

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**FILTRAGEM ADAPTÁVEL E  
PROCESSAMENTO MULTIBANDA DE SINAIS:  
ESTRUTURAS ADAPTÁVEIS IFIR**

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDA  
À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE  
EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

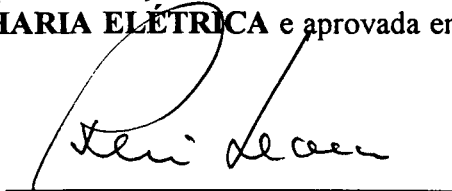
**EDUARDO BECK**

**FLORIANÓPOLIS, OUTUBRO DE 1994**

**FILTRAGEM ADAPTÁVEL, PROCESSAMENTO MULTIBANDA DE SINAIS:  
ESTRUTURAS ADAPTÁVEIS IFIR**

CANDIDATO: EDUARDO BECK

Esta dissertação foi julgada para obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA - ESPECIALIDADE ENGENHARIA ELÉTRICA** e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação.



Prof. RUI SEARA, Dr.  
ORIENTADOR

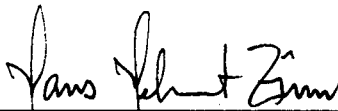


Prof. ÊNIO VALMOR KASSICK, Dr.  
COORDENADOR DO CURSO DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

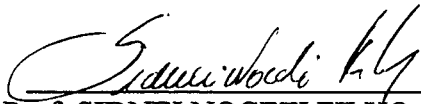
BANCA EXAMINADORA:



Prof. RUI SEARA, Dr.  
PRESIDENTE



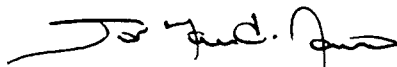
Prof. HANS HELMUT ZÜRN, Ph. D.



Prof. SIDNEI NOCETI FILHO, D.Sc.



Prof. CARLOS AURÉLIO FARIA DA ROCHA, M.Sc.



Prof. JOÃO MARCOS TRAVASSOS ROMANO, Dr.

À minha esposa Milene, que me acompanhou e me apoiou durante toda esta jornada e, com amor e carinho, soube manter a tranquilidade e a união dentro da nossa família.

À minhas filhas Kátiuscia e Gabrielle, que representaram um incentivo a mais para a continuidade desta tarefa e compreenderam a necessidade de minhas constantes ausências.

À meu colega e amigo Thomas, que, por sua grande capacidade intelectual e seu evoluído espírito, com certeza deve estar hoje cumprindo uma missão ainda mais grandiosa do que aquela que vinha desenvolvendo entre nós.

## AGRADECIMENTOS

Desejo registrar meus sinceros agradecimentos:

Ao Laboratório de Instrumentação Eletrônica (LINSE) e aos professores que o integram, pelo suporte que, sem o qual, não seria possível a realização desta dissertação. Em especial ao Prof. Rui por sua orientação a este trabalho.

Aos meus colegas e amigos do LINSE que, além do apoio irrestrito sempre que necessário, proporcionaram um ambiente bastante agradável e amigável de trabalho, que se reflete na convivência fora dele.

À Escola Técnica Federal de Santa Catarina (ETF/SC), que me apoiou, principalmente, nestes momentos finais mais críticos.

Ao CPqD-TELEBRÁS e ao Eng. José Pedro que, com seu atendimento impecável, prestaram grande contribuição ao desenvolvimento das simulações.

Aos meus pais, seu Arno e dona Ruth, que sempre incentivaram e apoiaram esta iniciativa e estiveram sempre presentes em nossos bons e maus momentos.

E, em especial, ao meu amigo Elton, cuja participação incondicional na realização deste trabalho, editando as figuras e colaborando na edição final do texto, foi decisiva para sua conclusão no prazo determinado. Estendo estes agradecimentos à sua esposa Luciana, que soube entender as horas de serão que o Elton dedicou à este trabalho.

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS .....	viii
LISTA DE TABELAS .....	xiv
LISTA DE SÍMBOLOS .....	xv
RESUMO .....	xix
ABSTRACT .....	xx
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO .....	1
1.1 Introdução .....	1
1.2 Organização do Trabalho .....	4
CAPÍTULO 2 - FILTRAGEM ADAPTÁVEL .....	6
2.1 Introdução .....	6
2.1.1 Sistema malha aberta e sistema malha fechada .....	7
2.1.2 Exemplos de estruturas de adaptação .....	8
2.1.3 Organização do capítulo .....	12
2.2 Características do sistema adaptável .....	12
2.2.1 A estrutura FIR adaptável .....	13
2.2.2 Erro médio quadrático .....	15
2.2.3 Superfície de desempenho e gradiente .....	16
2.2.4 Interpretação Geométrica da Função de Desempenho .....	19
2.3 Determinação do vetor ótimo .....	22

2.3.1 Método de Newton .....	23
2.3.2 Algoritmo "Steepest Descent" .....	24
2.3.3 Algoritmo LMS .....	28
<b>CAPÍTULO 3 - PROCESSAMENTO MULTIBANDA DE SINAIS .....</b>	<b>34</b>
3.1 Introdução .....	34
3.1.1 Organização do Capítulo .....	36
3.2 Dizimação e Interpolação .....	36
3.3 Aplicações .....	39
3.4 Decomposição Polifásica .....	44
3.5 Banco de Filtros .....	48
3.5.1 Banco de Filtros DFT .....	49
3.5.2 Banco de Filtros com Estrutura em Árvore (Banco de Filtros QMF) .....	58
3.6 Processamento Multibanda e Filtragem Adaptável .....	66
<b>CAPÍTULO 4 - FILTROS IFIR .....</b>	<b>71</b>
4.1 Introdução .....	71
4.2 A Estrutura IFIR .....	72
4.3 Interpoladores .....	75
4.3.1 Filtro Pente .....	77
4.3.2 Interpolação Linear .....	78
4.3.3 Interpolação pelo Método de Lagrange .....	81
4.3.4 Outros Interpoladores .....	82
<b>CAPÍTULO 5 - FILTRAGEM ADAPTÁVEL UTILIZANDO ESTRUTURA IFIR .....</b>	<b>86</b>
5.1 Introdução .....	86
5.2 Sistemas Adaptáveis Utilizando Estrutura IFIR .....	86
5.2.1 Função de Desempenho .....	87

5.2.2 Algoritmo LMS .....	90
5.3 Considerações sobre o Processo de Convergência do Sistema IFIR .....	92
5.3.1 Superfície de Desempenho no Processo de Convergência .....	93
5.3.2 Coeficiente de Convergência .....	98
5.4 Análise de Simulações para IFIR Adaptável .....	99
5.4.1 Convergência do Algoritmo "Steepest Descent" .....	100
5.4.2 Convergência do Algoritmo LMS .....	108
5.5 Filtragem Adaptável IFIR em Processamento Multibanda:	
Tratamento Individual por Sub-banda .....	116
5.5.1 Análise de Simulações para uma Única Sub-banda .....	124
5.6 Filtragem Adaptável IFIR em Processamento Multibanda:	
Tratamento Global do Sistema .....	128
5.6.1 Análise de Simulações para Sistema Multibanda Completo .....	131
5.7 Considerações sobre a Adaptação do Filtro Esperso e do Interpolador Conjuntamente ...	134
5.8 Conclusões .....	137
CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES .....	139
6.1 Conclusões .....	139
6.2 Sugestões para Trabalhos Futuros .....	140
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	141

## LISTA DE FIGURAS

Fig. 2.1. Sistema adaptável em malha aberta .....	8
Fig. 2.2. Sistema adaptável em malha fechada .....	8
Fig. 2.3. Estrutura básica de um sistema adaptável em malha fechada .....	9
Fig. 2.4. Exemplos de estruturas adaptáveis. (a) Sistema de predição. (b) Sistema de cancelamento de interferências. (c) Equalizador. (d) Sistema de identificação .....	10
Fig. 2.5. Filtro adaptável FIR .....	14
Fig. 2.6. Superfície de desempenho de um sistema com apenas dois coeficientes [5] .....	17
Fig. 2.7. Superfície de desempenho para dois coeficientes apresentada no plano $w_0w_1$ [5] .....	18
Fig. 2.8. Convergência de um sistema para dois coeficientes pelo método de Newton [5] .....	24
Fig. 2.9. Convergência de um sistema para dois coeficientes utilizando o algoritmo "steepest descent" [5] .....	25
Fig. 2.10. Convergência de um sistema para dois coeficientes utilizando o algoritmo LMS [5] ...	29
Fig. 2.11. Estrutura de identificação de sistemas para determinação dos limites de convergência para o algoritmo LMS .....	30
Fig. 3.1. Estrutura básica de um sistema de processamento de sinais multibanda .....	35
Fig. 3.2. Componentes da estrutura de um sistema multibanda .....	35
Fig. 3.3. Processos de dizimação e interpolação. (a) Sinal de banda completa de entrada do sistema. (b) Sinal filtrado por um filtro passa-baixa (sub - banda 0). (c) Sinal da sub-banda 0 dizimado com $M = 4$ . (d) Sinal da sub-banda 0 interpolado com $L = 4$ . (e) Sinal da sub-banda 0 recomposto por filtragem .....	38
Fig. 3.4. Processo de digitalização de sinais em sistemas digitais de áudio, onde $f_c \Rightarrow$ frequência de corte superior e $f_s \Rightarrow$ frequência de amostragem utilizada na digitalização. (a) Pré-filtragem seletiva para sub-amostragem crítica. (b) Pré-filtragem menos seletiva para subamostragem não crítica. (c) Filtragem digital e sub-amostragem .....	41



Fig. 3.5. Transformação FDM para TDM .....	42
Fig. 3.6. Transformação TDM para FDM .....	43
Fig. 3.7. Processo de dizimação .....	44
Fig. 3.8. Processo de interpolação .....	44
Fig. 3.9. Representação de um sistema decomposto na forma polifásica (duas parcelas) .....	45
Fig. 3.10. Decomposição polifásica de um filtro de dizimação .....	46
Fig. 3.11. Estrutura alternativa do filtro de dizimação com decomposição polifásica. (a) Representação utilizando blocos. (b) Representação utilizando chave .....	46
Fig. 3.12. Estrutura alternativa do filtro de interpolação com decomposição polifásica .....	47
Fig. 3.13. Estrutura alternativa do filtro de dizimação com decomposição polifásica (fator de dizimação $M$ ) .....	48
Fig. 3.14. Estrutura para obtenção da DFT de $x[n]$ na frequência $\omega_k$ .....	50
Fig. 3.15. Modulação pela função complexa $e^{-j\omega_k n}$ e filtragem, para obtenção da DFT de $x[n]$ na frequência $\omega_k$ . (a) Resposta em frequência de $x[n]$ . (b) $x[n] \cdot e^{-j\omega_k n}$ em frequência e filtro com resposta ao impulso $w_j[n]$ (linha tracejada) .....	51
Fig. 3.16. Analisador de espectro utilizando banco de filtros DFT .....	52
Fig. 3.17. Estrutura alternativa de modulação onde são obtidos sinais reais (modulação em quadratura) .....	52
Fig. 3.18. Sistema de processamento de sinais multibanda utilizando banco de filtros DFT. (a) Analisador. (b) Sintetizador .....	53
Fig. 3.19. Estrutura DFT com filtros modulados por uma função complexa para $M = K$ . (a) Analisador. (b) Sintetizador .....	55
Fig. 3.20. Efeito da estrutura da Fig. 3.19 em um sistema com 3 sub-bandas e dizimação igual a 2. (a) Sub-banda 1. (b) Sub-banda 1 após a dizimação .....	56
Fig. 3.21. Banco de filtros DFT de dizimação implementado por decomposição polifásica ( $M = 2$ ) .....	56
Fig. 3.22. Banco de filtros DFT de dizimação implementado com decomposição polifásica ( $M$ qualquer) .....	57

Fig. 3.23. Estrutura básica de um banco de filtros de dizimação por estrutura em árvore .....	58
Fig. 3.24. Inversão provocada pelo filtro passa-alta. (a) Espectro resultante da filtragem de um sinal por um filtro passa-alta. (b) Espectro resultante da dizimação deste sinal ...	59
Fig. 3.25. Estrutura em árvore de banco de filtros não uniforme. (a) Estrutura em blocos. (b) Resultado no espectro de frequência .....	59
Fig. 3.26. Estrutura multibanda, sem a realização de qualquer processamento em sub-banda ...	60
Fig. 3.27. Representação em frequência do sistema dizimado em cada sub-banda. (a) Sub-banda 0. (b) Sub-banda 1 .....	61
Fig. 3.28. Estrutura de identificação de sistemas (exemplo, cancelamento de eco) multibanda .....	68
Fig. 3.29. Estrutura de um filtro adaptável em identificação de sistemas multibanda com termos cruzados (exemplo com duas bandas) .....	70
Fig. 4.1. Estrutura básica de um filtro IFIR .....	73
Fig. 4.2. Respostas ao impulso e em frequência relativas a filtragem IFIR. (a) Filtro original a ser implementado. (b) Filtro esparso. (c) Filtro IFIR completo .....	74
Fig. 4.3. Respostas ao impulso e em frequência relativas a um filtro IFIR passa-faixa com $L = 3$ . (a) Filtro original a ser implementado. (b) Filtro esparso. (c) Filtro IFIR completo .....	76
Fig. 4.4. (a) Filtro esparso com $L = 2$ . (b) Filtro interpolado utilizando $I(z) = 1 + z^{-1}$ .....	78
Fig. 4.5. Filtro pente para $L = 5$ . (a) Resposta ao impulso. (b) Resposta em frequência [2] .....	78
Fig. 4.6. Interpolação linear .....	79
Fig. 4.7. Interpolador linear para $L = 3$ . (a) Estrutura do filtro FIR com $N = 5$ , considerando na entrada a amostra $x[0]$ . (b) Sinal de entrada $x[n]$ . (c) Sinal de saída $y[n]$ .....	80
Fig. 4.8. Comparação de respostas em frequência de filtros interpoladores de Lagrange para $L = 5$ [58] .....	82

Fig. 4.9. Interpolador formado pela cascata de duas seções de segunda ordem. (a) Resposta em frequência de $I_1(z)$ . (b) Resposta em frequência de $I_2(z)$ . (c) Resposta em frequência de $I(z) = I_1(z)I_2(z)$ .....	84
Fig. 4.10. Gabarito para projeto de um interpolador para $L = 5$ .....	85
Fig. 5.1. Sistema adaptável utilizando estrutura IFIR .....	87
Fig. 5.2. Nova estrutura do sistema adaptável IFIR com inversão de posições de $We(z)$ e $I(z)$ .....	91
Fig. 5.3. Identificação de sistemas utilizando estrutura IFIR adaptável .....	93
Fig. 5.4. Sistema a identificar. (a) Resposta ao impulso. (b) Resposta em frequência .....	101
Fig. 5.5. Curvas de convergência para estrutura FIR. (a) 1. $\mu = 1.0 \times 10^{-1}$ , 2. $\mu = 3.0 \times 10^{-1}$ , 3. $\mu = 5.0 \times 10^{-1}$ , 4. $\mu = 7.0 \times 10^{-1}$ , 5. $\mu = 9.0 \times 10^{-1}$ . (b) $\mu = 1.1$ .....	104
Fig. 5.6. Curvas de convergência para estrutura IFIR com filtro pente. (a) 1. $\mu = 5.0 \times 10^{-2}$ , 2. $\mu = 1.5 \times 10^{-1}$ , 3. $\mu = 2.5 \times 10^{-1}$ , 4. $\mu = 3.5 \times 10^{-1}$ , 5. $\mu = 4.5 \times 10^{-1}$ . (b) $\mu = 5.5 \times 10^{-1}$ .....	105
Fig. 5.7. Curvas de convergência para estrutura IFIR com interpolador linear. (a) 1. $\mu = 5.0 \times 10^{-2}$ , 2. $\mu = 1.5 \times 10^{-1}$ , 3. $\mu = 2.5 \times 10^{-1}$ , 4. $\mu = 3.5 \times 10^{-1}$ , 5. $\mu = 4.5 \times 10^{-1}$ . (b) $\mu = 5.5 \times 10^{-1}$ .....	106
Fig. 5.8. 1. Convergência para a estrutura FIR convencional com $\mu = 1.0 \times 10^{-2}$ . 2. Estrutura IFIR com interpolador linear com $\mu = 5.0 \times 10^{-3}$ . 3. Estrutura IFIR com interpolador de Lagrange de décimo grau com $\mu = 5.0 \times 10^{-3}$ .....	107
Fig. 5.9. Estrutura IFIR adaptável para análise dos limites de convergência .....	109
Fig. 5.10. Curvas de convergência do algoritmo LMS para estrutura FIR. (a) 1. $\mu = 1.0 \times 10^{-3}$ , 2. $\mu = 3.0 \times 10^{-3}$ , 3. $\mu = 5.0 \times 10^{-3}$ , 4. $\mu = 7.0 \times 10^{-3}$ , 5. $\mu = 9.0 \times 10^{-3}$ . (b) $\mu = 1.1 \times 10^{-2}$ .....	111
Fig. 5.11. Curvas de convergência para estrutura IFIR com filtro pente. (a) 1. $\mu = 5.0 \times 10^{-2}$ , 2. $\mu = 1.5 \times 10^{-1}$ , 3. $\mu = 3.0 \times 10^{-1}$ , 4. $\mu = 4.5 \times 10^{-1}$ , 5. $\mu = 5.5 \times 10^{-1}$ . (b) $\mu = 7.0 \times 10^{-1}$ .....	112

- Fig. 5.12. Curvas de convergência para estrutura IFIR com interpolador linear. (a) 1.  $\mu = 1.5 \times 10^{-3}$ , 2.  $\mu = 2.5 \times 10^{-3}$ , 3.  $\mu = 4.0 \times 10^{-3}$ , 4.  $\mu = 5.5 \times 10^{-3}$ , 5.  $\mu = 7.5 \times 10^{-3}$ . (b)  $\mu = 8.5 \times 10^{-3}$  ..... 113
- Fig. 5.13. Melhores desempenhos na convergência do algoritmo LMS para as estruturas em estudo. 1. FIR ( $\mu = 5.0 \times 10^{-3}$ ). 2. IFIR com filtro pente ( $\mu = 3.0 \times 10^{-3}$ ). 3. IFIR com interpolador linear ( $\mu = 4.0 \times 10^{-3}$ ) ..... 114
- Fig. 5.14. Detalhe das primeiras iterações da curva de convergência do algoritmo LMS para a estrutura IFIR com filtro pente ( $\mu = 3.0 \times 10^{-3}$ ) ..... 115
- Fig. 5.15. Estrutura adaptável para identificação de sistemas, aplicado a apenas uma sub-banda de um sistema de processamento multibanda, utilizando dizimação e interpolação ..... 117
- Fig. 5.16. Estrutura adaptável para identificação de sistemas, aplicado a apenas uma sub-banda de um sistema de processamento multibanda, utilizando filtragem IFIR ..... 118
- Fig. 5.17. Respostas em frequência referentes ao sistema desconhecido. (a) Sistema desconhecido global. (b) Banda de baixas frequências do sistema desconhecido, resposta final desejada ..... 120
- Fig. 5.18. Respostas em frequência referentes ao sistema adaptável utilizando dizimação e interpolação. (a) Banda de baixas frequências do sistema desconhecido após a dizimação. (b) Filtro de dizimação ou análise. (c) Filtro de análise após a dizimação. (d) Resposta desejada do filtro adaptável. (e) Filtro adaptável após a interpolação (inclusão de zeros) e filtro de interpolação (tracejado). (f) Resposta final ..... 120
- Fig. 5.19. Respostas em frequência referentes ao sistema adaptável utilizando filtro IFIR. (a) Resposta desejada do filtro esparsos adaptável e filtro interpolador (tracejado). (b) Resposta final ..... 123
- Fig. 5.20. Nova estrutura para representação do filtro esparsos ..... 124
- Fig. 5.21. Resposta ao impulso correspondente ao eco local para uma linha de assinante (caso 4 - ANSI) ..... 125

Fig. 5.22. Resposta em frequência correspondente à resposta ao impulso da Fig. 5.21 .....	125
Fig. 5.23. Curvas de convergência para os sistemas adaptáveis em uma sub-banda. 1. Sistema com redução da taxa de amostragem ( $\mu = 2.0 \times 10^{-2}$ ). 2. IFIR ( $\mu = 1.5 \times 10^{-2}$ ) .....	127
Fig. 5.24. Respostas ao impulso do sistema desconhecido filtrado e dizimado e do sistema adaptado utilizando redução da taxa de amostragem .....	127
Fig. 5.25. Respostas ao impulso do sistema desconhecido filtrado e do sistema adaptado IFIR .....	128
Fig. 5.26. Estrutura de um filtro decomposto em duas sub-bandas utilizando filtros IFIR .....	129
Fig. 5.27. Representação alternativa da estrutura da Fig. 5.26 .....	131
Fig. 5.28. Estrutura adaptável para sistema multibanda utilizando filtros IFIR com comparação das saídas após a soma das saídas das sub-bandas .....	133
Fig. 5.29. Curvas de convergência para os sistemas adaptáveis banda completa. 1. Para FIR convencional. 2. Para decomposição em filtros IFIR .....	133
Fig. 5.30. Estrutura adaptável IFIR com o filtro esparsos e interpolador adaptáveis .....	135
Fig. 5.31. Configuração utilizada para adaptação das primeiras iterações .....	136

**LISTA DE TABELAS**

Tabela 5.1	Erros médios quadráticos residuais da adaptação, utilizando algoritmo "steepest descent", para as estruturas FIR convencional e IFIR em banda completa .....	108
Tabela 5.2	Valores dos limites superiores e valores ótimos de $\mu$ , para adaptação através do algoritmo LMS, para as estruturas FIR, IFIR com interpolador tipo filtro pente e IFIR com interpolador linear .....	110
Tabela 5.3	Erros médios quadráticos residuais, utilizando algoritmo LMS, para a adaptação das estruturas FIR, IFIR com interpolador tipo filtro pente e IFIR com interpolador linear .....	115
Tabela 5.4	Número de operações referentes aos processos de filtragem e adaptação para as estruturas FIR convencional e IFIR com interpolador linear .....	116
Tabela 5.5	Erros médios quadráticos residuais, utilizando algoritmo LMS, para a adaptação das estruturas FIR com redução da taxa de amostragem e IFIR com interpolador linear em sub-banda .....	126
Tabela 5.6	Erros médios quadráticos residuais, utilizando algoritmo LMS, para a adaptação das estruturas FIR convencional e decomposição em filtros IFIR .....	132

## LISTA DE SÍMBOLOS

$x[k]$  - sinal de entrada de um sistema

$y[k]$  - sinal de saída de um sistema

$d[k]$  - sinal de referência (desejado) de um sistema adaptável

$\epsilon[k]$  - sinal de erro de um sistema adaptável

$s[k]$  - sinal genérico a ser tratado

$r[k]$  - sinal de ruído

$r'[k]$  - sinal de ruído correlacionado à  $r[k]$

$w_{ik}$  -  $i$ -ésimo coeficiente de um filtro adaptável na  $k$ -ésima iteração

$N$  - número de coeficientes de um filtro adaptável

$X_k$  - vetor de amostras do sinal de entrada na  $k$ -ésima iteração

$W_k$  - vetor dos coeficientes de um filtro adaptável na  $k$ -ésima iteração

$\xi_k$  - erro médio quadrático na  $k$ -ésima iteração

$\mathbf{R}$  - matriz de autocorrelação de entrada

$P$  - vetor de correlação entre os sinais de entrada e de referência

$\nabla$  - vetor gradiente da função de desempenho

$W^*$  - vetor  $W$  ótimo

$\xi_{\min}$  - erro médio quadrático mínimo

$V_k$  - vetor dos coeficientes de um filtro adaptável com relação ao plano  $v_0v_1\dots v_{N-1}$  na  $k$ -ésima iteração

$v_i$  - elemento do vetor  $V$

$V_{p_i}$  - vetor no plano  $v_0v_1\dots v_{N-1}$  na direção do eixo  $v_i$

$\nabla_{V_{p_i}}$  - vetor gradiente da função de desempenho relacionado ao vetor  $V_{p_i}$

$\alpha_i$  - constante de proporcionalidade entre  $V_{p_i}$  e  $\nabla_{V_{p_i}}$

$Q$  - matriz dos auto-vetores da matriz  $R$

$\Lambda$  - matriz dos auto-valores da matriz  $R$

$\lambda_i$  -  $i$ -ésimo auto-valor da matriz  $R$

$V'$  - vetor dos coeficientes de um filtro adaptável com relação ao plano  $v'_0 v'_1 \dots v'_{N-1}$

$v'_i$  - elemento do vetor  $V'$

$\mu$  - coeficiente de adaptação

$\lambda_{\max}$  - máximo auto-valor da matriz  $R$

$\mu_{n,\text{ótimo}}$  - melhor coeficiente de adaptação para a convergência do  $n$ -ésimo coeficiente

$\hat{V}$  - vetor gradiente estimado

$W(z)$  - função de transferência do sistema adaptável

$W^*(z)$  - função de transferência do sistema adaptável desejada

$x_{\text{RMS}}^2$  - potência média do sinal de entrada

$\mu_x$  - valor médio do sinal de entrada

$\sigma_x^2$  - variância do sinal de entrada

$K$  - número de sub-bandas

$M$  - fator de dizimação

$L$  - fator de interpolação

$x_i[n]$  - sinal de saída do analisador na  $i$ -ésima sub-banda

$x'_i[n]$  - sinal de entrada do sintetizador na  $i$ -ésima sub-banda

$x_{e'_i}[n]$  - sinal  $x'_i[n]$  após a interpolação com amostras zero

$x'[n]$  - sinal de saída do banco de filtros de síntese

$X(e^{j\omega})$  - resposta em frequência de  $x[n]$

$X_i(e^{j\omega})$  - resposta em frequência de  $x_i[n]$

$X_{e'_i}(e^{j\omega})$  - resposta em frequência de  $x_{e'_i}[n]$

$f_{si}$  - frequência de amostragem  $i$

$f_c$  - frequência de corte

$H_k(z)$  - função de transferência do filtro de dizimação da  $k$ -ésima sub-banda

$F_k(z)$  - função de transferência do filtro de interpolação da  $k$ -ésima sub-banda

$E_k(z)$  - função de transferência da  $k$ -ésima parcela da decomposição polifásica de um sistema

$X_m(e^{j\omega})$  - DFT de  $x[n]$  no tempo  $m$

$w[n]$  - janela de limitação de  $x[n]$  para a determinação de sua DFT



$h[n]$  - resposta ao impulso do filtro de dizimação

$f[n]$  - resposta ao impulso do filtro de dizimação

$X_i(z)$  - transformada Z de  $x_i[n]$

$X'(z)$  - transformada Z de  $x'[n]$

$G(z)$  - função de transferência do filtro de referência para determinação da reconstrução perfeita definida em [23]

$G_+(z) - G(z) + \delta z^{-i}$

$C_k(z)$  - função de transferência do sistema adaptável da  $k$ -ésima sub-banda

$C(z)$  - matriz dos  $C_k(z)$

$H(z)$  - matriz dos  $H_k(z)$

$F(z)$  - matriz dos  $F_k(z)$

$S(z)$  - sistema desconhecido da aplicação de identificação de sistemas

$S(z)$  - matriz diagonal de  $S(z)$

$\alpha$  - constante de proporcionalidade

$w[n]$  - resposta ao impulso do filtro original a ser obtido pelo filtro IFIR

$we[n]$  - resposta ao impulso do filtro esparso do filtro IFIR

$We(z)$  - transformada Z de  $we[k]$

$i[n]$  - resposta ao impulso do interpolador do filtro IFIR

$I(z)$  - transformada Z de  $i[k]$

$wi[n]$  - resposta ao impulso do filtro IFIR completo

$Wi(z)$  - transformada Z de  $wi[k]$

$We_k$  - vetor dos coeficientes do filtro esparso na  $k$ -ésima iteração

$I$  - vetor dos coeficientes do filtro interpolador

$X_k$  - matriz do sinal de entrada na  $k$ -ésima iteração

$\tilde{W}e_k$  - vetor dos coeficientes do filtro esparso eliminando-se os coeficientes zero

$\tilde{R}$  - matriz de autocorrelação de entrada considerando  $\tilde{W}e_k$

$\tilde{P}$  - vetor de correlação entre os sinais de entrada e de referência considerando  $\tilde{W}e_k$

$\tilde{X}$  - matriz do sinal de entrada na  $k$ -ésima iteração considerando  $\tilde{W}e_k$

$u[k]$  - sinal de saída do interpolador para a estrutura invertida do filtro IFIR

$U_k$  - vetor de amostras do sinal  $u[k]$  na  $k$ -ésima iteração

$\tilde{U}_k$  - vetor de amostras do sinal  $u[k]$  na  $k$ -ésima iteração considerando  $\tilde{W}e_k$

$w_i^*$  -  $i$ -ésimo elemento do vetor  $W^*$

$i_i$  -  $i$ -ésimo elemento do vetor  $I$

$r_{ij}$  - elemento da matriz  $R$

$g[n]$  - função "raised cosine"

$hr[n]$  -  $g[n]$  deslocado em  $\beta$  amostras

$u_k[n]$  - saída do interpolador do filtro IFIR na  $k$ -ésima sub-banda

$y_k[n]$  - saída do filtro esparso na  $k$ -ésima sub-banda

$d_k[n]$  - sinal de referência na  $k$ -ésima sub-banda

$\epsilon_k[n]$  - sinal de erro na  $k$ -ésima sub-banda

$S_{PB}(e^{j\omega})$  - resposta em frequência do sistema a identificar filtrado por um filtro passa-baixa

$S(e^{j\omega})$  - resposta em frequência correspondente a  $S(z)$

$H_k(e^{j\omega})$  - resposta em frequência correspondente a  $H_k(z)$

$W_k^*(e^{j\omega})$  - resposta em frequência do filtro ótimo na  $k$ -ésima sub-banda

$We_k^*(e^{j\omega})$  - resposta em frequência do filtro esparso ótimo na  $k$ -ésima sub-banda

$F_k(e^{j\omega})$  - resposta em frequência correspondente a  $F_k(z)$

$G_k(z)$  - função de transferência da  $k$ -ésima parcela esparsa da decomposição de um sistema em filtros IFIR

$T$  - matriz de transformação de Hadamard

$\mu_1$  - coeficiente de adaptação do filtro esparso para estrutura IFIR com ambos os filtros adaptáveis

$\mu_2$  - coeficiente de adaptação do filtro interpolador para estrutura IFIR com ambos os filtros adaptáveis

$q[k]$  - saída do filtro esparso para entrada  $x[k]$

$Q_k$  - vetor de amostras do sinal  $q[k]$  na  $k$ -ésima iteração

## RESUMO

Este trabalho propõe o estudo de um sistema adaptável utilizando estrutura do tipo IFIR (Filtro com Resposta ao Impulso Finita Interpolado), tanto em aplicações de banda completa quanto em processamento multibanda. Na análise em banda completa, verificamos que a estrutura IFIR é perfeitamente viável em aplicações adaptáveis (considerando-se as restrições inerentes à esta estrutura), apresentando vantagens com relação à estrutura FIR convencional quanto à complexidade computacional e ao tempo de processamento. No processamento multibanda, a utilização de uma estrutura IFIR é analisada em substituição à estrutura FIR que utiliza dizimação e interpolação para a redução da taxa de amostragem. Nesta análise, verificamos melhores resultados para a estrutura proposta (comparando com a convencional) no que se refere às características de convergência. São apresentadas ainda, uma estrutura adaptável baseada na decomposição de um filtro transversal em sub-bandas que utilizam filtros IFIR e uma análise da adaptação conjunta dos filtros esparso e interpolador da estrutura IFIR. Simulações são realizadas para avaliar e comprovar os estudos feitos. Como consequência deste estudo, apresentamos ainda considerações fundamentais sobre os conceitos de filtragem adaptável, processamento multibanda e filtragem IFIR, de forma a sintetizar alguns tópicos que se apresentam dispersos na literatura.

## ABSTRACT

This work proposes the study of an adaptive system using an IFIR structure (Interpolated Finite Impulse Response Filter). The system is applicable both to full-band and multirate processing. The full-band analysis indicates that the IFIR structure is well-suited to adaptive applications (taking into account the restrictions inherent to this structure). The IFIR structure has advantages over the conventional FIR structure as regards computational complexity and processing time. In the multirate processing, the use of an IFIR structure is analysed rather than the FIR structure that employs decimation and interpolation to reduce the sampling rate. With respect to the convergence characteristics, the proposed structure leads to better results than the conventional one. The work contains the study of an adaptive structure that is based on the decomposition of a conventional filter into subbands that employ IFIR filters, and also an analysis of the joint adaptation of the sparse and interpolator filters of the IFIR structure. Simulations are performed to assess and confirm the studies made. In order to synthesize some topics that are spread in the literature, the work presents fundamental considerations on adaptive filtering, multirate processing and IFIR filtering.

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 Introdução

O processamento digital de sinais vem adquirindo, ao longo do tempo, importância cada vez maior em nosso dia a dia. Sendo utilizado nas mais diversas áreas do conhecimento humano, passando por aplicações industriais, telecomunicações, sistemas biomédicos, sonar, radar, prospecção de petróleo, processamento de imagem, processamento de voz, sistemas de controle e telemetria, chegando aos nossos equipamentos eletrônicos domésticos, o processamento digital de sinais tem acompanhado o acelerado desenvolvimento dos computadores e processadores digitais nas últimas duas décadas, tendo uma expansão ainda maior com o advento, na década de 80 [1], dos *Processadores Digitais de Sinais* (DSPs), componentes que integram sistemas dedicados para o tratamento de sinais.

O processamento digital, apesar de muito mais flexível do que o analógico (operando com números através de algoritmos matemáticos), tem, no entanto, uma limitação que basicamente vem ditando o ritmo do desenvolvimento de suas aplicações. Por se tratar de um processamento aritmético, com um certo número de operações a serem realizadas a cada amostra do sinal que está sendo tratado, este tipo de processamento limita a taxa em que o sinal pode ser tratado. A limitação desta taxa restringirá, por sua vez, a faixa de frequência do sinal, significando, principalmente nos primeiros tempos de existência dos processadores digitais, uma importante redução em seu espectro de aplicações. Para que a evolução desta área ocorra no sentido de aumentar a velocidade de processamento e, portanto, permitir o aprimoramento e o desenvolvimento de novas aplicações, dois caminhos principais têm sido seguidos.

Por um lado, o crescimento de novas e sofisticadas exigências, principalmente, nas áreas de sistemas de comunicação e multi-mídia (como a transmissão de dados a altíssimas velocidades

em *Redes Digitais de Serviço Integrado* (RDSI), o tratamento de imagens em sistemas de alta definição (HDTV), o tratamento e reconhecimento, em tempo real, de voz e padrões de imagens, entre outras aplicações que estão sempre requerendo um incremento de velocidade de processamento), têm constantemente impulsionado o desenvolvimento e o aprimoramento de microprocessadores e DSPs. As técnicas de integração e a utilização de novos materiais, têm progredido de forma extraordinária, chegando-se hoje a taxas de amostragem na faixa do GHz [1]. Com a melhoria das técnicas construtivas de processadores, a densidade de componentes integrados também tende a um rápido crescimento, podendo-se encontrar atualmente processadores de sinais que integram praticamente todo um sistema, desde a unidade de processamento matemático, as memórias RAM e EPROM, conversores A/D e D/A, além de muitas vezes serem totalmente especializados, como, por exemplo, os processadores de interface U para RDSI [1], que contém cancelador de eco, conversor A/D, híbrida, controladores em geral, pré-amplificadores, etc.

Por outro lado, a redução do tempo de processamento pode ser obtida através de técnicas de otimização dos algoritmos matemáticos que executam as tarefas de tratamento do sinal. Muito esforço de pesquisa tem sido aplicado também nesta direção, considerando que esta redução através do aprimoramento de algoritmos representa um custo bastante reduzido se comparado ao desenvolvimento de processadores de maior velocidade. Além de possibilitar o desenvolvimento de novas e mais sofisticadas aplicações, técnicas que reduzam a complexidade aritmética também são responsáveis pela redução de custos de implementação, considerando-se a possibilidade do emprego de processadores menos complexos.

As técnicas desenvolvidas com o objetivo de aumentar a velocidade de processamento ou reduzir as necessidades computacionais, normalmente estão baseadas na eliminação de informações redundantes ou com pouca contribuição aos resultados desejados. Em processamento de voz ou imagem, por exemplo, é bastante comum a utilização de técnicas de compressão de dados baseadas em informações redundantes. Eliminando-se apenas estas redundâncias, no processamento ou armazenamento, pode-se, posteriormente, reconstruir o sinal original a partir das informações remanescentes.

Uma importante forma de redução da complexidade computacional, conhecida por *Processamento Multibanda de Sinais* [2], se caracteriza pela decomposição do sinal em sub-bandas de frequência, permitindo a redução da taxa de amostragem em cada banda e, conseqüentemente, a utilização de processadores de menor custo. Além do mais, esta técnica pode ser utilizada em aplicações onde o sinal tratado tem distribuição não uniforme de potência em frequência, de forma que as bandas com reduzida contribuição podem ser suprimidas após a decomposição, ou, no mínimo, codificadas com menor número de bits.

De outra maneira, quando o sistema de filtragem apresenta característica seletiva de frequência, as amostras de sua resposta ao impulso têm, normalmente, um alto grau de correlação entre si. Portanto, no caso de uma modelagem, por exemplo, através de uma estrutura não recursiva transversal (FIR) [3], esta correlação estará presente nos coeficientes do filtro (que correspondem às amostras da resposta ao impulso deste filtro), de forma que, se houver supressão de alguns coeficientes, pode-se ainda reconstruí-lo utilizando-se técnicas de interpolação. Esta estrutura FIR denominada *Filtro FIR Interpolado* (IFIR) [4], será, então, composta por um filtro esparso e um interpolador.

Além da premente necessidade de redução de tempo de processamento ou complexidade computacional em sistemas de tratamento de sinais, verificamos também, em um número bastante grande de aplicações, a exigência da adaptação do sistema para o adequado funcionamento nas mais diversificadas situações e condições de trabalho. Em sistemas de características consideravelmente variáveis, como linhas telefônicas, sistemas de radar, sonar, prospecção de petróleo, equipamentos hospitalares, entre outros, o desenvolvimento de estruturas fixas de processamento de sinais normalmente poderá ser inadequado, não produzindo o efeito desejado em determinadas situações. Para estas aplicações será necessária a implementação de uma estrutura cujos parâmetros se adaptem a situação do momento. Este sistema, denominado, portanto, *Sistema Adaptável* [5], poderia ser constantemente ajustado, de forma a estar sempre atuando na melhor condição.

Considerando, portanto, a grande importância do processamento de sinais em aplicações das mais diversas e a necessidade imperativa de tornar cada vez melhor o desempenho destes

sistemas, este trabalho tem como um dos principais objetivos, tornar o conhecimento destes sistemas um pouco mais acessível e compreensível para os estudiosos que pretendam ingressar nesta área de atuação.

Desta forma, iniciamos nosso trabalho introduzindo o conceito de adaptação, verificando suas características de implementação e os principais métodos de obtenção do filtro ótimo.

Em seguida, são analisados os sistemas de processamento multibanda, além de sua implementação em sistemas adaptáveis.

Partindo dos conceitos de processamento multibanda, principalmente referente a interpolação, passamos a analisar a estrutura de filtragem IFIR. Neste ponto discutimos sua implementação e, de forma mais ampla, a realização de seus interpoladores.

Introduzimos ainda neste trabalho, uma proposta de utilização de filtros IFIR em filtragem adaptável. Aqui discutimos o comportamento desta estrutura em sistemas adaptáveis de banda completa e multibanda, comparando-o a estruturas convencionais utilizando filtro FIR transversal. As verificações do comportamento dos sistemas IFIR em filtragem adaptável banda completa e multibanda são estudadas através de simulações computacionais.

## **1.2 Organização do Trabalho**

O Capítulo 2, introduz os conceitos básicos de filtragem adaptável e suas aplicações. São apresentadas, na Seção 2.2, suas características e a determinação do filtro ótimo com base no critério do erro médio quadrático. Na Seção 2.3, analisamos o processo de otimização através de algoritmos de adaptação, desde o método de Newton até o algoritmo LMS.

No Capítulo 3, é apresentado o processamento multibanda de sinais, onde são vistos seus conceitos básicos e aplicações. Na Seção 3.4 é introduzido o conceito de decomposição polifásica e, em 3.5, os bancos de filtros, utilizados na decomposição em sub-bandas. Nesta seção são apresentados dois tipos fundamentais de bancos de filtros: os bancos DFT e QMF. E finalmente,



na Seção 3.6, introduzimos a implementação destes sistemas em aplicações adaptáveis, onde são citados diversos trabalhos realizados.

No Capítulo 4, são estudados, a partir da análise realizada nas Seções 3.1 e 3.2, os filtros do tipo IFIR. Em 4.2, verificamos sua estrutura e características e na Seção 4.3, analisamos as diversas formas de implementação de interpoladores.

A introdução de uma proposta de aplicação de filtros IFIR em sistemas adaptáveis é discutida no Capítulo 5. Na Seção 5.2 é proposta uma estrutura para aplicação em sistemas adaptáveis, analisando-se seu comportamento com a utilização dos algoritmos "steepest descent" e LMS (discutidos no Capítulo 2). Em 5.3, são verificadas as condições de convergência desta nova estrutura e em 5.4 são apresentados resultados comparativos de simulações referentes a este sistema. Em 5.5 é apresentada a filtragem adaptável IFIR em multibanda, analisando-se a adaptação em apenas uma sub-banda de frequência, com resultados de simulações, e em 5.6 analisamos uma estrutura multibanda IFIR baseada na decomposição de um filtro FIR transversal. Na Seção 5.7, apresenta-se uma breve discussão acerca da adaptação simultânea dos filtros esparso e interpolador em sistemas IFIR adaptáveis.

Finalmente, no Capítulo 6, são apresentadas as conclusões finais do trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

## CAPÍTULO 2

### FILTRAGEM ADAPTÁVEL

#### 2.1 Introdução

Considerando a variação de parâmetros inerente a qualquer sistema físico, de forma geral, os sistemas de tratamento de sinais são projetados com base em características aproximadas do processo onde este estará inserido. Se estas características forem verificadas através de aproximações fundamentadas em dados estatísticos, normalmente os resultados obtidos serão os mais próximos do desejado [6]. Na década de 40, *Wiener* e *Kolmogorov* propuseram as primeiras soluções para o problema da otimização de filtros baseados em aproximações estatísticas, considerando o caso de processos estacionários. *Kalman*, por sua vez, desenvolveu, nos anos 60, uma nova teoria buscando solucionar o problema da otimização agora para processos não estacionários.

Em diversas aplicações, porém, os sistemas projetados para uma determinada especificação, nem sempre tem bom desempenho, ou seja, ou as características do sistemas não são totalmente conhecidas ou variam com o tempo. Em telecomunicações, por exemplo, a linha telefônica de assinantes é um sistema que apresenta parâmetros muito variáveis e que são alterados por diversos fatores, como: distância de transmissão, condições de utilização da linha, derivações, diversidade de bitolas, etc. Nestas condições, o projeto de filtros com coeficientes fixos para implementação de, por exemplo, canceladores de eco e equalizadores, mesmo utilizando-se as melhores técnicas de otimização, acaba se tornando ineficiente. Outras áreas de aplicação onde a utilização de sistemas com coeficientes fixos para o processamento é crítica são: processamento de voz e imagem, sistemas de radar, sonar, sistemas de navegação, sistemas biomédicos, entre outros [5].

Como solução ao problema da determinação de filtros em aplicações onde as características estatísticas não são totalmente conhecidas, tem-se o *Processamento Adaptável*, ou seja, utilizam-se filtros cujos parâmetros são ajustados conforme a situação apresentada. Para tal, o problema da filtragem adaptável requererá um algoritmo responsável por este ajuste, que normalmente utilizará algum sinal como referência para a adaptação. No início da década de 60, diversos trabalhos foram desenvolvidos neste sentido, para as mais diversas aplicações, destacando-se o desenvolvimento do algoritmo de adaptação LMS (Least-Mean-Square-adaptive algorithm) proposto por *Widrow e Hoff* [6], amplamente utilizado nos dias de hoje.

### 2.1.1 Sistema malha aberta e sistema malha fechada

O ajuste dos parâmetros de um filtro, ou adaptação, pode se dar, a princípio, através de duas estruturas básicas: em malha aberta ou malha fechada, como ilustrado pelas Fig. 2.1 e Fig. 2.2. Na adaptação em malha aberta, como se observa na Fig. 2.1, é utilizado no ajuste do filtro apenas o sinal de entrada (além de dados externos). Analisando estes dados, o algoritmo de adaptação deverá determinar completamente as características estatísticas do sistema em que está inserido o filtro adaptável, de forma a obter subsídios suficientes para a otimização de seus parâmetros. Este procedimento, no entanto, requererá, normalmente, um desenvolvimento matemático complexo, além de um tempo de processamento relativamente grande, para a determinação completa destas características estatísticas.

Já na adaptação em malha fechada, além dos dados de entrada e externos, são observados também os dados de saída (Fig. 2.2). Desta forma, utilizando um processo iterativo, pode-se ajustar gradativamente os parâmetros do filtro a partir do resultado obtido na saída a cada iteração. Portanto, este método, não necessitando determinar completamente as características estatísticas do sistema, exigirá um algoritmo de adaptação com uma complexidade matemática muito menor do que o método anterior.

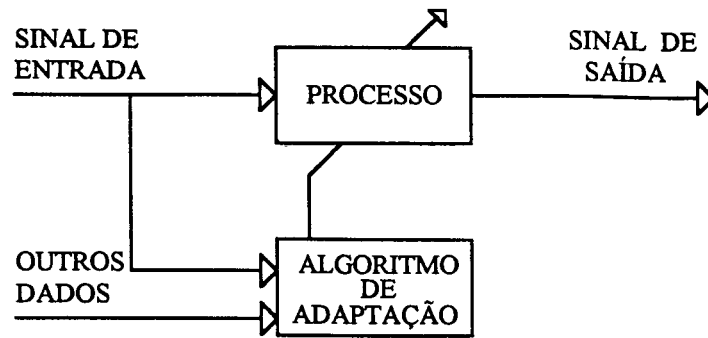


Fig. 2.1 Sistema adaptável em malha aberta.

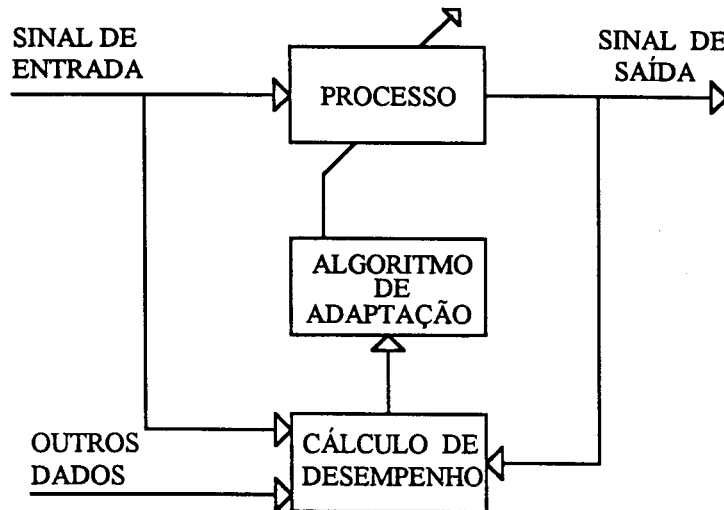


Fig. 2.2 Sistema adaptável em malha fechada.

### 2.1.2 Exemplos de estruturas de adaptação

Os sistemas adaptáveis em malha fechada, que por sua eficiência serão preferidos na prática, em sua forma geral, podem ser representados pela estrutura da Fig. 2.3. Nesta estrutura, o desempenho da adaptação está diretamente relacionada à minimização do erro  $\varepsilon[k]$ , que representa a diferença entre o sinal de saída do sistema adaptável,  $y[k]$ , e um sinal de referência ou sinal desejado,  $d[k]$ . Este sinal de erro será a variável determinante para o ajuste dos parâmetros

do filtro através do algoritmo de adaptação. O sinal  $x[k]$  representa a entrada do sistema adaptável.

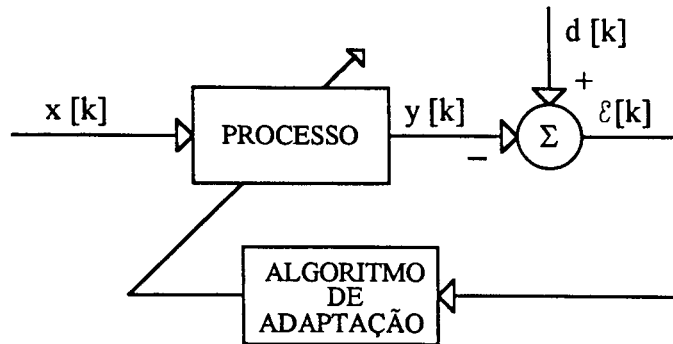


Fig. 2.3 Estrutura básica de um sistema adaptável em malha fechada

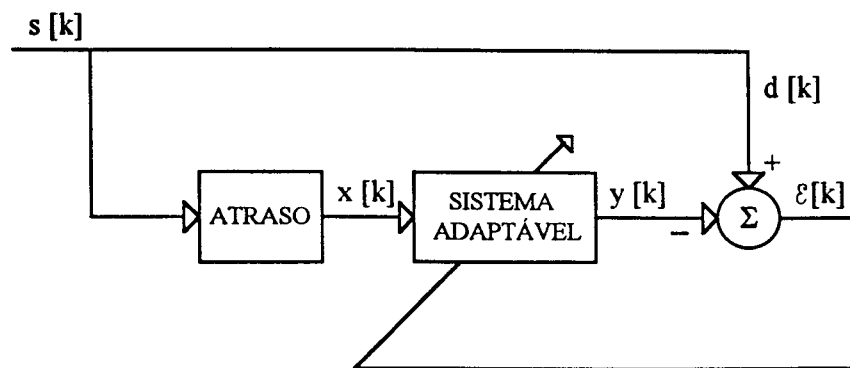
Na Fig. 2.4, estão representados alguns exemplos de aplicações de sistemas adaptáveis em malha fechada. Na Fig. 2.4(a), é apresentado um sistema de *Predição* onde, após o processo de adaptação, se terá em sua saída  $y[k]$ , dentro de certas tolerâncias estatísticas, um sinal que ainda não está presente em sua entrada (devido à linha de atraso). Este sinal é representado, neste esquema, pela referência  $d[k]$ .

A estrutura de um sistema de *Cancelamento de Interferências* é ilustrada pela Fig. 2.4(b). Neste caso, tem-se o sinal de referência como sendo o sinal desejado,  $s[k]$ , corrompido por um ruído aditivo não correlacionado  $r[k]$ . Para cancelar este ruído, na entrada do filtro adaptável é aplicado outro sinal de ruído,  $r'[k]$ , com um certo grau de correlação com o anterior (normalmente proveniente da mesma fonte). O processo, então, será adaptado, de forma que  $y[k]$  tenderá a convergir para  $r[k]$  (considerando uma correlação nula entre  $r'[k]$  e  $s[k]$ , o algoritmo não convergirá de forma a cancelar este último). Desta forma, ocorrerá o cancelamento apenas do ruído, sendo que  $\varepsilon[k]$  será uma aproximação de  $s[k]$ .

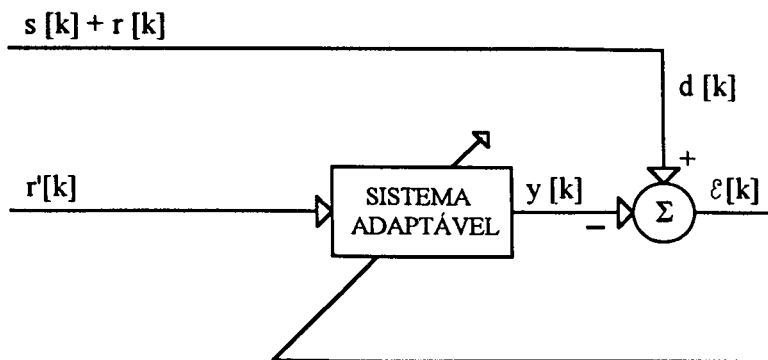
Outro exemplo importante é o da *Equalização* (Fig. 2.4(c)). Este sistema é utilizado, normalmente, para compensar distorções em sinais, causadas por transdutores, linhas de transmissão ou outros sistemas. Aqui, o processador adaptável é colocado em série com o sistema

responsável pela distorção do sinal. O objetivo desta estrutura é obter na saída o sinal original  $s[k]$ , o qual é aplicado como referência na adaptação, após um atraso correspondente ao sistema desconhecido e ao equalizador (normalmente esta referência é uma seqüência conhecida de treinamento que é aplicada simultaneamente à entrada original do sistema e ao sistema adaptável). O sistema adaptável tenderá, portanto, a se aproximar do inverso da função de transferência do sistema desconhecido, anulando suas distorções.

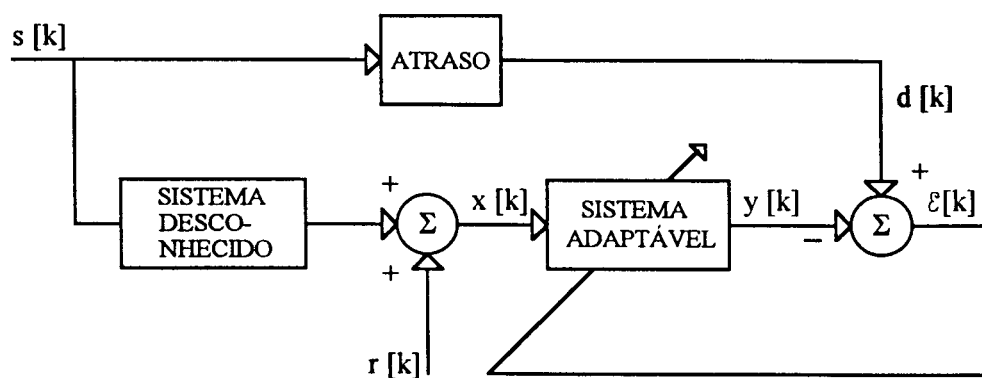
Nesta trabalho, no Capítulo 5, utilizaremos como modelo para as simulações computacionais, uma estrutura adaptável de *Identificação de Sistemas* (Fig. 2.4(d)). Neste exemplo, o sinal de referência é o sinal de saída do sistema a ser identificado (que pode ser uma linha de transmissão, um filtro, um transdutor, etc). Considerando que o objetivo nesta aplicação é obter uma saída  $y[k]$  o mais próximo possível do sinal  $d[k]$  (de forma que alguma função do erro  $\varepsilon[k]$  tenda a zero) e aplicando-se o mesmo sinal de entrada  $x[k]$  aos sistemas desconhecido e adaptável, verifica-se que o filtro tenderá a convergir para a mesma função de transferência do sistema desconhecido. As aplicações deste processo são bastante importantes, tendo como exemplos: o projeto de filtros, a identificação de sistemas desconhecidos, o cancelamento de eco em transmissão de dados, entre outras.



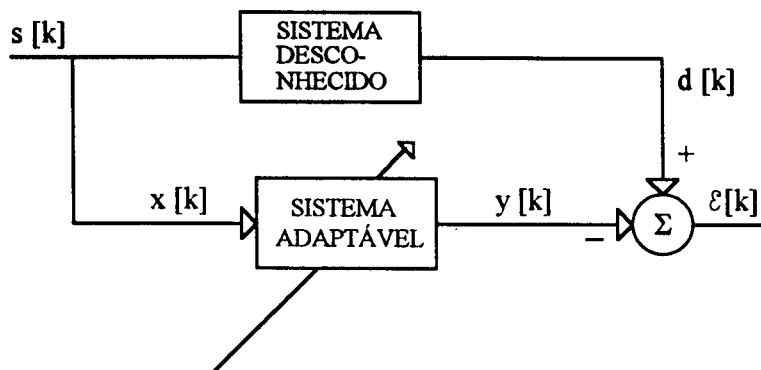
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 2.4 Exemplos de estruturas adaptáveis. (a) Sistema de predição. (b) Sistema de cancelamento de interferências. (c) Equalizador. (d) Sistema de identificação.

### 2.1.3 Organização do Capítulo

Neste Capítulo, nas Seções que seguem, analisaremos um sistema adaptável utilizando filtragem digital do tipo FIR. Verificaremos inicialmente as características e estrutura básica deste sistema e as condições para se obter o filtro ótimo empregando-se o critério do erro médio quadrático. Em seguida, serão analisados algoritmos para determinação, de forma iterativa, do vetor ótimo de coeficientes deste filtro, partindo-se do método de Newton seguindo até o bem conhecido algoritmo LMS. Além da forma de implementação destes algoritmos, são verificadas suas condições de convergência.

## 2.2 Características do sistema adaptável

Como já verificamos, um sistema adaptável é caracterizado basicamente por dois blocos básicos: um filtro, cujos parâmetros serão atualizados conforme a necessidade da aplicação; e um algoritmo que, utilizando como base um sinal de erro a ser minimizado, adaptará este filtro. A seguir verificaremos algumas características importantes na implementação deste sistema, considerando esta composição.

Devido à grande necessidade de flexibilidade e possibilidade de variação dos parâmetros que os filtros adaptáveis exigem, estes sistemas têm sido implementados utilizando recursos digitais microprocessados (geralmente utilizando DSPs), que permitem, além desta flexibilidade, o desenvolvimento de algoritmos matemáticos de praticamente qualquer complexidade para a adaptação do sistema. Quanto à estrutura do filtro, tem sido constante a utilização de estruturas não recursivas, ou seja, com resposta ao impulso finita (FIR - Finite Impulse Response). Este tipo de filtro, tem se mostrado muito interessante para este problema, pelo fato de possuir uma característica muito importante em sistemas cujos parâmetros não são fixos: ser sempre estável. Além desta característica, esta estrutura permite projetos com fase perfeitamente linear e não apresenta ciclo-limite (valor residual na saída mesmo na ausência de sinal de entrada), entre outras



vantagens. Por outro lado, um grande esforço de pesquisas também têm sido realizado envolvendo estruturas recursivas, ou com resposta ao impulso infinita (IIR - Infinite Impulse Response) [7 - 10], ou ainda os tipos de estruturas em forma mista [11]. A estrutura IIR apresenta como vantagem principal sobre a FIR, a implementação de filtros com ordem menor para um mesmo desempenho, o que o torna atrativa para algumas aplicações. Porém, a possibilidade de instabilidade e de ocorrência de diversos pontos de mínimo na superfície de erro<sup>1</sup> [7], limitam bastante a aplicação desta estrutura em sistemas adaptáveis, exigindo normalmente um projeto mais complexo.

Outra característica importante na implementação de um sistema adaptável é a condição de estacionaridade dos sinais envolvidos no processo. A adaptação de um sistema se torna muito mais simplificada quando os sinais são estatisticamente estacionários, ou seja, quando mantêm suas características estatísticas inalteradas ao longo, pelo menos, do período de adaptação, condição normalmente satisfeita na maioria das aplicações.

### 2.2.1 A estrutura FIR adaptável

Na Fig. 2.5 é apresentado o diagrama de um filtro adaptável utilizando uma estrutura FIR transversal. Nesta estrutura  $w_{nk}$  representa o valor do  $n$ -ésimo coeficiente adaptável na  $k$ -ésima iteração da adaptação, sendo  $x[k]$  e  $y[k]$  as amostras dos sinais de entrada e saída, respectivamente, na iteração  $k$ .

---

<sup>1</sup>Superfície de Erro, ou Superfície de Desempenho, é a superfície obtida pela função do erro médio quadrático em função dos coeficientes do filtro adaptável. A determinação do ponto de mínimo desta superfície é o principal objetivo do processo de adaptação, como será verificado a seguir.

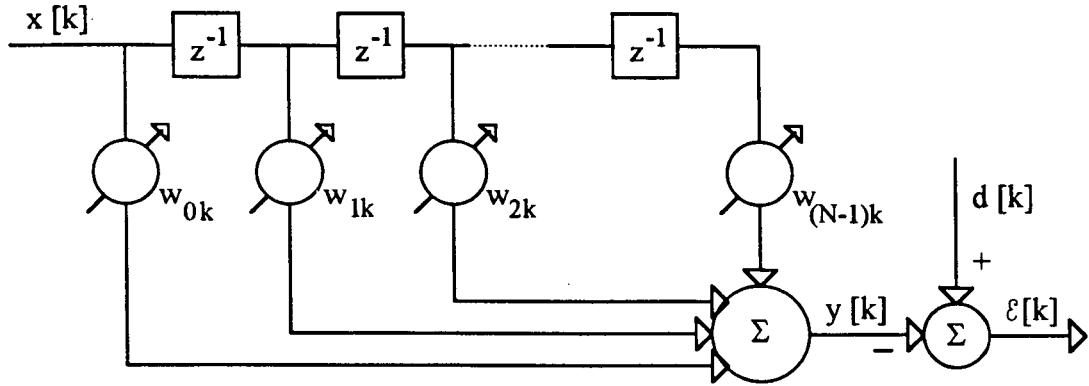


Fig. 2.5 Diagrama de um filtro adaptável FIR.

A saída deste filtro, na  $k$ -ésima iteração, é dada por:

$$y[k] = \sum_{i=0}^{N-1} w_{ik} x[k-i] \quad (2.1)$$

ou, na forma vetorial:

$$y[k] = \mathbf{X}_k^T \mathbf{W}_k = \mathbf{W}_k^T \mathbf{X}_k \quad (2.2)$$

onde:

$$\mathbf{X}_k = [x[k] \quad x[k-1] \quad \dots \quad x[k-(N-1)]]^T$$

e

$$\mathbf{W}_k = [w_{0k} \quad w_{1k} \quad \dots \quad w_{(N-1)k}]^T$$

O sinal de erro será:

$$\varepsilon[k] = d[k] - y[k] \quad (2.3)$$

onde  $d[k]$  é o sinal de referência, ou sinal desejado, e  $y[k]$  é a saída do filtro adaptável.

Se, então, substituirmos (2.2) em (2.3) teremos:

$$\varepsilon[k] = d[k] - X_k^T W_k = d[k] - W_k^T X_k \quad (2.4)$$

Como mencionamos anteriormente, o erro  $\varepsilon[k]$  é utilizado como referência para o algoritmo de adaptação, sendo que o principal objetivo da adaptação será a minimização deste sinal de erro, ou melhor, a atualização dos parâmetros do filtro adaptável de forma a aproximar  $y[k]$  do sinal de referência  $d[k]$ .

### 2.2.2 Erro médio quadrático

Existem diversas formas de determinar o desempenho de um sistema adaptável através do erro [12]. No entanto, um critério bastante utilizado e que representa bem a diferença entre o sistema adaptável e o sistema desejado é o *Erro Médio Quadrático* (least-mean-square error). Este critério vem sendo utilizado a muito tempo (Gauss, em 1795, utilizou este procedimento na determinação de parâmetros relacionados a órbita do asteroide Ceres [6]) pois o valor médio do quadrado do erro representará sua potência. Desta forma a minimização do erro médio quadrático corresponderá à minimização da energia do sinal de erro. Este critério foi também utilizado por Wiener em sua teoria de otimização através de aproximação estatística.

Considerando, portanto, a equação (2.4), podemos escrever a expressão do erro quadrático da seguinte forma:

$$\varepsilon^2[k] = d^2[k] + W_k^T X_k X_k^T W_k - 2d[k] X_k^T W_k \quad (2.5)$$

O valor médio quadrático de um sinal estatisticamente estacionário é expresso pelo valor esperado do quadrado deste sinal. Portanto, o erro médio quadrático de um sistema adaptável, que será denotado por  $\xi$ , na iteração  $k$  será:

$$\xi_k = E[\varepsilon^2[k]] = E[d^2[k]] + W_k^T E[X_k X_k^T] W_k - 2E[d[k] X_k^T] W_k \quad (2.6)$$

O vetor  $W_k$  é constante para cada iteração porque os valores de seus elementos são determinados completamente na iteração anterior.

Por conveniência, pode-se representar a expressão acima da seguinte forma:

$$\xi_k = E[d^2[k]] + W_k^T R W_k - 2P W_k \quad (2.7)$$

onde:

$$R = E[X_k X_k^T] = E \begin{bmatrix} x^2[k] & x[k]x[k-1] & \dots & x[k]x[k-(N-1)] \\ x[k-1]x[k] & x^2[k-1] & & \dots \\ \dots & & \dots & \dots \\ x[k-(N-1)]x[k] & \dots & \dots & x^2[k-(N-1)] \end{bmatrix}$$

e

$$P = E[d[k]X_k^T] = E[d[k]x[k] \quad d[k]x[k-1] \quad \dots \quad d[k]x[k-(N-1)]]$$

A matriz  $R$  é denominada *Matriz de Autocorrelação de Entrada*. Seus termos na diagonal principal são os valores médios quadráticos do sinal de entrada (que representam a potência média). Por ser este sinal estatisticamente estacionário, no período de treinamento, os valores desta diagonal são todos iguais entre si. Os demais termos representam a correlação cruzada entre as componentes de entrada, e seus valores são simétricos com relação à diagonal principal.

Devido à condição de estacionaridade mencionada anteriormente, tanto  $R$  quanto  $P$  e ainda  $E[d^2[k]]$ , serão constantes durante todo o processo de adaptação. Portanto, de (2.7), verifica-se que o erro médio quadrático é determinado, a cada iteração, em função apenas da variação do vetor  $W$ , tendo um comportamento quadrático em relação a este vetor.

### 2.2.3 Superfície de desempenho e gradiente

A equação (2.7), que representa o erro médio quadrático em função do vetor  $W$ , e é conhecida como *Função de Desempenho* [5], define o comportamento do sistema através do erro médio quadrático. Esta função gerará uma superfície, denominada *Superfície de Desempenho* ou *Superfície de Erro*, tendo a forma de um hiperparabolóide (função quadrática), cujo ponto mais baixo representa o erro médio quadrático mínimo, ou seja, o ponto onde teremos o vetor  $W$  ótimo (denotado por  $W^*$ ). Este vetor ótimo, também chamado vetor de Wiener, representa a melhor solução para o sistema em questão. Na Fig. 2.6 é ilustrada a superfície de desempenho de um sistema com apenas dois coeficientes, para melhor visualização. Na Fig. 2.7, a superfície de desempenho é apresentada apenas no plano dos coeficientes  $(w_0, w_1)$ , onde as elipses representam os contornos da superfície para  $\xi$  constante.

Por ser uma função quadrática, haverá apenas um ponto de mínimo na superfície de desempenho, que será, portanto, *Unimodal*, sendo que neste ponto de mínimo, o gradiente da função será zero. Desta forma, podemos determinar o erro médio quadrático mínimo através do cálculo deste gradiente. A partir da função de desempenho em (2.7), teremos:

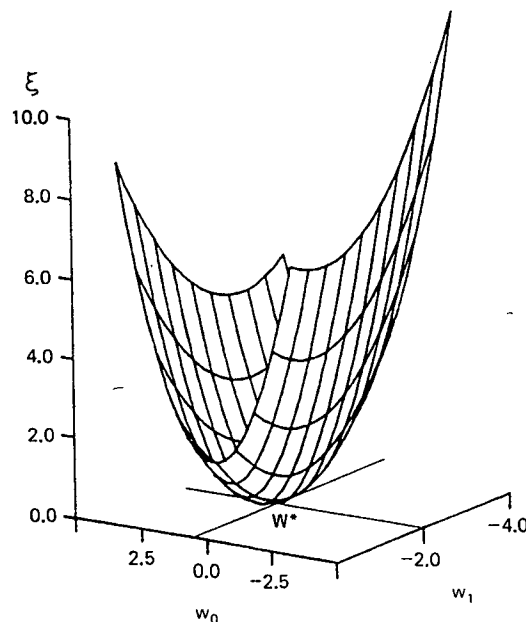


Fig. 2.6 Superfície de desempenho de um sistema com apenas dois coeficientes [5].

$$\nabla = \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{W}} = \left[ \frac{\partial \xi}{\partial w_0} \quad \frac{\partial \xi}{\partial w_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \xi}{\partial w_{N-1}} \right]^T = 2\mathbf{R}\mathbf{W} - 2\mathbf{P} \quad (2.8)$$

onde  $\nabla$  representa o gradiente do erro médio quadrático em função de  $\mathbf{W}$ .

Se agora fizermos  $\nabla = 0$  (condição de erro mínimo), obtemos:

$$\nabla = 2\mathbf{R}\mathbf{W}^* - 2\mathbf{P} = 0 \quad (2.9)$$

e, portanto:

$$\mathbf{W}^* = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{P} \quad (2.10)$$

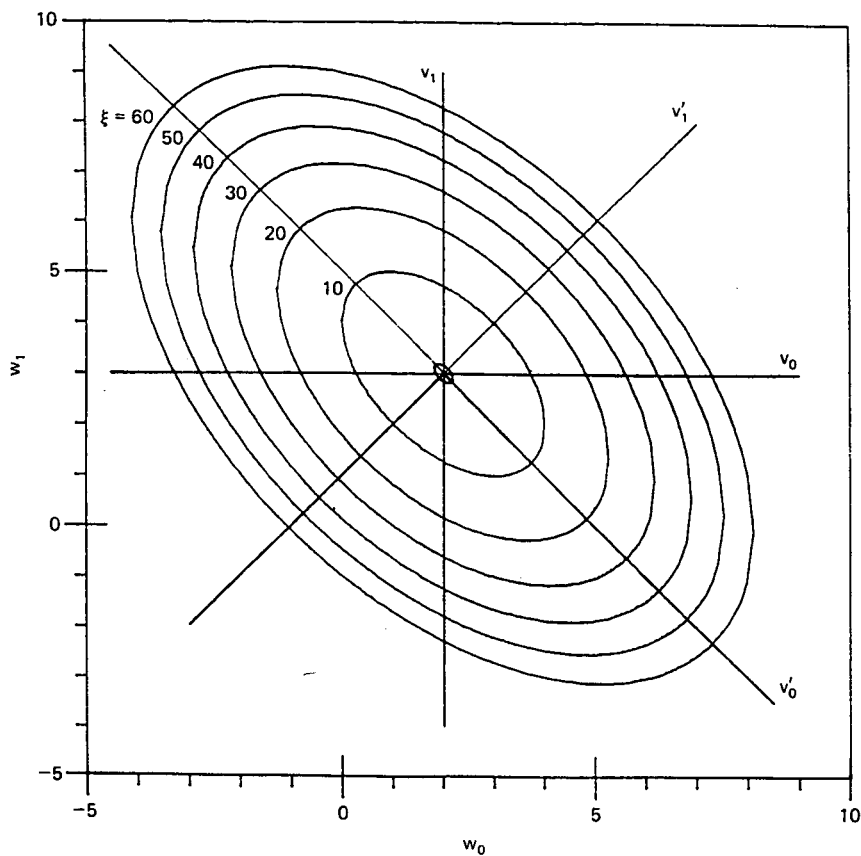


Fig. 2.7 Superfície de desempenho para dois coeficientes apresentada no plano  $w_0w_1$  [5].

Esta equação representará, portanto, o vetor ótimo do sistema, para o erro médio quadrático mínimo.

Substituindo-se a equação (2.10) em (2.7), podemos obter também o erro médio quadrático mínimo que, fazendo as simplificações necessárias [5], terá a seguinte expressão:

$$\xi_{\min} = E[d^2[k]] - P^T W^* \quad (2.11)$$

ou

$$\begin{aligned} \xi_{\min} &= E[d^2[k]] - E[d[k](x[k]w_0^* + x[k-1]w_1^* + \dots + x[k-(N-1)]w_{N-1}^*)] \\ &= E[d^2[k]] - E[d[k]y^*[k]] \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde  $\xi_{\min}$  é o erro médio quadrático mínimo do sistema adaptável, sendo  $y^*[k]$  a saída do sistema já adaptado. Para  $\xi_{\min} = 0$ , devemos ter  $E[d[k]^2] = P^T W^*$ , ou seja, de (2.12),  $y^*[k] = d[k]$ .

#### 2.2.4 Interpretação Geométrica da Função de Desempenho

De maneira mais geral, podemos interpretar geometricamente a função de desempenho da seguinte forma: a matriz de autocorrelação  $\mathbf{R}$ , que é a constante do termo quadrático, será responsável pela forma do hiperparabolóide que representa a superfície de desempenho, enquanto o vetor  $\mathbf{P}$ , constante do termo linear, determinará a posição da superfície com relação à origem ( $\mathbf{W} = \mathbf{0}$ ). Esta primeira interpretação deixa claro que a maior ou menor dificuldade de adaptação do sistema está diretamente relacionada às características estatísticas dos sinais de entrada e de referência.

Em uma análise mais profunda, podemos representar a matriz de autocorrelação  $\mathbf{R}$  por sua forma *Normal*, ou seja, através de seus *Auto-valores* e *Auto-vetores* [5], como segue:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1} \quad (2.13)$$

onde  $\mathbf{Q}$  é a matriz dos auto-vetores e  $\mathbf{\Lambda}$  a matriz diagonal dos auto-valores correspondentes. Esta forma é obtida a partir da equação homogênea

$$[\mathbf{R} - \lambda_n \mathbf{I}]\mathbf{Q}_n = 0 \quad (2.14)$$

sendo  $\lambda_n$  o auto-valor correspondente ao auto-vetor  $\mathbf{Q}_n$ . Podemos, portanto, relacionar os auto-valores e auto-vetores da matriz  $\mathbf{R}$  à forma da superfície de desempenho. Esta relação poderá ser verificada inicialmente deslocando o sistema de coordenadas para o centro desta superfície (sistema definido pelos eixos  $v_0$  e  $v_1$  na Fig. 2.7), de onde obtemos um novo vetor de coeficientes, dado por:

$$\mathbf{V}_k = \mathbf{W}_k - \mathbf{W}^* = \mathbf{W}_k - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{P} \quad (2.15)$$

A partir da expressão do gradiente em (2.8) e de (2.13), podemos definir uma nova expressão, agora em função do vetor  $\mathbf{V}$ , da seguinte forma:

$$\nabla_k = 2\mathbf{R}\mathbf{V}_k \quad (2.16)$$

Definiremos (a partir da Fig. 2.7)  $\mathbf{V}_k = \mathbf{V}_{p_0}$  como um vetor específico do plano  $v_0v_1$  que apresenta a mesma direção de um dos eixos principais definido pela variável  $v'_0$ . Observando-se que os eixos definidos pelo plano  $v'_0v'_1$  são normais às elipses concêntricas (determinadas para  $\xi$  constante), o gradiente  $\nabla_k$  para  $\mathbf{V}_k = \mathbf{V}_{p_0}$  terá a mesma direção do vetor  $\mathbf{V}_{p_0}$ .

Portanto

$$\nabla_{\mathbf{V}_{p_0}} = \alpha_0 \mathbf{V}_{p_0} \quad (2.17)$$



Se

$$\nabla_k = 2\mathbf{R}\mathbf{V}_k, \quad \mathbf{V}_k = \mathbf{V}_{p_0}$$

então,

$$\nabla_{\mathbf{V}_{p_0}} = 2\mathbf{R}\mathbf{V}_{p_0} \quad (2.18)$$

Portanto,

$$\mathbf{R}\mathbf{V}_{p_0} = \frac{\alpha_0}{2} \mathbf{V}_{p_0} \quad (2.19)$$

que é uma função homogênea de  $\mathbf{R}$  definida por um de seus auto-vetores ( $\mathbf{V}_{p_0}$ ) e um de seus auto-valores ( $\alpha_0$ ).

Análise semelhante pode ser realizada para um vetor  $\mathbf{V}_{p_1}$  (mesma direção do eixo  $v'_1$ ), definido da mesma forma que  $\mathbf{V}_{p_0}$ , onde:

$$\mathbf{R}\mathbf{V}_{p_1} = \frac{\alpha_1}{2} \mathbf{V}_{p_1} \quad (2.20)$$

podendo-se extrapolar esta análise para o caso dos  $N-1$  coeficientes.

Das expressões acima, pode-se afirmar, portanto, que *os auto-vetores da matriz de autocorrelação  $\mathbf{R}$  definirão as direções dos eixos principais da superfície de desempenho (plano  $v'_0v'_1$ , no caso de dois coeficientes) com relação aos eixos que definem o plano  $v_0v_1$ .*

Partindo da verificação acima, considerando que os eixos definidos pelas variáveis  $v'_n$ , para  $n = 0, \dots, N-1$ , têm as direções dos auto-vetores de  $\mathbf{R}$ , pode-se determinar um vetor  $\mathbf{V}'_k$  (no hiperplano  $v'_0 v'_1 \dots v'_{N-1}$ ) como [5]:

$$\mathbf{V}'_k = \mathbf{Q}^T \mathbf{V}_k \quad (2.21)$$

Representando  $\mathbf{R}$  na forma normal (2.13), a partir de (2.16), pode-se mostrar [5] que o gradiente (para este novo sistema de coordenadas) é:

$$\nabla = 2\Lambda V'$$

$$\nabla = 2[\lambda_0 v'_0 \quad \lambda_1 v'_1 \quad \dots \quad \lambda_{N-1} v'_{N-1}] \quad (2.22)$$

Portanto,

$$\frac{\partial \xi}{\partial v'_i} = 2\lambda_i v'_i$$

e

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial v'^2_i} = 2\lambda_i, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.23)$$

De (2.23), verifica-se que *os auto-valores da matriz de autocorrelação R serão as derivadas de segunda ordem da função de desempenho com relação aos eixos principais.*

Geometricamente, esta definição relaciona os auto-valores aos raios das hiperelipses nas direções dos eixos principais. No exemplo da Fig. 2.7, temos  $\lambda_0 = 1$  e  $\lambda_1 = 3$ , o que significa um raio no eixo  $v'_0$  três vezes maior do que no eixo  $v'_1$ .

Como conclusão desta definição temos que, quanto maior a dispersão dos auto-valores de **R**, maior será a diferença de raios nas direções dos eixos principais, o que poderá dificultar o processo de convergência do algoritmo de adaptação, como será discutido posteriormente.

### 2.3 Determinação do Vetor ótimo

Em sistemas adaptáveis, a determinação do vetor ótimo ( $W^*$ ) diretamente, de forma analítica (malha aberta), normalmente é muito difícil ou até impraticável, devido à necessidade de se conhecer completamente as características estatísticas dos sinais envolvidos, requerendo um "pesado" cálculo matemático, como se pode observar na equação (2.10). Portanto, métodos iterativos são utilizados para este fim, utilizando-se algoritmos de adaptação em malha fechada.

### 2.3.1 Método de Newton

Os algoritmos de adaptação, que sempre receberam atenção especial nas teorias de sistemas adaptáveis, tem sido baseados fundamentalmente em métodos relacionados ao gradiente da função de desempenho, já que tem-se o ponto ótimo em  $\xi_{\min}$ , cujo valor do gradiente é zero. Tais métodos baseados no gradiente são derivados de métodos numéricos consagrados para determinação de zeros de uma função, como o *método de Newton-Raphson* ou simplesmente *método de Newton*.

A equação (2.24) apresenta a forma recursiva (iterativa) do método de Newton para a determinação do valor  $x$  no ponto em que a função  $f(x)$  é igual a zero.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.24)$$

Porém, o objetivo em filtragem adaptável é a determinação, não do zero da função, mas do ponto onde ocorre seu valor mínimo, ou seja, onde  $f'(x) = 0$  (no caso multidimensional,  $\nabla = 0$ ). Portanto, pode-se obter o método de Newton para sistemas adaptáveis, substituindo-se  $f(x)$  por  $f'(x)$  na equação (2.24).

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} \quad (2.25)$$

Como a superfície de desempenho é um hiperparabolóide, ou no caso unidimensional é uma parábola, através do método de Newton será determinado o ponto ótimo em apenas uma iteração.

A forma recursiva para o método de Newton multidimensional pode ser derivado diretamente da expressão do gradiente (2.8). Assim, para a determinação de  $W^*$ , tem-se:

$$W^* = W - \frac{1}{2} R^{-1} \nabla \quad (2.26)$$

onde  $W$  é o vetor de partida para a determinação do ótimo e  $\nabla$  é o gradiente da função de desempenho neste ponto de partida. Como se pode observar, a determinação do vetor ótimo  $W^*$  é feita em apenas uma iteração. No entanto, como na determinação analítica, a inversão de  $R$  requer um grande volume de cálculos, além da necessidade de acumular as amostras da entrada para a obtenção da matriz de autocorrelação. Este procedimento torna tal método ineficiente na prática.

Um exemplo para dois coeficientes do método de Newton é apresentado na Fig. 2.8.

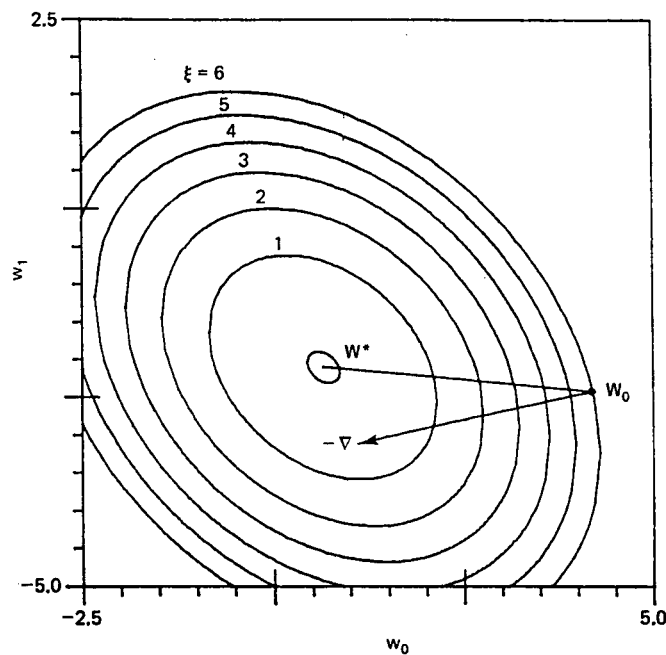


Fig. 2.8 Convergência de um sistema para dois coeficientes pelo método de Newton [5].

### 2.3.2 Algoritmo "Steepest Descent"

Devido à grande dificuldade computacional do método de Newton, que normalmente não é adequada para o processamento em tempo real, foi introduzida uma simplificação no algoritmo, eliminando-se o termo  $\frac{1}{2}R^{-1}$  da equação (2.26). Este procedimento dá origem a equação (2.27),

onde  $k$  representa a iteração anterior,  $k+1$  a iteração atual e  $\mu$  é uma constante que regulará o passo de convergência.

$$W_{k+1} = W_k - \mu \nabla_k \quad , k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.27)$$

Diferentemente do método anterior, este algoritmo, denominado *Steepest Descent* (descida mais íngreme), não tem solução imediata (adaptação em apenas uma iteração), sendo necessárias diversas iterações para se obter uma solução próxima do ótimo, quando o algoritmo converge. A atualização do vetor  $W$ , como se pode observar na equação (2.27), se dará na direção do vetor gradiente (direção de maior inclinação da superfície naquele ponto), porém, em sentido contrário, como pode ser verificado no exemplo da Fig. 2.9.

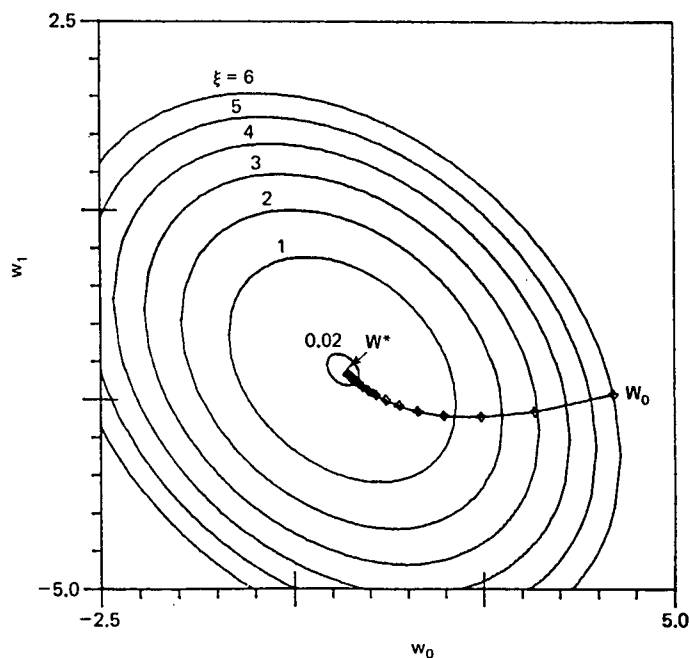


Fig. 2.9 Convergência de um sistema para dois coeficientes utilizando o algoritmo "steepest descent" [5].

Para uma implementação eficiente deste algoritmo, deve-se determinar uma forma prática de definição do gradiente. Sabendo que  $\xi_k$  é o valor médio de  $\varepsilon^2[k]$ , pode-se demonstrar [5] que

$$\nabla_k = E[\hat{\nabla}_k] \quad (2.28)$$

onde,

$$\hat{\nabla}_k = \frac{\partial \varepsilon^2[k]}{\partial W_k} = 2\varepsilon[k] \frac{\partial \varepsilon[k]}{\partial W_k} = -2\varepsilon[k]X_k \quad (2.29)$$

é o gradiente da função erro quadrático.

Portanto, podemos escrever a expressão do gradiente do erro médio quadrático:

$$\nabla_k = -2E[\varepsilon[k]X_k] \quad (2.30)$$

Desta forma, o algoritmo "steepest descent" poderá ser expresso por:

$$W_{k+1} = W_k + 2\mu E[\varepsilon[k]X_k] \quad (2.31)$$

$E[\varepsilon[k]X_k]$  pode ser obtido neste algoritmo calculando-se a média de  $\varepsilon[k]X_k$  após um certo número de amostras, sendo que neste período não há atualização do vetor  $W$ .

Um fator determinante na convergência deste método é a constante  $\mu$ , denominada *Constante de Adaptação* ou *Coefficiente de Adaptação*, ou ainda, *Passo de Adaptação*, que definirá o tamanho do passo a ser dado a cada iteração. Valores de  $\mu$  muito elevados poderão levar o algoritmo à divergência, portanto, é de fundamental importância a definição dos limites da faixa de valores permitidos para esta constante. Substituindo (2.13) e (2.14) em (2.27) teremos a expressão do algoritmo, como:

$$V_{k+1} = (I - 2\mu R) V_k \quad (2.32)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade. De (2.21) e (2.32), tem-se:

$$\mathbf{V}'_{k+1} = (\mathbf{I} - 2\mu\Lambda) \mathbf{V}'_k \quad (2.33)$$

ou ainda,

$$\mathbf{V}'_k = (\mathbf{I} - 2\mu\Lambda)^k \mathbf{V}'_0 \quad (2.34)$$

A condição de convergência para este algoritmo será, portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{I} - 2\mu\Lambda)^k = 0 \quad (2.35)$$

o qual podemos escrever da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - 2\lambda_0)^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - 2\lambda_1)^k & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - 2\lambda_{N-1})^k \end{bmatrix} = 0 \quad (2.36)$$

De (2.36), verifica-se que  $(1 - 2\lambda_n)$ , para  $n = 0, \dots, N-1$ , para cada auto-valor, deverá ser menor que 1 para que ocorra convergência. Desta forma, os limites para a convergência do algoritmo serão dados por:

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\max}} \quad (2.37)$$

onde  $\lambda_{\max}$  é o maior auto-valor da matriz de autocorrelação  $\mathbf{R}$ .

Outra verificação importante de (2.36) é que, para cada auto-valor, tem-se um  $\mu$  (para convergência mais rápida) diferente, sendo

$$\mu_{n,\text{ótimo}} = \frac{1}{2\lambda_n}, \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (2.38)$$

Como o coeficiente de convergência normalmente é único para a adaptação de todos os coeficientes, pode-se verificar, através de (2.37) e (2.38) uma dificuldade maior de convergência do algoritmo para uma matriz de autocorrelação com grande dispersão de auto-valores. Considerando-se, por exemplo, uma constante de convergência ótima para um determinado auto-valor, poderá ocorrer a divergência do algoritmo devido a um outro auto-valor.

### 2.3.3 Algoritmo LMS

De modo a tornar mais eficiente a implementação do método do gradiente nas mais variadas aplicações de adaptação, foi proposta por Widrow e Hoff [6] uma simplificação muito conveniente no algoritmo "steepest descent". Nesta nova forma, ao invés de se determinar o gradiente do erro médio quadrático a cada iteração, é utilizada uma estimativa deste, definida pelo do gradiente do erro quadrático (equação (2.29)), que facilmente pode ser obtido a cada iteração, diretamente do sistema. Este algoritmo, que significou basicamente o início do desenvolvimento dos filtros adaptáveis, sendo ainda hoje o processo mais utilizado, ficou conhecido como *Algoritmo LMS* (Least-Mean-Square Algorithm), ou Algoritmo do Erro Médio Quadrático.

Considerando, portanto, o gradiente estimado definido em (2.29), teremos a expressão para o algoritmo LMS, assim:

$$W_{k+1} = W_k - \mu \hat{\nabla} = W_k + 2\mu \varepsilon[k] X_k \quad (2.39)$$

Por utilizar o valor estimado do gradiente, este algoritmo deverá convergir seguindo o mesmo percurso do "steepest descent" na superfície de erro, porém, de uma forma não exata, apresentando um certo "ruído" na adaptação (como se verifica nos exemplos da Fig. 2.10). Este



fator torna mais crítico cada passo da iteração, limitando ainda mais a faixa de valores possíveis para o coeficiente de adaptação  $\mu$ .

Os limites de convergência para o algoritmo LMS podem ser determinados analiticamente [13], a partir de algumas considerações iniciais. Consideraremos, em primeiro lugar, o algoritmo LMS aplicado a um processo de identificação de sistemas, conforme Fig. 2.11. A título de simplificação, sem perda de generalidade, assumiremos  $\xi_{\min} = 0$ . Portanto,  $H(z) = W^*(z)$ , onde  $H(z)$  é a transformada Z da resposta do sistema a identificar e  $W^*(z)$ , a transformada Z da resposta ótima do filtro adaptável.

Outra consideração que simplifica consideravelmente o equacionamento, é a aplicação de um sinal de entrada do tipo ruído branco (bastante utilizado no processo de identificação de sistemas por abranger todo espectro de frequência), cuja média é zero ( $\mu_x = 0$ ) e a variância é igual a 1 ( $\sigma_x^2 = 1$ ). Neste caso, a matriz de autocorrelação  $\mathbf{R}$  se tornará diagonal (amostras totalmente descorrelacionadas entre si) e, conseqüentemente, seus auto-valores serão todos iguais com dispersão igual a 1. Esta condição torna as curvas de nível da superfície de desempenho ( $\xi$  constante) circulares, ou seja, os raios das elipses serão iguais.

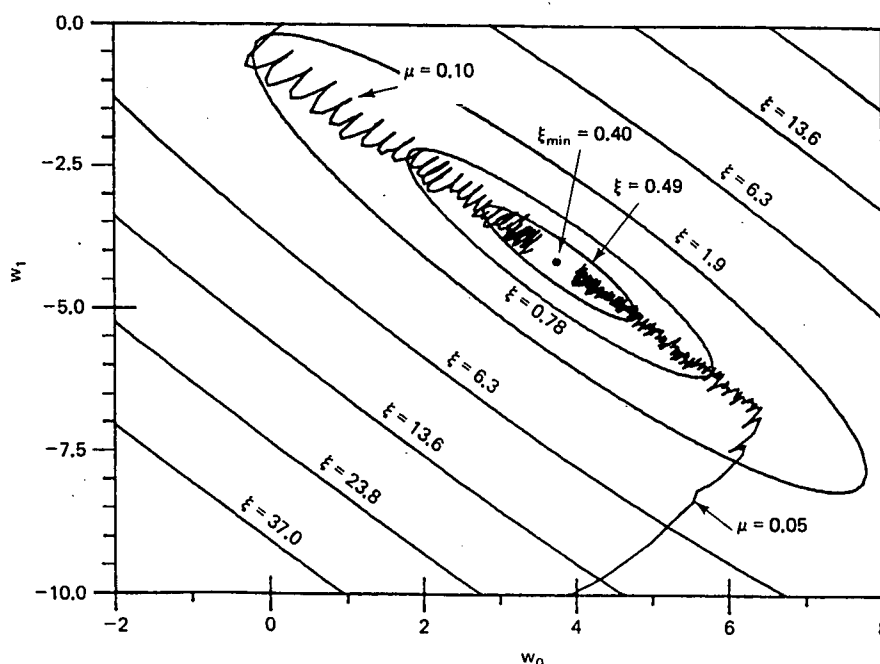


Fig. 2.10 Convergência de um sistema para dois coeficientes utilizando o algoritmo LMS [5].

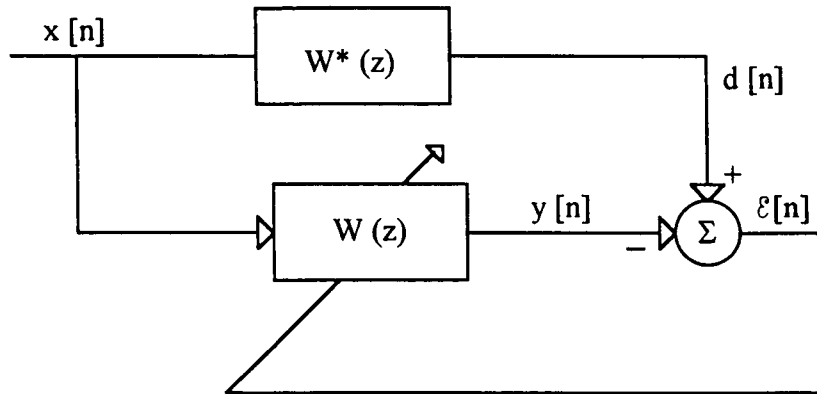


Fig. 2.11 Estrutura de identificação de sistemas para determinação dos limites de convergência para o algoritmo LMS.

A partir destas condições, e fazendo

$$V_k = W_k - W^* \quad (2.40)$$

teremos:

$$\varepsilon[k] = -X_k^T V_k \quad (2.41)$$

portanto,

$$\xi_k = E[\varepsilon^2[k]] = E[V_k^T X_k X_k^T V_k] \quad (2.42)$$

Para o algoritmo LMS, onde

$$W_{k+1} = W_k + 2\mu \varepsilon[k] X_k \quad (2.43)$$

somando  $(-W^*)$  aos dois lados de (2.43), teremos:

$$V_{k+1} = V_k + 2\mu \varepsilon[k] X_k \quad (2.44)$$

Como o sinal de entrada é descorrelacionado, verifica-se em (2.44) que  $V_k$  dependerá de  $X_{k-1}$ , mas será independente de  $X_k$ . Portanto:

$$E[X_k X_k^T] = E[x^2[k]] I_{N \times N} \quad (2.45)$$

onde  $I_{N \times N}$  é a matriz identidade de dimensões  $N \times N$  ( $N$  é o número de coeficientes do filtro adaptável) e  $E[x^2[k]]$  representa a potência média do sinal de entrada, a qual representaremos por  $x_{RMS}^2$ . Desta forma,

$$\xi_k = x_{RMS}^2 E[V_k^T V_k] \quad (2.46)$$

e

$$\xi_{k+1} = x_{RMS}^2 E[V_{k+1}^T V_{k+1}] \quad (2.47)$$

Substituindo (2.44) em (2.47) e procedendo as devidas multiplicações e simplificações, teremos:

$$\xi_{k+1} = (1 - 4\mu x_{RMS}^2 + 4\mu^2 N x_{RMS}^4) \xi_k \quad (2.48)$$

Portanto,

$$\xi_{(k)} = (1 - 4\mu x_{RMS}^2 + 4\mu^2 N x_{RMS}^4)^k \xi_{(0)} \quad (2.49)$$

De (2.49), verificamos que

$$|1 - 4\mu x_{RMS}^2 + 4\mu^2 N x_{RMS}^4| < 1 \quad (2.50)$$

é a condição para a convergência do algoritmo. Desta condição determinamos que

$$0 < \mu < \frac{1}{N \cdot x_{\text{RMS}}^2} \quad (2.51)$$

Estes limites são comprovados na prática, como verificaremos no Capítulo 5. Widrow e *Sterns* em [5] e Haykin em [6], no entanto, analisam os limites de  $\mu$  considerando, de maneira incorreta, o cálculo do gradiente do erro médio quadrático (como na análise para "steepest descent") ao invés do gradiente do erro quadrático (LMS), de forma que, formalmente os limites deveriam ter menor restrição do que os apresentados em (2.51).

Para verificarmos agora o melhor valor de  $\mu$  para o processo de convergência (máxima velocidade de convergência), determinamos o valor mínimo da função

$$f(\mu) = 1 - 4\mu x_{\text{RMS}}^2 + 4\mu^2 N x_{\text{RMS}}^4 \quad (2.52)$$

Assim:

$$\mu_{\text{ótimo}} = \frac{1}{2N \cdot x_{\text{RMS}}^2} \quad (2.53)$$

O número de iterações necessárias para a convergência do algoritmo LMS normalmente será muito maior do que para o algoritmo "steepest descent", no entanto, o cálculo do gradiente a cada iteração no "steepest descent" acaba produzindo um volume de operações muito maior. Porém, para algumas aplicações, pode ser interessante proceder a adaptação utilizando um compromisso entre os dois algoritmos, ou seja, atualizando o vetor  $W$  a cada bloco de amostras, onde é calculado um valor próximo do verdadeiro gradiente do erro médio quadrático. O melhor compromisso é aquele que produz uma convergência em menor tempo, incluindo-se aqui o número de iterações e o volume de cálculos para obtenção do gradiente.

Porém, por sua simplicidade e eficiência, o algoritmo LMS, na sua forma original, é ainda o algoritmo mais utilizado em filtragem adaptável. No entanto, diversos outros algoritmos foram desenvolvidos, sendo alguns derivados do algoritmo LMS, como é o caso do *Algoritmo NLMS* (LMS normalizado) e outros baseados em métodos diversos do método do gradiente, como é o caso do *Algoritmo RLS* (Recursive Least-Square Algorithm). O algoritmo RLS utiliza o método dos *Mínimos Quadrados* [6], cuja principal característica é a sua independência dos parâmetros estatísticos.

## CAPÍTULO 3

### PROCESSAMENTO MULTIBANDA DE SINAIS

#### 3.1 Introdução

Com uma gama de aplicações bastante ampla em tratamento digital de sinais, o processamento multibanda tem recebido nas duas últimas décadas, principalmente nos últimos anos, especial atenção de pesquisadores desta área. Esta técnica se caracteriza, basicamente, pela decomposição do sinal a ser tratado em sub-bandas de frequência, seguida da redução da taxa de amostragem, visando principalmente dois aspectos: o tratamento independente de sinais por sub-banda; e a redução da complexidade computacional exigida dos processadores.

A estrutura multibanda é formada, de maneira geral, por dois componentes básicos: o *Analizador* (ou *Filtro Dizimador*) e o *Sintetizador* (ou *Filtro Interpolador*) [2, 14, 15] (Fig. 3.1). O analisador tem por função decompor o sinal em sub-bandas e reduzir a taxa de amostragem do sinal (*sub-amostrar* o sinal) em cada banda, procedimento agora possível devido à limitação em frequência. O sintetizador, por sua vez, é o responsável em reverter a taxa de amostragem para o mesmo valor original ou maior (se desejado), e pela recomposição das diversas sub-bandas em um sinal de banda única.

Cada um destes componentes, então, é formado por dois sub-blocos: um *Banco de Filtros* e um *Conversor de Frequência*. Na Fig. 3.2 é apresentado o diagrama básico de uma estrutura multibanda, onde se pode observar o *Banco de Filtros de Análise* (que decompõe o sinal em  $K$  sub-bandas), o *Dizimador*<sup>1</sup> (que sub-amostra o sinal por um fator  $M$ , onde  $M$  é um valor inteiro denominado *Fator de Dizimação*), o *Interpolador* (que eleva a taxa de amostragem por um fator  $L$ , que é o *Fator de Interpolação*) e, finalmente, o *Banco de Filtros de Síntese* (cuja função é

---

<sup>1</sup>Em processamento de sinais, tem sido adotada a designação *decimação* ("decimation" do inglês) para a redução da taxa de amostragem por um fator qualquer. Porém, no sentido estrito da palavra, *decimação* significa redução por dez por cento [14], portanto, consideramos mais apropriado a utilização da designação *dizimação* neste contexto.

filtrar as réplicas indesejáveis do espectro de frequência criadas na dizimação e interpolação e reagrupar as sub-bandas formando novamente um sinal único). Para cada sub-banda  $i$  (Fig. 3.2) teremos, portanto,  $x_i[n]$  (sinal de saída do filtro de análise),  $x_i[Mn]$  (sinal dizimado por um fator  $M$ ),  $x'_i[Mn]$  (entrada do interpolador - pode ser igual a  $x_i[Mn]$ ),  $x_{e'_i}[(M/L)n]$  (sinal interpolado com zeros por um fator  $L$  - esparsos) e  $x'_i[(M/L)n]$  (sinal filtrado pelo filtro de síntese).

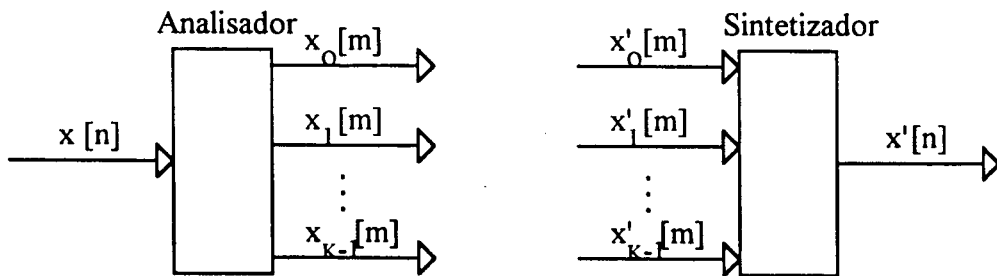


Fig. 3.1 Estrutura básica de um sistema de processamento de sinais multibanda.

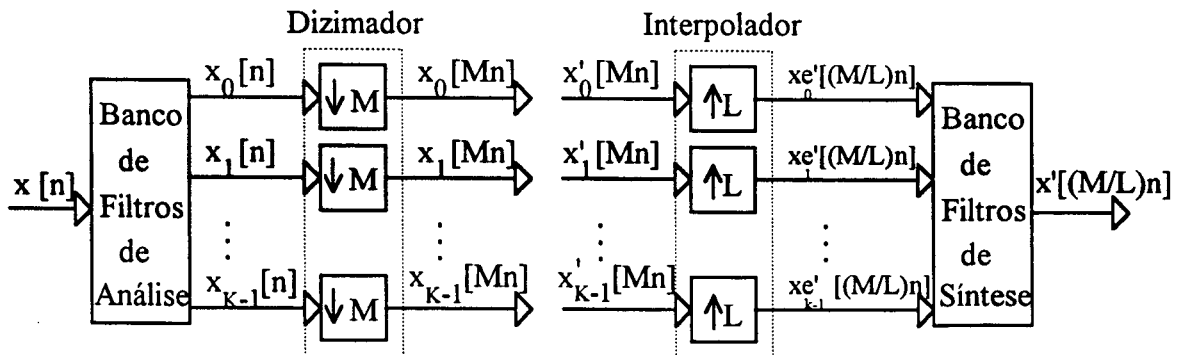


Fig. 3.2 Componentes da estrutura de um sistema multibanda.

Se por um lado o processamento multibanda apresenta uma característica bastante desejável, a redução da taxa de amostragem, que possibilita a utilização de processadores de menor velocidade e, conseqüentemente, menor complexidade, por outro, esta mesma característica acarreta um tipo de erro bastante significativo no processamento digital de sinais: o

*Recobrimento* [15]. O espectro de frequência dos sinais discretos apresenta uma característica de periodicidade [16, 3, 17] que se verifica a cada  $2\pi$  radianos. Considerando o teorema de amostragem, sabe-se que a taxa mínima de amostragem de um sinal, para que este seja caracterizado completamente, é de duas vezes a largura da banda passante de sua resposta em frequência. Portanto, com a redução da taxa de amostragem, as réplicas da banda passante (que aparecem a cada  $2\pi$  radianos) tendem a se aproximar, podendo haver o recobrimento de uma sobre a outra e conseqüente degradação na informação. Esta característica será melhor discutida em seção posterior.

### 3.1.1 Organização do Capítulo

Neste Capítulo será analisada a teoria de processamento multibanda, iniciando pela definição de dizimação e interpolação, suas principais aplicações e sua importância em processamento de sinais, principalmente quando os bancos de filtros são decompostos polifasicamente, como será descrito. Em seguida é verificado o desenvolvimento de projetos de bancos de filtros, considerando as duas estruturas básicas: DFT e em árvore (onde se destacam os bancos QMF), onde são analisadas as condições para o desenvolvimento de sistemas multibanda com reconstrução perfeita. Finalmente, é realizado um estudo relacionado à aplicação do processamento multibanda em filtragem adaptável.

## 3.2 Dizimação e interpolação

Na decomposição de um sinal  $x[n]$  em sub-bandas de frequência (Fig. 3.2), podemos observar que a taxa de amostragem em cada sub-banda se torna relativamente elevada, como se verifica no exemplo da Fig. 3.3(b). Isto significa que o sinal estará super-amostrado, ou melhor,



existem redundâncias entre as amostras deste sinal, o que possibilita uma redução da taxa de amostragem sem que haja perda de informações, como é mostrado na Fig. 3.3(c).

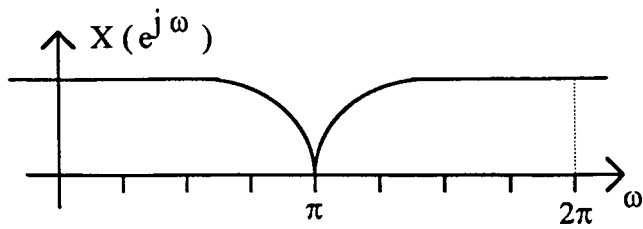
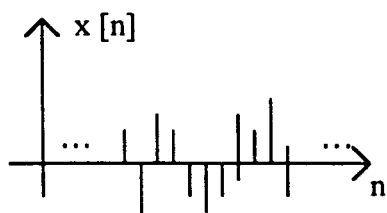
Na Fig. 3.3(c), considerou-se um fator de dizimação de valor igual ao número de sub-bandas ( $M = K = 4$ , onde  $K$  é o número de sub-bandas), o que resulta numa amostragem crítica do novo sinal, ou seja, no limite da condição de Nyquist para não haver recobrimento (caso os filtros sejam ideais). Nesta condição de amostragem, onde  $M = K$ , os bancos de filtros são denominados *Bancos de Filtros Criticamente Amostrados*<sup>1</sup> [2]. Por não serem ideais na prática, estes filtros permitirão um certo grau de recobrimento que deverá ser compensado de maneira a prevenir possíveis distorções, como será verificado posteriormente.

Para se recompor o sinal de saída,  $y[n]$ , a partir dos sinais  $x'_k[n]$ , para  $k = 0, \dots, K-1$ , deve-se realizar o processo inverso, ou seja, recuperar o sinal com a taxa de amostragem original (ou maior se necessário) e somar as saídas de cada sub-banda (Fig. 3.2).

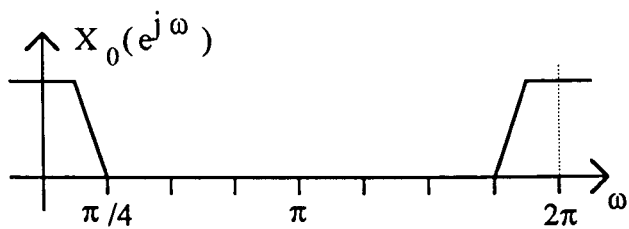
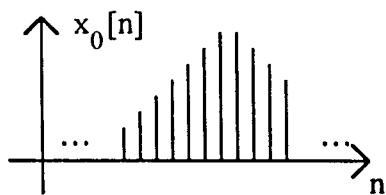
O processo de recuperação do sinal ocorre por interpolação, ou seja, se recuperam as amostras originais, retiradas na dizimação, a partir das amostras remanescentes. Para que este procedimento seja possível, inicialmente aumenta-se a taxa de amostragem do sinal simplesmente introduzindo-se amostras com valor zero entre as amostras de  $x'_k[n]$  (através da interpolação<sup>2</sup>). No exemplo da Fig. 3.3, foram introduzidas três amostras iguais a zero entre cada amostra do sinal ( $L = 4$ ) (Fig. 3.3(d)). Este aumento na taxa de amostragem sem alterar a informação contida neste sinal, resulta no espectro apresentado na mesma figura. Para se obter o formato original do sinal (Fig. 3.3(b)), utiliza-se novamente um filtro seletivo (passa-baixas para o exemplo), com resposta  $f_0[n]$ , que, para esta banda, eliminará as réplicas intermediárias entre 0 e  $f_s$ , Fig. 3.3(e).

<sup>1</sup> Tradução literal do inglês "*Critically Sampled Filter Banks*".

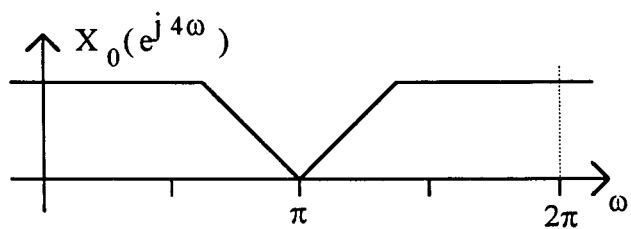
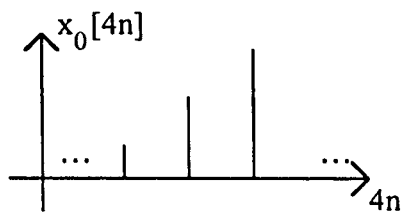
<sup>2</sup> O termo *interpolação*, de forma mais ampla, tem o significado descrito neste parágrafo (de recuperação de amostras retiradas a partir das remanescentes), no entanto, em processamento multibanda, é também utilizado este termo para designar apenas a introdução de amostras de valor zero entre as amostras remanescentes do sinal.



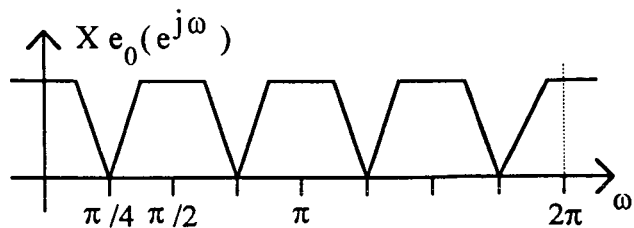
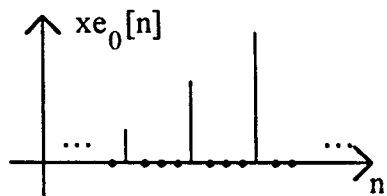
(a)



(b)



(c)



(d)

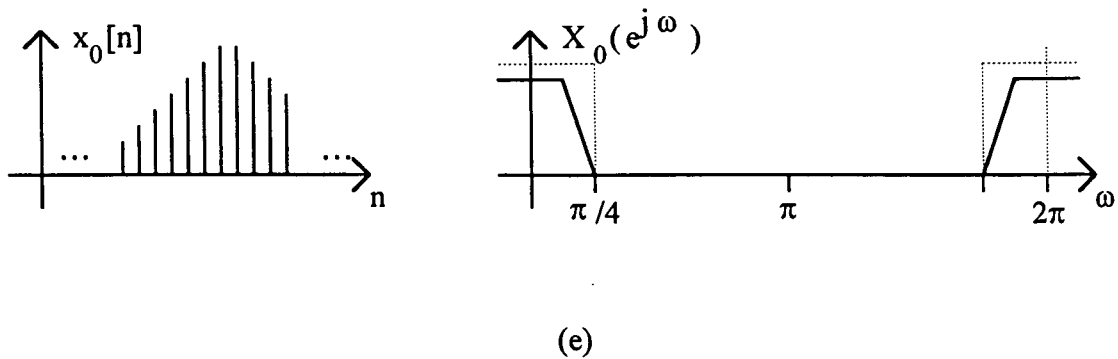


Fig. 3.3 Processos de dizimação e interpolação. (a) Sinal de banda completa de entrada do sistema. (b) Sinal filtrado por um filtro passa-baixas (sub-banda 0). (c) Sinal da sub-banda 0 dizimado com  $M = 4$ . (d) Sinal da sub-banda 0 interpolado com  $L = 4$ . (e) Sinal da sub-banda 0 recomposto por filtragem.

### 3.3 Aplicações

O processamento multibanda de sinais apresenta um número muito grande de aplicações, nas mais diversas áreas, tais como: sistemas digitais de áudio, sistemas de comunicações, processamento de voz e de imagem, transmissão e processamento de dados, entre outras.

Neste Seção descrevemos, sucintamente, algumas destas aplicações onde o processamento multibanda é largamente utilizado [2, 15].

#### a) Conversão de formato em sistemas digitais de áudio

Uma primeira aplicação em sistemas digitais de áudio é a conversão de formatos de gravações digitais (taxas de amostragem). A princípio esta conversão poderia ser realizada convertendo-se o sinal digital para analógico e reconvertendo-o para digital utilizando outra frequência de amostragem. Porém, devido ao ruído inerente às conversões D/A e A/D, torna-se preferível a conversão de taxas diretamente utilizando os princípios da dizimação e interpolação.

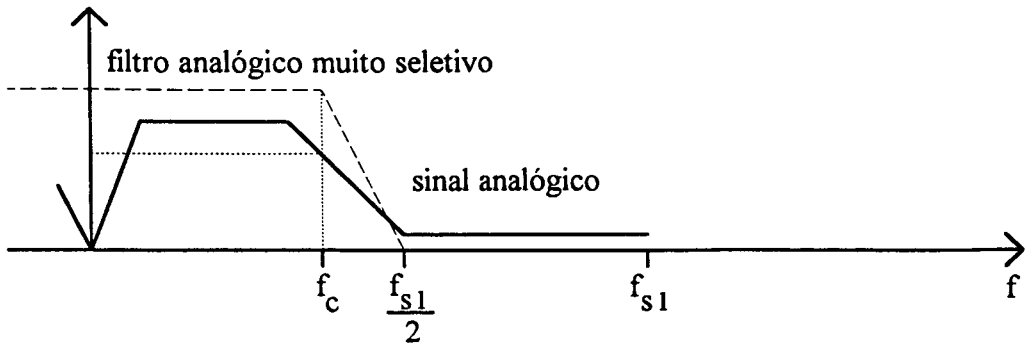
#### b) Digitalização do sinal em sistemas digitais de áudio

Outra aplicação importante em sistemas digitais de áudio surge no processo de digitalização. Antes de se processar a conversão A/D de um sinal de áudio, é necessária a pré-filtragem

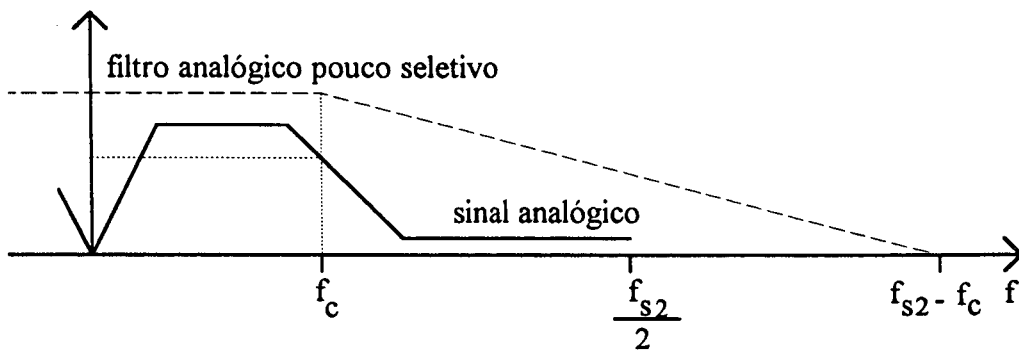
analógica, selecionando a banda de interesse, a fim de se evitar erros de recobrimento no sistema digital. No entanto, se o sinal for amostrado com uma frequência pouco maior do que o dobro da máxima frequência da banda passante (amostragem crítica), o filtro analógico deverá ter uma seletividade muito alta (Fig. 3.4(a)), o que normalmente acarretará distorções de fase indesejáveis [18]. Para que se possa evitar estas possíveis distorções, o sinal é amostrado numa taxa mais elevada (de pelo menos duas vezes a amostragem crítica) de forma a possibilitar a utilização de um filtro analógico menos seletivo que garanta o não recobrimento (Fig. 3.4(b)). Quando digitalizado, o sinal é então novamente filtrado (agora de forma mais seletiva), aproveitando-se da possibilidade de fase linear dos filtros digital FIR, podendo-se retomar, desta forma, a taxa de amostragem original através da dizimação (Fig. 3.4(c)). Procedimento semelhante ocorre na conversão D/A utilizando, porém, o processo de interpolação.

### c) *Codificação de voz e imagem em sub-banda*

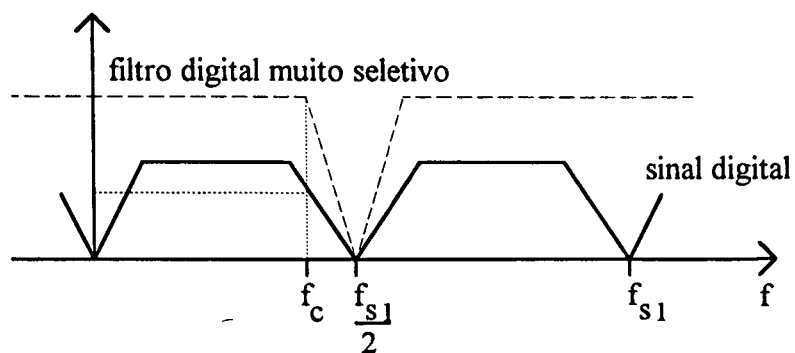
É bastante freqüente sinais de voz, imagem ou outras aplicações, terem uma concentração maior de energia em determinada faixa do espectro de frequência. Desta forma, decompondo estes sinais em sub-bandas, pode-se quantizar cada componente com número diferente de bits, conforme a importância de cada sub-banda, sem que ocorra perda significativa de informação. Para exemplificar: um sinal que deveria ser quantizado com 8 bits para cada amostra, o que, para uma taxa amostragem de 10.000 amostras/s (10 kHz) representaria uma taxa de 80 kbits/s, poderia ser decomposto em duas sub-bandas onde o sinal da primeira seria quantizado, por exemplo, com 8 bits e o da segunda com 4 bits. Como em cada sub-banda a taxa de amostragem é a metade da anterior devido à dizimação ( $M = 2$ ), teríamos: 5.000 amostras/s ou 40 kbits/s na primeira sub-banda e 5.000 amostras/s ou 20 kbits/s na segunda sub-banda. Multiplexando no tempo estas duas saídas, ter-se-ia uma taxa total de 60 kbits/s, significando uma compressão para 3/4 da taxa original.



(a)



(b)



(c)

Fig. 3.4 Processo de digitalização de sinais em sistemas digitais de áudio, onde  $f_c$  = frequência de corte superior e  $f_s$  = frequência de amostragem utilizada na digitalização. (a) Pré-filtragem seletiva para sub-amostragem crítica. (b) Pré-filtragem menos seletiva para sub-amostragem não crítica. (c) Filtragem digital e sub-amostragem.

d) *Transformação FDM para TDM ou vice-versa*

Muito utilizada em sistemas telefônicos digitais ou outras aplicações onde se necessita transmissão de informações, a multiplexação se caracteriza pela possibilidade de transmissão de diversos canais simultaneamente. No formato FDM<sup>1</sup> (multiplexação por divisão de frequência) os sinais transmitidos ocupam bandas distintas do espectro de frequência do sinal resultante, enquanto que em TDM<sup>2</sup> (multiplexação por divisão no tempo) os sinais não são modulados em frequência, sendo suas amostras transmitidas alternadamente no tempo. Na transformação FDM para TDM, o sinal é analisado (decomposto) nas sub-bandas correspondentes aos canais (por um banco de filtros). Cada sinal, na sub-banda correspondente, é demodulado para a banda base e, em seguida, sua taxa de amostragem é reduzida (dizimação). Com uma taxa menor, as amostras dos sinais podem ser transmitidas numa única linha alternadamente (resultando uma taxa idêntica à anterior à dizimação) (Fig. 3.5). No sentido inverso, os sinais multiplexados no formato TDM são primeiramente separados (obtendo-se, portanto, uma taxa menor para cada sinal), em seguida são interpolados em cada sub-banda (elevando-se a taxa novamente para o valor original) e, através de um banco de filtros, modulados para assumirem as respectivas faixas no formato FDM (Fig. 3.6).

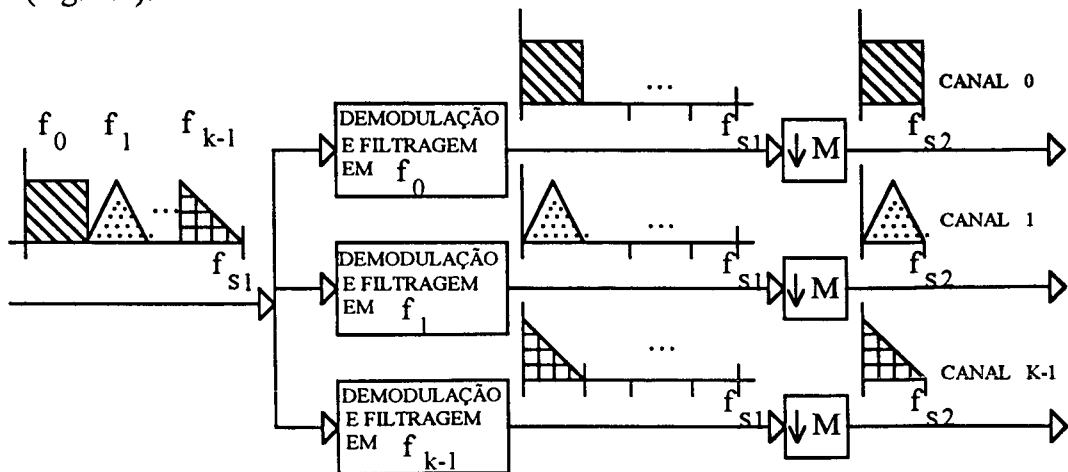


Fig. 3.5 Transformação FDM para TDM.

<sup>1</sup> Frequency Division Multiplexing

<sup>2</sup> Time Division Multiplexing

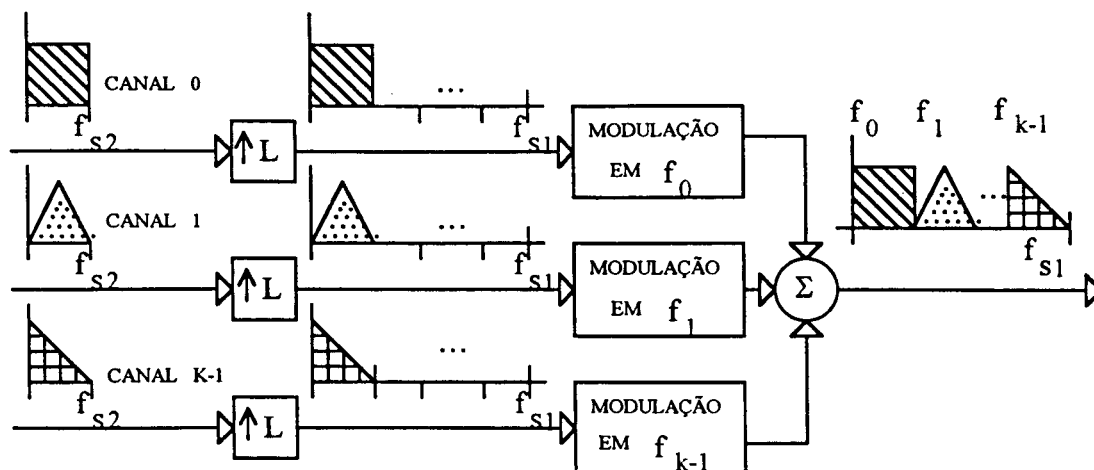


Fig. 3.6 Transformação TDM para FDM.

e) *Filtragem adaptável*

Em filtragem adaptável, o processamento multibanda pode ser interessante em sistemas com distribuição em frequência não uniforme de potência, contribuindo na redução do tempo de convergência [15, 19, 20]. O tempo de convergência de adaptação de um filtro, utilizando-se algoritmo LMS, tende a diminuir com uma menor relação entre os valores máximo e mínimo do espectro de potência  $S(\omega)$  do sinal de entrada [6, 21]. Desta forma, considerando que, em uma faixa mais restrita de frequência, podemos ter uma variação menor desta potência, pode-se verificar, normalmente, uma tendência à convergência mais rápida para cada sub-banda. Além desta vantagem, outras características têm se mostrado melhores no processamento multibanda. Esta questão será retomada posteriormente.

f) *Redução da taxa de amostragem em processadores de sinais*

De forma mais geral, em tratamento de sinais, o processamento multibanda tem uma característica muito importante que é a redução da taxa de amostragem. Esta estrutura pode ser muito eficiente na redução de custos computacionais à medida que se podem utilizar processadores de menor velocidade. Dependendo da aplicação, a redução da taxa pela metade (em duas sub-bandas), por exemplo, pode significar a utilização de dois processadores de baixo custo no lugar de um outro de custo mais elevado.

### 3.4 Decomposição Polifásica

Avaliando o funcionamento de um filtro de análise na sub-banda  $k$ ,  $H_k(z)$ , observa-se que este estará sendo utilizado de forma não eficiente, pois estará calculando amostras de saída que serão eliminadas na dizimação (Fig. 3.7). Processo semelhante ocorre na filtragem de síntese, onde o sinal  $x'_k[Mn]$  é interpolado, com a introdução de amostras com valor zero, de forma a obter nova taxa de amostragem. Neste caso, o filtro de interpolação  $F_k(z)$  estará executando cálculos com amostras zero, novamente utilizando o processador ineficientemente (Fig. 3.8).

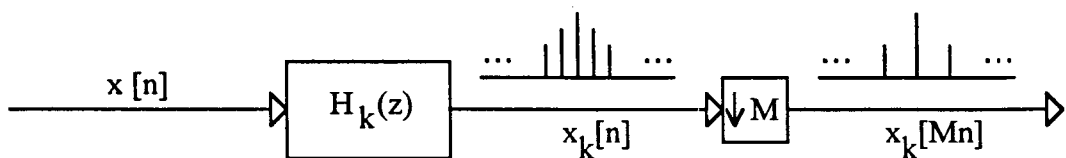


Fig. 3.7 Processo de dizimação.

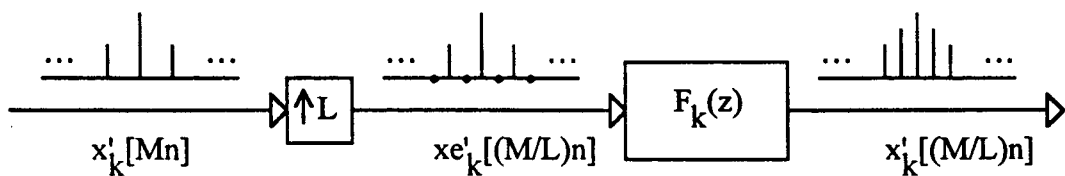


Fig. 3.8 Processo de interpolação.

Para se obter um aproveitamento mais racional do processador foi desenvolvido por *Bellanger et al.* [22] o método da *Decomposição Polifásica*, o qual descreveremos a seguir.

A função de transferência de um filtro do tipo FIR é representada por:

$$H(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i]z^{-i} \quad (3.1)$$



que pode ser reescrita da seguinte forma [15]:

$$H(z) = (\dots + h[-4]z^4 + h[-2]z^2 + h[0] + h[2]z^{-2} + h[4]z^{-4} + \dots) + z^{-1}(\dots + h[-3]z^4 + h[-1]z^2 + h[1] + h[3]z^{-2} + \dots) \quad (3.2)$$

Fazendo

$$E_0(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[2i]z^{-i} \quad \text{e} \quad E_1(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[2i+1]z^{-i} \quad (3.3)$$

a equação (3.2) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$H(z) = E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2) \quad (3.4)$$

que representa a decomposição polifásica em duas parcelas do sistema  $H(z)$ . A Fig. 3.9 mostra a representação de um sistema decomposto na forma polifásica.

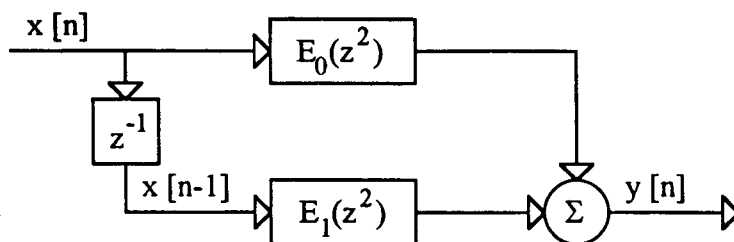


Fig. 3.9 Representação de um sistema decomposto na forma polifásica (duas parcelas).

Retomando-se a estrutura de redução da taxa de amostragem (com um índice de dizimação  $L = 2$ , por exemplo) e decompondo-se o filtro  $H(z)$  em componentes polifásicos, pode-se representar o sistema na forma apresentada pela Fig. 3.10. Alternativamente, podemos redesenhar

a estrutura anterior como na Fig. 3.11(a), cuja dizimação é realizada antes da filtragem. Representando o processo de dizimação por uma chave, a estrutura da Fig. 3.11(a) pode ser apresentada como em 3.11(b).

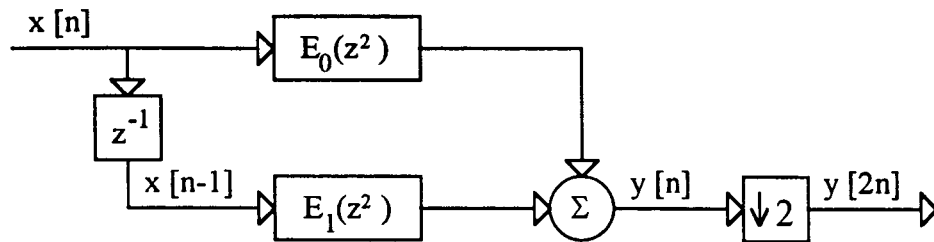
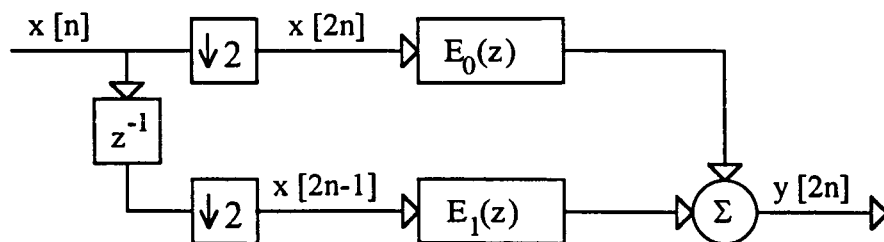


Fig. 3.10 Decomposição polifásica de um filtro de dizimação.

Nesta segunda representação (Fig. 3.11) fica clara a vantagem da decomposição polifásica em sistemas multibanda. Diferente da estrutura convencional (Fig. 3.7) e também da estrutura da Fig. 3.10, o processador que implementa o filtro passará a trabalhar com uma taxa de amostragem duas vezes menor do que a original, sendo que executará o mesmo volume de cálculos que anteriormente. Esta condição determinará um custo computacional menor, podendo o processador executar sua tarefa com a metade da velocidade.

Na filtragem de síntese o mesmo procedimento é possível, obtendo-se a estrutura da Fig. 3.12. Aqui, novamente verifica-se que o processador na estrutura polifásica trabalhará com menor taxa de amostragem, sendo utilizado de forma mais adequada.



(a)

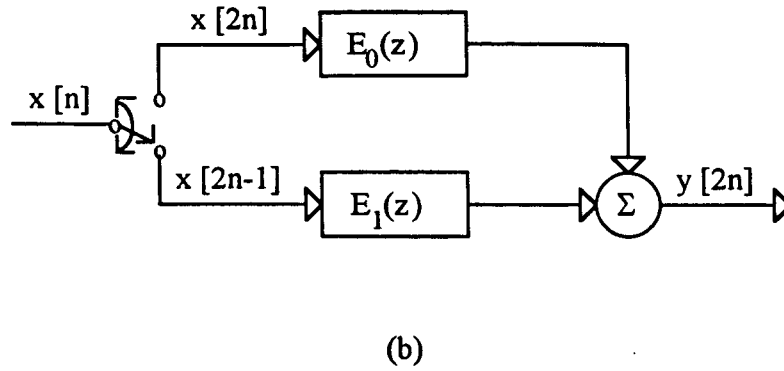


Fig. 3.11 Estrutura alternativa do filtro de dizimação com decomposição polifásica. (a) Representação utilizando blocos. (b) Representação utilizando chave.

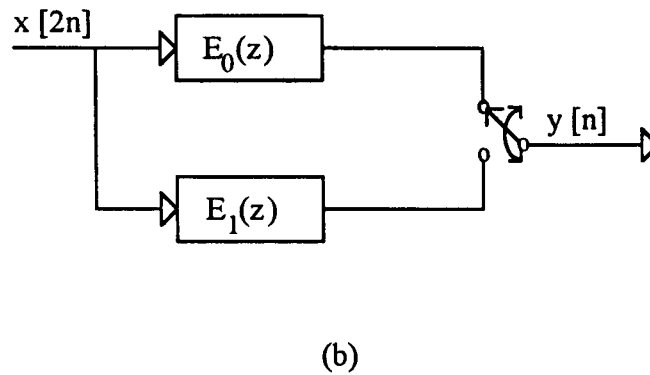
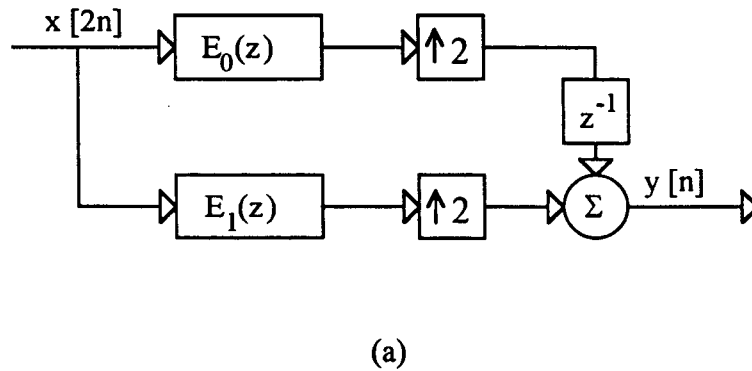


Fig. 3.12 Estrutura alternativa do filtro de interpolação com decomposição polifásica.

Extrapolando esta representação, pode-se decompor uma função de transferência em  $K$  parcelas, dependendo do grau de dizimação adotado, de onde se obtém,

$$H[z] = \sum_{i=0}^{K-1} z^{-i} E_i(z^K) \quad (3.5)$$

O número de componentes que serão utilizados na decomposição polifásica aplicada a sistemas multibanda, de forma a obtermos a redução de custo computacional, está relacionado diretamente aos fatores de dizimação e interpolação do sistema. Um sistema com fator de dizimação  $M$  é apresentado na Fig. 3.13.

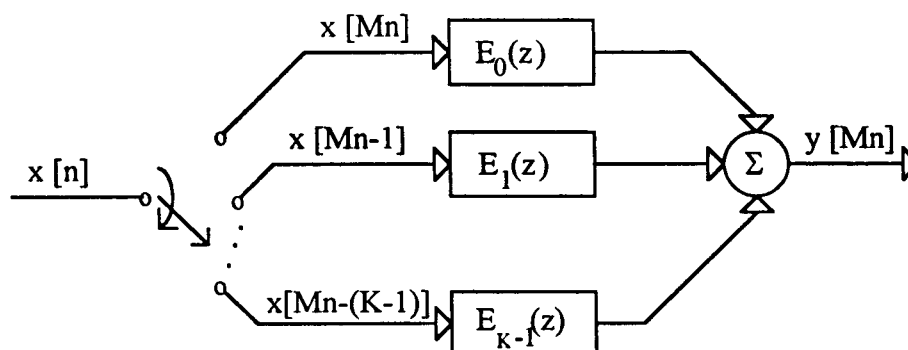


Fig. 3.13 Estrutura alternativa do filtro de dizimação com decomposição polifásica (fator de dizimação  $M$ ).

### 3.5 Banco de Filtros

Dentro da estrutura de filtragem em multibanda, os bancos de filtros têm importância fundamental, sendo as estruturas responsáveis pela decomposição do sinal nas sub-bandas de frequência e sua recomposição na saída. Para este fim, no entanto, estes bancos não devem interferir na informação contida no sinal a ser tratado, desejando-se obter na saída, idealmente, o mesmo sinal que resultaria de um processamento idêntico, porém, de banda única.

Ao se proceder esta decomposição e recomposição, comumente surgem dois tipos de distorção inerentes ao projeto dos filtros do banco: as *Distorções de Amplitude e de Fase*. Além destes erros, deve-se considerar ainda, a distorção causada pelo *Recobrimento*, já mencionada no

início deste capítulo. De forma geral, os trabalhos relacionados com o desenvolvimento de bancos de filtros visam, portanto, a eliminação, ou pelo menos a minimização destas distorções, buscando-se ainda o melhor desempenho e menor custo do sistema. A eliminação dos erros de amplitude, fase e recobrimento configura-se no que se convencionou chamar de *Reconstrução Perfeita* (PR - Perfect Reconstruction) [15, 23, 24, 25, 26].

Apesar de existirem muitos trabalhos apresentando os mais diversos métodos e projetos de bancos, duas estruturas básicas podem ser destacadas, nas quais a maior parte dos autores têm se baseado [2, 15]: os bancos de filtros *DFT*<sup>1</sup>, caracterizados pela utilização de um filtro protótipo tipo passa-baixas e pela translação em frequência por modulação; e os bancos de filtros com estrutura em árvore, onde as bandas são decompostas sempre de duas em duas numa estrutura em cascata. Neste segundo grupo destacam-se os filtros *QMF* (Quadrature Mirror Filter).

### 3.5.1 Banco de Filtros DFT

O banco de filtros DFT para processamento de sinais multibanda nasceu do desenvolvimento de uma estrutura utilizada para análise de espectro de frequência de sinais, fundamentada na *Transformada de Fourier Discreta* (DFT). Esta estrutura é muito utilizada no processamento digital de voz [25].

Para descrevermos a estrutura do analisador de espectro, partiremos da *Transformada de Fourier para Sinais Discretos* de um sinal  $x[n]$ , que é dada por:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]e^{-j\omega i} \quad (3.6)$$

A determinação da DFT de  $x[n]$ , definida por:

---

<sup>1</sup> Discret Fourier Transform

$$X(e^{j\omega_k}) = \sum_{i=0}^{N-1} x[i]e^{-j\omega_k i/N} \quad (3.7)$$

onde  $\omega_k$ , para  $k = 0, 1, \dots, K-1$ , representa o conjunto das frequências discretas.

Através da utilização de uma janela no tempo  $w[n]$ , de comprimento  $N$ , podemos reescrever a DFT de  $x[n]$  como:

$$X_m(e^{j\omega}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} w[m-i]x[i]e^{-j\omega_k i/N} \quad (3.8)$$

onde  $m$  representa a amostra no tempo em que foi aplicada a janela  $w[n]$ .

Observando a equação (3.8), pode-se verificar que  $X_m(e^{j\omega_k})$  é a soma de convolução discreta de  $w[n]$  com  $x[n]e^{-j\omega_k n}$ , onde este último será o sinal  $x[n]$  modulado pela função complexa  $e^{-j\omega_k n}$  [27]. Pode-se representar a expressão (3.8) pelo diagrama da Fig. 3.14. Nesta estrutura,  $w[n]$  representa a resposta ao impulso de um filtro passa-baixas que seleciona  $X_m(e^{j\omega_k})$ , que é a DFT de  $x[n]$  na frequência  $\omega_k$ , após a modulação (Fig. 3.15). A linha dupla na Fig. 3.14 representa sinal complexo.

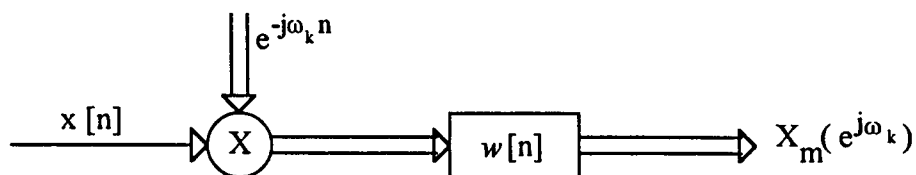


Fig. 3.14. Estrutura para obtenção da DFT de  $x[n]$  na frequência  $\omega_k$ .

Um analisador de espectro completo poderá, portanto, ser implementado por um banco de filtros utilizando esta estrutura, o qual é denominado *Banco de Filtros DFT*, como é mostrado na Fig. 3.16. O filtro representado por  $w[n]$  é passa-baixas e será utilizado em todos os ramos.

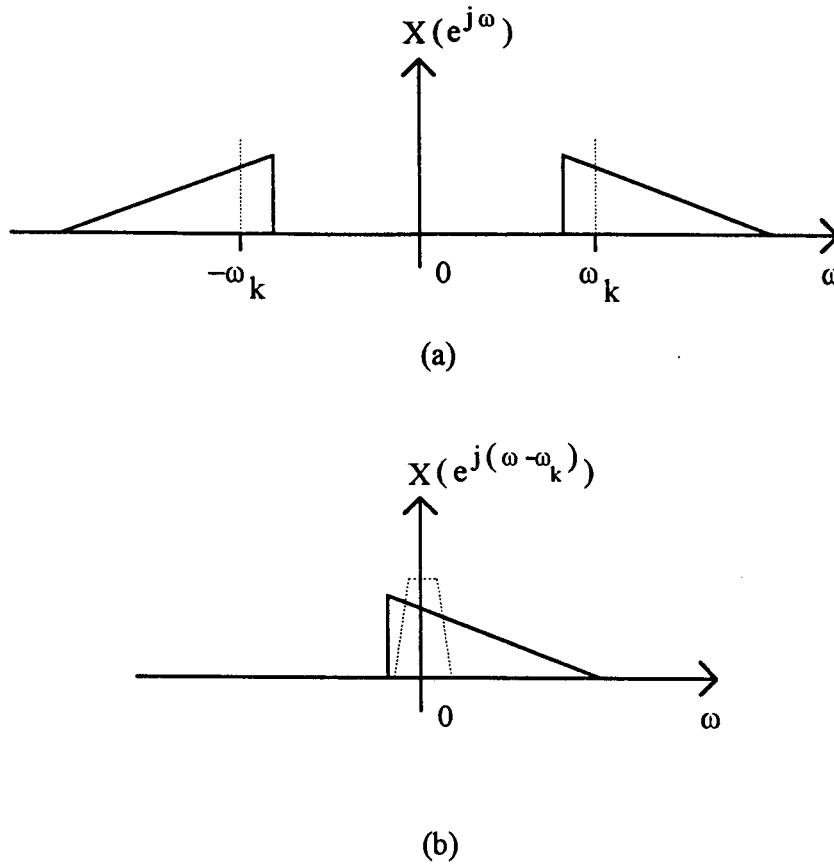


Fig. 3.15 Modulação pela função complexa  $e^{-j\omega_k n}$  e filtragem, para obtenção da DFT de  $x[n]$  na frequência  $\omega_k$ .  
 (a) Resposta em frequência de  $x[n]$ . (b)  $x[n]e^{j\omega_k n}$  em frequência e filtro com resposta ao impulso  $w[n]$  (linha tracejada).

Uma representação prática da modulação complexa, denominada *Modulação em Quadratura* [2], é apresentada na Fig. 3.17, onde

$$X_m(e^{j\omega_k}) = A_m(\omega_k) - jB(\omega_k) \quad (3.9)$$

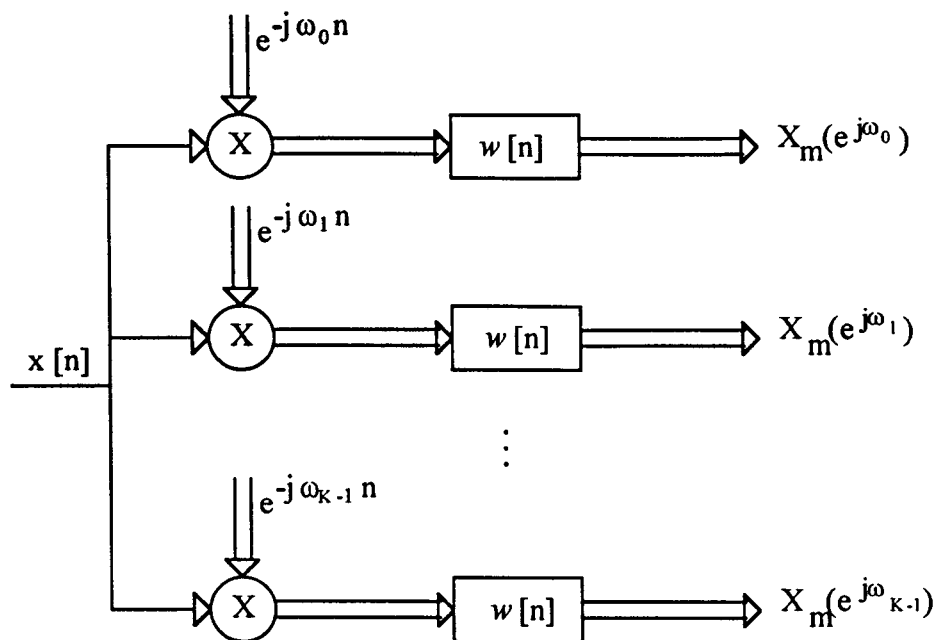


Fig. 3.16. Analisador de espectro utilizando banco de filtros DFT.

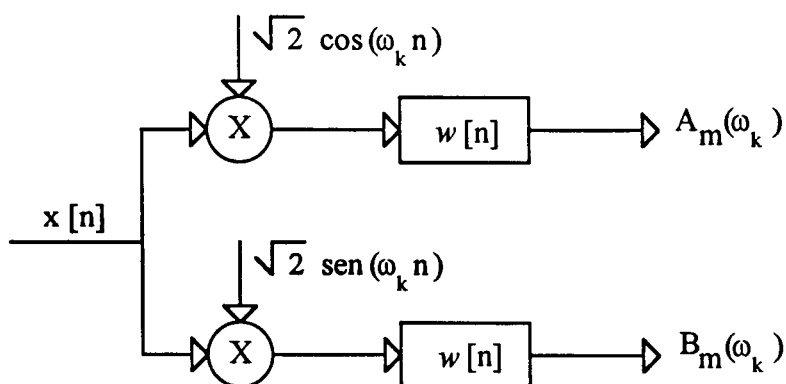
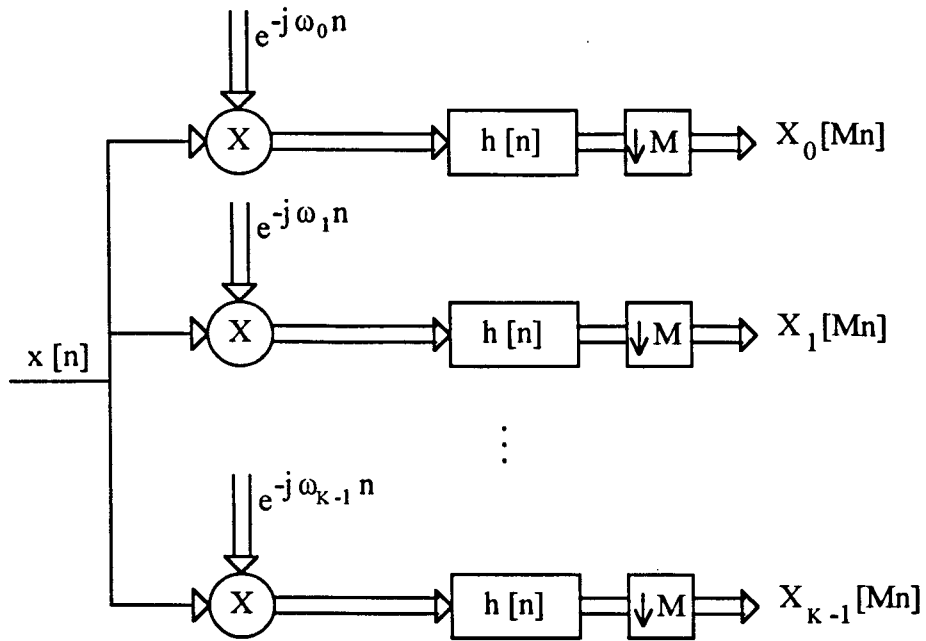


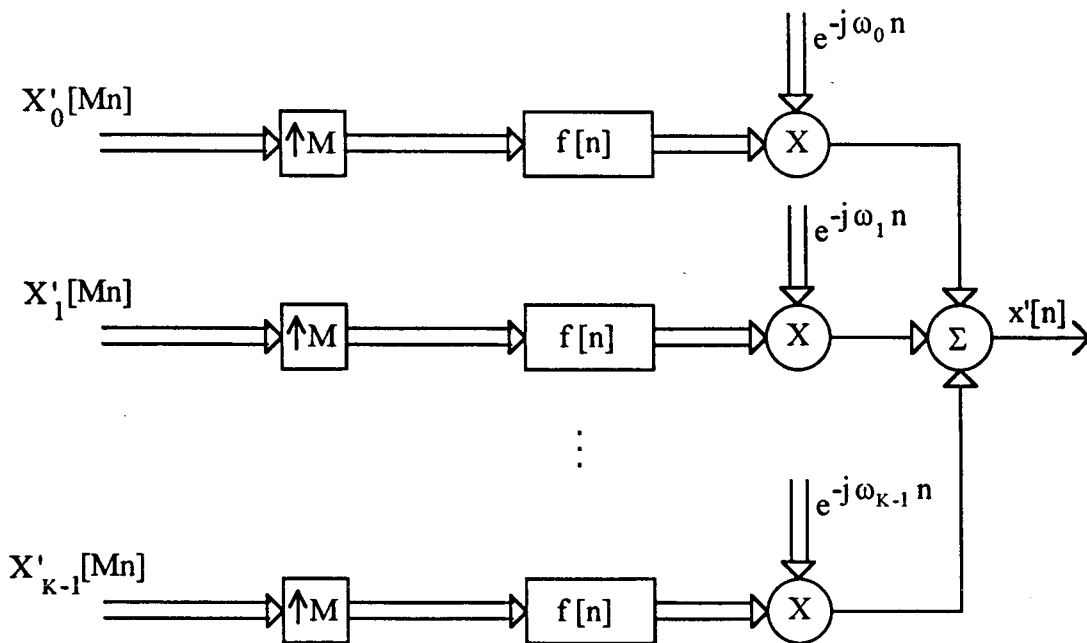
Fig. 3.17. Estrutura alternativa de modulação onde são obtidos sinais reais (modulação em quadratura).

Utilizando esta mesma sistemática, pode-se construir um banco de filtros para aplicação em processamento multibanda de sinais. Neste caso, o filtro  $w[n]$  (que chamaremos aqui de  $h[n]$ ) não será necessariamente de banda estreita, mas terá a largura de banda desejada para decompor o sinal em sub-bandas e seu projeto estará vinculado ao tipo de aplicação. Após a modulação complexa do sinal de entrada e a filtragem, para cada sub-banda, é efetuada a dizimação para redução da taxa de amostragem.





(a)



(b)

Fig. 3.18 Sistema de processamento de sinais multibanda utilizando banco de filtros DFT. (a) Analisador. (b) Sintetizador.

No lado da síntese, um procedimento inverso é adotado, onde os sinais complexos em cada sub-banda são interpolados e em seguida modulados pela função complexa  $e^{j\omega n}$ , que transladará o sinal de baixa frequência para sua faixa original, passando a ser novamente um sinal real. O sistema completo de processamento multibanda utilizando banco de filtros DFT é representado na Fig. 3.18 (em linhas duplas são representados sinais complexos).

*Satt e Malah* [28] desenvolveram importante trabalho no desenvolvimento de bancos de filtros DFT otimizados para codificação de voz em sub-banda.

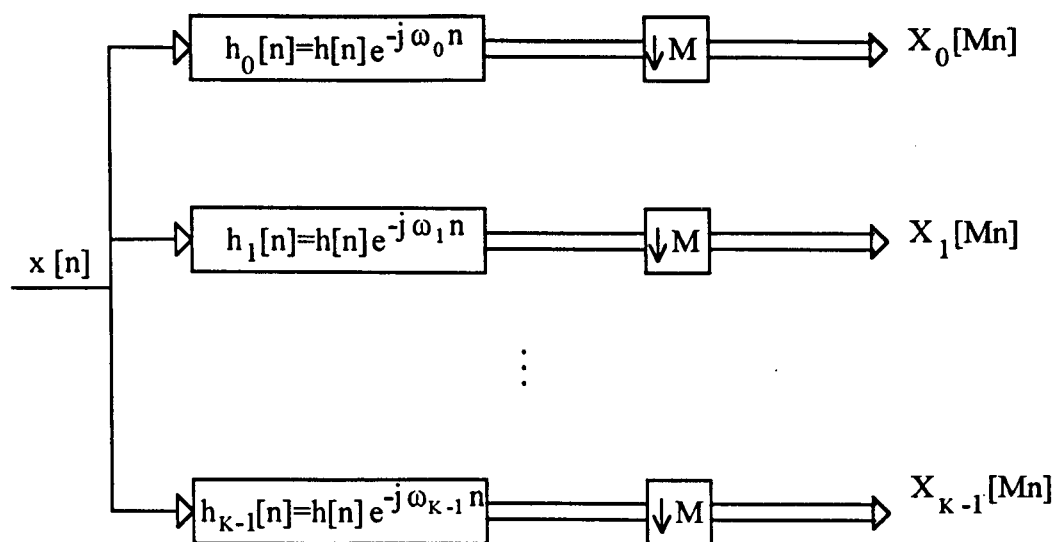
Uma forma alternativa de modulação, que possibilita o processamento com sinais reais nas sub-bandas, é a *Modulação SSB*<sup>1</sup>. Esta forma pode ser obtida a partir da modulação em quadratura, como pode ser verificado em [2].

Em uma outra forma de representação de um banco de filtros DFT, não mais o sinal de entrada é modulado para ser filtrado por um filtro passa-baixas, mas sim a resposta ao impulso do filtro passa-baixas  $h[n]$ , *Filtro Protótipo*, será modulada a fim de se obter os demais filtros passa-faixa do banco (Fig. 3.19). Este procedimento é válido para sistemas *Criticamente Amostrados*, ou seja, com fator de dizimação  $M$ , igual ao número de sub-bandas  $K$  [2]. Esta formulação não se aplica ao caso de  $K/M$  ser um número não inteiro maior do que 1, pois haveria superposição de réplicas da banda passante após a dizimação. Um exemplo é apresentado na Fig. 3.20 para  $K = 3$  e  $M = 2$ .

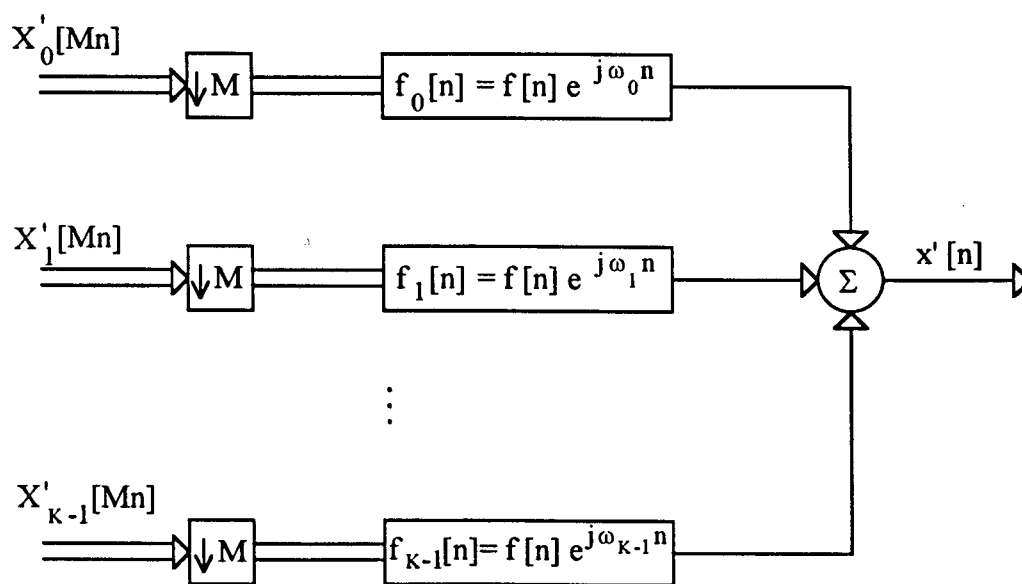
Utilizando a estrutura alternativa da Fig. 3.19, pode-se implementar um sistema de análise ou síntese com banco de filtros DFT de forma muito mais eficiente utilizando-se uma estrutura polifásica. No exemplo a seguir, verificaremos a implementação de um banco DFT em uma estrutura de análise com  $M = 2$ . Aqui,  $H_1(z) = H_0(-z)$ , sendo, portanto,  $H_1(z)$  um filtro passa-altas com as mesmas características do filtro passa-baixas  $H_0(z)$  [15] (modulação por  $e^{-j\pi m}$ ). Portanto, se  $H_0(z) = E_0(z^2) + z^{-1} E_1(z^2)$ , então  $H_1(z) = E_0(z^2) - z^{-1} E_1(z^2)$  e o banco poderá ser implementado conforme Fig. 3.21. Como se pode verificar, estarão sendo implementados dois filtros ao custo de apenas um, o que representa uma importante redução no custo computacional.

---

<sup>1</sup> SSB = Banda Lateral Única (do inglês - Single Side Band)

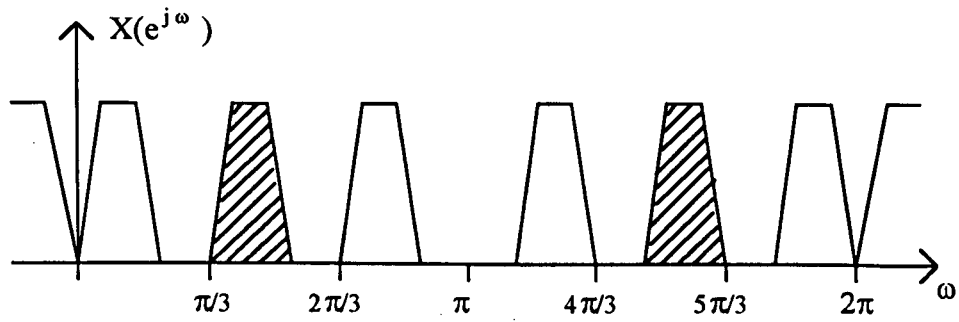


(a)

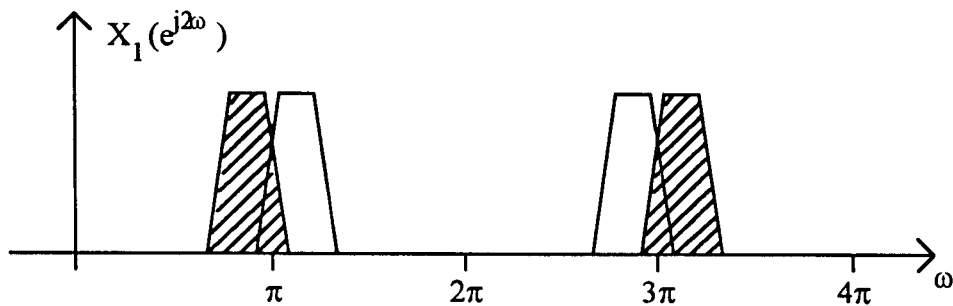


(b)

Fig. 3.19 Estrutura DFT com filtros modulados por uma função complexa para  $M = K$ . (a) Analisador. (b) Sintetizador.



(a)



(b)

Fig. 3.20 Efeito da estrutura da Fig. 3.19 em um sistema com 3 sub-bandas e dizimação igual a 2. (a) Sub-banda 1 (hachurada). (b) Sub-banda 1 após a dizimação.

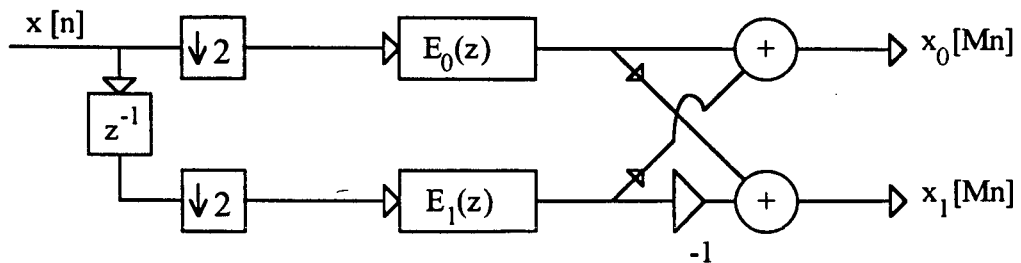


Fig. 3.21. Banco de filtros DFT de dizimação implementado por decomposição polifásica ( $M = 2$ ).

Este procedimento poderá ser generalizado para  $M$  qualquer ( $M = K$ ), onde o filtro da sub-banda  $k$  será representado como segue [15]:

$$H_k(z) = \sum_{i=0}^{M-1} E_i(z^M) z^{-i} W^{-ki} \quad (3.9)$$

onde  $W^{-kn}$ , para  $W = e^{-j2\pi/M}$ , representa a modulação complexa que translada a resposta em frequência do filtro protótipo para a frequência desejada. De (3.9), verifica-se que  $H_k(z)$  é uma DFT inversa (IDFT), cujos coeficientes são  $E_i(z^M)z^{-i}$ , para  $i = 1, \dots, M-1$  [3, 17]. Portanto, pode-se implementar esta estrutura como na Fig. 3.22, através da decomposição polifásica, onde as saídas são obtidas através de um bloco que realiza a IDFT conforme (3.9). Desta forma, obtém-se um banco de filtros com  $M$  componentes ao custo computacional de apenas um (além do custo do processamento da IDFT, que normalmente necessita de poucas multiplicações, como no exemplo da Fig. 3.22).

O mesmo procedimento é válido para o banco de filtros de interpolação.

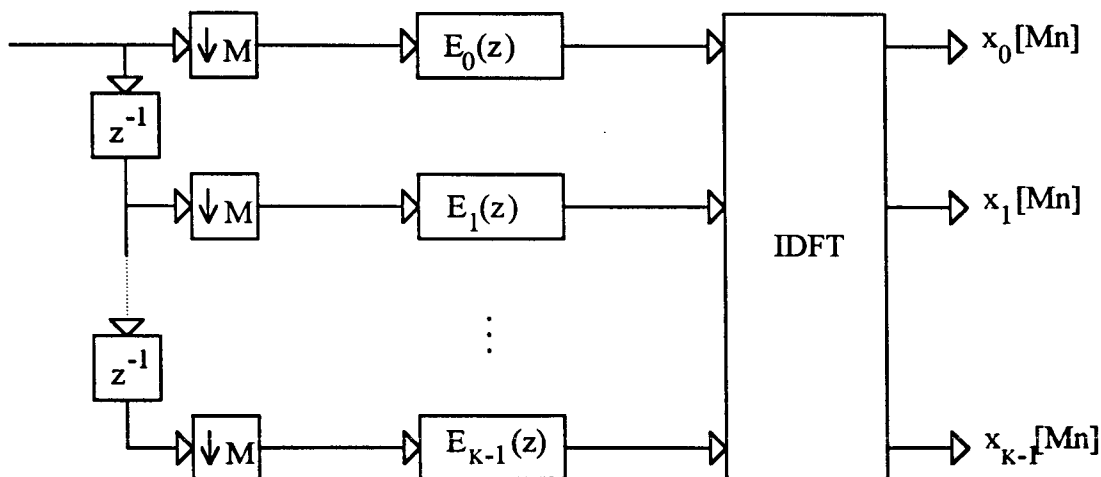


Fig. 3.22. Banco de filtros DFT de dizimação implementado com decomposição polifásica ( $M$  qualquer).

### 3.5.2 Banco de Filtros com Estrutura em Árvore (Banco de Filtros QMF)

Esta estrutura, baseada na cascata de filtros de dizimação com  $M$  igual a 2 (ou de interpolação com  $L$  igual a 2), proporciona uma configuração bastante simples e de fácil implementação [2, 15]. Tal estrutura tem despertado subremaneira o interesse de pesquisadores que atuam na área de processamento multibanda.

A estrutura básica é apresentada na Fig. 3.23, onde temos um exemplo com decomposição em quatro bandas e amostragem crítica ( $M = K$ ), utilizando-se dois estágios com dizimação igual a 2. Observa-se que a decomposição em duas bandas requer dois filtros, sendo o primeiro passa-baixas e o segundo passa-altas. Como o espectro de frequência resultante da filtragem passa-altas é invertido após a dizimação (Fig. 3.24), o filtro passa-baixas utilizado na decomposição desta sub-banda (segunda etapa) estará selecionando a banda de mais alta frequência (banda 3), como se verifica na ilustração da Fig. 3.24(b). A saída deste filtro, após nova dizimação, será, portanto, o sinal  $x_3[4n]$  (Fig. 3.23).

Pode-se ainda realizar uma decomposição não uniforme utilizando esta estrutura, como se verifica no exemplo da Fig. 3.25.

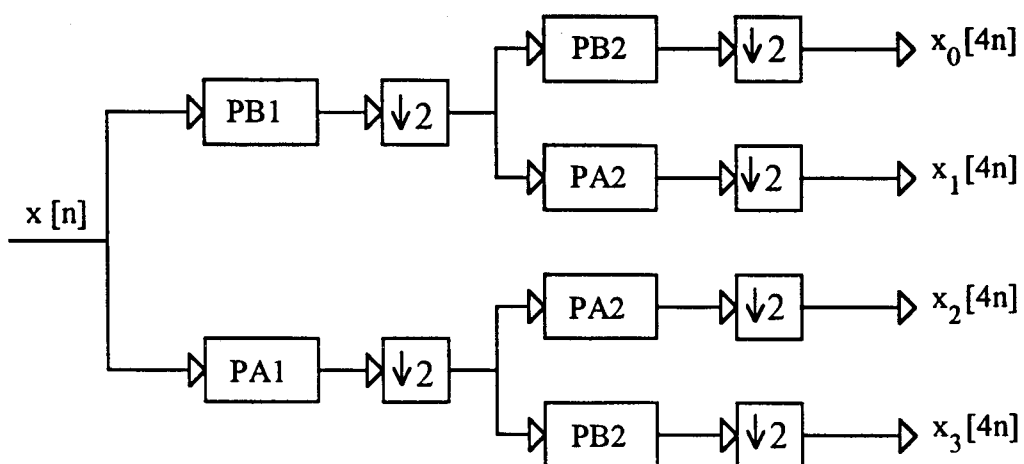


Fig. 3.23. Estrutura básica de um banco de filtros de dizimação por estrutura em árvore.

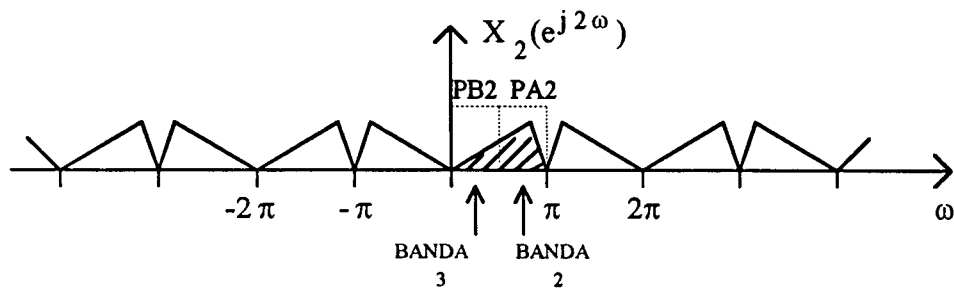
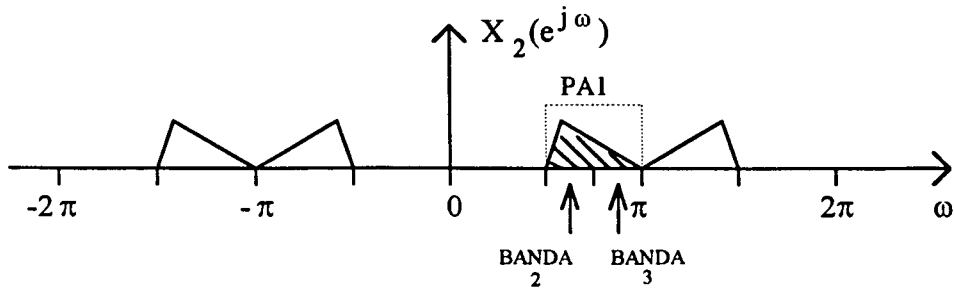
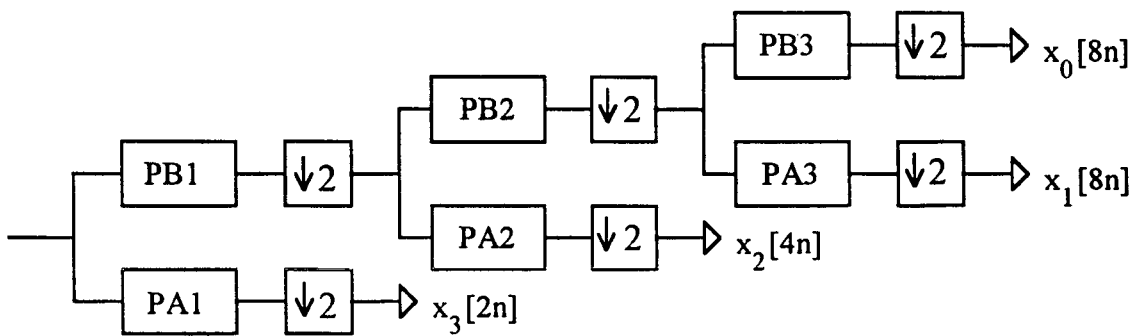
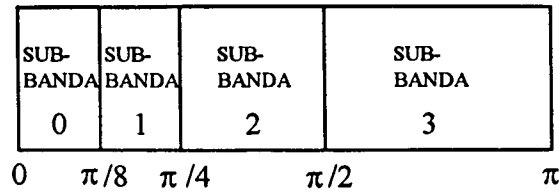


Fig. 3.24 Inversão provocada pelo filtro passa-altas. (a) Espectro resultante da filtragem de um sinal por um filtro passa-altas. (b) Espectro resultante da dizimação deste sinal.





(b)

Fig. 3.25 Estrutura em árvore de banco de filtros não uniforme. (a) Estrutura em blocos. (b) Resultado no espectro de frequência.

Os bancos de filtros QMF (*Quadrature Mirror Filter Bank*) podem ser considerados um caso particular de estrutura em árvore onde, para se aproximar da reconstrução perfeita, os filtros passa-baixas e passa-altas dos bancos de análise e síntese têm um compromisso de projeto entre si [2, 15, 23].

Considerando o diagrama da Fig. 3.26, que representa uma estrutura com duas bandas, pode-se desenvolver uma expressão para  $X_0(z^2)$  e  $X_1(z^2)$ , que representam as transformadas Z de  $x_0[2n]$  e  $x_1[2n]$  respectivamente, como segue:

$$X_0(z^2) = \frac{1}{2} [X(z)H_0(z) + X(-z)H_0(-z)] \quad (3.10a)$$

$$X_1(z^2) = \frac{1}{2} [X(z)H_1(z) + X(-z)H_1(-z)] \quad (3.10b)$$

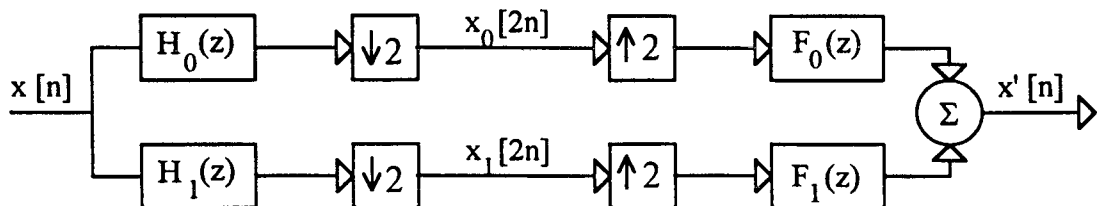
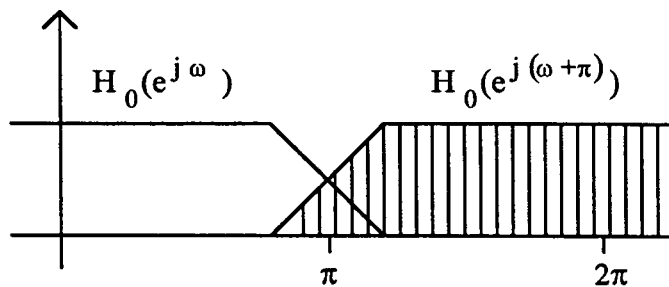


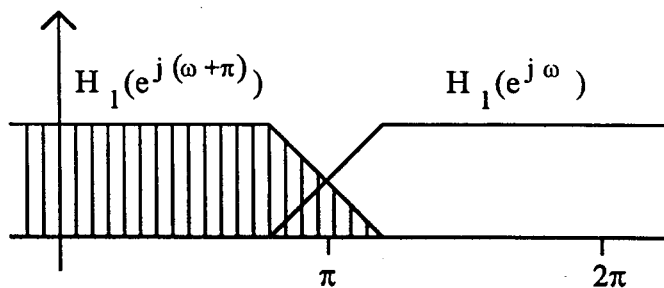
Fig. 3.26. Estrutura multibanda, sem a realização de qualquer processamento em sub-banda.



A primeira parte da soma nas expressões (3.10a) e (3.10b) representa a função de transferência que se deseja obter após a interpolação, parte clara nos espectros de frequência da Fig. 3.27, e o segundo termo, a réplica que surge com a dizimação, parte hachurada na mesma figura.



(a)



(b)

Fig. 3.27. Representação em frequência do sistema dizimado em cada sub-banda. (a) Sub-banda 0. (b) Sub-banda 1.

Na saída, a transformada Z de  $x'[n]$ ,  $X'(z)$ , é

$$X'(z) = X_0(z^2)F_0(z) + X_1(z^2)F_1(z) \quad (3.11)$$

Substituindo as equações (3.10) em (3.11), obtemos

$$X'(z) = \frac{1}{2}[H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)]X(z) + \frac{1}{2}[H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z)]X(-z) \quad (3.12)$$

Nesta expressão verifica-se que o primeiro termo, entre colchetes, está representando a interferência apenas do banco de filtros no sinal de saída, como se não houvesse ocorrido dizimação nem interpolação, e o segundo termo envolve a parte não desejada da resposta obtida após a dizimação (resposta em frequência representada pela parte hachurada na Fig. 3.27).

Portanto, para que seja eliminada a distorção por recobrimento causada pela dizimação, deve-se ter:

$$H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z) = 0 \quad (3.13)$$

Fazendo,

$$F_0(z) = H_1(-z) \quad \text{e} \quad F_1(z) = -H_0(-z) \quad (3.14)$$

obtém-se a condição estabelecida pela equação (3.13):

$$H_0(-z)H_1(-z) - H_1(-z)H_0(-z) = 0 \quad (3.15)$$

Sendo  $H_1(z)$  o filtro passa-altas correspondente ao filtro passa-baixas  $H_0(z)$ , pode-se fazer

$$H_0(z) = H(z) \quad \text{e} \quad H_1(z) = H(-z) \quad (3.16),$$

que por sua simetria em frequência em torno de  $\pi$ , diz-se que  $H_1(z)$  é a *imagem no espelho* de  $H_0(z)$ .

Devido à característica de simetria envolvendo as duas sub-bandas e os filtros de dizimação e interpolação é que esta estrutura recebeu a denominação *Quadrature Mirror Filter Bank*, que em português poderia ser denominado *Banco de Filtros Espelho em Quadratura*.

O banco de filtros QMF, como analisado acima, tem por característica evitar distorções de recobrimento devido à redução de taxa de amostragem, porém, para se obter a reconstrução perfeita deve-se evitar outros dois tipos de distorções: de amplitude e de fase. Se o filtro  $H(z)$  é FIR, sua fase poderá ser feita linear e, deste modo, não haveria problemas com relação a este tipo de distorção, restando apenas a distorção de amplitude.

Uma importante contribuição no desenvolvimento de projetos de bancos de filtros QMF, tendo como base estruturas FIR, foi o trabalho realizado por *Johnston* [29], onde é apresentada uma família de filtros com características importantes para a minimização de distorções de amplitude (mesmo não sendo ainda com reconstrução perfeita). Estes filtros são projetados utilizando o método de janelamento (janela de Hanning) [17] com otimização através da rotina de Hooke e Jeaves [30]. Sua relevância é comprovada pela ampla utilização destas estruturas, ainda hoje, em trabalhos importantes na área de processamento multibanda.

Na busca, no entanto, da reconstrução perfeita, voltamos à análise da equação (3.12). Considerando que o segundo termo desta equação foi eliminado, podemos reescrevê-la fazendo as substituições de (3.14) como segue:

$$X'(z) = \frac{1}{2} [H_0(z)H_1(-z) + H_1(z)H_0(-z)]X(z) \quad (3.17)$$

Se considerarmos ainda (3.16), tem-se:

$$X'(z) = \frac{1}{2} [H_0^2(z) - H_1^2(z)]X(z) = \frac{1}{2} [H^2(z) - H^2(-z)]X(z) \quad (3.18)$$

Portanto, para que a distorção de amplitude seja eliminada e, desta forma, se obtenha a reconstrução perfeita, o projeto do filtro  $H(z)$  deverá satisfazer a seguinte condição:

$$\left|H_0^2(e^{j\omega})\right| + \left|H_1^2(e^{j\omega})\right| = C \quad , \text{ para todo } \omega \quad (3.19)$$

onde,  $C$  é uma constante. Para este caso os filtros  $H_0(z)$  e  $H_1(z)$  são denominados, em [23], por *Power-Complementary Pair*<sup>1</sup>. Para satisfazer esta condição para todo  $\omega$ , no entanto, *Vaidyanathan*, em [23], mostra que um filtro com fase linear deve ser da forma trivial, ou seja, da forma:  $|H_0^2(e^{j\omega})| = \cos^2(K\omega)$  e  $|H_1^2(e^{j\omega})| = \sin^2(K\omega)$ . Portanto, devem ser adotadas soluções alternativas, como filtros IIR (que por sua vez causam distorções de fase) ou FIR com fase linear seguido de um equalizador.

Um exemplo de projeto de banco de filtros com reconstrução perfeita, utilizando filtragem FIR com fase linear, é apresentado por *Vaidyanathan* em [23].

Fazendo-se

$$H_1(z) = z^{-N} H_0(-z^{-1}) \quad (3.20)$$

onde  $H_0(z^{-1})$  é a transformada Z de  $h[-n]$  [16] e  $N$  é o comprimento da resposta ao impulso de  $H_0(z)$ , obtém-se, a partir de (3.17),

$$X'(z) = \frac{1}{2} \left[ z^{-(N-1)} H_0(z^{-1}) H_0(z) + z^{-(N-1)} H_0(-z^{-1}) H_0(-z) \right] X(z) \quad (3.21)$$

Sendo

$$G_+(z) = z^{-(N-1)} H_0(z^{-1}) H_0(z) \quad (3.22)$$

---

<sup>1</sup> Em português poderíamos denominar estes filtros por *Par de Potência Complementar*.

e

$$G_+(z) + G_+(-z) = dz^{-(N-1)} \quad (3.23)$$

para

$$G_+(z) = G(z) + \delta z^{-(N-1)} \quad (3.24)$$

onde  $d$  e  $\delta$  são constantes.

$G(z)$  será um filtro FIR de fase linear do tipo "equiripple" (definido em [23]), portanto

$$X'(z) = \frac{d}{2} z^{-(N-1)} X(z) \quad (3.25)$$

satisfazendo a condição de reconstrução perfeita. Considerando o projeto de um banco de filtros QMF:

$$F_0(z) = z^{-N} H_0(z^{-1}) \quad \text{e} \quad F_1(z) = z^{-N} H_1(z^{-1}) \quad (3.26)$$

$G(z)$  pode ser realizado utilizando algoritmos de otimização para projetos de filtros FIR como, por exemplo, o algoritmo McClellan-Parks [31].

Vaidyanathan [23], *Nguyen* e Vaidyanathan [25] e *Vitterli* et al. [24, 26] desenvolveram teorias e formas de implementação de bancos de filtros com reconstrução perfeita, tanto através de filtros FIR quanto IIR, e *Nayebi* [32] analisa a teoria destes bancos de filtros no domínio do tempo. Outros trabalhos importantes têm desenvolvido análises e métodos para projetos de bancos de filtros [33 - 45].

Em [23], Vaidyanathan desenvolve ainda uma extensão da teoria de bancos de filtros QMF com reconstrução perfeita para qualquer número de bandas, onde, a partir do banco de filtros DFT, ele interrelaciona as características dos filtros de análise com os de síntese.

Outras técnicas de projetos e métodos têm sido ainda desenvolvidos, destacando-se os bancos de filtros *Cosseno-modulados* [46 - 49] e os bancos *Pseudo-QMF* [50, 51], sendo ambos

modulados e, portanto, da mesma forma que nos bancos DFT, utilizam um filtro protótipo para a implementação dos demais.

### 3.6 Processamento Multibanda e Filtragem Adaptável

Temos visto até o momento neste capítulo, detalhes sobre a estrutura de decomposição em sub-bandas e conversão de frequência, sempre com a preocupação de tornar o sistema mais eficiente e evitar as distorções inerentes ao processamento multibanda, ou melhor, de tornar os filtros de dizimação e interpolação o mais transparentes possível ao tratamento do sinal. Nesta seção, considerando o desenvolvimento dos bancos de filtros, serão verificadas as implicações do processamento multibanda em filtragem adaptável.

Como já verificamos, o processamento multibanda apresenta importantes características, como a redução do custo computacional, por exemplo, que podem ser aproveitadas em aplicações onde se faz necessário o processamento adaptável. Diversos trabalhos têm mostrado que, além da viabilidade desta aplicação, o processamento adaptável em sub-bandas de frequências traz vantagens importantes, como será discutido a seguir.

Entretanto, dependendo do tipo de aplicação, outras implicações podem ser verificadas quando da utilização de sistemas multibanda em processamento adaptável. Pode-se distinguir, portanto, duas formas básicas de aplicação de sistemas multibanda em processamento adaptável:

- a) Aplicações onde o processamento por sub-banda é totalmente independente. Um exemplo é a codificação de voz ou imagem, onde cada banda é tratada separadamente para se obter um melhor desempenho global (ver exemplo no Seção 3.3) [52].
- b) Aplicações onde não há independência entre as sub-bandas. Neste caso, onde um exemplo típico é a identificação de sistemas (cancelamento de eco, por exemplo), os filtros em cada sub-banda são adaptados de forma que o resultado da recomposição se aproxime de um sistema físico de banda completa, portanto, caso os bancos de filtros não sejam ideais, haverá dificuldade na obtenção do resultado desejado, como será analisado em seguida.

Em [19], *Gilloire* analisa um sistema de cancelamento de eco para teleconferência em sub-banda, onde verifica na prática as vantagens do processamento multibanda num sistema adaptável. Como primeira vantagem, *Gilloire* destaca a melhor eficiência computacional, devido à menor taxa de amostragem que exige menor velocidade de processamento (inerente ao processamento multibanda); em seguida cita o aumento da velocidade de convergência, que está relacionada ao fato de se utilizar coeficientes de convergência distintos por sub-banda e a possibilidade de redução do comprimento de cada filtro (dependendo da resposta de cada sub-banda). Também é fator determinante no incremento da velocidade de convergência, a menor relação entre os valores máximo e mínimo do espectro de potência devido à obtenção de faixas mais restritas e, conseqüentemente, com menor variação de amplitude e fase nas sub-bandas [6, 21].

No trabalho realizado em [19], que utiliza filtros adaptáveis independentes em cada sub-banda (em sistemas criticamente amostrados), observa-se no entanto, um acréscimo no erro residual do sistema se comparado com o processamento em banda completa. Esta verificação nos leva a crer que a identificação exata de um sistema utilizando sub-bandas independentes não é trivial.

*Kellermann*, em [20], também analisou o comportamento do processamento multibanda em cancelamento de eco ainda com filtros independentes por sub-banda. São analisadas as condições para a melhor adaptação dos filtros adaptáveis em duas proposições ou classes:

a) Considerando a minimização dos erros por sub-banda (ver Fig. 3.28), ou seja,

$$C(z^M).H(z) = H(z).S(z) \quad (3.21)$$

onde  $C(z^M) = \text{diag} [ C_0(z^M) \quad \dots \quad C_{K-1}(z^M) ]$ , sendo  $C_k(z^M)$  o filtro adaptável da  $k$ -ésima sub-banda, que é subamostrada com fator  $M$ .

b) Considerando a minimização do erro total (após a interpolação), ou seja,

$$F(z).C(z^M).H(z) = F(z).H(z).S(z) \quad (3.22)$$

Para ambas proposições são apresentadas formas de implementação e minimização de erro, demonstrando, no entanto, a impossibilidade de adaptação exata, que só é conseguida para bancos de filtros sem qualquer recobrimento (ideais). Análise semelhante é apresentada em [53].

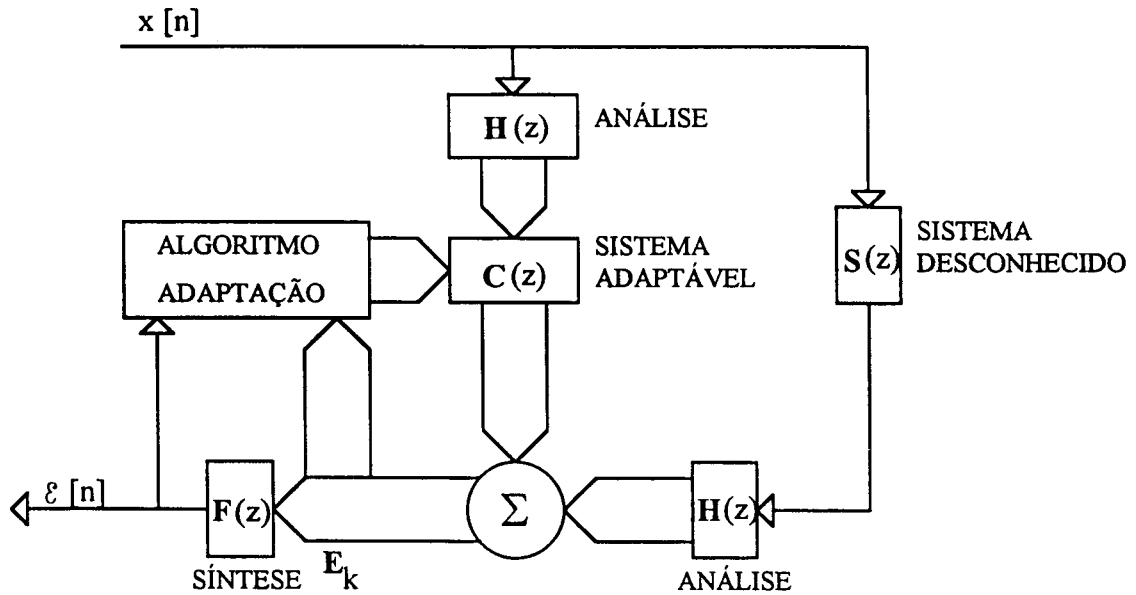


Fig. 3.28. Estrutura de identificação de sistemas (exemplo, cancelamento de eco) multibanda.

Em [54, 55], Gilloire e Vitterli analisam uma estrutura para identificação de sistemas com processamento multibanda onde concluem que para se obter a exata identificação de um sistema físico utilizando sistema multibanda, não se pode implementar os filtros adaptáveis de forma independente em cada sub-banda, ou melhor, a matriz  $C(z^M)$  da equação (3.22) não pode ser diagonal. De (3.22), obtém-se:

$$C(z) = H(z^{1/2}) \cdot S(z^{1/2}) \cdot [H(z^{1/2})]^{-1} \quad (3.23)$$

sendo

$$[H(z)]^{-1} = \frac{1}{\det H(z)} \begin{bmatrix} H(z) & -H(-z) \\ -H(-z) & H(z) \end{bmatrix} \quad (3.24)$$



Considerando que  $H(z)$  é um filtro com fase linear e comprimento  $N$ , então  $\text{Det}[H(z)] = \alpha z^{-N+1}$  [54], que representa um simples atraso, e

$$C(z) = \alpha^{-1} z^{(N-1)/2} \begin{bmatrix} H^2(z^{1/2})S(z^{1/2}) - H^2(-z^{1/2})S(-z^{1/2}) & H(z^{1/2})H(-z^{1/2})[S(-z^{1/2}) - S(z^{1/2})] \\ H(z^{1/2})H(-z^{1/2})[S(z^{1/2}) - S(-z^{1/2})] & H^2(z^{1/2})S(-z^{1/2}) - H^2(-z^{1/2})S(z^{1/2}) \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Em (3.25) verifica-se que, para que  $C(z)$  seja diagonal, uma das seguintes condições devem ser satisfeitas:

- a)  $H(z)H(-z) = 0$ , ou seja, nenhum recobrimento, o que significa que  $H(z)$  é um filtro ideal;
- b)  $S(z) = S(-z)$ , que representa uma função par em  $z$ , ou seja, sistema não real.

Considerando estas condições, conclui-se que não é possível, na prática, uma identificação perfeita através de um sistema adaptável multibanda cujos filtros são independentes por sub-banda.

Desta forma, em [54] é proposta uma estrutura com termos cruzados onde são consideradas, no caso de duas bandas, os quatro elementos da matriz  $C(z)$ , na obtenção do sinal de saída. O algoritmo de adaptação (no caso o LMS) atualiza os coeficientes de cada filtro (principais e termos cruzados) a partir dos erros de cada banda (Fig. 3.28).

Em [20], *Petraglia e Mitra* apresentam uma análise de filtragem adaptável em sub-banda onde não utilizam termos cruzados (devido ao aumento da complexidade computacional para sua implementação), mas um processamento com amostragem não crítica, ou seja, dizimação com um fator menor do que o número de sub-bandas, de forma a reduzir o efeito do recobrimento [56]. Este procedimento tem apresentado melhor desempenho do que aquele com termos cruzados.

Sendo esta uma área de estudos bastante atual, muitas novas propostas deverão surgir, de forma a cada vez mais melhorar o desempenho e o custo computacional dos sistemas adaptáveis.

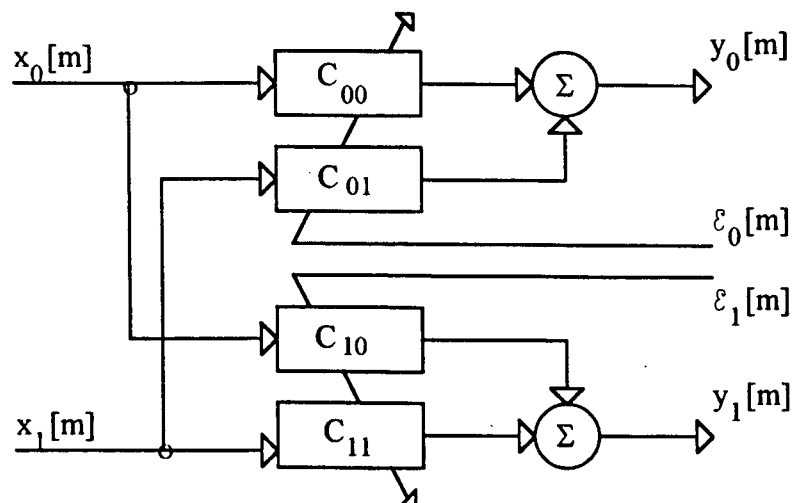


Fig. 3.29 Estrutura de um filtro adaptável em identificação de sistemas multibanda com termos cruzados (exemplo com duas bandas).

## CAPÍTULO 4

### FILTROS IFIR

#### 4.1 Introdução

A utilização de estruturas multibanda em processamento de sinais, como verificamos no capítulo anterior, apresenta uma série de vantagens importantes nas mais diversas aplicações. Uma das principais características é a redução da exigência computacional devido à redução da taxa de amostragem em cada sub-banda. Seguindo esta mesma tendência, baseando-se na idéia de dizimação e interpolação, *Neuvo et al.* [4] verificaram que, em sistemas de processamento cuja largura de banda passante é reduzida (menor do que  $\pi/2$  ou  $f_s/4$ ) poder-se-ia reduzir o custo computacional, não pela redução da taxa de amostragem do sinal, mas pela implementação de um sistema FIR cuja resposta ao impulso tenha sido feita esparsa, ou seja, tenha algumas de suas amostras iguais a zero. Este filtro por sua vez deveria ter sua resposta interpolada por um outro estágio de ordem mais baixa, de forma a recuperar a resposta original. Esta estrutura, de implementação relativamente simples, é denominada por *Filtro com Resposta ao Impulso Finita Interpolado*, ou IFIR (Interpolated Finite Impulse Response Filter).

Considerando que normalmente a ordem do interpolador é muito menor do que a do filtro esparsa, consegue-se reduzir a complexidade computacional, utilizando esta estrutura, em percentuais maiores do que 50%, dependendo do fator de interpolação utilizado. Porém, esta redução é limitada pela relação entre a banda passante do filtro e a frequência de amostragem do sinal processado, o que restringe sua utilização em determinadas aplicações. Exemplos importantes de aplicações podem ser encontrados em sistemas com taxa de amostragem fixa, independente da largura de banda do filtro, como em: cancelamento de eco, equalização, cancelamento de ruído da rede, etc. [5].

Na próxima seção verificaremos as características no tempo e em frequência desta estrutura e suas semelhanças com o processamento em sub-bandas, além de suas limitações nas aplicações em processamento de sinais. Na Seção 4.3 analisaremos, de forma geral, os métodos e algoritmos para projeto de filtros IFIR, mais especificamente dos interpoladores.

## 4.2 Estrutura IFIR

A análise do comportamento no tempo e em frequência de uma estrutura IFIR pode ser melhor entendida se nos reportarmos à análise da estrutura de uma sub-banda em processamento multibanda, devido a sua semelhança no que se refere aos processos de dizimação e interpolação. Como já mencionamos, a idéia básica em filtragem IFIR é a implementação de um filtro esparsos,  $We(z)$ , e um filtro interpolador,  $I(z)$ , como é ilustrado pela Fig. 4.1. A resposta ao impulso do filtro esparsos,  $w_e[n]$ , pode ser representada como:

$$w_e[n] = \begin{cases} w[n] & , n = iL, i = 0, +1, +2, \dots \\ 0 & , \text{demais valores de } n \end{cases} \quad (4.1)$$

onde  $w[n]$  é a resposta original do filtro FIR que se quer implementar e  $L$  é o *Fator de Interpolação* do filtro esparsos. Esta resposta ao impulso, como se pode observar na Fig. 4.2(b), tem característica semelhante a de um sinal dizimado e em seguida interpolado com a inclusão de zeros, portanto, como foi verificado no capítulo anterior (Fig. 3.6), sua resposta em frequência deverá apresentar réplicas do espectro a cada  $2\pi/L$  radianos (na circunferência unitária) ou  $f_s/L$  (em frequência), da forma como está ilustrado na Fig. 4.2(b) (considerando a resposta original, sem dizimação, apresentada na Fig. 4.2(a)).

A obtenção da resposta final desejada desta estrutura também é semelhante ao processamento em sub-banda, onde é necessário um novo filtro, filtro interpolador, que selecionará apenas o espectro em frequência desejado originalmente (Fig. 4.2(c), ver também Fig. 3.6). No

domínio do tempo, este procedimento equivale à interpolação dos coeficientes do filtro, determinando-se, em função dos coeficientes remanescentes, valores próximos do original ( $w[n]$ ) para os coeficientes zero do filtro esparso.

Ainda comparando com o processamento em sub-banda a filtragem IFIR, pode-se observar que, no primeiro, o sinal para ser dizimado deve ter inicialmente sua banda passante limitada em frequência, de maneira a se evitar distorções devido ao recobrimento. Da mesma forma, a resposta em frequência do filtro original deve ser limitada (Fig. 4.2(a)), para que não haja distorções na resposta final, considerando que alguns coeficientes do filtro original são simplesmente substituídos por zero na obtenção do filtro esparso.

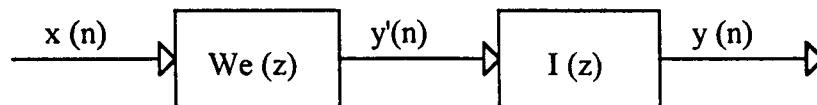


Fig. 4.1. Estrutura básica de um filtro IFIR

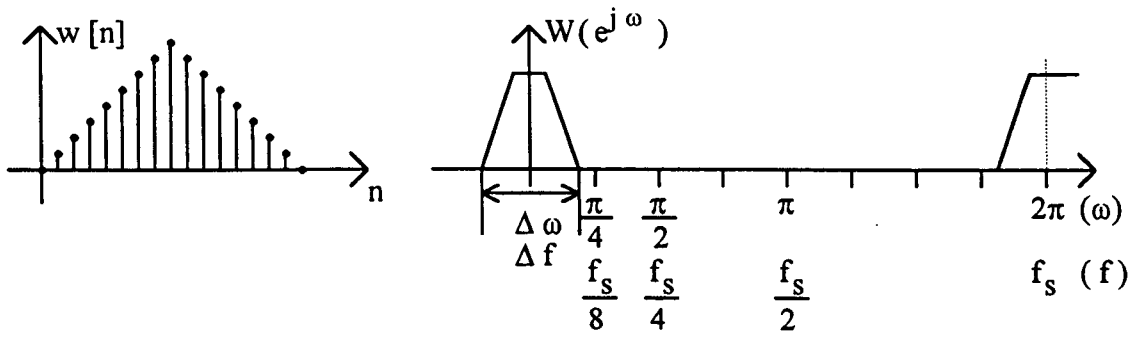
No exemplo apresentado na Fig. 4.2, foi utilizado um fator de interpolação,  $L$ , igual a 4. Neste caso, réplicas surgirão a cada  $f_s/4$  de frequência ( $\pi/2$ ). Observa-se aqui a grande redução do número de amostras diferentes de zero na nova estrutura, que neste caso, deve reduzir o custo computacional a, aproximadamente, 25%, considerando um interpolador de baixa ordem. No entanto, pode-se verificar, pela Fig. 4.2(a), que a aplicação deste fator de interpolação só é possível para filtros cuja banda passante é suficientemente estreita com relação à frequência de amostragem.

Da análise apresentada, pode-se concluir que o fator de interpolação do filtro IFIR nunca pode exceder a metade do valor da relação entre a taxa de amostragem do sinal ( $f_s$ ) e a largura da banda passante do filtro original ( $\Delta f$ ) (Fig. 4.2(a)), para não haver distorção por recobrimento, assim,

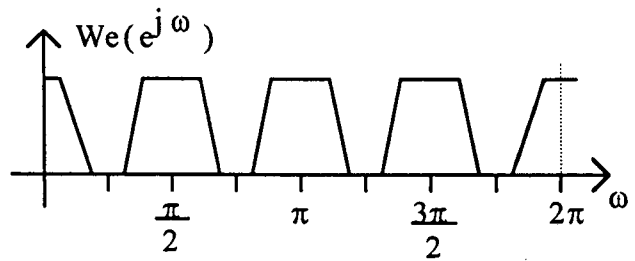
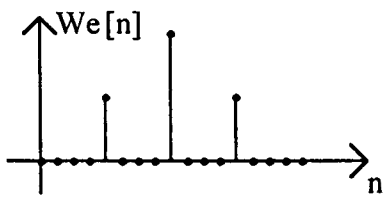
$$2L \leq \frac{f_s}{\Delta f} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \quad (4.2)$$

## Resposta ao Impulso

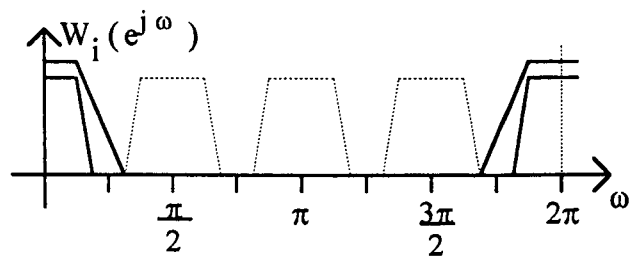
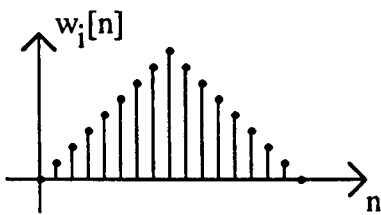
## Resposta em Freqüência



(a)



(b)



(c)

Fig. 4.2 Respostas ao impulso e em freqüência relativas a filtragem IFIR. (a) Filtro original a ser implementado. (b) Filtro esparso. (c) Filtro IFIR completo.

Com isto, verifica-se que a máxima largura de banda possível para esta estrutura é de  $1/4$  da frequência de amostragem do sinal a ser tratado, considerando o menor fator de interpolação ( $L = 2$ ). Por esta razão, mesmo considerando os grandes benefícios alcançados em termos de custo computacional, sua utilização fica restrita a aplicações bastante específicas.

A aplicação de filtros IFIR, no entanto, não se restringe a filtros passa-baixas, podendo-se projetar estruturas passa-altas, passa-faixa ou rejeita-faixa. Um exemplo de filtro passa-faixa utilizando estrutura IFIR é ilustrada pela Fig. 4.3. Nesta ilustração, pode-se verificar que o fator de interpolação utilizado ( $L = 3$ ) não é crítico, ou seja, a relação entre a taxa de amostragem e a largura da banda passante do filtro original é maior do que  $2L$ , possibilitando, assim, o projeto de interpoladores menos seletivos.

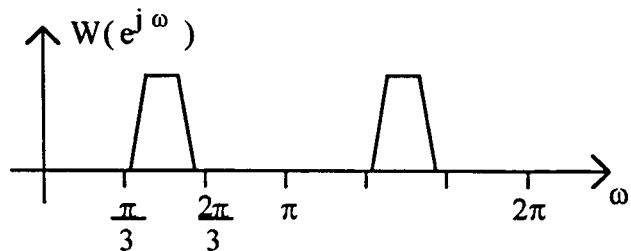
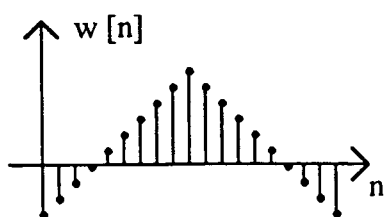
### 4.3 Interpoladores

O projeto de filtros interpoladores para filtragem IFIR deve obedecer basicamente duas condições: ter baixa ordem, de modo a não elevar demasiadamente o número de operações, comprometendo assim a principal vantagem da filtragem IFIR; e reconstruir, da melhor forma possível, a resposta ao impulso original do filtro projetado. Estas duas condições, no entanto, são antagônicas, pois, normalmente, um filtro de ordem mais elevada permite uma seletividade maior em frequência, proporcionando, portanto, uma melhor interpolação da resposta original. Desta forma, a escolha de um determinado interpolador, que se dará a partir de um compromisso entre estas duas características, dependerá muito da aplicação desejada, considerando-se, fundamentalmente, o desvio da resposta do filtro IFIR com relação ao filtro original tolerado por aquela aplicação.

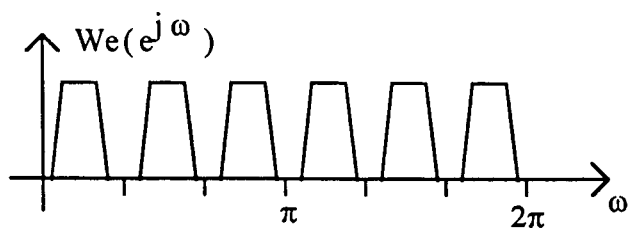
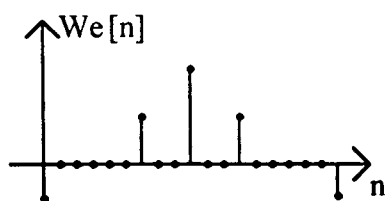
Diversos são os métodos e programas para a determinação de filtros digitais FIR [17, 31, 57], no entanto, de modo a atender as condições citadas anteriormente, algumas estruturas básicas têm sido propostas, partindo-se, preferencialmente, da própria teoria de interpolação de funções.

## Resposta ao Impulso

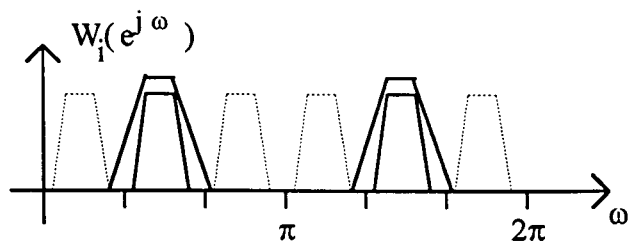
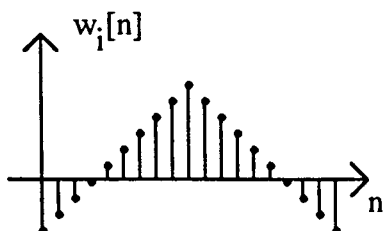
## Resposta em Freqüência



(a)



(b)



(c)

Fig. 4.3 Respostas ao impulso e em freqüência relativas a um filtro IFIR passa-faixa com  $L = 3$ . (a) Filtro original a ser implementado. (b) Filtro esparso. (c) Filtro IFIR completo.



### 4.3.1 Filtro Pente

A estrutura mais simples possível de um filtro passa-baixas é a seguinte:

$$I(z) = 1 + z^{-1} \quad (4.2)$$

Este filtro, se utilizada como filtro interpolador, restaurará uma amostra zero do filtro esparsos copiando a amostra anterior (Fig. 4.3), como se pode verificar através da expressão (4.2). Esta forma simplificada de interpolação, no entanto, torna esta estrutura de utilização muito restrita, exigindo filtros esparsos passa-baixas de banda bastante estreita, de maneira que amostras vizinhas tenham valores muito próximos, evitando grandes erros na interpolação. Da forma como é apresentada em (4.2), a interpolação só é possível para um fator igual a 2, porém, pode-se generalizar este filtro para uma fator qualquer, onde

$$I(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-(L-1)} \quad (4.3)$$

sendo que todas as amostras de uma seqüência de zeros serão interpoladas com o mesmo valor da amostra precedente, ou seja, o filtro funcionará como um "*sample-and-hold*" digital. Este filtro, de comprimento  $N = L$ , cujas amostras são todas iguais a 1, é denominado *Filtro Pente* ("Comb Filter") [2]. Na Fig. 4.5 é apresentado um exemplo de filtro pente para interpolar um filtro esparsos com  $L = 5$ . Verifica-se, na Fig. 4.5(b), que a largura da banda de rejeição nas freqüências  $2\pi/5$  e  $4\pi/5$  (onde estão centradas as réplicas da banda passante) é bastante estreita, diminuindo ainda mais se utilizarmos maiores valores de  $L$ , limitando a largura de banda passante do filtro esparsos. Uma grande virtude desta estrutura, no entanto, é a ausência de multiplicações para sua implementação, como pode ser verificado em (4.3), tornando sua contribuição no custo computacional desprezível.

Pode-se utilizar estrutura semelhante para filtros passa-altas, apenas modificando (4.3) conforme (4.4):

$$I(z) = 1 - z^{-1} + z^{-2} - \dots + z^{-(L-1)} \quad (4.4)$$

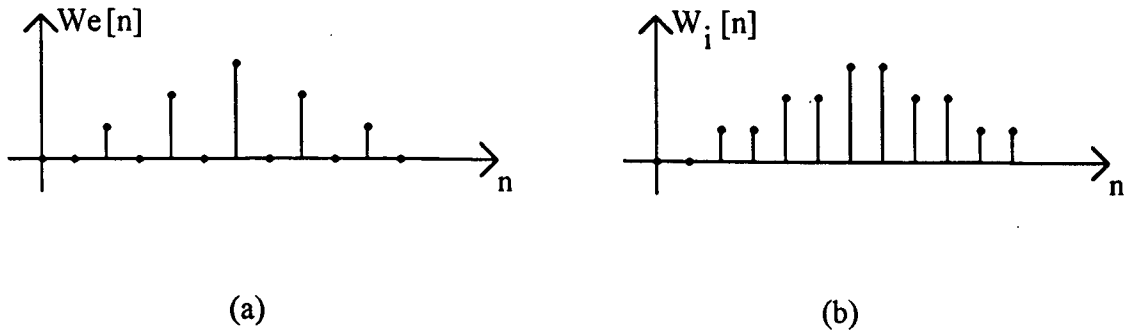


Fig. 4.4. (a) Filtro esparsos com  $L = 2$ . (b) Filtro interpolado utilizando  $I(z) = 1 + z^{-1}$ .

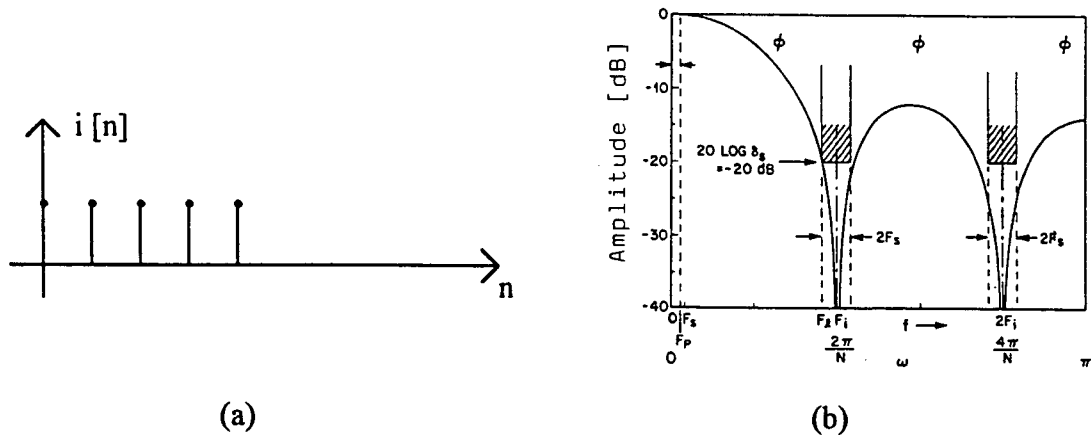


Fig. 4.5. Filtro pente para  $L = 5$ . (a) Resposta ao impulso. (b) Resposta em frequência [2].

### 4.3.2 Interpolação Linear

Uma classe importante e muito conhecida de interpoladores, na teoria clássica de interpolação de funções, é a dos interpoladores lineares. Na interpolação linear as amostras intermediárias são obtidas pela ligação, através de uma linha reta, de dois coeficientes subsequentes, como se pode observar na Fig. 4.6. Em processamento de sinais (filtragem linear),

esta interpolação é possível utilizando-se um filtro passa-baixas que determine as amostras da resposta ao impulso a serem recuperadas, a partir da primeira amostra diferente de zero anterior a elas e da primeira posterior. Em um filtro interpolador com  $2L - 1$  coeficientes, por exemplo, sempre haverá duas amostras diferentes de zero no cálculo das demais [4.2]. Generalizando para  $L$  qualquer, podemos representar este interpolador por:

$$I(z) = 1/L + 2/L z^{-1} + \dots + z^{-(L-1)} + (L-1)/L z^{-L} + \dots + 1/L z^{-2(L-1)} \quad (4.5)$$

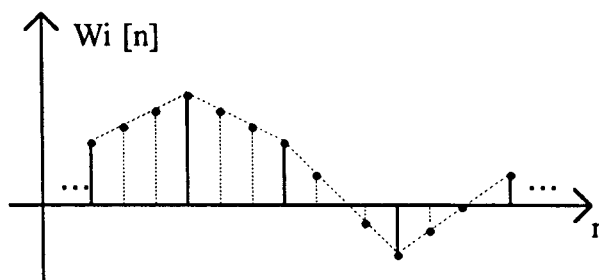
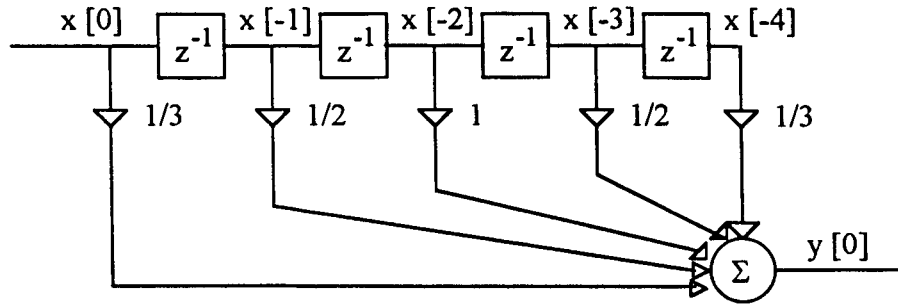


Fig. 4.6. Interpolação linear

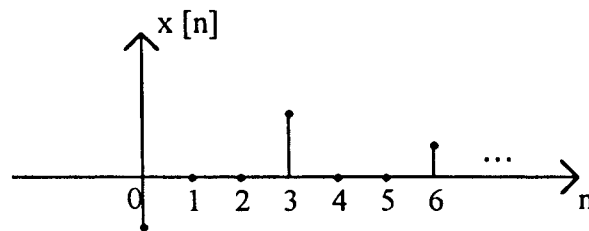
Na Fig. 4.7 é apresentada a estrutura de um interpolador com  $N = 5$  para interpolação de um filtro esparso com  $L = 3$ . Observando o exemplo representado nas Fig. 4.7(b) e 4.7(c), verifica-se que o interpolador linear preserva as amostras de entrada diferentes de zero, no entanto, produz um atraso equivalente a  $L-1$  amostras no sinal de saída.

Este filtro, pela própria forma de interpolação que proporciona, sendo mais seletivo em frequência, permite um espectro mais amplo de aplicações do que o filtro pente, no entanto, não dispensa multiplicações como o anterior, levando a um custo computacional mais elevado.

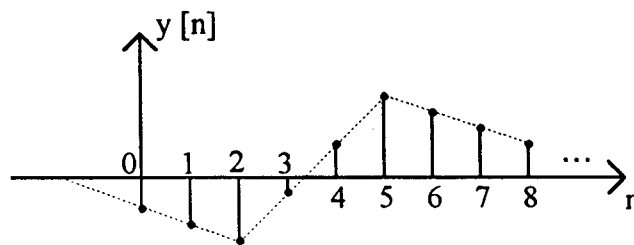
Da mesma forma que o filtro pente, o interpolador linear também pode ser utilizado em filtro passa-altas, alternando-se os sinais negativos e positivos na expressão (4.5).



(a)



(b)



(c)

Fig. 4.7 Interpolador linear para  $L = 3$ . (a) Estrutura do filtro FIR com  $N = 5$ , considerando na entrada a amostra  $x[0]$ . (b) Sinal de entrada  $x[n]$ . (c) Sinal de saída  $y[n]$ .

### 4.3.3 Interpolação pelo Método de Lagrange

O interpolador linear é uma função clássica de interpolação do tipo polinomial de primeira ordem, sendo a determinação de seus coeficientes bastante simples, considerando que ele apenas une, por meio de uma reta, dois pontos consecutivos. No entanto, sua simplicidade o restringe à interpolação de funções de variação lenta (baixa frequência em filtragem linear) sugerindo, então, a utilização de polinômios de maior ordem para interpolação de funções com variações menos suaves (filtros de banda mais larga), onde mais de uma amostra anterior e posterior sejam utilizadas no cálculo das intermediárias. Para polinômios de maior ordem, a obtenção dos coeficientes que produzam uma interpolação mais próxima da função original não é tão trivial. Desta forma, diversos métodos podem ser encontrados para a determinação do polinômio que melhor estimará os valores das amostras a serem determinadas, sendo um dos mais conhecidos e utilizados o *Método de Lagrange*.

Em [58], *Schafer e Rabiner* desenvolvem considerações sobre a interpolação polinomial pelo método de Lagrange para filtragem linear, onde são definidos os coeficientes do polinômio para qualquer ordem. O comprimento do filtro interpolador é dado por  $N = QL - 1$ , onde  $Q$  é o número de amostras diferentes de zero da resposta ao impulso do filtro esparsos que serão utilizadas no cálculo de cada amostra obtida por interpolação (no interpolador linear  $Q = 2$ ). O interpolador de Lagrange, assim como o linear (que é um caso particular), também produz atrasos no sinal de saída.

Na análise em frequência, observa-se que a seletividade do filtro aumenta com o aumento da ordem do polinômio, possibilitando filtros esparsos com maior largura de banda (Fig. 4.7). Esta maior seletividade se deve ao maior número de zeros em torno das frequências  $2\pi/L$ ,  $4\pi/L$ , etc. Para  $Q = 2$ , por exemplo, teremos um duplo zero nas frequências múltiplas de  $2\pi/L$ , para  $Q = 4$ , quatro zeros em torno destas frequências, e assim aumentando para maiores ordens.

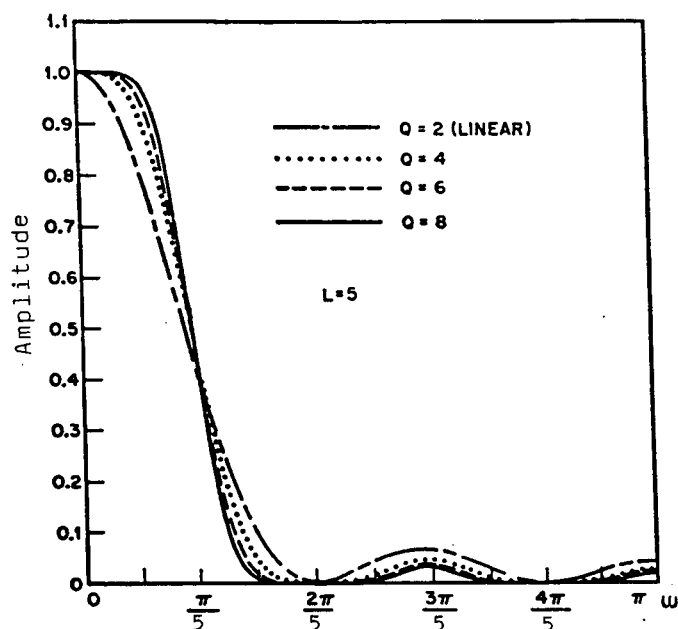


Fig. 4.8. Comparação de respostas em frequência de filtros interpoladores de Lagrange para  $L = 5$  [58].

#### 4.3.4 Outros Interpoladores

Os filtros interpoladores analisados nas seções anteriores foram obtidos a partir da teoria clássica de interpolação de funções. No entanto, sabemos que a função do interpolador em filtragem linear é a de reestabelecer a resposta original do filtro projetado através de filtragem seletiva. Desta forma, diversos outros métodos de projeto de filtros podem ser utilizados na realização dos interpoladores, sendo que, normalmente, são obtidos resultados ainda melhores do que os verificados pelos métodos clássicos, destacando-se a possibilidade de projetos passa-faixa e rejeita-faixa, além dos filtros passa-baixas e passa-altas considerados anteriormente.

Foi considerando estas restrições que Neuvo et al.[4] propuseram uma classe genérica de filtros de segunda ordem da forma

$$I(z) = \frac{1}{A} (1 + 2 \cos \omega_0 \cdot z^{-1} + z^{-2}) \quad (4.6)$$

onde  $A$  é uma constante de ganho, com o objetivo de generalizar o projeto para qualquer banda de frequência (passa-baixas, passa-altas, passa-faixa ou rejeita-faixa), onde  $\omega_0$  é a frequência onde o filtro estará centrado. Se  $\omega_0 = 0$ , será obtido um interpolador linear. Estes filtros de segunda ordem podem ser utilizados isoladamente apenas para  $L = 2$ , sendo restrito, como o linear, a bandas bastante estreitas.

Para fatores de interpolação maiores, pode-se utilizar seções em cascata. Para  $L = 4$ , por exemplo, a cascata de

$$I_1(z) = \frac{1}{A} (1 + 2 \cos \omega_0 \cdot z^{-1} + z^{-2}) \quad (4.7)$$

com

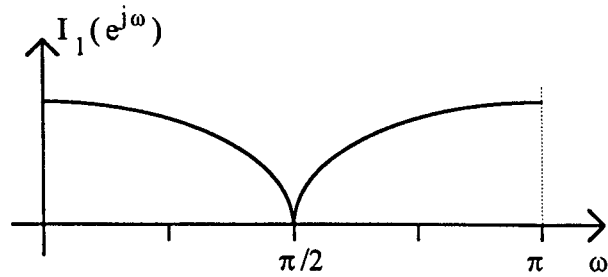
$$I_2(z) = \frac{1}{A} (1 + 2 \cos 2\omega_0 \cdot z^{-2} + z^{-4}) \quad (4.8)$$

produz o resultado apresentado na Fig. 4.9, para  $\omega_0 = 0$ .

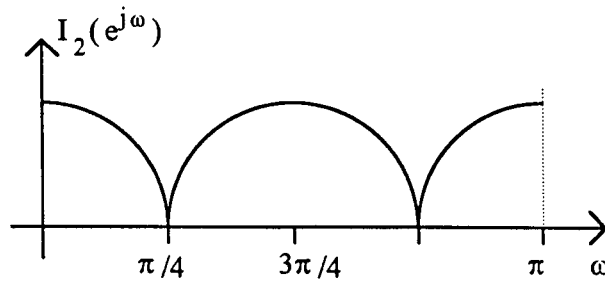
Outra forma de projeto de filtros interpoladores utiliza métodos de otimização para projeto de filtros FIR a partir de gabaritos em frequência, onde se consideram a atenuação mínima, a largura da banda e o fator de interpolação [58]. Neste tipo de projeto, pode-se conseguir melhores resultados de interpolação, porém, normalmente com um número maior de coeficientes. Na Fig. 4.10 é apresentado um exemplo de gabarito para  $L = 5$ .

De forma mais complexa, buscando maior eficiência e precisão, *Saramäki* et al. [59] apresentam um estudo bastante completo do projeto de filtros IFIR, onde destacam a implementação de interpoladores baseados na cascata de seções de segunda ordem, como o exemplo mostrado anteriormente, além da utilização de um programa para otimização de projetos de filtros FIR. O projeto, utilizando algoritmo de otimização, é semelhante à determinação de sistemas desconhecidos em filtragem adaptável. No entanto, o critério aqui é o da minimização do erro entre a resposta em frequência do filtro que está sendo adaptado e a resposta desejada. No trabalho em questão, os autores utilizaram um programa desenvolvido por *McClellan* et al. [31]

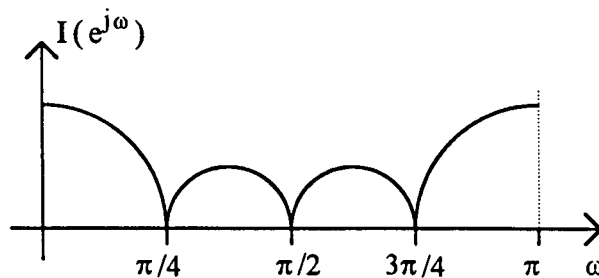
para otimização de filtros FIR. No caso de otimização de filtros IFIR, o algoritmo é utilizado alternadamente na otimização do filtro esparsos e do interpolador, de forma a se obter um resultado muito interessante, considerando que haverá uma compensação de distorções causadas por um filtro na resposta em frequência do outro.



(a)



(b)



(c)

Fig. 4.9 Interpolador formado pela cascata de duas seções. (a) Resposta em frequência de  $I_1(z)$ . (b) Resposta em frequência de  $I_2(z)$ . (c) Resposta em frequência de  $I(z) = I_1(z)I_2(z)$ .



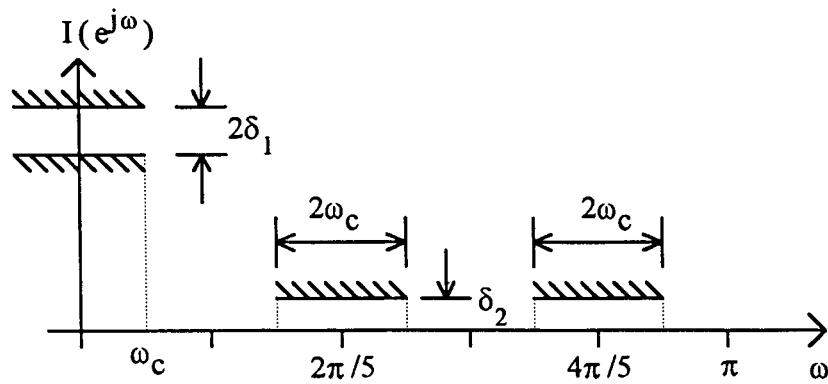


Fig. 4.10. Gabarito para projeto de um interpolador para  $L = 5$ .

Em [59] são apresentados os resultados de tal procedimento de projeto, além de sua comparação com propostas de outros autores.

Foram apresentados nesta seção apenas alguns dos mais significativos métodos para a implementação de filtros IFIR, porém, com a diversidade de métodos e algoritmos para o projeto de filtros FIR, muitas são as possibilidades e outras formas alternativas poderão vir a ser mais eficientes.

## CAPÍTULO 5

### FILTRAGEM ADAPTÁVEL UTILIZANDO ESTRUTURA IFIR

#### 5.1 Introdução

Nas mais diversas aplicações onde é utilizada filtragem adaptável, características como custo computacional e velocidade de convergência têm importância fundamental e exigem um contínuo desenvolvimento de novas técnicas. Já verificamos anteriormente, no Capítulo 3, que o processamento multibanda pode contribuir significativamente com este objetivo, considerando principalmente suas características mais fundamentais: a redução da taxa de amostragem e a decomposição em sub-bandas.

Com características bastante semelhantes às do processamento multibanda, a filtragem utilizando estrutura IFIR também pode ter contribuição importante para o melhor desempenho de sistemas adaptáveis. Neste capítulo, nas Seções 5.2 e 5.3, analisaremos este desempenho, verificando o comportamento da estrutura quanto ao tempo de processamento (custo computacional) e velocidade de convergência, comparando-o com o da estrutura FIR convencional (transversal).

Além da análise da filtragem adaptável IFIR em banda única, verificaremos como a estrutura IFIR pode ser utilizada em sistemas adaptáveis multibanda. Verificaremos suas possíveis vantagens com relação às estruturas convencionais.

#### 5.2 Sistemas Adaptáveis Utilizando Estrutura IFIR

No Capítulo anterior, apresentamos a estrutura do filtro IFIR com seus dois blocos básicos: o filtro esparso ( $W_e(z)$ ) e o interpolador ( $I(z)$ ) (Fig. 4.1). Neste capítulo analisaremos

esta mesma estrutura, porém, inserida num sistema adaptável, como mostra o diagrama da Fig. 5.1. Nesta nova estrutura, como se pode observar, estamos considerando apenas o filtro esparsos como adaptável [60, 61, 62], configuração que tem apresentado melhor desempenho do que uma estrutura com ambos os filtros adaptáveis, para aplicações gerais, como verificaremos mais adiante. Tal estrutura já foi utilizada por *Abousaada* [63] para aplicação no cancelamento da "cauda" do eco (parte de baixa frequência do sinal de eco) em transmissão de dados, em conjunto com um filtro FIR transversal.

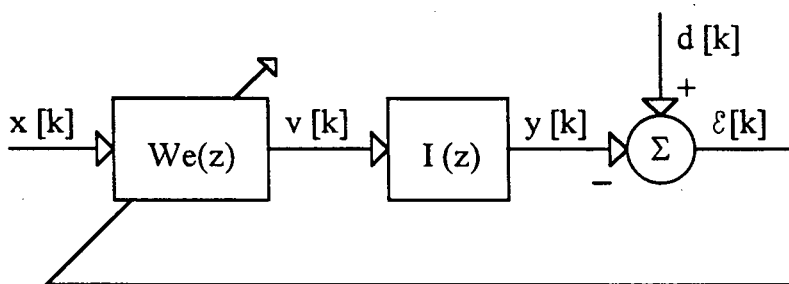


Fig. 5.1. Sistema adaptável utilizando estrutura IFIR.

### 5.2.1 Função de Desempenho

Como já foi estudado no Capítulo 2, podemos definir a função de desempenho do sistema a partir do sinal de erro, definido por:

$$\varepsilon[k] = d[k] - y[k] \quad (5.1)$$

sendo, para o sistema da Fig. 5.1,

$$y[k] = We_k^T X_k I = I^T X_k^T We_k \quad (5.2)$$

onde  $We$  é o vetor dos coeficientes do filtro esparso e  $I$  é o vetor dos coeficientes do filtro interpolador, sendo:

$$We_k = [w_{0k} \ 0 \ \dots \ w_{Lk} \ 0 \ \dots \ w_{2Lk} \ 0 \ \dots \ w_{(N-1)k}]^T$$

$$I = [i_0 \ i_1 \ i_2 \ \dots \ i_{M-1}]^T$$

$$X_k = \begin{bmatrix} x[k] & x[k-1] & x[k-2] & \dots & x[k-(M-1)] \\ x[k-1] & x[k-2] & & & \\ x[k-2] & & x[k-4] & & \\ \dots & & & \dots & \\ x[k-(N-1)] & & & & x[k-(N+M-2)] \end{bmatrix} \{N \times M\}$$

A partir da expressão do erro (equação (5.1)), podemos escrever o erro quadrático como:

$$\varepsilon^2[k] = d^2[k] - 2d[k]We_k^T X_k I + We_k^T X_k I \cdot I^T X_k^T We_k \quad (5.3)$$

portanto, o erro médio quadrático será, como em (2.6), dado por:

$$\xi_k = E[\varepsilon^2[k]] = E[d^2[k]] - 2We_k^T E[d[k]X_k I] + We_k^T E[X_k I \cdot I^T X_k^T] We_k \quad (5.4)$$

Definindo-se  $P$  como o vetor dado por:

$$P = E[d[k]X_k I]$$

e  $R$  como a matriz quadrada  $N \times N$  dada por:

$$R = E[X_k I \cdot I^T X_k^T]$$

poderemos reescrever a expressão do erro médio quadrático como segue:

$$\xi_k = E[d^2[k]] - 2\mathbf{W}e_k^T \mathbf{P} + \mathbf{W}e_k^T \mathbf{R} \mathbf{W}e_k \quad (5.5)$$

Considerando a característica esparsa do vetor  $\mathbf{W}e$ , podemos redefinir a expressão do erro médio quadrático da seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{W}}e_k = [w_{0k} \quad w_{Lk} \quad w_{2Lk} \quad \dots \quad w_{(N-1)k}]$$

de comprimento  $N/L$ , sendo o erro médio quadrático expresso por:

$$\xi_k = E[d^2[k]] - 2\tilde{\mathbf{W}}e_k^T \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{W}}e_k^T \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{W}}e_k \quad (5.6)$$

onde a matriz  $\tilde{\mathbf{R}}$  terá dimensão  $(N/L) \times (N/L)$ , sendo portanto:

$$\tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} r_{00} & r_{0L} & r_{0(2L)} & \dots & r_{0(N-1)} \\ r_{L0} & r_{LL} & & & \\ r_{(2L)0} & & r_{(2L)(2L)} & & \\ \dots & & & \dots & \\ r_{(N-1)0} & & & & r_{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

onde  $r_{ij}$  são os elementos da matriz  $\tilde{\mathbf{R}}$ . O vetor  $\tilde{\mathbf{P}}$  terá dimensão  $(N/L)$ , de forma que

$$\tilde{\mathbf{P}} = [p_0 \quad p_L \quad p_{2L} \quad \dots \quad p_{N-1}]$$

onde  $p_i$  são os elementos do vetor  $\mathbf{P}$ .

### 5.2.2 Algoritmo LMS

Partindo da função de erro, podemos desenvolver o algoritmo LMS para o processo de adaptação do filtro. A atualização do vetor  $W_e$  será dada por

$$W_{e_{k+1}} = W_{e_k} - \mu \hat{V}_k \quad (5.7)$$

onde  $\hat{V}_k$  é a estimativa do gradiente do erro médio quadrático e  $\mu$  é o coeficiente de adaptação. A partir de (5.1) e (5.2) e considerando a equação (2.29), podemos definir a estimativa do gradiente da seguinte forma:

$$\hat{V}_k = \frac{\partial \varepsilon^2[k]}{\partial W_k} = 2\varepsilon[k] \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial W_k} = -2\varepsilon[k] X_k I \quad (5.8)$$

Portanto, o algoritmo LMS para o sistema adaptável com estrutura IFIR fica definido como:

$$W_{e_{k+1}} = W_{e_k} + 2\mu\varepsilon[k] X_k I \quad (5.9)$$

Considerando o vetor reduzido  $\tilde{W}_e$ , podemos escrever:

$$\tilde{W}_{e_{k+1}} = \tilde{W}_{e_k} + 2\mu\varepsilon_k \tilde{X}_k I \quad (5.10)$$

onde:

$$\tilde{X}_k = \begin{bmatrix} x[k] & x[k-1] & x[k-2] & \dots & x[k-(M-1)] \\ x[k-L] & x[k-(L+1)] & & & \\ x[k-2L] & & x[k-(2L+2)] & & \\ \dots & & & \dots & \\ x[k-(N-1)] & & & & x[k-(N+M-2)] \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} N \\ M \end{matrix} x^M \right\}$$

Observando a equação (5.9), comparando com a atualização do filtro FIR convencional (2.39), verificamos a presença do vetor  $I$  multiplicando  $X_k$ . Esta operação representa, a rigor, a sinal de saída do interpolador se a este fosse aplicado um sinal de entrada  $x[k]$ . Desta forma, se alterarmos a ordem dos filtros do sistema adaptável IFIR (Fig. 5.2), poderemos obter este vetor diretamente do sistema, através de  $u[k]$ . Este procedimento não produz nenhuma modificação na expressão do erro, mantendo-se inalterados, portanto, a função de desempenho e o algoritmo de atualização.

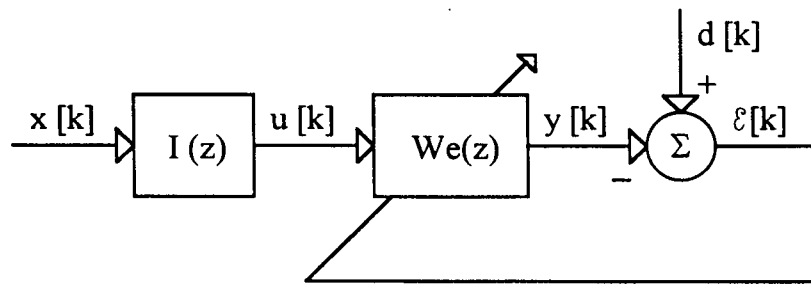


Fig. 5.2. Nova estrutura do sistema adaptável IFIR com inversão de posições de  $We(z)$  e  $I(z)$ .

Considerando, portanto, esta nova configuração, escreveremos a expressão do algoritmo LMS de adaptação para IFIR da forma que segue:

$$We_{k+1} = We_k + 2\mu\epsilon[k]U_k \quad (5.11)$$

ou

$$\tilde{W}e_{k+1} = \tilde{W}e_k + 2\mu\epsilon[k]\tilde{U}_k \quad (5.12)$$

onde

$$U_k = X_k I \quad \text{e} \quad \tilde{U}_k = \tilde{X}_k I$$

A principal característica desta nova estrutura será, portanto, a maior eficiência no cálculo do algoritmo de adaptação, o qual não necessitará determinar o vetor  $X_k$  matematicamente a cada iteração. Com esta característica, a implementação do algoritmo LMS para sistemas adaptáveis com filtro IFIR se torna idêntica à do sistema com filtro FIR convencional, com a vantagem adicional de atualizar um número de coeficientes  $L$  vezes menor do que este último.

A adaptação utilizando algoritmo "steepest descent" também pode ser realizada diretamente nesta nova estrutura, determinando-se  $E[\varepsilon[k]U_k]$ .

### 5.3 Considerações sobre o Processo de Convergência do Sistema IFIR

O desempenho de um algoritmo de adaptação está condicionado a alguns elementos básicos, como por exemplo: a eficiência do algoritmo aplicado à estrutura, o número de coeficientes a adaptar, a forma e posição da superfície de desempenho e o coeficiente de convergência ( $\mu$ ). Quanto à eficiência do algoritmo, já verificamos, na análise realizada na seção anterior, que o LMS é implementado para adaptação da estrutura IFIR da mesma forma como é implementado para a estrutura FIR transversal, sendo que o número de coeficientes a adaptar é  $L$  vezes menor no sistema utilizando filtro IFIR. Portanto, verificaremos a seguir apenas as características relacionadas à superfície de desempenho e coeficiente de adaptação (ou passo de adaptação).

A aplicação que utilizaremos para estudar o comportamento desta estrutura será a de identificação de sistemas, conforme o esquema mostrado na Fig. 5.3. A estrutura desta aplicação para filtro FIR convencional está representada na Fig. 2.4(d).



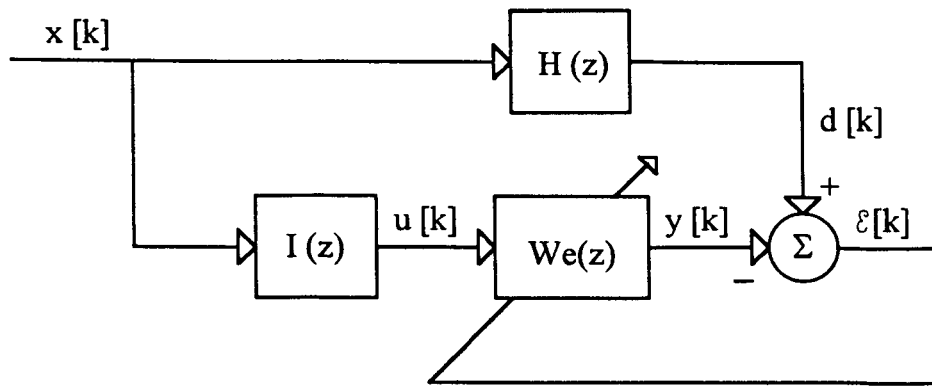


Fig. 5.3. Identificação de sistemas utilizando estrutura IFIR adaptável

### 5.3.1 Influência da Superfície de Desempenho no Processo de Convergência

No Capítulo 2, verificamos a relação existente entre a matriz  $\mathbf{R}$  e o vetor  $\mathbf{P}$  na forma e posição da superfície de desempenho. Nesta seção, analisaremos como a filtragem IFIR influenciará nestes parâmetros, partindo, da constatação de que as dimensões da matriz  $\tilde{\mathbf{R}}$ , do vetor  $\tilde{\mathbf{P}}$  e, conseqüentemente, da superfície de desempenho, são diferentes daquelas para o FIR convencional. No entanto, considerando uma mesma aplicação, semelhanças existem e comparações são possíveis entre as superfícies de erro das duas estruturas.

Referente à posição da superfície de desempenho, ou melhor, à posição do ponto ótimo ( $\mathbf{W}^*$ ) com relação à origem ( $\mathbf{W} = \mathbf{0}$ ), já mencionamos anteriormente (Seção 2.2.4) que esta dependerá fundamentalmente da relação estatística entre o sinal de entrada do sistema e o sinal de referência, ou seja, dependerá do vetor  $\mathbf{P}$ . No caso de utilizarmos a estrutura adaptável para identificação de sistemas, o sinal de referência em questão será representado pela saída do sistema a identificar (Fig. 2.4(a) para sistema utilizando FIR transversal e Fig. 5.3 para IFIR), portanto, a correlação existente entre este sinal de saída e o de entrada estará diretamente ligada à resposta ao impulso do próprio sistema desconhecido, confirmando que o vetor ótimo  $\mathbf{W}^*$  tenderá a copiar esta resposta, como é o objetivo da aplicação.

Na adaptação do filtro IFIR, no entanto, não só o sistema desconhecido determinará o vetor  $P$  (a correlação entre entrada e referência). Como se pode observar em (5.4), existe a presença do interpolador nesta correlação, ou melhor, o sinal de entrada do filtro adaptável é uma versão, filtrada pelo interpolador, do sinal de entrada do sistema desconhecido. Verificaremos, portanto, se o vetor  $\tilde{W}e^*$  (que representa o vetor esparso reduzido ótimo) tenderá a se aproximar do valor das amostras da resposta ao impulso do sistema desconhecido (aquelas que tenham correspondência no tempo, ou seja, espaçadas de  $L$  em  $L$ ), ou se outro tipo de adaptação será produzida em função deste interpolador.

Partindo da expressão do erro médio quadrático mínimo para uma estrutura FIR adaptável convencional ((2.11) e (2.12)), podemos escrever para o caso do IFIR:

$$\xi_{\min} = E[d^2[k]] - \tilde{P}^T \tilde{W}e^* \quad (5.13)$$

ou

$$\xi_{\min} = E \left[ d^2[k] - \left[ d[k] \left( u[k]w_0^* + u[k-L]w_L^* + \dots + u[N-1]w_{N-1}^* \right) \right] \right] \quad (5.14)$$

De (5.14), podemos confirmar a afirmação sobre a tendência da adaptação do filtro IFIR através de um exemplo ilustrativo, onde o interpolador é do tipo pente, para um filtro esparso com  $L = 2$ . Portanto:

$$I = [i_0 \quad i_1] \quad e \quad U_k = [i_0x[k] \quad i_1x[k-1]]$$

A saída do sistema desconhecido será

$$d[k] = h_0x[k] + h_1x[k-1] + h_2x[k-2] + \dots \quad (5.15)$$

onde  $h_i$ , para  $i = 0, 1, \dots$ , representa a resposta ao impulso do sistema desconhecido. Considerando as definições acima, determinamos, para (5.14),

$$d[k]u[k]w_0^* = w_0^*(h_0i_0x^2[k] + h_0i_1x[k]x[k-1] + h_1i_0x[k]x[k-1] + h_1i_1x^2[k-1] + \dots)$$

$$\begin{aligned} d[k]u[k-2]w_2^* &= w_2^*(h_0i_0x[k]x[k-2] + h_0i_1x[k-1]x[k-3] + \\ &+ h_1i_0x[k-1]x[k-2] + h_1i_1x[k-2]x[k-3] + \\ &+ h_2i_0x^2[k-2] + h_2i_1x[k-2]x[k-3] + \\ &+ h_3i_0x[k-2]x[k-3] + h_3i_1x^2[k-3] + \dots) \end{aligned}$$

(5.16)

e assim por diante.

Se a entrada for um ruído branco com média zero e potência média igual a 1 ( $\mu_x = 0$ ,  $\sigma_x^2 = 1$ ), a partir de (5.16) podemos obter:

$$\tilde{P}^T \tilde{W} e^* = h_0i_0w_0^* + h_1i_1w_0^* + h_2i_0w_2^* + h_3i_1w_2^* + \dots \quad (5.17)$$

Determinando o valor médio de  $d^2[k]$ , tem-se:

$$E[d^2[k]] = h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + \dots \quad (5.18)$$

e considerando que para erro médio quadrático mínimo igual a zero (tendência que se deseja obter), tem-se:

$$h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + \dots = h_0i_0w_0^* + h_1i_1w_0^* + h_2i_0w_2^* + h_3i_1w_2^* + \dots \quad (5.19)$$

verificamos que, para  $i_0 = i_1 = 1$ ,  $w_0^*$  tenderá a  $h_0$  ( $h_1$  será interpolado com o mesmo valor  $w_0^*$ , como previsto),  $w_2^*$  tenderá a  $h_2$  ( $h_3$  será interpolado com o mesmo valor  $w_2^*$ ) e assim sucessivamente. Considerando válida a extrapolação desta análise para qualquer outro tipo de interpolador, podemos concluir que o vetor  $We^*$  tenderá a se aproximar das amostras correspondentes (espaçadas de  $L$  em  $L$ ) da resposta ao impulso do sistema desconhecido, como se buscava, sendo as demais amostras obtidas por interpolação.

Verificaremos agora, o efeito da matriz de autocorrelação de entrada sobre o formato da superfície de desempenho. Em um sistema adaptável com filtro IFIR, a matriz  $\mathbf{R}$ , assim como o vetor  $\mathbf{P}$ , sofre a interferência do interpolador, pois a entrada que está sendo considerada é a saída deste. Como o interpolador é um filtro de banda limitada, mesmo que sua entrada seja totalmente decorrelacionada (ruído branco), sua saída passará a ter uma certa correlação entre as amostras. No entanto, não é necessário considerar totalmente o efeito que esta filtragem traz (aumentando o grau de correlação), já que nem todos os elementos da matriz  $\mathbf{R}$  são considerados na adaptação (equação (5.6)).

Para verificarmos esta afirmação, analisaremos o mesmo exemplo utilizado na discussão anterior, onde,

$$\mathbf{I} = [i_0 \quad i_1] \quad \text{e} \quad \mathbf{U}_k = [i_0 x[k] \quad i_1 x[k-1]]$$

Para este exemplo, determinamos os elementos de  $\mathbf{R}$  como segue:

$$\begin{aligned} r_{00} &= E[i_0^2 x^2[k] + 2i_0 i_1 x[k]x[k-1] + i_1^2 x^2[k-1]] \\ r_{01} &= E[i_0^2 x[k]x[k-1] + i_0 i_1 x[k]x[k-2] + i_0 i_1 x^2[k-1] + i_1^2 x[k]x[k-2]] \\ r_{02} &= E[i_0^2 x[k]x[k-2] + i_0 i_1 x[k]x[k-3] + i_0 i_1 x[k-1]x[k-2] + i_1^2 x[k-1]x[k-3]] \end{aligned} \quad (5.20)$$

e assim por diante.

Considerando o mesmo sinal ruído branco de entrada, do exemplo anterior, então:

$$r_{00} = i_0^2 + i_1^2 \quad (5.21)$$

$$r_{01} = i_0 i_1 \quad (5.22)$$

$$r_{02} = 0 \quad (5.23)$$

Através destes elementos, pode-se observar que a matriz  $\mathbf{R}$  não será mais do tipo diagonal, tendo valores diferentes de zero também nas primeiras diagonais secundárias. Esta configuração gerará auto-valores diferentes e, portanto, com dispersão maior do que 1. No entanto,  $\tilde{\mathbf{R}}$ , que é uma versão reduzida de  $\mathbf{R}$  (equação (5.6)), não conterà, por exemplo, o elemento  $r_{01}$ . Extrapolando para os demais elementos, verificamos que esta matriz reduzida passará a ser novamente diagonal, com dispersão dos auto-valores, portanto, igual a 1.

Para interpoladores de maior ordem, como linear ou Lagrange,  $\tilde{\mathbf{R}}$  não será diagonal, pois haverá um número maior de amostras da entrada na composição de  $u[k]$ , porém, as diagonais secundárias normalmente terão valores bastante reduzidos, produzindo uma dispersão pequena. Utilizando o programa matemático *MATLAB*, analisamos exemplos de matrizes de autocorrelação reduzidas, considerando entrada do tipo ruído branco ( $\mu_x = 0$ ,  $\sigma_x^2 = 1$ ) e interpoladores de Lagrange de diversas ordens (coeficiente de interpolação igual a 2), onde verificamos que a dispersão máxima para interpoladores lineares e de Lagrange é igual a 2.

Por outro lado, o efeito do interpolador sobre a matriz  $\mathbf{R}$  tende a reduzir possíveis correlações entre amostras da entrada. No exemplo apresentado acima, se a amostra  $x[k]$  fosse correlacionado com  $x[k - 1]$ , por suposição, no caso de sistema FIR convencional a matriz não seria diagonal, tendo valores diferentes de zero nas primeiras diagonais secundárias. No entanto, para IFIR com filtro pente, o sinal de entrada  $u[k]$  seria totalmente descorrelacionado, como se pode verificar em (5.22) e (5.23).

### 5.3.2 Coeficiente de Convergência

Como já mencionamos no Capítulo 2, o coeficiente de adaptação  $\mu$  depende fundamentalmente do tipo de algoritmo de adaptação e da matriz de autocorrelação de entrada, como se observa através dos limites para os algoritmos "steepest descent" e LMS (equações

(2.37) e (2.51)) e dos valores ótimos de  $\mu$  para estes algoritmos (equações (2.38) e (2.53)). Para filtragem adaptável IFIR, como suas características relacionadas à função de desempenho são idênticas ao FIR, o coeficiente de convergência seguirá basicamente o mesmo comportamento já verificado para este último.

De (2.37), verificamos que o limite superior de convergência para o algoritmo "steepest descent" está diretamente relacionado ao maior auto-valor da matriz de autocorrelação de entrada. Mesmo considerando um sinal de entrada totalmente descorrelacionado, a convergência deste algoritmo para IFIR, dependerá ainda do tipo de interpolador utilizado. No caso do filtro pente, que apenas copia a amostra anterior na interpolação, o melhor valor de  $\mu$  será:

$$\mu_{\text{ótimo}} = \frac{1}{2\lambda} \quad (5.24)$$

pois, como vimos anteriormente, a matriz de autocorrelação continuará diagonal, sendo os auto-valores todos iguais. Para interpoladores lineares, de Lagrange, ou outros de maior ordem, no entanto, a dispersão dos auto-valores devido ao interpolador deve ser considerada. Por exemplo, para um sistema IFIR com interpolador linear (que produzirá uma dispersão igual a 2 nos auto-valores da matriz reduzida  $\tilde{\mathbf{R}}$ , para entrada descorrelacionada), se utilizássemos para adaptação o  $\mu_{\text{ótimo}}$  referente ao auto-valor igual a 1, teríamos  $\mu = 0.5$ . Este valor é, no entanto, o limite superior para o coeficiente, correspondente ao auto-valor igual 2, levando o algoritmo à divergência.

#### 5.4 Análise de Simulações para IFIR Adaptável

Toda análise realizada neste capítulo, relacionada à adaptação de sistemas utilizando estrutura IFIR, está fundamentada em teorias de sinais estocásticos amplamente conhecidas e muito utilizadas em estudos de sistemas adaptáveis. No entanto, a comprovação desta teoria,

através de simulações computacionais, por exemplo, se apresenta como uma ferramenta de fundamental importância para a validação dos resultados.

Por outro lado, a simulação computacional tem uma importância ainda maior quando a verificação desejada não pode ser totalmente demonstrada na teoria, como é o caso da adaptação utilizando algoritmo LMS, por exemplo, que apresenta um processo de adaptação bastante "ruidoso". Nesta situação, resultados práticos podem trazer à luz novas conclusões, muitas vezes imperceptíveis no desenvolvimento teórico.

A simulação computacional, neste trabalho, foi realizada através de um programa especialmente desenvolvido para esta finalidade, de forma a contemplar todas as possibilidades exigidas no processo de análise. O programa foi implementado em linguagem C padrão ANSI para execução em estação de trabalho SUN - SPARC station.

Para as simulações, foi utilizada a estrutura de identificação de sistemas (Fig. 2.4(d) e 5.3), de forma a compararmos as adaptações das estruturas FIR convencional e IFIR. Nestes sistemas utilizou-se, como sinal de entrada, um ruído branco ( $\mu_x = 0$ ,  $\sigma_x^2 = 1$ ). O sistema a identificar escolhido para os exemplos é representado por um filtro com resposta ao impulso tipo "raised cosine"<sup>1</sup>, com característica passa-baixas e frequência de corte inferior igual a  $f_s/4$  (onde  $f_s$  é a frequência de amostragem). Desta forma, para dizimação com  $L = 2$ , não será verificado erro significativo por recobrimento. Esta função já foi apresentada como uma boa representação do canal de eco em [64, 65], sendo dada por [66]:

$$hr[n] = g[n - \beta] \quad (5.25)$$

onde

$$g[n] = \frac{\text{sen}(\pi\psi n)}{\pi\psi n} \left[ \frac{\cos(\pi\rho\psi n)}{1 - (\pi\rho\psi n)^2} \right] \quad (5.26)$$

---

<sup>1</sup> Pode-se traduzir para o português como "Cosseno Levantado"

Neste exemplo  $\rho = 1$ ,  $\psi = 0.12$  e  $\beta$ , que representa o deslocamento com relação a origem de  $hr[n]$ , é igual a 50, considerando que o comprimento do sistema a ser identificado será igual a 101. Na Fig. 5.4, são apresentadas as respostas ao impulso e em frequência de  $hr[n]$ .

#### 5.4.1 Convergência do Algoritmo "Steepest Descent"

Na Seção 5.3, analisamos o processo de convergência das estruturas IFIR e FIR convencional utilizando o algoritmo "steepest descent". Nesta análise verificamos as semelhanças existentes no comportamento das duas estruturas, sendo que, basicamente, apenas a interferência do interpolador na matriz de autocorrelação de entrada e o número de coeficientes a adaptar diferenciam os sistemas. Nesta primeira etapa de simulações, verificaremos a influência do filtro interpolador na estrutura adaptável IFIR com relação às seguintes características: limites do coeficiente de adaptação, velocidade de convergência e erro residual.

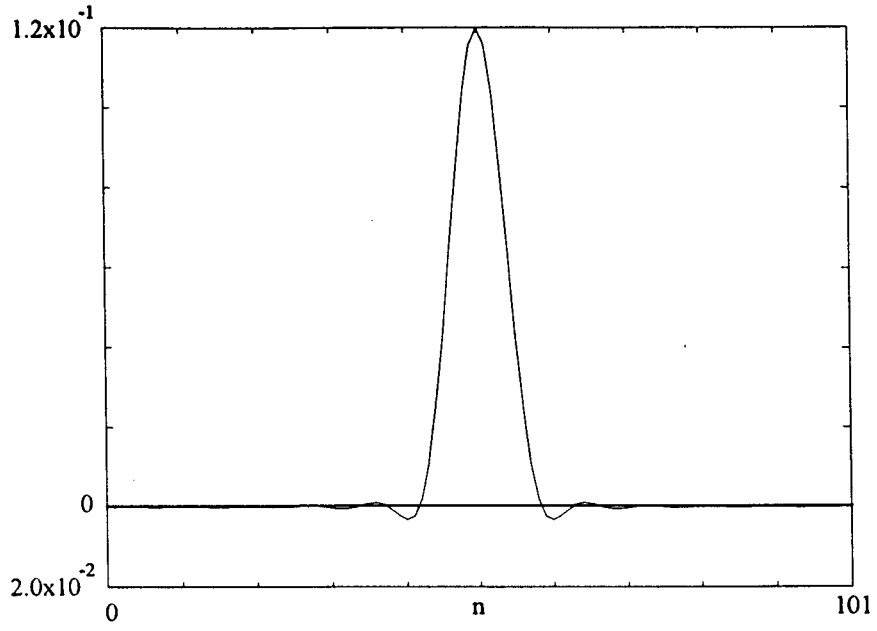
A simulação computacional do algoritmo "steepest descent" é realizada a partir da equação (2.31), reproduzida em (5.27), a qual representa a forma mais prática de determinação deste algoritmo.

$$W_{k+1} = W_k + 2\mu E[\varepsilon[k]X_k] \quad (5.27)$$

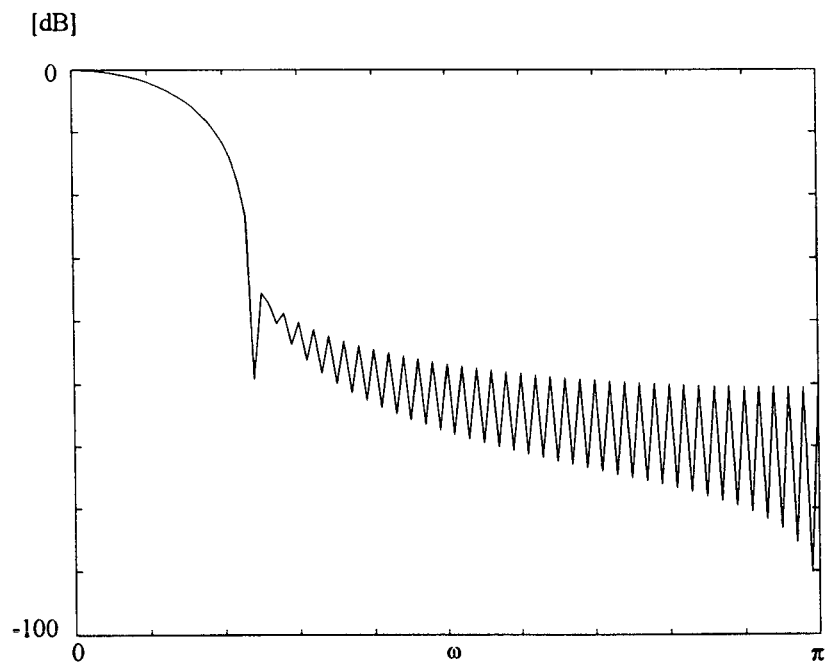
Para a determinação de  $E[\varepsilon[k]X_k]$ , acumulamos os valores de  $\varepsilon[k]X_k$  durante um intervalo determinado de amostras (definido a cada exemplo), antes de cada atualização, com a finalidade de calcular seu valor médio.

Serão apresentadas, para estas simulações, curvas de convergência (erro médio quadrático por iteração) de três estruturas: FIR convencional, IFIR com interpolador do tipo pente ( $I = [ 1.0 \ 1.0 ]$ ) e IFIR com interpolador linear ( $I = [ 0.5 \ 1.0 \ 0.5 ]$ ). O comprimento de todos os filtros adaptáveis é o mesmo do filtro que simula o sistema desconhecido, ou seja, 101 coeficientes.





(a)



(b)

Fig. 5.4. Sistema a identificar. (a) Resposta ao impulso. (b) Resposta em frequência.

Considerando a entrada como um ruído branco ( $\mu_x = 0$ ,  $\sigma_x^2 = 1$ ), os sinais de saída dos interpoladores, para sistemas com filtros IFIR, terão as seguintes características:

a) Estrutura com interpolador do tipo filtro pente - dispersão de auto-valores igual a 1 (matriz  $\tilde{\mathbf{R}}$  diagonal), potência média e auto-valores iguais a 2, conforme (5.28).

$$E[u^2[k]] = E[(1.0x[k] + 1.0x[k-1])^2] = 1.0 + 1.0 = 2 \quad (5.28)$$

b) Com interpolador linear - dispersão de auto-valores igual a 2 (mínimo auto-valor igual a 1 e máximo igual a 2), potência média igual a 1.5,

$$E[u^2[k]] = E[(0.5x[k] + 1.0x[k-1] + 0.5x[k-2])^2] = 0.25 + 1.0 + 0.25 = 1.5 \quad (5.29)$$

Considerando as expressões dos limites e valor ótimo do coeficiente de convergência,

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\max}}$$

$$\mu_{n,\text{ótimo}} = \frac{1}{2\lambda_n}, \quad \text{para } n = 0, \dots, N-1 \quad (5.30)$$

conforme foi demonstrado no Capítulo 2, podemos definir, para as estruturas em estudo:

a) FIR:

$$0 < \mu < 1 \quad \text{e} \quad \mu_{\text{ótimo}} = 0.5$$

b) IFIR com filtro pente:

$$0 < \mu < 0.5 \quad \text{e} \quad \mu_{\text{ótimo}} = 0.25$$

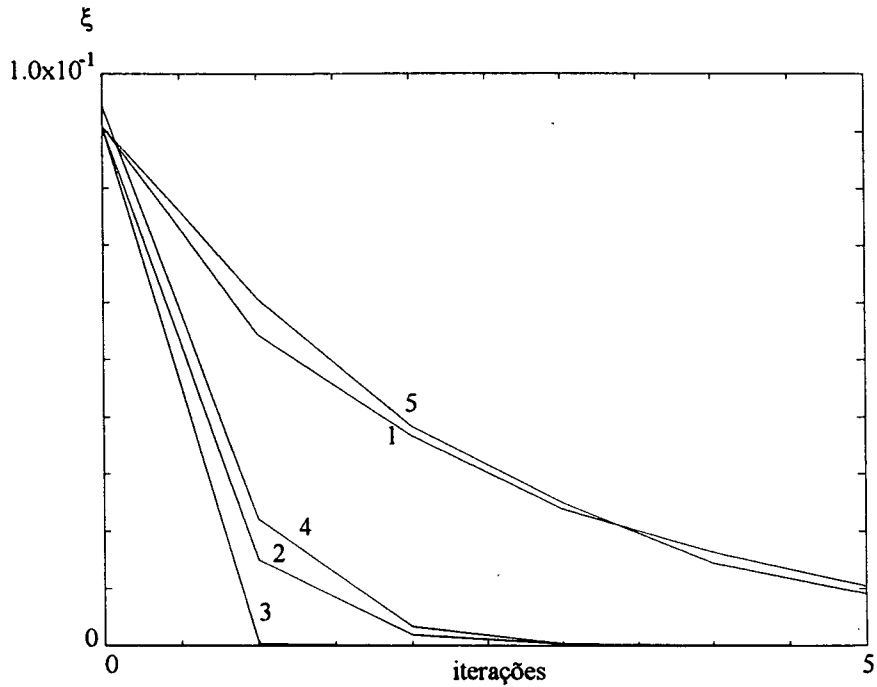
c) IFIR com interpolador linear:

$$0 < \mu < 0.5 \quad \text{e} \quad \mu_{\text{ótimo}} = \begin{cases} 0.25 & , \text{ para } \lambda = 2 \\ 0.5 & , \text{ para } \lambda = 1 \end{cases}$$

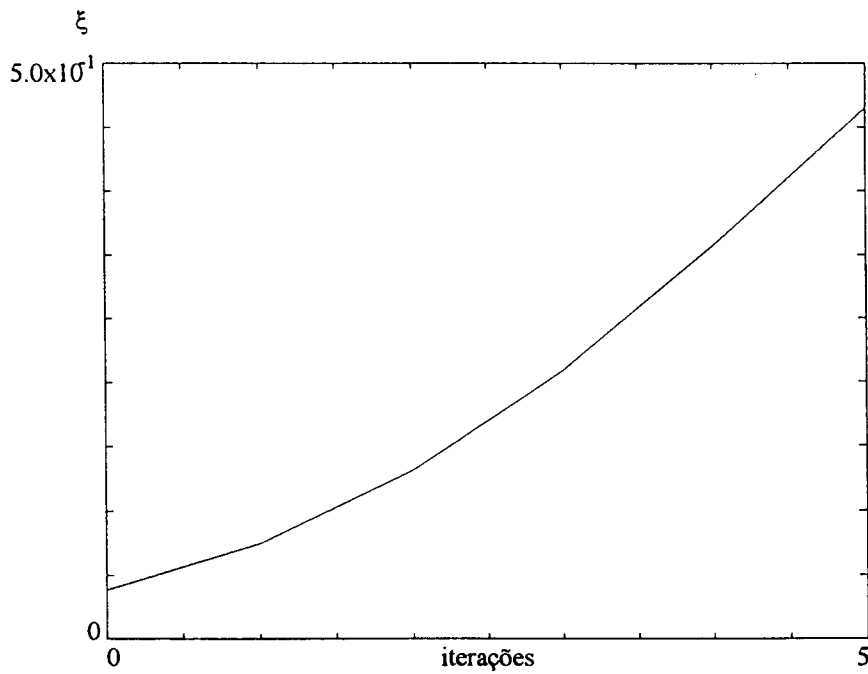
Para o item c), escolhemos o valor de  $\mu_{\text{ótimo}}$  correspondente ao maior auto-valor ( $\lambda = 2$ ). Desta forma, estamos forçando a convergência mais rápida do coeficiente que tem maior contribuição ao erro médio quadrático (ver Seção 2.2.4 e Fig. 2.6).

Esta primeira simulação mostra, portanto, para cada estrutura, um conjunto de curvas de convergência para diversos valores de  $\mu$  (Fig. 5.5, 5.6 e 5.7), de maneira a se avaliar e verificar os parâmetros acima determinados. O cálculo do gradiente para a implementação do algoritmo "steepest descent" foi obtido através da média de 10.000 amostras por iteração.

Partindo-se de um coeficiente de baixo valor, podemos verificar nas Fig. 5.5(a), 5.6(a) e 5.7(a), que a velocidade de convergência tende a aumentar a medida que nos aproximamos de  $\mu_{\text{ótimo}}$ , passando novamente a diminuir à medida que nos afastamos, como pode ser confirmado através da função quadrática de  $\mu$  em (2.52). Nas Fig. 5.5(b), 5.6(b) e 5.7(b), verifica-se também que, para todas as estruturas, o algoritmo diverge para valores maiores do que o limite superior definido anteriormente. As semelhanças nas curvas das três estruturas mostra que a dispersão causada pelo interpolador linear nos auto-valores do sinal de entrada tem pouca influência na convergência.

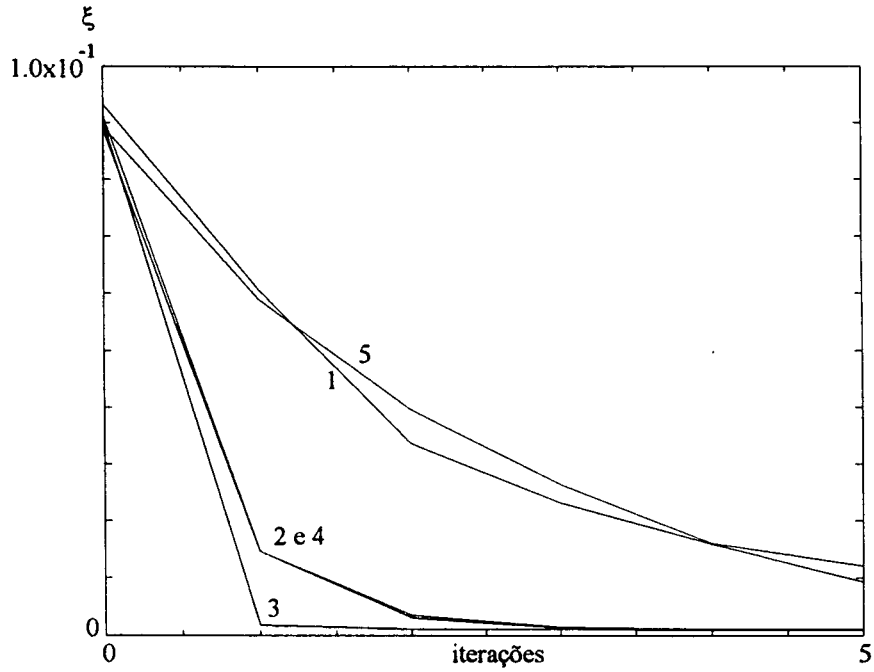


(a)

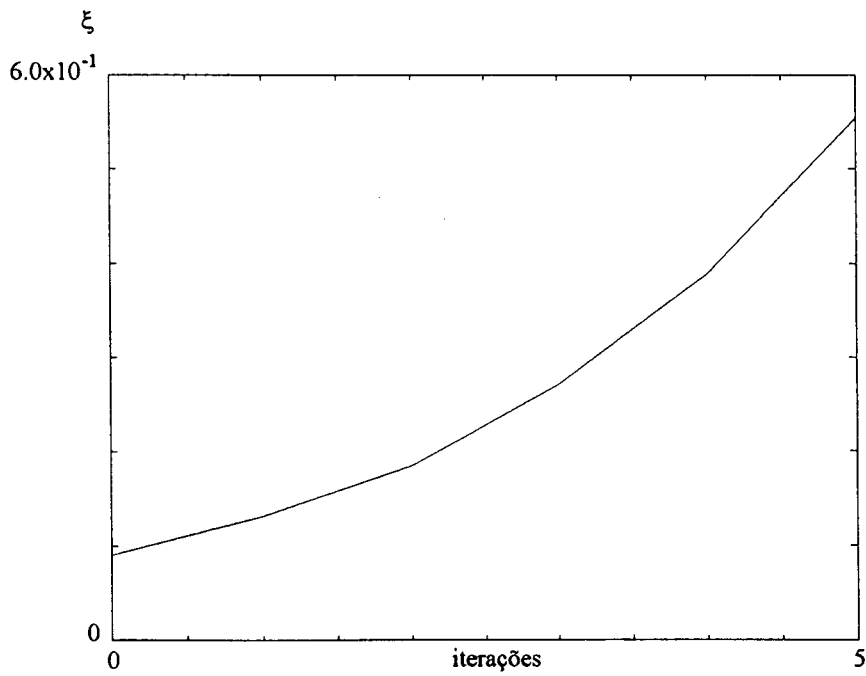


(b)

Fig. 5.5 Curvas de convergência para estrutura FIR. (a) 1.  $\mu = 1.0 \times 10^{-1}$ , 2.  $\mu = 3.0 \times 10^{-1}$ , 3.  $\mu = 5.0 \times 10^{-1}$ , 4.  $\mu = 7.0 \times 10^{-1}$ , 5.  $\mu = 9.0 \times 10^{-1}$ . (b)  $\mu = 1.1$ .

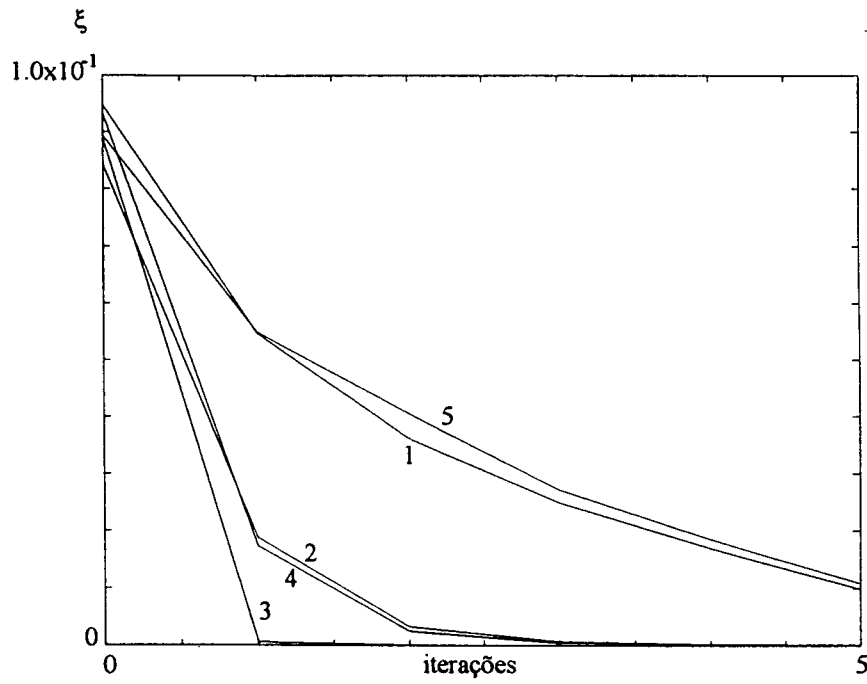


(a)

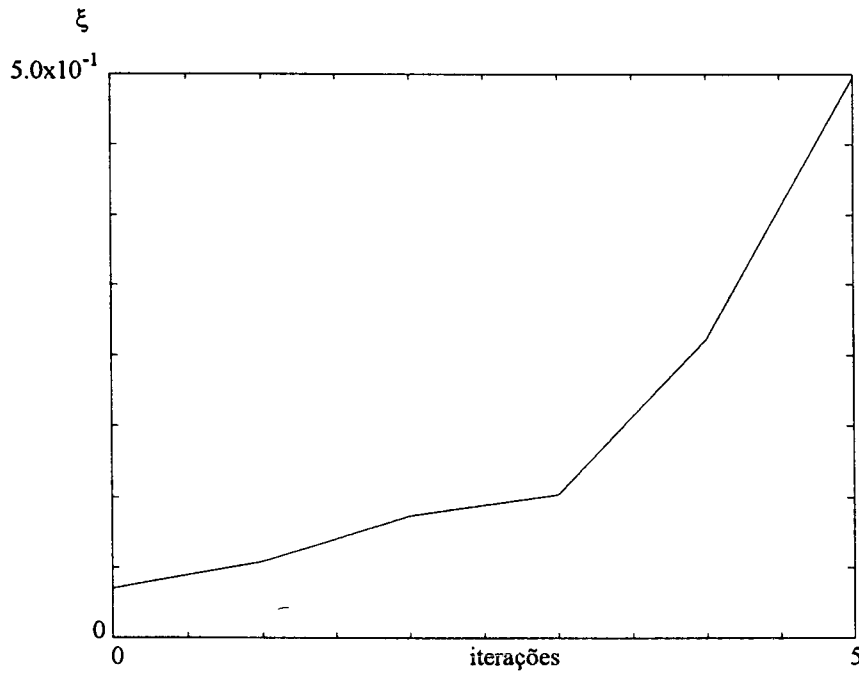


(b)

Fig. 5.6 Curvas de convergência para estrutura IFIR com filtro pente. (a) 1.  $\mu = 5.0 \times 10^{-2}$ , 2.  $\mu = 1.5 \times 10^{-1}$ , 3.  $\mu = 2.5 \times 10^{-1}$ , 4.  $\mu = 3.5 \times 10^{-1}$ , 5.  $\mu = 4.5 \times 10^{-1}$ . (b)  $\mu = 5.5 \times 10^{-1}$ .



(a)



(b)

Fig. 5.7 Curvas de convergência para estrutura IFIR com interpolador linear. (a) 1.  $\mu = 5.0 \times 10^{-2}$ , 2.  $\mu = 1.5 \times 10^{-1}$ , 3.  $\mu = 2.5 \times 10^{-1}$ , 4.  $\mu = 3.5 \times 10^{-1}$ , 5.  $\mu = 4.5 \times 10^{-1}$ . (b)  $\mu = 5.5 \times 10^{-1}$ .

De modo a confirmar que a dispersão dos auto-valores da matriz de autocorrelação de entrada, causada pelos interpoladores, não representa um acréscimo no tempo de convergência, comparamos as convergências de um sistema que utiliza filtro FIR, com um IFIR com interpolador linear e outro com interpolador de Lagrange de décimo grau (que utiliza 10 amostras diferentes de zero da resposta ao impulso do filtro esparso para determinar uma outra por interpolação). Para realizarmos uma verificação com maior precisão do efeito da dispersão dos auto-valores, utilizamos um coeficiente de convergência pequeno (5 vezes menor do que o valor ótimo) e calculamos o gradiente através da soma de 50.000 amostras, de forma que a convergência acompanhará com maior exatidão e a passos menores a curvatura da superfície de desempenho. Através desta simulação (Fig. 5.8), portanto, confirma-se a insignificante interferência desta dispersão sobre a convergência.

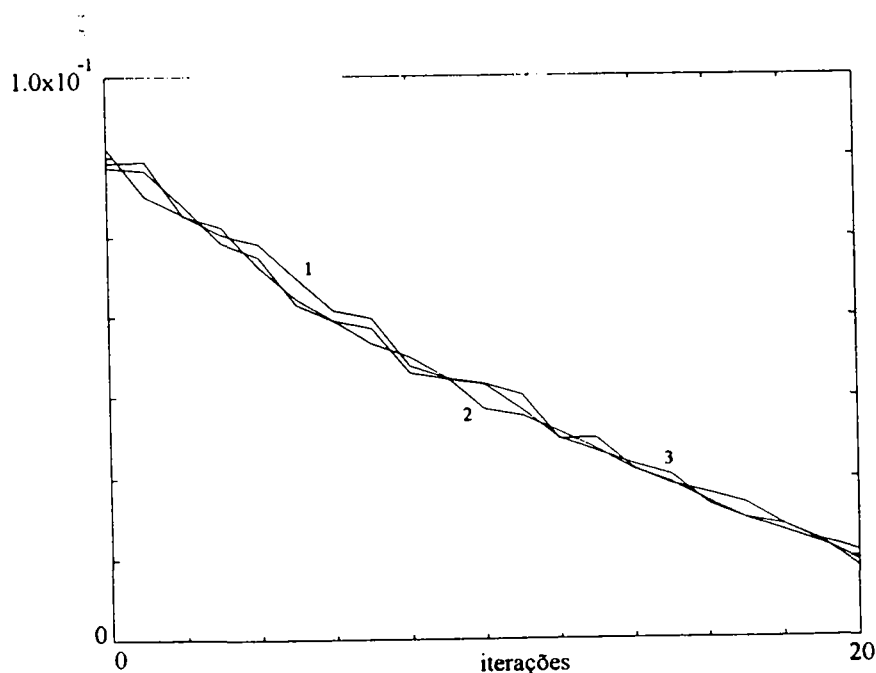


Fig. 5.8 1. Convergência para a estrutura FIR convencional com  $\mu = 1.0 \times 10^{-2}$ . 2. Estrutura IFIR com interpolador linear com  $\mu = 5.0 \times 10^{-3}$ . 3. Estrutura IFIR com interpolador de Lagrange de décimo grau com  $\mu = 5.0 \times 10^{-3}$ .

Com relação ao erro médio quadrático residual, ou seja,  $\xi_{\min}$ , verifica-se que, idealmente, este deve ser zero para a estrutura FIR, mas será maior quanto mais simples for o interpolador nos filtros IFIR. Nestas simulações verificamos um erro próximo a zero para a estrutura FIR, um erro em torno de  $9 \times 10^{-5}$  (-80dB) para IFIR com filtro pente e em torno de  $3 \times 10^{-5}$  (-90dB) para IFIR com interpolador linear. Considerando um erro médio quadrático inicial igual a aproximadamente  $1 \times 10^{-1}$  (-20dB), teremos, portanto, uma redução do erro para os sistemas com filtros IFIR analisados, conforme Tabela 5.1. Estes valores podem ser bastante razoáveis para algumas aplicações, como, por exemplo, o cancelamento de ecos [67]. Deve-se considerar aqui, no entanto, que os coeficientes não estão quantizados, o que tenderia a um valor diferente de erro, dependendo do nível de quantização [13]. No entanto, ainda em [13], é verificado que o efeito da quantização é mais acentuado no erro residual, quase não interferindo no processo de convergência.

Estrutura	Erro Residual [dB]
FIR convencional	-
IFIR com filtro pente	- 60
IFIR com interpolador linear	- 70

Tabela 5.1 Erros médios quadráticos residuais da adaptação, utilizando algoritmo "steepest descent", para as estruturas FIR convencional e IFIR em banda completa.

#### 5.4.2 Convergência do Algoritmo LMS

No Capítulo 2, Seção 2.3.3, foram determinados os limites e o melhor valor do coeficiente de convergência  $\mu$  para o algoritmo LMS, considerando um filtro adaptável transversal e sinal de entrada totalmente descorrelacionado (ruído branco). Esta mesma análise poderia se aplicar para um filtro adaptável IFIR onde, para efeito de simplificação, consideraríamos o sistema a identificar também como um filtro IFIR, como mostra a Fig. 5.9. No entanto, mesmo para IFIR com



interpolador tipo pente, cuja matriz de autocorrelação  $\tilde{\mathbf{R}}$  é diagonal, a análise não será válida, pois não podemos considerar  $U_k$  independente de  $U_{k+1}$ , já que o sinal  $u[k]$  não é totalmente decorrelacionado.

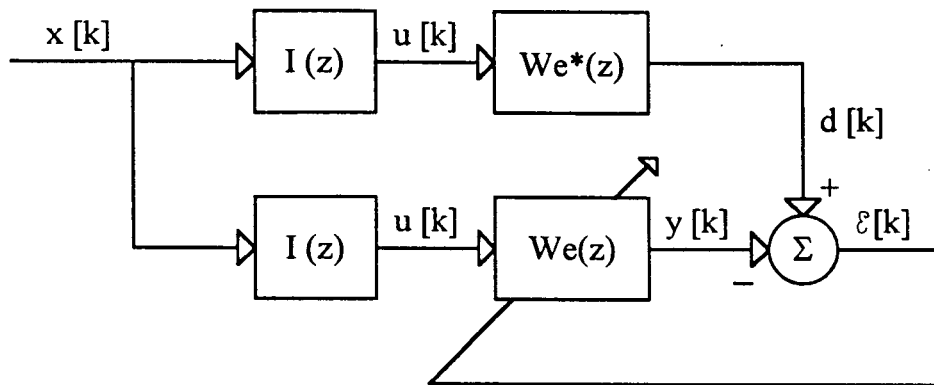


Fig. 5.9. Estrutura IFIR adaptável para análise dos limites de convergência para o algoritmo LMS.

Supondo, no entanto, que as expressões

$$0 < \mu < \frac{1}{N \cdot x_{\text{RMS}}^2} \quad \text{e} \quad \mu_{\text{ótimo}} = \frac{1}{2N \cdot x_{\text{RMS}}^2} \quad (5.31)$$

fossem válidas tanto para filtros FIR convencionais quanto para filtros IFIR (substituindo  $x_{\text{RMS}}^2$  por  $u_{\text{RMS}}^2$  para IFIR) e, considerando os mesmos exemplos apresentados nas simulações para "steepest descent", poderíamos definir teoricamente os limites e valores ótimos dos coeficientes de convergência, para o algoritmo LMS, como:

a) FIR ( $x_{\text{RMS}}^2 = 1$ ;  $N = 101$ ):

$$0 < \mu < 9.90 \times 10^{-3} \quad \text{e} \quad \mu_{\text{ótimo}} = 4.95 \times 10^{-3}.$$

b) IFIR com filtro pente ( $u_{\text{RMS}}^2 = 2$ ;  $N = 51$ ):

$$0 < \mu < 9.80 \times 10^{-3} \quad \text{e} \quad \mu_{\text{ótimo}} = 4.90 \times 10^{-3}.$$

c) IFIR com interpolador linear ( $u_{\text{RMS}}^2 = 1.5$ ;  $N = 51$ ):

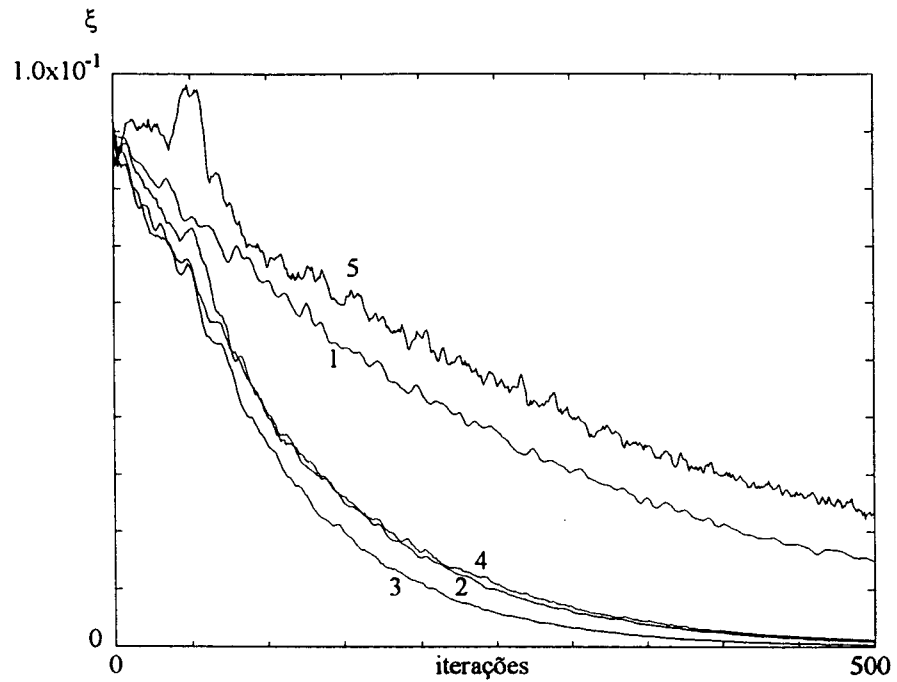
$$0 < \mu < 2.61 \times 10^{-3} \quad \text{e} \quad \mu_{\text{ótimo}} = 1.31 \times 10^{-2}.$$

As Fig. 5.10, 5.11 e 5.12, apresentam as simulações de convergência do algoritmo LMS, para diversos valores de  $\mu$ , para as três estruturas exemplificadas. A convergência, nesta análise, foi observada até a 500ª iteração e os valores de  $\xi$  para cada iteração foram obtidos a partir da média dos erros quadráticos de 5.000 processos de adaptação.

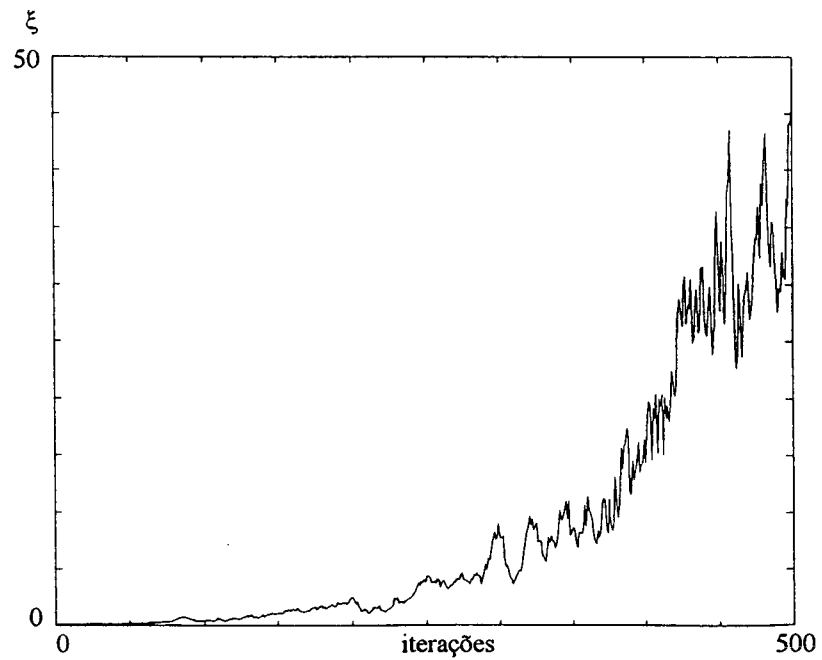
Através destas simulações, podemos determinar (considerando valores aproximados, pois a precisão da análise depende do número de processos realizados com valores diferentes de  $\mu$ ) os limites e valor ótimo do coeficiente de convergência para a estrutura FIR (entrada ruído branco) e para as estruturas IFIR, os quais são apresentados na Tabela 5.2. Observa-se que, para os filtros IFIR, os valores de  $\mu$  estão bastante distantes dos valores estimados através do equacionamento de (5.31). No entanto, este é rigorosamente correto para adaptação de filtros FIR. Para comparação do comportamento da adaptação das estruturas em questão, apresentamos na Fig. 5.13 a convergência dos sistemas, utilizando os melhores coeficientes de adaptação para cada estrutura.

Estrutura	limite superior de $\mu$	valor ótimo de $\mu$
FIR	$1.0 \times 10^{-2}$	$5.0 \times 10^{-3}$
IFIR - filtro pente	$6.0 \times 10^{-3}$	$3.0 \times 10^{-3}$
IFIR - interpolador linear	$8.0 \times 10^{-3}$	$4.0 \times 10^{-3}$

Tabela 5.2 Valores dos limites superiores e valores ótimos de  $\mu$ , para adaptação através do algoritmo LMS, para as estruturas FIR, IFIR com interpolador tipo filtro pente e IFIR com interpolador linear.

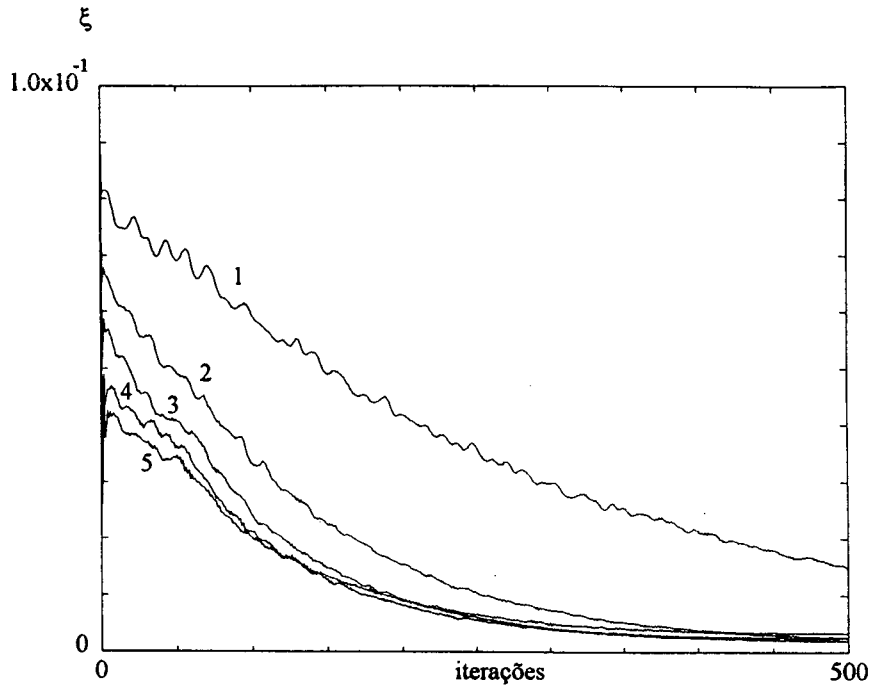


(a)

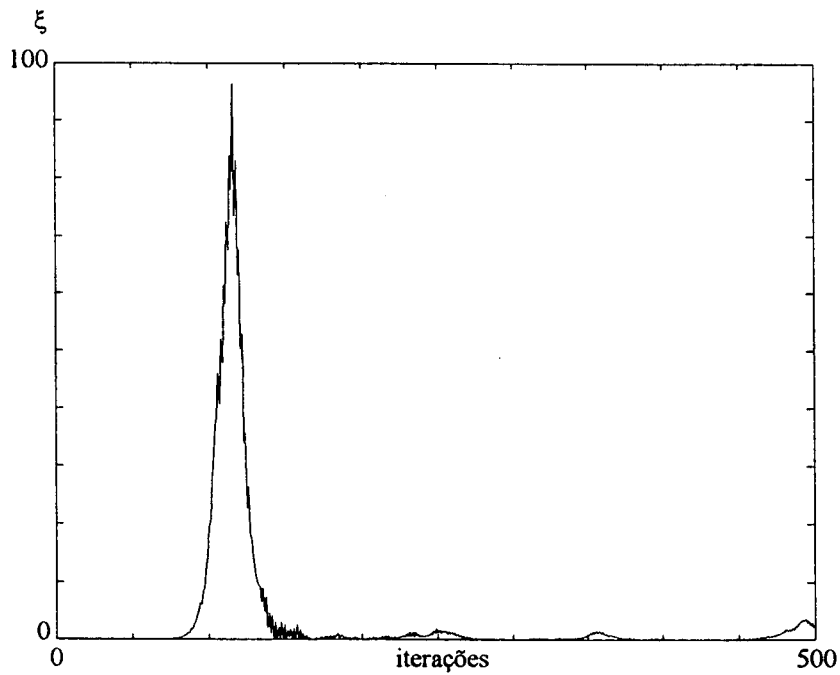


(b)

Fig. 5.10 Curvas de convergência do algoritmo LMS para estrutura FIR. (a) 1.  $\mu = 1.0 \times 10^{-3}$ , 2.  $\mu = 3.0 \times 10^{-3}$ , 3.  $\mu = 5.0 \times 10^{-3}$ , 4.  $\mu = 7.0 \times 10^{-3}$ , 5.  $\mu = 9.0 \times 10^{-3}$ . (b)  $\mu = 1.1 \times 10^{-2}$ .

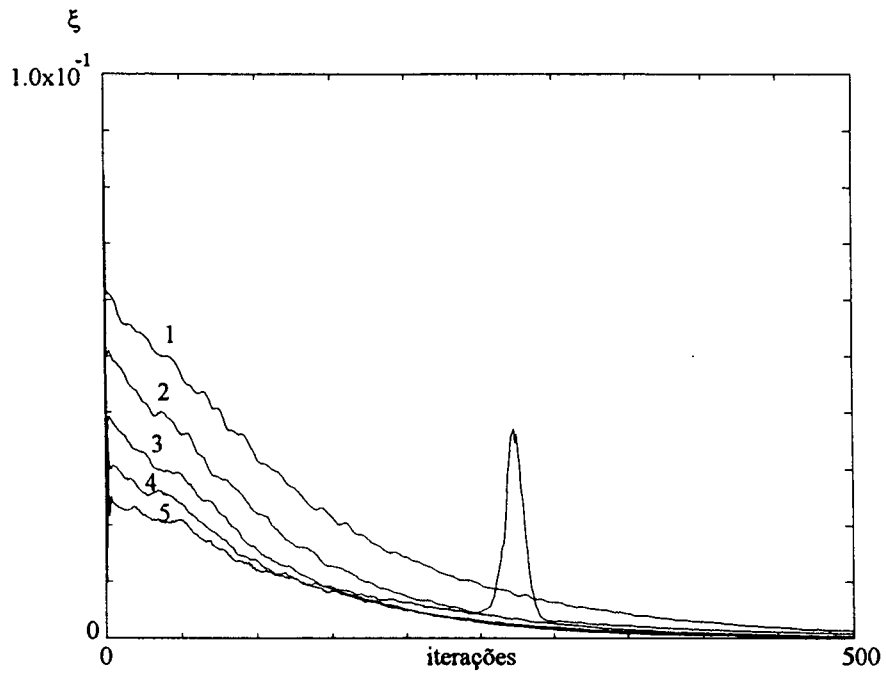


(a)

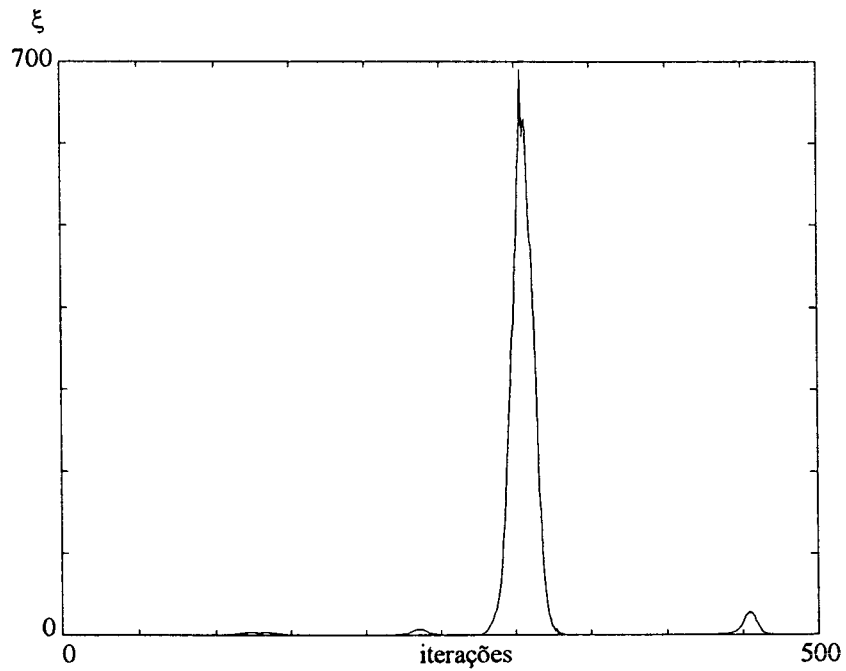


(b)

Fig. 5.11 Curvas de convergência para estrutura IFIR com filtro pente. (a) 1.  $\mu = 5.0 \times 10^{-2}$ , 2.  $\mu = 1.5 \times 10^{-1}$ , 3.  $\mu = 3.0 \times 10^{-1}$ , 4.  $\mu = 4.5 \times 10^{-1}$ , 5.  $\mu = 5.5 \times 10^{-1}$ . (b)  $\mu = 7.0 \times 10^{-1}$ .



(a)



(b)

Fig. 5.12 Curvas de convergência para estrutura IFIR com interpolador linear. (a) 1.  $\mu = 1.5 \times 10^{-3}$ , 2.  $\mu = 2.5 \times 10^{-3}$ , 3.  $\mu = 4.0 \times 10^{-3}$ , 4.  $\mu = 5.5 \times 10^{-3}$ , 5.  $\mu = 7.5 \times 10^{-3}$ . (b)  $\mu = 8.5 \times 10^{-3}$ .

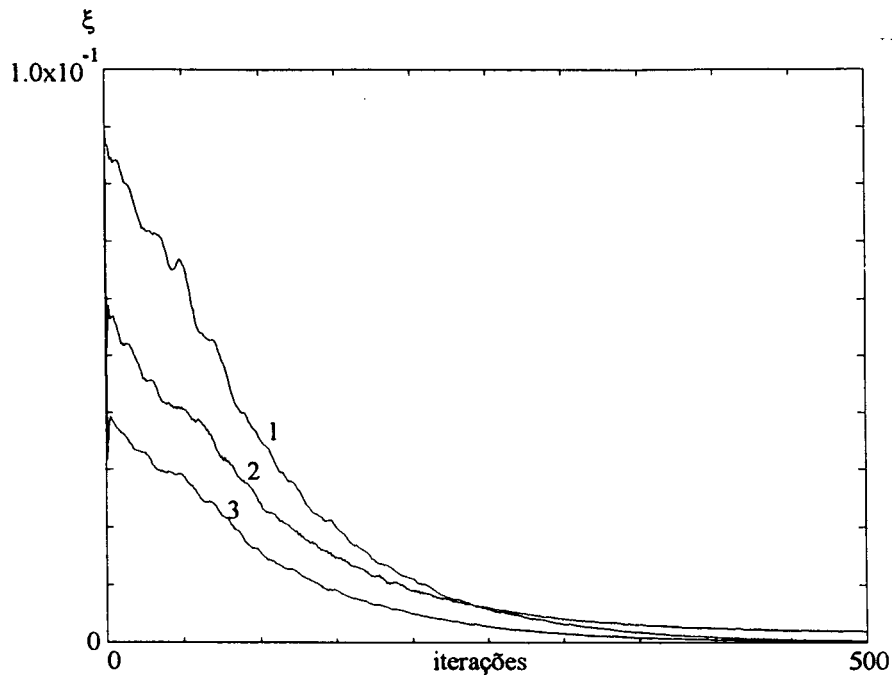


Fig. 5.13 Melhores desempenhos na convergência do algoritmo LMS para as estruturas em estudo. 1. FIR ( $\mu = 5.0 \times 10^{-3}$ ). 2. IFIR com filtro pente ( $\mu = 3.0 \times 10^{-3}$ ). 3. IFIR com interpolador linear ( $\mu = 4.0 \times 10^{-3}$ ).

Como na adaptação utilizando algoritmo "steepest descent", o erro médio quadrático mínimo, ou erro residual, é maior para o sistema com IFIR, sendo esta sua grande desvantagem, devido sua própria característica de interpolação. Para o LMS, os erros residuais (considerando erro inicial de aproximadamente -20dB) determinados para as estruturas FIR convencional, IFIR com filtro pente e IFIR com interpolador linear estão relacionados na Tabela 5.3. Estes valores foram obtidos para adaptação com o melhor  $\mu$  (Tabela 5.2), considerando convergência até a 1.000ª iteração, com mais 200 iterações sem adaptação para determinação do erro residual médio para cada processo. O processo foi repetido 5.000 vezes para obtenção da média dos erros quadráticos.

Uma característica bastante diferenciada observada nestas simulações, é a redução abrupta do erro médio quadrático, verificada na primeira iteração, para as estruturas com filtro IFIR, como se observa mais nitidamente na representação da Fig. 5.14.

Estrutura	Erro Residual [dB]
FIR	-150
IFIR com filtro pente	-38
IFIR com interpolador linear	-69

Tabela 5.3 Erros médios quadráticos residuais, utilizando algoritmo LMS, para a adaptação das estruturas FIR, IFIR com interpolador tipo filtro pente e IFIR com interpolador linear.

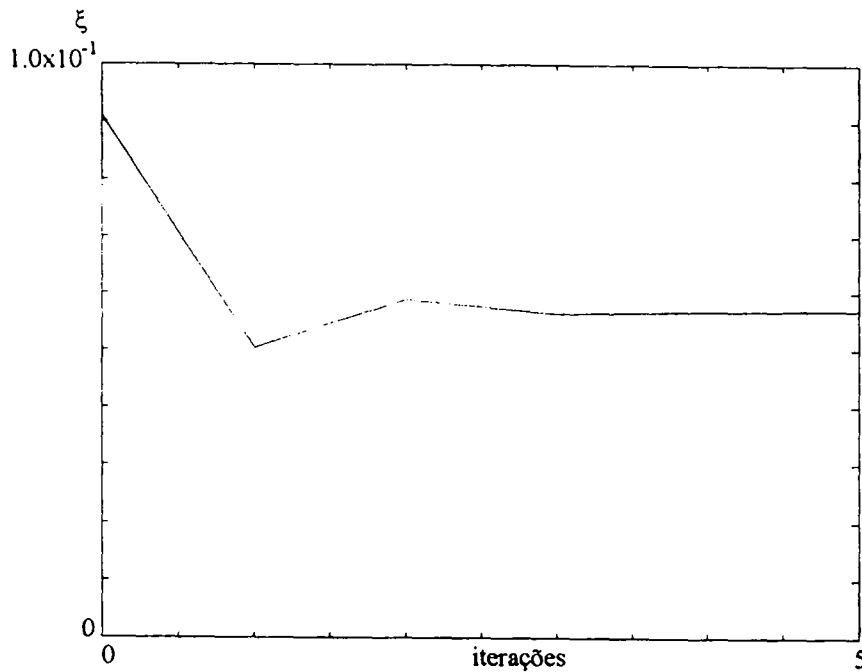


Fig. 5.14 Detalhe das primeiras iterações da curva de convergência do algoritmo LMS para a estrutura IFIR com filtro pente ( $\mu = 3.0 \times 10^{-3}$ ).

Para analisarmos esta característica devemos considerar que o sistema desconhecido do exemplo é do tipo passa-baixas. Desta forma, na adaptação dos filtros IFIR, os erros quadráticos iniciais tendem a ser menores do que os erros obtidos na estrutura com filtro FIR transversal, porque, por mais indefinida que esteja a resposta do filtro esparso, a resposta completa do filtro será passa-baixas devido ao interpolador.

Esta redução do erro, no entanto, não se verifica na iteração zero, pois este é independente do sistema adaptável (coeficientes inicialmente zero).

Esta característica, contribui para uma convergência mais rápida do filtro IFIR adaptável, como se pode observar na Fig. 5.13. Isto representa uma vantagem adicional deste sistema, que, além de proporcionar uma redução do custo computacional, com menor número de multiplicações no processamento da filtragem, ainda possui um número menor de coeficientes a adaptar (o que leva a uma convergência ainda mais rápida). Suas principais restrições, no entanto, são: a utilização em aplicações com banda limitada e o maior erro residual.

Na Tabela 5.4, apresentamos os números de multiplicações e somas na determinação de cada amostra de saída (processo de filtragem) e para cada atualização dos coeficientes (processo de adaptação), para as estruturas FIR convencional e IFIR com interpolador linear.

	Estrutura FIR convencional		Estrutura IFIR - Interp. Linear	
	multiplicações	somas	multiplicações	somas
Filtragem	100	99	53	51
Atualiz. coef.	101	101	51	51

Tabela 5.4 Número de operações referentes aos processos de filtragem e adaptação para as estruturas FIR convencional e IFIR com interpolador linear

### 5.5 Filtragem Adaptável IFIR em Processamento Multibanda: Tratamento Individual por Sub-banda

Como foi analisado no Capítulo 4, a estrutura de um filtro IFIR se assemelha ao processo de dizimação e interpolação utilizado no processamento em sub-banda. Comparando os dois sistemas, verificamos que ambas as formas implicam em aplicações com banda limitada de frequência e ambos proporcionam uma redução dos custos computacionais, sendo que o sistema



com filtragem IFIR utilizará um filtro esparso (número reduzido de coeficientes) e o sistema convencional (que utiliza o processo de dizimação) reduzirá a taxa de amostragem no processamento. Com tais características, se torna atrativa a realização de um estudo sobre a viabilidade de utilização do filtro IFIR em processamento multibanda. Neste tipo de processamento, as bandas de frequências em cada ramo da estrutura já são limitadas, por definição do próprio tipo de processamento, tornando este tipo de aplicação atrativo para a filtragem IFIR.

Assim, inicialmente, analisaremos o comportamento de um filtro IFIR aplicado à apenas uma sub-banda de frequência de uma estrutura multibanda. Compararemos este com uma estrutura com taxa de amostragem reduzida (utilizando dizimação e interpolação) correspondente à mesma sub-banda. Os dois sistemas serão, então, aplicados à uma estrutura adaptável de identificação de sistemas, conforme é apresentado nas Fig. 5.15<sup>1</sup> (taxa de amostragem reduzida) e 5.16 (IFIR), considerando adaptação independente por sub-banda, como apresentado no Capítulo 3 [19, 20].

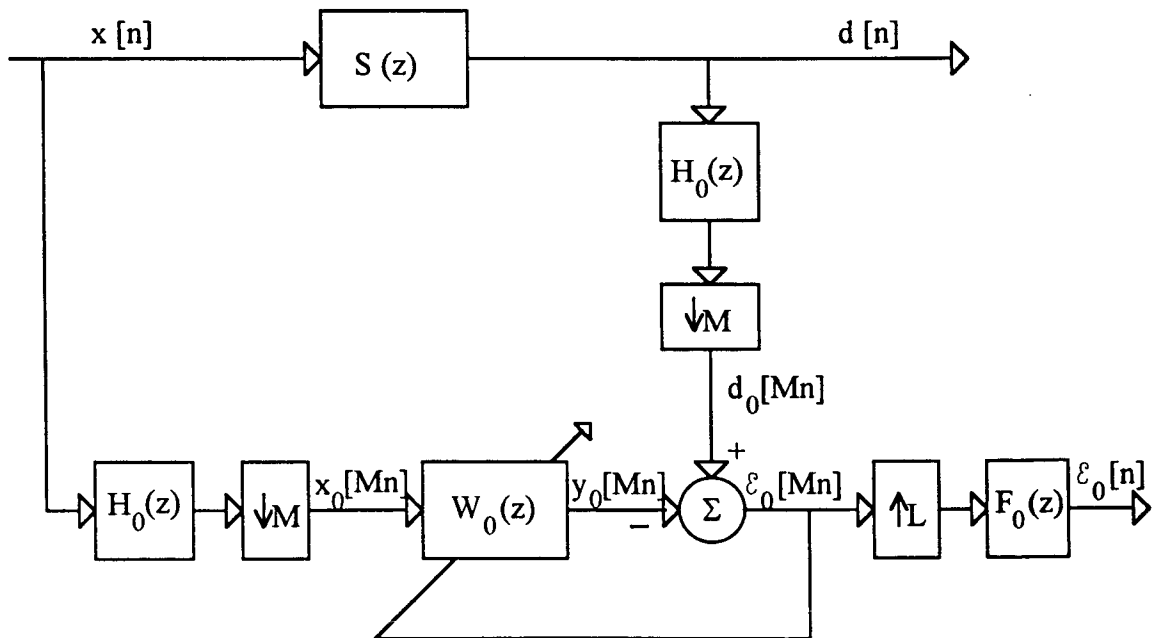


Fig. 5.15 Estrutura adaptável para identificação de sistemas, aplicado a apenas uma sub-banda de um sistema de processamento multibanda, com redução da taxa de amostragem.

<sup>1</sup> Nesta seção utilizaremos o índice  $n$  para representar uma amostra ou iteração, de forma a não confundir com o índice que representa a sub-banda.

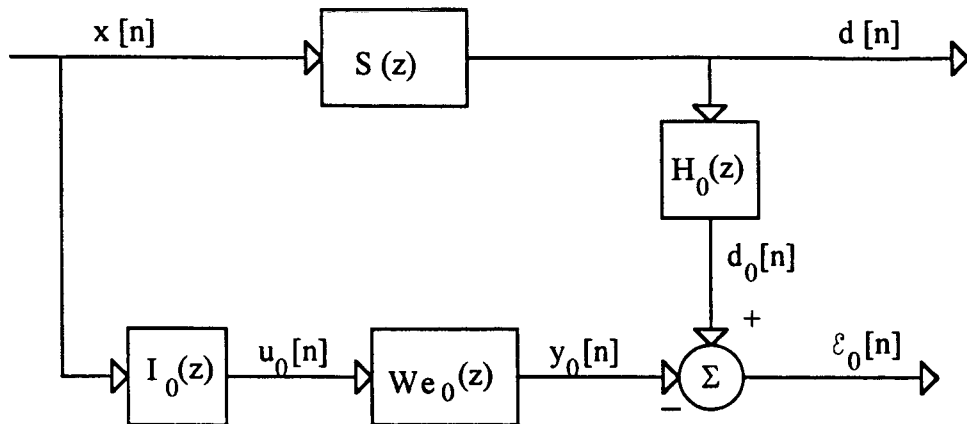


Fig. 5.16 Estrutura adaptável para identificação de sistemas, aplicado a apenas uma sub-banda de um sistema de processamento multibanda, utilizando filtragem IFIR.

A estrutura com filtragem IFIR, nesta configuração (Fig. 5.16), é idêntica aquela analisada neste capítulo para banda única de frequência, com exceção da representação do sistema a identificar que agora é formado por um sistema banda larga filtrado por um filtro seletivo.

Em uma avaliação prévia do comportamento destas duas estruturas, analisaremos um exemplo utilizando sistemas hipotéticos.

Na Fig. 5.17(a) é apresentada a resposta em frequência de um sistema desconhecido  $S(z)$  que será filtrado por um filtro passa-baixas  $H_0(z)$  (linha tracejada nesta figura), resultando numa sub-banda de baixas frequências (Fig. 5.17(b)).

A Fig. 5.18 se refere ao sistema com redução da taxa de amostragem, sendo a Fig. 5.18(a) a representação da resposta do sistema desconhecido, da sub-banda de baixas frequências, após o processo de dizimação por um fator  $M = 2$ . A Fig. 5.18(b) representa a resposta do filtro de dizimação do sistema adaptável, que normalmente é idêntica à do filtro de dizimação utilizado no sistema desconhecido ( $H_0(z)$ ), de forma a selecionar uma sub-banda com as mesmas características do sistema de referência. Na Fig. 5.18(c) é representada a mesma resposta, porém, após a dizimação. E, na Fig. 5.18(d), a resposta desejada do filtro adaptável  $W_0(z)$ , considerando a característica "all-pass" que foi obtida por  $H_0(z)$  após a dizimação (Fig. 5.18(c)). A Fig. 5.18(e) apresenta a resposta do sistema adaptado após a interpolação (inclusão de zeros), sendo a linha

tracejada o filtro de interpolação, e, finalmente, na Fig. 5.18(f), a resposta após a filtragem de interpolação (considerando o filtro interpolador idêntico ao filtro de dizimação, procedimento comum em bancos de filtros QMF).

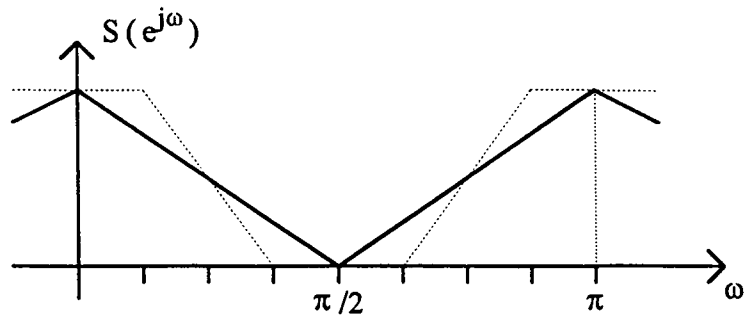
Na Fig. 5.19 verificamos as respostas referentes ao sistema IFIR. O interpolador, neste exemplo, será o mesmo filtro utilizado no sistema com taxa de amostragem reduzida<sup>1</sup>. A Fig. 5.19(a) mostra a resposta desejada do filtro esparsa ( $W_{e_0}(z)$ ) e, em linha tracejada, o filtro interpolador. Na Fig. 5.19(b), é apresentada a resposta final do filtro IFIR. Através deste exemplo, pode-se verificar as semelhanças existentes entre os dois processos.

A partir desta análise em frequência, podemos averiguar o comprimento mínimo dos filtros adaptáveis para os dois tipos de processamento.

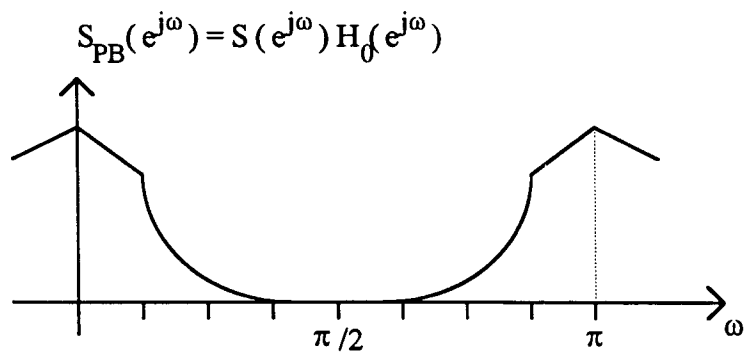
Representando a resposta ao impulso do sistema desconhecido, na sub-banda de baixas frequências, por um filtro transversal de comprimento  $N$ , das Fig. 5.18(b) e 5.18(d), verificamos que o filtro adaptável  $W_0(z)$ , na estrutura com redução da taxa de amostragem, poderá ser perfeitamente adaptado se seu comprimento for, pelo menos, igual a  $N/L$ , que é o comprimento de  $S_{PB}(z^2)$ . Quanto ao filtro adaptável IFIR, da Fig. 5.19(a), que mostra que a resposta do filtro  $W_e(z)$  deverá convergir para a resposta esparsa de  $S_{PB}(z^2)$ , concluímos que este filtro poderá ser adaptado corretamente se contiver  $N$  coeficientes, sendo  $N/L$  diferentes de zero. Portanto, o sistema utilizando os processos de dizimação e interpolação é vantajoso no que se refere a custo computacional pois, para processar o mesmo número de coeficientes, utiliza taxa de amostragem menor.

---

<sup>1</sup> Este procedimento é utilizado no exemplo apenas para efeito de comparação. O interpolador na filtragem IFIR não tem nenhuma relação de projeto com o filtro interpolador da estrutura multibanda convencional, que normalmente é projetado em conjunto com os outros filtros dos bancos de filtros, buscando a reconstrução perfeita. Na filtragem IFIR, o interpolador busca uma melhor interpolação das amostras do filtro esparsa.

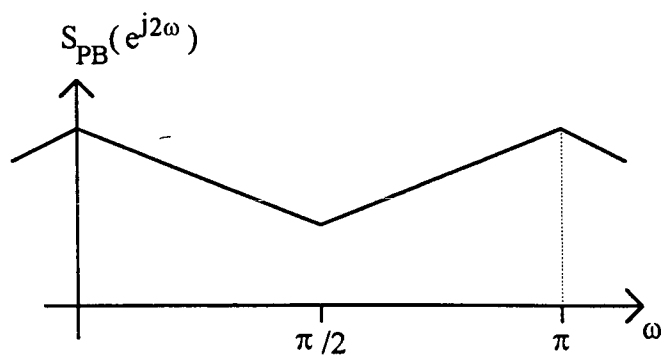


(a)

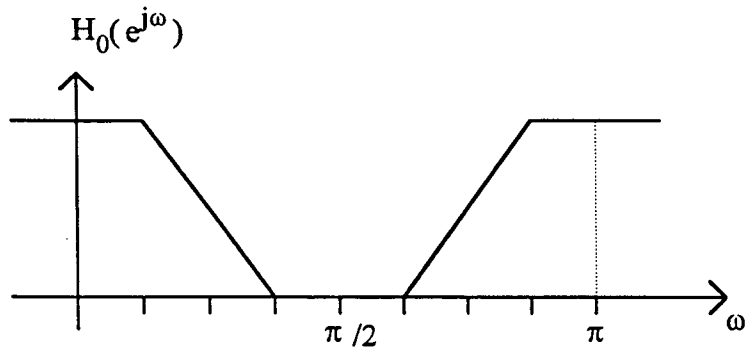


(b)

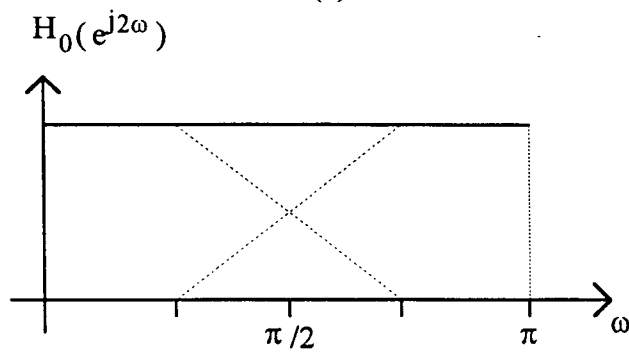
Fig. 5.17 Respostas em frequência referentes ao sistema desconhecido. (a) Sistema desconhecido global. (b) Banda de baixas frequências do sistema desconhecido, resposta final desejada.



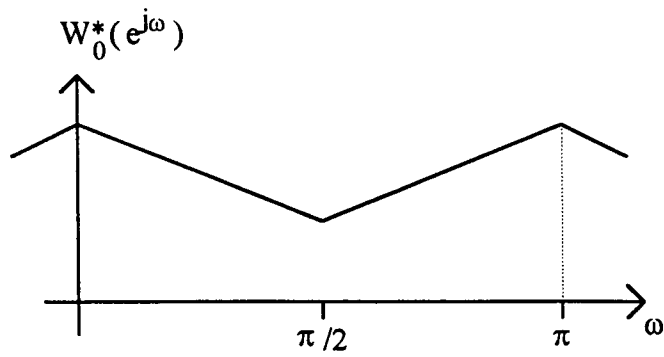
(a)



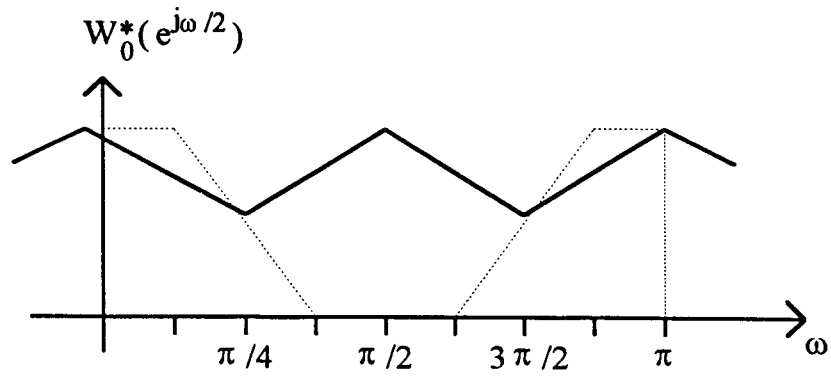
(b)



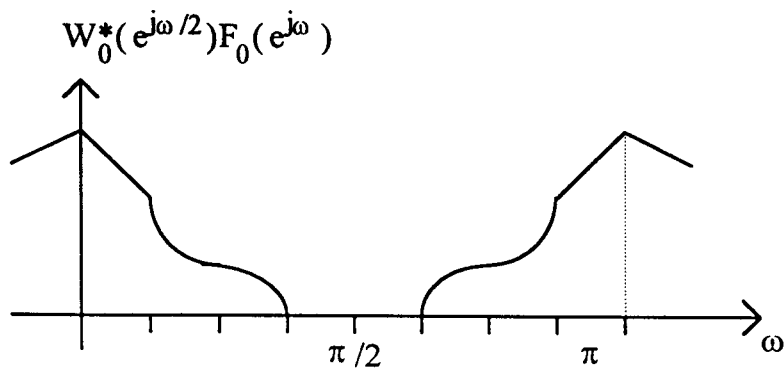
(c)



(d)

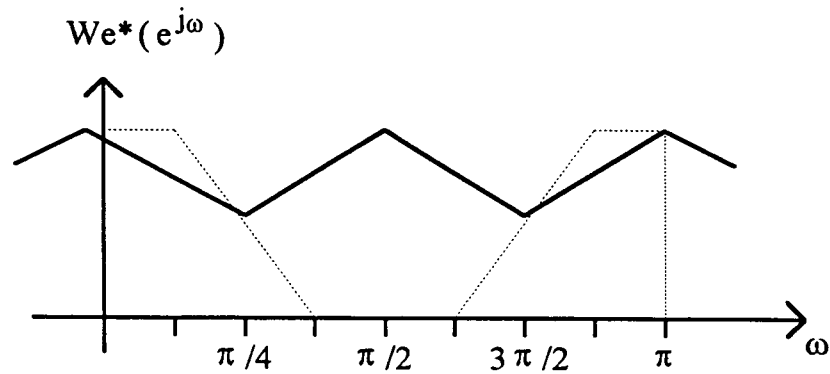


(e)

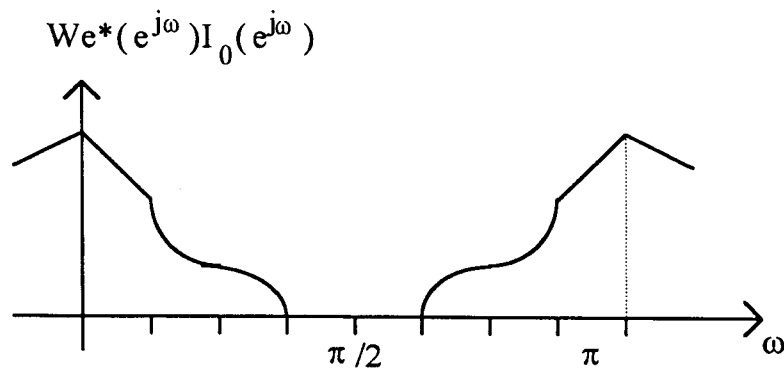


(f)

Fig. 5.18 Respostas em frequência referentes ao sistema adaptável utilizando dizimação e interpolação. (a) Banda de baixas frequências do sistema desconhecido após a dizimação. (b) Filtro de dizimação ou análise. (c) Filtro de análise após a dizimação. (d) Resposta desejada do filtro adaptável. (e) Filtro adaptável após a interpolação (inclusão de zeros) e filtro de interpolação (tracejado). (f) Resposta final.



(a)



(b)

Fig. 5.19 Respostas em frequência referentes ao sistema adaptável utilizando filtro IFIR. (a) Resposta desejada do filtro esparso adaptável e filtro interpolador (tracejado). (b) Resposta final.

Uma forma de reduzir a taxa de amostragem no processamento do filtro esparso (IFIR) é representá-lo de forma semelhante à decomposição polifásica (apresentada no Capítulo 3). Como o filtro esparso, a cada amostra, processa ora as amostras pares e ora as ímpares, podemos redesenhá-lo conforme Fig. 5.20. Nesta nova representação  $\tilde{W}e_0(z)$  será um filtro não esparso com  $N/L$  coeficientes, cujo sinal de entrada terá taxa de amostragem agora dividida por  $L$ . No entanto, teremos  $L$  filtros adaptáveis (com respostas ao impulso iguais).

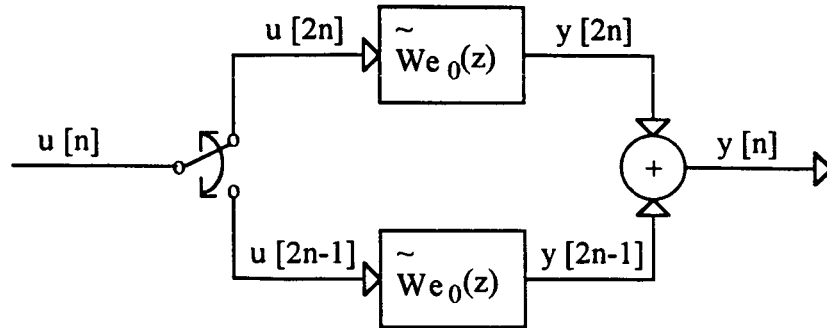


Fig. 5.20. Nova estrutura para representação do filtro esparsificado.

### 5.5.1 Análise de Simulações Para uma Única Sub-banda

O estudo comparativo realizado anteriormente relacionado a adaptação em uma única sub-banda para as estruturas IFIR e FIR com redução da taxa de amostragem, mostra um custo computacional menor deste último, devido à menor taxa de amostragem do sinal de entrada do sistema adaptável. No entanto, outros fatores contribuem na determinação de um melhor desempenho. Portanto, verificaremos, através de simulações, o comportamento destas estruturas na adaptação, de modo a observar suas características de convergência.

Para tornar esta verificação mais próxima da realidade, utilizamos como exemplo de sistema a identificar, a resposta ao impulso do *Canal de Eco* de um sistema de transmissão de dados via linha de assinante. Esta resposta, entre diversas outras, foi obtida experimentalmente, para estudos de técnicas de transmissão digital [68], no *Centro de Pesquisa e Desenvolvimento da TELEBRÁS (CPqD)*. A resposta adotada como exemplo se refere ao *Caso 4* (ANSI [69]), o qual consiste no eco local para uma linha de assinante comercial com 3 km de comprimento, bitola de 24 AWG e derivação a 2 km da origem com bitola de 22 AWG. A resposta ao impulso foi obtida a uma taxa de 80 kHz (80 kbaud com código de transmissão 2B1Q [70]), obtendo-se a resposta ao impulso representada na Fig. 5.21. Foram tomadas da resposta ao impulso original apenas as 32 primeiras amostras, as quais representam satisfatoriamente o sistema. A Fig. 5.22 apresenta a resposta em frequência correspondente.



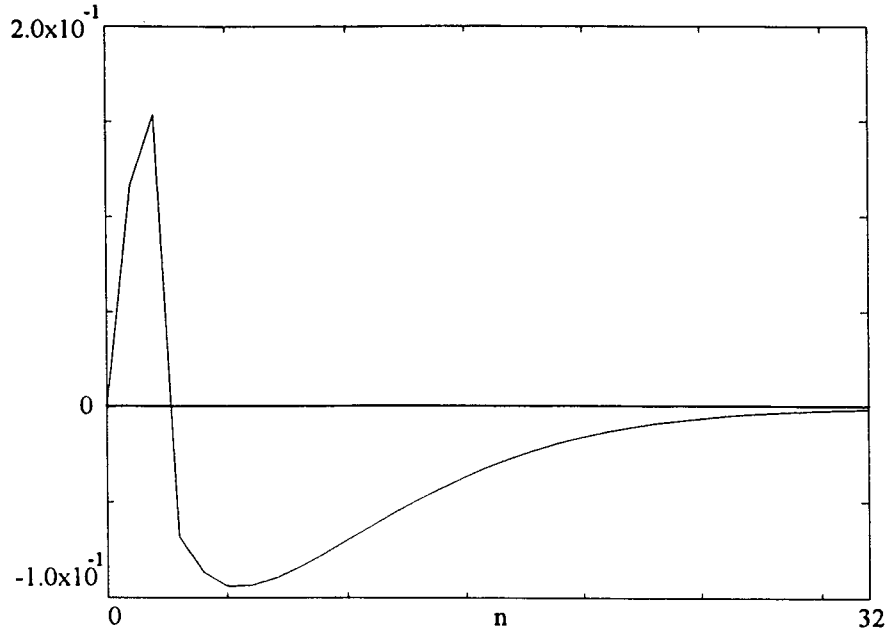


Fig. 5.21. Resposta ao impulso correspondente ao eco local para uma linha de assinante (caso 4 - ANSI).

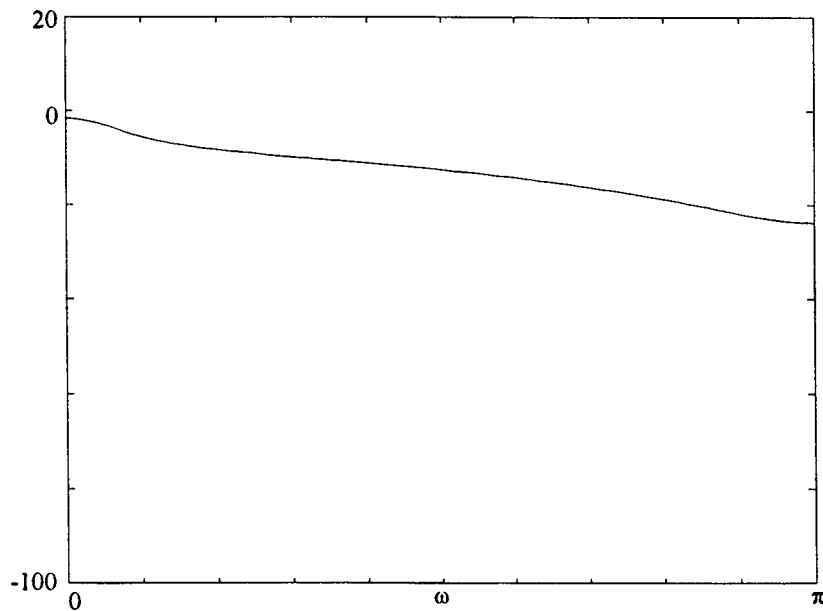


Fig. 5.22. Resposta em frequência correspondente à resposta ao impulso da Fig. 5.21.

Para a decomposição do sistema em sub-bandas, sendo utilizada apenas a banda de baixas frequências, foi utilizado um filtro passa-baixas com oito coeficientes (8A) definido por Johnston [29, 2] para bancos de filtros QMF, o qual é bastante utilizado em trabalhos desta área. Este tipo

de filtro se caracteriza por causar pouca interferência na banda de frequência original do sinal de entrada após a dizimação, como exemplificado na Fig. 5.18(c).

Analisando os resultados das simulações realizadas, verificamos, basicamente, que o processo de adaptação do sistema com redução da taxa de amostragem é menos eficaz do que a adaptação do sistema IFIR (que utilizou interpolação linear). Na Fig. 5.23 apresentamos as curvas de convergência dos dois sistemas, utilizando os melhores valores de  $\mu$  (verificados experimentalmente). Observa-se a convergência mais rápida e o menor erro residual para o sistema IFIR. As respostas ao impulso são apresentadas nas Fig. 5.24 e 5.25, onde são comparadas com as respectivas respostas desejadas. No caso da taxa de amostragem reduzida, o sistema tende a convergir para a resposta em baixas frequências, posteriormente dizimada, do sistema desconhecido, enquanto que, para a estrutura IFIR, o sistema convergirá para a resposta apenas filtrada. O erro médio quadrático para as duas adaptações estão apresentadas na Tabela 5.5.

Estrutura	Erro Residual [dB]
FIR com redução da taxa de amostragem	- 25
IFIR	- 40

Tabela 5.5 Erros médios quadráticos residuais, utilizando algoritmo LMS, para a adaptação das estruturas FIR com redução da taxa de amostragem e IFIR com interpolador linear em sub-banda.

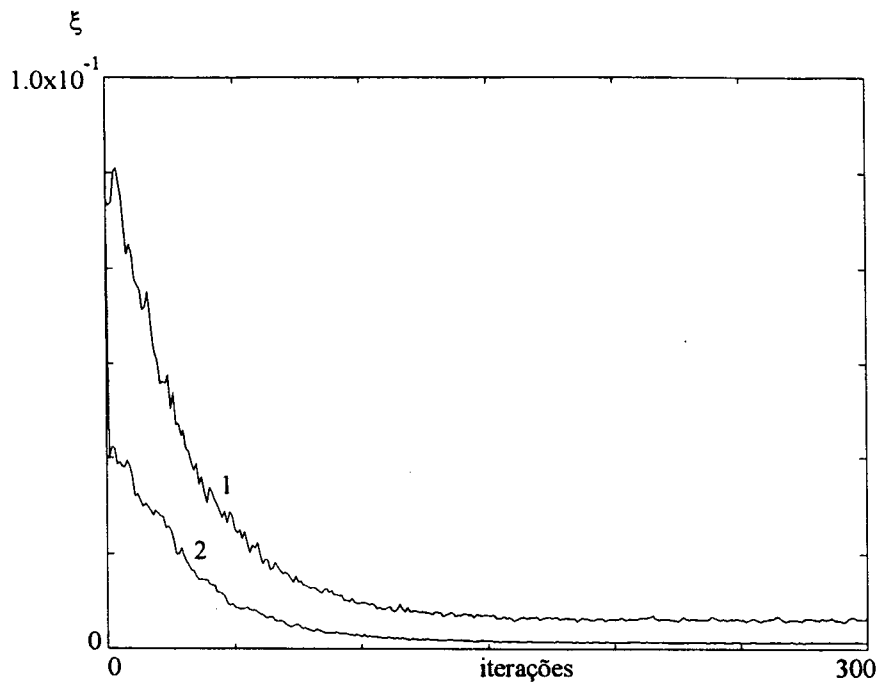


Fig. 5.23 Curvas de convergência para os sistemas adaptáveis em uma sub-banda. 1. Sistema com redução da taxa de amostragem ( $\mu = 2.0 \times 10^{-2}$ ). 2. IFIR ( $\mu = 1.5 \times 10^{-2}$ ).

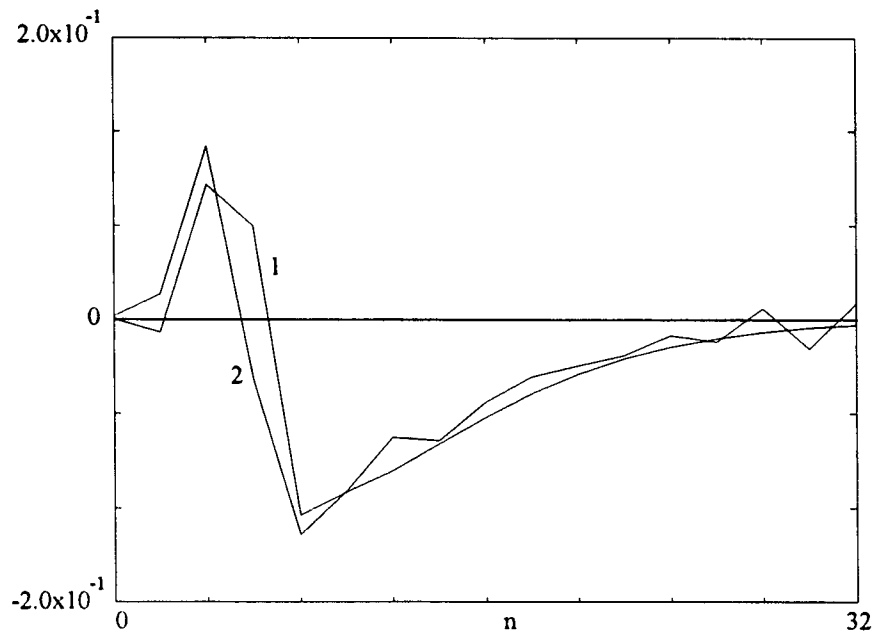


Fig. 5.24 Respostas ao impulso. 1. Do sistema desconhecido filtrado e dizimado. 2. Do sistema adaptado utilizando redução da taxa de amostragem.

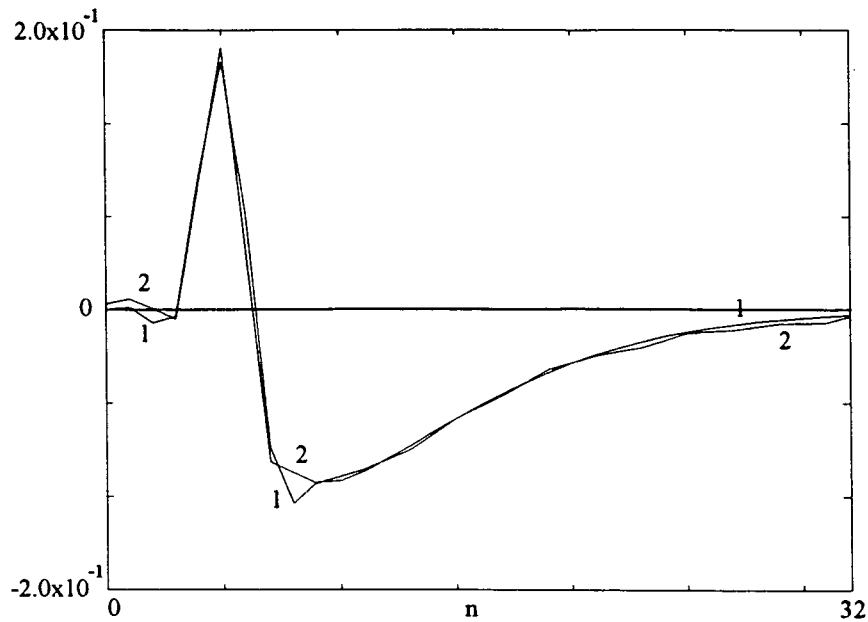


Fig. 5.25. Respostas ao impulso. 1. Do sistema desconhecido filtrado. 2. Do sistema adaptado IFIR.

### 5.6 Filtragem Adaptável IFIR em Processamento Multibanda: Tratamento Global do Sistema

No Capítulo 3, vimos que a reconstrução perfeita utilizando o processo convencional de processamento multibanda (com redução da taxa de amostragem) requer condições muito especiais, sendo de obtenção relativamente complexa. Verificamos ainda, na Seção 3.5, que a utilização desta estrutura em filtragem adaptável também deve atender a algumas condições, não sendo possível a convergência exata na adaptação individual de cada sub-banda. Por outro lado, se ao invés da decomposição convencional do sistema em sub-bandas, adotarmos uma forma semelhante à adotada na decomposição polifásica (Seção 3.3), podemos decompor o sistema naturalmente, evitando a interferência dos filtros dizimadores e interpoladores.

A decomposição proposta foi apresentada por Petraglia et al. em [71, 72] e aplicado para identificação de sistemas em [73].

Considerando a função de transferência de um filtro FIR transversal definida como

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} h[i]z^{-i} \quad (5.32)$$

de uma forma semelhante aquela utilizada na decomposição polifásica, podemos reescrevê-la como:

$$H(z) = (1 + z^{-1})G_0(z^2) + (1 - z^{-1})G_1(z^2) \quad (5.33)$$

onde

$$G_0(z^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N/2-1} (h[2i] + h[2i+1])z^{-2i} \quad (5.34)$$

e

$$G_1(z^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N/2-1} (h[2i] - h[2i+1])z^{-2i} \quad (5.35)$$

Pode-se representar esta decomposição conforme Fig. 5.26. Desta representação podemos verificar que o sistema é uma estrutura com dois ramos formados por filtros IFIR cujos interpoladores são do tipo pente, sendo um passa-baixas e o outro passa-altas. Estes ramos serão, portanto, sub-bandas de frequências.

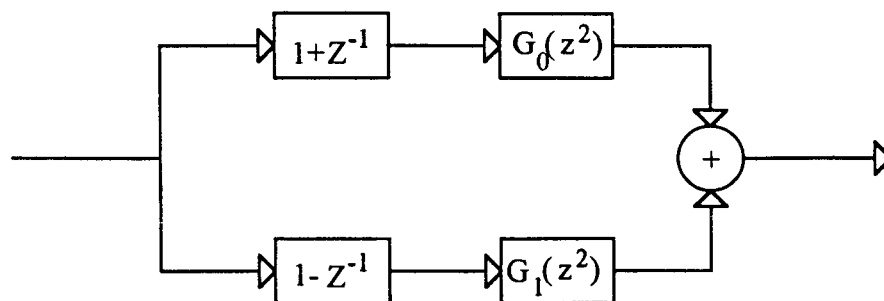


Fig. 5.26. Estrutura de um filtro decomposto em duas sub-bandas utilizando filtros IFIR.

Esta decomposição pode ser generalizada para um número maior de sub-bandas, onde cada sub-banda será um filtro do tipo IFIR, de forma que

$$H(z) = \begin{bmatrix} F_0(z) & F_1(z) & \dots & F_{L-1}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0(z^L) \\ G_1(z^L) \\ \dots \\ G_{L-1}(z^L) \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

sendo

$$G_j(z^L) = \sum_{i=0}^{N/L-1} g_j[i] z^{-Li} \quad (5.37)$$

O projeto dos interpoladores para os filtros IFIR, a partir da decomposição proposta, utiliza uma matriz de transformação  $T$ . Em [71, 72] foi adotada a *Transformação de Hadamard* [74], de forma que a função de transferência  $H(z)$  é expressa por

$$H(z) = \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} & \dots & z^{-(L-1)} \end{bmatrix} T^T \begin{bmatrix} G_0(z^L) \\ G_1(z^L) \\ \dots \\ G_{L-1}(z^L) \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

sendo

$$F_i(z) = \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} & \dots & z^{-(L-1)} \end{bmatrix} T_i \quad (5.39)$$

onde  $T_i$  é a  $i$ -ésima coluna de  $T$ . No caso de decomposição em duas sub-bandas, como apresentado anteriormente, a matriz de transformação  $T$  é

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Pode-se ainda representar o sistema da Fig. 5.26 como na Fig. 5.27, de forma a simplificar ainda mais a implementação computacional.

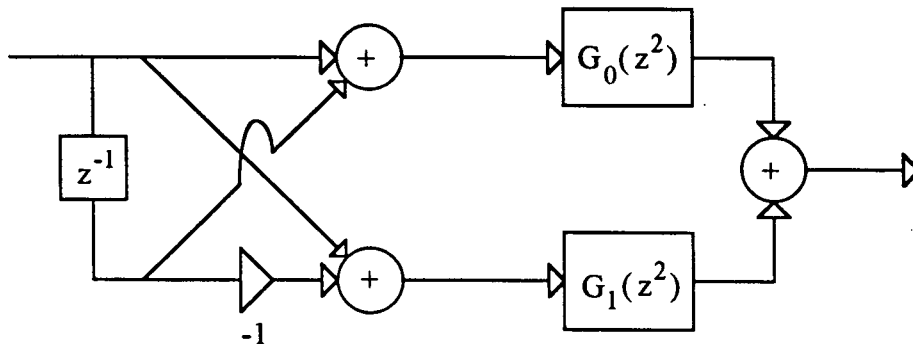


Fig. 5.27. Representação alternativa da estrutura da Fig. 5.26.

Uma propriedade importante da decomposição utilizando este tipo de transformação é ausência quase total de multiplicações nos interpoladores (há apenas inversões (-1)). Além da redução de custo computacional, esta característica apresenta a vantagem já verificada para interpoladores utilizando filtro pente, que é a não interferência na correlação das amostras do sinal de entrada, caso esta seja ruído branco. Além do mais, esta característica pode ser usada para decorrelacionar sinais de entrada tipo ruído colorido (amostras correlacionadas).

Uma restrição desta decomposição é a impossibilidade de sua utilização em sistemas onde é necessário o processamento individual por sub-bandas, de forma independente.

### 5.6.1 Resultados das Simulações para Sistema Multibanda Completo

Utilizando o mesmo exemplo de aplicação apresentado na Seção 5.6.1 (identificação de um sistema que representa o eco local de uma linha comercial de assinante), analisaremos, comparativamente, a adaptação de um sistema de duas sub-bandas, utilizando o processo de decomposição verificada nesta seção e de um sistema de banda completa com filtro FIR

convencional. Os interpoladores dos filtros IFIR da estrutura utilizando transformação T são do tipo pente, como se verifica no exemplo para dois ramos (5.33).

Considerando que o objetivo deste sistema decomposto em sub-bandas é representar um sistema convencional de aplicação em banda completa, utilizamos como erro para o algoritmo LMS, a diferença entre a saída do sistema desconhecido e a soma das saídas das sub-bandas, como se observa na Fig. 5.28<sup>1</sup>. Este procedimento, apesar da utilização incorreta do algoritmo LMS, devido a interferência de todas as sub-bandas na adaptação de cada filtro, proporciona um erro residual na saída total menor do que se utilizássemos erros individuais por sub-banda.

Na Fig. 5.29 são apresentadas as curvas de convergência para ambas as estruturas, onde pode-se verificar uma semelhança muito grande nas velocidades de convergência. Nesta comparação deve-se considerar que a vantagem do processamento multibanda em filtragem adaptável apresentada na Seção 3.3, aplicação e), não é perceptível devido à característica bastante plana do espectro de frequência do sistema a identificar aqui exemplificado. No entanto, determinando-se o erro médio quadrático residual, verificamos um erro menor para o sistema multibanda com relação à banda completa (Tabela 5.6). Esta diferença se deve aos interpoladores que, sendo fixos e projetados para permitir a reconstrução perfeita do sistema, contribuem para um resultado melhor.

Estrutura	Erro Residual [dB]
FIR convencional	- 63
Decomposto em filtros IFIR	- 100

Tabela 5.6 Erros médios quadráticos residuais, utilizando algoritmo LMS, para a adaptação das estruturas FIR convencional e decomposição em filtros IFIR

<sup>1</sup> Nesta seção utilizaremos o índice n para representar uma amostra ou iteração, de forma a não confundir com o índice que representa a sub-banda.



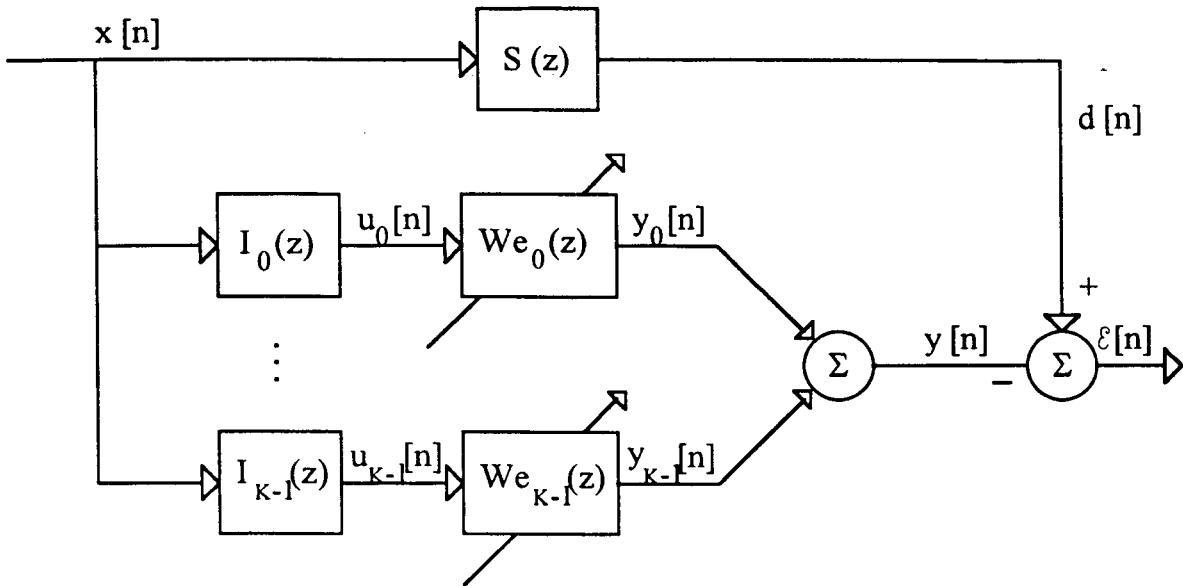


Fig. 5.28 Estrutura adaptável para sistema multibanda utilizando filtros IFIR com comparação das saídas após a soma das saídas das sub-bandas.

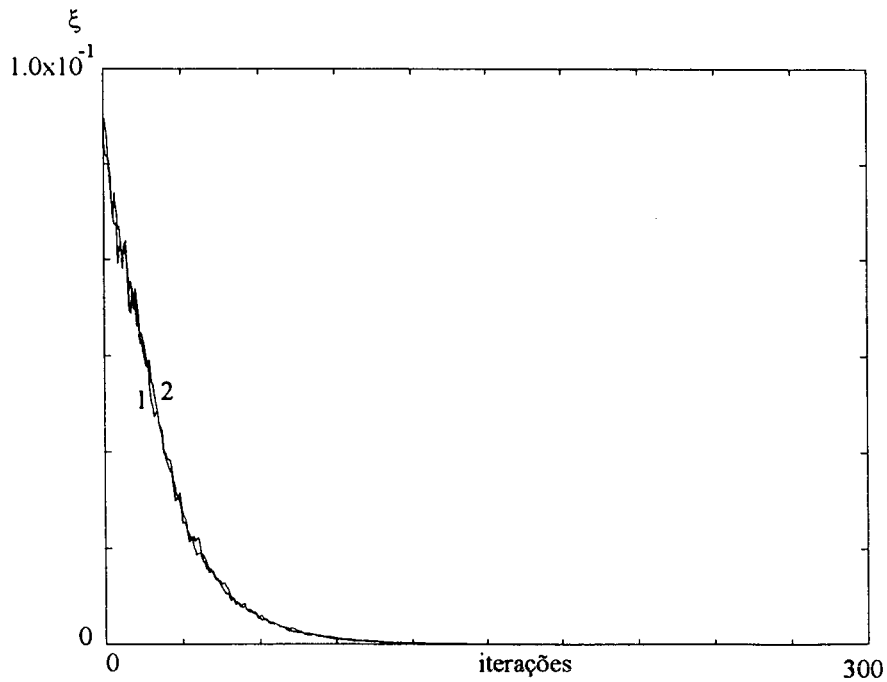


Fig. 5.29 Curvas de convergência para os sistemas adaptáveis banda completa. 1. Para FIR convencional. 2. Para decomposição em filtros IFIR.

Como já mencionamos, outra importante característica deste sistema multibanda é a possibilidade de redução do nível de correlação do sinal de entrada. Em [74] são apresentados resultados de simulações, para identificação de sistemas, utilizando um sinal de entrada com um certo nível de correlação. Verifica-se, comparando os resultados obtidos entre o sistema multibanda (com decomposição em estruturas IFIR) e o sistema FIR convencional, que o primeiro tem um desempenho superior no processo de convergência.

### 5.7 Considerações sobre a Adaptação do Filtro Esperso e do Interpolador Conjuntamente

Nas seções anteriores, estudamos a implementação do sistema adaptável IFIR com adaptação apenas do filtro esperso. Verificamos que seu comportamento é bastante semelhante ao do FIR convencional. Quando invertemos a ordem dos filtros esperso e interpolador, obtém-se vantagens importantes, como o menor tempo de processamento por iteração. Nesta Seção avaliaremos a possibilidade de implementação de um sistema IFIR adaptável cujos filtros esperso e interpolador são ambos adaptáveis. Um sistema adaptável IFIR com tais características é proposto por *Grosen* em [75].

Como analisamos na Seção 5.2.2, a determinação do algoritmo LMS para uma estrutura com dois filtros em cascata é matematicamente mais complexa. Nesta estrutura consideraremos o filtro adaptável como sendo o primeiro bloco (equação (5.9)) evitando a determinação matemática de  $X_k I$ . Desta forma, *Grosen* [75] propõe uma estrutura na qual as adaptações, utilizando o algoritmo LMS, são realizadas através das seguintes equações recursivas:

$$W e_{k+1} = W e_k + 2\mu_1 \varepsilon[k] U_k \quad (5.41)$$

e

$$I_{k+1} = I_k + 2\mu_2 \varepsilon[k] Q_k \quad (5.42)$$

onde  $U_k$  é o vetor das  $N$  amostras (para a iteração  $k$ ) da saída do interpolador cuja entrada é  $x[k]$  e  $Q_k$  é o vetor das  $M$  amostras da saída do filtro esparsos, também considerando  $x[k]$  na entrada. A estrutura que possibilita esta implementação é apresentada na Fig. 5.30.

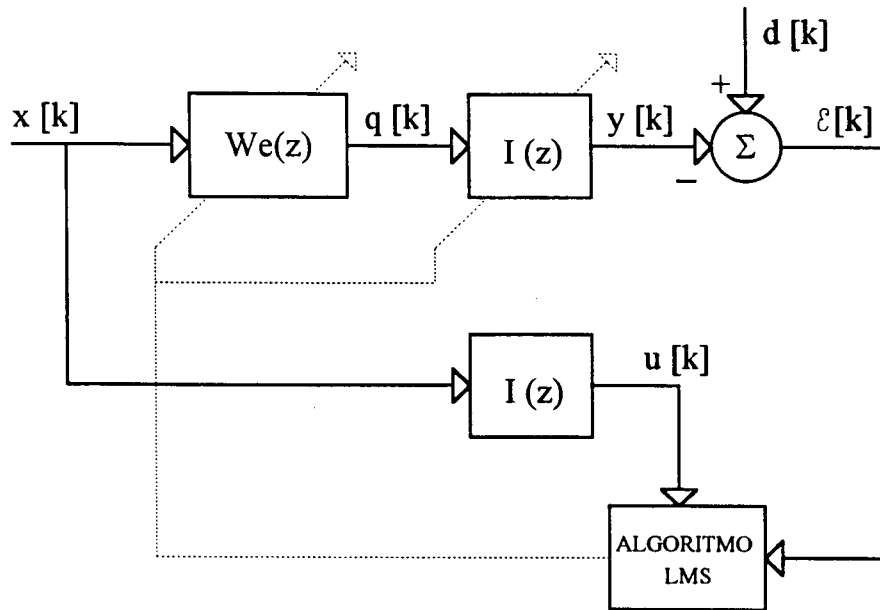


Fig. 5.30. Estrutura adaptável IFIR com o filtro esparsos e interpolador adaptáveis

Um problema a ser solucionado no desenvolvimento deste algoritmo é a inicialização do processo. Como ambos os filtros têm coeficientes inicialmente zero, tanto  $u[k]$  quanto  $q[k]$  são zero, portanto,  $We_{k+1} = We_k$  e  $I_{k+1} = I_k$ , não havendo adaptação. Para solucionar este problema, poder-se-ia iniciar os filtros com valores diferentes de zero. No entanto, uma escolha ruim poderia acarretar uma adaptação lenta ou até mesmo a divergência. Assim, de forma a possibilitar o início da adaptação sem correr o risco de divergência, em [75] é proposta uma estrutura de inicialização da adaptação, como é mostrado na Fig. 5.31. Nesta estrutura, os filtros adaptáveis são atualizados independentemente, utilizando o sinal  $x[k]$  como entrada, da seguinte forma:

$$We_{k+1} = We_k + 2\mu_1 \varepsilon[k] X_k \quad (5.43)$$

e

$$I_{k+1} = I_k + 2\mu_2 \varepsilon[k] X_k \quad (5.44)$$

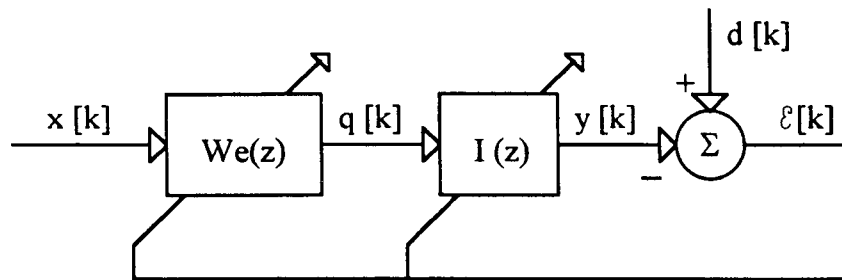


Fig. 5.31. Configuração utilizada para adaptação das primeiras iterações.

A adaptação realizada nesta configuração não seguirá o caminho do gradiente corretamente, no entanto, tenderá a uma certa minimização do erro médio quadrático, de forma que, ao se passar para a configuração correta (Fig. 5.30), já se inicia de um erro menor, podendo agora seguir corretamente a direção do gradiente.

Pela análise realizada, pode-se verificar de imediato algumas das dificuldades de implementação desta forma de adaptação a saber: a inclusão de um bloco extra para a determinação de uma das saídas intermediárias; o chaveamento de uma forma para a outra no processo de adaptação; e a estimativa incorreta do gradiente no processo inicial, produzindo uma convergência mais lenta. A principal dificuldade apresentada por este sistema, no entanto, é a não estacionaridade dos sinais de entrada no processo principal de adaptação. Considerando que os dois filtros estão sendo atualizados conjuntamente, o valor esperado do sinal de saída de cada um deles será diferente a cada iteração, desta forma, o algoritmo LMS será prejudicado, já que a superfície de desempenho estará sendo alterada a cada iteração. Dimensinando-se o algoritmo corretamente, escolhendo-se um coeficiente de adaptação que seja válido para todo o processo de adaptação, este tenderá a convergir, porém, de forma mais lenta do que o FIR convencional [57].

Para aplicações específicas, porém, como em *Cancelamento de Interferências*, onde a banda de frequência em que o filtro adaptável deve atuar não é conhecida, acaba se tornando indispensável a adaptação também do interpolador, já que sua resposta em frequência não pode ser prevista. Um exemplo de cancelamento de interferências com filtragem IFIR é apresentado em [57]. Neste trabalho é implementado um *Reforçador de Linha Adaptável* (Adaptive Line Enhancer - ALE), sistema de cancelamento de interferências para sinais sinusoidais cujo nível é muito baixo com relação ao ruído [5]. É mostrado em [57] que o desempenho de velocidade de convergência do sistema utilizando IFIR (adaptando-se tanto o filtro esparso quanto o filtro interpolador) é inferior ao do FIR convencional. No entanto, devido à sua grande redução do número de multiplicações (fatores de interpolação iguais a 4 e 5), esta estrutura se torna muito atraente para a aplicação em questão.

## 5.8 Conclusões

Neste capítulo foi realizado um estudo sobre a aplicação de uma estrutura IFIR em filtragem adaptável onde ficou constatado que este sistema pode ser implementado sem qualquer aumento na complexidade matemática nem alterações no algoritmo de adaptação. Através de simulações, pôde-se avaliar com maior precisão o comportamento desta estrutura.

Uma das maiores preocupações com relação a esta aplicação era a dispersão dos auto-valores da matriz de autocorrelação de entrada verificada com a introdução do interpolador no sistema. Na Seção 5.4, verificamos, no entanto, que interpoladores do tipo de Lagrange, por exemplo, que causam dispersão não maior que 2 aos auto-valores da matriz de autocorrelação  $\tilde{\mathbf{R}}$ , não interferem na convergência do filtro esparso adaptável.

Destacam-se ainda, das simulações realizadas, a comprovação dos estudos referentes às características do erro médio quadrático, principalmente com relação à superfície de desempenho e às condições de convergência. Isto é verificado através do desempenho, nas simulações com algoritmo "steepest descent", exatamente como previsto, principalmente com referência ao coeficiente de convergência  $\mu$ .

Quanto à adaptação do sistema via algoritmo LMS, verificamos um desempenho satisfatório dos sistemas com filtros IFIR, onde pode-se observar uma maior velocidade de convergência, apesar do erro residual maior, que é um dos problemas inerente às estruturas IFIR. No entanto, filtros IFIR com interpoladores de maior ordem (como o linear frente ao filtro pente) conseguem melhor aproximação ao sistema desconhecido (na identificação de sistemas) sem prejuízo no tempo de adaptação.

Em multibanda, analisando o comportamento dos sistemas em uma única sub-banda de forma independente, constata-se que, construtivamente a estrutura convencional, que utiliza filtragem FIR transversal com redução da taxa de amostragem, ainda representa menor custo computacional do que a estrutura IFIR<sup>1</sup>. No entanto, diferente do que se constatou com relação à aplicação em banda completa, verificamos que a estrutura IFIR se mostra mais eficiente no processo de adaptação, com maior velocidade de convergência e menor erro residual. Os motivos do desempenho menos satisfatórios apresentado pela estrutura convencional são discutidos em [54, 55] e mencionados na Seção 3.6.

Na Seção 5.6 foi apresentada uma proposta alternativa de estrutura para filtro do tipo FIR, decompondo-se sua estrutura em sub-bandas de frequência, onde o processamento é realizado por filtros IFIR. Esta estrutura se destaca por apresentar melhor desempenho em sistemas adaptáveis, comparando-se com uma estrutura FIR convencional de banda-completa, permitindo a obtenção de um menor erro médio residual. Outra vantagem é a dispersão dos auto-valores da matriz de autocorrelação de entrada, o que proporciona uma velocidade maior de convergência para sistemas com sinais com algum nível de correlação entre suas amostras [74].

---

<sup>1</sup> No entanto, este custo está diretamente relacionado à ordem dos filtros de dizimação e interpolação.

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES

#### 6.1 Conclusões

Considerando a grande importância dos sistemas de processamento de sinais nas mais diversas áreas de atuação do homem e a necessidade constante de seu desenvolvimento para ampliação de possíveis aplicações, procuramos, nesta dissertação, apresentar um estudo de alguns tópicos que classificamos entre os mais importantes e atuais da área em questão. Desta forma, iniciamos este trabalho apresentando a filtragem adaptável, desde seus conceitos básicos à definição dos algoritmos de adaptação. Em seguida abordamos o processamento multibanda de sinais, introduzindo também sua aplicação em sistemas que necessitam adaptação. A partir desta teoria, abordamos os filtros IFIR e as técnicas para implementação de interpoladores.

Ainda neste trabalho, desenvolvemos estudos acerca da implementação de um sistema adaptável utilizando filtragem IFIR. Nesta análise, verificamos o comportamento desta estrutura com relação à superfície de desempenho de um sistema adaptável e sua implementação através dos algoritmos "steepest descent" (que utiliza o gradiente do erro médio quadrático na convergência) e LMS (baseado na estimação do gradiente). Propusemos uma estrutura alternativa de filtro IFIR, onde é trocada a ordem dos filtros esparso e interpolador, de forma a tornar a execução do algoritmo menos complexa. Comparando seu desempenho ao da estrutura convencional com filtro FIR transversal, verificamos sua perfeita viabilidade, aliada a uma velocidade maior de treinamento e de processamento, devido ao menor número de operações necessárias.

Analisamos também a possível influência da filtragem aplicada ao sinal de entrada pelo interpolador (na estrutura IFIR), causando um certo nível de correlação entre suas amostras. Considerando os métodos convencionais de interpolação, foi constatado que esta correlação praticamente não interfere no processo de convergência, podendo até ser benéfica em aplicações

que utilizam ruído colorido (sinal correlacionado), principalmente quando é utilizado o interpolador do tipo filtro pente.

Nas simulações computacionais, confirmamos o bom desempenho da nova estrutura, com resultados importantes quanto à convergência, onde, com erro inicial menor, consegue-se adaptação mais rápida. Porém, esta estrutura se mostrou menos eficiente quanto ao erro residual, problema inerente à filtragem IFIR.

Verificamos ainda o comportamento desta estrutura em processamento em sub-bandas de frequência, comparando com o conhecido método de decomposição com redução da taxa de amostragem. Observou-se um desempenho bastante superior desta nova estrutura, principalmente devido às próprias deficiências do sistema com dizimação e interpolação na adaptação isolada de uma sub-banda.

Foi apresentada, também, uma estrutura alternativa para filtragem FIR, onde o sistema é decomposto em sub-bandas de frequência, sendo cada banda representada por um filtro IFIR. Esta estrutura apresentou bom desempenho, com melhor erro residual do que a estrutura convencional e melhor performance quando o sinal de entrada é ruído colorido.

Foram apresentadas ainda considerações sobre a adaptação conjunta dos filtros esparso e interpolador em uma estrutura IFIR. Verificamos aqui uma convergência mais lenta do que nas estruturas FIR transversais, podendo, no entanto, ser utilizada em aplicações com banda de frequência desconhecida, com alto fator de interpolação.

## **6.2 Sugestões para Trabalhos Futuros**

Podemos destacar como temas para investigações futuras, os seguintes pontos:

- 1) Estudar, de forma mais aprofundada, a teoria de processamento multibanda de sinais e sua aplicação em trabalho nas áreas de tratamento de voz e de imagem.
- 2) Verificar a viabilidade de técnicas semelhantes à filtragem IFIR adaptável nestas mesmas áreas.
- 3) Avaliar o comportamento da estrutura IFIR adaptável considerando os efeitos da quantização dos sinais e coeficientes do filtro.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Leonard, M., "ISSSC Signal-Processing Circuits", *Electronic Design*, February 1990, pp. 101-108.
- [2] Crochiere, R. E., Rabiner, L. R., *Multirate Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1983.
- [3] Oppenheim, A. V., Schaffer, R. W., *Discret-Time Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1989.
- [4] Neuvo, Y., Cheng-Yu, D., Mitra, S. K., "Interpolated Finite Impulse Response Filters", *IEEE Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. ASSP-32, n<sup>o</sup>.3, June 1984, pp. 563-570.
- [5] Widrow, B., Stearns, S. D., *Adaptive Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1985.
- [6] Haykin, S., *Introduction to Adaptive Filters*, Macmillan, New York, N. Y., 1984.
- [7] Fan, H., Jenkins, W. K., "A New Adaptive IIR Filter", *IEEE Circuits and Systems*, vol. CAS-33, n<sup>o</sup>. 10, October 1986, pp. 939-947.
- [8] Shynk, J. J., "Adaptive IIR Filtering", *IEEE ASSP Magazine*, April 1989, pp. 4-21.
- [9] Shynk, J. J., "Adaptive IIR Filtering Using Parallel-Form Realizations", *IEEE Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 37, n<sup>o</sup>. 4, April 1989, pp. 519-533.

- [10]Nayeri, M., Jenkins, W. K., "Alternate Realizations to Adaptive IIR Filters and Properties of Their Performance Surfaces", *IEEE Circuits and Systems*, vol. 36, nº. 4, April 1989, pp. 485-496.
- [11]Baú, N., "Estrutura Mista FIR-IIR Adaptável para Identificação em Tempo Real de Sistemas com Resposta ao Impulso de Longa Duração", *Dissertação de Mestrado*, UFSC, Florianópolis, SC, Dezembro 1991.
- [12]Davenport, W. B., Jr., *Probability and Random Processes: An Introduction for Applied Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, New York, N. Y., 1970.
- [13]Carpes Jr., W. P., "Estudo dos Efeitos da Quantização no Algoritmo LMS em Filtros Digitais Adaptáveis com Aplicação em Cancelamento de Ecos", *Dissertação de Mestrado*, UFSC, Florianópolis, SC, Novembro 1992.
- [14]Crochiere, R. E., Rabiner, L. R., "Interpolation and Decimation of Digital Signals - A Tutorial Review", *Proceedings of the IEEE*, Vol. 69, nº. 3, March 1981, pp.300-331.
- [15]Vaidyanathan, P. P., "Multirate Digital Filters, Filter Banks, Polyphase Networks, and Applications: A Tutorial", *Proceedings of the IEEE*, vol. 78. nº. 1, January 1990, pp. 56-93.
- [16]Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., *Signal and Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1983.
- [17]Oppenheim, A. V., Schaffer, R. W., *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1975.

- [18] Vaidyanathan, P. P., "Design and Implementation of Digital FIR Filters", in *Handbook on Digital Signal Processing*, D.F. Elliott, Ed. New York: Academic, 1987, pp. 55-172.
- [19] Gilloire, A., "Experiments with Sub-Band Acoustic Echo Cancellers for Teleconferencing", *IEEE ICASSP'87*, 1987, pp.2141-2144.
- [20] Petraglia, M. R., Mitra, S. K., "Performance Analysis of Adaptive Filter Structures Based on Subband Decomposition", *IEEE ISCAS'93*, Chicago, Illinois, May 1993, pp. 60-63.
- [21] Kellermann, W., "Analysis and Design of Multirate Systems for Cancellation of Acoustical Echoes", *IEEE ICASSP'88*, 1988, pp. 2570-2573.
- [22] Bellanger, M. G., Bonnerot, G., Coudreuse, M., "Digital Filtering by Polyphase Network: Applications to Sample-Rate Alteration and Filter Banks", *IEEE Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. ASSP-24, n<sup>o</sup>. 2, 1976, pp. 109-114.
- [23] Vaidyanathan, P. P., "Quadrature Mirror Filter Banks, M-Band Extensions and Perfect-Reconstruction Techniques", *IEEE Acoustics, Speech, and Signal Processing Magazine*, vol. ASSP Magazine, July 1987, pp. 4-20.
- [24] Vetterli, M., "A Theory of Multirate Filter Banks", *IEEE Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. ASSP-35, n<sup>o</sup>. 3, March 1987, pp. 356-372.
- [25] Nguyen, T. Q., Vaidyanathan, P. P., "Two-Channel Perfect-Reconstruction FIR QMF Structures Which Yield Linear-Phase Analysis and Synthesis Filters", *IEEE Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 37, n<sup>o</sup>. 5, May 1989, pp. 676-690.

- [26] Vetterli, M., Le Gall, D., "Perfect Reconstruction FIR Filter Banks: Some Properties and Factorizations", *IEEE Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 37, n<sup>o</sup>. 7, July 1989, pp. 1057-1071.
- [27] Rabiner, L. R. , Schafer, R. W., *Digital Processing of Speech Signals*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1978.
- [28] Satt, A., Malah, D., "Design of Uniform DFT Filter Banks Optimized for Subband Coding of Speech", *IEEE Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 37, n<sup>o</sup>. 11, November 1989, pp. 1672-1679.
- [29] Johnston, J. D., "A Filter Family Designed for Use in Quadrature Mirror Filter Banks", *Proc. 1980 IEEE International Conf. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, April 1980, pp. 291-294.
- [30] Hooke, R., Jeaves, T., "Direct Search Solution of Numerical and Statistical Problems", *J. Ass. Comp. Mach.*, vol. 8, April 1961, pp. 212-229.
- [31] McClellan, J. H., Parks, T. W., Rabiner, L. R., "A Computer Program for Designing Linear Phase FIR Filters", *IEEE Audio Electroacoustics*, vol. AU-21, December 1973, pp. 506-526.
- [32] Nayebi, K., Barnwell III, T. P., Smith, M. J. T., "Time-Domain Filter Bank Analysis: A New Design Theory", *IEEE Signal Processing*, vol. 40, n<sup>o</sup>. 6, June 1992, pp. 1412-1429.
- [33] Chu, S., Burrus, C. S., "Multirate Filter Designs Using Comb Filters", *IEEE Circuits and Systems*, vol. CAS-31, n<sup>o</sup>. 11, November 1984, pp. 913-924.

- [34] Koilpillai, R. D., Vaidyanathan, P. P., "A New Approach to the Design of FIR Perfect Reconstruction QMF Banks", *IEEE ISCAS'90*, New Orleans, Louisiana, May 1990, pp. 125-128.
- [35] Riley, C., Chester, D., Razavi, A., Taylor, F., Rickers, W., "High-Decimation Digital Filters", *IEEE ICASSP'91*, Toronto, Ontario, May 1991, pp. 1613-1616.
- [36] Pillai, S. R., Robertson, W., Phillips, W., "Subband Filters Using Allpass Structures", *IEEE ICASSP'91*, Toronto, Ontario, May 1991, pp. 1641-1644.
- [37] Slock, D. T. M., "Fractionally-Spaced Subband and Multiresolution Adaptive Filters", *IEEE ICASSP'91*, Toronto, Ontario, May 1991, pp. 3693-3696.
- [38] Kiya, H., Yae, M., Iwahashi, M., "A Linear Phase Two-Channel Filter Bank Allowing Perfect Reconstruction", *IEEE ISCAS'92*, San Diego, CA, May 1992, pp. 951-954.
- [39] Saramäki, T., Mitra, S. K., "Multiple Branch FIR Filters for Sampling Rate Conversion", *IEEE ISCAS'92*, San Diego, CA, May 1992, pp. 1007-1010.
- [40] Nayebi, K., Barnwell III T. P., Smith, M. J. T., "Block Decimated Analysis-Synthesis Filter Banks", *IEEE ISCAS'92*, San Diego, CA, May 1992, pp. 947-950.
- [41] Caglar, H., Akansu, A. N., "A Generalized Parametric PR-QMF Design Technique Based on Bernstein Polynomial Approximation", *IEEE Signal Processing*, vol. 41, no. 7, July 1993, pp. 2314-2321.
- [42] Soman, A. K., Vaidyanathan, P. P., Nguyen, T. Q., "Linear Phase Orthonormal Filter Banks", *IEEE ICASSP'93*, Minneapolis, Minnesota, April 1993, pp. III.209-III.212.

- [43]Nayebi, K., Barnwell III T. P., Smith, M. J. T., "**Low Delay FIR Filter Banks: Design and Evaluation**", *IEEE Signal Processing*, vol. 42, n<sup>o</sup>. 1, January 1994, pp. 24-31.
- [44]Saghizadeh, P., Wilson Jr., A. N., "**A New Approach to the Design of Three-Channel Perfect-Reconstruction Linear-Phase FIR Filter Banks**", *IEEE ISCAS'94*, London, May-June 1994, pp. 157-160.
- [45]Vaidyanathan, P. P., "**Biorthonormal Filter Banks and the Theory of Transfer Matrix Inversion**", *IEEE ISCAS'94*, London, May-June 1994, pp. 285-288.
- [46]Koilpillai, R. D., Vaidyanathan, P. P., "**New Results on Cosine-Modulated FIR Filter Banks Satisfying Perfect Reconstruction**", *IEEE ICASSP'91*, Toronto, Ontario, May 1991, pp. 1793-1796.
- [47]Nguyen, T. Q., "**A Class of Generalized Cosine-Modulated Filter Bank**", *IEEE ISCAS'92*, San Diego, CA, May 1992, pp. 943-946.
- [48]Lin, Y. P., Vaidyanathan, P. P., "**Linear Phase Cosine Modulated Maximally Decimated Filter Banks with Perfect Reconstruction**", *IEEE ISCAS'94*, London, May-June 1994, pp. 17-20.
- [49]Chan, S. C., "**Quadrature Modulated Filter Banks**", *IEEE ISCAS'94*, London, May-June 1994, pp. 501-504.
- [50]Nussbaumer, H. J. "**Pseudo QMF Filter Bank**", *IBM Tech. Disclosure Bull.*, vol. 24, November 1981, pp. 3081-3087.

- [51] Nguyen, T. Q., "**Near-Perfect-Reconstruction Pseudo-QMF Banks**", *IEEE Signal Processing*, vol. 42, n<sup>o</sup>.1, January 1994, pp. 65-76.
- [52] Crochiere, R. E., "**Sub-Band Coding**", *The Bell System Technical Journal*, vol. 60, n<sup>o</sup>. 7, September 1981, pp. 1633-1653.
- [53] Gilloire, A., Vetterli, M., "**Adaptive Filtering in Sub-Bands**", *IEEE ICASSP'88*, pp. 1572-1575.
- [54] Etter, D. M., Carlson, N. C., Margo, V. A., "**Adaptive System Modeling with Critically Decimated Multirate Filters**", *IEEE ISCAS'93*, Chicago, Illinois, May 1993, pp. 68-71.
- [55] Gilloire, A., Vetterli, M., "**Adaptive Filtering in Subbands with Critical Sampling: Analysis, Experiments, and Application to Acoustic Echo Cancellation**", *IEEE Signal Processing*, vol. 40, n<sup>o</sup>.8, August 1992, pp. 1862-1875.
- [56] Kellermann, W., "**Kompensation Akustischer Echos in Frequenzteilbandern**", *Frequenz*, July-August 1985, pp. 209-215.
- [57] Beck, E., Seara, R., "**Um Novo Programa para Projeto e Análise de Filtros Digitais**", 8<sup>o</sup> *Congresso Brasileiro de Automática*, Belém, PA, Setembro, 1990, pp. 202-207.
- [58] Schafer, R. W., Rabiner, L. r., "**A Digital Signal Processing Approach to Interpolation**", *Proceedings of the IEEE*, vol. 61, n<sup>o</sup>.6, June 1973, pp. 692-702.
- [59] Saramäki, T., Neuvo, Y., Mitra, S. K., "**Design of Computationally Efficient Interpolated FIR Filters**", *IEEE Circuits and Systems*, vol. 35, n<sup>o</sup>. 1, January 1988, pp. 70-87.

- [60] Seara, R., Beck, E., "Estudo sobre a Viabilidade da Utilização de Estruturas IFIR em Filtros Adaptáveis", *8º Congresso Brasileiro de Automática*, Belém, PA, Setembro 1990, pp. 1130-1135.
- [61] Seara, R., Bermudez, J. C. M., Beck, E., "A New Technique for the Implementation of Adaptive IFIR Filters", *1992 URSI International Symposium on Signals, Systems, and Electronics - ISSSE'92*, Paris, September 1992, pp. 644-647.
- [62] Seara, R., "Filtragem Adaptável Utilizando Estruturas IFIR", *Trabalho para o Concurso de Professor Titular da UFSC*, Florianópolis, SC, Outubro 1992.
- [63] Abousaada, A., "Echo Tail Canceller Based on AIFIR Filtering", *M. Sc. Dissertation*, Univ. Ottawa, Ottawa, 1990.
- [64] Weinstein, S. B., "A Passband Data-Driven Echo Canceller for Full-Duplex Transmission on Two-Wire Circuits", *IEEE Communications*, vol. COM-25, nº.7, July 1977, pp. 654-666.
- [65] Carpes Jr., W. P., Seara, R., Bermudez, J. C. M., "Estudo Comparativo de Duas Técnicas de Cancelamento de Eco para Transmissão de Dados "Full-Duplex" a Dois Fios na Banda de Voz", *6º SBT -Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Campina Grande, PB, Setembro 1988, pp. 167-171.
- [66] Stremier, F. G., *Introduction to Communication Systems*, Third Edition, Addison Wesley, 1990.
- [67] Messerschmitt, D. G., "Echo Cancellation in Speech and Data Transmission", *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. SAC-2, nº.2, March 1984, pp. 283-297.



- [68] Granado Filho, A. G., Alves, E., Arakaki, Y., "Estudo Preliminar de Técnicas de Transmissão Digital na Linha de Assinante", *R.T.: PDS 07/87 - CPqD TELEBRÁS*, Maio 1987.
- [69] American National Standards Institute - ANSI, "Standard for ISDN Basic Access Interface for use on Metallic Loop Applications on the Network Side of the NT", *T1.601-1988*, New York, N. Y., 1988.
- [70] Baptistella, L. F. B., Lobo, M. P. L., *Rede Digital de Serviços Integrados*, McGraw-Hill, São Paulo, SP, 1990.
- [71] Mitra, S. K., Mahalanobis, A., Saramäki, T., "A Generalized Structural Subband Decomposition of FIR Filters and Its Application in Efficient FIR Filter Design and Implementation", *IEEE Circuits and Systems II*, vol. 40, n<sup>o</sup>.6, June 1993, pp. 363-374.
- [72] Petraglia, M. R., Mitra, S. K., "Adaptive FIR Filter Structure Based on the Generalized Subband Decomposition of FIR Filters", *IEEE Circuits and Systems II*, vol. 40, n<sup>o</sup>.6, June 1993, pp. 354-362.
- [73] Mitra, S. K., Mahalanobis, A., "Efficient FIR Filter Design and Implementation Using a Structural Subband Decomposition", *1990 Bilkent Int. Conf. New Trends in Commun., Control, and Signal Processing*, Ankara, Turkey, July 1990, pp. 1005-1022.
- [74] Mahalanobis, A., Song, S., Mitra, S. K., Petraglia, M. R., "Adaptive FIR Filters Based on Structural Subband Decomposition for System Identification Problems", *IEEE Circuits and Systems II*, vol. 40, n<sup>o</sup>.6, June 1993, pp. 375-381.

- [75] Grosen, M. D., "New FIR Structures for Fixed and Adaptive Digital Filters", *Ph.D. Dissertation*, University of California, Santa Barbara, August 1987.