup> Em que sentido? No sentido de que as decisões descentralizadas, em resposta a estas constantes, tomadas pelos maximizadores de lucro e de satisfação atomísticos, ou “como se” fossem tomadas por eles, resultarão justamente naquela configuração de insumos, produtos e distribuição de bens que o máximo de  $W$  requer.

### 3. PROPRIEDADE DOS FATORES E DISTRIBUIÇÃO DE RENDA

Até agora nada foi dito acerca de como  $X$  e  $Y$  “pagam” suas ameixas e nozes, ou de quem “possui” o trabalho e a terra. Como foi indicado acima, a suposição de rendimentos constantes de escala assegura que, na posição de máximo bem-estar, a renda será igual ao valor total do produto e que a receita total da venda de ameixas (nozes) é igual à despesa total de insumos utilizados pelo produtor de ameixas (nozes). Além disso, a “solução” implica uma “compra” definida de nozes e ameixas para ambos  $X$  e  $Y$ . Mas nada assegura que a “propriedade” inicial de horas de trabalho e de terra seja tal que  $w$  vezes as horas de trabalho ofertadas por  $X$ ,  $wL_X$ , mais  $r$  vezes a terra ofertada por  $X$ ,  $rD_X$  – a renda de  $X$  – será suficiente para cobrir suas compras, tal como requerido por  $\Omega$ , ou seja,  $p_A A_X + p_N N_X$ ; o mesmo vale para  $Y$ . Na verdade, existe alguma solução eficiente, no sentido de Pareto, para insumos, produtos e distribuição que satisfaz a condição “renda = despesa”, para ambos os indivíduos, para qualquer padrão arbitrário de propriedade dos “meios de produção” – quer dizer, uma solução que colocará o sistema em algum lugar da grã-fronteira envoltória de possibilidade de utilidade (BB na Figura 4). Porém, somente pelo mais puro acidente será aquele ponto sobre BB melhor, em termos de minha função  $W$ , ou da função de Thomas Jefferson, ou daquela de “consenso políti-

<sup>23</sup> Para a possibilidade de indeterminações não-essenciais, entretanto, veja a Parte 4.2.

<sup>24</sup> Sobre a existência de tal conjunto de preços-sombra no mundo da programação linear, com suas superfícies planas e cantos, veja a Parte 5 a seguir.

co”, do que uma infinidade multidimensional de outros pontos **em BB ou fora** dela. Como foi enfatizado acima, somente um ponto em BB pode ter significado prescritivo e, acima de tudo, normativo:  $\Omega$ . E somente algum padrão especial de propriedade de terra e de serviços de trabalho irá colocar o sistema de mercado, naquele ponto especial, com uma distribuição de renda “do tipo imputado”.<sup>25</sup>

O que foi dito acima é de interesse especial na avaliação das características de otimização das instituições de mercado em um ambiente de propriedade privada. Porém o problema não é irrelevante mesmo onde todos os meios de produção não-humanos pertencem à comunidade, portanto onde os rendimentos não-salariais são distribuídos independentemente de considerações de produtividade marginal e de taxa marginal de substituição. Se os serviços do trabalho não são absolutamente homogêneos – se algumas pessoas são fortes e tolas e outras, fracas e espertas, isto para não falar em “educadas” – a distribuição da renda será sensível à dotação inicial dessas qualidades mentais e físicas e da destreza relacionada a elas. E, de novo, somente um acidente de muito baixa probabilidade daria uma configuração consistente com qualquer  $\Omega$  da função particular  $W$ .<sup>26</sup>

Mesmo em nosso mundo de trabalho homogêneo, não podemos deixar de reconhecer este problema. Não é suficiente supor que produtores são indiferentes entre uma hora de trabalho de X ou de Y. É também um requisito que a oferta total de horas de trabalho por período considerado seja dividida entre X e Y de forma a distribuir os pagamentos de salário de uma maneira particular, dependendo da propriedade da terra e da distribuição de renda requerida por  $\Omega$ . Isto pode exigir, por exemplo, que X oferte setenta e cinco por cento do L total; cada indiví-

---

<sup>25</sup> É naturalmente possível romper a ligação entre propriedades dos fatores e distribuição “final” de renda por meio de transferências interpessoais. Além do mais, se tais transferências são efetuadas por meio de esquemas de pagamentos globais, sem custo, – não importa como isso possa ser possível – então torna-se viável, conceitualmente, obter a distribuição implícita em  $\Omega$ , a despeito dos resultados de mercado. Mas nenhum “jogo” descentralizado do tipo preço-mercado pode revelar o padrão de impostos e transferências que maximizaria uma particular função  $W$ . O cálculo “centralizado” – implícito ou explícito – é inevitável.

<sup>26</sup> Se a escravidão fosse a regra, e eu pudesse vender o valor capitalizado dos serviços de meu tempo esperado de vida, a distinção entre propriedade do trabalho e da terra seria obscurecida. À exceção de um mundo “austríaco”, entretanto, a distinção não desapareceria. Enquanto os homens conseguirem dispor de um certo controle sobre a qualidade e a distribuição temporal de seus próprios serviços, persistirá sempre um problema de incentivo.

duo trabalhar a metade das horas totais pode não ser aceitável.<sup>27</sup>

Porém, tudo isto é um desvio. Para nossos propósitos não-institucionais é suficiente determinar  $L_X$ ,  $D_X$ ,  $L_Y$  e  $D_Y$  consistentes com  $\Omega$ , dada a distribuição imputada, ou “como se” imputada, pelo mercado. Infelizmente, os diagramas usados na Parte 1 novamente falham, porém a álgebra é simples. Requer-se que:

$$e \quad wL_X + rD_X = p_A A_X + p_N N_X$$

$$wL_Y + rD_Y = p_A A_Y + p_N N_Y,$$

para os valores máximos de  $A_X$ ,  $N_X$ ,  $A_Y$ ,  $N_Y$ ,  $p_A$ ,  $p_N$ ,  $w$  e  $r$  já encontrados em  $\Omega$ . Junto com  $L_X + L_Y = L$  e  $D_X + D_Y = D$  é aparente que temos quatro equações para obter quatro incógnitas:  $L_X$ ,  $L_Y$ ,  $D_X$  e  $D_Y$ . Acontece, entretanto, que uma dessas equações não é independente. A soma das duas primeiras, em que a renda **total** se iguala ao valor do produto **total**, é dada pelo Teorema de Euler conjuntamente com as condições de produtividade marginal cuja solução das oito variáveis,  $A_X$ ,  $N_X$ ,  $A_Y$ , ..., que são aqui tomadas como dadas. Por isto, temos somente três equações independentes, como deveria ser. Significa somente que, com nossas suposições de curvatura, podemos, limitadamente, fixar uma das quatro dotações quase que arbitrariamente e ainda conseguiremos alocar o resto de forma a satisfazer as equações de orçamento familiares.

Basta dos aspectos de distribuição de renda do problema. Isto tem relevância principalmente para a distribuição de renda imputada pelo mercado; porém esta relevância não depende de propriedade “privada” dos meios não-humanos de produção. Note, por sinal, que, apenas com a suposição “austríaca” arbitrária de oferta total fixa de insumos, pode-se primeiro achar “simultaneamente” insumos, produtos e distribuição de bens, e somente em seguida sobrepor nesta solução o problema da propriedade e da distribuição de renda. Se  $L_X$ ,  $D_X$ ,  $L_Y$ ,  $D_Y$ , e daí  $L$  e  $D$ , fossem supostos sensíveis a  $w$  e  $r$ , então os  $p$ 's e os níveis de renda familiar, as dimensões da caixa de produção da Figura 1 e, daí a posi-

---

<sup>27</sup> Tudo isto é baseado no pressuposto “austríaco” da inelasticidade da oferta de trabalho; de que, além do mais, essa inelasticidade se deve não a exigências externas, mas sim a “cantos” definidos nos mapas de preferência de  $X$  e  $Y$  em relação a escolhas de lazer e trabalho. Mais do que isso, a função  $W$  não deve ser sensível a mudanças nas combinações  $L_X L_Y$ , exceto se elas influenciarem a distribuição de renda.

ção da curva de possibilidade de produção das figuras 2 e 5, etc., seriam interdependentes com os valores de  $L_X$ ,  $D_X$ ,  $L_Y$  e da solução final  $D_Y$ . Teríamos então que resolver o problema por completo como um conjunto de equações simultâneas utilizando os dados brutos: funções de produção, gostos (agora com um eixo para lazer, ou vários eixos para as muitas espécies de trabalho diferentemente cansativos) e a função  $W$ . Diagramas de três (ou mais) dimensões seriam necessários para uma solução geométrica.

#### 4. ALGUMAS EXTENSÕES

Demonstramos a solução do problema de maximização da moderna economia do bem-estar no contexto do modelo neoclássico estático e estacionário, mais simples de todos. Muitas generalizações e elaborações são auto-sugestionáveis, mesmo se permanecermos no campo estritamente neoclássico e restritos a uma situação estacionária, onde não se verificam alterações nos dados e não se permitem perguntas do tipo "como o sistema chegou lá". Só para comentar, algumas:

1. O problema poderia ser resolvido para muitas famílias, muitos bens e muitos fatores; isto tem recebido tratamento completo e rigoroso na literatura. Obviamente que o tratamento gráfico não é possível; o cálculo elementar torna-se essencial. Contudo, as características qualitativas da solução do caso de  $m$  por  $n$  por  $q$  são exatamente aquelas do caso 2 por 2 por 2. As mesmas condições das taxas marginais de substituição e transformação caracterizam a solução, só que agora em muitas direções. Nada de novo ou surpreendente acontece.<sup>28</sup>

2. A solução desviou de um conjunto de dificuldades que não foram explicitamente evitadas pelos pressupostos. Nós assumimos tacitamente que os dois conjuntos de isoquantas originariam uma linha suave de tangências "internas",  $FF$ , na caixa de produção da Figura 1; similarmemente, obteríamos uma curva "interna",  $SS$ , na caixa de trocas das Figuras 2 e 5. Nenhum de nossos pressupostos garante que isso deveria ser as-

<sup>28</sup> Um tratamento rigoroso geral da situação  $m$  por  $n$  por  $q$  esclarece uma série de pontos analíticos de interesse do teórico puro, por exemplo, as dificuldades que surgem se o número de fatores exceder o número de bens. Mas a economia qualitativa é a mesma. Para um tratamento completo sob um ponto de vista não normativo, veja-se P. A. Samuelson, "Prices of Factors and Goods in General Equilibrium", *Review of Economic Studies*, 1953-54, XXI (1), nº 54, 1-20.

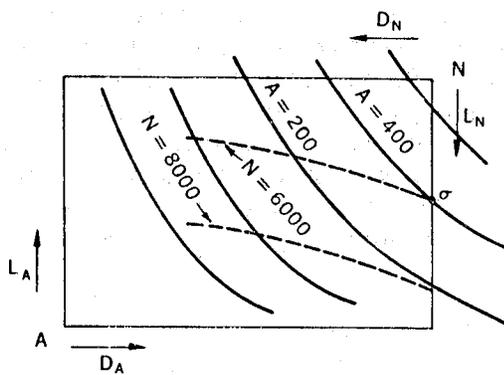


Figura 6

sim. E se a curva dos máximos de A, para possíveis valores de N, devesse ocorrer não nos pontos de tangência estrita dentro da caixa, mas no lugar que os matemáticos chamariam de tangência de canto, ao longo das bordas da caixa? A Figura 6 ilustra essa possibilidade. O nível máximo possível de produto de A, para  $N = 6000$ , ocorre em  $\sigma$ , onde  $A = 400$ ; porém, em  $\sigma$ , as duas isoquantas não são estritamente tangentes – elas se tocam, mas apresentam diferentes inclinações. O seu significado econômico é simples. Com as dotações indicadas pelas dimensões da caixa de produção da Figura 6, e com uma tecnologia como a denotada pelas isoquantas, não é possível realocar insumos até que a TMgS de terra por trabalho seja igual nas produções de ameixa e nozes. Isso se deve ao fato de a tecnologia empregada na produção de ameixas (conforme desenhada) ser tão intensiva em terra relativamente à produção de nozes, que a razão

$$\left[ \frac{\text{produtividade marginal da terra}}{\text{produtividade marginal do trabalho}} \right]$$

na produção de ameixas excede a referida razão na produção de nozes mesmo quando, como em  $\sigma$ , toda a terra for empregada na produção de ameixas.

A falta de espaço impede o prosseguimento da análise de tais fenômenos de tangência de canto. Eles refletem a possibilidade de que a

solução de máximo bem-estar possa requerer que nem todos os insumos sejam utilizados na produção de todos os produtos (por exemplo, que a terra não seja utilizada na produção de nozes, ou neurocirurgiões, na mineração de carvão), e pode até converter um dos insumos em um “bem livre”, de tal forma que seu uso total não seja igual à oferta total disponível. Que seja suficiente afirmar que, pelo estabelecimento das condições de máximo, não em termos de **igualdades** das várias inclinações, mas antes em termos de **desigualdades**; pela expressão explícita das condições apropriadas de segunda ordem, condições estas em termos de “taxas de variação de inclinações”; e, pela aceitação de desigualdades nas condições de balanço dos fatores (por exemplo,  $L_A + L_N \leq L$ ), tais fenômenos de toques nos eixos podem ser cobertos. Além do mais, podem-se afirmar que somente indeterminações não-essenciais ocorrem na configuração de preços-sombra implícita.<sup>29</sup>

<sup>29</sup> Tudo isto pode ser melhor ilustrado por dois exemplos. O requisito essencial para  $A_{\sigma}$  estar em um máximo quando  $N = 6000$  é que a interseção na borda seja tal como na Figura 6 e não como na Figura 7. Nesta última,  $\sigma'$  dá um mínimo de  $A$  para  $N = 6000$ ; o máximo verdadeiro está em  $\sigma''$ . A distinção entre  $\sigma$  em 6 e  $\sigma'$  em 7 é entre as taxas relativas de variação das duas TMgS. A indeterminação de preços implícita no máximo, ou seja, o fato de que  $\sigma$  é consistente com uma razão  $r/w$  que se encontra em algum lugar entre as duas isoquantas, deixa de ser essencial. Um segundo exemplo refere-se à teoria da firma. Tem sido argumentado que se a curva de custo marginal apresentar falhas verticais e a linha de preços cortar uma dessas falhas, então a condição  $CMg = p$  é indeterminada, razão pela qual a

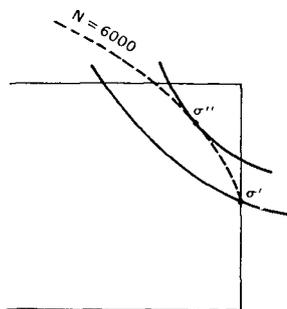


Figura 7

teoria é insatisfatória. Como tem sido indicado na literatura avançada (por exemplo, por R. L. Bishop em “Cost Discontinuities ...”, *American Economic Review*, Sept. 1948, XXXVIII, 607-17) isto é incorreto: o que importa é que, para um produto menor do que o de equilíbrio, o CMg seja menor que o preço e, para um produto maior do que o produto de equilíbrio, o CMg exceda o preço. É verdadeiro, mas quase nada prejudicial à teoria, que tal situação deixa uma margem de indeterminação no preço, a qual conduzirá a esse nível de produção. Tais fenômenos alteram a matemática de computação. Desigualdades não podem, em geral, ser usadas para eliminar incógnitas por simples substituição. Sobre esse assunto, veja-se a literatura de programação linear (por exemplo, as citações (10) e (13)).

3. Destacamos anteriormente a inexistência de curvas de indiferença da **comunidade** tais que proporcionassem um ordenamento único, para a comunidade como um todo, das várias combinações de produto.<sup>30</sup> As taxas marginais de substituição individuais entre, por exemplo, ameixas e camisas de seda, equalizadas ao longo de uma curva de contrato na caixa de trocas para que se obtenha uma TMgS “da comunidade”, são provavelmente sensíveis à distribuição de renda entre gourmets e dândis; de acordo com isso, a TMgS da comunidade em um dado ponto no espaço de bens, isto é, a inclinação da curva de indiferença da comunidade, sofrerá alterações com os movimentos ao longo da curva de possibilidades de utilidade associada. Entretanto, uma vez que é fixada a combinação  $U_X U_Y$  mais desejável para uma combinação dada de A e N, a TMgS naquele ponto AN torna-se determinada. Segue-se que, como recentemente enfatizado e provado por Samuelson<sup>32</sup>, caso a comunidade observada continuamente redistribua “rendas”, num esquema utópico de pagamentos totais, de forma a maximizar, no espaço de utilidade, a função W implícita num consenso político, então existirá, no espaço dos produtos, uma função de indiferença social determinada tal que proporcione uma ordenação, para a comunidade como um todo, de todas as combinações concebíveis de produto. Esta função, que resulta em curvas convencionais de indiferença social convexas à origem, pode ser tratada como se uma única mente estivesse encarregada de maximizá-la. Além do mais, conceitualmente e caso seja garantida a premissa de redistribuição contínua, suas curvas estão sujeitas a serem inferidas empiricamente de dados observados de preços de mercado.

Este teorema de existência justifica o uso de mapas de indiferença **social** – mapas “corrigidos” para distribuição – na manipulação de problemas de eficiência de produção, comércio internacional etc. Trata-se de uma conveniência analítica substancial.<sup>33</sup> E, mais importante, isso provê fundamentos conceituais, ainda que abstratos, para prescrições

<sup>30</sup> Veja a nota 5.

<sup>31</sup> Em termos de poder abstrato de compra.

<sup>32</sup> Veja-se a citação (11).

<sup>33</sup> Note, entretanto, que nada disso elimina a necessidade de uma função W: as curvas de indiferença social são uma função convexa dos padrões de gosto individual, da variedade ordinal usual, tomada conjuntamente com uma função W, implícita ou explícita, de conteúdo e curvatura “regulares”. Além do mais, nenhuma superioridade final recai sobre a função W implícita em um consenso político particular. Podem-se desaprovar as relações de poder em que repousa tal consenso, etc.

baseadas não apenas em uma ética arbitrária, mas principalmente na ética particular revelada por uma sociedade, denotando seu próprio consenso político.<sup>34</sup>

4. É útil, e não difícil em um tratamento matemático, abandonar o pressuposto “austríaco”, de oferta de insumos inelásticas, e introduzir escolhas de trabalho-lazer.<sup>35</sup> O efeito analítico é condicionar a curva de possibilidade de produção às sensibilidades psíquicas dos indivíduos – suas funções de preferência. Note que o sentido empírico de fazê-lo assim não está limitado a um contexto institucional ou ético de escolha não imposta. Um ditador também tem que considerar tais escolhas, ainda que apenas devido a possíveis limitações à coerção.

5. Nós descartamos as situações de produção conjunta. Isto é conveniente para efeitos de manipulação, mas dificilmente essencial; os resultados podem ser generalizados para cobrir a maioria dos casos de produção conjunta. Na realidade, o resultado é que, em modelos dinâmicos com estoques de capital, uma forma de verificar a durabilidade de tais estoques é admitir a produção conjunta. Um processo que requer uma prensa hidráulica “produz” tanto partes estampadas de metal como uma prensa hidráulica “de um ano de idade”.

6. Em nosso sistema, a distinção entre insumos (L,D) e produtos (A,N) pôde ser tomada como certa. Entretanto, a distinção é clara apenas em um mundo de produtores completamente integrados verticalmente, todos empregando insumos “primários”, não produzidos, e gerando bens de consumo e serviços “finais”. Em um sistema como o de Leontief, que permite transações entre produtores e produtos intermediários, muitos produtos, tais como eletricidade, aço, milho, caminhões, etc., são simultaneamente insumos. É interessante, e também possível, generalizar a análise para considerar, por exemplo, o carvão sendo usado não apenas para a calefação de casas, mas para produzir aço exigido na produção de máquinas de mineração planejadas para a produção do próprio carvão. Além do mais, nenhuma das características qualitati-

---

<sup>34</sup> É desnecessário dizer que a praticabilidade não está em discussão aqui. Mesmo neste nível de abstração, entretanto, os problemas tornam-se ainda muito mais difíceis quando se considera o fato de que o mundo não é estacionário.

<sup>35</sup> Se supusemos apenas um bem, por exemplo maçãs, e substituirmos o segundo bem por lazer (ou por insumo negativo de trabalho); e se deixarmos a função de produção do segundo bem como uma relação linear simples, nossa geometria prévia mostrará a situação mais simples de bens-lazer.

vas essenciais do nosso problema de máximo é violada por tal generalização.<sup>36</sup>

7. O que acontecerá se, em vez de assumirmos que as funções de produção apresentam retornos constantes de escala, permitíssemos retornos decrescentes diante de incrementos proporcionais de insumos? Isso poderia ser devido a não linearidades inerentes à física e à topografia do universo, ou à existência de algum insumo não considerado, mas significativo, e com oferta de elasticidade finita.<sup>37</sup>

Retornos decrescentes de escala, diferentemente de retornos crescentes, não dão lugar a problemas sérios, tanto para a solução analítica do sistema como para o sentido que têm no mercado as constantes intrínsecas de preço-salário-renda. Entretanto, introduzem algumas ambigüidades. Por um lado, o “valor” do produto excederá o total da renda imputada pelo mercado. Isso é intuitivamente compreensível nos termos da explicação dos retornos decrescentes “sem considerar os fatores escassos”; o valor residual não imputado do produto reflete a renda “devida” ao fator “oculto”. Se aquele fator fosse explicitamente tratado e representado em um eixo do diagrama da função de produção, os retornos não mais diminuiriam – dado que, neste enfoque, a relativa inexpandibilidade deste insumo daria lugar a rendimentos decrescentes de escala desde o começo – e a dificuldade desapareceria.<sup>38</sup>

Num contexto de mercado, isto sugere a distinção explícita entre

---

<sup>36</sup> Analiticamente, isto é feito pela designação de todos os bens produzidos como  $X_1, X_2, X_3, \dots$ . A produção bruta de, por exemplo,  $X_1$  tem dois tipos de usos: é parcialmente utilizado como insumo na produção de  $X_2, X_3, \dots$ , etc. e talvez de  $X_1$  (a indústria automobilística é uma das principais usuárias de automóveis). O restante está disponível para consumo das unidades familiares. As funções de produção têm  $X$ 's tanto no lado direito, como no lado esquerdo.

<sup>37</sup> Se o “produto” varia como a área da superfície de um corpo sólido e o “insumo”, como seu volume cúbico, uma duplicação do insumo vai menos que duplicar o produto – este é um exemplo do primeiro tipo. Um típico exemplo do segundo é o caso em que a função de produção da pesca não inclui um eixo para a “quantidade” de lagos; portanto, além de certo ponto, a duplicação de horas-homem, botes, etc. menos que duplica o produto. Há uma bibliografia levemente trivial que investiga a possibilidade de existência da primeira classe sem alguns elementos da segunda. Se **cada** insumo for realmente duplicado, então, afirmam os proponentes de uma visão, o produto **deve** dobrar. A própria veemência da afirmação sugere a verdade, isto é, que é conceitualmente impossível refutá-la por meio de referência à evidência empírica. Afortunadamente, a distinção não é apenas arbitrária, pois depende do que é colocado nos eixos do diagrama da função de produção e do que fica implícito na curvatura da superfície de produção. É, também de pouca importância. Pode-se pensar no fenômeno como se desejar. Nada mudará.

<sup>38</sup> O fato de que o enfoque do “fator escasso e oculto” seja heurísticamente útil não fortalece, entretanto, sua pretensão de colocá-lo como uma hipótese acerca da realidade.

firmas e indústrias. Em nosso mundo de retornos constantes de escala, o número de produtores de ameixas ou de nozes pode ser pressuposto como indeterminado. Poder-se-ia supor que cada firma estaria apta a produzir a qualquer nível até  $A_{\Omega}$  (ou  $N_{\Omega}$ ) a um custo unitário constante. De fato, se tivéssemos uma forma conveniente de manipular um comportamento monopolístico incipiente, assim como postular entrada sem fricção de novas firmas, poderíamos simplesmente pensar em uma firma gigante produzindo todas as ameixas (nozes) requeridas. Tal firma ver-se-ia compelida, entretanto, a comportar-se tal qual um competidor “atomístico”, isto é, estaria impossibilitada de explorar a inclinação na curva de demanda, devido aos competidores incipientes, prontos para entrar na disputa instantaneamente ao menor sinal de lucro.

É, contudo, natural, pelo menos em um contexto de instituições de mercado, pensar em retornos decrescentes de escala como associados à entidade empresarial quantitativa e qualitativamente escassa que define a firma, mas que não é explicitamente tratada como insumo. Então, ao se expandir a produção de ameixas, os empresários relativamente menos eficientes são atraídos à produção – a curva de custo total do “último” produtor e o respectivo preço-sombra das ameixas tornam-se progressivamente maiores – e as firmas intramarginais realizam “lucros” devido, diretamente, ao valor de escassez das qualidades gerenciais de seus empresários. O número de firmas, seus insumos e produtos são determinados. A última firma apenas empata com o valor de solução do preço-sombra.<sup>39</sup>

De qualquer forma, os rendimentos decrescentes de escala não acarretam danos sérios ao sistema estático. Quando a questão é de realmente resolver um problema de máximo, a perda de linearidade é dolorosa, mas o problema está na matemática.<sup>40</sup>

8. Existe um tipo de complicação que vicia os resultados. Suponhamos, até aqui, que não existe interação **direta** entre produtores, entre consumidores e entre produtores e consumidores – que não existem economias externas (não pecuniárias) ou deseconomias de produção e consumo. A suposição reflete-se em quatro características das funções de produção e de preferência:

<sup>39</sup> Mais precisamente, a “próxima” firma na linha poderia não cobrir seus custos. Isto inclui a descontinuidade.

<sup>40</sup> Contudo, deveria talvez ser repetido que permanece uma considerável ambigüidade acerca de como a diferença entre receita e gasto nas situações de rendimentos decrescentes de escala é melhor tratada em uma estrutura de equilíbrio geral.

a. O nível de produção de ameixas foi suposto como sendo determinado unicamente pelas quantidades de terra e trabalho aplicadas à produção de ameixas – presumiu-se que A não era sensível aos insumos e produtos da indústria de nozes; similarmente para nozes. Isso elimina a possibilidade de que a função de produção de ameixas possa alterar-se em consequência de movimentos ao longo da função de produção de nozes, isto é, para dados  $D_A$  e  $L_A$ , A pode variar com  $N$ ,  $L_N$ ,  $D_N$ . O exemplo padrão de tal “economia tecnológica externa” (ou deseconomia) é o apicultor cuja produção de mel aumentará, com tudo o mais constante, se o produtor vizinho de maçãs expandir sua produção (portanto, sua “oferta” de flores de maçãs).<sup>41</sup> A própria qualificação pastoral do exemplo sugere que, em um contexto estático, tal interação direta entre produtores, a qual não é refletida nos preços, é provavelmente rara. Desde que exista, reflete alguns insumos ou produtos ocultos (por exemplo, flores de maçãs), cujos benefícios ou custos não são (facilmente) apropriados pelas instituições de mercado.

Deve-se enfatizar que a afirmação de que tais fenômenos são empiricamente sem importância é defensável somente se excluirmos os fenômenos dinâmicos irreversíveis. Caso venhamos a introduzir mudanças no conhecimento ou, por exemplo, investimentos em mudanças na qualidade da força de trabalho via treinamento, os efeitos “externos” tornam-se de fato muito importantes.<sup>42</sup> Mas em nosso estratosférico nível de abstração tais considerações estão fora de ordem.

---

<sup>41</sup> O outro tipo de externalidade tratado na literatura neoclássica, o tipo denominado de “pecuniária” por Jacob Viner, não afeta, por si, os resultados. Consiste na sensibilidade dos preços dos insumos ao nível de produção da indústria, mas não à produção das firmas isoladas. Economias pecuniárias externas, em distinção às deseconomias, sinalizam, entretanto, a existência de economias tecnológicas externas do tipo aqui discutido ou de economias internas entre as firmas ofertantes. Estas últimas refletem retornos crescentes de escala ao longo das funções de produção – uma situação bastante problemática, discutida em detalhes na Parte 5.

<sup>42</sup> Os “benefícios” totais da maior parte das mudanças no “conhecimento”, da maioria das “idéias”, não são facilmente recebidos por quem as gera, mesmo com forte proteção de patentes e direitos autorais. Se, então, a energia e os recursos dedicados à “criação de novo conhecimento” são sensíveis ao cálculo de custo-benefício privado, pode-se perder algum potencial de ganhos sociais, por que tal cálculo não contabiliza corretamente os custos e benefícios para a sociedade em geral. Tudo isso é complicado pela especificidade do “conhecimento” como um recurso escasso: em contraste com a maioria dos outros tipos de escassez, só porque há mais para você, não necessariamente há menos para mim. Como no caso do treinamento do trabalho, o benefício social ocorre através de uma vida de serviços da pessoa treinada; o benefício privado para o produtor ocorre até que a pessoa demita-se e vá trabalhar para um concorrente.

b. A “felicidade” de X, como medido por  $U_X$ , foi suposta como determinada unicamente por seu próprio consumo de ameixas e nozes. Não lhe foi conferida sensibilidade ao consumo de seu vizinho (de Y) e vice-versa. Isso exclui não apenas os efeitos Veblen, do tipo “manter-se igual a ...”, mas também fenômenos como aquele em que Y fica se virando em raivosa insônia devido ao “consumo” de X de programas de televisão da meia-noite; ou a sensibilidade abstermia de X ser ofendida pelo tranqüilo e solitário consumo de bebidas por Y. Ninguém com experiência em “vizinhança” argumentará que tais aspectos são ilusórios, mas não é muito frutífero considerá-los em uma estrutura maximizadora formal.<sup>43</sup>

c. X e Y foram supostos insensíveis também à configuração de insumo-produto dos produtores, exceto quando isso afetasse as escolhas de consumo. A insensibilidade à alocação do seu próprio tempo de trabalho está subentendida na suposição “austríaca”; embora mais seja exigido. A esposa de Y não deve se tornar frenética pela fuligem da fábrica, nem X deve se irritar com uma “eficientemente” localizada fábrica que prejudica seu panorama.

d. Há, ainda, um quarto tipo de externalidade: a satisfação de X pode sofrer influências não apenas de seu próprio emprego, mas também pelo emprego de Y. Muitos valores associados à satisfação do trabalho – status, poder e outros semelhantes – são sensíveis à posição **relativa** das pessoas, não apenas como consumidoras, mas também como ofertantes de serviços à produção. O pressuposto “austríaco”, pelo qual  $U_X$  e  $U_Y$  são funções apenas das possibilidades de consumo, anula também este tipo de interação.

Poderiam os fenômenos de interação direta ser introduzidos num sistema formal de maximização? Se possível, a que custo? No que diz respeito à solubilidade analítica de alguns problemas de maximização de W, não há razão necessária em contrário. A matemática de provar a existência ou a inexistência de uma “solução”, ou de uma “solução” única e estável, ou a tarefa de encontrar uma rotina de computação que busque tal solução, caso exista, pode tornar-se de difícil manuseio. Mas o problema não deverá ficar sem sentido por conta de tais fenômenos.

Infelizmente, isso significa dizer muito pouco, exceto em nível metafísico. Aquelas qualidades do sistema que são de particular interesse para o economista – (i) que a solução implica uma série de “condições

---

<sup>43</sup> Entretanto, para uma importante exceção, veja-se a nota 44 a seguir.

de eficiência”, as condições de taxa marginal de substituição de Pareto, as quais são necessárias para o máximo de uma ampla variedade de funções  $W$ , e (ii) que existe uma correspondência entre os valores ótimos das variáveis e aqueles gerados por um sistema de instituições de mercado (perfeitas) com redistribuição – aquelas qualidades podem ou ser obscurecidas ou desaparecer com a “interação direta”. A maioria das variedades de tal interação destrói a “dualidade” do sistema: as constantes embutidas no problema de máximo, se existirem, perdem significado como preços, salários, rendas (rent). Elas não explicarão corretamente todos os “custos” e “benefícios” aos quais a função de bem-estar é sensível.<sup>44</sup>

Em geral, portanto, a maioria dos modelos formais exclui tais fenômenos. Não há dúvida de que, ao fazê-lo, eles abstraem alguns importantes aspectos da realidade. Contudo, teorizar consiste justamente em fazer tais abstrações; nenhuma teoria pretende esgotar toda a realidade. A questão de quais tipos de complicações do mundo mais real podemos introduzir em uma estrutura maximizadora formal é respondida apenas nos termos de uma estratégia de teorização ou em termos dos requisitos de problemas concretos e particulares. Para muitos propósitos, é útil e interessante explorar as implicações da maximização em um “mundo” onde não existam tais interações diretas.

## 5. ABANDONO DAS SUPOSIÇÕES DE CURVATURA: ÂNGULOS E NÃO-CONVEXIDADES

Nenhuma das qualificações e generalizações anteriores viola o caráter fundamentalmente neoclássico do modelo. O que aconteceria caso renunciássemos a algumas das propriedades de curvatura das funções?

1. Estabelecemos que as funções de produção e as curvas de in-

---

<sup>44</sup> Contudo, não se deveria concluir que os diferentes tipos de interação direta são todos igualmente danosos. Todos, quase que por definição, arruinarão a atuação do mercado; porém, pelo menos alguns permitem um tratamento formal de maximização tal que resulte em condições de eficiência análogas àquelas da Parte 1 – condições que consideram adequadamente os custos e benefícios sociais totais. Os chamados “bens públicos”, por exemplo, defesa nacional, que dão lugar à interação direta, uma vez que, por definição, seu consumo é conjunto – mais para  $X$  significa não menos, mas mais, para  $Y$  – são um importante exemplo. A maximização proporciona condições de TMgS que mantêm curiosa correspondência com aquelas que caracterizam situações de bens privados ordinários. Mas estas mesmas condições de TMgS servem para revelar a falha da dualidade (O tratamento de Samuelson é novamente o original e definitivo. Veja-se a citação (12).)

diferença apresentam curvaturas contínuas e bem definidas – sem cantos fechados ou dobras capazes de causar indeterminações nas taxas marginais de substituição. Tais curvaturas suaves permitem o uso de cálculo; portanto, são matematicamente convenientes para modelos maiores que 2 por 2 por 2. Elas são, entretanto, inessenciais para o significado econômico dos resultados. A análise foi traduzida – e, em parte, independentemente reinventada – para um mundo de funções de produção com superfícies planas e cantos fechados: a programação linear, mais formalmente conhecida como análise de atividades, é o corpo teórico resultante da teoria.<sup>45</sup> Todas as condições de eficiência têm sua contrapartida em tal sistema, e a existência de “preços” implícitos, embutidos no problema de máximo, é ainda mais notável.<sup>46</sup>

2. Diminuir o requisito neoclássico de funções suaves é não apenas indolor; no desenvolvimento da economia analítica, isso levou a novos ‘insights’ interessantes. Infelizmente, entretanto, o próximo passo é bastante penoso. Em nossas suposições originais fizemos com que os rendimentos de escala fossem constantes (ou pelo menos não crescentes), para aumentos proporcionais nos insumos, e que as isoquantas e as curvas de indiferença fossem “convexas em relação à origem”. Esses requisitos garantem uma condição denominada pelos matemáticos de convexidade. A violação desta condição, tal como permitir retornos crescentes de escala na produção – devido, caso se deseje, às leis da física e à topografia inerentes ao universo, ou a algum insumo fixo [lumpiness] e indivisibilidades –, dá lugar a sérias dificuldades.

A essência da convexidade, um conceito que tem um papel crucial na economia matemática, é bastante simples. Tome uma única isoquanta como MM na Figura 8a. Ela representa o mínimo de insumos, L e D, necessário à produção de 100 ameixas, portanto é exatamente o limite de todas as combinações tecnologicamente possíveis de insumos para a produção de 100 ameixas. Apenas os pontos sobre MM são simultaneamente possíveis e tecnologicamente **eficientes**, mas qualquer ponto localizado na região sombreada é **possível**: ninguém pode nos impedir de desperdiçar L ou D. Por outro lado, nenhum ponto do lado da origem de MM é possível para um nível de produção de 100 ameixas:

<sup>45</sup> As isoquantas em tal estrutura consistem em combinações linearmente aditivas de processos, cada processo sendo definido como requerendo proporções absolutamente fixas de insumos e produtos. Isso resulta em isoquantas tais como as da Figura 8.c.

<sup>46</sup> Um pouco de experimentação gráfica mostrará que as técnicas geométricas da Parte 1 permanecem totalmente adequadas.

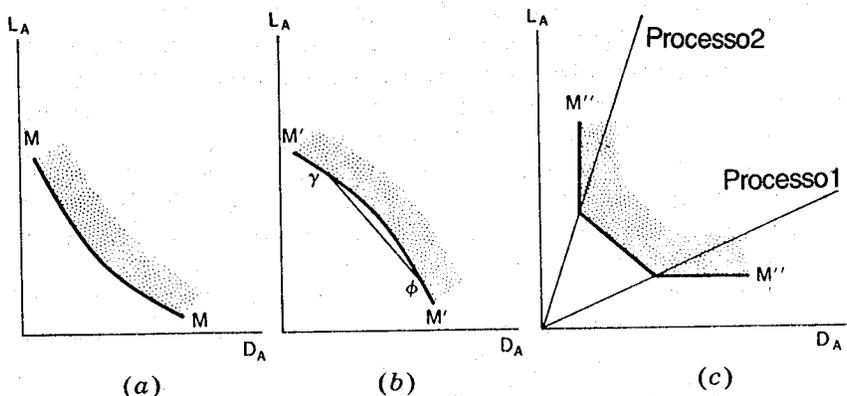


Figura 8

dadas as leis da física, etc., é impossível fazer melhor. **A convexidade matemática é obtida se uma linha reta, que conecta quaisquer dois pontos possíveis, em nenhum lugar passar fora do conjunto de pontos viáveis.** Um pouco de experimentação mostrará que este é o caso da Figura 8.a. Na Figura 8.b, entretanto, onde a isoquanta apresentar uma “estranha” curvatura – TMgS de  $D$  por  $L$  aumenta – a linha que conecta, por exemplo, os possíveis pontos  $\gamma$  e  $\phi$ , passa por fora da zona sombreada “factível”. Note-se, casualmente, que uma isoquanta da variedade de programação linear, como na Figura 8.c, é “convexa” – esta é a razão pela qual a generalização de (1) não teve problemas.<sup>47</sup>

Que tipo de problema cria a não-convexidade? No caso de isoquantas côncavas em relação à origem, isto é, isoquantas não convexas, a dificuldade é facilmente observável. Voltando à Figura 1, imagine que as antigas isoquantas das nozes são, na realidade, aquelas dos produtores de ameixas, portanto orientadas para sudoeste, e vice-versa para nozes. O exame do diagrama mostrará que a linha de tangências,  $FF$ , é agora um lugar geométrico de combinações de  $A$  e  $N$  de mínimo. Daí a regra de igualdade das TMgS resultará em combinações de insu-

<sup>47</sup> É importante não confundir convexidade matemática com a curvatura que parece “convexa em relação à origem”. A convexidade matemática é uma propriedade de conjuntos de pontos, e o conjunto de pontos de produção factíveis, limitado por uma curva de possibilidade de produção, por exemplo, é convexo se, e somente se, a própria curva de possibilidade de produção é “côncava em relação à origem” (ou uma linha reta). Confirme isso pela regra que define a convexidade.

mos que darão um mínimo de  $N$  para quantidades especificadas de  $A$ .<sup>48</sup>

3. Este não é o momento para analisar exaustivamente os problemas de convexidade. Pode ser, entretanto, útil para examinar um tipo importante de não-convexidade: retornos crescentes de escala na produção. Geometricamente, retornos crescentes de escala são denotados por isoquantas que ficam cada vez mais juntas em movimentos para fora, ao longo de qualquer raio desde a origem; para dobrar o produto, você precisa menos do que o dobro de insumos. Note que as isoquantas ainda delimitam conjuntos convexos no plano LD (elas ainda estão como na Figura 8a). Mas na terceira dimensão, a do produto, de uma superfície de produção de dois insumos e um produto, os cortes realizados por planos verticais através da origem, perpendiculares a LD, cortarão a superfície de produção de forma a determinar um limite tal como VV na Figura 9. É evidente que VV delimita um conjunto não convexo de pon-

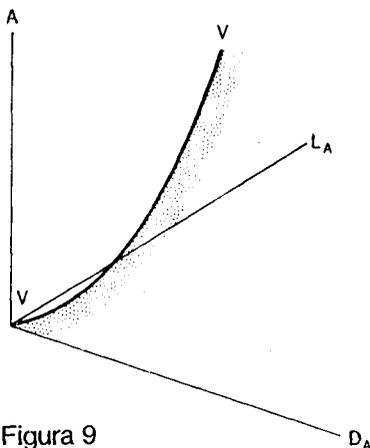


Figura 9

tos factíveis, de modo que todo o conjunto tridimensional de possíveis pontos de insumo-produto não seja convexo.

O efeito da tal ausência de convexidade no espaço de insumo-produto pode ser classificado com relação a suas possíveis implicações para: (a) as inclinações das curvas de custo médio (AC) dos produtores;

---

<sup>48</sup> Um mínimo, na verdade, e sujeito ao requisito de que nenhum insumo seja "desperdiçado" do ponto de vista da engenharia, isto é, que cada produtor individual esteja sobre a função de produção dada pelo engenheiro.

(b) as inclinações das curvas de custo marginal (MC); (c) a curvatura da curva de possibilidades de produção.

**a. Retornos Decrescentes de Escala e Curvas AC.** Uma consequência necessária dos retornos crescentes de escala é que, na configuração de máximo para os insumos, produtos e preços de insumos, as curvas AC dos produtores inclinam-se para baixo com o aumento da produção. Pela definição de retornos crescentes de escala em um dado ponto  $\tau$  de uma função de produção, sucessivas isoquantas na vizinhança de  $\tau$  encontram-se cada vez mais juntas em movimentos para o “nordeste”, ao longo do raio da origem através de  $\tau$  (Z na Figura 10). Tal como desenhado na Figura 10, o raio Z também corresponde a um ca-

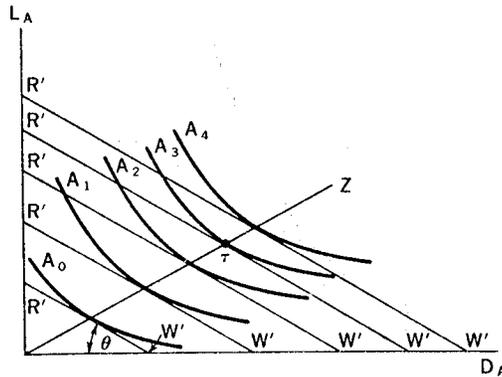


Figura 10

minho de expansão para a razão particular  $r/w$ , denotada pela família de linhas de isocusto  $R'W'$ : cada  $R'W'$  é tangente a uma isoquanta ao longo de Z. Dado  $r/w = \text{tangente } \theta$ , um produtor de ameixas maximizador de lucros calculará seu custo total mínimo, para os vários níveis de produção, a partir dos pontos de insumo-produto ao longo de Z. Mas, ao longo de Z, as tangentes de igual custo,  $R'W'$ , na vizinhança de  $\tau$ , encontram-se cada vez mais juntas para níveis crescentes de produção, do mesmo modo que as isoquantas. Isso implica que o aumento no custo total, para sucessivos aumentos iguais no produto, declina. Portanto, a curva AC em  $\tau$ , para  $r/w = \text{tangente } \theta$ , precisa ser decrescente.

Suponha que o caminho de expansão para  $r/w = | \text{tangente } \theta |$  não correspondesse ao raio  $Z$ , mas apenas o cruzasse em  $\tau$ . A interseção de  $A_4$  com  $Z$  não indicaria, então, a combinação de insumos de custo mínimo para uma produção de  $A_4$ ; daí, o aumento do custo total minimizado entre  $A_3$  e  $A_4$  seria ainda menor do que na Figura 10: o efeito negativo em AC seria reforçado. A questão é simplesmente que, se por movimentos ao longo de um raio desde a origem o custo por unidade de produto diminuir, AC declinará ainda mais se a produção de custo total mínimo requerer mudanças na combinação de insumos, ou seja, um desvio a partir do raio  $Z$ .

O que ocorre, então, se a combinação de insumo-produto do máximo  $W$ , definida para este produtor particular, for representada pelo ponto  $\tau$ ? Ora, demonstrou-se que AC é declinante em  $\tau$ . Uma AC declinante implica uma curva de custo marginal (MC) que se encontra abaixo da média. Mas se  $\tau$  é o ponto  $\Omega$ , o  $p_A$  – sombra será exatamente igual ao MC de  $\tau$ . Segue-se que a configuração de máximo  $W$  requer  $P_A < AC$ , isto é, prejuízos perpétuos. Prejuízos, entretanto, são incompatíveis com os mercados (perfeitos) da vida real; portanto, onde vigoram retornos crescentes de escala, a correspondência entre a alocação dirigida pelos mercados e a alocação maximizadora de  $W$  fracassa. Num contexto institucional, onde os produtores abandonam os negócios se os lucros são negativos, os mercados não servirão.<sup>49</sup>

Rendimentos crescentes de escala apresentam também uma conseqüência “macro” associada com  $p < AC$ . Para retornos constantes de escala, referimo-nos ao Teorema de Euler por garantir que a renda total dos fatores igualará exatamente o valor total do produto. Em situações de retornos crescentes de escala, a renda total imputada aos fatores excederá o valor total do produto:  $rD + wL > p_A A + p_N N$ .<sup>50</sup>

**b. Retornos Crescentes de Escala e Curvas MC.** Quando a não-convexidade do tipo rendimentos crescentes de escala resultar em curvas AC declinantes, os mercados reais (perfeitos) fracassarão. O que

<sup>49</sup> É desnecessário dizer que os comentários sobre a efetividade dos mercados, em todo este trabalho, referem-se apenas aos aspectos de analogia aos computadores dos sistemas de preços de mercado. Isso é quase como falar sobre homens assexuados; contudo, é certamente interessante examinar tais sistemas como mecanismos puros e simples.

<sup>50</sup> O leitor treinado em cálculo pode comprovar isto mediante, por exemplo, uma função do tipo Cobb-Douglas:  $A = L_A^\alpha + D_A^\beta (\alpha + \beta) > 1$  para obter rendimentos crescentes de escala.

ocorreria em uma burocracia socialista do tipo Lange-Lerner, onde cada gerente de fábrica é instruído a maximizar seus lucros algébricos, em termos dos preços-“sombra” centralmente determinados, sem considerar prejuízos? Encontrar-se-á este sistema na configuração de máximo  $W$ ?

Talvez sim, talvez não. Se AC deve decrescer, MC deve se situar abaixo de AC, mas para o nível de produção  $\Omega$  necessário, MC pode ser, não obstante, crescente, como por exemplo em  $\epsilon$  na Figura 11. Ca-

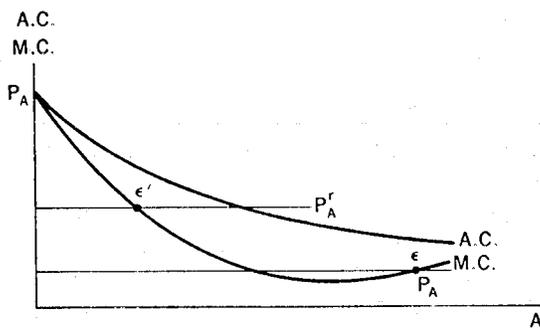


Figura 11

so isto aconteça, um burocrata Lange-Lerner, tomando decisões de insumo-produto como os competidores atomísticos “maximizadores de lucro”, mas ignorando prejuízos, tomará as decisões “certas”, isto é, “colocará” o sistema no  $W$  máximo. Cada gerente que igualar seu custo marginal aos preços-sombra, centralmente determinados pela solução de máximo  $W$ , produzirá exatamente o nível requerido pela configuração  $\Omega$ . Pela suposição de AC declinante, devido a retornos crescentes de escala, tanto uma como ambas as indústrias mostrarão perdas, mas estas são irrelevantes para a alocação ótima.<sup>51</sup>

O que ocorre se para um máximo de  $W$  for necessário que os produtores produzam em pontos como  $\epsilon'$ , onde  $p = MC$ , mas MC é decli-

<sup>51</sup> Existe uma ambigüidade de linguagem na formulação anterior. Se, na configuração de máximo  $W$  prevalecem perdas, a posição de máximo lucro “no geral” não será onde  $p = MC$ , mas ao nível de produto zero. Estritamente falando, uma burocracia Lange-Lerner precisa ser instruída a igualar custo marginal a preço, ou a maximizar lucros “no particular”, desconsiderando o valor absoluto dos lucros. “Faça qualquer seqüência contínua de pequenos movimentos que aumente os lucros algébricos, mas não salte para a origem. “Esta é precisamente a eliminação da posição de produto zero, exceto se exigida por  $MC > p$  em todos os lugares, o que distingue os sistemas Lange-Lerner dos mercados perfeitos da “vida real”, ambos vistos como “análogos a computadores”.

nante?<sup>52</sup> O fato de que  $\epsilon'$  apresenta  $AC \succ MC = p$ , portanto prejuízos, está de acordo com o que já foi descrito. Contudo, há mais. Pela suposição de uma curva MC declinante, a linha de preços horizontal ao nível de  $\epsilon'$  corta a curva MC de baixo para cima, daí lucros em  $\epsilon'$  não apenas são negativos; estão em um **mínimo**. Um maximizador de lucros da “vida real” certamente não permaneceria ali: estaria perdendo dinheiro a cada instante. Nem também um burocrata Lange-Lerner, sob instruções de maximizar lucros. Tentaria aumentar sua produção: a receita “extra” ( $p_A$ ) excederia sua MC mais e mais para cada ameixa adicional produzida. Neste caso, então, não apenas os mercados da vida real desmoro-nar-se-iam; também o faria a maximização de lucros descentralizada feita por funcionários públicos socialistas.<sup>53</sup>

É bastante paradoxal que a regra correta para todas as indústrias cujo MC é decrescente no ponto  $\Omega$  é: “minimize seus lucros algébricos”. Mas nenhuma regra assim pode salvar o caráter descentralizador do esquema de Lange-Lerner. Num mundo “convexo”, o simples preceito de maximizar lucros em resposta a preços centralmente determinados, junto com o aumento (diminuição) de preços pelos “ministérios” responsáveis, conforme a oferta seja menor (exceda) do que a demanda, é tudo que se precisa.<sup>54</sup> Ninguém tem que saber ex-ante, por exemplo, os preços associados ao ponto  $\Omega$ . De fato, o esquema foi concebido, em parte, para opor-se ao argumento de que uma alocação eficiente em uma economia coletivizada é impossível, devido, simplesmente, aos altos custos administrativos dos cálculos. Entretanto, com retornos crescentes de escala, a autoridade central deve, evidentemente, ter conhecimento de onde MC será decrescente e onde será crescente: deve sabê-lo antes de emitir quaisquer instruções acerca da solução.

**c. Retornos Crescentes de Escala e a Curva de Possibilidade de Produção.** O que sobra da “dualidade”? Tanto os mercados reais, como os sistemas não sofisticados de Lange-Lerner, falharam. Contudo,

<sup>52</sup> Este seria necessariamente o caso, por exemplo, das funções com rendimentos crescentes de escala do tipo Cobb-Douglas. Tais funções implicam curvas MC sempre decrescentes para qualquer razão  $r/w$ .

<sup>53</sup> Note que uma curva MC descendente é apenas um reflexo da ausência de convexidade na curva de custo total.

<sup>54</sup> Isto não é tudo. Mesmo num contexto estático, as transferências de renda, com pagamentos totais, implicadas por  $\Omega$ , requerem cálculos centrais. E se os caminhos de ajustamento são explicitamente considerados, surgem questões complexas acerca da estabilidade do equilíbrio. (Por exemplo, o excesso de demanda será sempre corrigido por preços ascendentes?)

é inteiramente possível, que, mesmo em situações onde a constelação  $\Omega$  implica  $AC \succ MC$  com  $MC$  decrescente, o procedimento maximizador da Parte 1 permaneça inviolável, e que as constantes embutidas no problema de máximo retenham o seu significado similar a preços. Para ver isto, devemos examinar o efeito de retornos crescentes de escala sobre a curva de possibilidades de produção. Há dois casos possíveis:

i. É possível, que a função de produção, tanto de nozes, como de ameixas, exiba rendimentos crescentes de escala, ainda que a curva de possibilidade de produção seja côncava em relação à origem, isto é, matematicamente convexa (como na Figura 2). Enquanto uma expansão proporcional de  $L_A$  e  $D_A$  por um fator de dois mais que duplicaria a produção de ameixas, um aumento em  $A$  à custa de  $N$ , via de regra, não se verificará mediante tal expansão proporcional de insumos. Um exame de  $FF$  na Figura 1 esclarece isto para o caso de retornos constantes de escala. Enquanto nos movimentos em  $FF$ , partindo de qualquer ponto inicial no sentido de mais  $A$  e menos  $N$ , as proporções  $L_A / D_A$  e  $L_N / D_N$  mudam.<sup>55</sup>

A idéia básica é que se, na produção de ameixas a terra é importante em relação ao trabalho, e vice-versa para nozes, como na Figura 1, um aumento na produção de ameixas resultará nos produtores de ameixas terem que usar proporcionalmente mais e mais do insumo relativamente mais adequado à produção de nozes, que é trabalho, em vez de terra. As proporções de insumos na produção de nozes tornar-se-ão menos “favoráveis”. O oposto é verdadeiro para as proporções de insumos utilizadas na produção de nozes, quando esta declina. Este fenômeno explica porque, com retornos constantes de escala em ambas as funções, a curva de possibilidades de produção apresenta curvatura côncava em relação à origem. Somente se  $FF$  na Figura 1 coincidir com a diagonal, isto é, se a “utilidade” intrínseca de  $L$  e  $D$  for a mesma, tanto na produção de ameixas como na de nozes,  $F'F'$  será uma linha reta para o caso de retornos constantes de escala.

O argumento anterior por proporções permanece válido, caso introduzamos agora um pequeno grau de rendimentos crescentes de escala em ambas as funções de forma “telescópica”, com cada isoquanta sucessivamente mais próxima da origem. Na realidade, enquanto a cur-

<sup>55</sup> Somente se  $FF$  coincidir com a diagonal da caixa é que as proporções não mudarão. Então, os rendimentos crescentes de escala implicariam necessariamente uma curva de possibilidades de produção arqueada para dentro.

va FF tiver forma e curvatura como na Figura 1, a curva de possibilidade de produção,  $F'F'$  nas Figuras 2 e 5, manterá sua convexidade.

Neste caso “moderado” de rendimentos crescentes de escala, com uma curva de possibilidades de produção ainda convexa, as regras anteriores da maximização levam ao resultado correto para um máximo de  $W$ . Além do mais, as constantes embutidas no problema de máximo re- têm seu significado. Isto é verdadeiro em dois sentidos: (1) Elas ainda refletem as taxas marginais de substituição e transformação. Qualquer conjunto de  $L$ ,  $D$ ,  $A$  e  $N$  com valor de \$1 será, na margem, exatamente convertível, pela produção e troca, por qualquer outro conjunto que valha \$1; nem mais, nem menos, pois um dólar é um dólar ...<sup>56</sup> (2) O valor total do produto “nacional” do máximo bem-estar,  $p_A A + p_N N$ , avaliado a estes preços-sombra constantes, será ele próprio um máximo. A observação da Figura 5 deixa isso claro: para a razão de preços representada pela linha  $P'_A P'_N$ ,  $\Omega'$  é o ponto de mais alto valor do produto. Como veremos, esta correspondência entre as soluções de máximo bem-estar e “produto nacional máximo” é um acidente da convexidade.

ii. É, sem dúvida, inteiramente possível que ambas as funções de produção apresentem retornos de escala suficientemente crescentes para resultarem, com totais especificados de  $L$  e  $D$ , em uma curva de possibilidade de produção tal como  $F''F''$  na Figura 12.<sup>57</sup> Esta curva exhibe não-convexidade no espaço de produto. O que acontece então aos resultados?

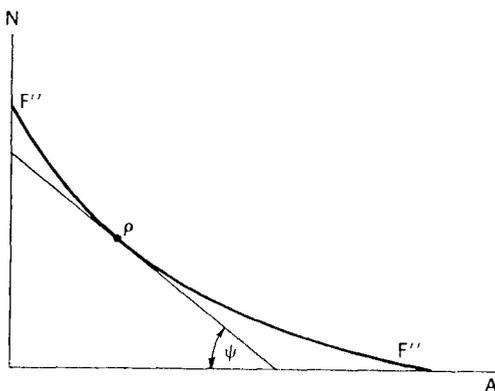


Figura 12

<sup>56</sup> Para os movimentos infinitesimais do cálculo.

<sup>57</sup> Tente duas funções que não sejam tão diferentes quanto à “intensidade de fatores”.

Se a curvatura de  $F''F''$  não é “demasiado aguda”, as constantes que surgem do problema de máximo de  $W$  retêm seu significado de “um dólar é um dólar”. Elas ainda refletem taxas marginais de substituição em todas as direções. Mas o  $W$  máximo não está mais associado ao valor-sombra máximo do produto. Uma olhada na Figura 12 confirma a nossa intuição geométrica de que, em situações de possibilidades de produção não-convexas, o ponto de nirvana coincide com o valor mínimo do produto. Para os preços implícitos, como mostra  $|\tan \psi|$ , o ponto  $\Omega$  em  $\rho$  é um ponto de mínimo  $p_A A + p_N N$ .<sup>58</sup>

Mas, diante de não-convexidade no espaço de produto, os problemas poderiam tornar-se muito mais complicados. Se a curva de possibilidades de produção é **marcadamente** côncava para fora, relativamente às curvas de indiferença, pode ser que a regra de “minimizar lucros” seja equivocada, ainda que ambas as indústrias mostrem MCs decrescentes. Considere uma situação com apenas um indivíduo, como na Figura 13. A curva  $F''F''$ , de possibilidades de produção, tem maior curva-

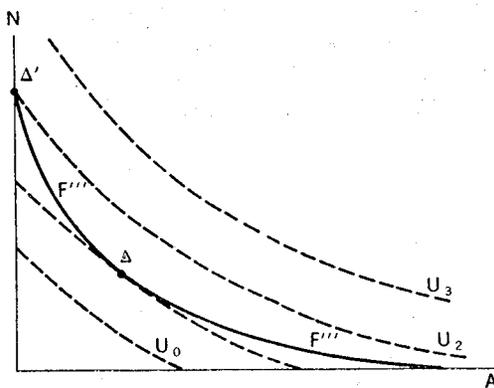


Figura 13

tura para dentro do que as curvas de indiferença ( $U$ ), e o ponto de tangência  $\Delta$  é um ponto de satisfação **mínima**. Aqui, ao contrário de antes,

<sup>58</sup> Para  $p_A/p_N = |\text{tangente } \psi|$ ,  $p_A A + p_N N$  está em seu máximo na intersecção de  $F''F''$  com o eixo de  $A$ . Lembre-se que, casualmente, em situações de MC decrescente, requer-se dos produtores que minimizem lucros.

você deveria escapar de  $\Delta$ . A posição de máximo bem-estar é  $\Delta'$  – uma “tangência de canto” está envolvida. A idéia básica é que, em situações de não-convexidade, as curvaturas **relativas** são cruciais: os pontos de tangência podem tanto ser de mínimo como de máximo.<sup>59</sup>

Basta de não-convexidade. Em sua forma mais moderada, se as isoquantas e as curvas de indiferença retêm suas curvaturas normais e apenas os rendimentos a escala sofrem “incrementos”, a não-convexidade não tem que violar as características qualitativas do problema de máximo de  $W$ . As condições de taxas marginais de substituição podem muito bem permanecer válidas, e a solução poderia ainda indicar um conjunto de preços-sombra, aos quais respostas descentralizadas que resultam na configuração de máximo para insumos, produtos e distribuição de bens. Mas certas condições totais, não-marginais, para o efetivo funcionamento dos mercados da vida real, por exemplo, de que todos os produtores pelo menos cubram suas despesas, são necessariamente violadas. A falha reside nas instituições de mercado: a solução de máximo de  $W$  exige tais “perdas”. A moral importante da questão é que, onde retornos crescentes de escala ocorrem, um sistema de preços idealizado não é uma forma efetiva de se conseguir dinheiro para cobrir

---

<sup>59</sup> Lembre-se que, em nossa discussão da Parte 4, as tangências de canto eram importantes em situações onde não existiam tangências internas possíveis. Aqui elas existem e são perfeitamente boas – mas são antes lugares de mínimos do que de máximos. As condições de segunda ordem, expressas por desigualdades, constituem a prova crucial da alocação ótima.

É tentador, mas equivocado, pensar que existe uma correspondência única entre a curvatura da curva de possibilidades de produção e as inclinações relativas das curvas  $MC$  de nozes e ameixas. É verdade que a razão ( $MC_A / MC_N$ ) associada a um ponto tal como  $\Omega'$  na Figura 5 precisa ser menor do que a referida razão em qualquer ponto em  $F'F'$  com mais  $A$  e menos  $N$  (por exemplo,  $\delta$ ): a inclinação absoluta de  $F'F'$ , como foi mostrado, iguala a  $p_A / p_N = (MC_A / MC_N)$ , e em  $\Omega'$  a inclinação é menos forte do que em  $\delta$ . É também verdade que ao longo de uma curva de possibilidades de produção não-convexa, tal como aquela da Figura 12, um aumento em  $A$  e uma diminuição em  $N$  estão associados a um declínio em ( $MC_A / MC_N$ ). Mas não se deduz que, por exemplo, no primeiro caso da Figura 5, em  $\Omega'$   $MC_A$  deva ser crescente para que aumentos em  $A$  compensem suficientemente uma  $MC_N$  possivelmente decrescente. (Relembre, em movimentos desde  $\Omega'$  até  $\delta$  nós nos movemos para a direita ao longo do eixo  $A$ , mas para a esquerda ao longo do eixo  $N$ .) Pois qualquer movimento desde  $\Omega'$  provocará, em geral, variações nos preços-sombra dos insumos, e, logo, alterações nas curvas  $MC$  enquanto que as inclinações das curvas em  $\Omega'$  foram derivadas a partir de uma curva de custo total calculada com base nos valores- $\Omega'$  contantes e dados, de  $w$  e  $r$ . A idéia é que as curvas de custo são criaturas do equilíbrio parcial, avaliadas a preços fixos, enquanto movimentos ao longo da curva de possibilidades de produção envolvem um ajuste de equilíbrio geral, o qual **alterará** os preços dos insumos. Portanto, é inteiramente possível que em  $\Omega'$ , na Figura 5, tanto  $MC_A$  como  $MC_N$  sejam decrescentes, ainda que  $F'F'$  seja convexa.

custos. Entretanto, pode ainda ser um sistema efetivo para racionar a escassez.<sup>60</sup>

## 6. DINÂMICA

Examinamos com algum detalhe as condições de alocação e distribuição de insumos e produtos que podem ser derivadas da maximização da função de bem-estar social, a qual obedece a certas restrições.<sup>61</sup> Nós o fizemos, entretanto, usando um modo de análise estática e ignoramos todos os aspectos “dinâmicos” do problema. Dizer que tal tratamento estático é “irrealístico” significa, penso eu, perder o significado essencial e a aplicabilidade da teorização. Contudo, é verdade que tal tratamento oculta muitos problemas interessantes – problemas, além do mais, alguns dos quais resultam em ‘insights’ esclarecedores quando se os enfoca sob análise rigorosa. Uma extensão totalmente dinâmica não é possível aqui, mas alguma indicação das direções que tal extensão pode tomar é talvez necessária:

1. O leitor atento terá percebido que muito pouco foi dito acerca das dimensões de  $A$ ,  $N$ ,  $L_A$ ,  $L_N$ ,  $D_A$  e  $D_N$ . A teoria estática da produção trata insumos e produtos como taxas instantâneas no tempo, “fluxos” – maçãs por dia, horas-homem por semana, etc. Isso ignora o fato elementar de que, na maioria dos processos de produção, os produtos e os insumos associados, e mesmo os diferentes insumos por si mesmos, não são simultâneos. Os pés de café levam cinco anos para produzir, um ‘brandy’ de dez anos necessita de dez anos de envelhecimento, os insumos na indústria automobilística têm que seguir uma certa seqüência, leva tempo para se construir uma estação de força e uma refinaria (não importa quão abundantemente sejam o “trabalho e a terra” aplicados). Um refinamento dinâmico da análise consiste, então, em “datar” os insumos e os produtos resultantes das funções de produção relativamente entre si. Em alguns casos, apenas a seqüência ordinal interes-

<sup>60</sup> Nenhuma menção foi feita ao caso que é talvez o mais interessante de um ponto de vista institucional: funções de produção que apresentam inicialmente rendimentos crescentes de escala e, após, rendimentos decrescentes à medida que se expande a produção. Nenhuma firma que busque lucros produzirá no primeiro estágio, onde  $AC$  é decrescente, e  $A_{\Omega}$  e  $N_{\Omega}$  podem requerer apenas uma ou poucas firmas produzindo no segundo estágio. Neste caso, as condições institucionais para a concorrência perfeita, muitas firmas, não vigorarão. Uma ou poucas firmas, com escala “eficiente”, abastecerão o mercado. Este fenômeno repousa no cerne do problema do monopólio-oligopólio.

<sup>61</sup> Veja-se a nota nº 11.

sa; em outros, também é relevante o tempo absoluto decorrido – o gesso tem de secar durante sete dias antes que se aplique a primeira demão de tinta.

2. Outra característica da produção, pelo menos neste planeta, é que os fluxos de serviços são gerados por estoques de coisas físicas, os quais prestam seus serviços somente com o tempo. As operações de tornearia podem ser efetuadas apenas com o uso de tornos e estes têm, congelados em si, fluxos de serviços que não podem ser prestados instantaneamente, mas apenas com o tempo. Num sentido descritivo, os serviços de tornearia de hoje são “conjuntos” e indivisíveis com os serviços de tornearia de amanhã. Estritamente falando, isso é verdadeiro para a maioria dos fluxos de serviços. Mas algumas coisas, como a comida ou o carvão utilizado na calefação, ou a gasolina, exaurem seus serviços muito mais rápido do que, por exemplo, máquinas a vapor, máquinas perfuradoras, edifícios, etc. A dimensão de estoque dos primeiros pode ser ignorada em muitos problemas; isto não é válido para o último conjunto de coisas, o qual é usualmente denominado de capital fixo.<sup>62</sup> Uma segunda extensão dinâmica consiste, então, em introduzir relações de fluxos e estoque nas funções de produção.

3. Defasagens e relações de fluxo e estoque estão implícitos também no fenômeno de bens em processo. A produção tem lugar no espaço e o transporte toma tempo, logo a semente não pode ser produzida no instante em que é plantada, nem os cabeçotes de cilindros antes do momento em que são exigidos na linha de montagem. Devem existir por algum tempo finito antes de serem usados.

4. Uma das inter-relações intertemporais cruciais na alocação e distribuição, em um mundo onde os estoques interessam e onde a produção depende tempo, deve-se ao fato desagradável (ou agradável) de que os insumos de certo instante não são maná dos céus. Suas ofertas dependem de decisões passadas de produção. As possibilidades de produção do próximo ano dependem, em parte, da oferta de máquinas-ferramentas; esta, por sua vez, depende parcialmente dos recursos empregados na produção das referidas máquinas neste ano. Este é o problema do investimento. Do ponto de vista de hoje, o investimento en-

<sup>62</sup> Muito depende das suposições institucionais arbitrárias ou especiais acerca de quanta otimização deixamos no background para o “engenheiro”. Por exemplo, máquinas com desenhos amplamente diferenciados poderiam provavelmente proporcionar um dado tipo de serviço. “Um torno não é um torno, é ...” Além do mais, nenhuma lei da natureza evita o aceleração do desgaste de um torno – pelo seu uso, por exemplo, como ferro-velho. Em algumas situações, até seria econômico fazê-lo.

volve escolhas de **produção**; porém, escolhas de que tipos e que quantidades de máquinas produzir, fábricas a construir, etc, fazem hoje sentido apenas em termos da **utilização como insumos** destas coisas amanhã. As dotações de insumos, L e D, transformam-se simultaneamente em incógnitas e em dados.

5. As disponibilidades de insumo de amanhã são afetadas também pela forma como são hoje utilizados os insumos. A natureza e a intensidade a que estão sujeitas as máquinas, o modo como o solo é utilizado e os poços de petróleo, operados, a taxa à qual os estoques são esgotados, etc., parcialmente determinam o que será deixado para amanhã. Este é o problema do consumo do capital físico, o desgaste e a deterioração, etc. – o problema do quanto subtrair da inversão bruta para obter formação de capital “líquida”, daí a variação líquida na oferta de insumos.

Como se ajustam estes cinco fenômenos dinâmicos ao problema de máximo bem-estar social? Relembremos que nossa função W foi suposta como sensível ao consumo de X e Y e apenas a ele. Contudo, nada foi dito sobre a datação de tal consumo. Certamente não apenas o consumo deste instante interessa. Em um contexto dinâmico, as funções de bem-estar e de preferência com significado devem prover um ordenamento não somente com relação a todas as possíveis combinações de consumo corrente, mas também para o tempo futuro. Devem fornecer algum meio de ponderar as ameixas da próxima semana com relação às nozes e as ameixas de hoje. Tais funções **datarão** cada unidade de A e N e a escolha será feita entre caminhos temporais alternativos de consumo.<sup>63</sup>

Dado tal contexto, os cinco fenômenos dinâmicos anteriores são passíveis de um tratamento de maximização formal semelhante ao das Partes 1, 2 e 3. Eles são, com uma qualificação,<sup>64</sup> consistentes com os pressupostos de convexidade exigidos para a solubilidade e para a dualidade. Os resultados que são fruto de alguns trabalhos muito recentes e inovadores de R. M. Solow e P. A. Samuelson (a ser publicado em bre-

<sup>63</sup> Note-se quão pouco peso é provavelmente atribuído ao consumo corrente, relativamente ao consumo futuro, se tomarmos curtos períodos unitários. Este ano certamente importa, mas e quanto a esta tarde frente a todo o futuro, ou a este segundo? E quanto ao homem que sabe que morrerá amanhã? Perceba também os dilemas filosóficos intrínsecos: por exemplo, é hoje John Jones a “mesma” pessoa que era ontem?

<sup>64</sup> O capital é caracterizado não apenas por sua durabilidade, mas também por ser inteiriço ou ter indivisibilidade “de escala”. O fato de ser inteiriço resulta em não-convexidade, logo causa sérios problemas analíticos.

ve), definem a eficiência da produção intertemporal em termos de caminhos temporais, ao longo dos quais são possíveis aumentos no consumo de qualquer bem, em qualquer período, sem um decréscimo em outro consumo. Tais caminhos são caracterizados pela superposição, sobre as condições de eficiência estática de um período ou instantânea, de certos requisitos intertemporais de taxa marginal de substituição. Mas os requisitos de eficiência estática permanecem válidos: para a completa eficiência dinâmica de Pareto é necessário que o sistema, a qualquer momento no decorrer do tempo, esteja sempre em sua fronteira de eficiência de um período.<sup>65</sup>

Por sinal, as regras geométricas da Parte 1 são totalmente adequadas à tarefa de manejar uma estrutura dinâmica de Solow-Samuelson para um mundo de 2 por 2 por 2. Só que agora as dimensões da caixa de produção e, portanto, a posição da curva de possibilidades de produção estarão mudando, e a solução dá valores não apenas aos insumos, produtos e preços, mas também para as suas variações de período a período.

Há muitos fenômenos dinâmicos menos adequados à análise através de um sistema formal de maximização que os cinco anteriores enumerados. A oferta futura, qualitativa e quantitativa, do insumo trabalho é influenciada pelo uso corrente dos serviços dos indivíduos.<sup>66</sup> Há também interdependências intertemporais importantes relacionadas à existência do espaço – o espaço importa, pois exige tempo e recursos para cobri-lo. Além do mais, nós nem ainda mencionamos os realmente “difíceis” fenômenos na “grande dinâmica”. As funções de produção, as funções de preferência e ainda a minha, ou a sua, função de bem-estar mudam no tempo. Tais mudanças são complicadas pelo que, em certo sentido, é o problema central da dinâmica não-estacionária: a incerteza intrínseca atribuída à noção do futuro.<sup>67</sup> Por último, os limites mesmos da Economia, como em qualquer disciplina, são intrinsecamente arbitrá-

<sup>65</sup> Para possíveis exceções a isto, devido à sensibilidade do volume de poupança, portanto de investimento, à distribuição de renda “imputada”, veja meu “On Capital Productivity, Input Allocation and Growth”, *Quarterly Journal of Economics*, Feb., 1957, LXXI, 86-106.

<sup>66</sup> Ainda que o trabalho seja, em muitos aspectos, analiticamente semelhante a outros tipos de capital físico, recursos precisam ser investidos para que se expanda o estoque de engenheiros, assim como para expandir o de vacas e o de máquinas. Máquinas, entretanto, não estão sujeitas a certos efeitos de “aprendizagem” sem custo.

<sup>67</sup> Ainda que a teoria formal do bem-estar torne-se muito limitada quando a incerteza aparece, muito da análise econômica – por exemplo, a teoria monetária, as flutuações do comércio – teria pouco significado, exceto pela presença da incerteza.

rios. A alocação e a distribuição interagem, de inúmeras formas, com a política e a sociologia de uma sociedade ... “tudo depende de tudo”. Mas estamos muito além da análise simples.

## UMA NOTA HISTÓRICA SOBRE A LITERATURA

NOTA: Para uma breve, mas substancial, história da evolução do pensamento neste campo, o leitor deve remeter-se à síntese de Samuelson (não-matemática), p. 203-19, de **Foundations** (1). Veja também Bergson, “Socialist Economics”, **Survey of Contemporary Economics**, Vol. I (2) e Boulding, “Welfare Economics”, **Survey**, Vol. II (3).

Os fundamentos da moderna economia do bem-estar estão enraizados na economia clássica, e a estrutura também mostra a marca da linha de pensamento representada por Smith, Ricardo, Mill e Marshall. Mas, nos escritos clássicos, a prescrição e a análise estão inseparavelmente entrelaçadas, a filosofia subjacente é indubitavelmente utilitária, e a preocupação normativa central é com a eficácia das instituições de mercado. Em contraste, o desenvolvimento da moderna economia do bem-estar pode ser melhor compreendido como uma tentativa de separar a ética da ciência e a eficiência alocativa dos modos particulares de organização social.

A tradição clássica culmina com a obra **Wealth and Welfare** (4) do Professor Pigou. Pigou, o último dos grandes pré-modernos, esteve também, como testemunhado por **Economics of Welfare** (5), entre os primeiros modernos. Mas ele não foi o primeiro. Vilfredo Pareto, que escreveu durante os primeiros anos do século, tem lugar proeminente (6). Seu trabalho, e posteriormente o de Enrico Barone (7) com seu enfoque nas implicações analíticas da maximização, constituem os fundamentos da moderna estrutura. Muitos escritores contribuíram para a construção, mas A. P. Lerner, Abram Bergson e Paul Samuelson são especialmente lembrados (8). Bergson, em especial, foi o primeiro a fazer-nos ver a estrutura completa, em um único artigo de 1938. Mais recentemente, Kenneth Arrow explorou os fundamentos lógicos da noção de uma função de bem-estar social, relacionada à escolha social (9); T.C. Koopmans, Gerard Debreu e outros testaram sistemas mais complexos para a dualidade (10); Samuelson desenvolveu uma espécie significativa de função de indiferença social (11) e derivou condições de eficiência

para “bens públicos” (12); e Robert Solow e Samuelson, em trabalho a ser brevemente publicado, realizam uma extensão dinâmica (13,14).

Há também uma importante literatura moderna dedicada às possíveis aplicações da estrutura de análise para prescrições de política. Três linhas diferentes de trabalho são mais ou menos distinguíveis. Primeiramente, nas décadas de vinte e trinta, teve lugar uma prolongada controvérsia sobre mercados versus governo. L. Von Mises (15) e, mais tarde, F. A. Hayek (16) foram os principais proponentes do *laissez faire* puro, enquanto H. D. Dickinson, Oscar Lange, Lerner e Maurice Dobb destacaram-se pelo outro lado. (17) A idéia da fixação socialista de preços, descentralizada, originalmente sugerida por Barone e, mais tarde, por F. M. Taylor, foi elaborada por Lange para contrabalançar a visão de Mises, de considerar impossível a alocação eficiente de recursos em uma economia coletivizada, devido, simplesmente, à grande escala de custos administrativos de cálculo e controle.

Em segundo lugar, no final da década de trinta, Nicholas Kaldor (18) e J. R. Hicks (19) aceitaram o desafio de Lionel Robbins (20) aos economistas de não misturar ética e ciência, e sugeriram uma série de provas para eleger algumas configurações de insumo-produto em relação a outras, independentemente de juízo.<sup>68</sup> Tibor Scitovsky apontou uma importante assimetria no critério de Kaldor-Hicks (21) e Samuelson, por fim, demonstrou que se fazia necessária, de qualquer modo, uma “função de bem-estar” denotadora de uma ética (22). J. M. D. Little tentou, mas a meu ver fracassou, destruir tal conclusão (23).<sup>69</sup> As condições de Pareto são necessárias, mas nunca suficientes.

Em terceiro lugar, existe um “corpo” de escritos, alguns deles de equilíbrio parcial, que está relacionado com políticas a um nível mais baixo de abstração. Os escritos de Harold Hotelling, Ragnar Frisch, J. E. Meade e W. A. Lewis referem-se à questão de preços ótimos, custos marginais e, por outro lado, as situações de serviços públicos

---

<sup>68</sup> A linha de pensamento de Hicks-Kaldor tem alguma ligação com a literatura anterior de Marshall, Pigou, Fisher, etc., acerca de “o que é renda”.

<sup>69</sup> Ainda que eu considere a alternativa de Little a uma função de bem-estar (“uma mudança econômica é desejável desde que não implique uma má redistribuição de renda e desde que os perdedores potenciais não pudessem subornar lucrativamente os potenciais ganhadores para se oporem a ela” [p. 105]) de jeito nenhum uma alternativa, ela se constitui em uma avaliação provocativa da moderna teoria do bem-estar. Para uma avaliação, por sua vez, de Little, veja K. J. Arrow, “Little’s Critique of Welfare Economics”, *American Economic Review*, Dec., 1951, XLI, 923-34.

(MC < AC) (24). Hotelling, H. P. Wald, M. F. W. Joseph, E. R. Rolph e G. F. Break, Little e mais recentemente Lionel Mckenzie têm, por sua vez, analisado instrumentos fiscais alternativos para cobrir os déficits públicos (25). Por último, alguns dos anteriormente citados, notavelmente Lerner, Kaldor, Samuelson, Scitovsky, Little, Mckenzie e, mais exaustivamente, Meade assim como R. F. Kahn, Lloyd Metzler, J. de V. Graaf, H. G. Johnson e outros aplicaram todo este aparato a questões de ganhos com comércio internacional, tarifas ótimas, etc. (26)

### NOTAS BIBLIOGRÁFICAS

- ( 1) P. A. Samuelson (1947).
- ( 2) A. Bergson, "Socialist Economics". In: H.S. Ellis (1948).
- ( 3) K. E. Boulding, "Welfare Economics", in B. F. Halley (1952).
- ( 4) A. C. Pigou (1912).
- ( 5) A. C. Pigou (1932).
- ( 6) V. Pareto (1909).
- ( 7) E. Barone, "The Ministry of Production in the Collectivist State", trad. em F. A. Hayek (1935).
- ( 8) Veja A. P. Lerner (1944); A. Bergson (Burk) (1938), reproduzido em R. V. Clemence (1952); P. A. Samuelson (1947, cap. 8).  
Para outros trabalhos, ver referências em Samuelson (1947, p. 219), e em Bergson e Boulding, artigos (2, 3).
- ( 9) Veja K. J. Arrow (1951).
- (10) P. A. Samuelson (1949).  
T. C. Koopmans (1951); e também R. Dorfman (1953).
- (11) P. A. Samuelson (1956).
- (12) P. A. Samuelson (1954 e 1955).
- (13) R. Dorfman, R. M. Solow e P. A. Samuelson (1958), especialmente os capítulos 11 e 12. O capítulo 14 contém a mais elegante exposição, de R. M. Solow, da moderna teoria do bem-estar em termos de programação linear.
- (14) Quatro outros trabalhos devem ser mencionados: M. W. Reder (1947) é uma obra que traz uma extensa exposição da moderna teoria do bem-estar; Hla Myint (1948) trata dos escritos clássicos e neoclássicos; W. J. Baumol (1952) tenta uma extensão à teoria política; em um enfoque distinto, G. Myrdal, trad. por Paul Streeten (1953), com apêndice de Streeten sobre desenvolvimentos modernos, constitui crítica ampla das premissas da economia do bem-estar.

- (15) Para uma tradução inglesa do artigo original de Mises, de 1920, o qual provocou a controvérsia, veja F. A. Hayek (1935).
- (16) Ver especialmente F. A. Hayek, (1940); para um ataque frontal aos desvios de *laissez-faire* veja o polêmico Hayek (1944).
- (17) H. D. Dickinson (1933); O. Lange (1938); A. P. Lerner (1944); M. Dobb (1933).
- (18) N. Kaldor (1939).
- (19) J. R. Hicks (1939 e 1940).
- (20) L. Robbins (1932).
- (21) T. Scitovsky (1941-42a e b).
- (22) P. A. Samuelson (1950).
- (23) I. M. D. Little (1950).
- (24) H. Hotelling (1938) é a primeira formulação moderna do problema que foi colocado, em 1844, por Jules Dupuit ("On the Measurement of Utility of Public Works," que pode ser encontrado em **International Economic Papers**, N.2, ed. Alan T. Peacock *et al.*).
- (25) Veja especialmente Little (1951).
- (26) Para um tratamento amplo das questões, bem como para referências, ver J. E. Meade (1955).

## BIBLIOGRAFIA

- ARROW, K. J. **Social Choice and Individual Values**. New York, John Wiley & Sons, 1951.
- BAUMOL, W. J. **Welfare Economics and the Theory of the State**. London, 1952.
- BERGSON, A. (Burk). A Reformulation of Certain Aspects of Welfare Economics. **Quarterly Journal of Economics**, v. 52, p. 310-4, Feb. 1938.
- CLEMENCE, R. V., ed. **Readings in Economic Analysis**. Cambridge, 1952.
- DICKINSON, H. D. Price Formation in a Socialist Economy. **Economic Journal**, v. 43, p. 237-50, Dec. 1933.
- DOBB M. Economic Theory and the Problem of the Socialist Economy. **Economic Journal**, v. 43, p. 588-98, Dec. 1933.
- DORFMAN, R. Mathematical or 'Linear' Programming. **American Economic Review**, v. 43, p. 797-825, Dec. 1953.
- ; Solow, R. M. & Samuelson, P. A. **Linear Programming and**

- Economic Analysis.** New York, McGraw-Hill, 1958. 506p. (The Rand Series). (N. T.: O livro saiu, em 1958, com uma inversão na posição dos nomes de Solow e Samuelson. É hoje usualmente citado como DOSSO).
- ELLIS, H. S., ed. **A Survey of Contemporary Economics.** Philadelphia, 1948. V. I.
- HALEY, B. F., ed. **A Survey of Contemporary Economics.** Illinois, Homewood, Ill.: Richard Irwin, 1952. V. II.
- HAYEK, F. A., ed. **Collectivist Economic Planning.** London, 1935.
- . **Socialist Calculation: The Competitive Solution.** *Economica*, v.7, p. 125-49, May 1940.
- . **The Road to Serfdom.** London, 1944. (Há a seguinte tradução para o português: **O Caminho da Servidão.** Rio de Janeiro, Instituto Liberal, 1984. 226 p.)
- HICKS, J. R. The Foundations of Welfare Economics. *Economic Journal*, v. 69, p. 696-712, Dec. 1939.
- . The Valuation of Social Income. *Economica*, v. 7, p. 105-23, Feb. 1940.
- HOTELLING, H. The General Welfare in Relation to Problems of Taxation and of Railway and Utility Rates. *Econometrica*, v.6, p. 242-69, July 1938.
- KALDOR, N. Welfare Propositions in Economics and Interpersonal Comparisons of Utility. *Economic Journal*, v. 69, p. 549-52, Sept. 1939.
- KOOPMANS, T. C. **Activity Analysis of Production and Allocation:** Proceedings of a Conference. New York, John Wiley, 1951.
- LANGE, O. On the Economic Theory of Socialism. In: LANGE, O., TYLOR, F. M. **On the Economic Theory of Socialism.** Org. por B. E. Lippincott. Minneapolis, 1938.
- LERNER, A. P. **The Economics of Control.** Londo, 1944.
- LITTLE, I. M. D. **A Critique of Welfare Economics.** Oxford, 1950.
- . Direct versus Indirect Taxes. *Economic Journal*. v. 61, p. 577-84, Sept. 1951.
- MEADE, J. E. **The Theory of International Economic Policy. V. II: Trade and Welfare e Mathematical Supplement.** New York, 1955.
- MYINT, Hla. **Theories of Welfare Economics.** London, 1948.
- MYRDAL, G. **The Political Elements in the Development of Economic Theory.** Trad. Paul Streeten. London, 1953. (Há a seguinte tradução para o português: **Aspectos Políticos da Teoria Econômica.** São Paulo, Abril Cultural, 1984. 179p. (Os Economistas) ).

- PARETO, V. **Manuel d'économie Politique**. Paris, 1909. (Há a seguinte tradução para o português: **Manual de Economia Política**. São Paulo, Abril Cultural, 1984. 2v. (Os Economistas) ).
- PIGOU, A. C. **Wealth and Welfare**. London, 1912.
- . **The Economics of Welfare**. 4. ed. London, 1932.
- REDER, M. W. **Studies in the Theory of Welfare Economics**. New York, 1947.
- ROBBINS, L. **The Nature and Significance of Economic Science**. London, 1932.
- SAMUELSON, P. A. **Foundations of Economic Analysis**. Cambridge, Harvard University Press, 1947. 447p. (Há a seguinte tradução para o português: **Fundamentos da Análise Econômica**. São Paulo, Abril Cultural, 1983. 380p. (Os Economistas) ).
- . **Market Mechanisms and Maximization**. (Não publicado, RAND Corporation Research Memo., 1949).
- . Evaluation of Real National Income. **Oxford Economic Papers**, v.2, p. 1-29, Jan. 1950.
- . The Pure Theory Of Public Expenditure. **Review of Economics and Statistics**, v. 36, p. 387-89, Nov. 1954.
- . Diagrammatic Exposition of a Theory of Public Expenditure. **Review of Economics and Statistics**, v. 37, p. 350-6, Nov. 1955.
- . Social Indifference Curves. **Quarterly Journal of Economics**, v. 70, p. 1-22, Feb. 1956.
- SCITOVSKY, T. A Note on Welfare Propositions in Economics. **Review of Economic Studies**, v. 9, p. 77-8, 1941-1942a.
- . A Reconsideration of the Theory of Tariffs. **Review of Economic Studies**, v. 9, p. 89-110, 1941-1942b.