

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**Parametrização e Síntese de Observadores de Estado para Sistemas
Lineares sujeitos a Perturbações**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA
CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM
ENGENHARIA ELÉTRICA

Dirceu do Rosário Rodrigues Junior

Florianópolis - SC, Brasil
maio de 1997

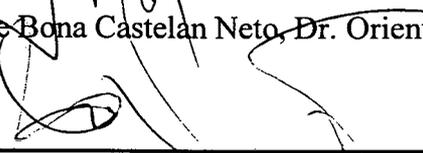
PARAMETRIZAÇÃO E SÍNTESE DE OBSERVADORES DE ESTADO PARA SISTEMAS LINEARES SUJEITOS A PERTURBAÇÕES

DIRCEU DO ROSÁRIO RODRIGUES JUNIOR

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA, ÁREA DE **CONTROLE, AUTOMAÇÃO E INFORMÁTICA INDUSTRIAL**, APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA.

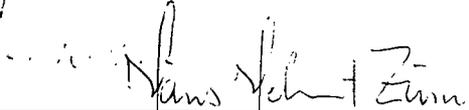


Prof. Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr. Orientador

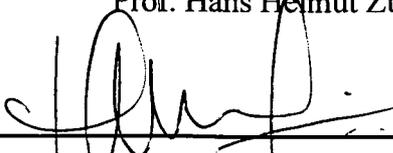


Prof. Adroaldo Raizer, Dr. Coordenador do curso de Pós Graduação em Engenharia Elétrica

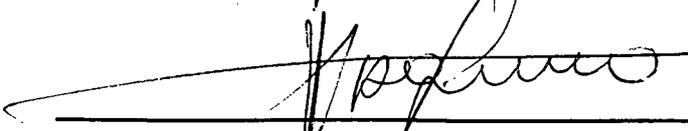
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Hans Helmut Zörn, Ph.D.



Prof. Edson Roberto de Pieri, Dr.



Prof. Alexandre Trofino Neto, Dr.

Seja...

*Perdido... num céu colorido...
onde as nuvens inspiram os olhos do poeta...
você poderá encontrá-lo...
se quiser encontrá-lo...*

*Longe... numa praia distante,
nas asas do sonho,
através de uma porta aberta...
você poderá encontrá-lo.*

*Será como uma palavra,
que espera uma folha branca
e fala de um tema eterno...
em Deus encontrará a felicidade ...*

*Cante a canção que procura uma voz interior...
e o Sol lhe mostrará o caminho,
dançaremos ao som de uma voz sussurrada
que brota da alma e o coração repete...
poderá conhecê-la...
se você quiser conhecê-la...*

Neil Diamond

*Aos meus pais
Dirceu e Neide*

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus por mais esta etapa em meu desenvolvimento.

Aos meus irmãos Sérgio, Rogério e Danielle.

À minha namorada Vânia Gonçalves, pelo carinho e incansável apoio.

Aos amigos Ronaldo de Oliveira pela grande ajuda material (*hardware*),

Daniel Puka pelo interesse e consideração,

Alessandro Maceno pelos bons momentos em Florianópolis,

Sérgio Maceno e Orlando Borges, os quais, devido ao imutável

ciclo da vida, não puderam contemplar este trabalho.

Ao Professor Dr. Eugênio B. Castelan pelo trabalho de orientação.

Aos colegas do Laboratório de Controle e Microinformática (LCMI) da Universidade

Federal de Santa Catarina (UFSC), com os quais convivemos dois anos.

À UFSC e a CAPES pelo suporte material e financeiro.

Mais uma vez quero agradecer aos meus pais pelo eterno exemplo de vida e de luta.

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos algumas técnicas de parametrização para observadores de estado e erros de estimação, quando associados a sistemas lineares, invariantes no tempo e de dimensão finita. Também tratamos do projeto de observadores quando são consideradas perturbações de natureza diversas atuando na planta. Comparativamente às abordagens tradicionais, a parametrização utilizada fornece ao projetista um número maior de graus de liberdade, uma vez que todos os estimadores estáveis admissíveis para o sistema podem ser expressos na forma de uma função afim em um parâmetro livre Q (domínio da frequência). Na etapa de síntese procuramos determinar uma matriz de transferência tal que os efeitos das perturbações sobre o erro de estimação sejam mínimos. Diferentes resultados podem ser obtidos, dependendo das hipóteses sobre como as perturbações são limitadas.

ABSTRACT

In this work, we show some state observer and estimation error parametrization methods applied to finite dimensional, linear and time invariant systems. In addition, we treat the observer design problem by considering different kinds of exogenous plant disturbances. When compared to traditional approaches, the parametrization used gives more flexibility to the designer, in the sense that all admissible stable estimators for the system are given by an affine function in the Q free parameter (frequency domain). Another advantage is that the same optimization tools associated with controller and filter design can be used in the observer case, since all of these systems employ a similar parametrization structure. In order to design an optimal observer, the objective is centered on the determination of transfer function matrices such that the disturbances effects in the estimation error are minimized. In this context, the estimation error plays an important role. Furthermore, several results can be obtained, based on assumptions made about the disturbance bounds (amplitude, variance, energy, etc.).

SUMÁRIO

Página

Capítulo 1 - Introdução	1
Capítulo 2 - Estudos preliminares	4
2.1. A necessidade de observadores	
2.2. Estrutura e propriedades de observadores	7
2.2.1. Observador assintótico de estados	10
2.2.2. Observando uma combinação linear de estados	17
2.2.3. Observador de ordem reduzida	18
2.3. Determinação da dinâmica de observadores	
2.4. O Filtro de Kalman	20
2.4.1. Formulação	
2.4.2. O Filtro de Kalman em regime permanente	23
2.5. Caracterização de filtros quanto às perturbações	24
2.5.1. Sinais de entrada estocásticos	25
2.5.2. Sinais de entrada determinísticos	27
Capítulo 3 - Parametrização de observadores lineares	28
3.1. Parametrização de controladores - a origem	
3.1.1. Síntese de controladores	32
3.2. Formas correntes para parametrização de observadores lineares	33
3.2.1. Abordagem de “G. C. Goodwin <i>et al</i> ”	
3.2.2. Abordagem de “X. Ding <i>et al</i> ”	37

3.3. Parametrização de observadores - uma forma geral	39
3.3.1. A parametrização do observador	41
3.3.2. A parametrização do erro de estimação	47
3.3.3. Comentários	49
3.3.4. Exemplo de parametrização do erro de estimação	53
Capítulo 4 - Síntese de Observadores Lineares	54
4.1. Introdução	
4.2. Os diferentes critérios de otimização	55
4.2.1. Critério H_∞	
4.2.2. Critério H_2	56
4.2.3. Critério L_1	57
4.3. Síntese H_∞ a partir do problema <i>model matching</i>	
4.3.1. Formulação	
4.3.2. Síntese do observador sobre o critério H_∞	62
4.3.3. Síntese H_∞ para o caso discreto	65
4.3.4. Exemplo 1	66
4.3.5. Exemplo 2	70
4.4. Síntese H_2 a partir do problema <i>model matching</i>	73
4.4.1. Formulação	
4.4.2. Exemplo	77
4.5. Especificações envolvendo o critério L_1	83

4.5.1. Problema sub-ótimo	83
4.5.2. Maximizando o limite de perturbação	84
4.5.3. Ponderação no domínio do tempo	86
4.5.4. Diferentes limites para cada canal de perturbação	89
Capítulo 5 - Conclusão	93
Capítulo 6 - Perspectivas	94
Apêndice A - Representação polinomial de sistemas	96
A.1. Anéis e campos	
A.2. Considerações em $R[s]$	98
A.3. Múltiplos, Divisores e Coprimidade	100
A.4. Descrição fatorada de matriz	106
A.5. Fatoração coprima sobre o anel RH_{∞}	113
Apêndice B - Propriedades de sistemas	123
B.1. Controlabilidade	
B.2. Estabilizabilidade	124
B.3. Observabilidade	
B.4. Detectabilidade	125
Apêndice C - Convexidade	126
Bibliografia	127

LISTA DAS FIGURAS

Página

2.1. Um sistema de controle realimentado	5
2.2. Realimentação com uma variável não acessível	
2.3. Observador de malha aberta	8
2.4. Observador de estados assintótico	12
2.5. Observador assintótico redesenhado	13
3.1. Configuração básica	28
3.2. Problema <i>Model Matching</i>	32
3.3. Geração de todos os estimadores <i>unbiased</i> - estáveis	35
3.4. Ligação do observador ao sistema	38
3.5. Uma estrutura para estimar $\hat{z}(t)$	51
4.1. Sinais de mesma energia	55
4.2. Uma realização de um processo ruído branco	56
4.3. Resposta em frequência de $Q(s)$	69
4.4. Resposta ao impulso $t_{11}(k)$ ($t_{21}(k)$)	78
4.5. Resposta ao impulso $t_{22}(k)$	
4.6. Resposta ao impulso $q(k)$	80
4.7. Resposta ao impulso de $Q(s)$	81
4.8. Simulação para $Q(s) = 1/(s+1)$	82

4.9. Simulação para $Q(s)$ ótimo	82
4.10. Conjunto Δ	86
4.11. Conjunto Δ'	87
A.1. Interpretação do estado parcial ξ	117
A.2. O estado parcial $\xi(s)$	118
A.3. Observando o estado parcial	120

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Desde que D. G. Luenberger iniciou a teoria de observadores de estado com a publicação de seus primeiros resultados [1], [2], [3] até recentemente, a implementação de observadores de estado constituía-se de uma ferramenta importante para o Engenheiro de Controle. Podemos encontrar as razões para este fato detendo-nos um pouco mais em aspectos históricos relacionados ao desenvolvimento da teoria de controle.

Uma das abordagens mais utilizadas durante as últimas décadas para o projeto de controladores foi a denominada LQG/ H_2 (*Linear Quadratic Gaussian*) [4]. Esta teoria baseia-se na realimentação dos estados da planta e consiste na determinação de matrizes de ponderação e o emprego da filtragem de Kalman de forma que sejam satisfeitos critérios quadráticos de desempenho em malha fechada e seja atingida a máxima rejeição de perturbações com estatísticas conhecidas.

A complexidade crescente dos sistemas de controle atuais e a preocupação cada vez maior com a robustez e o desempenho têm demonstrado as limitações da abordagem LQG, dada a dificuldade em se expressar os requisitos de desempenho em função das matrizes de ponderação e em se modelar incertezas (robustez) a priori. Abordagens modernas como o controle H_∞ e a análise μ (*structured singular value*) [5] foram desenvolvidas em grande parte no domínio da frequência. Estas novas abordagens mostram-se como poderosas ferramentas ao projetista e não apresentam algumas das desvantagens de técnicas mais antigas. Na verdade o assunto ainda não está esgotado e muitas pesquisas estão em curso envolvendo estes e outros critérios de otimização (ex. L_1).

Um observador normalmente é utilizado como um sistema auxiliar no controle via realimentação de estados. Através do princípio da separação pode-se projetar o controlador e o observador para as variáveis de estado não acessíveis separadamente. Os autovalores do sistema de malha fechada serão formados pela união dos autovalores do controlador e do observador. Em resumo, observadores geralmente estão associados a sistemas de controle projetados segundo métodos LQG.

Podemos afirmar então que, o emprego de observadores de estado no projeto de sistemas de alto desempenho, já não é tão comum. Isto se dá tanto pelo fato de que o controle via realimentação de estados não ser usualmente prático nestes casos, como pela própria necessidade de implementação destes sistemas auxiliares. Mas as aplicações do observador não restringem-se apenas ao contexto de controle como veremos. Sendo assim, a proposta deste trabalho é apresentar alguns resultados recentes relacionados à teoria e projeto em observação de estados.

No Capítulo 2 apresentaremos a teoria básica de observadores de estado iniciando com um comentário sobre as áreas de aplicação destes sistemas. Discutimos a observação de uma combinação linear de estados, pois muitas vezes deseja-se estimar somente um funcional linear das variáveis de estado. Mencionamos também como é possível construir um observador cuja ordem é menor que a ordem do sistema (observador de ordem reduzida). A seguir procuramos fornecer algumas regras de projeto quanto à escolha dos pólos do observador, nos casos em que tal escolha se faz necessária

Mostramos que o conhecido filtro de Kalman, tão importante nos métodos de projeto no espaço de estados, é na verdade um observador ótimo na presença de ruído branco. Na última seção é mostrado que o modelamento das perturbações que atuam no sistema em uma determinada categoria, conduz a um tipo particular de filtro ou estimador.

O Capítulo 3 trata da parametrização de observadores de estado. A parametrização é importante na medida que permite especificar, para um dado sistema, todos os observadores lineares estáveis admissíveis e todos as transferências perturbação - erro de estimação como funções afins em um parâmetro livre. Isto é especialmente importante para a etapa de projeto.

Contrariamente aos métodos tradicionais, onde predomina a descrição no espaço de estados, grande parte dos resultados estão no domínio da frequência, através da conhecida fatoração coprima de matrizes de transferência estáveis. Mostramos como a parametrização de controladores, onde inicialmente foi empregada, pode levar a um projeto via otimização convexa. Em seguida é introduzida uma forma geral para parametrizações do observador e do erro de estimação associado. Mostramos então que duas abordagens de parametrização presentes na literatura podem ser consideradas como particularidades da forma geral apresentada.

O Capítulo 4 inicia com a discussão dos diversos critérios de otimização que podem ser aplicados ao mapeamento perturbação - erro de estimação e as suas interpretações físicas envolvendo normas de sinais. As propostas deste capítulo constituem-se em formas alternativas de projeto (síntese) de observadores na forma parametrizada e sujeitos a diversas formas de perturbações.

A abordagem *Model Matching* de Y. S. Hung, inicialmente empregada na filtragem H_∞ , será adaptada para a aplicação ao projeto de observador de estado sobre este critério. Uma rotina em Matlab® é desenvolvida para auxílio no processo de otimização sobre o critério em questão.

Dois exemplos são estudados. A seguir, apresentamos uma proposta de projeto de observadores discretizados utilizando a definição determinística da norma H_2 para sistemas SISO.

O método pode ser facilmente adaptado ao caso MIMO com um evidente aumento na complexidade computacional da solução. A parte final deste capítulo está envolvida com a especificações de desempenho l_∞ sobre o vetor de erro de estimação. Desta forma, assume-se que as perturbações estão limitadas no tempo e deseja-se que o observador apresente um comportamento ótimo através da minimização de uma norma L_1 .

Finalmente no Capítulo 5, apresentamos as conclusões de nosso trabalho, incluindo os pontos não abordados e indicações para futuras pesquisas no assunto.

Os Apêndices tratam da teoria necessária para o entendimento dos assuntos tratados neste trabalho. Na parte A, em especial o tópico sobre fatoração coprima, desempenha papel fundamental visto que em todo o material fazemos menção a esta abordagem à teoria de sistemas. Em textos tradicionais, as formas de encontrar as descrições no espaço de estados das matrizes $X(s)$ e $Y(s)$ (Teorema A.1) empregam a fatoração do controlador; e neste caso propomos a descrição destas matrizes com base no observador. Na parte B são apresentadas as definições envolvendo as principais propriedades de sistemas. Aqui, nosso interesse principal está nas propriedades de observabilidade e detectabilidade. O Apêndice C apresenta algumas definições envolvendo conjuntos convexos (afins) e funções convexas (afins), muito utilizadas no texto.

CAPÍTULO 2

ESTUDOS PRELIMINARES

2.1. A Necessidade de Observadores

O conceito de observador de estados surgiu a partir de aspectos inteiramente práticos relacionados à execução de sistemas de controle e de filtragem. O observador é um sistema dinâmico que não pode subsistir sozinho, pois as suas variáveis de estado são estimativas da variáveis de outro sistema. A seguir apresentamos alguns problemas que motivaram o uso da observação de estados.

Controle através de realimentação de estados

Neste tipo de controle admite-se que o vetor de controle de realimentação de estado tenha a forma $u = -Kx + r$ onde x e r correspondem ao vetor de estados e a uma entrada de referência respectivamente. Desta forma procura-se determinar uma matriz de ganho de realimentação K tal que os pólos do sistema de malha fechada fiquem posicionados em pontos pré estabelecidos do plano complexo (imposição de pólos) ou que leve à minimização de um certo índice de desempenho quadrático (controle ótimo quadrático).

Para ambas as abordagens, geralmente, é necessário ter disponíveis todas as variáveis de estado para a realimentação. Isto nem sempre é possível pois, como sabemos, as variáveis de estado são elementos de descrição interna de um sistema e nem sempre estão disponíveis em sua saída.

Contudo, se o sistema é observável, pode-se estimar as variáveis que não são diretamente acessíveis através da manipulação daquelas que estão disponíveis. O emprego dos valores estimados das variáveis de estado ao invés de seus valores reais pode levar a resultados aceitáveis na prática. Como um exemplo extremamente simples de geração de variáveis de estado inacessíveis a partir de variáveis acessíveis, considere o sistema monovariável realimentado da Figura 2.1 :

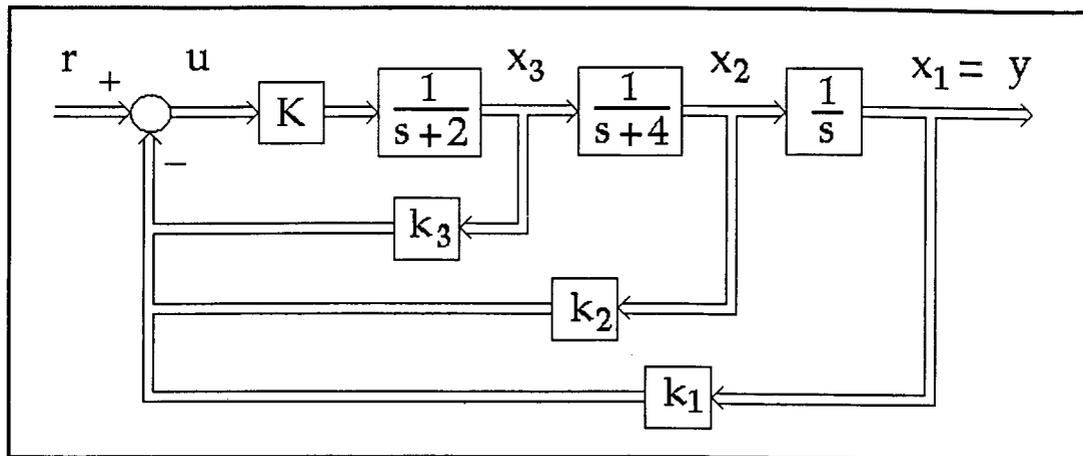


Figura 2.1. Um sistema de controle realimentado

Vamos supor agora que a variável x_2 não esteja disponível para medição. Note que $x_2(s) = s y(s)$; assim x_2 pode ser gerado passando-se y através de uma função de transferência s . O sinal de realimentação $k_2 x_2 + k_1 y$ pode ser gerado passando-se y pela função de transferência $(k_2 s + k_1)$ como mostrado na Figura 2.2:

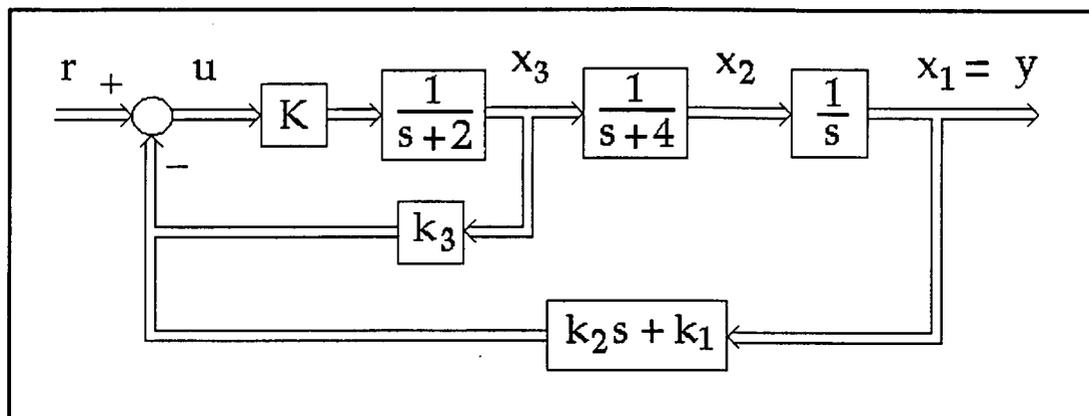


Figura 2.2. Realimentação com uma variável não acessível.

Este também é um exemplo apropriado para justificar o fato de que o controle por realimentação de estados não é usualmente prático, já que pode levar a controladores do tipo **PD**. Estes controladores possuem largura de banda infinita e isto pode ser catastrófico na presença de ruídos de alta frequência.

Filtragem em um sistema corrompido por ruído

Considere o sistema dinâmico linear na presença de um sinal de ruído V na entrada e outro sinal de ruído W e na saída:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Fv \\ y &= Cx + Ew\end{aligned}$$

Se tivermos conhecimento da natureza dos processos de ruído, podemos projetar um estimador (observador) para o estado x do sistema de forma a minimizar o erro entre o estado real e o estado estimado. Este será um observador ótimo já que, neste caso, será impossível obter um erro nulo em regime. A informação sobre como os sinais de ruído estão limitados origina um tipo diferente de filtragem que determina uma diferente dinâmica para o observador. Assim, se consideramos os ruídos como processos estocásticos de estatísticas conhecidas, temos a filtragem de *Kalman* ou filtragem H_2 . Se conhecemos os limites de amplitude dos ruídos, temos a filtragem L_1 . Se conhecemos os limites de energia, temos a filtragem H_∞ .

Deteção de falhas em sistemas dinâmicos

Esta é uma área razoavelmente recente de pesquisa e aplicação [6]. Deseja-se projetar um observador robusto para o assim chamado *estado parcial* de um sistema dinâmico incerto. O erro de estimação forma um sinal residual que é a base para a deteção de falhas. Aqui, as medidas *mínima falha detectável* e a *máxima falha não detectável* permitem quantificar a sensibilidade do esquema de deteção de forma a se determinar o limite a partir do qual um alarme será acionado.

2.2. Estrutura e propriedades de observadores

O termo observador foi introduzido na teoria de sistemas lineares por D. Luenberger em 1963 [1],[2],[3]. Luenberger mostrou que, para qualquer sistema linear observável, pode ser projetado um observador tendo a propriedade que o erro de estimação (i.e., a diferença entre o estado do sistema atual e o estado do observador) pode ser levado a zero de forma tão rápida quanto desejarmos.

Seja um sistema dinâmico contínuo, linear e invariante no tempo descrito pelas seguintes equações:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.1)$$

$$y = Cx + Du \quad (2.2)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ e as matrizes A, B, C e D possuem dimensões apropriadas.

Supomos que as variáveis de estado não são acessíveis. Considere uma situação mais simples onde $D = 0$. Se neste caso fossemos capazes de inverter a matriz C estaríamos aptos a determinar $x(t)$ diretamente, dada a saída $y(t)$.

Mas estamos supondo que a matriz C é singular (caso geral), de forma que não poderemos encontrar $x(t)$ unicamente com o conhecimento de $y(t)$. A idéia é empregar não somente dados de observação presente mas também dados de observação passada: $y(\tau)$ para $\tau < t$; em outras palavras, o observador deve ser um sistema dinâmico.

Se conhecemos as matrizes A, B, C e D , podemos duplicar o sistema original como mostrado no diagrama de blocos da Figura 2.3:

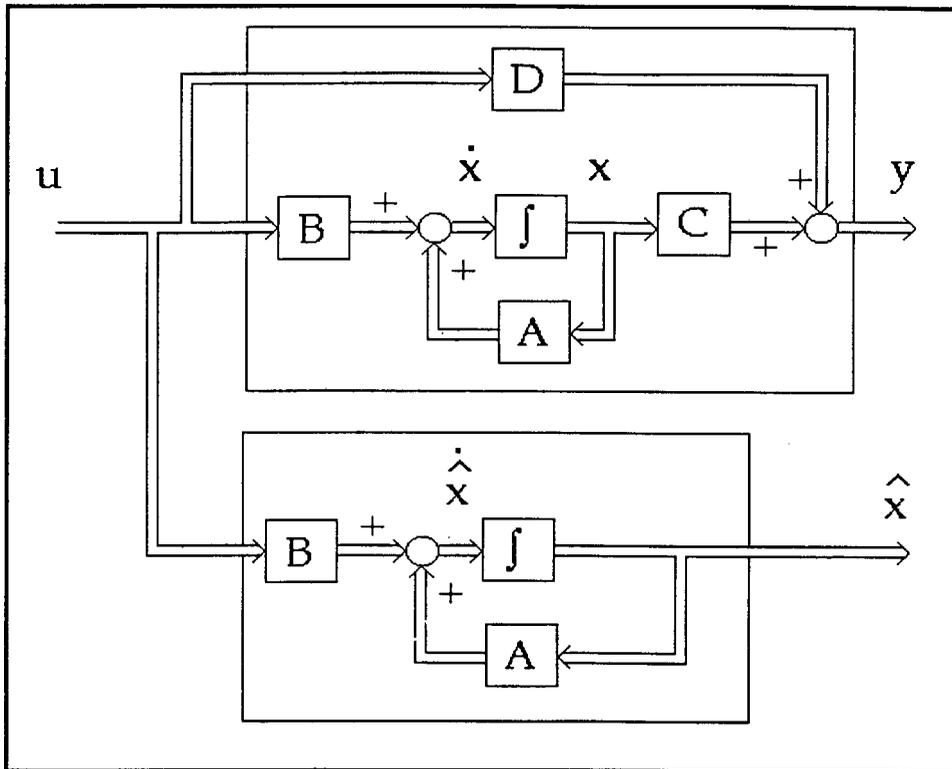


Figura 2.3. Observador de malha aberta

Chamamos este sistema de observador de malha aberta. Se o sistema original e o observador possuem o mesmo estado inicial e são excitados pela mesma entrada u , a saída $\hat{x}(t)$ será igual ao estado $x(t)$ para todo t . A questão aqui é como encontrar o estado inicial do sistema original e atribuí-lo para o observador. Pela definição de observabilidade (Apêndice B), podemos determinar o estado inicial de um sistema a partir do conhecimento de sua entrada e saída se e somente se este sistema é observável. Consequentemente, se o sistema original é observável, um observador de malha aberta poderia ser usado para gerar o vetor de estados.

Note que o estado inicial deve ser calculado e atribuído ao observador de malha aberta toda vez que iremos utilizá-lo; o que não é muito simples e nem prático de ser realizado [7]. Outra desvantagem é que, se a matriz A possui autovalores com partes reais positivas, então qualquer diferença inicial entre $x(t)$ e $\hat{x}(t)$ fará com que a diferença entre estes estados aumente com o tempo. Desta forma, vemos que o observador de malha aberta, em geral, não é satisfatório.

Outra maneira possível de gerar um vetor de estados de dimensão n é diferenciando a saída e a entrada $n - 1$ vezes. Se o sistema original é observável, então a partir de $u(t)$, $y(t)$ e suas derivadas, o vetor de estados pode ser computado. Considere, por razões de simplicidade, o sistema de uma saída:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= c^T x\end{aligned}$$

Diferenciando a segunda equação e substituindo a expressão para \dot{x} , temos:

$$\dot{y} - c^T Bu = c^T Ax$$

Diferenciando novamente e substituindo \dot{x} :

$$\ddot{y} - c^T B\dot{u} - c^T ABu = c^T A^2 x$$

Continuando desta maneira, podemos obter um conjunto de equações que pode ser representado na forma:

$$z = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ c^T A^2 \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix} x$$

ou

$$z^T = x^T [c \quad A^T c \quad (A^T)^2 c \quad \dots \quad (A^T)^{n-1} c]$$

onde Z é um vetor, cujas entradas consistem de combinações lineares de y , u e suas derivadas.

Sabemos que um sistema de uma saída é observável se a matriz

$$\begin{bmatrix} c & A^T c & (A^T)^2 c & \dots & (A^T)^{n-1} c \end{bmatrix}$$

possui posto completo (não singular) . Portanto, se o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= c^T x \end{aligned}$$

é observável, então as entradas do vetor de estado x podem ser expressas como combinações lineares da entrada e da saída, bem como das suas derivadas.

De qualquer forma, diferenciadores puros não são fáceis de serem construídos. O estado estimado também pode ser severamente distorcido pela ação de ruídos com o uso deste tipo de diferenciador .

2.2.1. Observador assintótico de estados

Note que, apesar de estar disponível, não usamos o conhecimento da saída para construir o observador de malha aberta. Procuramos agora melhorar o desempenho de estimação levando em conta a entrada e a saída do sistema original. Desta forma, vamos considerar a seguinte estrutura para o observador:

$$\dot{\hat{x}} = F\hat{x} + Hu + Ly \tag{2.3}$$

Note que (2.3) consiste em um sistema dinâmico acionado pelas entradas e saídas do sistema original. Definimos o erro entre o estado atual e o estado estimado como $e \equiv x - \hat{x}$.

Assim:

$$\begin{aligned} \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= Ax + Bu - F\hat{x} - Hu - Ly \\ &= Ax + Bu - F\hat{x} - Hu - LCx - LDu \end{aligned}$$

$$\dot{e} = (A - LC)x - F\hat{x} + (B - LD - H)u$$

Note que, para a equação da dinâmica do erro representar um sistema autônomo (dependente apenas das condições iniciais), devemos ter:

$$\begin{aligned} F &= A - LC \\ H &= B - LD \end{aligned}$$

O que leva a:

$$\dot{e} = (A - LC)e \quad (2.4)$$

Substituindo estes resultados em (2.3):

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x} - Du) \quad (2.5)$$

Da saída $y = Cx + Du$ é subtraído $C\hat{x} + Du$, e esta diferença serve como um termo de correção; ela é multiplicada por uma matriz constante L e levada às entradas dos integradores no observador. Este observador é chamado de *observador de Luenberger* ou *observador de estados assintótico*.

O diagrama de blocos correspondente é mostrado na Figura 2.4.

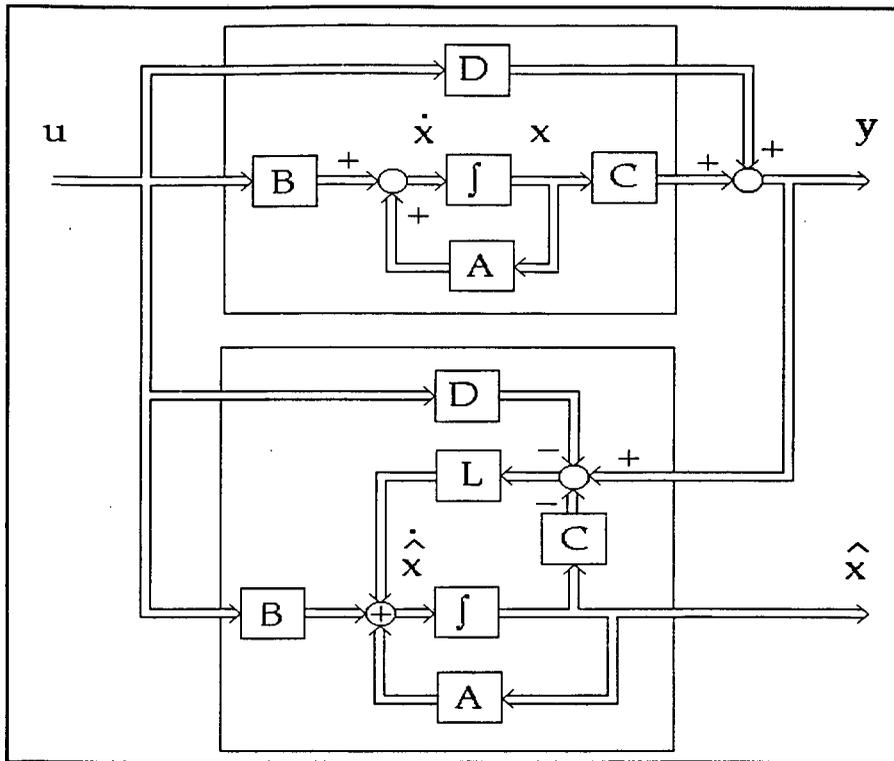


Figura 2.4. Observador de estados assintótico

Podemos ainda descrever o observador assintótico por:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + L(y - Du) + Bu \quad (2.6)$$

O observador assintótico da Figura 2.4 pode ser redesenhado como mostrado na Figura 2.5:

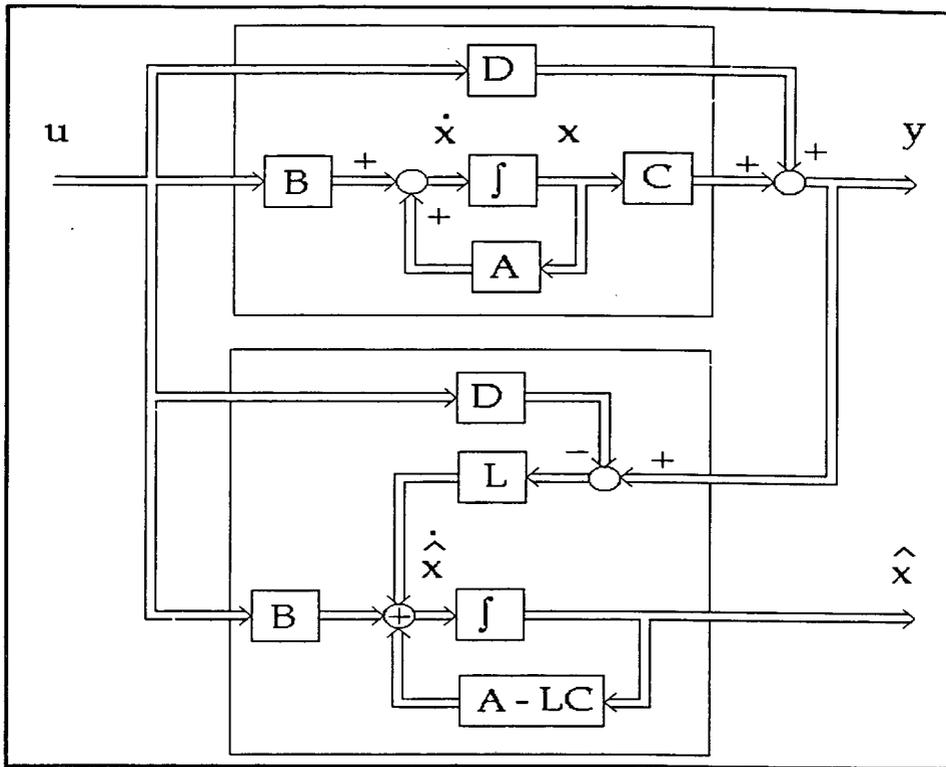


Figura 2.5. Observador assintótico redesenhado

Através de (2.4) vemos que, para o erro aproximar-se de zero assintoticamente, é necessário que os autovalores da matriz de malha fechada $A - LC$ estejam todos no semi-plano esquerdo. Conseqüentemente, mesmo para grandes diferenças entre $\hat{x}(t_0)$ e $x(t_0)$ no estado inicial t_0 , o vetor \hat{x} se aproximará de x rapidamente.

Portanto, se os autovalores de $A - LC$ podem ser atribuídos apropriadamente (sistema observável), um observador de estados assintótico é muito mais desejável do que um observador de malha aberta. Note que, se os estados iniciais do sistema original e do observador são os mesmos, o termo de correção $L(y - C\hat{x} - Du)$ é nulo para todo $t \geq 0$.

A matriz de transferência relacionando o vetor de observação y e o vetor de controle u com o estado estimado \hat{x} pode ser encontrada a partir da transformada de Laplace de 2.6:

$$\hat{x}(s) = (sI - A + LC)^{-1}(B - LD)u(s) + (sI - A + LC)^{-1}Ly(s)$$

Através de uma analogia podemos notar que as raízes do polinômio $|sI - A + LC|$ traduzem a dinâmica do observador, da mesma forma que as raízes do polinômio característico $|sI - A + BK|$ para o caso do controlador.

Vamos verificar a possibilidade de construção de um observador através de exemplo. Suponha o sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

onde c_1 e c_2 são deixados livres para o presente estudo.

Considerando $L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}^T$, o polinômio característico $|sI - A + LC|$ toma a forma:

$$s^2 + (-5 + l_1c_1 + l_2c_2)s + (6 - 3l_1c_1 - 2l_2c_2)$$

Para verificar se podemos colocar os pólos de $A - LC$ em qualquer lugar do plano complexo, suponha que o polinômio característico desejado é

$$s^2 + \alpha s + \beta$$

Para encontrar os ganhos do observador fazemos estes polinômios idênticos. Assim:

$$\begin{aligned} l_1c_1 + l_2c_2 - 5 &= \alpha \\ -3l_1c_1 - 2l_2c_2 + 6 &= \beta \end{aligned}$$

Escrevendo estas equações na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ -3c_1 & -2c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + \alpha \\ -6 + \beta \end{bmatrix}$$

Podemos determinar os ganhos desconhecidos para qualquer polinômio desejado se e somente se o determinante da matriz de coeficientes é não nulo. Desta forma:

$$-2c_1c_2 + 3c_1c_2 = c_1c_2 \neq 0$$

Portanto, tanto c_1 quanto c_2 devem ser não nulos. Esta também é a condição de observabilidade do sistema (*Apêndice B*). Concluimos que, para colocar os pólos de $A - LC$ correspondentes a este sistema em posições arbitrárias do plano complexo, o sistema deve ser observável. Para verificar o efeito do não cumprimento desta condição, suponhamos $c_1 = 0$. Neste caso, as equações serão consistentes quando:

$$\beta = -4 - 2\alpha$$

Impondo esta condição no polinômio desejado, temos:

$$s^2 + \alpha s - 4 - 2\alpha$$

Mas notamos que este polinômio corresponde a um sistema instável e neste caso não poderemos estabilizar $A - LC$.

Até o momento mencionamos que o assim chamado observador de Luenberger existe se o par (C, A) é observável. Um resultado mais geral pode ser enunciado assumindo apenas que o par (C, A) é detectável, que evidentemente é uma condição mais fraca do que a observabilidade. Um sistema detectável apresenta as características equivalentes:

- (a) Os modos (autovalores) instáveis do sistema são observáveis.
- (b) Os modos não observáveis são estáveis.
- (c) Os autovetores correspondentes aos modos instáveis de A não pertencem ao espaço nulo de C .

Os autovalores (modos) não observáveis de um sistema pertencem tanto ao conjunto de autovalores de A , quanto ao de $A - LC$, ou seja, estes modos são fixos e não podem ser alterados pela matriz de ganho L . Isto pode ser mostrado colocando-se a equação dinâmica de um sistema não observável, através de uma adequada mudança de base, na forma canônica:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [C \ 0]x + Du$$

Através de uma propriedade de matrizes bloco triangulares, o conjunto de autovalores da matriz A será formado pela união dos autovalores de A_{11} e A_{22} . Seja $L = [L_1^T \ L_2^T]^T$, então:

$$A - LC = \begin{bmatrix} A_{11} - L_1 C & 0 \\ A_{21} - L_2 C & A_{22} \end{bmatrix}$$

Esta também é uma matriz bloco triangular e seus autovalores serão dados pelos autovalores de $A_{11} - L_1 C$ e de A_{22} . Assim, concluímos que os autovalores da matriz bloco A_{22} correspondem aos modos do sistema que não podem ser alterados através da escolha de L (modos não observáveis).

Se no exemplo dado anteriormente a matriz A fosse substituída por $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, pode ser facilmente verificado que ainda podemos construir um observador assintótico com $C = [0 \ c_2]$, desde que $\alpha > 2$ (ou $|c_2| > 3$). Isto é possível porque o modo não observável -2 é estável (modo detectável).

Uma maneira mais geral de mostrar que um observador de estados assintótico pode ser construído apenas para sistemas detectáveis é a seguinte: Considere a resposta do sistema ao estado zero, ou seja, resposta a $x(0)$ com $u(t) \equiv 0$. Os modos não observáveis não influenciarão a saída para todo $t \geq 0$. Não aparecerão problemas caso todos os modos não observáveis forem estáveis (modos detectáveis), já que tanto $x(t) \rightarrow 0$ quanto $\hat{x}(t) \rightarrow 0$ para qualquer condição inicial $\hat{x}(0)$. A convergência do estado estimado para a origem pode ser verificada pelo fato de que o observador em questão é um sistema linear estável com ambas as entradas nulas ($u(t)$ e $y(t) - Du(t) = Cx(t)$).

De qualquer forma, se algum dos modos não observáveis for instável (modo não detectável), então $x(t)$ não convergirá para zero, apesar de $\hat{x}(t) \rightarrow 0$. Assim, podemos ver que um observador pode ser determinado se e somente se o par (C, A) é detectável.

2.2.2. Observando uma combinação linear de estados

Quando o estado do observador

$$\dot{z} = Fz + Hu + Ly$$

estima uma combinação linear $Px(t)$ do estado do sistema, a dinâmica do erro entre a transformação no estado da planta e o estado do observador é dada por

$$P\dot{x} - \dot{z} = PAx + PBu - Fz - Hu - LCx - LDu$$

$$P\dot{x} - \dot{z} = (PA - LC)x - Fz + (PB - LD - H)u$$

Para que esta equação diferencial represente um sistema autônomo, é necessário que

$$\begin{aligned}FP &= PA - LC \\H &= PB - LD\end{aligned}$$

O que leva a

$$P\dot{x} - \dot{z} = F(Px - z)$$

Assim, podemos fazer $Px(t) \rightarrow z(t)$ se a matriz de ganho L é escolhida de forma que todos os autovalores de F são posicionados no semi-plano esquerdo.

2.2.3. Observador de ordem reduzida

O observador de Luenberger discutido até este ponto possui a mesma dimensão do estado x , que denotamos por n . Este fato nos leva a denominá-lo de *observador de ordem plena*. Na prática, algumas das variáveis de estados ou combinações destas podem ser medidas precisamente. Tais variáveis não necessitam ser estimadas. Um observador que estima menos do que n variáveis de estado é denominado de observador de ordem reduzida [8]. Se a ordem do observador de ordem reduzida for a menor possível, o denominamos de *observador de ordem mínima*.

Já que podemos medir Cx , então já temos conhecimento da parte de x que não pertence ao espaço nulo de C , denotado por “ x módulo $\text{Ker } C$ ”; assim precisamos apenas gerar a parte de x correspondente ao espaço nulo de C .

Se a matriz C possui dimensões $p \times n$ e posto $C = p$ (*full row rank*), então a dimensão de seu espaço nulo é igual a $n - p$; o que nos leva a suspeitar da possibilidade de construir um observador de ordem $n - p$. Isto é verdadeiro e constitui-se a base para a construção do observador de ordem mínima.

2.3. Determinação da dinâmica de observadores

Através da equação (2.4) vemos que, se os autovalores de $A - LC$ podem ser arbitrariamente posicionados, então o comportamento do erro e pode ser controlado. Por exemplo, se todos os autovalores de $A - LC$ possuem partes reais negativas menor do que $-\delta$, então todos os elementos do vetor e se aproximará de zero em taxas maiores do que $e^{-\delta t}$.

Se as partes reais dos autovalores do observador são escolhidas para serem grandes, a estimativa do estado se aproximará do valor atual rapidamente; mas de qualquer forma, o sistema resultante será extremamente sensível aos distúrbios de alta frequência (o observador poderá atuar como um diferenciador). Por outro lado, se as partes reais dos autovalores do observador são muito pequenas, a estimação do estado se aproximará do valor atual lentamente e o desempenho geral do sistema é substancialmente degradado.

Como mencionamos anteriormente, não podemos deslocar os modos não observáveis de um sistema através de uma matriz de realimentação L . Se estes modos possuírem pequena magnitude negativa, ainda podemos construir um observador assintótico para o sistema, mas a taxa de convergência pode ser muito lenta. Ou seja, nem todos os sistemas admitem observadores com desempenhos aceitáveis.

O problema do projeto de observadores reduz-se ao problema de encontrar a matriz L que faz com que os autovalores de $A - LC$ estejam nas localizações desejadas. Note que este é o problema dual do projeto de controladores lineares via imposição de pólos, o qual consiste na determinação da matriz K que estabelece a localização dos autovalores de $A - BK$. Se a planta possui uma única saída, então K assumirá a forma de vetor; e neste caso podemos, mediante uma simples transposição $(A - LC)^T = A^T - C^T L^T$, aplicar o método tradicional de projeto de controladores para o projeto de observadores [9]. Para o caso multivariável, a escolha de K (L) não é única a partir da especificação de um dado conjunto de autovalores para $A - BK$ ($A - LC$).

O método tradicional de imposição de pólos é limitado. Ele pressupõe que autovalores adequados de $A - LC$ são conhecidos. Na prática, o que o projetista realiza são tarefas de otimização a partir do conhecimento das especificações de desempenho que o observador deve cumprir, quer seja no domínio do tempo (ex. limites de amplitude), quer seja no domínio da frequência (ex. largura de banda). É extremamente difícil transformar estas especificações de desempenho em restrições nos referidos autovalores e ainda utilizar uma ferramenta de otimização adequada. Devemos notar também que, se o modelo do sistema inclui a descrição de perturbações, certamente o projeto empregará alguma forma de controle ótimo.

Neste trabalho apresentaremos algumas alternativas ao modelo de observador proposto por Luenberger, incluindo o tratamento de perturbações e diversas técnicas de otimização adequadas a cada caso.

2.4. O Filtro de Kalman

2.4.1. Formulação

Uma das técnicas mais difundidas para estimação de estados durante as três últimas décadas tem sido a filtragem de Kalman. O problema tratado por R. E. Kalman e R. S. Bucy [10],[11] foi o seguinte. Considere o processo dinâmico

$$\dot{x} = Ax + Bu + Fv \quad (2.7)$$

$$y = Cx + w \quad (2.8)$$

onde u é uma entrada conhecida (de natureza determinística), y é a saída de medição e v, w são processos estocásticos na forma de ruído branco, com média nula e matrizes de densidade espectral de potência conhecidas.

Deseja-se encontrar um ganho $L(t)$ que resulte na minimização da variância do erro de estimação para o estado x (observador ótimo) na presença dos ruídos. A estrutura do filtro a ser usado é:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(t)[y - C\hat{x}] \quad (2.9)$$

O estado inicial de (2.7) é tomado como uma variável aleatória, x_0 , com uma matriz de covariância P_0 e não correlacionada com v e w .

Note que, para o observador de Luenberger, a matriz de ganho é constante, mas isto não é verdade no filtro de Kalman como veremos adiante. Assim, tornamos explícita a dependência temporal de L em (2.9).

Devemos ressaltar ainda que o trabalho de Kalman foi anterior à definição de observador, mas Luenberger foi o primeiro a generalizar e sistematizar os resultados precedentes.

A idéia proposta por Kalman é procurar por uma matriz de ganho $L(t)$ que faça com que a variância do erro de estimação seja minimizada. Como anteriormente, o erro é definido como:

$$e \equiv x - \hat{x}$$

Após algumas substituições envolvendo (2.7) e (2.8) chegamos à equação diferencial para o erro:

$$\dot{e} = (A - LC)e + Fv - Lw \quad (2.10)$$

Já que v e w são ruídos brancos, sua soma ponderada

$$\xi = Fv - Lw$$

também resulta em ruído branco, com uma matriz de covariância Q_ξ . Para encontrar Q_ξ , devemos verificar que

$$\begin{aligned} E\{\xi(t)\xi^T(\tau)\} &= F(t)E\{v(t)v^T(\tau)\}F^T(\tau) - L(t)E\{w(t)v^T(\tau)\}F^T(\tau) \\ &\quad - F(t)E\{v(t)w^T(\tau)\}L^T(\tau) + L(t)E\{w(t)w^T(\tau)\}L^T(\tau) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Admitiremos que os sinais v e w possuem matrizes de covariância dadas por:

$$E\{v(t)v^T(\tau)\} = V(t)\delta(t - \tau) \quad (2.12)$$

$$E\{v(t)w^T(\tau)\} = X(t)\delta(t - \tau) \quad (2.13)$$

$$E\{w(t)w^T(\tau)\} = W(t)\delta(t - \tau) \quad (2.14)$$

onde $E\{\cdot\}$ denota o valor esperado e $\delta(\cdot)$, a função *Delta de Dirac*.

Como estas são matrizes de covariância, então V , X e W devem ser matrizes simétricas semi-definidas positivas. Adicionalmente supomos $W(\cdot)$ positiva definida para todo o t (o que implica na não singularidade desta matriz). Se esta restrição não fosse imposta, poderia existir alguma combinação linear das saídas totalmente livre de ruído e o observador ótimo não teria a estrutura que estamos considerando aqui.

Desta forma, temos

$$E\{\xi(t)\xi^T(\tau)\} = Q_\xi(t)\delta(t - \tau)$$

onde

$$Q_{\xi}(t) = F(t)V(t)F^T(t) - L(t)X^T(t)F^T(t) - F(t)X(t)L^T(t) + L(t)W(t)L^T(t) \quad (2.15)$$

Assim, (2.10) é a equação diferencial de um sistema linear excitado por ruído branco ξ :

$$\dot{e} = (A - LC)e + \xi$$

onde ξ possui a matriz de densidade espectral dada por (2.15)

Seja P a matriz de covariância do erro. Pode ser mostrado que a equação diferencial para P é expressa por:

$$\begin{aligned} \dot{P} &= (A - LC)P + P(A^T - C^T L^T) + Q_{\xi} \\ &= (A - LC)P + P(A^T - C^T L^T) + FV F^T - LX^T F^T - FX L^T + LW L^T \end{aligned} \quad (2.16)$$

Empregando alguma técnica de otimização adequada podemos encontrar a matriz ótima

$\hat{P}(t) = P^T(t) \geq 0$, denotada por \hat{P} , que possua o menor traço (ou seja, possua a mínima variância do erro de estimação) como a solução estabilizante da seguinte equação diferencial de Riccati (RDE):

$$\begin{aligned} \dot{\hat{P}} &= \tilde{A}\hat{P} + \hat{P}\tilde{A}^T - \hat{P}C^T W^{-1} C \hat{P} + F\tilde{V}F^T \\ \hat{P}(0) &= P_0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A - FXW^{-1}C \\ \tilde{V} &= V - XW^{-1}X^T \end{aligned}$$

O ganho ótimo $L(t)$, que denotamos por $\hat{L}(t)$, é dependente de \hat{P} no seguinte sentido:

$$\hat{L} = (\hat{P}C^T + FX)W^{-1} \quad (2.18)$$

Em síntese: A equação (2.18) é continuamente atualizada com a solução de (2.17) e o ganho resultante é levado ao filtro definido pelo observador em (2.9). Implementações discretas do filtro de Kalman são frequentes, tendo em vista a natureza algorítmica da solução.

Quando $X = 0$, o que significa que v e w são não correlacionados (situação mais comum na prática), então o filtro assume uma forma mais simples com $\tilde{A} = A$ e $\tilde{V} = V$. Note que, apesar do sistema (2.7), (2.8) ser invariante no tempo, o filtro assim obtido é variante no tempo.

2.4.2. Filtro de Kalman em regime permanente

A equação diferencial de Riccati (2.17) é válida para qualquer intervalo de tempo finito. Se permitimos que o tempo torne-se infinito, as soluções podem tender ao infinito ou podem permanecer limitadas. Se todas as matrizes do lado direito de (2.17) são constantes, então uma solução constante em regime poderia existir, e neste caso, tal solução seria dada pela seguinte equação algébrica de Riccati (ARE):

$$0 = \tilde{A}\hat{P} + \hat{P}\tilde{A}^T - \hat{P}C^TW^{-1}C\hat{P} + F\tilde{V}F^T \quad (2.19)$$

Em particular, a existência de uma solução estabilizante $\hat{P} = \hat{P}^T \geq 0$ para a ARE (2.18) é garantida se, tanto [7]:

- (a) O sistema é assintoticamente estável, ou
- (b) O par (C, A) é detectável e o sistema definido através do par $(A, FV^{1/2})$, isto é, o sistema $\dot{x} = Ax + FV^{1/2}v$, é controlável (controlabilidade pelo ruído).

Observações

Kalman e Bucy provaram que, se os processos V e W são ruídos branco com funções densidade de probabilidade de primeira ordem gaussianas, então o filtro de Kalman é o melhor de todos os filtros: não existe outro filtro, linear ou não linear, que apresente melhor desempenho do que o filtro de Kalman. Este tipo de filtro também é chamado de filtro H_2 , como veremos na seção seguinte.

Alguém poderia concluir que, como o ruído branco é apenas uma abstração conveniente (não existe fisicamente), a teoria de filtragem de Kalman seria baseada em considerações as quais não se aplicam ao mundo real. Felizmente, a aproximação por ruído branco não é totalmente precária; uma vez que a largura de banda do ruído, apesar de finita, é muito maior que a largura de banda do processo sob consideração. Para os casos em que este fato não verifica-se, a abordagem de Kalman não é justificada.

2.5. Caracterização de Filtros quanto às perturbações

O trabalho original de Kalman não previa a entrada conhecida u , normalmente encontrada em sistemas de controle. Mas podemos notar que a presença desta entrada não altera em nada o processo de estimação, já que o sistema original contém um termo Bu que será cancelado pelo mesmo termo presente na descrição do filtro. É claro que, se o sistema não possui a entrada u , também o filtro não a terá. Assim, podemos afirmar que o processo de estimação é muito semelhante ao processo de filtragem e, muitas vezes as palavras estimador e filtro são usadas indistintamente.

Vamos fazer a caracterização dos filtros existentes quanto à natureza das perturbações. Para tanto, consideraremos dois tipos de sinais de entrada: sinais estocásticos e sinais determinísticos.

2.5.1. Sinais de entrada estocásticos

Aqui é assumido um modelo estatístico para as entradas de ruído e perturbação do filtro [12]. Suponha que a condição inicial do sistema seja $x(0) = 0$ e que, no tempo $t = 0$, aplicamos um processo estocástico estacionário (no sentido amplo) de média nula, denotado por w , e tendo uma matriz de auto correlação $R_w(\tau) = E\{w(t)w^T(t+\tau)\}$. Então a matriz de densidade espectral de potência correspondente é:

$$S_w(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_w(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Neste caso, dado um filtro assintótico, o erro de estimação aproxima-se de um processo estocástico estacionário (no sentido amplo) com densidade espectral:

$$S_e(\omega) = T(j\omega) S_w(\omega) T^*(j\omega)$$

onde $T(\cdot)$ é a transferência da entrada de perturbação w para o erro de estimação e .

Portanto, a variância do erro de estimação é:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} E\{e(t)^T e(t)\} &= \text{trace } R_e(0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace } S_e(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace } T(j\omega) S_w(\omega) T^*(j\omega) d\omega \end{aligned} \tag{2.20}$$

Devemos ressaltar que esta definição de variância (quantidade escalar) para sinais vetoriais é pouco empregada; mais comum é a utilização da matriz de covariância $E\{e(t)e(t)^T\}$.

Agora vamos supor que w é um processo ruído branco de média nula com $S_w(\omega) = I$. Segue de (2.19) a variância de regime permanente do erro de estimação é:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E\{e(t)^T e(t)\} = \|T\|_2^2$$

onde $\|T\|_2$ é a norma H_2 usual.

Portanto, se é conhecido que w é um ruído branco de média nula, então o filtro pode ser projetado para minimizar a norma H_2 de T . Por este fato denomina-se, modernamente, o filtro de Kalman como filtro H_2 .

Suponha agora que a matriz de densidade espectral de potência $S_w(\omega)$ do processo w é desconhecida mas integrável, i.e., w possui variância limitada. Então, a partir de (2.20) e das propriedades da norma H_∞ , pode-se mostrar que:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} E\{e(t)^T e(t)\} &\leq \|T\|_\infty^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace } S_w(\omega) d\omega \\ &= \|T\|_\infty^2 E\{w(0)^T w(0)\} \end{aligned} \tag{2.21}$$

Aqui, $\|T\|_\infty$ é a norma H_∞ para matrizes de transferência dada por:

$$\|T\|_\infty \equiv \sup_{\omega \in R} \max \delta(T(j\omega))$$

onde $\max \delta(\cdot)$ denota o maior valor singular de $T(j\omega)$.

Além de tudo, $\|T\|_\infty^2$ constitui-se no *menor limite superior* tal que (2.21) mantém-se para processos estacionários (no sentido amplo) w com variância limitada. Portanto, se apenas temos conhecimento de que a perturbação é estacionária no sentido amplo e possui variância limitada, então podemos minimizar a norma H_∞ de T , já que esta quantidade mede a amplificação de variância para o pior caso. Esta é a idéia do filtro H_∞ .

2.5.2. Sinais determinísticos

As teorias de filtragem H_2 e H_∞ , bem como a chamada filtragem L_1 , também podem ser motivadas a partir de um ponto de vista determinístico.. Assim, a medida do desempenho de filtragem $\|T\|_2^2$ é a soma dos quadrados das normas l_2 dos erros de filtragem resultantes da aplicação de funções Delta de Dirac em cada canal da entrada de ruído w . Isto também se aplica quando w é um sinal fixo em l_2 e existem funções de ponderação adequadas.

Por outro lado, usando as propriedades padrão da norma H_∞ , temos que, para todo t ::

$$\int_0^t \|e(\tau)\|^2 d\tau \leq \|T\|_\infty^2 \int_0^t \|w(\tau)\|^2 d\tau$$

onde $\|\cdot\|$ denota a conhecida norma euclidiana de vetores.

Pode ser mostrado então que a norma $\|T\|_\infty$ fornece o *menor limite superior* para a razão entre as normas l_2 dos sinais e e w (norma induzida) quando $\|w\|_2 \leq 1$. Em outras palavras, quando o objetivo é minimizar a energia do erro de estimação na presença da pior entrada de perturbação possível, com energia limitada à unidade, podemos minimizar a norma H_∞ de T .

Analogamente, quando desejarmos minimizar a norma l_∞ (amplitude) do erro de estimação na presença da pior entrada de perturbação possível, tendo norma l_∞ limitada à unidade, poderemos minimizar a norma L_1 de T , denotada por $\|T\|_1$.

CAPÍTULO 3

PARAMETRIZAÇÃO DE OBSERVADORES LINEARES

3.1. Parametrização de controladores - a origem

A *parametrização* de todos os controladores internamente estabilizantes foi apresentada inicialmente por Youla *et al* [13][14]; onde foram utilizadas técnicas de fatoração coprima. Os resultados existentes nesta área são, principalmente, no domínio da frequência, apesar da possibilidade de transforma-los para descrições no espaço de estados. Posteriormente, foram empregadas técnicas semelhantes para a parametrização de observadores (problema dual). Discutiremos inicialmente o problema de controle.

A representação moderna de um sistema de controle realimentado é mostrada no diagrama de blocos da Figura 3.1 [15]:

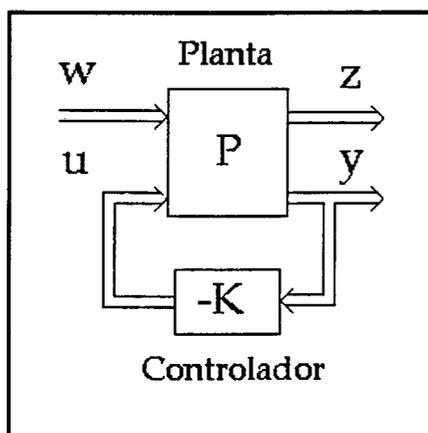


Figura 3.1. Configuração básica

A entrada é decomposta em dois sinais vetoriais, a entrada exógena W , a qual inclui perturbações e referências, e a entrada de controle u influenciada pelo controlador. A saída é decomposta em y , a saída de sensores que é realmente acessível ao controlador e z , a saída regulada sobre a qual são expressas as especificações de desempenho.

Deseja-se então projetar um controlador K (ou $K(s)$), com entrada y e saída

$$u: u = -Ky$$

O mapeamento P é particionado de tal forma que:

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{zw} & P_{zu} \\ P_{yw} & P_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

Assim, a função de transferência de malha fechada das entradas exógenas w para as variáveis reguladas z é:

$$H_{zw} = P_{zw} - P_{zu}K(I + P_{yu}K)^{-1}P_{yw}$$

Diz-se que esta é uma *transformação fracional linear* da planta P .

A obtenção desta função de transferência é de especial interesse para o projeto do controlador. Isto devido ao fato de que a entrada w e a saída z são realmente os sinais visíveis ao mundo exterior e que, como mencionamos anteriormente, as especificações de desempenho são dadas sobre o sinal z .

O conjunto de matrizes H_{zw} que são atingidas por controladores que estabilizam a planta P é denominado de H_{stab} ou, na forma de descrição de conjuntos:

$$H_{stab} = \{ H \in H_{zw} \mid H = P_{zw} - P_{zu}K(I + P_{yu}K)^{-1}P_{yw} \},$$

para algum K que estabiliza P .

(3.1)

Através de (3.1), podemos mostrar que o conjunto H_{stab} é afim em K . Isto quer dizer que, qualquer combinação afim de matrizes de transferência atingíveis com o uso de controladores estabilizantes é também atingível com um controlador estabilizante.

Se K e \tilde{K} estabilizam P e levam a matrizes de transferência de malha fechada H e \tilde{H} , respectivamente, então para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, existe um controlador K_λ que estabiliza P e leva a uma matriz de transferência de malha fechada:

$$H_\lambda = \lambda H + (1 - \lambda)\tilde{H}$$

Portanto, se podemos encontrar dois controladores que estabilizam P , podemos encontrar uma família completa de controladores que estabilizam P , parametrizada em λ . As correspondentes funções de transferência de malha fechada estarão sobre uma “linha reta” no conjunto H_{zw} .

É importante ressaltar que o controlador K_λ que leva a H_λ geralmente não obedece $K_\lambda = \lambda K + (1 - \lambda)\tilde{K}$, mas é dado pela expressão:

$$K_\lambda = (A + \lambda B)^{-1} (C + \lambda D)$$

onde as matrizes A , B , C e D dependem da planta e do par K , \tilde{K} .

Note que, apesar de termos obtido uma espécie de parametrização, uma restrição relativamente simples em H_{zw} corresponde, via (3.1), a uma restrição muito mais complicada no controlador K . Surge então a necessidade de um tipo de parametrização que seja mais adequada aos métodos de otimização.

Uma representação a parâmetro livre do conjunto H_{stab} , mais adequada, pode ser estabelecida usando-se teoria de fatoração coprima, chamada de parametrização Q :

$$H_{stab} = \{ T_1 - T_2 Q T_3 \mid Q \text{ é estável} \} \quad (3.2)$$

A equação $H_{zw} = T_1 - T_2QT_3$ mostra a classe de matrizes de transferência atingíveis, parametrizadas em $Q(s)$ estável. Facilmente verifica-se que H_{stab} é afim em Q . Esta parametrização inicia com qualquer controlador, K_{nom} , que estabiliza a planta e que chamaremos de *controlador nominal*. Seja $K_{nom} = Y^{-1}X$ uma fatoração coprima pela esquerda estável do controlador nominal e $P_{yu} = \tilde{D}^{-1}\tilde{N}$ uma fatoração coprima pela esquerda de P_{yu} .

Então, todo controlador da forma $K = (Y - Q\tilde{N})^{-1}(X + Q\tilde{D})$, com Q estável, estabiliza P e, reciprocamente, todo controlador que estabiliza P tem esta forma para algum Q estável. Existe uma caracterização similar para os controladores estabilizantes, a partir de fatoração coprima pela direita.

Já que K_{nom} estabiliza P_{yu} , existe uma fatoração direita coprima pela direita $P_{yu} = ND^{-1}$ com $N(s)$ e $D(s)$ satisfazendo a *Identidade de Bezout* $XN + YD = I$.

Algumas manipulações algébricas levam a expressão da parametrização Q , $T_1 - T_2QT_3$, onde

$$\begin{aligned} T_1 &= P_{zw} - P_{zu}DXP_{yw}, \\ T_2 &= P_{zu}D, \\ T_3 &= \tilde{D}P_{yu} \end{aligned} \tag{3.3}$$

O problema de procurar pelas matrizes H_{zw} atingíveis variando-se K na descrição (3.1) é muito mais simples quanto à resolução (otimização) quando comparado ao problema de procurar estas matrizes variando-se Q na descrição (3.2). Podemos entender a parametrização na forma de um problema conhecido como problema *model matching*. Na Figura 3.2, a matriz de transferência T_1 representa um “modelo” que será seguido pela conexão cascata de T_2 , Q e T_3 .

Neste problema, T_1 , T_2 e T_3 (dadas através de 3.3) são conhecidas e deseja-se projetar o “controlador” Q de forma que o sinal Z apresente certas propriedades; normalmente uma norma mínima.

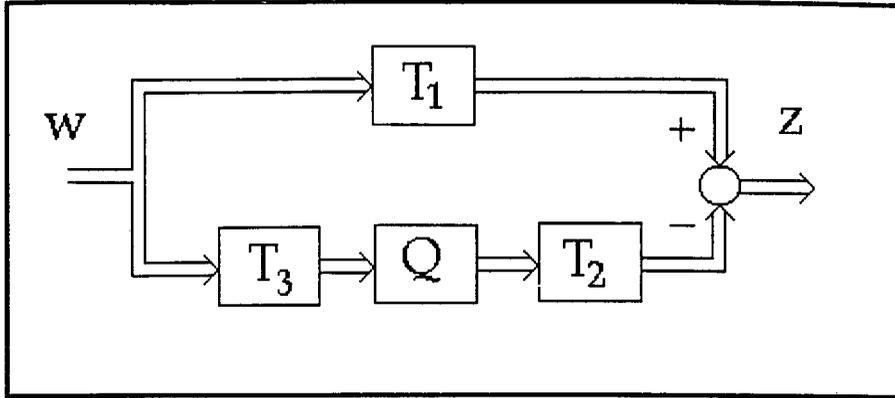


Figura 3.2. Problema *Model Matching*

3.1.1. Síntese de Controladores

Requisitos típicos no desempenho de malha fechada resultam em restrições *convexas* sobre H_{zw} e, portanto, sobre Q . Lembre-se que, na minimização de uma função convexa sobre um conjunto convexo, todo mínimo local também será mínimo global; o que resulta em menor esforço computacional para resolução. Suponha que nosso problema é especificado como:

$$\begin{aligned} & \underset{H_{zw}}{\text{minimizar}} \phi(H_{zw}) & (3.4) \\ & \text{sujeito a } H_{zw} \in \Omega \cap H_{\text{stab}} \end{aligned}$$

onde ϕ é um funcional convexo e Ω é um conjunto de restrições convexas. Isto é equivalente a:

$$\begin{aligned} & \underset{Q}{\text{minimizar}} \Theta(Q) & (3.5) \\ & \text{sujeito a } Q \in H \end{aligned}$$

onde

$$H = \{ Q \mid T_1 - T_2QT_3 \in \Omega, Q \text{ estável} \} \text{ e}$$

$$\Theta(Q) = \phi(T_1 - T_2QT_3).$$

Note que H e Θ são convexas. Quando H é vazio, significa que nenhum controlador estabilizante pode satisfazer a restrição $H_{zw} \in \Omega$.

Sejam $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$ funcionais convexos representando medidas de desempenho, então o problema

$$\begin{aligned} & \underset{Q}{\text{minimizar}} \quad \phi_0(T_1 - T_2QT_3) \\ & \text{sujeito a} \quad \phi_1(T_1 - T_2QT_3) \leq \alpha_1 \\ & \quad \quad \quad \phi_2(T_1 - T_2QT_3) \leq \alpha_2 \\ & \quad \quad \quad \cdot \\ & \quad \quad \quad \cdot \\ & \quad \quad \quad \phi_m(T_1 - T_2QT_3) \leq \alpha_m \end{aligned}$$

é um problema de otimização convexa. Devemos lembrar que, se ϕ é convexo e $\alpha \in \mathbb{R}$, então o conjunto $\{ H \mid \phi(H) \leq \alpha \}$ é convexo.

Exemplos deste tipo de problemas, bem como os métodos de solução, serão dados na parte correspondente a observadores.

3.2. Formas correntes para parametrização de observadores lineares

A importância da parametrização de observadores lineares está não somente no fato de que ela representa um resultado dual da parametrização de controladores lineares, mas também na sua aplicação no projeto de observadores. Com os resultados aqui obtidos podemos dar início à fase de projeto do observador, em função das especificações de desempenho e utilizando a ferramenta de otimização adequada ao caso. Para tanto, iniciaremos o estudo apresentando as abordagens correntes utilizadas na parametrização de observadores lineares. Posteriormente será apresentada uma proposta mais geral, constituindo-se em parte da contribuição deste trabalho.

3.2.1. Abordagem de “G. C. Goodwin *et al*”

Este resultado, pioneiro na área da parametrização de observadores (estimadores) de estado lineares, aparece nos trabalhos [16] e [17]. Considere um sistema contínuo, linear e invariante no tempo com a seguinte descrição no espaço de estados:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3.6}$$

$$y = Cx \tag{3.7}$$

onde (C, A) é detectável.

Seja L qualquer matriz de dimensão apropriada tal que $A - LC$ seja estável e defina o seguinte estimador de estados *particular (nominal, ou ainda central)*:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \quad (3.8)$$

Então temos o seguinte resultado: Uma condição necessária e suficiente para \hat{x}' ser uma estimação estável e *unbiased* de x é que \hat{x}' possa ser expresso por:

$$\hat{x}'(s) = \hat{x}(s) + \hat{Q}(s)v(s) \quad (3.9)$$

onde v é o erro da saída de estimação associado com a estimação de estados particular \hat{x} ; isto é, $v = y - C\hat{x}$ (o sinal v é também chamado de *innovations*) e $\hat{Q}(s)$ é uma matriz de transferência estável, própria e racional. Isto é, $\hat{Q}(s) \in RH_{\infty}$.

Aqui, estimador estável significa que a estimação é uma função linear, estável, própria e invariante no tempo da entrada e saída da planta. Por *unbiased* nos referimos ao fato de que, na ausência de ruído e erros de modelamento, e para qualquer sinal de entrada, o erro de estimação de estado deveria convergir para zero. O resultado é mostrado em forma de diagrama de blocos na Figura 3.3.

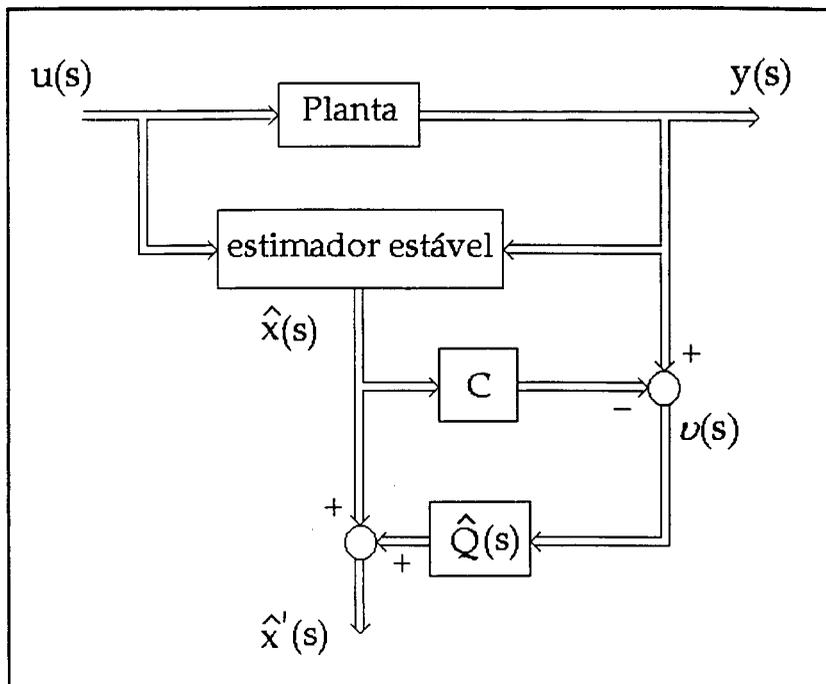


Figura 3.3. Geração de todos os estimadores *unbiased*-estáveis

A caracterização de todos os estimadores de estado estáveis (*unbiased*) enunciada possui a característica adicional de que a função de transferência da perturbação ao erro de estimação de estados é afim na função de transferência livre $\hat{Q}(s)$ como mostrado a seguir.

Considere as perturbações v_1 e v_2 adicionadas ao modelo (3.6), (3.7), levando a:

$$\dot{x} = Ax + Bu + D_1v_1 \quad (3.10)$$

$$y = Cx + v_2 \quad (3.11)$$

Considere ainda um estimador de estados particular (estável) dado por (3.8) e seja $\hat{x}(s)$ qualquer outra estimação de estados *unbiased*-estável gerada por (3.9).

Manipulações algébricas em (3.6) a (3.11) estabelecem que o erro de estimação de estado $e(s) \equiv x(s) - \hat{x}'(s)$ satisfaz:

$$e(s) = T(s) v(s) \quad (3.12)$$

onde

$$T(s) = ([M_1(s) \ M_2(s)] - \hat{Q}(s) [N_1(s) \ N_2(s)]) \quad (3.13)$$

$$v(s) = [v_1^T(s) \ v_2^T(s)]^T \quad (3.14)$$

$$M_1(s) = P(s) D_1 \quad (3.15)$$

$$M_2(s) = -P(s) L \quad (3.16)$$

$$N_1(s) = C P(s) D_1 \quad (3.17)$$

$$N_2(s) = -C P(s) L + I \quad (3.18)$$

$$P(s) = (sI - A + LC)^{-1} \quad (3.19)$$

Note que $M_1(s)$, $M_2(s)$, $N_1(s)$, $N_2(s) \in RH_\infty$.

A propriedade de $T(s)$ ser afim pode ser explorada no projeto de estimadores otimizados sobre uma gama de critérios.

Analogamente ao que ocorre na parametrização de controladores, dada a caracterização (3.13), o projeto de estimadores ótimos reduz-se à determinação da matriz de transferência $\hat{Q}(s)$ que minimiza o critério apropriado na classe de matrizes estáveis, próprias e racionais. Em [17] são discutidos os critérios de otimização L_1 , H_2 e H_∞ .

3.2.2. Abordagem de “X. Ding *et al*”

Considere o sistema dinâmico linear descrito por

$$\dot{x} = Ax + Bu + Ed \quad (3.20)$$

$$y = Cx + Du + Fd \quad (3.21)$$

$$z = Px \quad (3.22)$$

onde $d(t)$ é o vetor de perturbação e $z(t)$ é uma combinação linear dos estados a serem estimados. Como usualmente, assume-se que o par (C, A) é detectável.

Esta abordagem [18] propõe que a forma geral para uma observação de $z(t)$ possua a seguinte descrição no domínio da frequência:

$$\hat{z}(s) = F(s)u(s) + G(s)y(s) \quad (3.23)$$

O observador é construído a partir de uma fatoração duplamente coprima da planta

$$\begin{aligned} H(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= N(s)M^{-1}(s) = \hat{M}^{-1}(s)\hat{N}(s), \end{aligned}$$

onde $\{N(s), M(s)\}$, $\{\hat{N}(s), \hat{M}(s)\}$ são matrizes coprimas pela direita e pela esquerda no anel RH_∞ , cuja descrições no espaço de estados envolvem a procura (alocação de pólos) por uma matriz K tal que $A + BK$ seja estável e uma matriz L tal que $A - LC$ seja estável (*Apêndice A, expressões (A-15) e (A-16)*).

A estrutura do observador assim construído e a sua ligação ao sistema são mostradas na Figura 3.4, onde $\xi(s)$ é o estado parcial.

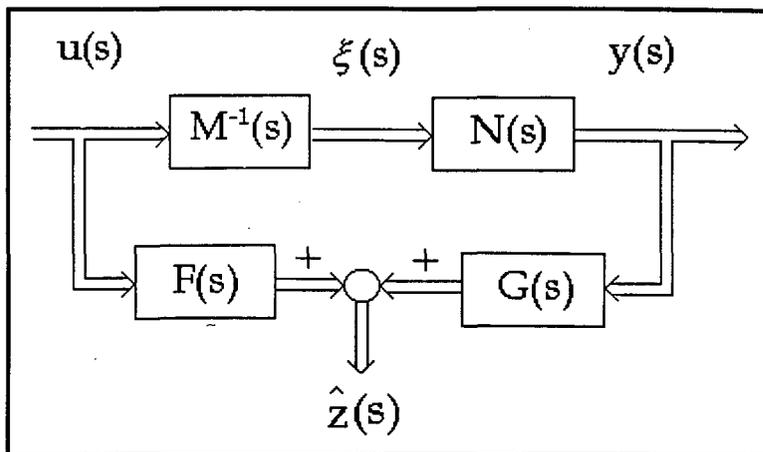


Figura 3.4. Ligação do observador ao sistema.

Respeitando-se a condição de que, na ausência da perturbação ($d(t) = 0$), o erro de estimação $\Delta z(t) \equiv z(t) - \hat{z}(t)$ deve anular-se para o tempo tendendo ao infinito, encontram-se as matrizes desconhecidas em (3.23) que definem o observador:

$$F(s) = P(s)Y(s) - Q(s)\hat{N}(s) \quad (3.24)$$

$$G(s) = P(s)X(s) + Q(s)\hat{M}(s) \quad (3.25)$$

onde $P(s) = P(sI - A)^{-1}B \in RH_{\infty}$, $\{ Y(s), X(s) \}$ satisfazem a identidade de *Bezout* correspondente a fatoração de $H(s)$ e $Q(s) \in RH_{\infty}$ é uma matriz parâmetro livre.

Note que, ao fazermos $P(s) = I$ e $Q(s) = 0$ em (3.24) e (3.25), obtemos o observador particular da Figura A.6 (Apêndice A). A simbologia Δz foi usada para designar o erro de estimação da combinação linear de estados, de forma a se evitar confusão com o erro e , definido anteriormente.

Neste mesmo trabalho é mostrado que a construção do observador dada por (3.23) a (3.25) é equivalente à seguinte: Dado um observador (particular) para o estado $x(t)$ da forma

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x} - Du), \quad (3.26)$$

onde L é tal que $A - LC$ é estável,

A classe de todos os observadores lineares para $z(t)$ admissíveis é parametrizada em $R(s) \in RH_{\infty}$: da seguinte forma:

$$\hat{z}(s) = P\hat{x}(s) + R(s)[y(s) - C\hat{x}(s) - Du(s)] \quad (3.27)$$

O vetor de perturbação $d(t)$ afeta a dinâmica do erro de estimação $\Delta z(t)$ de tal forma que a função de transferência correspondente é afim no parâmetro $R(s) \in RH_{\infty}$:

$$\Delta z(s) = (P_1(s) - R(s)P_2(s))d(s) \quad (3.28)$$

onde

$$P_1(s) = P(sI - A + LC)^{-1}(E - LF) \in RH_{\infty} \quad (3.29)$$

$$P_2(s) = C(sI - A + LC)^{-1}(E - LF) + F \in RH_{\infty} \quad (3.30)$$

Note que esta forma modificada de construção requer apenas uma alocação de pólos, aquela referente a $A - LC$.

3.3. Parametrização de Observadores - Uma forma geral

Faremos inicialmente uma comparação entre as abordagens [16] e [18] apresentadas nas seções anteriores.

(a) Quanto ao modelo do sistema:

A abordagem de G. C. Goodwin *et al* [16] considera apenas sistemas estritamente próprios (mais comuns na prática), onde o termo $Du(t)$ está ausente; já na abordagem X. Ding *et al* [18] é permitido que a resposta ao impulso do sistema apresente termos impulsivos na origem.

(b) Quanto ao modelo das perturbações:

Em [16], temos duas perturbações, uma agindo na entrada do sistema, $v_1(t)$, e a outra na saída de medição, $v_2(t)$. Esta última com matriz de ponderação identidade. O resultado é que o mapeamento perturbação - erro de estimação é particionado em duas matrizes.

Em [18], o vetor de perturbação $d(t)$ é a mesmo para a entrada e saída, mas com matrizes de ponderação distintas.

(c) Quanto ao processo de estimação

A proposta [18] é mais geral no sentido de que pretende estimar uma combinação linear dos estados do sistema. Se $P = I$, então recai-se na estimação pura dos estados. Ambas utilizam um observador nominal como estrutura central do processo de estimação e sobre o qual não é imposta qualquer consideração adicional, além da estabilidade. Em [16], qualquer outra

estimação de estados é dada por $\hat{x}'(s) = \hat{x}(s) + \hat{Q}(s)[y(s) - C\hat{x}(s)]$; já em [18], ao invés de se obter esta função afim e multiplicá-la pela matriz P para se obter a estimação $\hat{z}(s)$, obtém-se diretamente $\hat{z}(s) = P\hat{x}(s) + R(s)[y(s) - C\hat{x}(s) - Du(s)]$.

Podemos concluir, então, que ambas as abordagens são equivalentes, salvo as diferenças apontadas. Por exemplo, com transformações apropriadas no modelo de [16] (assumindo $D = 0$), podemos passar para a descrição [18]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + \begin{bmatrix} D_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ y &= Cx + \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde E , F e $d(t)$ constituem-se das matrizes particionadas.

Por outro lado, ao fazermos $v_1(s) = v_2(s)$ na equação (3.12), podemos obter a equação (3.28) referente à parametrização do erro de estimação.

A seguir apresentaremos uma forma geral de parametrização que segue muito de perto o tratamento dado em [16], [17].

3.3.1. A parametrização do observador

Consideramos a mesma descrição no espaço de estados para o sistema dada por (3.20) a (3.22). Como anteriormente assume-se que (C, A) é detectável. O observador particular para $z(t)$ tem a forma:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x} - Du) \quad (3.31)$$

$$\hat{z} = P\hat{x} \quad (3.32)$$

onde L é uma matriz de dimensão apropriada e que posiciona os autovalores de $A - LC$ no semi-plano esquerdo. Escrevendo o observador particular de outra forma:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + (B - LD)u + Ly \quad (3.33)$$

$$\hat{z} = P\hat{x} \quad (3.34)$$

Definimos

$$v = y - C\hat{x} - Du \quad (3.35)$$

ou

$$v = C(x - \hat{x}) \quad (3.36)$$

Tomando a transformada de Laplace de (3.33)

$$\hat{x}(s) = (sI - A + LC)^{-1}(B - LD)u(s) + (sI - A + LC)^{-1}Ly(s)$$

e substituindo em (3.35), temos:

$$v(s) = [I - C(sI - A + LC)^{-1}L]y(s) - [C(sI - A + LC)^{-1}(B - LD) + D]u(s)$$

ou

$$v(s) = \hat{M}(s)y(s) - \hat{N}(s)u(s) \quad (3.37)$$

Lema 3.1:

A planta admite uma descrição esquerda fatorada, ou seja,

$$\hat{M}^{-1}(s)\hat{N}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Note ainda que $\hat{M}(s)$ e $\hat{N}(s)$ são coprimas pela esquerda em RH_∞ (Apêndice A, expressões (A-15) e (A-16)).

Prova:

$$\begin{aligned} \hat{M}^{-1}(s)\hat{N}(s) = \\ [I - C(sI - A_L)^{-1}L]^{-1} [C(sI - A_L)^{-1}(B - LD) + D] \end{aligned}$$

com $A_L = A - LC$

Vamos tratar primeiro a inversa entre colchetes.

Usando o fato conhecido de que

$$(I - XY)^{-1} = I + X(I - YX)^{-1}Y$$

teremos

$$\begin{aligned} I + C[I - (sI - A_L)^{-1}LC]^{-1}(sI - A_L)^{-1}L &= \\ I + C[(sI - A_L)(I - (sI - A_L)^{-1}LC)]^{-1}L &= \\ I + C[sI - A_L - LC]^{-1}L &= I + C(sI - A)^{-1}L \end{aligned}$$

Retornando na expressão original, temos

$$[I + C(sI - A)^{-1}L] [C(sI - A_L)^{-1}(B - LD) + D]$$

Aplicando a propriedade distributiva

$$\begin{aligned} & C(sI - A)^{-1} [(sI - A) (sI - A_L)^{-1}(B - LD) + \\ & LC(sI - A_L)^{-1}(B - LD) + LD] + D \\ = & C(sI - A)^{-1} \{ [(sI - A) + LC] (sI - A_L)^{-1}B + \\ & [-(sI - A) (sI - A_L)^{-1} - LC(sI - A_L)^{-1} + I] LD \} + D \\ = & C(sI - A)^{-1} \{ B - [(sI - A + LC) (sI - A_L)^{-1} - I] LD \} + D \end{aligned}$$

Note que a quantidade entre colchetes é zero, então:

$$\hat{M}^{-1}(s)\hat{N}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

□

Teorema 3.1:

Uma condição necessária e suficiente para que \hat{Z}' seja uma estimação estável de Z é que possa ser expressa como:

$$\hat{Z}'(s) = \hat{Z}(s) + Q(s)\nu(s) \tag{3.38}$$

onde $Q(s) \in RH_\infty$

Prova:

Suficiência

A interpretação de (3.38) é a de que todos os estimadores admissíveis para Z sejam dados por:

$$s\hat{x}(s) = (A - LC)\hat{x}(s) + (B - LD)u(s) + Ly(s) \quad (3.39)$$

$$\hat{z}'(s) = P\hat{x}(s) + Q(s)[y(s) - C\hat{x}(s) - Du(s)] \quad (3.40)$$

Definindo os erros $\tilde{x} = x - \hat{x}$ e $\tilde{z} = z - \hat{z}$; as dinâmicas são dadas por

$$\tilde{x}' = (A - LC)\tilde{x}$$

$$\tilde{z}' = P\tilde{x} - QC\tilde{x}$$

Considere uma condição inicial arbitrária, $\tilde{x}(0)$. Já que a matriz $A - LC$ é assintoticamente estável, o sinal \tilde{x} vai a zero exponencialmente e, conseqüentemente, \tilde{z} . Isto mostra que \tilde{z}' é uma estimação admissível.

Necessidade

As condições de linearidade e estabilidade implicam na possibilidade de $\tilde{z}'(s)$ ser expressa através de:

$$\hat{z}'(s) = \Gamma'(s)u(s) + \Lambda'(s)y(s) \quad (3.41)$$

onde $\Gamma', \Lambda' \in RH_{\infty}$. De forma similar, já que \hat{z} é estável, podemos escrever:

$$\hat{z}(s) = \Gamma(s)u(s) + \Lambda(s)y(s) \quad (3.42)$$

Assim, a função de transferência de u para $\hat{Z}' - \hat{Z}$ é:

$$T_e = (\Gamma'(s) - \Gamma(s)) + (\Lambda'(s) - \Lambda(s))N(s)M^{-1}(s) \quad (3.43)$$

onde $N(s)M^{-1}(s)$ é uma fatoração coprima pela direita (rcf) da planta.

É necessário que a função de transferência de u para $\hat{Z}' - \hat{Z}$ seja nula. Caso contrário, o erro de estimação será dependente da entrada. Assim,

$$(\Gamma'(s) - \Gamma(s))M(s) + (\Lambda'(s) - \Lambda(s))N(s) = 0 \quad (3.44)$$

Dado que $M(s)$ e $N(s)$ são coprimas em RH_∞ , vamos mostrar que todas as soluções de (3.44) podem ser expressas na forma:

$$\Gamma'(s) = \Gamma(s) - Q(s)\hat{N}(s) \quad (3.45)$$

$$\Lambda'(s) = \Lambda(s) + Q(s)\hat{M}(s) \quad (3.46)$$

onde $\hat{M}(s)$ e $\hat{N}(s)$ são as matrizes correspondentes a descrição fatorada pela esquerda da planta, como em (3.37).

Para esta finalidade, colocamos (3.45) e (3.46) na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & Q(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(s) & X(s) \\ -\hat{N}(s) & \hat{M}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma'(s) - \Gamma(s) & \Lambda'(s) - \Lambda(s) \end{bmatrix}$$

onde $X(s)$ e $Y(s)$ satisfazem a fatoração duplamente coprima de planta.

Pós-multiplicando por $\begin{bmatrix} M(s)^T & N(s)^T \end{bmatrix}^T$:

$$\begin{bmatrix} 0 & Q(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(s) & X(s) \\ -\hat{N}(s) & \hat{M}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(s) \\ N(s) \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} \Gamma'(s) - \Gamma(s) & \Lambda'(s) - \Lambda(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(s) \\ N(s) \end{bmatrix}$$

Notando que $X(s)N(s) + Y(s)M(s) = I$ (Identidade de *Bezout*) e

$$\hat{M}(s)N(s) = \hat{N}(s)M(s), \text{ temos:}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & Q(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma'(s) - \Gamma(s) & \Lambda'(s) - \Lambda(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(s) \\ N(s) \end{bmatrix}$$

chegando assim a (3.44)

$$(\Gamma'(s) - \Gamma(s))M(s) + (\Lambda'(s) - \Lambda(s))N(s) = 0$$

Substituindo (3.45) e (3.46) em (3.41):

$$\hat{z}'(s) = \Gamma(s)u(s) + \Lambda(s)y(s) + Q(s)(\hat{M}(s)y(s) - \hat{N}(s)u(s))$$

ou

$$\hat{z}'(s) = \hat{z}(s) + Q(s)v(s)$$

□

3.3.2. A parametrização do erro de estimação

Idealmente o erro de estimação em regime permanente é zero, mas isto não é verdade quando estão presentes perturbações que se mantêm durante todo o tempo. Neste caso sempre haverá uma diferença marginal entre z e \hat{z}' , cuja magnitude será dependente das características dos ruídos. Vamos considerar, então, a adição de perturbações $v_1(t)$ e $v_2(t)$ ao sistema, de forma que a descrição no espaço de estados torna-se:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Ev_1 \quad (3.47)$$

$$y = Cx + Du + Fv_2 \quad (3.48)$$

Consideramos novamente o observador particular dado por (3.31) e (3.32) e definimos o erro de estimação através de $\tilde{z} = z - \hat{z}'$ com

$$z(s) = Px(s) \quad e$$

$$\hat{z}'(s) = \hat{z}(s) + Q(s) [y(s) - C\hat{x}(s) - Du(s)] ,$$

então o erro torna-se:

$$\tilde{z}(s) = [Q(s)C - P] \hat{x}(s) - [Q(s)C - P]x(s) - Q(s)Fv_2(s)$$

$$\tilde{z}(s) = (P - Q(s)C)(x(s) - \hat{x}(s)) - Q(s)Fv_2(s) \quad (3.49)$$

Transformando (3.47) e (3.31) para a variável S :

$$(sI - A)x(s) = Bu(s) + Ev_1(s) \quad (3.50)$$

$$(sI - A + LC)\hat{x}(s) = Bu(s) + L(Cx(s) + Fv_2(s)) \quad (3.51)$$

Subtraindo (3.51) de (3.50):

$$(sI - A + LC)x(s) - (sI - A + LC)\hat{x}(s) = Ev_1(s) - LFv_2(s)$$

$$x(s) - \hat{x}(s) = (sI - A + LC)^{-1}Ev_1(s) - (sI - A + LC)^{-1}LFv_2(s)$$

(3.52)

Substituindo (3.52) em (3.49) :

$$\tilde{z}(s) = (P - Q(s)C) [(sI - A + LC)^{-1}Ev_1(s) - (sI - A + LC)^{-1}LFv_2(s)] - Q(s)Fv_2(s)$$

$$\tilde{z}(s) = (P - Q(s)C) (sI - A + LC)^{-1}Ev_1(s) - [(P - Q(s)C) (sI - A + LC)^{-1}LF + Q(s)F] v_2(s)$$

$$\tilde{z}(s) = \begin{bmatrix} (P - Q(s)C) (sI - A + LC)^{-1}E \\ -(P - Q(s)C) (sI - A + LC)^{-1}LF - Q(s)F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(s) \\ v_2(s) \end{bmatrix}$$

Finalmente temos, após algumas manipulações, a parametrização do mapeamento perturbação - erro de estimação:

$$\tilde{z}(s) = [T_1(s) - Q(s)T_2(s)] v(s) \quad (3.53)$$

onde

$$v(s) = [v_1(s)^T \quad v_2(s)^T]^T \quad (3.54)$$

e $T_1(s)$ e $T_2(s)$ correspondem às matrizes particionadas

$$T_1(s) = [P(sI - A + LC)^{-1}E \quad -P(sI - A + LC)^{-1}LF] \quad (3.55)$$

$$T_2(s) = [C(sI - A + LC)^{-1}E \quad -C(sI - A + LC)^{-1}LF + F] \quad (3.56)$$

3.3.3. Comentários

- (a) Apesar de tratarmos de sistemas contínuos, a teoria da parametrização também pode ser aplicada à sistemas discretos com a substituição de $(sI - A_L)^{-1}$ por $(zI - A_L)^{-1}$ e a matriz L é tal que os autovalores de A_L estão no interior do círculo unitário.
- (b) Note que a parametrização do erro de estimação não depende da matriz B .
- (c) **Lema 3.2:**

O mapeamento perturbação - erro de estimação é uma função afim no parâmetro Q .

Prova:

Considere o conjunto $T = \{ T_1 - QT_2 \mid Q \in RH_\infty \}$ com T_1 e $T_2 \in RH_\infty$. Seja também $\lambda \in \mathbb{R}$. Devemos mostrar que a combinação

$$\lambda T + (1 - \lambda)\tilde{T} \in T, \text{ para quaisquer } T = T_1 - QT_2$$

e $\tilde{T} = T_1 - \tilde{Q}T_2$ pertencentes ao anel RH_∞ .

Algumas manipulações levam a $T_1 - \tilde{Q}T_2$, onde

$$\tilde{Q} = \lambda Q + (1 - \lambda)\tilde{Q} \in RH_\infty.$$

□

- (d) Quando desejamos estimar uma combinação linear Px de um sistema linear e para esta finalidade empregamos a estrutura

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x} - Du)$$

$$\hat{z} = P\hat{x}$$

temos o que se denomina de *observador Identidade*.

A última expressão pode ser expressa na variável S como:

$$\hat{z}(s) = P \hat{x}(s) \quad (3.57)$$

Neste caso, o único grau de liberdade que o projetista dispõe, respeitando-se a estabilidade, está na escolha da matriz L.

No capítulo 2 tratamos de observar a referida combinação linear (Px) estabelecendo a seguinte dinâmica para o observador

$$\dot{\hat{z}} = F \hat{z} + Hu + Ly$$

desde que sejam satisfeitas as seguintes condições:

$$\begin{aligned} FP &= PA - LC \\ H &= PB - LD \end{aligned}$$

Vamos modificar esta estrutura de forma a compará-la com a estrutura do observador Identidade e com àquela desenvolvida nesta seção. Suponha o seguinte sistema dinâmico:

$$\dot{r} = R_1 r + R_2 u + R_3 y$$

Para que este seja um observador assintótico para Tx devemos ter:

$$\begin{aligned} R_1 T &= TA - R_3 C \\ R_2 &= TB - R_3 D \end{aligned}$$

Supondo que as condições anteriores se mantenham, vamos construir a observação

$\hat{z} = P \hat{x}$ da seguinte maneira (Figura 3.5):

$$\hat{z} = Jr + Uu + Vy$$

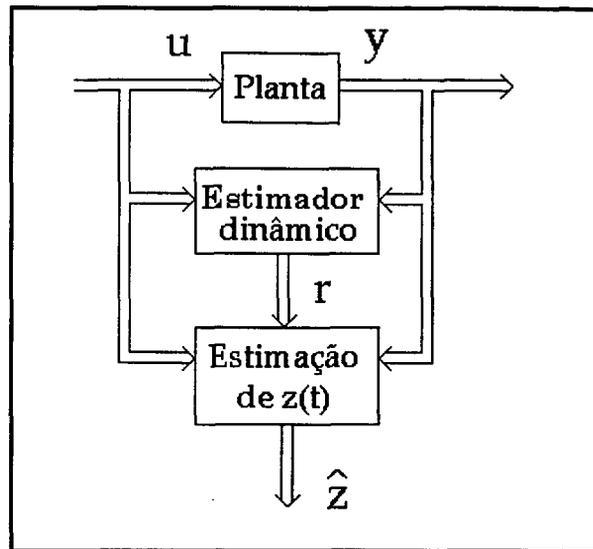


Figura 3.5. Uma estrutura para estimar $\hat{z}(t)$.

Com a estrutura assim definida, vamos analisar a diferença entre \hat{z} e Px .

Seja $r = T\hat{x}$. Desta forma:

$$\begin{aligned} Px - \hat{z} &= Px - Jr - Uu - Vy \\ &= Px - JT\hat{x} - Uu - V(Cx + Du) \\ &= (P - VC)x - JT\hat{x} - (U + VD)u \end{aligned}$$

Note que, na ausência de perturbações $x - \hat{x} \rightarrow 0$. Para que a diferença $Px - \hat{z}$ também seja assintoticamente estável, devemos ter:

$$\begin{aligned} P - VC &= JT \\ U &= -VD \end{aligned}$$

levando a

$$\begin{aligned} \hat{z} &= Jr + Uu + Vy \\ &= JT\hat{x} - VD u + Vy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (P - VC)\hat{x} - VDu + Vy \\
 &= P\hat{x} + V(y - C\hat{x} - Du)
 \end{aligned}$$

ou na variável s :

$$\hat{z}(s) = P\hat{x}(s) + V[y(s) - C\hat{x}(s) - Du(s)] \tag{3.58}$$

Um observador com a estrutura de (3.58) é denominado de *observador tipo Luenberger*. Note que esta nomenclatura se refere à estimação de uma combinação linear dos estados de um sistema. Comparando a forma do observador que estamos utilizando neste trabalho, ou seja,

$$\hat{z}(s) = P\hat{x}(s) + Q(s)[y(s) - C\hat{x}(s) - Du],$$

com o observador Identidade (3.57) e o observador tipo Luenberger (3.58), podemos tirar algumas conclusões. A diferença entre os três tipos de observadores está na seleção da matriz de parametrização. No observador Identidade a matriz de parametrização, ou matriz de ganho, é ajustada para zero (temos somente a presença do termo $P\hat{x}$). Já no observador tipo Luenberger ela é uma matriz algébrica V e, na parametrização discutida aqui, representa um sistema dinâmico $Q(s)$.

Como mencionado em [18], a forma de parametrização em $Q(s)$ fornece ao projetista mais graus de liberdade que podem ser usados para aumentar a robustez do observador.

3.3.4. Exemplo de parametrização do erro de estimação

Seja o sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.3 \end{bmatrix} v_1$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + v_2$$

Deseja-se parametrizar a classe de todos os erros de estimação para $\hat{z} = [1 \ 1] \hat{x}$.
 Primeiramente escolhemos os autovalores de $A - LC$ para $(-1, -1)$, de forma que $L = [6 \ 9]^T$.
 Assim, a parametrização é definida em termos dos seguintes sistemas estáveis:

$$T_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1.3s - 9.5}{s^2 + 2s + 1} & \frac{21 - 15s}{s^2 + 2s + 1} \end{bmatrix}$$

$$T_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{s - 1.7}{s^2 + 2s + 1} & \frac{s^2 - 4s + 4}{s^2 + 2s + 1} \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO 4

SÍNTESE DE OBSERVADORES LINEARES

4.1. Introdução

No capítulo anterior mostramos que tanto a estrutura do observador quanto o mapeamento perturbação - erro de estimação, aqui denotado por T , podem ser parametrizados. A parametrização resulta na geração de toda a classe de elementos admissíveis pela simples variação de um parâmetro livre (estável). O projetista pode, desta forma, selecionar o parâmetro que conduz o sistema a um desempenho aceitável.

Para o projeto de um controlador certas características do sinal W (entradas exógenas) são conhecidas e deseja-se encontrar a matriz de transferência de malha fechada H_{zw} de forma que as restrições, ou especificações de desempenho, colocadas sobre o sinal Z (saídas reguladas) sejam satisfeitas. As saídas reguladas contêm sinais de erro que servem para avaliação do desempenho do sistema.

O projeto de observadores utiliza um procedimento análogo, onde T e v (perturbação) desempenham os papéis de H_{zw} e W respectivamente. As especificações de desempenho são dadas, então, sobre o erro de estimação. Por fim, obtido o parâmetro ótimo Q , substitui-se seu valor na expressão para a parametrização da estrutura do observador.

Neste capítulo serão apresentadas e propostas diferentes técnicas para o projeto (síntese) de observadores a partir de parametrizações.

4.2. Os diferentes critérios de otimização

4.2.1. Critério H_∞

Note que podemos ver o mapeamento T como um filtro e, sendo assim, os critérios de otimização H_∞ , H_2 e L_1 para observadores podem ter interpretações semelhantes às aquelas apresentadas na seção 2.5. Por exemplo, quando desejamos minimizar a energia do erro de estimação na presença da pior entrada de perturbação possível, tendo energia não maior que a unidade, estamos querendo minimizar a norma H_∞ de T [19], [20]. Este é um exemplo do “paradigma de pior caso”, que aparece quando distribuições de probabilidade não são atribuídas às perturbações. O que se faz então é forçar a satisfação das especificações de desempenho para todas as perturbações pertencentes a um dado conjunto convenientemente caracterizado (neste caso, sinais de energia unitária).

Na verdade, o critério H_∞ não é típico em aplicações de controle [21] já que, como mostrado na Figura 4.1, dois sinais podem possuir mesmo conteúdo de energia e mesmo assim apresentarem diferentes amplitudes (um atuador poderia ser destruído).

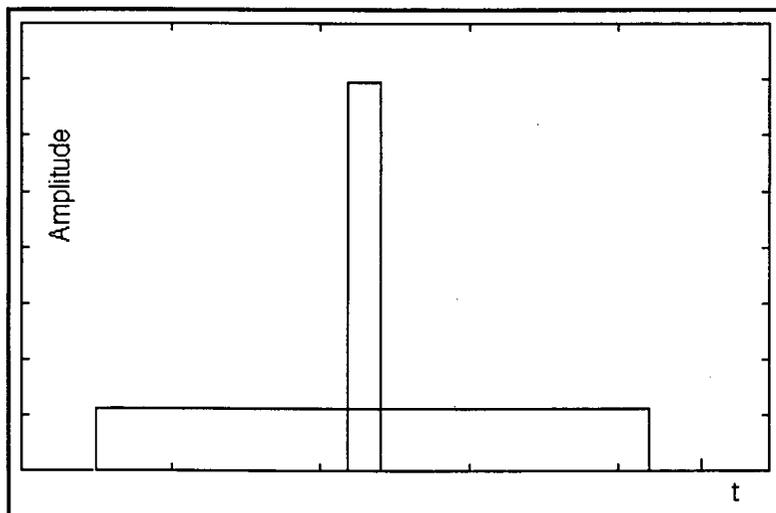


Figura 4.1. Sinais de mesma energia

Quando a solução H_∞ de um problema existe e é obtida pela minimização de um mapeamento entrada-saída T , diz-se que a solução é ótima. Quando restrições menos severas são impostas à solução e desejamos apenas obter $\|T\|_\infty \leq \gamma$, diz-se que o problema é sub-ótimo e a solução obtida é sub-ótima.

Neste caso, o problema sub-ótimo pode também ser interpretado da seguinte maneira: Obter $\|T v\|_{\text{RMS}} \leq \gamma$, para todo v com $\|v\|_{\text{RMS}} \leq 1$. Aqui, $\|\cdot\|_{\text{RMS}}$ representa a semi-norma de valor médio quadrático (*root mean square*) para sinais vetoriais.

4.2.2. Critério H_2

Como mencionamos anteriormente, a interpretação estocástica do critério H_2 diz respeito à minimização da covariância do erro de estimação se a perturbação é um ruído branco de média nula. A dificuldade prática neste caso é encontrar as funções distribuições de probabilidade (pdf) dos processos. A Figura 4.2 exemplifica uma função membro ou realização de um processo ruído branco com média nula. Como a correspondente pdf de primeira ordem é gaussiana, a probabilidade de encontrarmos magnitudes altíssimas é muito pequena mas não nula. Novamente se as considerações de desempenho envolvem restrições em amplitude, talvez esta não seja a melhor forma de caracterizar as entradas de perturbações.

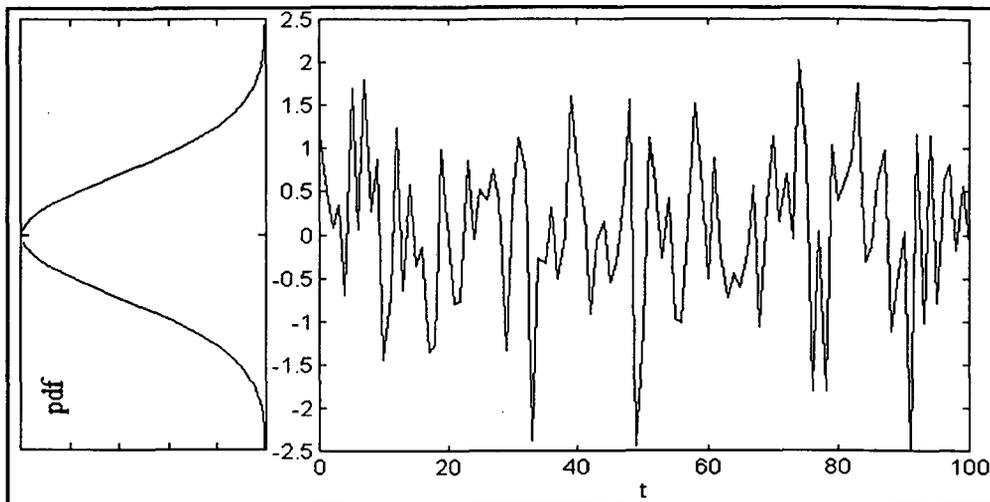


Figura 4.2. Uma realização de um processo ruído branco (limitado em banda).

Podemos também formular problemas sub-ótimos para o caso H_2 . Desta forma, o problema $\|T\|_2 \leq \gamma$ pode ter a seguinte interpretação: Obter $\|T v\|_{\text{RMS}} \leq \gamma$ onde v é um ruído branco.

4.2.3. Critério L_1

Em muitas aplicações reais, as perturbações e ruídos são persistentes, isto é, atuam enquanto o sistema está em operação. Tais sinais possuem energia ilimitada (norma l_2 infinita). Geralmente nestes casos é possível obter estimativas razoáveis para a máxima amplitude, ou norma l_∞ , das perturbações.

Em geral assume-se que a perturbação é a saída de um filtro linear e invariante no tempo tendo em sua entrada um sinal com magnitude menor ou igual à unidade [21]:

$$v = Wd, \quad \|d\|_\infty \leq 1$$

Um requisito essencial para um observador de estado é que a magnitude do erro de estimação correspondente se aproxime assintoticamente de zero. Se perturbações persistentes são adicionadas ao modelo do sistema, então este requisito não será cumprido. Neste caso deseja-se que a amplitude do erro de estimação seja mínima, ou seja, que um ganho induzido $l_\infty - l_\infty$ seja minimizado. Note então que o critério de otimização L_1 desempenha um papel muito importante na síntese de observadores de estado, apesar de conduzir normalmente a soluções de ordem elevada em $Q(s)$ [22].

4.3. Síntese H_∞ a partir do problema *model matching*

4.3.1. Formulação

Nesta seção apresentaremos uma técnica moderna para a síntese H_∞ de observadores de estado a partir de uma parametrização Q . Esta técnica caracteriza-se pelo uso de descrições no espaço de estados para as matrizes $T_1(s)$ e $T_2(s)$ bem como o uso de equações de Riccati no processo de resolução. Em abordagens tradicionais para controladores [23] o tratamento é dado quase que exclusivamente no domínio da frequência.

A motivação para o emprego do presente método na síntese de estimadores de estado veio de [24]. Lá é resolvido o problema *model matching* para a filtragem H_∞ . Devemos notar que, uma vez obtida a forma parametrizada $T_1(s) - Q(s)T_2(s)$, a otimização segundo um dado critério é independente do problema, ou seja, é a mesma para o projeto de controlador ou de observador.

Seja $H(s)$ uma matriz de transferência com uma realização dada por:

$$H(s) = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right]$$

A última matriz da expressão anterior é a representação de uma estrutura de dados tal que, o bloco (i, j) de $H(s)$ tem a seguinte realização:

$$H_{ij}(s) = C_i(sI - A)^{-1}B_j + D_{ij}$$

Suponha uma matriz $U(s)$ com a mesma dimensão de $H_{22}^T(s)$, então a transformação fracional linear de $H(s)$ e $U(s)$ é definida através de:

$$F(H, U) = H_{11} + H_{12}U(I - H_{22}U)^{-1}H_{21}$$

RH_∞ denotará o conjunto de todas as matrizes de transferência analíticas no semi-plano direito fechado. $\text{BH}_\infty = \{U(s) \in \|U\|_\infty \leq 1\}$ denota a esfera unitária em RH_∞ .

$M^{1/2}$ denota a raiz quadrada simétrica de uma matriz M positiva semidefinida.

A matriz $M^{1/2}$ pode ser determinada utilizando-se decomposição espectral: Seja $M = U\Lambda U^T$, então:

$$M^{1/2} = U\Lambda^{1/2}U^T$$

onde $\Lambda = \text{diag} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \}$ e $\Lambda^{1/2} = \text{diag} \{ \sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n} \}$

(λ denotam os autovalores de M)

A matriz D_\perp , denominada de complemento ortogonal da matriz D , é tal que:

$$\begin{bmatrix} D & D_\perp \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} D \\ D_\perp \end{bmatrix} \text{ é unitária.}$$

Uma matriz unitária U é uma matriz quadrada cujas colunas formam uma base ortonormal de forma que $U^*U = UU^* = I$.

A abordagem aqui apresentada pode ser aplicada à síntese de observadores sobre o critério H_∞ quando a matriz F em (3.48) é igual à matriz Identidade. O resultado para o problema *model matching* H_∞ será transcrito de [24] em uma notação geral. Posteriormente serão feitas as substituições para a resolução do problema de nosso interesse.

Considere a parametrização $T(s) = M(s) - Q(s)N(s)$, sendo que $M(s)$ e $N(s)$ possuem a seguinte realização combinada no espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} M(s) \\ N(s) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{array} \right] \quad (4.1)$$

com o par (A, B) estabilizável, o par (A, C_2) detectável e D_2 linha ortogonal (i.e. $D_2 D_2^T = I$) com complemento ortogonal $D_{2\perp}$. Para todo $Q(s)$, definimos um erro *model matching* associado

$$E(s) = M(s) - Q(s)N(s) \quad (4.2)$$

O problema *model matching* H_∞ pode ser declarado da seguinte forma: Dado um número real $\gamma \geq 0$, determine $Q(s) \in RH_\infty$ de forma que

$$\|E\|_\infty \leq \gamma \quad (4.3)$$

Diz-se que γ é factível se existe um $Q(s) \in RH_\infty$ para o qual a equação (4.3) é satisfeita. A seguir é fornecido um procedimento algorítmico para se obter $E(s)$ e $Q(s)$.

Para qualquer $\gamma \geq 0$ defina

$$R = \gamma^2 I - D_1 D_{2\perp}^T D_{2\perp} D_1^T \quad (4.4)$$

$$Z = - \left[\begin{array}{c} A - B D_2^T C_2 \\ + B D_{2\perp}^T D_{2\perp} D_1^T R^{-1} (C_1 - D_1 D_2^T C_2) \end{array} \right]^T \quad (4.5)$$

$$W = B D_{2\perp}^T (I + D_{2\perp} D_1^T R^{-1} D_1 D_{2\perp}^T) D_{2\perp} B^T \quad (4.6)$$

$$V = C_2^T C_2 - (C_1 - D_1 D_2^T C_2)^T R^{-1} (C_1 - D_1 D_2^T C_2) \quad (4.7)$$

Seja M a única solução estabilizante (*) da ARE

$$MZ^T + ZM - MWM + V = 0 \quad (4.8)$$

Então o problema (4.3) tem solução, isto é, γ é factível, se e somente se $M \geq 0$.

Suponha $M \geq 0$ com deficiência r de posto. Desta forma, existe uma transformação ortogonal \tilde{T} tal que

$$\tilde{T}^T (Y^{1/2} M Y^{1/2}) \tilde{T} = \begin{bmatrix} \hat{M} & 0 \\ 0 & 0_r \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Onde $Y (\geq 0)$ é a única solução estabilizante da equação algébrica de Riccati (ARE):

$$\begin{aligned} (A - B D_2^T C_2)Y + Y(A - B D_2^T C_2)^T \\ - Y C_2^T C_2 Y + B D_{2\perp}^T D_{2\perp} B^T = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Aplicamos uma transformação de similaridade $T = Y^{1/2} \tilde{T}$ à equação (4.1) e particionamos as matrizes resultantes em conformidade com (4.10) de forma a se obter

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

(*) Solução estabilizante de uma Equação Algébrica de Riccati (ARE)
 $A^T X + XA + XRX + Q$: É uma X real e simétrica tal que os autovalores de $A + RX$ pertencem ao semi-plano esquerdo.

Também defina

$$S_1 = [\hat{M}^{-1}(C_{11} - D_1 D_2^T C_{21})^T + B_1 D_{2\perp}^T D_{2\perp} D_1^T] R^{-1/2} \quad (4.12)$$

$$S_2 = (C_{12} - D_1 D_2^T C_{22})^T R^{-1/2} \quad (4.13)$$

Então, as soluções de (4.3) podem ser expressas através de:

$$E(s) = F(H_e(s), U(s)) \quad (4.14)$$

e

$$Q(s) = F(H_Q(s), U(s)) \quad (4.15)$$

onde

$$H_e(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A_{11} - B_1 D_2^T C_{21} - \hat{M}^{-1} C_{21}^T C_{21} & B_1 D_{2\perp}^T D_{2\perp} - \hat{M}^{-1} C_{21}^T D_2 & S_1 \\ \hline C_{11} - D_1 D_2^T C_{21} & D_1 D_{2\perp}^T D_{2\perp} & -R^{1/2} \\ C_{21} & D_2 & 0 \end{array} \right] \quad (4.16)$$

$$H_Q(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A_{11} - B_1 D_2^T C_{21} - \hat{M}^{-1} C_{21}^T C_{21} & B_1 D_2^T + \hat{M}^{-1} C_{21}^T & S_1 \\ \hline C_{11} - D_1 D_2^T C_{21} & D_1 D_2^T & -R^{1/2} \\ C_{21} & -I & 0 \end{array} \right] \quad (4.17)$$

com $U(s) \in BH_\infty$ satisfazendo

$$U(s)C_{22} - S_2^T = 0 \quad (4.18)$$

A solução pode ser substancialmente simplificada se \hat{M} é de posto cheio, isto é, $r = 0$. Neste caso a equação de compressão (4.9) e a mudança de base (4.11) não são necessárias.

Portanto não há necessidade de resolver a ARE (4.10). As equações (4.12) - (4.18) permanecem válidas depois das substituições

$$A_{11} = A, B_1 = B, C_{11} = C_1, C_{21} = C_2, \hat{M} = M \quad (4.19)$$

A condição para a equação (4.18) pode ser ignorada e qualquer $U(s) \in BH_\infty$ é válida.

É importante ressaltar que se γ é sub-ótimo, então M é necessariamente de posto cheio e a solução simplificada se aplica. Para $\gamma = \gamma^*$ (ótimo), M é deficiente em posto. A seguir faremos as substituições necessárias para o projeto do observador.

4.3.2. Síntese do observador sobre o critério H_∞

Considere o sistema linear descrito pelas equações (3.47)-(3.48) onde $F = I$ e o problema:

$$\min_{Q \in RH_\infty} \|T\|_\infty \quad (4.20)$$

onde $T(s) = T_1(s) - Q(s)T_2(s)$ é a matriz de transferência da perturbação para o erro de estimação, com $T_1(s)$ e $T_2(s)$ dadas por (3.55) e (3.56), respectivamente.

Note que, substituindo a minimização em (4.20) por uma limitação em norma, obtemos o problema sub-ótimo:

$$\|T\|_\infty \leq \gamma \quad (4.21)$$

Utilizaremos a formulação anterior para encontrar um filtro $Q(s)$ tal que (4.21) é satisfeita.

A realização combinada de $T_1(s)$ e $T_2(s)$ no espaço de estados é:

$$\begin{bmatrix} T_1(s) \\ T_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(sI - A + LC)^{-1}E & -P(sI - A + LC)^{-1}L \\ C(sI - A + LC)^{-1}E & -C(sI - A + LC)^{-1}L + I \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c|cc} A_L & E & -L \\ \hline P & 0 & 0 \\ C & 0 & I \end{array} \right]$$

com $A_L = A - LC$

Através da notação de (4.1), temos: $D_2 = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$, cujo complemento ortogonal é: $D_{2\perp} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}$. As expressões (4.5) a (4.8) tornam-se

$$\begin{aligned} R &= \gamma^2 I \\ Z &= -A^T \\ W &= EE^T \end{aligned}$$

$$V = C^T C - \gamma^{-2} P^T P,$$

e as equações (4.4) e (4.9):

$$AY + YA^T - YC^T C Y + EE^T = 0 \quad (4.22)$$

$$-MA - A^T M - MEE^T M + C^T C - \gamma^{-2} P^T P = 0 \quad (4.23)$$

Para um γ suficientemente grande, garante-se que a solução estabilizante M de (4.23) seja positiva semi-definida (≥ 0). Para γ sub-ótimo, M é de posto cheio, e nesse caso a solução em $Q(s)$ para o problema (4.21) é dada por:

$$Q(s) = F(H_Q(s), U(s)) \quad (4.24)$$

onde $U(s)$ é qualquer sistema satisfazendo $\|U\|_{\infty} \leq 1$ e

$$H_Q(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A - KC & K - L & 1/\gamma M^{-1} P^T \\ \hline P & 0 & -\gamma I \\ C & -I & 0 \end{array} \right] \quad (4.25)$$

com $K = M^{-1} C^T$. Desta forma temos:

$$H_{Q11}(s) = P(sI - A_Q)^{-1} (K - L)$$

$$H_{Q12}(s) = 1/\gamma P(sI - A_Q)^{-1} M^{-1} P^T - \gamma I$$

$$H_{Q21}(s) = C(sI - A_Q)^{-1} (K - L) - I$$

$$H_{Q22}(s) = 1/\gamma C(sI - A_Q)^{-1} M^{-1} P^T$$

onde $A_Q = A - KC$

Se M é deficiente em posto, é necessário resolver (4.22) para a solução estabilizante Y e realizar as operações (4.9) e (4.11).

Para encontrar o $Q(s)$ ótimo ($Q^*(s)$ ou aquele que minimiza $\|T_1 - QT_2\|_{\infty}$) procuramos resolver o problema $\|T_1 - QT_2\|_{\infty} \leq \gamma$ para o menor γ possível (γ^*) através de uma pesquisa binária sobre um intervalo.

Indicamos [25] como uma referência à outras abordagens em estimação H_{∞} .

4.3. 3. Síntese H_∞ para o caso discreto

Para o caso discreto, o espaço de Lebesgue l_∞ consiste de todas as funções F mensuráveis definidas sobre o círculo unitário de tal forma que:

$$\|F\|_\infty = \sup \{ \max \delta(F(z)) : z \in \partial D \}$$

$$\partial D = \{ z : |z| \leq 1 \}$$

Uma forma de tratar problemas discretos é usar a transformação bilinear

$$z = \frac{1+s}{1-s} \tag{4.26}$$

que relaciona funções analíticas em um semi-plano complexo àquelas analíticas no disco unitário. A norma H_∞ de uma função de transferência é invariante sobre a transformação (4.26). Desta forma poderíamos utilizar a teoria desenvolvida para a síntese de estimadores contínuos para o projeto de estimadores discretos. Um estimador para o caso contínuo é determinado e adaptado para o caso discreto utilizando-se a transformação inversa.

4.3.4. Exemplo 1

Considere o sistema observável a seguir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \end{bmatrix} v_1$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + v_2$$

Desejamos estimar uma combinação linear do estado $X = [x_1 \ x_2]^T$, tal que:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.067 \end{bmatrix}$$

Como a matriz A já é estável podemos fazer $L = 0$. O método apresentado pode ser aplicado já que o par (A_L, B) , onde $B = \begin{bmatrix} E & -L \end{bmatrix}$, é estabilizável.

A fim de determinarmos o menor γ factível (γ ótimo) em $\|T_1 - QT_2\|_\infty \leq \gamma$, desenvolvemos uma rotina Matlab[®] que, partindo de $\gamma = 1$, executa uma pesquisa binária (ou método da bisecção) até que a matriz simétrica M , solução estabilizante de

$$-MA - A^T M - MEE^T M + C^T C - \gamma^{-2} P^T P = 0 ,$$

seja deficiente em posto. A rotina é mostrada a seguir

% Rotina MATLAB para a determinação de um 'gama' ótimo

```
cont= 0;          % inicializações
gama_inf = 0;
gama_sup = 1;
A2 = - A;
E2 = E*E';

while cont <= 100,    % laço principal

    gama = (gama_inf + gama_sup) / 2;
    Q = C'*C - (gama^(-2))*P'*P;
    K = 0;
    eval('are(A2, E2, Q)', 'K = 1');

    if K
        gama_inf = gama;
    else
        M = are(A2, E2, Q);
        D = eig(M);
        Z = 0;

        for i = 1:size(M, 1)    % verificação de  $M \geq 0$ 
            if D(i) < 0
                Z = 1;
            end
        end

        if Z
            gama_inf = gama;
        else
            gama_sup = gama;
        end

    end

    if rank(M) ~= size(M, 1)    % critério de parada
        break;
    end

    cont = cont + 1;

end
```

A verificação de um γ factível leva em conta o seguinte fato: $M \geq 0$ se e somente se os autovalores de M são não negativos. A partir deste ponto deveríamos aplicar as transformações (4.9) e (4.11) de forma a se determinar um Q ótimo. Para este exemplo não é necessário aplicar tais transformações, já que M somente será deficiente em posto para um número muito grande de iterações sem resultar em um aumento significativo na precisão. Desta forma, para 100 iterações, temos:

$$\gamma^* = 0.209743$$

$$M = \begin{bmatrix} 0.220000 & 0.045714 \\ 0.045714 & 0.161632 \end{bmatrix}$$

Determinaremos o parâmetro Q ótimo para dois filtros U , onde

$$Q(s) = F(H_Q(s), U(s))$$

Para $U(s) = 0$:

$$Q(s) = \frac{0.34889 s + 0.34889}{s^2 + 11.6707 s + 3.7195}$$

Para $U(s) = \frac{1}{s+1}$:

$$Q(s) = \frac{0.558633 s^4 + 7.705989 s^3 + 16.550862 s^2 + 11.738226 s + 2.33472}{s^5 + 24.341463 s^4 + 165.323049 s^3 + 214.02201 s^2 + 129.155837 s + 24.890401}$$

A resposta em frequência para ambos os casos é mostrada na Figura 4.3:

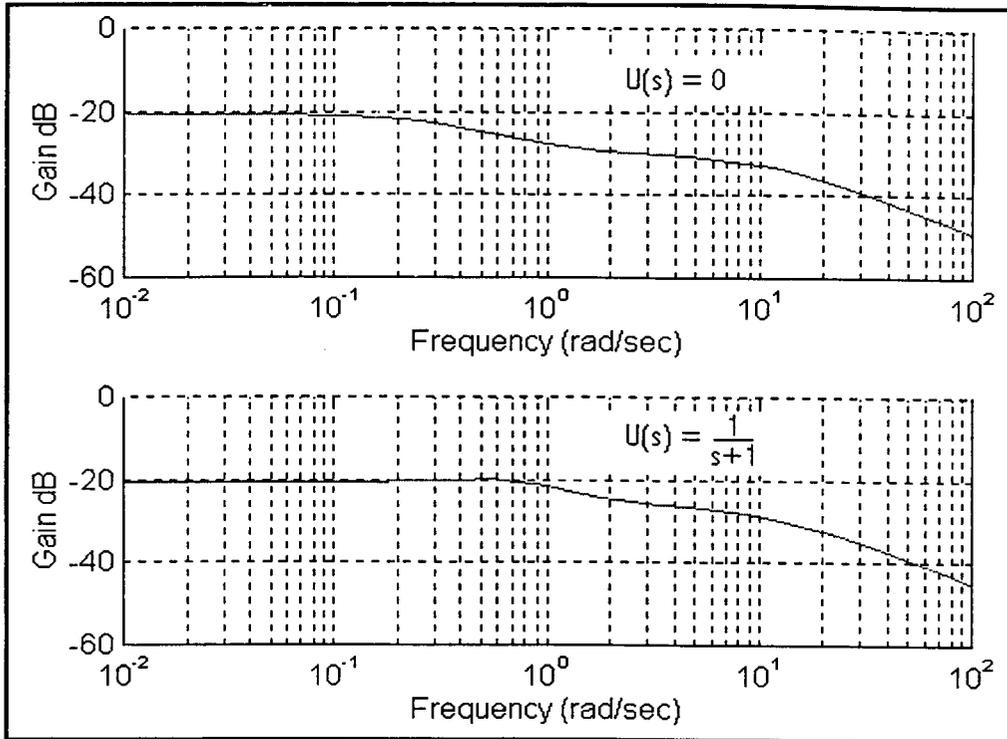


Figura 4.3. Resposta em frequência de $Q(s)$.

A liberdade na escolha de $U(s) \in \text{BH}_\infty$ pode ser usada para satisfazer algum critério adicional de projeto. Em [24] esta idéia é empregada no sentido de minimizar a entropia do mapeamento perturbação - erro de estimação. Esta referência, como já mencionamos, trata de filtragem H_∞ ; não considerando observação de estados.

4.3.5. Exemplo 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 2 \quad 0.5], E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F = 1, P = I$$

Como P é uma matriz Identidade, deseja-se estimar o próprio vetor de estados. Os autovalores da matriz A são 1.0525, -4.2753 e 8.2228. Escolhendo os autovalores de $A - LC$ para -1, -2 e -3, o vetor de ganho para o observador nominal será:

$$L = \begin{bmatrix} -0.3514 \\ 5.4633 \\ 0.8498 \end{bmatrix}$$

Utilizando a rotina mencionada no exemplo anterior ($\text{gama_sup} = 3$), obtemos, após 35 iterações:

$$\gamma = 2.77225983990138 \text{ e}$$

$$M = \begin{bmatrix} 8.6516... & -8.8834... & 27.8752... \\ -8.8834... & 9.7866... & -29.4208... \\ 27.8752... & -29.4208... & 90.7721... \end{bmatrix}$$

Como posto (M) = 2, devemos realizar a compressão indicada em (4.9) e as transformações em (4.11) a fim de determinarmos o Q ótimo. A solução estabilizante de

$$AY + YA^T - YC^T C Y + EE^T = 0$$

$$\text{é} \quad Y = \begin{bmatrix} 12.3035 & -6.4034 & -5.8076 \\ -6.4034 & 7.1327 & 4.2511 \\ -5.8076 & 4.2511 & 3.1493 \end{bmatrix}$$

$$\text{e} \quad Y^{1/2} = \begin{bmatrix} 3.1422 & -0.9525 & -1.2340 \\ -0.9525 & 2.2865 & 0.9987 \\ -1.2340 & 0.9987 & 0.7931 \end{bmatrix}$$

Para encontrarmos \hat{M} e \tilde{T} , partimos da equação (4.9):

$$\tilde{T}^T (Y^{1/2} M Y^{1/2}) \tilde{T} = \begin{bmatrix} \hat{M} & 0 \\ 0 & 0_r \end{bmatrix}$$

Já que \tilde{T} é ortogonal ($\tilde{T}^T = \tilde{T}^{-1}$), encontramos:

$$\tilde{T} \begin{bmatrix} \hat{M} & 0 \\ 0 & 0_r \end{bmatrix} \tilde{T}^T = Y^{1/2} M Y^{1/2}$$

Podemos interpretar esta última expressão como uma decomposição em valores singulares (svd) da matriz conhecida $Y^{1/2} M Y^{1/2}$. Assim:

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} 0.9961 & 0 \\ 0 & 0.9743 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{T} = \begin{bmatrix} 0.4429 & -0.4188 & 0.7928 \\ -0.2053 & -0.9081 & -0.3650 \\ 0.8728 & -0.0011 & -0.4881 \end{bmatrix}$$

De forma que

$$T = Y^{1/2} \tilde{T} = \begin{bmatrix} 0.5100 & -0.4497 & 3.4411 \\ -0.0195 & -1.6784 & -2.0773 \\ -0.0593 & -0.3909 & -1.7300 \end{bmatrix}$$

As transformações indicadas em (4.11) levam a:

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} -0.1174 & -38.3485 & -15.6848 \\ 0.6451 & -8.3028 & -0.2955 \\ \hline 0.3009 & 3.1973 & 2.4202 \end{array} \right]$$

$$T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 2.9445 & 9.3364 \\ 0.1258 & 4.0737 \\ \hline -0.1293 & -0.7493 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 0.5100 & -0.4497 & 3.4411 \\ -0.0195 & -1.6784 & -2.0773 \\ -0.0593 & -0.3909 & -1.7300 \\ \hline 0.4413 & -4.0020 & -1.5785 \end{array} \right]$$

e

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0.1847 & -0.0071 & -0.0215 \\ -0.1665 & -0.6214 & -0.1447 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 1.2413 & -0.7493 & -0.6240 \end{bmatrix}$$

O sistema $U(s)$ pode ser calculado através de (4.18), ou:

$$U(s)C_{22} - S_2^T = 0$$

Como C_{22} é escalar, podemos fazer:

$$U(s) = (1 / C_{22}) S_2^T$$

$$U(s) = \begin{bmatrix} -0.7864 \\ 0.4747 \\ 0.3953 \end{bmatrix}, \quad \text{com } \|U\|_\infty = 1$$

Finalmente podemos determinar o parâmetro Q ótimo:

$$Q(s) = \frac{1}{s^2 + 12.0562 s + 33.2128} \begin{bmatrix} -2.1801 s^2 - 13.3735 s - 20.5405 \\ 1.3160 s^2 + 10.5731 s + 21.5765 \\ 1.0959 s^2 + 8.5652 s + 21.2000 \end{bmatrix}$$

4.4. Síntese H_2 a partir do problema *model matching*

4.4.1. Formulação

Já foi mencionado que o estabelecimento do observador como um filtro de *Kalman* corresponde ao projeto (otimização) sobre o critério H_2 . Nesta seção, é proposta uma forma de minimização da norma $\|T\|_2$ quando o mapeamento T é discreto (ou discretizado) e é dado na forma parametrizada:

$$T(z) = T_1(z) - Q(z)T_2(z) \quad (4.27)$$

A formulação presente considera a interpretação determinística para a norma H_2 , ou seja, $\|T\|_2^2$ corresponde à soma dos quadrados das normas l_∞ das respostas aos impulsos aplicados em cada canal de perturbação.

Diz-se que problemas envolvendo a minimização de um funcional de (4.27) são de dimensão infinita. Isto significa que as entradas da matriz parâmetro Q podem assumir quaisquer valores no anel \mathbb{RH}_∞ . Desta forma, o método de resolução a ser empregado deverá realizar uma extensa busca pelos valores possíveis, a fim de encontrar um Q ótimo.

A proposta é resolver o problema numericamente, utilizando uma aproximação do problema de dimensão infinita, onde Q é restringido a um espaço de dimensão finita. O procedimento é conhecido como aproximação de *Ritz* [26]. Pode ser aplicado também a sistemas contínuos, mas apresenta simplificações consideráveis para o caso discreto.

Seja:

$$Q = \sum_{i=1}^L x_i Q_i$$

onde $x_i \in \mathbb{R}$ e Q_i são matrizes de transferência estáveis e fixas.

Por exemplo, se Q é um sistema de uma entrada, uma saída (SISO), então poderíamos tomar $q_i(k) = \delta(k-i)$, onde q_i representa a resposta impulsiva de Q_i . Desta forma, podemos interpretar Q como um filtro FIR (*finite impulse response*) de coeficientes x_i . Chamaremos as componentes de $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_L]^T$ de variáveis de decisão.

O problema padrão de dimensão finita em \mathbb{R}^L é:

$$\min_{x \in \Omega} f(x)$$

$$\text{onde } f(x) = \phi \left(\sum_{i=1}^L x_i Q_i \right), \quad \Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^L : \sum_{i=1}^L x_i Q_i \text{ é estável} \right\} \text{ e } \phi(\cdot) \text{ é um}$$

funcional linear.

Por simplicidade consideramos Q como um sistema SISO ; e neste caso as variáveis de decisão constituem-se na sua resposta ao impulso, ou seja:

$$q(k) = \begin{cases} x_k, & k = 0, 1, \dots, L-1 \\ 0, & k \geq L \end{cases}$$

onde $q(\cdot)$ é a resposta ao impulso do filtro Q .

Tomamos $T(z) = T_1(z) - Q(z)T_2(z)$. Já que consideramos sempre dois sinais de perturbação, escrevemos $T(z)$ na forma particionada:

$$T(z) = \begin{bmatrix} T_{11}(z) & T_{12}(z) \end{bmatrix} - Q(z) \begin{bmatrix} T_{21}(z) & T_{22}(z) \end{bmatrix}$$

No domínio do tempo, temos:

$$t(k) = \begin{bmatrix} t_{11}(k) & t_{12}(k) \end{bmatrix} - x_k * \begin{bmatrix} t_{21}(k) & t_{22}(k) \end{bmatrix}$$

onde $*$ denota o operador de convolução discreta.

onde * denota o operador de convolução discreta.

Desenvolvendo a convolução:

$$t(k) = \begin{bmatrix} t_{11}(k) & t_{12}(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{L-1} x_j t_{21}(k-j) & \sum_{j=0}^{L-1} x_j t_{22}(k-j) \end{bmatrix}$$

A norma l_2 para um sinal escalar $u(k)$ é definida como: $\left[\sum_{i=0}^{\infty} u^2(i) \right]^{1/2}$

Aplicando a definição de norma H_2 para sistemas :

$$\| T \|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(t_{11}(k) - \sum_{j=0}^{L-1} x_j t_{21}(k-j) \right)^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(t_{12}(k) - \sum_{j=0}^{L-1} x_j t_{22}(k-j) \right)^2$$

ou

$$\| T \|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left(t_{11}(k) - \sum_{j=0}^{L-1} x_j t_{21}(k-j) \right)^2 + \left(t_{12}(k) - \sum_{j=0}^{L-1} x_j t_{22}(k-j) \right)^2 \right\}$$

(4.28)

Já que estamos tratando o caso discreto podemos formar listas com os resultados das simulações das respostas ao impulso t_{ij} conhecidas. Quanto maior a precisão desejada na minimização de $\| T \|_2$, maior deverá ser o número de entradas nestas listas (e maior será o esforço computacional para a solução). Desta forma temos um problema quadrático sem restrições (*unconstrained*) nas variáveis x_i . Se $0 \leq k \leq (L - 1)$, então a expressão (4.28) pode ser colocada na seguinte forma cônica:

$$\| T \|_2^2 = x^T A x - b^T x + d$$

$$\| T \|_2 = \sqrt{x^T A x - b^T x + d} \quad (4.29)$$

onde $x = [x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{L-1}]^T$,

A é uma matriz simétrica,

b é um vetor constante e

d é um escalar.

É fato conhecido da análise matricial que, se A é uma matriz quadrada, então:

$$\frac{\partial}{\partial x} x^T A x = A x + A^T x$$

Quando A é simétrica, temos a simplificação:

$$\frac{\partial}{\partial x} x^T A x = 2 A x$$

A minimização de $\|T\|_2$ pode ser atingida derivando-se (4.29) em relação a x e igualando-se o resultado a zero. Assim:

$$\frac{2 A x - b}{2\sqrt{x^T A x - b^T x + d}} = 0$$

E o vetor ótimo que leva a $\min \|T\|_2$ pode ser expresso através de:

$$x^* = \frac{1}{2} A^{-1} b$$

Observação: Dada a natureza aproximada das soluções, obtidas através da utilização desta técnica, devemos interpretar com cuidado a designação de filtro (Q) ótimo.

4.4.2. Exemplo

Considere o sistema escalar contínuo:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -10x + u + v_1 \\ y &= x + v_2\end{aligned}$$

De acordo com a notação da seção 3.23, temos: $P = 1$, $E = 1$ e $F = 1$. O sistema é completamente observável e como também é estável, podemos escolher $L = 0$. Assim, a parametrização torna-se:

$$T(s) = T_1(s) - Q(s)T_2(s)$$

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+10} & 0 \end{bmatrix} - Q(s) \begin{bmatrix} \frac{1}{s+10} & 1 \end{bmatrix}$$

No espaço de estados, temos, usando notação compacta :

$$\begin{aligned}T_1(s) &= (-10, [1 \ 0], 1, [0 \ 0]) \\ T_2(s) &= (-10, [1 \ 0], 1, [0 \ 1])\end{aligned}$$

Realizando a discretização de $T_1(s)$ e $T_2(s)$ pelo método de *Tustin* e taxa de amostragem de 0.1s, temos:

$$\begin{aligned}T_1(z) &= (0.3333, [0.6667 \ 0], 0.0667, [0.0333 \ 0]) \\ T_2(z) &= (0.3333, [0.6667 \ 0], 0.0667, [0.0333 \ 1])\end{aligned}$$

As respostas ao impulso correspondentes a $T_{11}(z) = T_{21}(z)$ e $T_{22}(z)$ aparecem nas Figuras 4.4 e 4.5, respectivamente. Note que $T_{12}(z) \equiv 0$ e assim também será a sua resposta ao impulso $t_{12}(k)$.

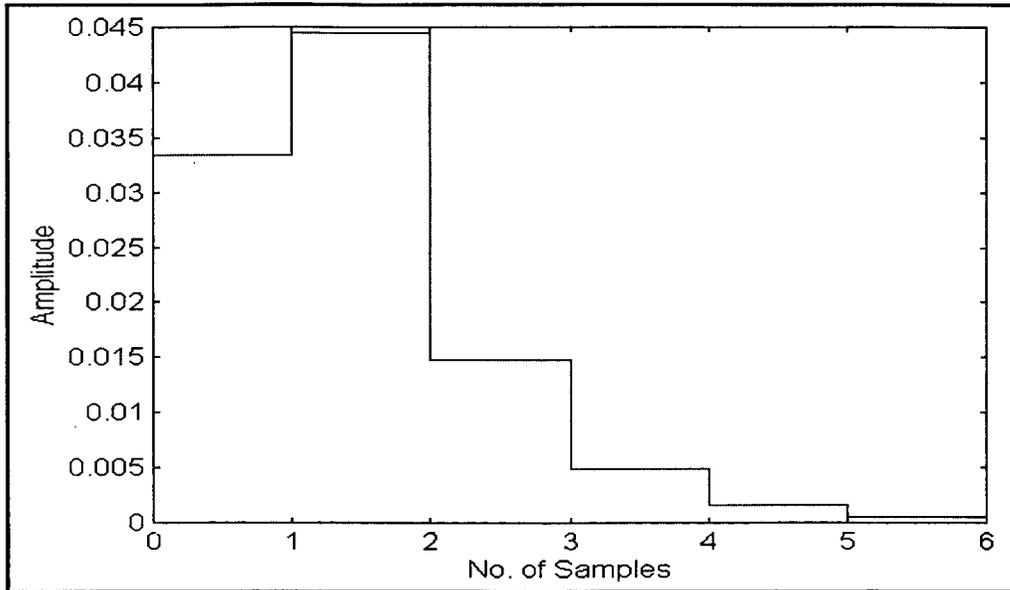


Figura 4.4. Resposta ao impulso $t_{11}(k)$ ($t_{21}(k)$).

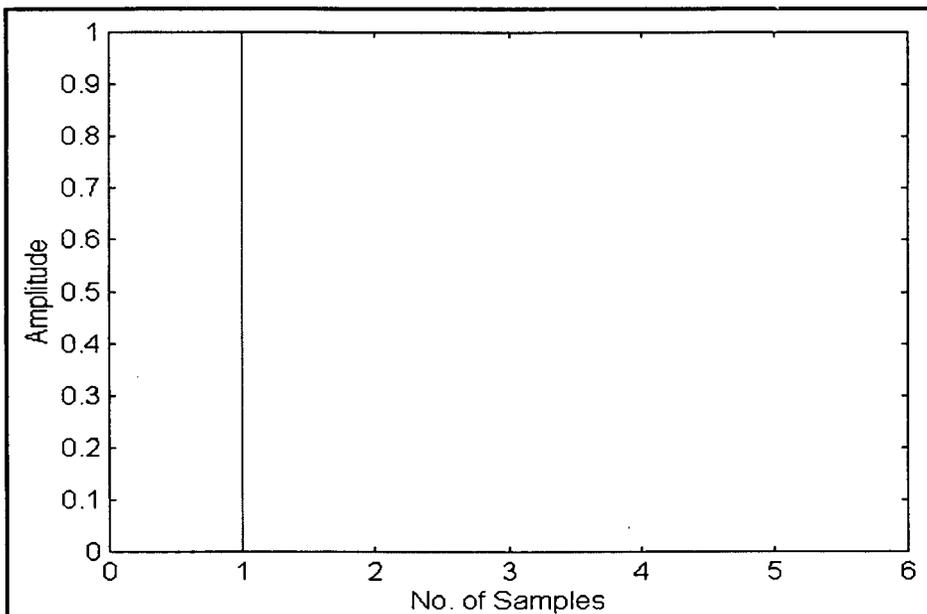


Figura 4.5. Resposta ao impulso $t_{22}(k)$.

Considerando as simplificações que as específicas respostas t_{ij} proporcionaram, a expressão (4.28) torna-se:

$$\|T\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left(t_{11}(k) - \sum_{j=0}^{L-1} x_j t_{11}(k-j) \right)^2 + \left(\sum_{j=0}^{L-1} x_j t_{22}(k-j) \right)^2 \right\}$$

Para demonstrar a aplicação do método tomamos as 5 amostras iniciais das respostas t_{ij} . Também consideramos $L = 5$. Efetuando os cálculos intermediários, a expressão anterior pode ser escrita na forma de (4.29), onde:

$$x = [x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$$

$$b = [6.979e-3 \ 4.657e-3 \ 1.622e-3 \ 742.12e-6 \ 305.36e-6]^T$$

$$d = 3.489e-3$$

e A é a matriz simétrica:

$$A = \begin{bmatrix} 1.003 & 2.329e-3 & 811e-6 & 371.06e-6 & 152.68e-6 \\ 2.329e-3 & 1.003 & 2.307e-3 & 745e-6 & 173.5e-6 \\ 811e-6 & 2.307e-3 & 1.003 & 2.232e-3 & 520.5e-6 \\ 371.06e-6 & 745e-6 & 2.232e-3 & 1.003 & 1.558e-3 \\ 152.68e-6 & 173.5e-6 & 520.5e-6 & 1.558e-3 & 1.001 \end{bmatrix}$$

De forma que:

$$x^* = \frac{1}{2} A^{-1} b$$

$$x^* = [0.0035 \ 0.0023 \ 0.0008 \ 0.0004 \ 0.0002]^T$$

e

$$\min \|T\|_2 = 0.0589$$

A resposta ao impulso $q(k)$ correspondente é mostrada na Figura 4.6:

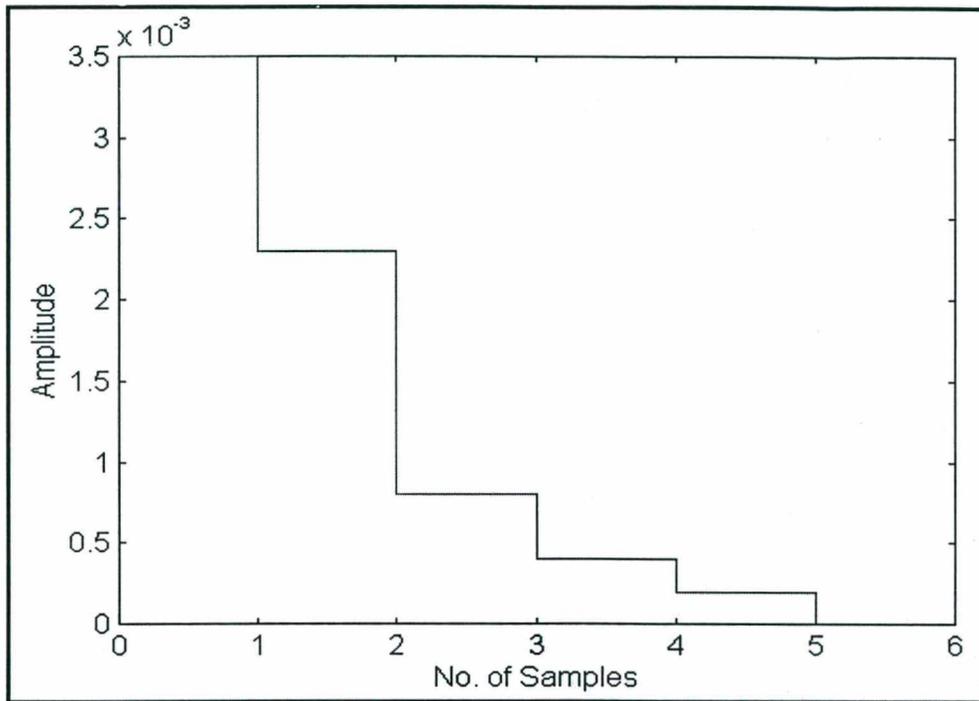


Figura 4.6. Resposta ao impulso $q(k)$.

A transformada Z de $q(k)$ é:

$$Z\{q(k)\} = 0.0035 + 0.0023 z^{-1} + 0.0008 z^{-2} + 0.0004 z^{-3} + 0.0002 z^{-4}$$

Convertendo para sistema contínuo com tempo de amostragem de 0.1s temos:

$$Q(s) = \frac{0.0018 s^4 + 0.188 s^3 + 8.24 s^2 + 136 s + 1152}{s^4 + 80 s^3 + 2400 s^2 + 32000 s + 160000}$$

A resposta ao impulso de $Q(s)$ aparece na Figura 4.7:

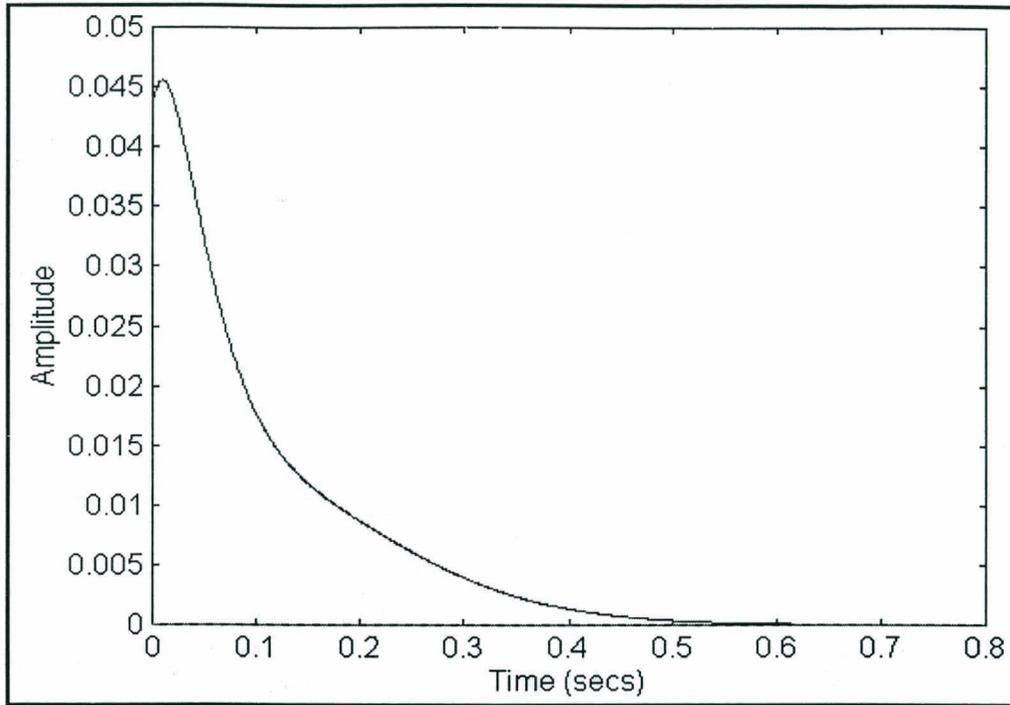


Figura 4.7. Resposta ao impulso de $Q(s)$.

As Figuras 4.8 e 4.9 mostram simulações correspondentes às respostas ao degrau unitário para $Q(s) = 1/(s+1)$ e para $Q(s)$ ótimo respectivamente. Em ambos os resultados assumimos o seguinte:

- _ Estado inicial do sistema: -0.02,
- _ Estado inicial do estimador nominal: 0.05,
- _ Densidade espectral de potência para os ruídos igual a 0.0002
(ruído branco limitado em banda)

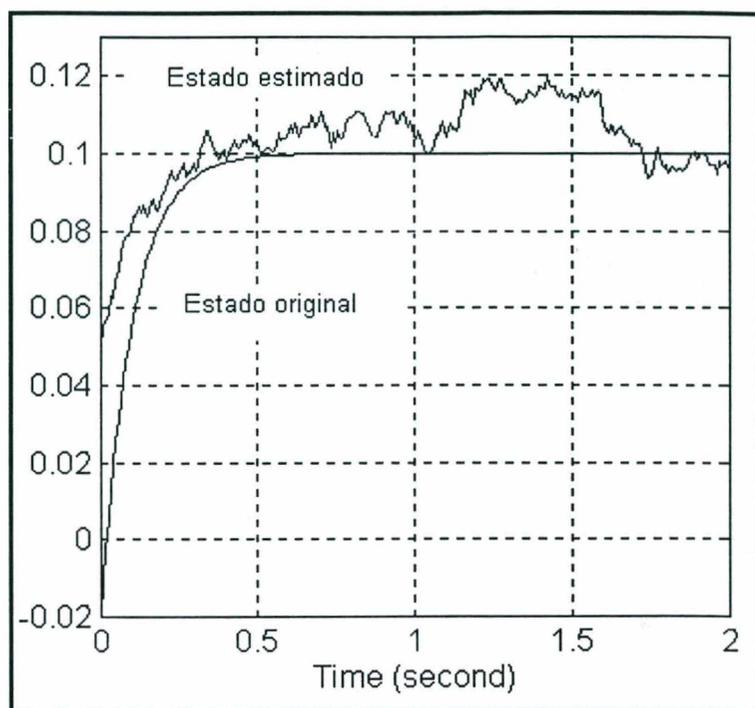


Figura 4.8. Simulação para $Q(s)=1/(s+1)$.

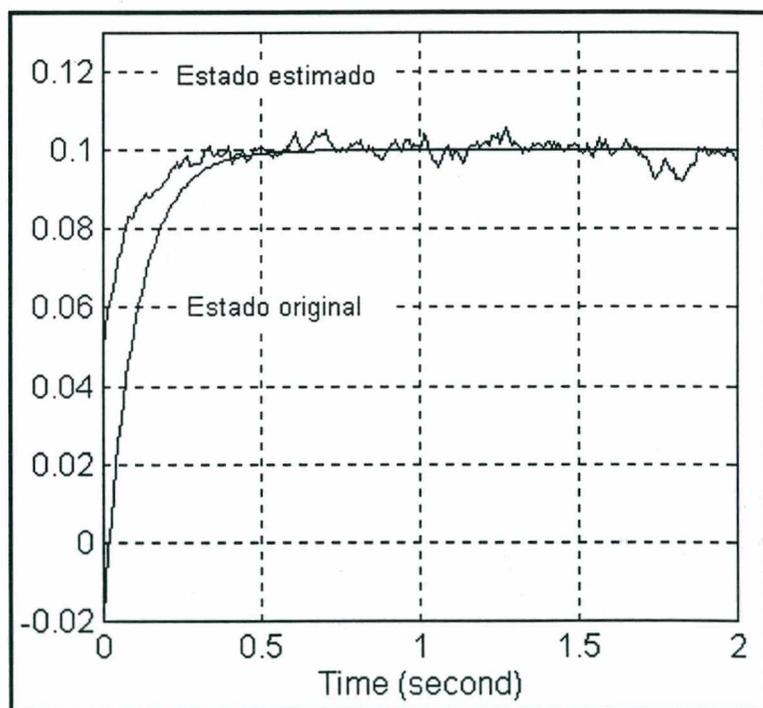


Figura 4.9. Simulação para $Q(s)$ ótimo.

4.5. Especificações envolvendo o critério L_1

O fato da norma L_1 para sistemas estar diretamente relacionada ao ganho induzido $l_\infty - l_\infty$, a torna ideal para traduzir especificações de desempenho que tratam de escalamento e ponderação de sinais no domínio do tempo. Nesta seção apresentaremos e proporemos alguns problemas em cujas estruturas estão presentes restrições adicionais envolvendo a minimização de $\|T_1 - QT_2\|_1$.

4.5.1. Problema sub-ótimo

Encontrar um Q estável que mantenha a amplitude do erro de estimação \tilde{z} abaixo de um valor $\gamma > 0$ pré especificado para uma entrada de perturbação v limitada na forma $\|v\|_\infty \leq P$, ou seja:

$$\|\tilde{z}\|_\infty \leq \gamma \quad \text{para} \quad \|v\|_\infty \leq P$$

Isto é equivalente a:

$$\arg_{Q \in \mathbb{RH}_\infty} \|T_1 - QT_2\|_1 \leq \gamma / P$$

onde \arg (argumento) refere-se a um parâmetro Q tal que a desigualdade seja satisfeita.

Vamos mostrar que o conjunto solução deste problema é convexo. Para tanto, basta mostrarmos que o conjunto $\Gamma_\rho = \{H : \|H\| \leq \rho\}$, onde $\rho \in \mathbb{R}^+$ e $\|\cdot\|$ é uma norma qualquer, é convexo.

Das propriedades clássicas de normas de matrizes, podemos escrever:

$$\|H_1 + H_2\| \leq \|H_1\| + \|H_2\| \quad (\text{a})$$

$$\|\beta H\| = |\beta| \|H\|, \quad \text{para } \beta \in \mathbb{R} \quad (\text{b})$$

Seja a norma $\|\cdot\|$ de uma combinação convexa de H_1 e H_2 ($0 \leq \lambda \leq 1$):

$$\|\lambda H_1 + (1 - \lambda) H_2\|$$

Aplicando as propriedades (a) e (b):

$$\| \lambda H_1 + (1-\lambda) H_2 \| \leq \lambda \| H_1 \| + (1-\lambda) \| H_2 \|$$

Ou seja, toda norma é um funcional convexo.

Levando em consideração a última desigualdade e o fato de que, se $H_1, H_2 \in \Gamma_\rho$, então $\| H_1 \| \leq \rho$ e $\| H_2 \| \leq \rho$, temos:

$$\| \lambda H_1 + (1-\lambda) H_2 \| \leq \rho$$

Assim:

$$\lambda H_1 + (1-\lambda) H_2 \in \Gamma_\rho$$

Mostramos, então, que Γ_ρ é um conjunto convexo.

4.5.2. Maximizando o limite de perturbação

Encontrar um Q que maximiza o limite P de amplitude da perturbação, onde $\| v \|_\infty \leq P$, enquanto mantém a amplitude do erro abaixo de um valor M pré especificado, ou seja, $\| \tilde{z} \|_\infty \leq M$ [27]:

Em outras palavras, deseja-se manter $\| \tilde{z} \|_\infty \leq M$ sob a pior entrada de perturbação possível (e determinar o limite correspondente).

Proposição 4.1:

A solução para o problema em questão é:

$$\sup P \leq 1 / \left(\min_{Q \in RH_\infty} \| \tilde{T}_1 - Q\tilde{T}_2 \|_1 \right)$$

com $\tilde{T}_1 = T_1/M$ e $\tilde{T}_2 = T_2/M$

Prova:

Seja $T = T_1 - QT_2$. Tomando $\|T\|_1$ como norma induzida:

$$\|T\|_1 = \sup_{\|v\|_\infty \leq 1} \|t * v\|_\infty$$

Multiplicando por P :

$$P\|T\|_1 = \sup_{\|v\|_\infty \leq 1} P\|t * v\|_\infty$$

Aplicando a propriedade de multiplicação por constante:

$$P\|T\|_1 = \sup_{\|v\|_\infty \leq 1} \|t * (Pv)\|_\infty$$

Chamando $\tilde{v} = Pv$:

$$P\|T\|_1 = \sup_{\|\tilde{v}\|_\infty \leq P} \|t * \tilde{v}\|_\infty$$

Considerando a definição de norma induzida, podemos fazer $\tilde{v} = v$.

Pela especificação do problema é requerido que $\|\tilde{z}\|_\infty \leq M$ e como $\tilde{z} = t * v$, temos:

$$P\|T\|_1 \leq M$$

ou

$$P\|\tilde{T}\|_1 \leq 1 \quad \text{se} \quad \tilde{T} = T/M$$

Desta forma:

$$P \leq 1 / \|\tilde{T}\|_1$$

e finalmente:

$$\sup P \leq 1 / (\min \|\tilde{T}\|_1)$$

□

4.5.3. Ponderação no domínio do tempo

Quando dizemos que um sinal vetorial v possui a característica $\|v\|_\infty \leq P$, estamos afirmando que a maior amplitude em módulo de qualquer componente para todo instante de tempo não ultrapassa P . Considere v bi-dimensional e $P = 1$. Se as componentes deste sinal são representadas no plano cartesiano, então v está limitado a um região quadrada Δ (lado igual a 2 e com centro na origem) durante todo o tempo _ Ex. Figura 4.10:

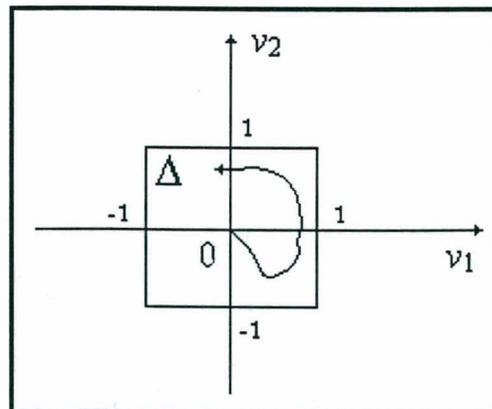


Figura 4.10. Conjunto Δ .

Também podemos dar uma interpretação em norma induzida quando um sinal está confinado em espaços retangulares.

Suponha a restrição temporal $\|D v\|_{\infty} \leq 1$, onde D é uma matriz diagonal chamada matriz de escalamento e, para o nosso exemplo, tem a forma

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}$$

A multiplicação pela matriz D tem a função de evidenciar algumas direções no plano cartesiano em relação à outras. Desta forma, para o exemplo em questão o sinal estaria limitado a uma região retangular Δ' como aquela mostrada na Figura 4.11:

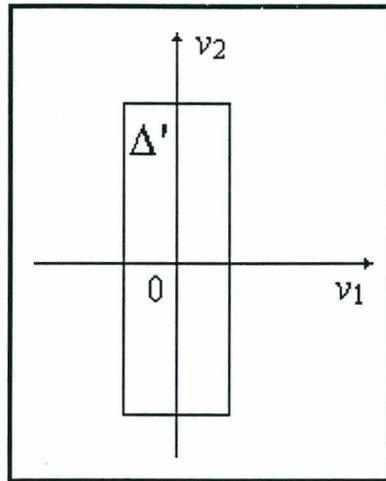


Figura 4.11. Conjunto Δ' .

Considere a seguinte norma de pior caso (*worst case*):

$$\begin{aligned} \|T\|_{wc} &= \sup_{v \in \Delta'} \|t * v\|_{\infty} \\ &= \sup_{\|Dv\|_{\infty} \leq 1} \|t * v\|_{\infty} \end{aligned}$$

Chamamos $\tilde{v} = D v$ de forma que $v = D^{-1} \tilde{v}$.

Aplicando:

$$\begin{aligned} \|T\|_{wc} &= \sup_{\|\tilde{v}\|_{\infty} \leq 1} \|t*(D^{-1}\tilde{v})\|_{\infty} \\ &= \sup_{\|\tilde{v}\|_{\infty} \leq 1} \|(tD^{-1})*\tilde{v}\|_{\infty} \end{aligned}$$

Assim:

$$\|T\|_{wc} = \|TD^{-1}\|_1$$

Então o problema

$$\min_{Q \in RH_{\infty}} \|\tilde{T}_1 - Q\tilde{T}_2\|_1,$$

onde

$$\tilde{T}_1 = T_1 D^{-1} \text{ e } \tilde{T}_2 = T_2 D^{-1},$$

diz respeito à determinação de um $Q \in RH_{\infty}$ de forma que perturbações $v \in \Delta'$ tenham efeitos minimizados sobre o erro de estimação.

4.5.4. Diferentes limites para cada canal de perturbação

Determinar $Q \in RH_\infty$ para o caso discreto de forma que as saídas $i=1, 2, \dots, R$, onde R é a dimensão do vetor erro de estimação, fiquem limitadas em módulo a valores M_i sempre que as entradas $j=1, 2, \dots, S$, onde S é a dimensão do vetor de perturbação, estejam limitadas em módulo a valores P_j .

Considerando a definição para a norma l_∞ de um sinal $u(k)$ escalar $\|u\|_\infty = \sup_k |u(k)|$ procuramos expressar o problema analiticamente.

Considere o somatório de convolução representando o relacionamento entre o erro de estimação e a entrada de perturbação:

$$\tilde{z}(k) = t(k) * v(k)$$

ou

$$\tilde{z}_i(k) = \sum_{j=1}^S t_{ij}(k) * v_j(k), \quad \text{para } i=1, 2, \dots, R.$$

$$\tilde{z}_i(k) = \sum_{j=1}^S \sum_{\tau=0}^{\infty} t_{ij}(\tau) v_j(k-\tau)$$

Assim

$$\sup_k |\tilde{z}_i(k)| = \sup_k \left| \sum_{j=1}^S \sum_{\tau=0}^{\infty} t_{ij}(\tau) v_j(k-\tau) \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^S \sup_k \left| \sum_{\tau=0}^{\infty} t_{ij}(\tau) v_j(k-\tau) \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^S \left| \sum_{\tau=0}^{\infty} t_{ij}(\tau) \right| \sup_k |v_j(k)|$$

Como $\sup_k |v_j(k)| = P_j$

$$\begin{aligned} \text{Então} \quad \sup_k |\tilde{z}_i(k)| &\leq \sum_{j=1}^S P_j \left| \sum_{\tau=0}^{\infty} t_{ij}(\tau) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^S P_j \sum_{\tau=0}^{\infty} |t_{ij}(\tau)| \end{aligned}$$

Através da especificação do problema, $\sup_k |\tilde{z}_i(k)| \leq M_i$.

Desta forma, o problema inicial pode ser formulado como um conjunto de R problemas convexos:

$$\sum_{j=1}^S P_j \sum_{k=0}^{\infty} |t_{ij}(k)| \leq M_i, \text{ para } i=1, 2, \dots, R.$$

De forma semelhante ao que foi empregado na seção 4.4, se as respostas t_{ij} em

$$t(k) = \begin{bmatrix} t_{11}(k) & t_{12}(k) \end{bmatrix} - x_k * \begin{bmatrix} t_{21}(k) & t_{22}(k) \end{bmatrix}$$

são tabuladas podemos transformar estes problemas para as variáveis de decisão x_i de forma a se determinar $t_{ij}(k)$.

Se o erro de perturbação é escalar, temos:

$$t_{11}(k) = t_{11}(k) - x_k * t_{21}(k)$$

$$t_{12}(k) = t_{12}(k) - x_k * t_{22}(k)$$

Como exemplo, a restrição

$$0.02 \sum_{k=0}^{\infty} |t_{11}(k)| + 0.05 \sum_{k=0}^{\infty} |t_{12}(k)| \leq 38$$

é necessária e suficiente para garantir que $|\tilde{z}(k)| \leq 38$ sempre que

$$|v_1(k)| \leq 0.02$$

$$|v_2(k)| \leq 0.05$$

Para uma caracterização mais geral quando consideramos a presença do parâmetro Q , começamos com a descrição:

$$\tilde{z}(s) = [T_1(s) - Q(s)T_2(s)] v(s)$$

ou

$$\tilde{z}(s)_j = \sum_{j=1}^S \{ [T_1(s) - Q(s)T_2(s)]_{ij} v_j(s) \}, \text{ para } i=1, 2, \dots, R.$$

cada uma das R expressões anteriores pode ser escrita como:

$$\tilde{z}(s)_j = \sum_{j=1}^S \{ [T_{1ij}(s) - (Q(s)T_2(s))_{ij}] v_j(s) \}$$

ou ainda

$$\tilde{z}(s)_j = \sum_{j=1}^S \{ [T_{1ij}(s) - \sum_{t=1}^m Q(s)_{it} T_2(s)_{tj}] v_j(s) \}$$

onde m é o número de colunas de Q (ou o número de linhas de T_2).

Então, a resposta ao impulso de $[T_1(s) - Q(s)T_2(s)]_{ij}$ pode ser dada através da sua transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\{ [T_1(s) - Q(s)T_2(s)]_{ij} \} = t_{1ij}(k) - \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{t=1}^m q_{it}(\tau) t_{2tj}(k-\tau)$$

Finalmente, temos os R problemas convexos:

$$\sum_{j=1}^S P_j \sum_{k=0}^{\infty} | t_{1ij}(k) - \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{t=1}^m q_{it}(\tau) t_{2tj}(k-\tau) | \leq M_i$$

para $i=1, 2, \dots, R$.

Para o caso contínuo, a restrição convexa para o erro de estimação mencionada anteriormente tomaria a forma

$$0.02 \int_0^{\infty} | t_{11}(t) | dt + 0.05 \int_0^{\infty} | t_{12}(t) | dt \leq 38$$

Assim, procedimentos semelhantes poderiam ser aplicados quanto a parametrização Q .

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO

Neste trabalho tratamos da caracterização e projeto de observadores de estado para sistemas lineares. Procuramos sintetizar alguns resultados relativamente recentes em especificação de sistemas e teoria de estimação, especialmente aqueles relacionados a parametrização.

A preocupação constante neste estudo, como em qualquer outro envolvendo estimadores de sistemas dinâmicos, é que, na ausência de perturbações, o erro de estimação deve tender assintoticamente a zero. Quando perturbações são adicionadas ao modelo da planta, nosso interesse é minimizar o erro de estimação, normalmente na forma de uma norma.

Apesar dos desenvolvimentos na teoria de observadores resultarem da dualidade com os desenvolvimentos verificados em controle, as aplicações atuais de observadores estão mais voltadas a outras áreas (ex. detecção de falhas). Tendo em vista a natureza teórica do trabalho, os resultados aqui apresentados são gerais e não estão direcionados a uma aplicação específica.

No Capítulo 4 (síntese), grande parte dos tópicos iniciam com uma caracterização para sistemas multivariáveis. Já nos exemplos, sem perda de generalidade, estudamos um maior número de casos monovariáveis em função da menor complexidade de resolução. Os pacotes de software utilizados para realizar os cálculos e construir os gráficos foram Matlab[®], Simulink[®] e Scilab.

É dado maior tratamento aos sistemas contínuos e, quando apropriado, mencionamos as possíveis alterações para o caso discreto. Não consideramos aspectos de robustez aplicados ao observador [17], como variações nos parâmetros da planta. Particularidades, como por exemplo, a presença de tempo de atraso no processo (time delay) [30] também não foram abordadas.

CAPÍTULO 6

PERSPECTIVAS

Como em qualquer área da Engenharia, a complexidade dos sistemas e dos atuais requisitos de desempenho fazem com que a etapa de projeto sempre esteja envolvida com alguma forma de otimização [31]. A implementação de sistemas concebidos em teoria é prejudicada pela existência de um *gap* entre as etapas de especificação e projeto, muitas vezes provocada pela falta (ou não disponibilidade) de uma ferramenta de otimização adequada. Atualmente há uma tendência maior em se tratar problemas convexos [26], dada a sua maior ocorrência e menor esforço computacional exigido para a solução.

Métodos de pontos interiores, de Monte Carlo e algoritmos genéticos [32] são exemplos de técnicas cujas aplicações em projeto de sistemas são relativamente recentes. Assim, novas formas de síntese para observadores de estado que conduzam a um comportamento desejado podem resultar com a popularização de métodos alternativos de formulação e otimização.

Sugerimos implementação de técnicas de projeto envolvendo os critérios de especificação L_1 , mencionados no Capítulo 4. As soluções apontadas sempre levam a minimização de uma norma deste tipo. Com a emprego cada vez maior de rotinas e *toolboxes* que tratam deste critério, o acesso a estas ferramentas será mais fácil.

Em [33] é mostrado que podemos utilizar Programação Linear e Quadrática no projeto de sistemas de ordem baixa. A idéia é criar variáveis para estes programas a partir de respostas impulsivas ou equações a diferenças de sistemas lineares discretizados. Assim, poderíamos aplicar tais técnicas levando em consideração a equação da dinâmica do observador (associada a um conjunto de restrições).

Já em [34] é caracterizada a pior entrada de perturbação que poderia atuar em um sistema sem violar restrições em amplitude correspondentes ao estado ou saída. Desta forma, o conhecimento exato da "pior" perturbação admissível pode ser útil para o projeto de observadores robustos.

Neste trabalho procuramos abordar o projeto de observadores segundo alguns critérios de especificação (H_∞ , H_2 e L_1). Em [35] é proposta uma estrutura de estimação que leva conta os critérios H_2 / H_∞ . Outras combinações poderiam ser estudadas.

F. Blanchini trata, em seu trabalho [36], de perturbações limitadas no espaço de amplitudes à poliedros. Um ganho K (ou L para o observador) é determinado a partir de manipulações envolvendo os vértices destes poliedros. Sabemos que a norma l_∞ diz respeito a limitação de sinais a conjuntos quadrados. Sugerimos o estudo de métodos semelhantes de síntese envolvendo otimização segundo normas poliedrais.

Em relação às aplicações recentes de observadores, mencionamos [37]. Lá é proposta a utilização de um observador para estimar a posição do eixo de um motor de relutância, conhecida a dinâmica deste componente. Tradicionalmente a tarefa é realizada através de encoders óticos ou dispositivos mecânicos acoplados ao eixo de rotação.

Convém mencionarmos neste ponto que atualmente os sistemas de controle (como também estimadores, filtros, etc.) são implementados, na grande maioria das vezes, em computadores. Em [37], o observador mencionado é baseado em microprocessador DSP (*Digital Signal Processing*). Portanto, estudos práticos devem sempre levar em consideração aspectos computacionais e algorítmicos.

APÊNDICE - A

REPRESENTAÇÃO POLINOMIAL DE SISTEMAS

Maiores detalhes e assuntos relacionados podem ser encontrados em [28] e [29].

A.1. Anéis e Campos

Definição A.1: Um anel é um conjunto não vazio R junto com duas operações binárias “+” (adição) e “.” (multiplicação) tais que os seguintes axiomas sejam satisfeitos:

(i) $(R, +)$ é um grupo comutativo:

$$\begin{aligned}a + (b+c) &= (a+b) + c, \forall a, b, c \in R. \\ a + b &= b + a, \forall a, b \in R.\end{aligned}$$

Existe um elemento $0 \in R$ tal que $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in R$.

Para todo elemento $a \in R$, existe um correspondente elemento $-a \in R$, tal que $a + (-a) = 0$.

(ii) (R, \cdot) é um semi-grupo. Isto significa que $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall a, b, c \in R$.

(iii) A multiplicação é distributiva sobre a adição. Isto significa que:

$$\begin{aligned}a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c, \\ (a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c, \forall a, b, c \in R.\end{aligned}$$

Como de costume $a \cdot b$ é denotado por ab e $a + (-b) \Leftrightarrow a - b$.

Podemos também considerar anéis da forma $R^{m \times n}$ como conjuntos de matrizes $m \times n$ com elementos no anel R . Um sub-conjunto S de um anel R é um sub anel de R se ele mesmo é um anel.

Um anel é dito ser comutativo se $ab = ba, \forall a, b \in R$; e diz-se ter uma identidade se existe um elemento $1 \in R$ tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \forall a \in R$.

Suponha \mathbf{R} um anel com identidade. Um elemento $x \in \mathbf{R}$ é chamado de unidade de \mathbf{R} se existe um $y \in \mathbf{R}$ tal que $xy = yx = 1$. Pode ser mostrado que y é único, sendo chamado de inverso de x e denotado por x^{-1} .

Definição A.2: Um campo é um anel comutativo F com identidade, satisfazendo:

- (i) F contém ao menos dois elementos,
- (ii) Todo elemento não nulo de F é uma unidade.

Exemplo :

Campos: \mathbf{R} , \mathbf{C} , \mathbf{Q} , $\mathbf{R}(s)$ e $\mathbf{C}(s)$.

Anéis Comutativos: \mathbf{Z} , $\mathbf{R}[s]$, $\mathbf{C}[s]$, $\mathbf{R}_p(s)$, $\mathbf{R}_{p,o}(s)$, $\mathbf{R}(0)$, $\mathbf{R}_o(0)$ e matrizes diagonais com elementos em um campo (ex. \mathbf{R} , \mathbf{C} , ou $\mathbf{R}(s)$) ou em um anel comutativo (ex. $\mathbf{R}[s]$, $\mathbf{C}[s]$).

Anéis não comutativos: $\mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{C}^{n \times n}$, $\mathbf{R}[s]^{n \times n}$, $\mathbf{C}[s]^{n \times n}$, $\mathbf{R}(s)^{n \times n}$, $\mathbf{C}(s)^{n \times n}$, $\mathbf{R}_p(s)^{n \times n}$, $\mathbf{R}_{p,o}(s)^{n \times n}$, $\mathbf{R}(0)^{n \times n}$, $\mathbf{R}_o(0)^{n \times n}$; onde consideramos matrizes $n \times n$ com elementos em \mathbf{R} , \mathbf{C} , etc.

Simbologia:

- $\mathbf{R}(s)$ ($\mathbf{C}(s)$): Campo das funções racionais $a_i(s) = n_i(s) / d_i(s)$, onde $d_i(s) \neq 0$ e $n_i(s)$, $d_i(s)$ são polinômios de grau finito com coeficientes no campo \mathbf{R} (\mathbf{C}) obedecendo as regras usuais de adição e multiplicação no campo das funções racionais.
- $\mathbf{R}[s]$ ($\mathbf{C}[s]$): Anel de polinômios de grau finito com coeficientes no campo \mathbf{R} (\mathbf{C}), obedecendo as regras usuais de adição e multiplicação.
- $\mathbf{R}_p(s)$ ($\mathbf{R}_{p,o}(s)$): Anel das funções racionais próprias (estritamente próprias) com coeficientes em \mathbf{R} .
- $\mathbf{R}(0)$, $\mathbf{R}_o(0)$: Sub-anel de elementos de $\mathbf{R}_p(s)$ ($\mathbf{R}_{p,o}(s)$), que são analíticas em \mathbf{C}_+ .
- $\mathbf{C}_+ = \{ s \in \mathbf{C} \mid \text{Re } s \geq 0 \}$ ou equiv., o semi plano direito fechado do plano complexo.

Comentário: Note que $R_p(s)$ e $R_{p,o}(s)$ constituem anéis e não campos, já que, por exemplo, nem todas as funções racionais próprias (grau do numerador menor ou igual ao do denominador) possuem inversas próprias. Assim $(s / s^2 + 1)^{-1} \notin R_p(s)$.

Fato A.1: $a \in R[s]$ possui um inverso em $R[s]$, equiv. $a^{-1} = 1/a \in R[s]$, se e somente se $a(s) \equiv k$, onde k é uma constante não nula.

A .2. Considerações em $R[s]$

Seja $D(s)$ um polinômio com coeficientes reais expresso como:

$$D(s) = D_n s^n + D_{n-1} s^{n-1} + \dots + D_1 s + D_0$$

Diz-se que $D(s)$ possui grau n ($\text{deg} = n$) se $D_n \neq 0$. Um polinômio é chamado mônico se o coeficiente D_n associado com a maior potência de s é igual a 1.

Uma matriz polinomial $M(s) \in R[s]^{n \times n}$ é uma matriz $n \times n$ sobre o anel $R[s]$. Note que matrizes sobre um campo não gozam das mesmas propriedades de matrizes sobre um anel: Em particular, como veremos, da propriedade de inversão.

Definição A.3: Uma matriz polinomial $P(s)$ é dita não singular se $\det P(s)$ não é identicamente nulo.

Por exemplo,

$$Q(s) = \begin{bmatrix} s+1 & s+3 \\ s^2+3s+2 & s^2+5s+4 \end{bmatrix}$$

é não singular, pois $\det Q(s) = (s+1)(s^2+5s+4) - (s+3)(s^2+3s+2) = -2s-2$, não é identicamente zero (é zero somente quando $s = -1$).

De qualquer forma, a matriz

$$P(s) = \begin{bmatrix} s+1 & s+3 \\ s^2+3s+2 & s^2+5s+6 \end{bmatrix}$$

é singular, pois $\det P(s) \equiv 0$.

Espera-se que uma matriz singular tenha colunas (e linhas) dependentes. Vamos examinar isto para $P(s)$. As colunas desta matriz, digamos $p_1(s)$ e $p_2(s)$ devem ser linearmente independentes, pois não parece serem proporcionais. Mas isto se apenas considerarmos as constantes de proporcionalidade como reais ou complexas. De qualquer forma, a noção algébrica de dependência linear é mais abrangente permitindo-nos considerar situações nas quais os escalares podem ser membros de qualquer campo. Como vimos, funções racionais formam um campo e usando coeficientes pertencentes a este, podemos escrever

$$p_2(s) = \left[\frac{s+3}{s+1} \right] p_1(s)$$

de forma que $p_2(s)$ é proporcional a $p_1(s)$, consistente com a singularidade de $P(s)$. Podemos ver que $P(s)$ possui posto 1.

Note que quando $s = -1$, $Q(-1)$ é singular e tem posto 1. Mas este é o único valor de s para o qual o posto é 1, e portanto podemos dizer que o posto normal de $Q(s)$ é igual a 2.

Definição A.4: Seja $M(s) \in R[s]^{m \times n}$ e r um inteiro tal que $0 \leq r \leq \min(m, n)$. Dizemos que $M(s)$ possui posto normal r se e somente se r é a maior das ordens dos menores que não são identicamente nulos.

Note que, no exemplo, $p_1(s) - \left[\frac{s+1}{s+3} \right] p_2(s) = 0$, que pode ser escrito como:

$$(s+3) p_1(s) - (s+1) p_2(s) = 0$$

Fato A.2: Vetores polinomiais são dependentes sobre o campo das funções racionais se e somente se podem tornar-se dependentes usando-se unicamente coeficientes polinomiais na forma

$$\sum_1^n r_i(s) p_i(s) = 0. \text{ Note que a multiplicação pelo mínimo múltiplo comum dos denominadores}$$

dos $\{r_i(s)\}$ mostrará que os $\{p_i(s)\}$ são linearmente dependentes com coeficientes polinomiais.

Tendo estas considerações em mente, percebemos que operações elementares sobre linhas e colunas para matrizes polinomiais terão a forma:

- (i) Troca de duas colunas (linhas) quaisquer,
- (ii) Adição de um múltiplo polinomial $\alpha(s)$ de qualquer coluna (linha) a qualquer outra coluna (linha),
- (iii) Multiplicação de qualquer coluna (linha) por qualquer número real ou complexo não nulo.

Lembramos da teoria de matrizes que operações elementares podem ser representadas por matrizes elementares (matrizes identidade sobre as quais foram aplicadas adequadas operações elementares). A pré (pós) multiplicação por uma matriz elementar terá o efeito de uma correspondente operação elementar sobre linha (coluna).

Matrizes elementares são exemplos de matrizes *unimodulares*; um tipo de matriz não singular definida a seguir.

A.3. Múltiplos, Divisores e Coprimidade

Inicialmente faremos algumas considerações algébricas no anel $R[s]$ e a seguir abordamos os conceitos equivalentes em $R[s]^{m \times n}$. Sejam $D(s)$ e $N(s)$ dois polinômios com $D(s) \neq 0$. Pode ser mostrado que existem polinômios $Q(s)$ e $R(s)$ tais que

$$N(s) = Q(s)D(s) + R(s), \quad \deg R(s) < \deg D(s)$$

Se $R(s) = 0$, diz-se que $N(s)$ é divisível (sem resto) por $D(s)$, e $D(s)$ é um fator, ou um divisor de $N(s)$. Se $P(s)$ é um divisor de $D(s)$ e um divisor de $N(s)$, então diz-se que $P(s)$ é um divisor comum de $D(s)$ e $N(s)$. Note que uma constante não nula é um divisor comum de todo $D(s)$ e $N(s)$ não nulos, e é chamada de fator comum trivial. Isto porque:

$$\begin{aligned} N(s) &= Q(s)D(s) \\ D_n s^n + D_{n-1} s^{n-1} + \dots + D_1 s + D_0 &= \\ (cD_n s^n + cD_{n-1} s^{n-1} + \dots + cD_1 s + cD_0) \cdot \frac{1}{c} & \\ (c \neq 0) & \end{aligned}$$

Um polinômio $R(s)$ é um maior divisor comum (g.c.d.) de $D(s)$ e $N(s)$, se $R(s)$ é um divisor comum de $D(s)$ e $N(s)$, e é divisível por todo divisor comum de $D(s)$ e $N(s)$. Se um g.c.d. de $D(s)$ e $N(s)$ é uma constante não nula (independente de s), então $D(s)$ e $N(s)$ são chamados de primos relativos ou coprimos.

Em outras palavras, dois polinômios são coprimos se eles possuem somente fatores comuns triviais.

Se os polinômios possuem fatores comuns não triviais, não são coprimos. Se $R(s)$ é um g.c.d., então $c.R(s)$ também o é, para qualquer número não nulo C . Se requeremos que um g.c.d. seja mônico, então o g.c.d. será único.

Na discussão a seguir $E(R)$ será usado como um símbolo genérico para denotar o conjunto de matrizes com elementos em R . Assim, $A, B \in E(R)$ significa que A e B são matrizes cujos elementos estão em R , mas não significa que A e B possuem as mesmas dimensões.

Definição A.5: Sejam $A, B, C \in E(R)$ com $A = BC$. Então C é dita ser uma divisora direita (r.d.) de A e A é uma múltipla esquerda (l.m.) de C ; similarmente, B é uma divisora esquerda (l.d.) de A e A é uma múltipla direita (r.m.) de B .

Note que uma matriz e sua divisora direita (e sua múltipla esquerda) possuem o mesmo número de colunas; e que uma matriz e sua divisora esquerda (e sua múltipla direita) possuem o mesmo número de linhas.

Definição A.6: Sejam $A, B \in E(R)$ tendo o mesmo número de colunas, então uma matriz quadrada $C \in E(R)$ é uma maior divisora direita comum (g.c.r.d.) de A, B se:

- (i) C é uma divisora direita de ambas A e B ,
- (ii) C é uma múltipla esquerda de toda divisora direita comum de A, B .

Definição A.7: Sejam $A, B \in E(R)$ tendo o mesmo número de linhas, então uma matriz quadrada $C \in E(R)$ é uma maior divisora esquerda comum (g.c.l.d.) de A, B se:

- (i) C é uma divisora esquerda de ambas A e B .
- (ii) C é uma múltipla direita de toda divisora esquerda comum de A, B .

Definição A.8: Uma matriz M pertencente ao anel $R^{n \times n}$ é unimodular se ela tem um inverso em $R^{n \times n}$, isto é, se ela é uma unidade no anel $R^{n \times n}$.

Definição A.9: Seja $M(s) \in R[s]^{n \times n}$ não singular. Se $\det M(s) \equiv k$, uma constante não nula independente de s , então $M(s)$ é chamada de matriz unimodular.

Lema A.1: Uma matriz polinomial $M(s)$ é unimodular se e somente se sua inversa $M(s)^{-1}$ é polinomial.

Prova

Se $M(s)$ é unimodular, então $\det M(s)$ é um escalar (constante), e $M(s)^{-1} = [\text{Adj } M(s)] / \det M(s)$ é claramente polinomial. Contrariamente, se $M(s)$ e $M(s)^{-1}$ são ambas matrizes polinomiais, seja $\det M(s) = a_1(s)$ e $\det M(s)^{-1} = a_2(s)$. Claramente, $a_1(s)$ e $a_2(s)$ serão também polinomiais, e além disso, $a_1(s) \cdot a_2(s) = 1$. Isto só pode acontecer se ambos $a_1(s)$ e $a_2(s)$ são escalares. Portanto, $M(s)$ deve ser unimodular.

□

Exemplo de matriz unimodular:

$$P(s) = \begin{bmatrix} s+1 & s+3 \\ s+2 & s+4 \end{bmatrix} \quad \det P(s) = -2$$

e

$$P^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{-s-4}{2} & \frac{s+3}{2} \\ \frac{s+2}{2} & \frac{-s-1}{2} \end{bmatrix}$$

Propriedades adicionais de matrizes unimodulares

- (i) Toda matriz polinomial unimodular com coeficientes reais ou complexos pode ser escrita como um produto de matrizes elementares,
- (ii) Se $\{P(s), U(s)\}$ são matrizes polinomiais, com $U(s)$ unimodular, o par $\{P(s), U(s)\}$ é sempre coprimo (esquerdo ou direito),
- (iii) O posto de uma matriz polinomial em $R(s)$ não mudará se ela é (pré ou pós) multiplicada por matrizes polinomias não singulares, em particular, unimodulares.

Definição A.10: Duas matrizes $N, D \in E(R)$ com o mesmo número de colunas são denominadas coprimas pela direita sobre o anel R se toda g.c.r.d. (g.c.l.d.) de N e D possui inversa em R , ou seja, é unimodular.

Comentários:

- (i) O conceito de coprimidade depende do anel que está sendo considerado.
- (ii) É possível que duas matrizes polinomiais sejam coprimas pela direita mas não coprimas pela esquerda e vice-versa

Lema A.2: Obtenção de uma g.c.r.d.

Dadas as matrizes $D(s)_{m \times m}$ e $N(s)_{p \times m} \in E(R)$, forme a matriz $[D^T(s) N^T(s)]^T$ e encontre operações elementares sobre suas linhas (ou equiv., pré-multiplique por uma matriz unimodular $U(s)$) tal que ao menos p das linhas inferiores sejam identicamente nulas:

$$\underbrace{\begin{matrix} m & p \\ \begin{bmatrix} U_{11}(s) & U_{12}(s) \\ U_{21}(s) & U_{22}(s) \end{bmatrix} \end{matrix}}_{U(s)} \begin{matrix} m \\ \begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} m \\ \begin{bmatrix} R(s) \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (A-1)$$

Então $R(s)$ será uma g.c.r.d. de $D(s)$ e $N(s)$.

Prova:

Seja:

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}$$

então

$$\begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

assim,

$$D(s) = V_{11}(s)R(s), \quad N(s) = V_{21}(s)R(s)$$

de forma que $R(s)$ é uma divisora direita (r.d.) de $N(s)$ e $D(s)$. Também note que

$$R(s) = U_{11}(s)D(s) + U_{12}(s)N(s) \quad (A-2)$$

Se $R_1(s)$ é outra divisora direita, digamos

$$D(s) = D_1(s)R_1(s), \quad N(s) = N_1(s)R_1(s),$$

então $R(s) = [U_{11}(s)D_1(s) + U_{12}(s)N_1(s)]R_1(s)$ de forma que $R_1(s)$ é uma divisora direita de $R(s)$, e $R(s)$ é uma g.c.r.d.

□

Comentário: Toda g.c.r.d. pode ser escrita como em (A-2) mas o inverso não é verdadeiro.

Exemplo de obtenção de uma g.c.r.d.:

$$N(s) = \begin{bmatrix} (s+1)^2 & s-1 \end{bmatrix}, \quad D(s) = \begin{bmatrix} s+1 & s-1 \\ 0 & (s-1)^2 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -s & 1 & | & 1 \\ s+1 & -1 & | & -1 \\ \hline 1-s^2 & s & | & s-1 \end{bmatrix}}_{U(s)} \begin{bmatrix} s+1 & s-1 \\ 0 & (s-1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s-1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Comentário: Para a obtenção de uma g.c.l.d., o procedimento altera-se para:

$$\begin{bmatrix} D(s) & N(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(s) & 0 \end{bmatrix} U(s) \quad (A-3)$$

com $\{D(s), N(s)\}$ tendo o mesmo número de linhas

G.c.r.d's não são únicas:

Note que efetuando as operações elementares na expressão (A-1) em diferentes ordens, podemos obter diferentes matrizes $U(s)$ e portanto diferentes g.c.r.d's. Duas g.c.r.d's quaisquer, digamos $R_1(s)$ e $R_2(s)$, devem estar relacionadas (definição A.6 (ii)) através de $R_1(s) = W_2(s)R_2(s)$, $R_2(s) = W_1(s)R_1(s)$, $W_i(s) \in E(R)$.

Já que podemos escrever

$$R_1(s) = W_2(s) W_1(s)R_1(s) \text{ segue que}$$

(i) Se $R_1(s)$ é não singular, então os $\{W_i(s), i = 1, 2\}$ devem ser unimodulares, e portanto a g.c.r.d. $R_2(s)$ também é não singular. *Assim, se uma g.c.r.d. é não singular, então todas as g.c.r.d's também são, diferindo somente por um fator esquerdo unimodular.*

(ii) *Se uma g.c.r.d. é unimodular, então todas g.c.r.d.'s devem ser unimodulares.*

Lema A.3: G.c.r.d's não singulares

Se $D(s)$ for não singular, então $[D^T(s) \ N^T(s)]^T$ terá posto coluna cheio e todas as g.c.r.d's de $\{N(s), D(s)\}$ devem ser não singulares diferindo apenas por fatores (esquerdo) unimodulares.

Prova:

Sabemos que operações elementares não mudam o posto de uma matriz e, de (A-1), vemos que $[R(s)^T \ 0]^T$ também deve ter posto cheio, isto é, $R(s)$ deve ser não singular.

□

Comentário: Para o caso de g.c.l.d's não singulares vemos que $[D(s) \ N(s)]$ possui posto linha cheio com $D(s)$ não singular.

A.4. Descrição Fatorada de Matriz

Assumiremos aqui que $H(s) \in R_{p,o}(s)^{m \times n}$ e que $H(s)$ é expressa como:

$$H(s) = N(s) / d(s)$$

onde $d(s)$ é o mínimo múltiplo comum dos denominadores das entradas de $H(s)$ e $N(s)$ é uma matriz polinomial $m \times n$. Então, podemos escrever $H(s)$ como uma descrição fatorada de matriz (MFD):

$$H(s) = N(s)D_r^{-1}(s) \quad \sim \quad \text{MFD direita} \quad (\text{A-4})$$

$$= D_L^{-1}(s)N(s) \quad \sim \quad \text{MFD esquerda} \quad (\text{A-5})$$

onde $D_r^{-1}(s) = d(s)I_n$ (matriz quadrada $n \times n$) e $D_L^{-1}(s) = d(s)I_m$ (matriz quadrada $m \times m$)

Definimos grau (deg) da matriz *denominador* como:

$$\text{deg } D_r(s) = \text{deg det } D_r(s) = r.n$$

$$\text{deg } D_L(s) = \text{deg det } D_L(s) = r.m$$

onde r é o grau do polinômio $d(s)$.

Veremos a seguir que, dada uma MFD, uma infinidade de outras podem ser obtidas escolhendo-se qualquer matriz polinomial não singular $W^{-1}(s)$ tal que

$$\hat{D}_L(s) = W^{-1}(s)D_L(s)$$

$$\hat{N}(s) = W^{-1}(s)N(s)$$

Assim:

$$\begin{aligned} H(s) &= D_L^{-1}(s)N(s) \\ &= \hat{D}_L^{-1}(s)\hat{N}(s) \end{aligned}$$

O que também se constitui em uma MFD de $H(s)$.

Escrevendo:

$$N(s) = W(s)\hat{N}(s)$$

$$D_L(s) = W(s)\hat{D}_L(s)$$

Podemos ver que a matriz polinomial $W(s)$ produz uma fatoração esquerda de $N(s)$ e $D_L(s)$, sendo assim divisora esquerda de $N(s)$ e $D_L(s)$.

Agora temos :

$$\deg D_L(s) = \deg \hat{D}_L(s) + \deg W(s)$$

isto é,

$$\deg D_L(s) \geq \deg \hat{D}_L(s)$$

Podemos ver que uma MFD de grau mínimo, ou irredutível, pode ser obtida removendo-se uma g.c.l.d. de $N_L(s)$ e $D_L(s)$ sendo que após isto teremos

$$\deg D_L(s) = \deg \hat{D}_L(s)$$

para toda divisora esquerda não singular $W(s)$ de $N(s)$ e $D(s)$.

(Note que, como $D(s)$ é não singular, uma g.c.l.d. de $\{N(s), D(s)\}$ será não singular _ver comentário do lema A.3)

A igualdade anterior se mantém somente se $W(s)$ é unimodular. Se a g.c.l.d. de $N(s)$ e $D_L(s)$ é unimodular, então $N(s)$ e $D_L(s)$ são coprimas pela esquerda . Podemos afirmar que uma MFD $H(s) = D^{-1}(s)N(s)$ é irredutível se $N(s)$ e $D(s)$ são coprimas pela esquerda e nenhuma MFD de ordem mais baixa gerando $H(s)$ existe. Uma MFD esquerda irredutível é também denominada fatoração coprima pela esquerda (l.c.f.) de $H(s)$. MFD's irredutíveis não são únicas, pois se $H(s) = D^{-1}(s)N(s)$ é irredutível , assim é $[W(s)D(s)]^{-1}W(s)N(s)$ para qualquer $W(s)$ unimodular.

Resultados e definições similares podem ser enunciadas para MFD's direitas, como por ex. para a fatoração coprima pela direita (r.c.f.) de $H(s)$.

Exemplo:

Considere a seguinte matriz:

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+1)^2 (s+2)^2} & \frac{s}{(s+2)^2} \\ \frac{-s}{(s+2)^2} & \frac{-s}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

Aplicando a definição de MFD direita ($D(s) = d(s)I_2$) e notando que

$$d(s) = (s+1)^2(s+2)^2,$$

temos:

$$\begin{aligned} H(s) &= \begin{bmatrix} s & s(s+1)^2 \\ -s(s+1)^2 & -s(s+1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s+1)^2 (s+2)^2 & 0 \\ 0 & (s+1)^2 (s+2)^2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= N_1(s)D_1^{-1}(s) \end{aligned}$$

onde $\deg D_1(s) = 8$.

Podemos obter outra MFD tomando o mínimo múltiplo comum dos denominadores de cada coluna de $H(s)$ como o correspondente elemento diagonal de $D(s)$:

$$H(s) = \begin{bmatrix} s & s \\ -s(s+1)^2 & -s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s+1)^2 (s+2)^2 & 0 \\ 0 & (s+2)^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

ou $H(s) = N_2(s)D_2^{-1}(s),$

com $\deg D_2(s) = 6 < 8 = \deg D_1(s).$

Em geral, ambos os métodos mostrados não conduzem diretamente a uma MFD irredutível. De qualquer forma, é possível obter uma MFD com uma matriz *denominador* de grau menor ainda. Podemos verificar que

$$\begin{aligned} H(s) &= \begin{bmatrix} s & 0 \\ -s(s+1)^2 & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s+1)^2 (s+2)^2 & -(s+1)^2 (s+2)^2 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= N_3(s) D_3^{-1}(s) \end{aligned}$$

é outra MFD com $\deg D_3(s) = 5$.

Outra ainda é

$$\begin{aligned} H(s) &= \begin{bmatrix} s & 0 \\ -s & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -(s+1)^2 (s+2) \\ (s+2)^2 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= N_4(s) D_4^{-1}(s) \end{aligned}$$

com $\deg D_4(s) = 5$

Pode ser mostrado que 5 é o menor grau de qualquer matriz *denominador* de $H(s)$.

Um método de construção para MFD's irredutíveis

A construção descrita anteriormente para encontrar gcd's possui algumas características especiais quando $D(s)$ é não singular.

Referindo-se à expressão (A-1) é fácil mostrar que

(i) $U_{22}(s)$ será não singular,

(ii) $N(s)D^{-1}(s) = -U_{22}^{-1}(s)U_{21}(s)$,

(iii) $\{U_{21}(s), U_{22}(s)\}$ serão coprimas pela esquerda, isto é, $U_{22}^{-1}(s)U_{21}(s)$ será uma MFD esquerda irredutível,

(iv) Se $\{N(s), D(s)\}$ são coprimas, então $\deg D(s) = \deg U_{22}(s)$.

Em outras palavras, a partir de uma MFD direita $N(s)D^{-1}(s)$ podemos obter uma MFD esquerda irredutível no processo de encontrar uma gcd dos elementos da MFD direita. Os resultados são similares ao iniciarmos com uma MFD esquerda arbitrária.

Lema A.4: Identidade Simples de *Bezout*

$N(s)$ e $D(s)$ serão coprimas pela direita em $E(R)$ se e somente se existirem matrizes $X(s), Y(s) \in E(R)$ tais que

$$X(s)N(s) + Y(s)D(s) = I \quad (A-6)$$

Prova:

Dadas $N(s)$ e $D(s)$ podemos escrever, como em (A-2) qualquer g.c.r.d. na forma

$R(s) = \hat{X}(s)N(s) + \hat{Y}(s)D(s)$; mas se $N(s)$ e $D(s)$ são coprimas, então $R(s)$ deve ser unimodular, de forma que $R^{-1}(s) \in E(R)$. Portanto, podemos escrever:

$$I = X(s)N(s) + Y(s)D(s)$$

onde $X(s) = R^{-1}(s)\hat{X}(s) \in E(R)$ e $Y(s) = R^{-1}(s)\hat{Y}(s) \in E(R)$.

Contrariamente, suponha que existem $X(s)$ e $Y(s)$ tais que satisfazem

$$X(s)N(s) + Y(s)D(s) = I,$$

e seja $R(s)$ qualquer g.c.r.d.,

$N(s) = \hat{N}(s)R(s)$, $D(s) = \hat{D}(s)R(s)$, então podemos escrever

$$I = [X(s)\hat{N}(s) + Y(s)\hat{D}(s)]R(s),$$

de forma que

$$R^{-1}(s) = X(s)\hat{N}(s) + Y(s)\hat{D}(s) \in E(R).$$

Portanto $R(s)$ deve ser unimodular, ou, equiv., $N(s)$ e $D(s)$ devem ser coprimas pela direita.

□

Comentários:

Uma forma útil de interpretação da identidade é a seguinte: $N(s)$ e $D(s)$ são coprimas pela direita se e somente se a matriz $\begin{bmatrix} N(s)^T & D(s)^T \end{bmatrix}^T$ possui uma inversa esquerda em $E(\mathbb{R})$, já que

$$\begin{bmatrix} X(s) & Y(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) \\ D(s) \end{bmatrix} = I$$

Resultado semelhante pode ser obtido para matrizes coprimas pela esquerda.

Lema A.5: Identidade Generalizada de *Bezout*

Suponha $H(s) \in E(\mathbb{R})$ e sejam $\{N_r(s), D_r(s)\}$, $\{N_L(s), D_L(s)\}$ quaisquer r.c.f e l.c.f de $H(s)$. Suponha ainda que $X(s), Y(s) \in E(\mathbb{R})$ satisfazem $X(s)N_r(s) + Y(s)D_r(s) = I$. Então existem $X^*(s), Y^*(s) \in E(\mathbb{R})$ tais que

$$\begin{bmatrix} Y(s) & X(s) \\ -N_L(s) & D_L(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_r(s) & -X^*(s) \\ N_r(s) & Y^*(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} D_r(s) & -X^*(s) \\ N_r(s) & Y^*(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(s) & X(s) \\ -N_L(s) & D_L(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

(A-7)

onde as matrizes bloco são unimodulares.

Comentário: Diz-se que o par $\{N_r, D_r\}$ é uma fatoração duplamente coprima de $H(s)$.

Prova:

Suprimimos o parâmetro s por simplicidade. Dadas N_r , D_r , N_L e D_L existem $X_1, Y_1 \in E(R)$ tais que $N_L X_1 + D_L Y_1 = I$, já que N_L, D_L são coprimas pela esquerda.

Definindo:

$$E = \begin{bmatrix} Y & X \\ -N_L & D_L \end{bmatrix}$$

e colocando todas as informações na forma matricial, temos

$$E \begin{bmatrix} D_r & -X_1 \\ N_r & Y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (A-8)$$

onde $Q = XY_1 - YX_1$. (Usamos o fato de que $N_L D_r = D_L N_r$, já que $D_L^{-1} N_L = N_r D_r^{-1}$)

A matriz do lado direito de (A-8) é unimodular, de forma que podemos afirmar que E também é unimodular. Com esta consideração notamos que:

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} D_r & -X_1 \\ N_r & Y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Q \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} D_r & -(X_1 + D_r Q) \\ N_r & Y_1 + N_r Q \end{bmatrix}$$

Portanto, a primeira identidade é satisfeita quando

$$X^* = X_1 + D_r Q \quad \text{e} \quad Y^* = Y_1 + N_r Q.$$

A segunda identidade segue do seguinte fato matricial: $CD = I$ implica $DC = I$ quando $\{C, D\}$ são matrizes quadradas (constantes ou polinomiais).

□

A prova do lema A.5 torna claro que, uma vez que N_r , D_r , N_L e D_L tenham sido selecionadas, quaisquer X, Y tais que $XN_r + YD_r = I$ determinam únicas X^*, Y^* tais que a identidade generalizada de *Bezout* se mantém.

A.5. Fatoração Coprima sobre o anel RH_∞

Nesta seção é apresentado um método para obtenção de uma fatoração duplamente coprima da matriz de transferência de um sistema a partir da sua descrição no espaço de estados.

A seguir apresentaremos alguns conceitos relacionados ao espaço de *Hardy* H_∞ . Este espaço consiste de todas as funções complexas $F(s)$ de uma variável complexa s que, no semi plano direito aberto ($\text{Re } s > 0$), sejam:

- analíticas
- limitadas

Por limitada queremos dizer que existe um número real b tal que:

$$|F(s)| \leq b, \quad \text{Re } s > 0.$$

O menor deste valor limite é a norma H_∞ de F , denotada por $\|F\|_\infty$. Equivalentemente

$$\|F\|_\infty \equiv \sup \{ |F(s)| : \text{Re } s > 0 \} \quad (\text{A-9})$$

Vamos nos concentrar nas funções racionais reais, isto é, funções racionais com coeficientes reais.

O subconjunto de H_∞ consistindo de funções reais racionais será denotado por RH_∞ . Note que RH_∞ é um anel. Se $F(s)$ é real racional, então as duas condições anteriores para $F \in \text{RH}_\infty$ tornam-se:

- F é própria ($|F(\infty)|$ é finita)
- F é estável (sem pólos em \mathbf{C}_+)

A seguir precisamos do Teorema do módulo máximo para funções analíticas. Este afirma que se $f(s)$ é analítica em um domínio fechado D e contínua na fronteira de D , então ou f é constante ou $|f(s)|$ atinge valores máximos na fronteira. Pela aplicação direta deste teorema podemos substituir o semi plano direito aberto pelo eixo imaginário:

$$\|F\|_{\infty} = \sup \{ |F(j\omega)| : \omega \in \mathbb{R} \} \quad (\text{A-10})$$

Podemos ver através de (A-10) que F não deve possuir pólos no eixo imaginário. Note ainda que $\|F\|_{\infty}$ é igual a maior distância a partir da origem que o gráfico de Nyquist, para $F(s)$, alcança.

Dizemos que duas funções $f(s)$ e $g(s)$ em RH_{∞} são coprimas (sobre RH_{∞}) se existem $x(s)$ e $y(s) \in \text{RH}_{\infty}$ tal que a Identidade de Bezout

$$f(s)x(s) + g(s)y(s) = 1$$

se mantenha. Uma definição mais primitiva seria: $f(s)$ e $g(s)$ são coprimas se todo divisor comum de $f(s)$ e $g(s)$ possui inversa em RH_{∞} , isto é:

$$h(s), f(s)h^{-1}(s), g(s)h^{-1}(s) \in \text{RH}_{\infty} \Rightarrow h^{-1}(s) \in \text{RH}_{\infty}$$

Mais geralmente, duas matrizes $F(s)$ e $G(s)$ em RH_{∞} são coprimas pela direita (sobre RH_{∞}) se possuem igual número de colunas e existem matrizes $X(s)$ e $Y(s) \in \text{RH}_{\infty}$ tais que

$$\begin{bmatrix} X(s) & Y(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(s) \\ G(s) \end{bmatrix} = X(s)F(s) + Y(s)G(s) = I$$

Isto é equivalente a dizer que a matriz $[F^T \ G^T]^T$ possui inversa esquerda em RH_{∞} .

De forma similar, duas matrizes $F(s)$ e $G(s)$ em RH_{∞} são coprimas pela esquerda (sobre RH_{∞}) se possuem igual número de linhas e existem matrizes $X(s)$ e $Y(s) \in \text{RH}_{\infty}$ tais que:

$$\begin{bmatrix} F(s) & G(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = F(s)X(s) + G(s)Y(s) = I$$

isto é equivalente a dizer que $[F \ G]$ possui inversa direita em RH_∞ .

Considere agora que $H(s)$ é uma matriz real-racional. Uma fatoração coprima pela direita (r.c.f.) de $H(s)$ é uma fatoração $H(s) = N(s)M^{-1}(s)$ onde $N(s)$ e $M(s)$ são matrizes coprimas pela direita em RH_∞ .

De forma similar, uma fatoração coprima pela esquerda (l.c.f.) tem a forma $H(s) = \hat{M}^{-1}(s)\hat{N}(s)$, onde $\hat{M}(s)$ e $\hat{N}(s)$ são coprimas pela esquerda. Está implícito nestas definições que $M(s)$ e $\hat{M}(s)$ devem ser quadradas e não singulares.

Considere um sistema descrito pelas equações

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (\text{A-11})$$

$$y = Cx + Du \quad (\text{A-12})$$

onde A , B , C e D são matrizes constantes reais de dimensões compatíveis. A matriz de transferência deste sistema é dada por:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D,$$

ou em notação compacta $H(s) = (A, B, C, D)$

Deseja-se então, encontrar uma fatoração duplamente coprima de $H(s)$. Tal fatoração é dada pelo teorema A.1.

Teorema A.1: Dado o sistema (A-11), (A-12), suponha que o par (A, B) é estabilizável e o par (C, A) é detectável. Selecione matrizes constantes K e L tal que as matrizes $A_k = A + BK$ e $A_L = A - LC$ sejam *Hurwitz* estáveis (autovalores com parte real negativa). Então $H(s) = N(s)M^{-1}(s) = \hat{M}^{-1}(s)\hat{N}(s)$, com $\{N(s), M(s)\}$ e $\{\hat{N}(s), \hat{M}(s)\}$ matrizes RH_∞ coprimas pela direita e pela esquerda, respectivamente. Para esta fatoração duplamente coprima existem matrizes de transferência $X(s), Y(s), \hat{X}(s), \hat{Y}(s) \in RH_\infty$ satisfazendo as Identidades de *Bezout* (equivalentes) :

$$\begin{bmatrix} Y(s) & X(s) \\ -\hat{N}(s) & \hat{M}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(s) & -\hat{X}(s) \\ N(s) & \hat{Y}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (A-13)$$

$$\begin{bmatrix} M(s) & -\hat{X}(s) \\ N(s) & \hat{Y}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(s) & X(s) \\ -\hat{N}(s) & \hat{M}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (A-14)$$

onde as oito matrizes de transferência mencionadas acima são dadas por (forma reduzida):

$$M(s) = (A_k, B, K, I) \quad N(s) = (A_k, B, C_k, D) \quad (A.15)$$

$$\hat{M}(s) = (A_L, -L, C, I) \quad \hat{N}(s) = (A_L, B_L, C, D) \quad (A.16)$$

$$Y(s) = (A_L, B_L, -K, I) \quad X(s) = (A_L, L, -K, 0) \quad (A.17)$$

$$\hat{Y}(s) = (A_k, L, C_k, I) \quad \hat{X}(s) = (A_k, L, -K, 0) \quad (A.18)$$

com $C_k = C + DK$ e $B_L = B - LD$

Prova:

Procuramos agora dar uma interpretação no espaço de estados iniciando com a descrição

$$H(s) = (A, B, C, D).$$

Seja K tal que $A_k = A+BK$ seja estável. Defina ainda o vetor $\xi = u - Kx$, conhecido como estado parcial, e a matriz $C_k = C+DK$, então

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_k x + B \xi \\ u &= Kx + \xi \\ y &= C_k x + D \xi\end{aligned}$$

com representação na Figura A.1:

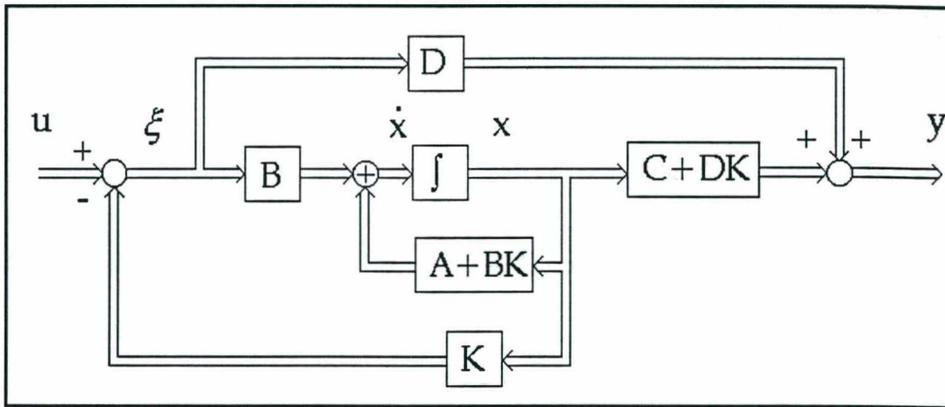


Figura A.1. Interpretação do estado parcial ξ .

Sabe-se que $x(s) = (sI - A_k)^{-1} B \xi(s)$. Multiplicando por K :

$$Kx(s) = K(sI - A_k)^{-1} B \xi(s)$$

Notando que $Kx(s) = u(s) - \xi(s)$, temos:

$$u(s) = [K(sI - A_k)^{-1} B + I] \xi(s)$$

Assim a matriz de transferência de $\xi(s)$ para $u(s)$ é:

$$M(s) = (A_k, B, K, I) \tag{A.19}$$

e a matriz de transferência de $\xi(s)$ para $y(s)$:

$$N(s) = (A_k, B, C_k, D) \quad (A.20)$$

de forma que podemos escrever $u(s) = M(s)\xi(s)$ e $y(s) = N(s)\xi(s)$.

A fim de que o sistema seja determinado, $M(s)$ deve ser não singular, o que leva a $\xi(s) = M^{-1}(s)u(s)$ e $y(s) = N(s)M^{-1}(s)u(s)$. Esta interpretação para o estado parcial é mostrada na Figura A.2:

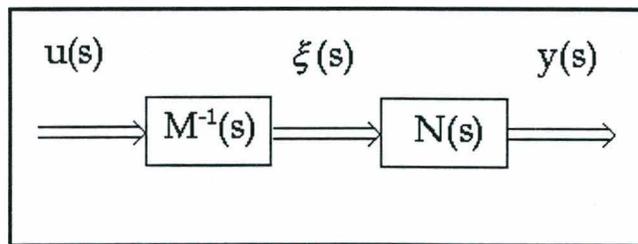


Figura A.2. O estado parcial $\xi(s)$.

Assim, $H(s) = N(s)M^{-1}(s) = (A, B, C, D)$.

Para encontrarmos expressões para $\hat{N}(s)$ e $\hat{M}(s)$ procedemos de forma análoga. Partimos de $H(s)^T = (A^T, C^T, B^T, D^T)$ com (A^T, C^T) estabilizável e (B^T, A^T) detectável.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A^T z + C^T r \\ n &= B^T z + D^T r \end{aligned}$$

Escolhemos L^T de forma que $A_L^T = A^T - C^T L^T$ seja estável. Seja também :

$$B_L^T = B^T - D^T L^T$$

Definindo o vetor $p = r + L^T z$, temos:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_L^T z + C^T p \\ r &= -L^T z + p \\ n &= B_L^T z + D^T p \end{aligned}$$

Sabemos que $z(s) = (sI - A_L^T)^{-1} C^T p(s)$. Multiplicando por L^T :

$$L^T z(s) = L^T (sI - A_L^T)^{-1} C^T p(s)$$

Notando que $L^T z(s) = p(s) - r(s)$, temos:

$$r(s) = [-L^T (sI - A_L^T)^{-1} C^T + I] p(s)$$

Assim, a função de transferência de $p(s)$ para $r(s)$ é

$$\hat{M}^T(s) = (A_L^T, C^T, -L^T, I)$$

e a função de transferência de $p(s)$ para $n(s)$:

$$\hat{N}^T(s) = (A_L^T, C^T, B_L^T, D^T)$$

Portanto, $r(s) = \hat{M}^T(s)p(s)$ e $n(s) = \hat{N}^T(s)p(s)$ de forma que:

$$n(s) = \hat{N}^T(s) [\hat{M}^T(s)]^{-1} r(s)$$

$$H^T(s) = \hat{N}^T(s) [\hat{M}^T(s)]^{-1} = (A^T, C^T, B^T, D^T)$$

Tomando a transposta de ambos os lados da última expressão:

$$H(s) = \hat{M}^{-1}(s) \hat{N}(s) = (A, B, C, D)$$

com

$$\hat{M}(s) = (A_L, -L, C, I) \quad (A-21)$$

$$\hat{N}(s) = (A_L, B_L, C, D) \quad (A-22)$$

A fim de encontrarmos expressões para $X(s)$ e $Y(s)$, começamos com a Identidade de Bezout $X(s)N(s) + Y(s)M(s) = I$. Multiplicamos ambos os lados pelo estado parcial $\xi(s)$:

$$X(s)N(s)\xi(s) + Y(s)M(s)\xi(s) = \xi(s)$$

Sabendo que $N(s)\xi(s) = y(s)$ e $M(s)\xi(s) = u(s)$, temos equação para observação de $\xi(s)$ (esquematizada na Figura A.3):

$$X(s)y(s) + Y(s)u(s) = \xi(s) \quad (\text{A-23})$$

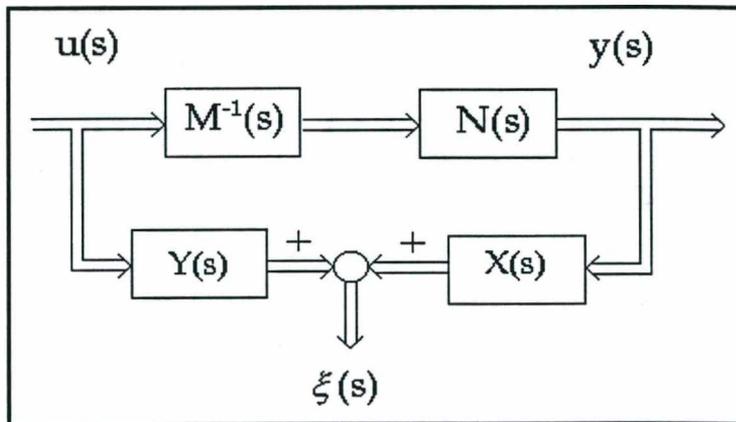


Figura A.3. Observando o estado parcial.

Considere o observador de estados

$$\hat{\dot{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x} - Du)$$

ou

$$\hat{\dot{x}} = A_L\hat{x} + B_Lu + Ly \quad (\text{A-24})$$

com

$$A_L = A - LC \quad \text{e} \quad B_L = B - LD$$

Procuraremos chegar à expressão (A-23) partindo de (A-24). Assim:

$$\hat{x}(s) = (sI - A_L)^{-1} B_L u(s) + (sI - A_L)^{-1} L y(s) \quad (A-25)$$

Tomando $\hat{\xi}(s) = u(s) - K\hat{x}(s)$ e multiplicando (A-25) por K :

$$u(s) - \hat{x}(s) = K(sI - A_L)^{-1} B_L u(s) + K(sI - A_L)^{-1} L y(s)$$

ou

$$\hat{\xi}(s) = [-K(sI - A_L)^{-1} B_L + I] u(s) - K(sI - A_L)^{-1} L y(s)$$

Tomando $\hat{\xi}(s)$ como uma estimativa para $\xi(s)$ e comparando a expressão anterior com (A-23), temos finalmente:

$$X(s) = (A_L, L, -K, 0) \quad (A-26)$$

$$Y(s) = (A_L, B_L, -K, I) \quad (A-27)$$

Procedemos de forma semelhante para a obtenção de $\hat{X}(s)$ e $\hat{Y}(s)$.

□

Exemplo de fatoração duplamente coprima:

$$H(s) = \frac{s-1}{s(s-2)}$$

Seja a seguinte representação espaço de estados de $H(s)$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0] \text{ e } D = 0$$

Estabelecendo os autovalores de $A_k = A + BK$ em $[-1 \ -1]$, temos:

$$K = [k_1 \ k_2] = [-9 \ -5]$$

Desta forma:

$$N(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2}, \quad M(s) = \frac{s(s-2)}{(s+1)^2}$$

Estabelecendo os autovalores de $A_L = A - LC$ em $[-1 \ -1]$, temos:

$$L = [L_1 \ L_2] = [4 \ 1]^T$$

E assim

$$X(s) = \frac{41s-1}{(s+1)^2}, \quad Y(s) = \frac{s^2+6s-23}{(s+1)^2}$$

Para este exemplo:

$$\begin{aligned} \hat{X}(s) &= X(s), & \hat{Y}(s) &= Y(s) \\ \hat{N}(s) &= N(s), & \hat{M}(s) &= M(s) \end{aligned}$$

APÊNDICE - B

PROPRIEDADES DE SISTEMAS

Descrição geral de um sistema no espaço de estados

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0 \quad (\text{B.1})$$

$$y = Cx + Du \quad (\text{B.2})$$

B.1. Controlabilidade

O sistema dinâmico descrito por (B-1),(B-2) ou o par (A, B) é dito ser controlável se o estado $x(t_f)$ do sistema, no tempo t_f , pode ser forçado a tomar qualquer valor desejado pela aplicação de uma entrada de controle $u(t)$ sobre um período de tempo t_0 até t_f .

As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) (A, B) é controlável.

(ii) A matriz $W_c(t) := \int_0^t e^{A\tau} B B^* e^{A^*\tau} d\tau$ é positiva definida para qualquer $t > 0$.

(iii) A matriz de controlabilidade $C = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$ possui posto linha completo (*full row rank*)

(iv) A matriz $[A - \lambda I \ B]$ tem posto linha completo para todo λ em \mathbf{C} .

(v) Sejam λ e x qualquer autovalor e qualquer autovetor esquerdo correspondente de A , isto é, $x^*A = x^*\lambda$, então $x^*B \neq 0$.

(vi) Os autovalores de $A - BK$ podem ser livremente atribuídos (com a restrição de que autovalores complexos apareçam em pares conjugados) através de escolha adequada de K .

B.2. Estabilizabilidade

O sistema dinâmico descrito por (B-1),(B-2) ou o par (A, B) é dito ser estabilizável se existe um uma realimentação de estados $u = -Kx$ tal que o sistema seja estável; isto é, $A - BK$ seja estável.

As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) (A, B) é estabilizável.
- (ii) A matriz $[A - \lambda I, B]$ tem posto linha completo para todo $\text{Re } \lambda \geq 0$.
- (iii) Para todo λ e x tais que $x^*A = x^* \lambda$ e $\text{Re } \lambda \geq 0 \rightarrow x^*B \neq 0$.
- (iv) Existe uma matriz K tal que $A - BK$ é estável.

B.3. Observabilidade

O sistema dinâmico descrito por (B-1),(B-2) ou o par (C, A) é dito ser observável se qualquer vetor de estados iniciais $x(t_0)$ pode ser reconstruído examinando-se a saída do sistema $y(t)$ sobre algum período de tempo t_0 até t_f .

As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) (C, A) é observável.
- (ii) A matriz $W_o(t) := \int_0^t e^{A^*t} C^* C e^{At} dt$ é positiva definida para qualquer $t > 0$.
- (iii) A matriz de observabilidade

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \text{ possui posto coluna completo (full column rank)}$$

(iv) A matriz $\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$ possui posto coluna completo todo λ em \mathbf{C} .

(v) Sejam λ e y qualquer autovalor e qualquer autovetor direito correspondente de A , isto é, $Ay = \lambda y$, então $Cy \neq 0$.

(vi) Os autovalores de $A - LC$ podem ser livremente atribuídos (com a restrição de que autovalores complexos apareçam em pares conjugados) através de escolha adequada de L .

(vii) (A^*, C^*) é controlável.

B.4. Detectabilidade

O sistema dinâmico descrito por (B-1),(B-2) ou o par (C, A) é dito ser detectável se $A - LC$ é estável para algum L .

As seguintes afirmações são equivalentes

(i) (C, A) é detectável.

(ii) A matriz $\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$ possui posto coluna cheio para todo $\text{Re } \lambda \geq 0$.

(iii) Para todo λ e x tais que $Ax = \lambda x$ e $\text{Re } \lambda \geq 0 \rightarrow Cx \neq 0$.

(iv) Existe uma matriz L tal que $A - LC$ é estável.

(v) (A^*, C^*) é estabilizável.

APÊNDICE - C

CONVEXIDADE

- Se a_1, a_2, \dots, a_m são escalares, então, uma combinação linear dos vetores $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ é definida através de:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \quad (a)$$

- Uma combinação linear da forma (a) é chamada de uma combinação afim de $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ quando $a_1 + a_2 + \dots + a_m = 1$. O conjunto de todas as combinações afins de dois vetores x_1 e x_2 é formado pela linha reta que passa através de x_1 e x_2 .

- Uma combinação convexa de um conjunto de vetores $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ é uma combinação linear da forma (a) quando, além de $a_1 + a_2 + \dots + a_m = 1$, tivermos $a_1, a_2, \dots, a_m \geq 0$. O conjunto de todas as combinações convexas de dois vetores x_1 e x_2 é formado pelo segmento de reta que une x_1 a x_2 .

- Um conjunto C é chamado de conjunto convexo se, ao conter dois pontos (vetores) x_1 e x_2 , também contém o segmento de reta ligando x_1 a x_2 . Em termos algébricos, o conjunto C é convexo se, sempre que $x_1 \in C$ e $x_2 \in C$, então $a_1x_1 + a_2x_2 \in C$. Um conjunto convexo necessariamente contém todas as combinações convexas de qualquer número de seus elementos.

- Uma função $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de função convexa em C se e somente se, para todo $x_1, x_2 \in C$: $f(a_1x_1 + a_2x_2) \leq a_1f(x_1) + a_2f(x_2)$, sempre que $a_1 + a_2 = 1$ e $a_1, a_2 \geq 0$. O mínimo local de uma função convexa sobre um conjunto convexo (restrições) também será mínimo global. Esta é a característica mais importante de um problema de otimização convexa.

- Para uma função afim o requerimento é que, para todo $x_1, x_2 \in C$: $f(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1f(x_1) + a_2f(x_2)$, sempre que $a_1 + a_2 = 1$ e $a_1, a_2 \geq 0$ (redundante se $C = \mathbb{R}^n$). Funções afins são caracterizadas pelo fato de que preservam combinações convexas.

BIBLIOGRAFIA

- [1] D. G. Luenberger. "Observing the state of a linear system," *IEEE Trans. on Military Electronics*, April 1964, pp. 74-80.
- [2] D. G. Luenberger. "Observers for multivariable systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1966, vol AC-11, pp. 190-197.
- [3] D. G. Luenberger. "An introduction to Observers," *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1971, vol AC-16, pp. 596-602.
- [4] B. D. O. Anderson and J.B. Moore. "Optimal control : Linear Quadratic Methods", N. J.: Prentice-Hall, Inc., 1989.
- [5] K. Zhou, J. C. Doyle and K. Glover. "Robust and optimal control," N. J.: Prentice-Hall, Inc., 1996.
- [6] Y. E. Faitakis and J. C. Kantor. "Residual generation and fault detection for discrete-time systems using an l_∞ technique," *Int. J. Control*, 1996, vol. 64, pp. 155-174.
- [7] B. Friedland. "Control System Design: An introduction to state space methods", McGraw Hill, Inc., 1986.
- [8] C. T. Chen. "Linear System theory and design", New York: Oxford University Press, 1984.
- [9] K. Ogata. "Modern Control Engineering", N. J.: Prentice-Hall, Inc., 1990.
- [10] R. E. Kalman. "A new approach to linear filtering and prediction problems", *Trans. ASME (J. Basic Engineering)*, 1960, vol 82D, pp. 35-45.
- [11] R. E. Kalman and R.S. Bucy. "New results in linear filtering and prediction problems", *Trans. ASME (J. Basic Engineering)*, 1961, vol. 83D, pp. 95-108.
- [12] A. H. Jazwinski. "Stochastic processes and filtering theory", New York: Academic Press, 1970.
- [13] D. C. Youla, H. A. Jabr and J. J. Bonjiorno. "Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers: part I", *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1976, vol. AC-21, pp. 3-13.

- [14] D. C. Youla, H. A. Jabr and J. J. Bonjiorno. "Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers: part II", *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1976, vol. AC-21, pp. 319-338.
- [15] S. Boyd, C. Barratt and S. Norman. "Linear controller design: limits of performance via convex optimization", *Proc. of IEEE*, 1990, vol. 78, pp.529-574.
- [16] G. C. Goodwin and R. H. Middleton. "The class of all stable unbiased state estimators", *System & Control Letters*, 1989, vol. 13, pp. 161-163.
- [17] J. M. F., C. E. de Souza and G.C. Goodwin. "Novel techniques for th design of robust state estimators", *Proc. of 11th IFAC World Congress, 1990*, vol. 3, pp. 41-46.
- [18] X. Ding, L. Guo and P. M. Frank. "Parametrization of linear observers and its application to observer design", *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1994, vol.39, pp. 1648-1652.
- [19] A. Stoorvogel. "The H_∞ control problem: a state space approach", U.K.: Prentice-Hall, Inc., 1992.
- [20] K. M. Nagpal and P. Khargonekar. "Filtering and smoothing in a H_∞ setting", *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1991, vol. 36, pp. 152-166.
- [21] M. A. Dahleh and I. J. Diaz-Bobillo. "Control of uncertain systems: A linear programming approach", N. J.: Prentice Hall Inc., 1995.
- [22] M. A. Dahleh and J. B. Pearson Jr. "Optimal rejection of persistent disturbances, robust stability, and mixed sensitivity minimization", *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1988, vol. 33, pp. 722-731.
- [23] B. A. Francis. "A course in H_∞ control theory", Berlin: Springer-Verlag, 1987.
- [24] Y. S. Hung. "Model-matching approach to H_∞ filtering", *IEEE Proc.* , 1993, vol. 140, pp. 133-139.
- [25] C. E. de Souza. " H_∞ and robust estimation", *Revista Controle e Automação*, 1994, vol. 5, pp. 4-46.
- [26] S. Boyd, V. Balakrishnan, C. Barratt, N. M. Khraishi, X. Li, D. G. Meyer and S. Norman. "A new CAD method and associated architectures for linear controllers" , *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1988, vol. 33, pp. 268-283.

- [27] J. B. Pearson and B. Bamieh. "On minimizing maximum errors", *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1990, vol. 35, pp. 598-601.
- [28] T. Kailath. "Linear Systems", N. J. : Prentice-Hall, Inc., 1980.
- [29] M. Vidyasagar. "Control System Synthesis: a factorization approach", Cambridge: MIT Press, 1985.
- [30] Y. X. Yao, Y. M. Zhang and R. Kovacevic. "Parametrisation of observers for time delay systems and its application in observer design", *IEE Proc. Control Theory Appl.*, 1996, vol. 143, pp. 225-232.
- [31] G. V. Reklaitis, A. Ravindran and K. M. Ragsdell. "Engineering optimization: methods and applications", Wiley , 1983.
- [32] B. Chen, Y. Cheng and C. Lee. "A genetic approach to mixed H_2/H_∞ optimal PID control", *IEEE Control Systems*, october 1995.
- [33] K. A. Fegley, S. Blum, J. O. Bergholm, A. J. Calise, J. E. Marowitz, G. Porcelli and L. P. Sinha. "Stochastic and deterministic design and control via linear and quadratic programming", *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1971, vol. AC-16, pp. 759-765.
- [34] S. Jayasuriya. "On the determination of the worst allowable persistent bounded disturbance for a system with constraints", *Trans. of the ASME*, 1995, vol. 117, pp. 126-133.
- [35] P. Khargonekar and M. A. Rotea. "Mixed H_2/H_∞ filtering", *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1996, vol. 06, pp. 313-330.
- [36] F. Blanchini. "Feedback control for linear time-invariant systems with state and control bounds in the presence of disturbances", *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1990, vol. 35, pp. 1231-1234.
- [37] C. Elmas and H. Zelaya-De La Parra. "Application of a full order extended Luenberger observer for a position sensorless operation of a switched reluctance motor drive", *IEE Proc. Control Theory Appl.*, 1996, vol. 143, pp. 401-408.