

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

TEORIA DE CONTROLE DE SISTEMAS LINEARES
MULTIVARIÁVEIS: UMA ANÁLISE COMPARATIVA
DAS TEORIAS GEOMÉTRICA E POLINOMIAL

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA
CATARINA PARA OBTENÇÃO DE GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

JULIO ELIAS NORMEY RICO

FLORIANÓPOLIS, NOVEMBRO DE 1989

TEORIA DE CONTROLE DE SISTEMAS LINEARES MULTIVARIÁVEIS: UMA
ANÁLISE COMPARATIVA DAS TEORIAS GEOMÉTRICA E POLINOMIAL

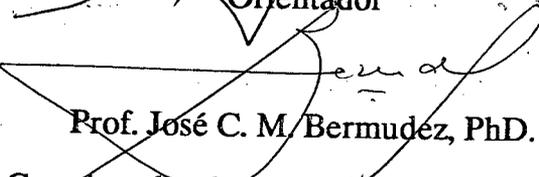
JULIO ELIAS NORMEY RICO

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE MESTRE EM ENGENHARIA-ESPECIALIDADE ENGENHARIA
ELÉTRICA É APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE
PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. Augusto H. Bruçiapaglia, Dr. Ing.

Orientador



Prof. José C. M. Bermudez, PhD.

Coordenador do Curso de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica

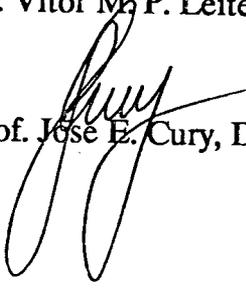
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Augusto H. Bruçiapaglia, Dr. Ing.



Prof. Vitor M. P. Leite, Dr Ing.



Prof. José E. Cury, Dr. Ing.

À minha esposa.

À meus pais e irmãos.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Augusto Humberto Bruciapaglia pela inestimável amizade, orientação e apoio para a realização deste trabalho.

Ao Professor Jose Eduardo Cury pelos valiosos momentos de discussão que muito contribuíram para a elaboração da versão final do trabalho.

Aos companheiros do LCMI pela amizade e apoio em todo momento.

A Universidade Federal de Santa Catarina e a Capes pelo apoio financeiro.

SUMÁRIO

SIMBOLOGIA UTILIZADA.....	001
PRINCIPAIS ABREVIACÕES.....	003
RESUMO.....	005
ABSTRACT.....	006
PARTE 1: Introdução e Conceitos Preliminares.....	007
CAPÍTULO 1: Introdução e Objetivos.....	008
1.1. Introdução.....	008
1.2. Objetivos.....	009
1.3. Organização.....	010
CAPÍTULO 2: Conceitos Preliminares.....	011
2.1. Teoria geométrica.....	011
2.2. Teoria polinomial.....	021
PARTE 2: Estudo dos Principais Problemas da Teoria de Controle de Sistemas Lineares Multivariáveis.....	035
CAPÍTULO 3: Posicionamento de Pólos e Estabilidade.....	036
3.1. Introdução.....	036
3.2. Posicionamento de pólos.....	037
3.2.1. Análise por variáveis de estado.....	038
3.2.2. Análise na representação entrada-saída.....	042

3.2.3. Representação por frações polinomiais.....	044
3.2.4. Comentários gerais.....	048
3.3. Estabilidade do sistema total.....	050
3.3.1. Condições de estabilizabilidade e detectabilidade.....	052
3.3.2. Comentários gerais.....	053
3.4. Uma análise da robustez dos compensadores.....	056
3.4.1. Perturbações paramétricas aditivas.....	056
3.4.2. Perturbações paramétricas relativas a P_o	057
3.4.3. Perturbações paramétricas na representação polinomial.....	058
3.5. Conclusões.....	059
CAPÍTULO 4: Rejeição de Perturbações.....	061
4.1. Introdução.....	061
4.2. O problema de rejeição total de perturbações.....	062
4.2.1. Controle por realimentação de estados.....	063
4.2.1.1. Existência da solução.....	063
4.2.1.2. Condições equivalentes na representação entrada-saída.....	065
4.2.1.3. Síntese da solução.....	066
4.2.1.4. Efeitos da síntese de F na representação entrada-saída.....	068
4.2.1.5. Análise estrutural do PRP.....	070
4.2.1.6. Comentários gerais.....	073
4.2.2. Controle por realimentação da saída.....	075
4.2.2.1. Existência da solução.....	078
4.2.2.2. Uma solução alternativa do PRPDS: As condições na função de transferência do sistema.....	080
4.2.2.3. O PRPDS na representação por frações polinomiais.....	083
4.2.2.4. Comparação dos enfoques analisados.....	086
4.2.2.5. Síntese da solução.....	089

4.3. Solução assintótica do problema de rejeição de perturbações.....	095
4.3.1. Estrutura clássica do servocompensador. Enfoque polinomial.....	098
4.3.1.1. Existência da solução.....	098
4.3.1.2. Síntese da solução.....	101
4.3.2. Estrutura do servocompensador com realimentação de estados. Enfoque matricial.....	103
4.3.2.1. Existência da solução.....	103
4.3.2.2. Síntese da solução.....	105
4.3.3. Robutez do compensador.....	106
4.3.4. O vínculo com o problema de rastreamento assintótico de referências.....	107
4.3.5. Comentários gerais.....	108
4.4. Conclusões.....	109
CAPÍTULO 5: Posicionamento de Pólos e Rejeição de Perturbações.....	111
5.1. Introdução.....	111
5.2. Rejeição total de perturbações e posicionamento de pólos.....	112
5.2.1. Usando realimentação de estados.....	112
5.2.1.1. Enfoque geométrico do PRPPP.....	112
5.2.1.2. Enfoque matricial do PRPPP.....	117
5.2.1.3. Análise estrutural.....	119
5.2.2. Usando realimentação da saída.....	120
5.2.2.1. Enfoque geométrico do PRPSPP.....	122
5.2.2.2. Enfoque polinomial do PRPSPP.....	128
5.3. Rejeição assintótica de perturbações e posicionamento de pólos.....	131
5.4. Conclusões.....	132

CAPÍTULO 6: Desacoplamento Entrada-Saída.....	134
6.1. Introdução.....	134
6.2. Desacoplamento total.....	135
6.2.1. Enfoque geométrico do problema de desacoplamento total.....	136
6.2.1.1. Análise do problema.....	136
6.2.1.2. Síntese da solução.....	147
6.2.2. Enfoque polinomial do problema de desacoplamento total.....	153
6.2.2.1. Análise do problema.....	153
6.2.2.2. Síntese da solução.....	155
6.3. Desacoplamento parcial e estático.....	157
6.4. Conclusões.....	158
 PARTE 3: Aplicações e Conclusões.....	 160
 CAPÍTULO 7: Aplicações.....	 161
7.1. Introdução.....	161
7.2. Especificação do problema.....	161
7.3. Solução do problema.....	167
7.3.1. Solução para o modelo linearizado.....	167
7.3.1.1. Análise do problema de desacoplamento com posicionamento de pólos.....	167
7.3.1.2. Análise do problema de rejeição de perturbações.....	171
7.3.1.3. Síntese da solução total.....	173
7.3.1.4. Uma solução alternativa para a malha de velocidade: O controlador clássico PI.....	180
7.3.2. A solução do problema não linear.....	183
7.3.2.1. Generalização da solução linear.....	183

7.3.2.2. Limitações de torque. Estratégia de ajuste do sinal de controle.....	187
7.3.2.3. Resultados da simulação da estratégia de controle não linear. Análise da robustez. As possibilidades de aplicação prática.....	191
7.4. Conclusões.....	195
CAPÍTULO 8: Conclusões e Perspectivas.....	196
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	199

SIMBOLOGIA UTILIZADA

c = contido em

\in = pertence a

A^t = transposta de A

\wedge = interseção

U = união

$(+)$ = soma direta

$>=$ = maior ou igual

$<=$ = menor ou igual

$=/$ = não igual

$\bigcap_{i=1}^n (A_i)$ = interseção de A_1 até A_n

$\bigcup_{i=1}^n (A_i)$ = união de A_1 até A_n

$f: A \rightarrow B$ = mapa que aplica A em B

∞ = infinito

$t \rightarrow$ = t tende a

$t \not\rightarrow$ = t não tende a

$\max(.)$ = máximo de

$\min(.)$ = mínimo de

$\sum_{i=1}^n (A_i)$ = soma de A_1 até A_n

$|A|$ = modulo de A

$\|A\|$ = norma de A

\leftrightarrow = equivalente a

$\det(A)$ = determinante de A

$d/dt(\cdot)$ = derivada respeito de t

dx/dt = derivada de x respeito de t

$\text{diag}[a_i, i=1..n]$ = matriz diagonal com elementos a_i na diagonal

$\text{blocodiag}[a_i, i=1..n]$ = matriz bloco-diagonal com blocos a_i na diagonal

$A^{p \times q}$ = matriz de dimensões p por q

$\dim(A)$ = dimensão de A

C^+ = complexos com parte real positiva ou nula

C^- = complexos com parte real negativa

$X^+(A)$ = subespaço dos modos instáveis do mapa A

$X^-(A)$ = subespaço dos modos estáveis do mapa A

$@(A)$ = espectro de mapa A

$\text{Im } A$ = imagem do mapa A

$\text{Ker } A$ = espaço nulo do mapa A

$A|S$ = mapa A restrito ao subespaço S

X/S = espaço quociente de X relativo a S

$R(s)$ = anel das funções racionais reais

$R[s]$ = anel dos polinômios de coeficientes reais

$R^{n \times p}(s)$ = anel das matrizes $n \times p$ racionais reais

$R^{n \times p}[s]$ = anel das matrizes $n \times p$ polinomiais de coeficientes reais

$R_p(s)$ = anel das funções racionais reais e próprias

$R_p^{n \times p}(s)$ = anel das matrizes $n \times p$ racionais reais e próprias

$R_{po}(s)$ = anel das funções racionais reais e estritamente próprias

$R_{po}^{n \times p}(s)$ = anel das matrizes $n \times p$ racionais reais e estritamente próprias

$T a-b$ = transferência de b para a

$G_{ij}(s)$ = elemento ij da matriz $G(s)$

$\text{grau}_c^j[A]$ = grau da coluna j da matriz A

$\text{grau}_l^i[A]$ = grau da linha i da matriz A

$Z[A(s)]$ = conjunto de zeros de $A(s)$

PRINCIPAIS ABREVIACÕES

PI = controlador proporcional integral

PID = controlador proporcional integral derivativo

C N e S = condição necessária e suficiente

C N = condição necessária

C S = condição suficiente

SSE = se e somente se

FTMF = função de transferência de malha fechada

MA = malha aberta

MF = malha fechada

f.c.d. = fração coprima pela direita

f.c.e. = fração coprima pela esquerda

SLM = sistema linear multivariável

PP = posicionamento de pólos

E = estabilidade

PPP = problema de posicionamento de pólos

PE = problema da estabilidade

PRP = problema de rejeição de perturbações com realimentação de estados

PRPES = problema de rejeição de perturbações com realimentação estática da saída

PRPDS = problema de rejeição de perturbações com realimentação dinâmica da saída

PRPA = problema de rejeição de perturbações assintótico

PRPE = problema de rejeição de perturbações com estabilidade

PRPER = problema de rejeição de perturbações com estabilidade relativa

PRPPP = problema de rejeição de perturbações com posicionamento de pólos por realimentação de estados

PRPSPP = problema de rejeição de perturbações com posicionamento de pólos por realimentação da saída

PRPAPP = problema de rejeição de perturbações assintótico com posicionamento de pólos

PDT = problema de desacoplamento por realimentação de estados

PDTA = problema de desacoplamento por realimentação de estados para o sistema aumentado

PDTS = problema de desacoplamento por realimentação da saída

PDTPP = problema de desacoplamento com posicionamento de pólos por realimentação de estados

PDTSP = problema de desacoplamento com posicionamento de pólos por realimentação da saída

PDTPPU = problema de desacoplamento total com posicionamento de pólos por realimentação unitária

RESUMO

Nesta dissertação se realiza uma análise comparativa das soluções apresentadas pelas teorias geométrica e polinomial para resolver os problemas de posicionamento de pólos, rejeição de perturbações e desacoplamento entrada-saída em sistemas lineares multivariáveis.

Primeiramente são analisados, para cada problema, os diferentes conjuntos de condições que devem se verificar para a existência da solução. Após isto se colocam e comparam os procedimentos de síntese dos compensadores. Em cada caso são colocadas as vantagens e desvantagens da aplicação dos diferentes métodos.

Como aplicação da análise realizada é resolvido o problema do controle desacoplado do fluxo e velocidade de um motor a.c. A solução é colocada em duas etapas. Na primeira propõe-se uma técnica de controle para o modelo linearizado do motor. Na segunda, a solução é generalizada para o caso não linear. Os resultados obtidos são avaliados mediante simulações, e eles mostram a boa performance da estratégia de controle proposta.

ABSTRACT

In this work, a comparative analysis is made about the geometric and factorial approaches to solve pole shifting, disturbance rejection and decoupling problems in linear multivariable systems.

First of all, for each problem, the different sets of conditions that must be verified for the existence of solutions, are analysed. After that, the controller synthesis procedures are shown and compared. In each case, the advantages and disadvantages of the application of the different methods are stated.

As an application of the analysis made, the a.c. motor flux and speed decoupled problem is solved. The solution is presented in two stages. In the first one a technique for the control of the linear model is proposed. For the second stage, the solution is extended to the non-linear case. The results obtained are evaluated with simulations, showing the goodness of the proposed control strategy.

PARTE 1

Introdução e Conceitos Preliminares

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO E OBJETIVOS.

1.1. Introdução ao trabalho

O estudo da teoria de sistemas de controle linear multivariável têm passado, no decorrer das últimas décadas, por diversas etapas que se diferenciam, fundamentalmente, pelo tipo de abordagem matemática utilizada.

Os trabalhos da teoria freqüencial clássica (Bode, Nyquist, Ruth-Hurwitz, etc), da primeira metade do século vinte, utilizaram-se dos conhecimentos da teoria polinomial existente (Maxwell, Hermite, etc) para estabelecer criterios de análise e projeto baseados nos conceitos de margem de fase e de ganho.

Já a partir dos trabalhos de Kalman, ao final dos anos cinquenta, a abordagem dos diferentes problemas de controle mudou para a utilização de representações matriciais dos sistemas através de suas equações de estado. O novo enfoque levou à adoção de especificações de controle baseadas no posicionamento de pólos do sistema e na otimização das respostas em malha fechada (controle ótimo). Nessa etapa, a solução dos problemas de realimentação e estimação de estados passaram a ter uma importância fundamental nas técnicas de projeto.

Ao final da década de sessenta, surge uma nova teoria que permite a solução de diversos e importantes problemas de controle de sistemas lineares multivariáveis, como a rejeição de perturbações e o desacoplamento entrada-saida, utilizando a representação por variáveis de estado. A chamada teoria geométrica, que utiliza a álgebra linear como ferramenta matemática, permite, além da obtenção da solução, uma interpretação simples dos fenômenos físicos presentes em cada problema. Paralelamente a esta teoria surgem

alguns trabalhos estabelecendo, nas representações clássicas, condições de solução equivalentes às geométricas. Isto criou para diversos problemas alternativas de solução em função do tipo de representação utilizada.

Nos últimos anos tem-se retornado à análise freqüencial dos sistemas multivariáveis, mas com uma representação em frações polinomiais. Nesta teoria, conceitos como controlabilidade e observabilidade tem sido reformulados com a utilização da teoria de anéis e módulos. Além das interpretações teóricas deste enfoque, surgiram caminhos alternativos para a implementação de algoritmos de análise e síntese de controladores.

Atualmente, as diferentes teorias matemáticas do controle encontram-se avançando por diversos caminhos e estabelecendo, em cada um deles, soluções de especificação ou tratamento diferente para cada um dos mais importantes problemas do controle de sistemas lineares multivariáveis.

1.2. Objetivos do trabalho

Considerando a análise acima pode-se concluir que existem, dentro da teoria de controle de sistemas lineares multivariáveis, diversos tipos de solução para cada tipo de problema e varias maneiras de implementação de cada uma de elas. Por isso o engenheiro de controle deve realizar, antes de optar por uma estrutura de controlador e/ou por uma técnica de síntese, uma pesquisa que permita comparar as diversas formas de especificar e solucionar o problema em estudo.

O objetivo deste trabalho é fornecer uma síntese dos diversos resultados possíveis para os mais importantes problemas da teoria de controle de sistemas

multivariáveis e realizar uma análise comparativa dos mesmos, de forma tal que a escolha da solução mais adequada para cada situação seja o mais simples possível. Ao mesmo tempo o trabalho será base para pesquisas mais aprofundadas em alguns dos problemas aqui analisados, ou para a implementação de algoritmos de controle utilizados em pacotes de análise e projeto assistido por computador.

Por outro lado, mostra-se como as técnicas teóricas analisadas podem ser aplicadas com sucesso à solução de problemas reais e de grande importância prática. Em particular neste trabalho é solucionado o problema do controle não interativo de fluxo e velocidade de um motor de indução alimentado por tensão.

1.3. Organização do trabalho.

O trabalho é dividido em três partes. A primeira é concluída com o capítulo 2 onde são revisados alguns conceitos básicos das teorias geométrica e polinomial. A segunda parte, dividida por sua vez em quatro capítulos, ocupa-se da análise comparativa das diversas teorias que estudam os principais problemas do controle de sistemas lineares multivariáveis. No capítulo 3 é abordado o problema de posicionamento de pólos e da estabilidade, no capítulo 4 a rejeição de perturbações, e no capítulo 5 a rejeição de perturbações com posicionamento de pólos. O desacoplamento entrada-saída com e sem condições de estabilidade ou posicionamento de pólos é estudado no capítulo 6. Na terceira parte se apresentam, no capítulo 7, aplicações dos resultados obtidos ao controle de motores de indução, e no capítulo 8 as conclusões gerais do trabalho.

Deve se notar que, como regra geral, a maioria dos teoremas e resultados apresentados neste trabalho não vão acompanhados das respectivas demonstrações e que todas elas podem ser achadas nas referências oportunamente citadas.

CAPÍTULO 2 : CONCEITOS PRELIMINARES

Neste capítulo são colocados em forma resumida os conceitos preliminares necessários para a formulação dos problemas dos capítulos seguintes. Eles são apresentados separadamente para a teoria geométrica e polinomial.

2.1. Teoria geométrica [Wonham 79], [Gomes 84], [Schumacher 80-b].

Espaços A-invariantes e mapas restritos.

Definição 2.1:

Seja um mapa linear $A: X \rightarrow X$ e um subespaço $V \subset X$ qualquer. Diz-se que V é A-invariante SE $A V \subset V$.

É possível definir para um dado mapa $A: X \rightarrow Y$ o seu mapa restrito a um subespaço $S \subset X$ como:

$$A|_S: S \rightarrow Y$$

e tal que

$$A|_S = A S$$

ou seja que $A|_S$ tem a mesma ação que o mapa A mas não está definido fora de S .

Utilizando a propriedade da invariância pode ser observado que para o mapa S A-invariante tem-se:

$$A|_S: S \rightarrow S$$

Chamando A_1 ao mapa que "insere" o subespaço S em X tem-se o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & & A \\
 & & \text{-----} \\
 X & \text{-----} & X \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 A_1 & & A_1 \\
 S & \text{-----} & S \\
 & & A|S
 \end{array}$$

Se existe R tal que $R \cap S = X$ e $A \cap R \subset R$ então existe o mapa $A|R: R \rightarrow R$ e o mapa A pode ser decomposto nos mapas complementares $A|S$ e $A|R$.

Espaços quocientes e partição do espectro.

Dado um subespaço $V \subset X$ e um vetor $x_1 \in X$, chama-se classe lateral de x_1 modulo V aos vetores $v \in X$ tais que $x_1 - v \in V$. Para cada $x_1 \in X$ e $V \subset X$ a mencionada classe é uma classe de equivalência. O conjunto destas classes com as operações de soma e produto por um escalar formam um espaço vetorial chamado espaço quociente de X relativo ao subespaço V e notado como X/V . A dimensão do mencionado espaço é:

$$\dim (X/V) = \dim X - \dim V$$

Desta forma cada vetor $x \in X$ tem associada uma classe x' tal que existe um mapa P (projeção canônica) que verifica:

$$P: X \rightarrow X/V \text{ e } Px = x'$$

Nota-se que X/V não é subespaço de X , porém ele é isomorfo com qualquer complemento V' do subespaço V , e por isso é escolhido como o complemento padrão de V . Assim tem-se:

$$V' \oplus V = X \text{ e } V' \text{ isomorfo com } X/V$$

Com esta partição do espaço X pode-se obter, para o espectro do mapa $A: X \rightarrow X$, a seguinte relação:

$$\sigma(A) = \sigma(A|_V) \cup \sigma(\tilde{A})$$

onde \tilde{A} é o mapa induzido pelo mapa A no subespaço X/V , definido na continuação, e $A|_V$ é o mapa restrito ao subespaço V .

O mapa induzido pelo mapa A no subespaço X/V , com V A -invariante, é definido como:

$$\tilde{A}: X/V \rightarrow X/V$$

e tal que se verifica: $\tilde{A}P = PA$.

Estabilidade.

Dado um sistema representado pelas equações:

$$\begin{aligned} dx/dt &= Ax + Bu & \text{com } x(0) &= x_0 \text{ e } t \geq 0 \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{1}$$

diz-se que seu comportamento é estável

SE:

o estado $x(t)$ tende a 0 para t tendendo a infinito com entrada $u(t)=0$ para todo t .

Dado que o sistema pode ser representado também numa relação irreductível entrada-saída como segue:

$$y(s) = H(s) u(s) \quad (2)$$

deve-se fazer uma distinção entre estabilidade interna e externa do sistema. Geralmente diz-se que um sistema é internamente estável quando a totalidade de seus estados verifica a condição estabelecida, e externamente estável, ou simplesmente estável, quando a condição é verificada somente pelos estados ou modos representados na equação (2).

Considerando as definições anteriores pode ser definido o dominio de estabilidade representando ao sistema pela equação $dx/dt = A x$ com $x(0) = x_0$:

$$\text{Dom-estab-A} = \{ v \in X \text{ tal que se } x(0)=v \text{ então } x(t) \rightarrow 0 \text{ para } t \rightarrow \infty \}$$

Para associar este conjunto ao espectro do mapa A considera-se o polinômio mínimo de A (que será notado $A(s)$) como:

$$A(s) = A^-(s) \cdot A^+(s)$$

onde:

$A^-(s)$ é o polinômio associado as raizes estáveis de $A(s)$

$A^+(s)$ é o polinômio associado as raizes instáveis de $A(s)$

Definindo os subespaços $X^+(A)$ e $X^-(A)$ como:

$$X^+(A) = \text{Ker} [A^+(A)]$$

$$X^-(A) = \text{Ker} [A^-(A)]$$

verificam-se as seguintes propriedades:

(i) $X^+(A) \cap X^-(A) = \{0\}$

(ii) $X^+(A)$ e $X^-(A)$ são A -invariantes

(iii) toda trajetória do vetor de estados iniciada em $X^-(A)$ irá para zero quando $t \rightarrow \infty$, e aquelas iniciadas em $X^+(A)$ não o farão.

Com isso o domínio de estabilidade fica perfeitamente definido pela relação:

$$\text{Dom-est-}A = X^-(A)$$

Controlabilidade e observabilidade.

As definições de controlabilidade e observabilidade do sistema na representação por variáveis de estado estão intuitivamente vinculadas, respectivamente, à possibilidade de comandar ou observar a evolução do vetor de estados através das entradas e saídas do sistema. As condições de verificação destas propriedades, conhecidas matricialmente nas expressões:

$$\text{posto} [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] = n$$

$$\text{posto} [C \ CA \ CA^2 \ \dots \ CA^{n-1}]^t = n$$

onde n = número de estados, podem ser colocadas através dos subespaços de modos controláveis e observáveis do sistema.

Suponha a seguinte representação para o sistema:

$$\frac{dx}{dt} = A x + B u$$

$$y = C x \quad \text{com } x(0) = x_0 \text{ e } t > 0,$$

e onde $x \in X$, $y \in Y$ e $u \in U$ são o estado, a saída e a entrada do sistema. Assim é possível definir:

(i) o subespaço dos modos controláveis do par (A,B) é $\langle A, \text{Im}B \rangle = \text{Im}B + A\text{Im}B + A^2\text{Im}B + \dots + A^{n-1}\text{Im}B$, e é ao mesmo tempo o menor subespaço A -invariante que contém a $\text{Im}B$,

(ii) o subespaço dos modos não observáveis do par (C,A) é $N_{ob} = \text{Ker}C \wedge \text{Ker}CA \wedge \text{Ker}CA^2 \wedge \dots \wedge \text{Ker}CA^{n-1}$, e é ao mesmo tempo o maior subespaço A -invariante contido em $\text{Ker}C$.

A partir destas colocações as condições de controlabilidade e observabilidade podem ser expressas como:

Teorema 2.1.

O sistema dado pela terna (A,B,C) é controlável SSE $\langle A, \text{Im}B \rangle = X$, e é observável SSE $N_{ob} = 0$.

De forma mais geral podem ser definidas as classes de subespaços de modos controláveis de um dado par (A,B) ou de modos não observáveis do par (C,A) , dual da primeira.

Um subespaço $R \subset X$ é dito subespaço de controlabilidade do par (A,B) quando existe $F: X \rightarrow U$ e $G: U \rightarrow U$ tais que:

$$R = \langle A+BF \mid \text{Im}(BG) \rangle$$

o que implica na controlabilidade do par $((A+BF) \mid R, BG)$.

Nota-se $T(A,B,X)$ á classe de subespaços de controlabilidade do par (A,B) no espaço X . De forma mais geral para um dado subespaço $S \subset X$ define-se a classe $T(A,B,S)$ como:

$$T(A,B,S) = \{ R \text{ tal que } R \subset T(A,B,X) \text{ e } R \subset S \}$$

Toda classe $T(A,B,S)$ possui um elemento máximo, notado $R^*(S)$ e chamado geralmente de maior subespaço de controlabilidade contido em S . Cabe mencionar que no caso particular do espaço X se verifica $T(A,B,X) = \langle A, \text{Im}B \rangle$. Dualmente, para a classe de subespaços de observabilidade complementária do par (C,A) que contém a um dado S existira um elemento mínimo, notado $N_*(S)$ e chamado de menor subespaço de observabilidade complementária que contém à S .

Existem diversos algoritmos para a determinação dos subespaços $R^*(S)$ e $N_*(S)$, [Wonham 79], [Willems 81]. Citando as sequências mais importantes tem-se:

(i) para $R^*(S)$ gera-se:

$$R^{k+1}(S) = S \cap (A R^k(S) + \text{Im}B) \text{ com } R^0 = 0$$

e acha-se o máximo quando $R^{t+1}(S) = R^t(S)$ para algum t inteiro;

(ii) para $N_*(S)$ gera-se:

$$N_{k+1}(S) = S + (A^{-1} N_k(S)) \cdot \text{Ker}C \quad \text{com } N_0(S) = X$$

e acha-se o mínimo quando $N_{t+1}(S) = N_t(S)$ para algum t inteiro.

Pares (C,A,B) e propriedades.

Dado um sistema representado pela terna (A,B,C) como na equação (1) e um subespaço $V \subset X$ qualquer, diz-se que:

(i) V é (A,B)-invariante SSE se verifica:

existe $F: X \rightarrow U$ tal que $(A+BF)V \subset V$

ou equivalentemente:

$$AV \subset V + \text{Im}B$$

(ii) V é (C,A)-invariante SSE se verifica:

existe $G: Y \rightarrow X$ tal que $(A+GC)V \subset V$

ou equivalentemente:

$$A(V \cap \text{Ker}C) \subset V.$$

De forma mais geral pode se definir a classe de subespaços (A,B) -invariantes contidos em um dado subespaço $S \subset X$. Assim tem-se:

$$J(A,B,S) = \{ V \subset X, V \subset S \text{ e existe } F \text{ tal que } (A+BF)V \subset V \}$$

e pode provar-se que a classe $J(A,B,S)$ possui um elemento máximo. Ele é definido como o maior subespaço (A,B) -invariante contido em S e é notado: $V^*(S)$. A classe de todos os mapas F que fazem V um subespaço (A,B) -invariante é notada como $F(V)$.

Utilizando dualidade é possível definir a classe de subespaços (C,A) -invariantes que contém o espaço $S \subset X$ e provar que a mencionada classe possui um elemento mínimo que será notado: $V_*(S)$. A classe de todos os mapas G que fazem V um subespaço (C,A) -invariante é notada como $G(V)$.

Utilizando os conceitos de (A,B) e (C,A) invariância é possível definir os pares (C,A,B) como:

Definição 2.2:

O par de subespaços (V_1, V_2) pertencentes ao espaço X é um par (C,A,B) quando se verifica:

$$V_1 \subset V_2$$

$$V_1 \text{ é } (C,A)\text{-invariante}$$

$$V_2 \text{ é } (A,B)\text{-invariante}$$

Sejam $F(V)$ e $G(V)$ as seguintes classes de mapas:

$$F(V) = \{ F: X \rightarrow U \text{ tal que } (A+BF)V \subset V \}$$

$$G(V) = \{ G: Y \rightarrow X \text{ tal que } (A+GC)V \subset V \}$$

Então um dado par $(C,A,B), (V_1, V_2)$, verifica a seguinte propriedade:

Existem $F \in F(V_2)$, $G \in G(V_1)$ e $K: Y \rightarrow U$ tais que:

$$F = F_0 + KC \quad \text{e} \quad G = G_0 + BK$$

com $V_1 \subset \text{Ker}F_0$ e $\text{Im}G_0 \subset V_2$.

Assim pode ser introduzida a classe não vazia $P(V_1, V_2)$ como:

$$P(V_1, V_2) = \{ (F, G) \in F(V_1) \times G(V_2) \text{ tal que existe } K: Y \rightarrow U$$

de modo que se verifica $V_1 \subset \text{Ker}(F-KC)$ e $\text{Im}(G-BK) \subset V_2 \}$

Comentarios gerais.

Os conceitos da teoria da invariância aqui analisados são de grande importância na abordagem geométrica da teoria de controle de sistemas multivariáveis e em particular no estudo dos problemas de rejeição de perturbações e desacoplamento. Para um estudo mais aprofundado dos mesmos aconselha-se seguir as referências citadas no começo deste capítulo.

2.2. Teoria polinomial, [Hautus 78], [Callier 82], [Vidyassagar 85],[Bhattacharyya 83], [Ozgurer 85], [Van der Woude 87].

A teoria polinomial constitui uma ferramenta importante para o estudo da teoria de sistemas de controle multivariáveis. Mesmo que a teoria frequencial clássica tenha utilizado durante muito tempo a teoria de polinômios para desenvolver os seus resultados, é com a representação por matrizes polinomiais que a maioria das ferramentas conhecidas podem ser aproveitadas. Nos últimos anos uma grande quantidade de resultados têm sido desenvolvidos, dando a possibilidade de utilizar outras técnicas além das da conhecida teoria geométrica matricial. Para uma revisão geral da teoria básica de polinômios e sua aplicação aos problemas de controle multivariável referir-se principalmente à [Callier 82] e [Vidyasagar 85].

Matrizes polinomiais.

Uma matriz polinomial, com elementos pertencentes ao anel de polinômios $R[s]$, notada como $M[s] \in R^{m \times n}[s]$, é a representação de um mapa linear que leva do módulo $(R^n[s], R[s])$ ao módulo $(R^m[s], R[s])$.

Assim $M[s] : (R^n[s], R[s]) \rightarrow (R^m[s], R[s])$ é tal que:

(i) $\det(M[s]) \neq 0$ (não identicamente nulo) \leftrightarrow as colunas de $M[s]$ são linearmente independentes sobre $R[s]$ \leftrightarrow se $Mx = 0$ então $x = 0$ \leftrightarrow M é um mapa injectivo.

Além disso se $n = m$ define-se a matriz M como não singular.

(ii) $\det(M[s]) = \text{constante não nula} \leftrightarrow$ o mapa linear M é

bijectivo \leftrightarrow existe $M^{-1}[s] \in R^{n \times m}[s]$.

Além disso se $n=m$ define-se a matriz M como **unimodular** ou **inversível**.

Propriedade:

Seja $M[s] \in R^{n \times n}[s]$. Então:

SE M é não singular \leftrightarrow $\text{posto}(M[s]) = n$ menos para um conjunto finito de pontos do plano complexo.

Se M é unimodular \leftrightarrow $\text{posto}(M[s]) = n$ para todo s complexo.

Máximo divisor comum pela direita e esquerda.

Sejam A , B , e C três matrizes polinomiais tais que $A = BC$. Então diz-se que:

A é múltiplo pela direita de B (m.d.) e C é divisor pela direita de A (d.d.). Idem para as relações pela esquerda, m.e., e d.e.

Se $A = A_1R = LA_2$ e $B = B_1R = LB_2$ então diz-se que:

R (L) é divisor comum pela direita, d.c.d., (esquerda, d.c.e.) de A e B .

Se R^* (L^*) é m.e. (m.d.) de todos os d.c.d.(d.c.e.) de A e B então R^* (L^*) é o maior divisor comun pela direita (esquerda), m.d.c.d. (m.d.c.e.), de A e B.

Matrizes coprimas pela direita e esquerda.

Duas matrizes polinomiais A e B com o mesmo número de colunas são ditas coprimas pela direita, c.d. (esquerda, c.e.) SSE elas tem um m.d.c.d. (m.d.c.e.) unimodular.

Identidade de Berzout.

Seja o sistema linear multivariável representado pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} D(p) z(t) &= N_e(p) u(t) & p &= d/dt \\ y(t) &= N_d(p) z(t) + K(p) u(t) \end{aligned} \quad (3)$$

onde $u(t)$ (dim n_i), $z(t)$ (dim n_e) e $y(t)$ (dim n_o) são respectivamente a entrada, o pseudo estado, e a saída; e D (não singular), N_d , N_e e K são matrizes polinomiais. A função de transferência do sistema pode ser obtida como:

$$H(s) = N_d D^{-1} N_e + K \quad c R^{noxni}(s).$$

Seja o par (N_d, D) e $R^{noxni}[s] \times R^{nixni}[s]$ com D não singular. Então (N_d, D) é um par coprimo pela direita SSE existem duas matrizes polinomiais U_d e V_d tais que verificam a identidade de Berzout:

$$U_d N_d + V_d D = I_n$$

que é simplesmente a generalização do caso escalar para dois polinômios coprimos. Além disso $[U_d \ V_d]$ é a inversa pela esquerda de $[N_d^t \ D^t]^t$ com operações no anel $R[s]$.

Se são consideradas as duas representações coprimas de uma dada função de transferência $H(s)$, pode se utilizar uma forma generalizada de Berzout para vinculá-las. Assim dada (N_d, D_d) fração coprima pela direita de $H(s)$ (f.c.d.), existem V_d, U_d, U_e, V_e tais que:

$$\left| \begin{array}{cc|cc} V_d & U_d & D_d & -U_e \\ -N_e & D_e & N_d & V_e \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{array} \right|$$

e onde (D_e, N_e) é uma f.c.e. de $H(s)$.

Matrizes de transferência próprias.

Definição 2.4.:

Dada a matriz de transferência $H(s) \in R^{n \times n}[s]$ diz-se que ela é própria (estritamente própria) SSE $H(s) \rightarrow A \in R^{n \times n}$ ($H(s) \rightarrow 0$) quando $s \rightarrow \infty$. Nota-se, respectivamente, $R_p^{n \times n}(s)$ e $R_{po}^{n \times n}(s)$ aos anéis de funções racionais próprias e estritamente próprias.

Definição 2.5.

Dado um vetor linha ou coluna de uma matriz polinomial qualquer, define-se o grau do vetor como o maior grau de seus elementos. Nota-se, respectivamente, $\text{grau}_i^i(M)$ e $\text{grau}_c^j(M)$ aos graus da linha i e coluna j da matriz M .

Assim se (N_d, D_d) é uma f.c.d. de $H(s)$ própria, para toda coluna j vale:

$$\text{grau}_c^j(N_d) = < \text{grau}_c^j(D_d). \text{ Observe que o recíproco não é válido.}$$

Definição 2.6.

Dada uma matriz $D \in R^{n \times n}[s]$ não singular diz-se que é **reduzida por colunas** (linhas) **SSE**:

$$\text{grau}(\det D) = \sum_{j=1}^n [\text{grau}_c^j(D)] \cdot \left(\sum_{i=1}^n [\text{grau}_i^i(D)] \right)$$

A importância desta definição baseia-se na possibilidade de gerar, através de operações elementares com linhas e colunas, e a partir de uma dada representação coprima de $H(s)$, (N_d, D_d) , uma outra equivalente, também coprima, mas com D_d reduzida por colunas (menor grau por coluna).

A partir destas definições pode ser achada a matriz de coeficientes máximos por coluna, D_h , de uma matriz $D \in R^{n \times n}[s]$ não singular e com graus por coluna k_j .

Assim:

$$D_h = \lim_{s \rightarrow \infty} D[s] \cdot [\text{diagonal}(s^{-k_j})_{j=1 \text{ a } n}]$$

Observe-se que D_h terá elementos não nulos quando o correspondente em D tenha grau igual ao máximo da coluna. A definição para linhas é equivalente.

Quando uma matriz D é reduzida por colunas, D_h é não singular.

Uma matriz D é reduzida por linhas e colunas quando:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \{(\text{diag}[s^{-r_i}]_{i=1 \dots n_e}) \cdot D[s] \cdot (\text{diag}[s^{-k_j}]_{j=1 \dots n_e})\} = D_h$$

$s \rightarrow \infty$

com $D_h \in \mathbb{R}^{n_e \times n_e}$, $\det(D_h) \neq 0$ e r_i, k_j graus por linha e coluna respectivamente.

Zeros de desacoplamento de entrada e saída. Controlabilidade e observabilidade.

Definição 2.7.

O complexo s é dito zero de desacoplamento de entrada do sistema descrito pelas equações (3) SSE dada uma matriz $L(p)$ m.d.c.e. do par (D, N_e) se verifica $L(s) = 0$.

O complexo s é dito zero de desacoplamento de saída do sistema descrito pelas equações (3) SSE dada uma matriz $R(p)$ m.d.c.d. do par (N_d, D) se verifica $R(s) = 0$.

Estas definições permitem vincular a controlabilidade e observabilidade da representação (3) com a existência de cancelamentos de modos entre as matrizes N_e , D e N_d . Como o tratamento é dual analisa-se unicamente o caso da observabilidade.

Chamando trajetória de entrada zero do sistema (3) às soluções da equação diferencial homogênea $Dz = 0$, pode-se definir a observabilidade do sistema como segue:

O sistema (3) é observável se toda trajetória não trivial de entrada zero é observável.

Uma trajetória não trivial de entrada zero é não observável quando a saída correspondente $y(t)$ verifica:

$$y(t) = N_d(p)z(t) = 0 \text{ para todo } t > 0$$

ou equivalentemente $z(t)$ é solução de:

$$[D(p)^t \ N_d(p)^t]^t z(t) = 0 \text{ para todo } t > 0$$

equivalente a ser solução de:

$$R(p) z(t) = 0 \text{ para todo } t > 0$$

sendo $R(p)$ o m.d.c.d. do par (N_d, D) .

Com isso a condição de observabilidade é colocada como segue.

O sistema (3) é completamente observável

SSE

(N_d, D) é um par coprimo pela direita

ou

não possui nenhum zero de desacoplamento de saída.

Frações internamente próprias. Estabilidade assintótica.

Uma representação do sistema (3) dada por (N_d, D, N_e, K) é internamente própria SSE as matrizes:

$$D^{-1}, N_d D^{-1}, D^{-1} N_e, e H = N_d D^{-1} N_e + K.$$

são próprias.

Definição 2.8.

Diz-se que o sistema (3) é bem conformado SE para toda condição inicial de $z(t)$ e suas derivadas, e para toda entrada $u(t)$ tal que $u(s) \in R_{po}(s)^{ni}$ e $d^j u/dt^j(0^-) = 0$ para $j=1,2,..$ se verifica:

$$z(s) \in R_{po}(s)^{ne} \quad e \quad y(s) \in R_{po}(s)^{no}$$

Pode-se provar que se o sistema é bem conformado, sua representação (N_d, D, N_e, K) é estritamente própria. Estas propriedades permitem o estudo da estabilidade assintótica do sistema através da mencionada representação.

Definição 2.9.

A representação (N_d, D, N_e, K) é exponencialmente estável SSE:

(i) toda trajetória $z(t)$ gerada a partir das condições iniciais e com entrada nula é decrescente, isto é:

para todo $z(0) \in \mathbb{R}^n$ existem dois reais $a > 0$ e $b > 0$ tais que a solução é: $z(t) < b \exp(-at)$ para todo $t > 0$;

(ii) é bem conformada.

Com esta definição pode se estabelecer o seguinte teorema:

TEOREMA 2.1.

O sistema (N_d, D, N_e, K) é exponencialmente estável SSE:

(i) $Z[\det D] \in \mathbb{C}^-$

(ii) a representação (N_d, D, N_e, K) é internamente própria.

Para testar a parte (ii) do teorema 2.1. pode ser utilizada a estrutura reduzida das matrizes do sistema. Assim :

Dado o sistema (N_d, D, N_e, K) ,

SE

D é reduzida por colunas e linhas com graus k_j e r_i respectivamente, e se verifica:

$$\text{grau}_1^i [N_e] = < r_i \text{ para todo } i=1,2,\dots,n_e$$

$$\text{grau}_e^j [N_d] = < k_j \text{ para todo } j=1,2,\dots,n_e$$

$$K \in R^{n_o \times n}$$

ENTÃO

o sistema é bem conformado.

Matrizes próprias por linha ou coluna. Matrizes causais e bicausais. Ordem de uma matriz não nula.

Dada uma matriz racional $W(s) \in R(s)^{n \times m}$ e sua representação em vetores coluna, $w_1 \ w_2 \ \dots \ w_m$ com $w_i(s) \in R(s)^n$, gera-se $W'(s)$ e $R_o(s)^{n \times m}$ tal que suas colunas $w'_i(s)$ verificam:

$$w'_i(s) = s^{-\text{grau}(w_i)} w_i(s)$$

e calcula-se $W^* = \lim_{s \rightarrow \infty} W'(s)$.

$$s \rightarrow \infty$$

Definição 2.10 :

Diz-se que $W \in R(s)^{n \times m}$ é própria por colunas se a matriz W^* é injetiva. Dualmente, se W^t é própria por colunas, então W é própria por linhas.

Definição 2.11 :

Uma matriz $W(s)$ e $R(s)^{n \times m}$ é causal (estritamente causal) se todo elemento não nulo de $W(s)$ é próprio (estritamente próprio). Se $W(s)$ causal tiver inversa pela direita (esquerda), diz-se que é bicausal pela direita (esquerda). Se $W(s)$ for quadrada e inversível e sua inversa for causal, diz-se que $W(s)$ é bicausal.

Definição 2.12 :

A ordem de uma matriz $T(s)$ não nula é definida como o inteiro $\text{ordem}(T(s))$ tal que verifica:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^{-\text{ordem}(T(s))} T(s) = k \neq 0$$

A solução do "two-side matching problem" : $A = B X C$.

A solução da equação $A = BXC$ para A , B , e C matrizes polinômiais é de grande interesse na teoria de sistemas multivariáveis, pois permite uma abordagem polinomial do problema de rejeição de perturbações. Para que os problemas relativos à rejeição de perturbações dos capítulos 4 e 5 possam ser devidamente analisados é necessário estudar a solução da equação $A = BXC$ nos anéis $R_p(s)$ e $R[s]$.

Considere-se $A \in R[s]^{p \times q}$, $B \in R[s]^{p \times r}$, $C \in R[s]^{s \times q}$ e sejam $U \in R[s]^{p \times p}$, $V \in R[s]^{q \times q}$ matrizes polinômiais unimodulares tais que:

$$UB = \begin{bmatrix} B' \\ 0 \end{bmatrix} \quad CV = [C' \ 0]$$

e onde $B' \in R[s]^{k \times r}$ é própria por linhas e $C' \in R[s]^{s \times l}$ é própria por colunas com graus por linha e coluna u_i e v_j , respectivamente.

$$\text{Seja } A' = U A V = \begin{vmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{vmatrix} \quad \text{com } A'_{11} \in R[s]^{k \times l}$$

e seja G_B (G_C) o maior fator comum pela esquerda (direita) de B' (C'), isto é:

$$B' = G_B U_B \quad C' = U_C G_C$$

onde U_B (U_C) é própria por linhas (colunas) e unimodular pela esquerda (direita).

A partir destas matrizes as condições de solução da equação $A = B X C$ são colocadas no seguinte teorema:

TEOREMA 2.2:

A equação $A = B X C$ tem uma solução $X(s)$ tal que:

(i) $X(s) \in R_p(s)$ SSE:

$$A'_{12} = 0, A'_{21} = 0, A'_{22} = 0 \quad (4)$$

$$\text{grau}(a'_{ij}) = < u_i + v_j \quad i=1..k, j=1..l \quad (5)$$

(ii) $X(s) \in R[s]$ SSE vale a condição (4) e

$$G_B^{-1} A'_{11} G_C^{-1} \text{ é matriz polinomial} \quad (6)$$

A prova completa do teorema pode ser achada em Ozgurer (1985). Aqui somente será colocado o procedimento de síntese da matriz X(s) quando verificadas as condições de solução.

caso (i):

Considere a equação $A'_{11} = B' X C'$ (7)

Como B'(C') é própria por linhas (colunas) existe uma matriz própria inversa pela direita (esquerda) tal que, [Hautus 78]:

$$B'(s) = D_B(s) B_1(s) \quad C'(s) = C_1(s) D_C(s)$$

onde: D_B(s) é diagonal (s^{u1} s^{u2} ... s^{uk})

$$D_C(s) \text{ é diagonal } (s^{v1} s^{v2} \dots s^{vl})$$

e B₁(s) (C₁(s)) é bicausal pela direita (esquerda) e tem inversa própria pela direita (esquerda) B₂(s) (C₂(s)).

Assim:

$$X(s) = B_2(s) D_B(s)^{-1} A'_{11}(s) D_C(s)^{-1} C_2(s)$$

é solução de (7) e pela condição (5) também é própria. Usando a condição (4) vale que X(s) é solução de:

$$A' = U A V = \begin{bmatrix} B' \\ - \\ 0 \end{bmatrix} \quad X(s) [C' \ 0] = U B X(s) C V$$

é portanto solução de A = B X C.

caso (ii):

Seja a equação $A'_{11} = B' X C' = G_B U_B X V_B G_C$

Assim basta escolher $X(s) = V_B G_B^{-1} A'_{11} G_C^{-1} V_C$

onde V_B (V_C) é unimodular e inversa pela direita (esquerda) de U_B (U_C). Além disso por

(6) $X(s)$ é polinomial e por (4) é solução de:

$$A' = U A V = \begin{bmatrix} B' \\ 0 \end{bmatrix} X(s) [C' \ 0] = U B X(s) C V$$

e portanto de $A = B X C$.

Comentários gerais.

Os conceitos analisados neste item podem ser considerados como os básicos, ou mínimos necessários, para a compreensão das soluções dos diferentes problemas que serão estudados nos próximos capítulos utilizando a estrutura de servocompensador clássico e com representação polinomial dos sistemas.

PARTE 2

Estudo dos Principais Problemas da Teoria de Controle de Sistemas Lineares Multivariáveis

CAPÍTULO 3: POSICIONAMENTO DE PÓLOS E ESTABILIDADE

3.1. Introdução

O estudo do posicionamento de pólos (PP) e da estabilidade (E) é um dos problemas mais importantes na teoria de controle de sistemas multivariáveis. Em geral o engenheiro de controle encontra-se frente à necessidade de estabelecer, com boa aproximação, certas características no comportamento dinâmico do sistema. Para isso devem ser utilizadas técnicas de realimentação que permitam escolher adequadamente os modos de excitação do sistema em malha fechada (MF). Este problema, analisado numa estrutura entrada-saída do sistema, conduz diretamente ao posicionamento de pólos. Se a análise é feita preocupando-se da dinâmica interna do sistema, então deve se orientar o estudo a uma alocação de autovalores do sistema em MF.

Mesmo sem entrar nos detalhes das diferentes técnicas de controle que dão solução a estes problemas, duas questões importantes devem ser levantadas:

- (i) a relação entre o comportamento dinâmico do sistema e a posição de seus polos ou autovalores;
- (ii) as possibilidades teóricas de posicionar os polos ou autovalores.

O primeiro problema, de características simples no caso monovariável, deve ser analisado detalhadamente nos sistemas multivariáveis, devido à não unicidade da solução para um dado conjunto de pólos (autovalores). Isto traz como consequência a obtenção de comportamentos dinâmicos bem diferentes segundo a eleição de uma das possíveis soluções. Para estabelecer a melhor solução, dentro do conjunto das possíveis, diversas metodologias tem sido desenvolvidas, [Fontes 88], [Chen 70].

O segundo problema leva diretamente a análise da controlabilidade (estabilizabilidade) e da observabilidade (detetabilidade) do sistema, e como consequência à região do plano complexo escolhida para o posicionamento. Assim considera-se a estabilização de um sistema quando o conjunto onde é desejado alocar os pólos do sistema é o semiplano esquerdo do plano complexo excluído o eixo imaginário (C^-), e o posicionamento de pólos quando o conjunto desejado for qualquer subconjunto de C^- , (nota-se C_b).

Com estas considerações pode-se fazer uma primeira análise tratando unicamente o PP e considerar a E como um caso particular do anterior quando as condições de controlabilidade e/ou observabilidade forem substituídas respectivamente pelas de estabilizabilidade e/ou detetabilidade. Nestes casos, poderão ser utilizadas tanto representações internas (ou completas) como de entrada-saída, já que as condições de controlabilidade e observabilidade asseguram a equivalência total entre ambas. Uma segunda análise tratará do sistema representado em forma completa para obter conclusões à respeito dos modos não controláveis ou não observáveis. Para isso as representações serão tais que colocarão em evidência a dinâmica do estado ou pseudo estado do sistema.

3.2. Posicionamento de pólos

O problema de posicionamento de pólos (PPP) de um sistema linear multivariável (SLM) pode ser abordado utilizando a sua representação por variáveis de estado ou de entrada-saída; e de diferentes maneiras dentro de cada uma de elas.

3.2.1. Análise por variáveis de estado

São diversas as técnicas de controle aplicadas ao PPP. A mais tradicional delas é a que utiliza uma lei de realimentação dos estados do sistema através de uma matriz de ganhos constantes como na estrutura da figura 3.1.

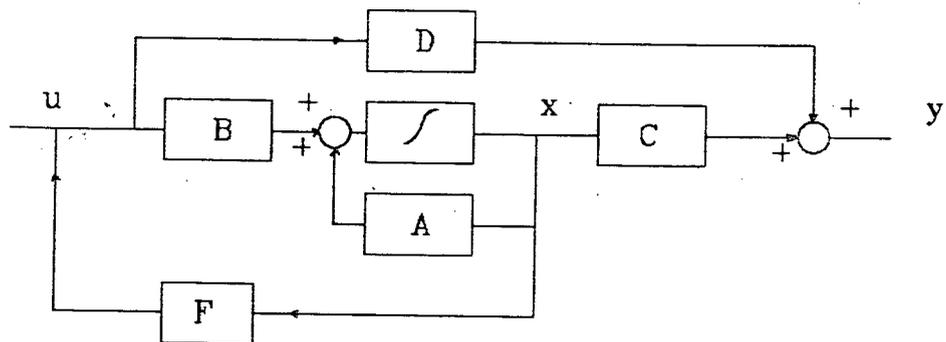


Figura 3.1. Realimentação de estados.

Equações do sistema:

$$\frac{dx}{dt} = A x + B u \quad t > 0$$

$$y = C x + D u \quad x(0) = x_0$$

com $x \in X$ (dim n), $u \in U$ (dim m), $y \in Y$ (dim p) e A, B, C, D matrizes reais de dimensões apropriadas.

Equação de realimentação: $u = F x$

Teoricamente, e sob condições de controlabilidade do sistema [Wonham 79], esta técnica se apresenta como muito simples, porém, a solução real do problema deve enfrentar e salvar duas dificuldades importantes: (a) em muitos sistemas não é possível

medir diretamente o vetor de estados x , e (b) os métodos numéricos para o cálculo final da matriz de realimentação apresentam problemas de estabilidade importantes, [Fontes 88]. O primeiro dos problemas pode ser solucionado utilizando um observador de estado (isto é, usar a informação da saída e entrada do sistema para gerar um estimador do estado), ou diretamente realimentando a saída através de uma matriz de ganhos constantes. Para construir um observador (ver figura 3.2.) que estime adequadamente o estado do sistema, sob condições de observabilidade, é necessário que sua dinâmica seja bem mais rápida que a do próprio sistema em malha fechada, [Wonham 79], [Kailath 80], [Chen 70]. Mesmo resolvendo esta dificuldade, o problema numérico de cálculo da lei de realimentação continua presente.

A escolha de um algoritmo de cálculo da matriz de realimentação de estados depende diretamente do método utilizado para obter a solução teórica. No caso monovariável existe uma única solução para este problema, mas no caso multivariável a especificação da dinâmica somente fixa os autovalores do mapa linear sem definir de maneira única os autovetores associados, [Fahny 82], [Fanhy 83]. O método escolhido para fixação destes autovetores determinará assim o algoritmo de cálculo da matriz de realimentação e conseqüentemente seus problemas de instabilidade numérica. Uma análise mais detalhada deste problema pode ser encontrado em [Fontes 88].

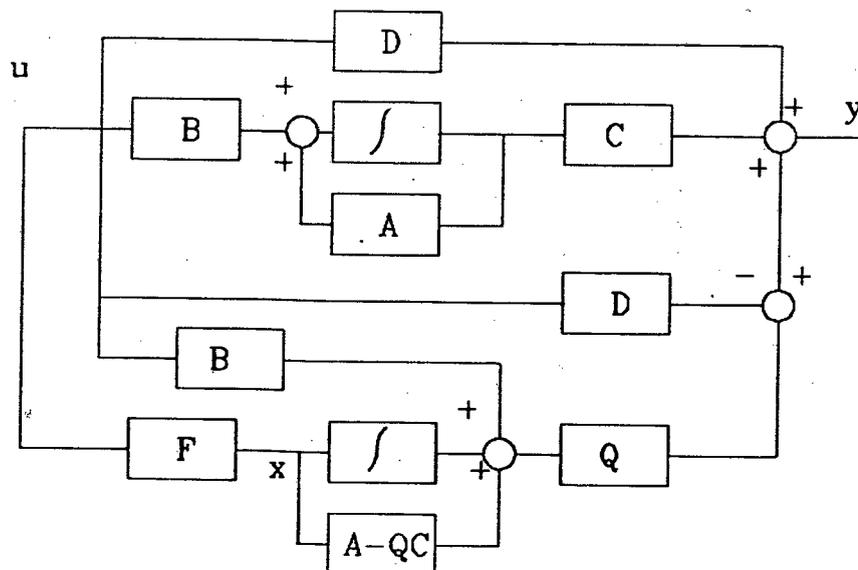


Figura 3.2. Realimentação de estados com observador.

Equação do observador:

$$\frac{dx'}{dt} = (A - Q C) x' + B u + Q (y - D u)$$

com x' = estimador do estado, e $Q \in \mathbb{R}^{n \times p}$.

Num outro esquema de realimentação, conhecido como realimentação dinâmica (ver figura 3.3.), é utilizada exclusivamente informação da saída para gerar a lei de realimentação. A existência do mencionado compensador depende somente das condições de observabilidade e controlabilidade do sistema (A, B, C, D), e sua ordem pode ser um a menos que o índice de observabilidade ou de controlabilidade do sistema, [Wonham 79].

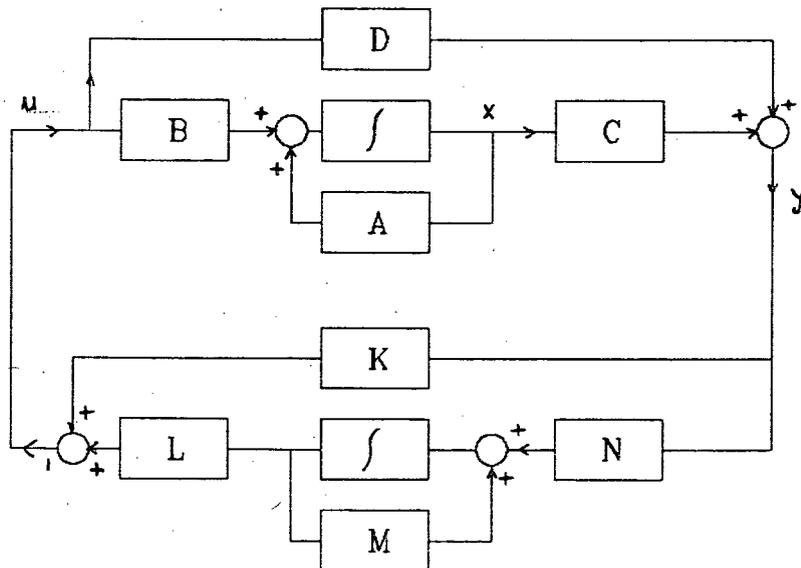


Figura 3.3. Realimentação com compensador dinâmico.

Equações do compensador dinâmico:

$$\frac{dw}{dt} = M w + N y$$

$$u = L w + K y \quad t > 0$$

com $w \in \mathbb{W}$ (dim l) e as matrizes M, N, L, K de dimensões apropriadas.

É importante notar que posicionar os pólos de um SLM implica em posicionar seus autovalores (modos) observáveis e controláveis, e que somente no caso (A,B) controlável e (C,A) observável todos os pólos são coincidentes com os autovalores. Este resultado é consequência direta da definição dos pólos como raízes do polinômio denominador da função de transferência do sistema irreduzível representado por:

$$P(s) = C (sI - A)^{-1} B + D,$$

$$y(s) = P(s) u(s) \text{ com } \dim y(s) = p \text{ e } \dim u(s) = m,$$

e dos autovalores como raízes do polinômio característico do mapa A , dado por:

$$\text{polc-}A(s) = \det(sI - A).$$

Já na técnica de realimentação estática da saída (figura 3.4.), mesmo sob condições de controlabilidade e observabilidade do sistema, a solução do problema não é sempre possível, e também não está a salvo dos problemas numéricos de implementação. Vários trabalhos foram desenvolvidos com o objetivo de achar as condições para a existência de solução assim como para a obtenção de algoritmos de cálculo, [Davison 75], [Kimura 75], [Magni 85]. Em geral, a existência de solução está sujeita a relações entre o número de entradas, saídas, e estados do sistema. Baseadas nessas relações tem sido achadas condições necessárias de existência da solução, mas não se conhece ainda nenhuma condição necessária e suficiente. Uma outra proposta de solução, não global mas de caráter local com realimentação direta da saída é a apresentada em [Kabamba 82], onde é solucionado o problema de modificar arbitrariamente a posição dos pólos de malha fechada nas vizinhanças de um conjunto deles.

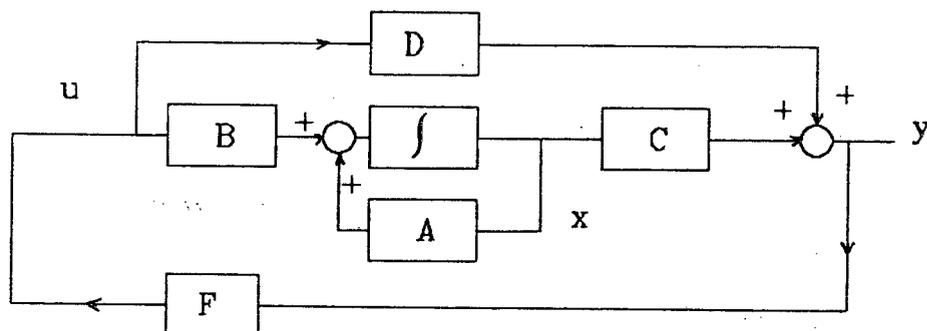


Figura 3.4. Realimentação direta da saída.

Equação da realimentação: $u = F y$

3.2.2. Análise na representação entrada-saída.

Uma segunda alternativa de abordagem deste problema é através da representação entrada-saída do sistema. Como consequência, as alternativas de controle são reduzidas à realimentação da saída em forma dinâmica (figura 3.5.a) ou estática (figura 3.5.b).

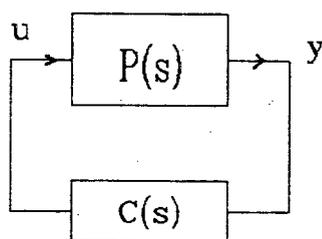


Figura 3.5.a. Realimentação dinâmica.

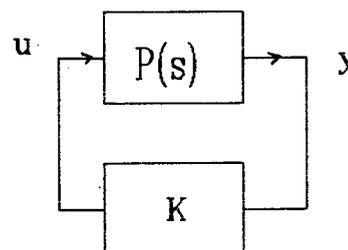


Figura 3.5.b. Realimentação estática.

Para se fazer uma análise comparativa com os resultados já apresentados da teoria de variáveis de estado é necessário achar as equivalências de representação do sistema. Assim, o esquema de blocos da figura 3.2. pode ser colocado como:

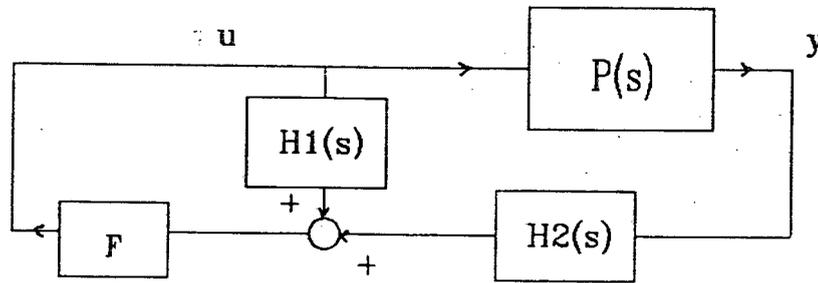


Figura 3.6. Representação entrada-saída da realimentação por observador.

onde:

$$P(s) = D + C(sI - A)^{-1} B$$

$$H1(s) = (sI - A + QC)^{-1} (B - DQ)$$

$$H2(s) = (sI - A + QC)^{-1} Q$$

e onde a lei de realimentação é gerada não somente com informação da saída do sistema mas também com a da entrada. Este diagrama de blocos da figura 3.6. representa através de funções de transferência o esquema clássico de realimentação de estados com observador. Dado que $P(s)$ representa a parte controlável e observável do sistema (A, B, C, D) , fica assegurada a existência das submatrizes do observador e de realimentação para posicionamento de pólos. Analisando a estrutura da figura 3.3., equivalente a da figura 3.5.a. é possível concluir que para obter posicionamento de pólos pode se escolher, na estrutura da figura 3.6., $H1(s) = 0$, o que equivale, na representação por variáveis de estado, a utilização de um compensador dinâmico ou um observador com a restrição $B = 0$. Isto significa que não é preciso gerar internamente no compensador o estado do sistema. A equação do compensador dinâmico equivalente ao descrito em variáveis de estado é:

$$C(s) = K + L(sI - M)^{-1} N$$

Com as considerações feitas, o problema de posicionamento de pólos através da representação entrada-saída pode ser analisado nas estruturas clássicas da figura 3.7. A diferença entre ambas é estabelecida na escolha do ponto de entrada da referência.

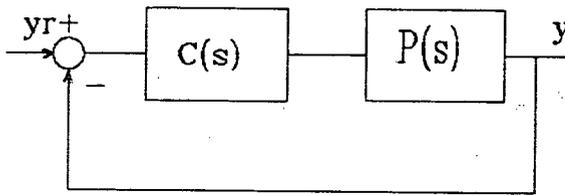


Figura 3.7.a. Estrutura cascata.

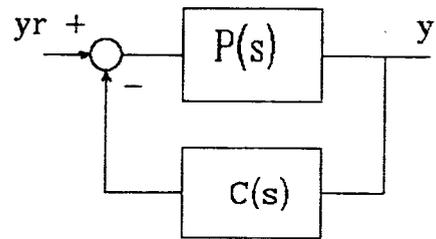


Figura 3.7.b. Servocompensador em realimentação.

3.2.3. Representação por frações polinomiais.

Para resolver o problema de posicionamento de pólos nestas estruturas será utilizada uma representação por frações polinomiais das funções de transferência da planta e do compensador. A nomenclatura e conhecimentos básicos necessários para acompanhar a análise foram analisados no capítulo 2 e podem ser encontrados com maiores detalhes nas referências nele citadas. A estrutura utilizada para a análise é a da figura 3.7.a.

Considera-se que:

- $P(s)$ e $R_{po}(s)^{noxni}$ tem uma representação em frações coprimas pela direita (f.c.d.) (D_{pd}, N_{pd}) internamente própria tal que:

(i) D_{pd} é reduzida por colunas com graus por coluna k_j . (1)

(ii) A matriz de coeficientes de maior grau por coluna de D_{pd} é I_{ni} . (2)

- $C(s) \in R_p(s)^{n \times n}$ na figura 3.7.a é tal que:

(i) (D_{ce}, N_{ce}) é uma fração pela esquerda (f.e) internamente própria. (3)

(ii) D_{ce} é reduzida por linhas. (4)

Nota-se $J(s)$ ao polinômio característico desejado de malha fechada. Deve-se notar que as condições (1) e (2), verificadas pela representação da planta não limitam a generalidade do projeto, já que sempre é possível achar uma f.c.d. de $P(s)$ que as verifique, [Callier 82].

Calculando a malha fechada do sistema, $y(s) = H(s) y_r(s)$ tem-se:

$$H(s) = N_{pd} [D_{ce} D_{pd} + N_{ce} N_{pd}]^{-1} N_{ce} = N_{pd} D_k^{-1} N_{ce} \quad (5a)$$

$$\text{com } J(s) = \det [D_{ce} D_{pd} + N_{ce} N_{pd}] = \det D_k(s) \quad (5b)$$

onde os pólos de malha fechada, i.e. os zeros de $\det(D_k(s)) = 0$, são um conjunto de números complexos simétrico e pertencente ao semiplano esquerdo do plano complexo, condição que assegura a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada. Assim D_k é escolhido para cumprir a condição anterior e para que a equação:

$$X D_{pr} + Y N_{pr} = D_k \quad (6)$$

tenha soluções $(X, Y) \in R[s]^{n \times n} \times R[s]^{n \times n}$ que verifiquem:

(X, Y) é uma f.e. internamente própria. (7)

X é reduzida por linhas. (8)

Sob estas condições o controlador solução, $C(s) = X^{-1} Y$ será uma função de transferência racional própria. O cálculo do controlador se reduz então a encontrar uma solução da equação (6) com as condições (7) e (8), [Callier 82].

Uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução polinomial qualquer da equação (6) é colocada no seguinte teorema.

TEOREMA 3.1. [Callier 82]

Considere a eq. (6) com $P(s)$ satisfazendo (1) e (2). Sob estas condições o par $(X, Y) \in R[s]^{n \times n} \times R[s]^{n \times n}$ é solução da equação (2) SSE existe $N_k \in R[s]^{n \times n}$ tal que:

$$X = D_k V_{pd} - N_k N_{pe} \quad (9)$$

$$Y = D_k U_{pd} + N_k D_{pe} \quad (10)$$

onde $V_{pd}, U_{pd}, D_{pe}, N_{pe}$ são os elementos da igualdade generalizada de Bezout.

Além disso, (X, Y) é coprima pela esquerda (c.e.) SSE (D_k, N_k) é c.e..

Observações:

(i) O cálculo não assegura (X, Y) internamente própria nem X reduzida por linhas.

(ii) As eqs. (9) e (10) são uma parametrização em N_k da solução, [Vidyasagar 85]. Isto significa que todas as possíveis soluções do problema podem ser achadas através dessas expressões com N_k como parâmetro.

(iii) N_k pode ser calculado como o quociente da divisão pela direita de $D_k U_{pd}$ por D_{pe} , isto é:

$$D_k U_{pd} = -N_k D_{pe} + Y \quad \text{tal que } Y^{-1} D_{pl} \in R_{po}(s)^{n \times n_0}$$

Para uma solução internamente própria do problema, além da já estabelecida condição $\det(D_k(s)) = J(s)$, devem ser consideradas algumas condições de grau nos elementos da matriz $D_k(s)$. Isto é analisado num segundo teorema.

TEOREMA 3.2.[Callier 82]

Seja $P(s)$ com as condições (1) e (2), e $D_k(s) \in R[s]^{n \times n_1}$. Seja (D_{pe}, N_{pe}) uma f.c.e. internamente própria qualquer de $P(s)$ com D_{pe} reduzida por linhas.

ENTÃO

a equação (6) tem uma solução (X, Y) tal que:

$$(X, Y) \in R[s]^{n \times n_1} \times R[s]^{n \times n_0}$$

(X, Y) é int. própria com X reduzida por linhas e com graus por linha $r_i, i = 1 \dots n_1$,

SE

$D_k(s) \in R[s]^{n \times n_1}$ é reduzida por colunas e linhas, com graus por linha r_i e graus por coluna k_j tais que:

$$r_i \geq u - 1 \quad \text{para } i = 1 \dots n_1, \text{ onde:}$$

$$u = \max \text{ grau por linha de } D_{pl} = \max \text{ grau de elementos de } D_{pl}.$$

Observações:

- (i) u é único para uma dada $P(s)$, e portanto os r_i são escolhidos independentemente da representação polinomial utilizada para $P(s)$;
- (ii) u é o índice de observabilidade de $P(s)$, [Kailath 80];
- (iii) Como pode ser observado das condições do teorema, a imposição de graus mínimos na matriz $D_k(s)$ cria restrições de grau na ordem do determinante $\det(D_k(s))$, isto é, do polinômio característico de malha fechada, e também no compensador $C(s)$. Resulta:

$$\text{grau} [\det D_k(s)] \geq \sum_{i=1}^{n_i} [k_i] + n_i(u - 1)$$

$$\text{grau} [\det D_k(s)] \geq \text{grau} [\det D_{pd}] + n_i(u - 1)$$

O último resultado coincide totalmente com o obtido na teoria geométrica, [Wonham 79], onde a ordem do compensador dinâmico é $(u - 1)$, já que a ordem de $C(s) = X^{-1}Y$ (no pior caso) é obtida como a soma das ordens mínimas de cada termo da diagonal da matriz $X(s)$. Além disso ambos resultados são conservativos, isto é, a ordem do compensador calculado pode não ser mínima.

3.2.4. Comentários gerais.

Com esta última análise confirma-se, nos sistemas controláveis e observáveis, uma grande equivalência de resultados teóricos entre ambos enfoques. A nível de implementação algorítmica as técnicas de variáveis de estado para SLM são bem conhecidas, e também as mais utilizadas. Nelas, a síntese dos compensadores consiste na

determinação de uma matriz de realimentação de estados ou das duas matrizes que formam o par observador-lei de realimentação.

As técnicas polinomiais não estão tão difundidas a nível de implementação algorítmica, mas elas se apresentam como uma alternativa interessante. Em particular um algoritmo de cálculo do compensador $C(s)$ para posicionar os polos de $P(s)$ no esquema da figura 3.7.a. constaria dos seguintes passos:

- (i) Escolher $D_k(s)$ para que verifique as condições do teorema 3.2.;
- (ii) Calcular as matrizes V_{pd} , U_{pd} , N_{pe} , D_{pe} utilizando a igualdade de Berzout;
- (iii) Efetuar a divisão pela direita:

$$D_k U_{pr} = -N_k D_{pl} + Y \quad \text{com } Y^{-1} D_{pl} \in R_{po}(s)^{n \times n_0}$$

para obter N_k e Y (quociente e resto respectivamente);

- (iv) Calcular $C(s)$ a partir das equações:

$$X = D_k V_{pr} - N_k D_{pl}$$

$$C(s) = X^{-1} Y$$

3.3. Estabilidade do sistema total.

Como já foi mencionado, para se realizar um estudo da estabilidade interna ou total de um sistema, é necessário conhecer uma representação completa do mesmo. As duas representações que permitem colocar em evidência a dinâmica interna são:

(i) representação matricial ou do estado (x), de equações:

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= A x(t) + B u(t) & t \geq 0, x(0) &= x_0 \\ y(t) &= C x(t) + D u(t) \end{aligned}$$

com $x \in X$ (dim n), $u \in U$ (dim n_i), $y \in Y$ (dim n_o) e A, B, C, D matrizes reais de dimensões apropriadas;

(ii) representação polinomial ou do pseudo estado (z).

$$\begin{aligned} D(p) z(t) &= N_e(p) u(t) & t \geq 0, p &= d/dt \\ y(t) &= N_d(p) z(t) + K(p) u(t) \end{aligned}$$

com $D(p)$ não singular e $\text{grau}(\det D(p)) = n$, e com $z \in Z$ (dim r), $u \in U$ (dim n_i), $y \in Y$ (dim n_o) e $D(p), N_e(p), N_d(p)$ e $K(p)$ matrizes polinomiais de dimensões apropriadas.

Além disso o vínculo com a representação por função de transferência do sistema é dada pela seguinte equação:

$$P(s) = D + C (sI - A)^{-1} B = K + N_d^{-1} D_p N_e \quad (11)$$

mas somente sob condições de controlabilidade e observabilidade do sistema completo as três representações são equivalentes.

No que segue se analisarão os motivos principais pelos quais o estudo da estabilidade total, ou interna, é de grande importância no projeto do controle do sistema.

Suponha-se que o engenheiro de controle utiliza uma representação não completa do sistema, conhecida como de caixa preta, isto é, através de um conjunto de relações entrada-saída (y/u). Assim, se não for possível obter nenhuma outra informação do sistema, o problema da estabilidade interna não poderá ser analisado. No entanto, os modos instáveis ocultos (não controláveis e/ou não observáveis), sempre que existam, se manifestarão através de "outras" variáveis de saída do sistema (não contidas em y). Porém, quando existe a possibilidade de "entrar" no sistema e obter uma representação mais completa, isto é, que modele os modos ocultos da relação y/u , será possível prever o comportamento do sistema. Já para solucionar o problema, isto é, para torna-lo estável, deverá ser possível atuar sobre esses modos e não somente saber da sua existência. Isto é claro, dependerá das particularidades de cada sistema.

Assim, quando o sistema em estudo for não controlável e/ou não observável, previamente à utilização de quaisquer teorias de controle deve-se fazer um estudo da estabilidade interna. E somente se o sistema completo for estabilizável e detectável, isto é, que todos os seus modos não controláveis e não observáveis forem estáveis, o projeto do controle, em quaisquer das suas representações, obterá resultados equivalentes.

3.3.1. Condições de estabilizabilidade e detectabilidade.

Na representação de estado do sistema, as condições de estabilizabilidade e detectabilidade podem ser colocadas, respetivamente, em função dos subespaços modos controláveis ($\langle A, B \rangle$) e de modos não observáveis (N_{ob}). Assim tem-se:

$$\langle A, B \rangle \text{ é estabilizável SSE } X^+(A) \text{ c } \langle A, B \rangle \quad (12)$$

$$\langle C, A \rangle \text{ é detectável SSE } N_{ob} \text{ c } X^-(A) \quad (13)$$

onde:

$X^+(A)$ = subespaço de modos instáveis do mapa A

$X^-(A)$ = subespaço de modos estáveis do mapa A

Na representação por equações polinomiais as condições de estabilizabilidade e detectabilidade são colocadas, respetivamente, em função dos zeros de desacoplamento de entrada e de saída. Assim tem-se:

O sistema (D, N_e, N_d) é estabilizável SSE não possui nenhum zero de desacoplamento de entrada instável, o que equivale a:

$$\text{posto } [D(s) \ N_e(s)] = r \text{ para todo } s \in C^+ \quad (14)$$

O sistema (D, N_e, N_d) é detectável SSE não possui nenhum zero de desacoplamento de saída instável, o que equivale a:

$$\text{posto } [D^t(s) \ N_d^t(s)]^t = r \text{ para todo } s \in C^+ \quad (15)$$

3.3.2. Comentários gerais.

As equações (12), (14) e (13), (15) estabelecem teoricamente e em diferentes representações, as mesmas condições para a estabilizabilidade e a detectabilidade respectivamente de um sistema linear multivariável. A aplicação de uma ou outra técnica dependerá fundamentalmente dos seguintes aspectos:

- (i) a representação em que se encontre o sistema,
- (ii) a facilidade de implementação de algoritmos para a verificação das condições.

Devido à dualidade dos problemas de estabilizabilidade e detectabilidade será analisado somente o primeiro e os resultados serão estendidos ao segundo.

Como já foi mencionado o estudo da estabilizabilidade tem interesse somente quando o sistema é não controlável verificando-se portanto alguma das seguintes condições:

não controlável $\leftrightarrow \langle A, B \rangle = / X \leftrightarrow \text{posto}[B \ AB \dots \ A^{n-1}B] < n$

não controlável $\leftrightarrow \text{posto}[D(s) \ N_e(s)] < r$ para algum $s \in C$

Nos métodos geométricos-matriciais existem duas alternativas de solução que utilizam o cálculo feito previamente na verificação da não controlabilidade. Supõe-se conhecida a família de k vetores coluna linearmente independentes (t_i) da matriz $[B \ AB \dots \ A^{n-1}B]$ de posto $k < n$, ou equivalentemente uma base do espaço $\langle A, B \rangle$. A partir dela podem ser usados dois procedimentos diferentes:

Procedimento 1:

PASSO 1: gera-se uma matriz de transformação de base (T) tal que é inversível e contém a

família de vetores t_i :

$$T = [t_1 \ t_2 \ \dots \ t_1 \ \dots \ t_n]$$

PASSO 2: transforma-se o sistema original na sua representação canônica de Kalmman usando a matriz T:

$$\bar{A} = \left| \begin{array}{cc} A_C & A_{12} \\ 0 & A_{nc} \end{array} \right| \quad \bar{B} = \left| \begin{array}{c} B_C \\ 0 \end{array} \right| \quad C = [C_C \ C_{nc}]$$

PASSO 3: calculam-se os autovalores do mapa A_{nc} e verifica-se a estabilidade.

Procedimento 2:

PASSO 1: calcula-se o polinômio mínimo de A e fatora-se na suas partes estáveis e instáveis. Seja pol-inst(s) a sua parte instável.

PASSO 2: gera-se o subespaço $X^+(A) = \text{Ker} [\text{pol-inst}(A)]$ e representa-se o mesmo através de uma base de vetores v_i .

PASSO 3: verifica-se a condição de estabilizabilidade testando se todo vetor v_i pode ser expresso como combinação linear dos t_i , o que implica num procedimento de solução de equações lineares.

Um terceiro procedimento matricial utiliza somente as matrizes A e B do sistema para a verificação da controlabilidade e/ou estabilizabilidade.

Procedimento 3:

Calculam-se os autovalores dos mapas $(A + BF_1)$ e $(A + BF_2)$, para um par de leis de

realimentação F_1 e F_2 escolhidas aleatoriamente, e determinam-se os autovalores coincidentes. Aqueles valores coincidentes podem ser considerados, com probabilidade quase um, como os modos fixos ou não controláveis do sistema. Assim se eles forem estáveis pode se dizer que o sistema (A,B) é estabilizável. Deve-se notar que o método depende fortemente da aleatoriedade da escolha de F_1 e F_2 .

Na representação polinomial o procedimento utilizado para a verificação da controlabilidade permite diretamente analisar a estabilizabilidade do sistema. Para se calcular o posto da matriz $[D(s) \ N_e(s)]$ gera-se a forma triangular de Hermite e calculam-se as raízes dos r polinômios da diagonal principal da matriz (sempre que o posto seja r para algum valor de $s \in \mathbb{C}$). Se todas as raízes forem estáveis o sistema será estabilizável.

Observe que a obtenção da forma de Hermite apresenta menos dificuldades algorítmicas-computacionais que os procedimentos 1 e 2 da teoria geométrica-matricial. Além disso, a nível de representação, existe uma forma simples de expressar, mediante polinômios, as equações matriciais do sistema, isto é:

$$\begin{aligned} D(s) &= sI - A & N_e(s) &= B \\ N_d(s) &= C & K(s) &= D \end{aligned}$$

Observe-se que o procedimento inverso apresenta grandes dificuldades de implementação.

Esta análise mostra a maior simplicidade, tanto a nível algorítmico como de implementação, dos procedimentos polinomial e terceiro da teoria matricial. Pode-se considerar ainda que o método polinomial apresenta a vantagem da independência de uma escolha adequada das matrizes F_1 e F_2 .

3.4. Uma análise da robustez dos compensadores.

Quando o engenheiro de controle projeta um determinado controlador para posicionar os pólos ou estabilizar um sistema em MF, deve considerar as possíveis diferenças entre o modelo utilizado e o sistema real onde será instalado aquele controlador. Por isso, na hora do projeto, deverá ser considerado o universo de plantas às quais ele estará conectado. O mencionado universo é geralmente representado através de um elemento central ou nominal (planta não perturbada) e de uma certa região, em torno daquele elemento, ocupada pelas plantas com parâmetros perturbados.

Fazendo-se uma análise geral das perturbações paramétricas na representação entrada-saída, (não se conhecem resultados similares na teoria geométrica-matricial) tem-se três grupos principais:

- (i) perturbações aditivas em $P(s)$,
- (ii) perturbações relativas à planta nominal $P_0(s)$, e
- (iii) perturbações na representação polinomial coprima de $P(s)$.

Fixado o universo de plantas onde trabalhará o compensador, deverão ser especificadas às condições desejadas para o comportamento dinâmico do sistema perturbado. Como a posição exata dos pólos no plano complexo será uma função dos parâmetros da planta, adota-se geralmente o critério de estabilidade para especificar a posição dos pólos perturbados de MF. Analisam-se então os três grupos de perturbações, [Vidyasagar 85].

3.4.1. Perturbações paramétricas aditivas.

Seja P_0 a planta nominal e estável. Seja $d(s)$ uma dada função de transferência própria. A classe de plantas com perturbações aditivas é o conjunto de todas as $P(s)$ tais

que $P \in R(s)^{n \times n}$, que possuem o mesmo número de pólos que P_0 (segundo seus graus de Smith-McMillan, [Vidyasagar 85]) e satisfazem a relação:

$$\| |P(j\omega) - P_0(j\omega)| \| < |d(j\omega)| \text{ para todo } \omega \in \mathbb{R}.$$

Esta classe será chamada $A(P_0, d)$. Observa-se que a condição no número de pólos implica em perturbações que não mudam a ordem do sistema, ou seja não são gerados modos ocultos.

Considerando o sistema da figura 3.7.a. já analisada, o seguinte teorema coloca uma CNEs para que um dado compensador $C(s)$ estabilize todas as plantas $P(s) \in A(P_0, d)$.

TEOREMA 3.3. [Vidyasagar 85]

Suponha-se $P(s) \in R(s)^{n \times n}$, $d(s) \in R_0(s)$ e o compensador $C(s) \in R(s)^{n \times n}$ tal que posiciona os pólos de MF em C_b e C^- . Então $C(s)$ estabiliza toda $P \in A(P_0, d)$ SSE se verifica:

$$\| |C(I + P_0 C)^{-1}(j\omega)| \| |d(j\omega)| = < 1 \text{ para todo } \omega \in \mathbb{R}$$

3.4.2. Perturbações paramétricas relativas a P_0 .

Seja P_0 a planta nominal e estável. Seja $d(s)$ uma dada função de transferência própria. A classe de plantas com perturbações paramétricas relativas a P_0 , $M(P_0, d)$, são as $P(s) \in R(s)^{n \times n}$, que possuem o mesmo número de pólos que P_0 (segundo seus graus de Smith-McMillan) e satisfazem a relação:

$$P(s) = (I + M(s)) P_0(s) \text{ com } M(s) \in R(s)^{n \times n}, \text{ e}$$

$$\| |M(j\omega)| \| < |d(j\omega)| \text{ para todo } \omega \in \mathbb{R}.$$

A CNeS para que $C(s)$ estabilize toda $P(s) \in M(P_0, d)$ é dada no seguinte teorema:

TEOREMA 3.4. [Vidyasagar 85]

Suponha-se $P(s) \in R(s)^{n \times n}$, $d(s) \in R_0(s)$ e o compensador $C(s) \in R(s)^{n \times n}$ tal que posiciona os pólos de MF em $C_b \in C^-$. Então $C(s)$ estabiliza toda $P \in M(P_0, d)$ SSE se verifica:

$$\| P_0 C (I + P_0 C)^{-1} (j\omega) \| \| d(j\omega) \| = < 1 \text{ para todo } \omega \in \mathbb{R}$$

Observa-se a equivalência entre os teoremas 3.3 e 3.4, dada a relação entre as perturbações absolutas e relativas a P_0 .

3.4.3. Perturbações paramétricas na representação polinomial.

Seja P_0 a planta nominal e estável com uma representação polinomial coprima pela direita (N_{0d}, D_{0d}) . Seja $d(s)$ uma dada função de transferência própria. A classe de plantas com perturbações paramétricas nas matrizes N_{0d} e D_{0d} , $F(N_{0d}, D_{0d}, d)$, são as $P(s) = N_d(s) D_d(s)^{-1}$, que possuem o mesmo número de pólos que P_0 (segundo seus graus de Smith-McMillan) e satisfazem a relação:

$$\| \begin{vmatrix} N_d(s) & N_{0d}(s) \\ D_d(s) & D_{0d}(s) \end{vmatrix} \| < \| d(s) \| \text{ para todo } s \in \mathbb{C}^+$$

A CNeS para que $C(s)$ estabilize toda $P(s) \in F(N_{0d}, D_{0d}, d)$ é dada no seguinte teorema:

TEOREMA 3.5. [Vidyasagar 85]

Suponha-se $P(s) \in R(s)^{n \times n}$ e tal que $P_0(s) = N_{0d}(s) D_{0d}(s)^{-1}$, $d(s) \in R_0(s)$ e o

compensador $C(s)$ e $R(s)$ tal que possui uma representação coprima pela esquerda (D_{ce}, N_{ce}) e posiciona os pólos de MF em C_b e C^- . Então $C(s)$ estabiliza toda P e $F(N_{od}, D_{od}, d)$ SSE se verifica:

$$\| [D_{ce}(j\omega) \ N_{ce}(j\omega)] \| \| d(j\omega) \| = < 1 \text{ para todo } \omega \in \mathbb{R}$$

Esta última representação das perturbações permite a utilização em forma total da teoria polinomial para a análise de um compensador que posicione os pólos de MF do sistema e seja robusto as mencionadas perturbações. O problema da sua síntese visando robustez para um universo de plantas ainda não foi totalmente resolvido, porém existem algumas metodologias de cálculo que projetam o compensador utilizando, iterativamente, as técnicas de análise, [Ozgurer 86].

3.5. Conclusões.

Foram analisados neste capítulo os problemas de posicionamento de pólos e de estabilidade de sistemas lineares multivariáveis. Os resultados colocados, no que diz respeito à existência e síntese da solução, fornecem, ao engenheiro de controle, informações suficientes para realizar a escolha da técnica mais adequada em cada situação. Além disso foram sugeridos alguns caminhos alternativos para a síntese dos algoritmos utilizados na determinação das leis de realimentação, e na verificação da controlabilidade (estabilizabilidade) e observabilidade (detectabilidade) do sistema. Em particular no algoritmo do item 3.2.4. observa-se que o passo (iii) é o único que pode apresentar complicações algorítmicas-computacionais, e por isso resulta interessante propor, para futuras pesquisas, uma análise detalhada das possibilidades de se estabelecer métodos computacionais alternativos, ou eventualmente mais simples ou robustos que os conhecidos.

A nível de introdução foram colocados alguns conceitos da análise da robustez dos compensadores a perturbações paramétricas da planta na representação entrada-saída. Nesse ponto o esforço deve ser aumentado visando obter resultados equivalentes no enfoque geométrico-matricial e uma metodologia de síntese para ambas as teorias.

CAPÍTULO 4: REJEIÇÃO DE PERTURBAÇÕES

4.1. Introdução

O conjunto de entradas de um SLM pode dividir-se em dois grupos: (i) entradas de controle e referência, i.e., entradas comandadas pelo projetista, e (ii) perturbações ou entradas não controláveis que poderão ter características aleatórias ou determinísticas. Levando em conta esta classificação, o projetista terá como um dos objetivos do controle a obtenção de uma saída fortemente dominada pelas entradas do grupo (i) e com mínima dependência das do grupo (ii). Nesta direção, as propostas de controle poderão ter diferentes graus de complexidade. O controle mais exigente tentará compensar o sistema eliminando os efeitos das perturbações de forma total, para todo instante de tempo e independentemente do tipo de sinal de perturbação. Aceitando uma exigência menor, o controle obterá na saída um efeito limitado arbitrariamente para todo tempo e tipo de perturbação. Nota-se que na implementação prática, devido à impossibilidade de se obter zeros absolutos nas relações saída-perturbação, as duas propostas anteriores podem, em alguns casos, fornecer soluções equivalentes. Já uma estratégia menos exigente obterá uma rejeição assintótica de perturbações, i.e, somente no regime permanente da resposta. Lembra-se que neste último caso é necessário o conhecimento do tipo de perturbação. Deve se resaltar aqui o carácter acadêmico do problema de rejeição total de perturbações, ou seja, ele é usado principalmente para introduzir muitos dos mais importantes conceitos da teoria geométrica e não tem quase aplicabilidade em casos reais.

Como primeiro passo antes de realizar a síntese ou projeto do controlador deve se analisar a existência de solução para o problema especificamente planteado, i.e, sob quais condições do sistema de malha aberta (MA) é possível projetar um compensador de características dadas para obter em malha fechada (MF) alguma das especificações de projeto já mencionadas. É claro então que as condições a verificar pelo sistema em MA

serão tanto mais exigentes quanto o sejam as especificações de controle. Um outro fator a considerar na hora de implementação prática é a complexidade dos controladores obtidos como solução teórica do problema.

Levando em conta os fatos mencionados, resulta de grande interesse realizar uma análise detalhada das diferentes soluções teóricas do problema de rejeição de perturbações, para que o projetista possua um panorama global na hora da escolha de uma alternativa de controle.

4.2. O problema da rejeição total de perturbações.

Seja um SLM representado em MA pelas equações:

$$\begin{aligned} dx/dt &= A x + B u + E q \\ y &= C x \end{aligned} \quad (1)$$

com $x(0) = x_0$ e $t > 0$, e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $E \in \mathbb{R}^{n \times p}$,

onde $x \in X(\dim n)$, $u \in U(\dim m)$, $y \in Y(\dim l)$, $q \in Q(\dim p)$, são respectivamente o estado, a entrada, a saída e a perturbação do sistema. Utilizando uma lei de realimentação $u = f(x, y, v)$, onde v é a nova entrada de controle para o sistema em MF, coloca-se como objetivo do controle obter, em MF, uma saída $y(t)$ que verifique:

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= y_p(t) = C \int_0^t \exp[(t-p)A_f] E q(p) dp = 0 \\ v &= 0, x_0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

- (i) controle por realimentação de estados
- (ii) controle por realimentação da saída

4.2.1. Controle por realimentação de estados.

4.2.1.1. Existência da solução

O problema a solucionar é: sob que condições do sistema (1) existe uma lei de realimentação $u = Fx$ tal que o sistema em MF verifica a condição (2). Se notará PRP ao problema de rejeição de perturbações usando realimentação de estados. O sistema em MF é:

$$\begin{aligned} dx/dt &= (A + BF) x + E q \\ y &= C x \end{aligned}$$

De forma clara pode-se concluir que uma condição necessária de solução, e de simples verificação é:

$$\text{Im } E \subset \text{Ker } C$$

mas se o objetivo é achar uma condição também suficiente então deve-se estudar a relação entre os modos ocultáveis da saída e os modos alcançáveis pela perturbação. No sistema da equação (1) os modos alcançáveis pela perturbação estão no subespaço:

$$\langle (A + BF) \mid \text{Im } E \rangle$$

e se o objetivo do controle é o ocultamento total destes modos, deverá verificarse:

$$\langle (A + BF) | \text{Im}E \rangle \subset \text{Ker}C$$

equação que coloca de forma bem intuitiva a condição para a solução do problema. A condição necessária e suficiente (CNeS) para a existencia da solução é dada pelo seguinte teorema:

TEOREMA 4.1.[Wonham 79]

O PRP tem solução, i.e, existe F tal que $\langle A+BF | \text{Im}E \rangle \subset \text{Ker}C$

$$\text{SSE : } \quad \text{Im}E \subset V^*(\text{Ker}C) \quad (3)$$

onde $V^*(\text{Ker}C) = \max J(A,B,\text{Ker}C)$.

Conhecido o modelo do sistema basta calcular o subespaço $V^*(\text{Ker}C)$ para verificar a existência da solução. Existem diversos algoritmos para o mencionado cálculo. Entre eles cabe mencionar os trabalhos de Wonham (1979) e Bhattacharyya (1975) que geram a solução usando teoria geométrica; o de Vardulakis (1981) onde é usada a teoria de matrizes polinomiais; e finalmente, o trabalho recente de Solak (1986) onde é realizada uma unificação dos trabalhos anteriores.

Após o cálculo de $V^*(\text{Ker}C)$ e verificada a condição (3) do teorema 1 procede-se à síntese da lei F de realimentação. Se a condição (3) não for verificada deverá escolherse uma especificação de controle menos exigente e partir para uma outra análise teórica da solução.

4.2.1.2. Condições equivalentes na representação entrada-saída

Suponha-se que o sistema (1) possa ser representado pela seguinte equação:

$$y(s) = G_1(s) u(s) + G_2(s) q(s) \quad (4)$$

onde $y(s)$, $u(s)$ e $q(s)$ são respectivamente saída, entrada e perturbação, e:

$$G_1(s) = C(sI-A)^{-1} B \quad (5a)$$

$$G_2(s) = C(sI-A)^{-1} E \quad (5b)$$

são as funções de transferência do sistema. Então a solução do PRP também pode ser caracterizada através de $G_1(s)$ e $G_2(s)$ como no seguinte teorema:

TEOREMA 4.2. [Bhattacharyya 83-a]

O PRP tem solução SSE $G_1(s)$ e $G_2(s)$ das equações (5) podem ser fatoradas como:

$$G_1(s) = T(s) U(s) \quad (6a)$$

$$G_2(s) = T(s) V(s) \quad (6b)$$

onde $T(s)$, $V(s)$ são estritamente causais e $U(s)$ é bicausal.

Este último resultado mostra que a representação por funções de transferência, mesmo fornecendo informação parcial do sistema, permite estabelecer condições para resolver o PRP por realimentação de estados. Isto confirma a independência da representação utilizada para o sistema com a existência da solução. Este fato é colocado formalmente no seguinte corolário:

COROLÁRIO.[Gomes 84]

Se dois sistemas (A,B,C,E) , (A',B',C',E') possuem as mesmas matrizes de transferência $G_1(s)=G'_1(s)$ e $G_2(s)=G'_2(s)$, então eles são idênticos com respeito ao PRP.

4.2.1.3. Síntese da solução

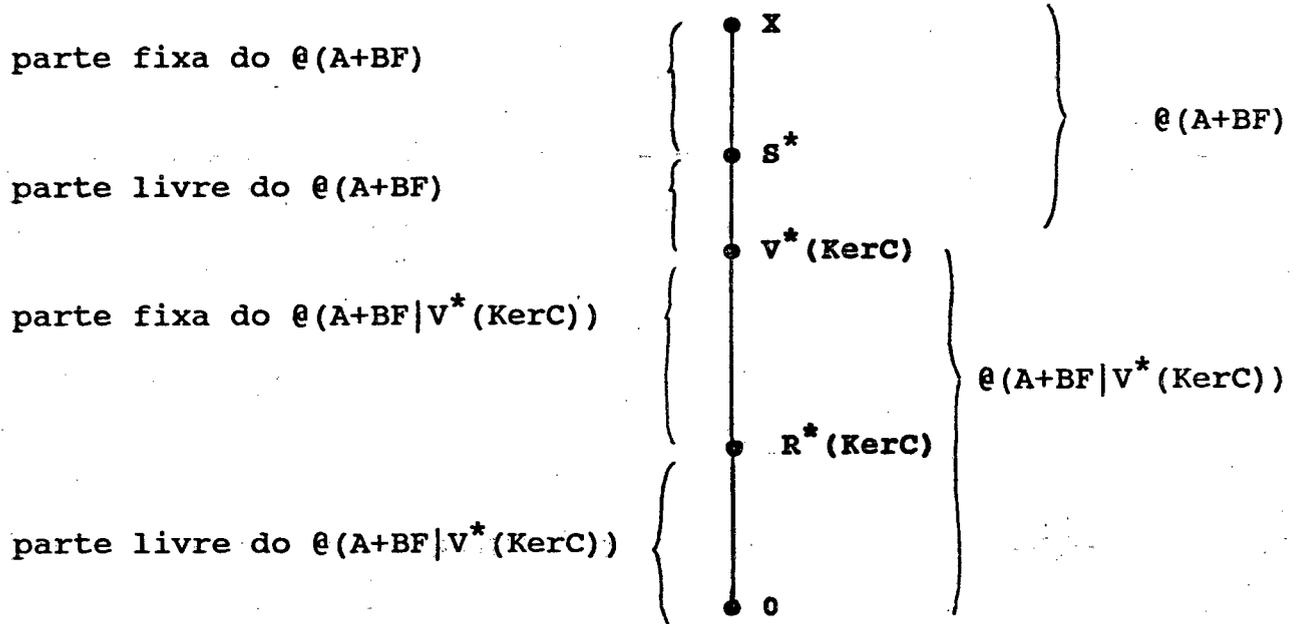
A lei $u=Fx$ que soluciona o PRP deve pertencer ao conjunto $F(V^*(\text{Ker}C))$, i.e, ao conjunto de realimentações que fazem $V^*(\text{Ker}C)$ um subespaço (A,B) -invariante, condição que é colocada como:

$$(A+BF)[V^*(\text{Ker}C)] \subset V^*(\text{Ker}C)$$

Dado um SLM, o subespaço $V^*(\text{ker}C)$ é determinado de maneira única, mas existirá um conjunto $F(V^*(\text{Ker}C))$ de realimentações que solucionarão o PRP. Para a determinação de uma única F será necessário fixar outras especificações de projeto ao sistema em MF. Em geral os graus de liberdade resultantes na determinação da matriz F são utilizados para fixar arbitrariamente um subconjunto dos autovalores do sistema em MF (visando estabilidade ou uma certa resposta transitória), já que o restante do espectro de $A+BF$ fica determinado ao impor a rejeição de perturbações. De fato escrevendo o espectro de $A+BF$ como:

$$\sigma(A+BF) = \sigma(A+BF|V^*(\text{Ker}C)) + \sigma(\overline{A+BF}) \quad (7)$$

onde $\overline{A+BF}$ é o mapa induzido no subespaço $X/[V^*(\text{Ker}C)]$. Considerando os subespaços (A,B) -invariantes $R^*(\text{Ker}C)$ e $S^* = \langle A|\text{Im}B \rangle + V^*(\text{Ker}C)$ tem-se o seguinte diagrama de espectros do mapa $(A+BF)$, [Shumacher 80-a].



onde são colocadas em evidência as partes posicionáveis do espectro de $(A+BF)$, e que se correspondem com as partes controláveis de cada subespaço.

Além desta análise do espectro pode-se fazer um estudo dos efeitos da síntese de F na representação entrada-saída. Através da matriz de transferência do sistema observa-se que todos os pólos se correspondem com os autovalores do espectro $\sigma(A+BF)$, i.e. existe um ocultamento dos modos $s_i \in \sigma[(A+BF)|(V^*(\text{Ker}C))]$ já que $V^*(\text{Ker}C) \subset \text{Ker}C$. Isto pode interpretar-se como uma perda de observabilidade do sistema ao sintetizar a lei $u=Fx$ (lembre-se que a controlabilidade é mantida sob realimentação de estados). A propriedade anterior é colocada formalmente no seguinte teorema:

TEOREMA 4.3. [Gomes 84]

Dada uma terna (A,B,C) e uma lei de realimentação $u=Fx$ qualquer, então N_f (subespaço dos modos não observáveis do par $(A+BF,C)$) verifica:

$$N_f \subset V^*(\text{Ker}C) \text{ e } N_f = V^*(\text{Ker}C) \text{ SSE } F \subset F(V^*(\text{Ker}C)) \quad (8)$$

Isto mostra claramente como a síntese de F para obter $V^*(\text{Ker}C)$ sintetiza ao mesmo tempo o subespaço de modos não observáveis do par $(A+BF, C)$.

4.2.1.4. Efeitos da síntese de F na representação entrada-saída

Suponha-se o sistema representado pela equação (4) e uma lei de realimentação $u = Fx + Lv$, onde v é a nova entrada de controle. Estudando a função de transferência $G_1(s)$ do sistema tem-se:

$$\text{em MA} \quad G_1(s) = C(sI-A)^{-1}B = H(s)/\text{polc}(s) \quad (9)$$

$$\text{em MF} \quad G_{1f}(s) = C(sI-A-BF)^{-1}L = H_f(s)/\text{polcf}(s) \quad (10)$$

onde $\text{polc}(s)$ e $\text{polcf}(s)$ são, respectivamente os polinômios característicos de MA e MF, e $H(s)$ e $H_f(s)$ as matrizes que contêm os numeradores das funções de transferência.

Da equação (7) obtem-se a seguinte relação:

$$\text{polcf}(s) = \text{polc1}(s) * \text{polc2}(s) \quad (11)$$

onde: $\text{polc1}(s) = \text{polinômio característico do mapa } (A+BF)|V^*$

$\text{polc2}(s) = \text{polinômio característico do mapa } \overline{(A+BF)}$.

Considerando a partição do espaço X em $V^*(\text{Ker}C)$ e $V'^*(\text{Ker}C)$, $V^*(\text{Ker}C)$ isomorfo com $X/V^*(\text{Ker}C)$, é possível gerar uma representação matricial do tipo:

$$A_f = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix} \quad L = \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \end{vmatrix} \quad (12)$$

$$C = [0 \quad C_2]$$

onde $x = [x_1^t \ x_2^t]^t$ é tal que $x_1 \in V^*(\text{Ker}C)$ e $x_2 \in V^*(\text{Ker}C)$.

Note-se que a parte nula da matriz A_f (i.e. A_{21}) deriva da A_f -invariância do subespaço $V^*(\text{Ker}C)$. Com a representação (12) a função de transferência fica:

$$G_{1f}(s) = C_2(sI - A_{22})^{-1} L_2 \quad (13)$$

e os polinômios característicos $\text{polc1}(s)$ e $\text{polc2}(s)$ como :

$$\text{polc1}(s) = \det(sI - A_{11}) \quad (14a)$$

$$\text{polc2}(s) = \det(sI - A_{22}) \quad (14b)$$

A partir da equação (13) é justificado o fato da função de transferência de MF ter uma ordem igual à dimensão do espaço $X/V^*(\text{Ker}C)$, ou equivalentemente:

$$\text{ordem} = \dim X - \dim V^*(\text{Ker}C).$$

Usando as equações (11), (13) e (14) ainda é possível colocar a seguinte relação:

$$G_{1f}(s) = C(sI - A_f)^{-1}L = C_2(sI - A_{22})^{-1}L_2 = H_f(s)/\text{polcf}(s) = H_{2f}(s)/\text{polc2}(s)$$

$$\text{então } H_f(s) = \text{polc1}(s).H_{2f}(s) \quad (15)$$

ou seja que os autovalores de $[A+BF|V^*(\text{Ker}C)]$ são cancelados em todos os polinômios numeradores da matriz $H_f(s)$. Para o caso monovariável a relação anterior transforma-se simplesmente num cancelamento de zeros e pólos, i.e., a síntese de $F c F(V^*(\text{Ker}C))$ posiciona um subconjunto de pólos de MF coincidindo com os zeros de MA . Formalmente tem-se:

TEOREMA 4.4. [Gomes 84]

Seja um sistema linear monovariável representado pela terna (A,b,c) ou pela função $g(s) = c(sI-A)^{-1}b = m(s)/\text{pol}c(s)$. Então vale:

(i) $m(s)$ e $\text{pol}c(s)$ são primos entre si SSE o sistema é controlável e observável.

(ii) se o sistema é controlável e observável então

$\dim V^*(\text{Ker}C) = \text{grau } m(s)$ e se também é $F c F(V^*(\text{Ker}C))$ então: $m(s) = \text{pol}c(s) =$
 $= \text{polinômio característico de } (A+bF)|V^*(\text{Ker}C)$.

Observe que neste caso particular $R^* = 0$. Isto implica na não existência de modos livres dentro do espectro do mapa $A+BF|V^*(\text{Ker}C)$.

4.2.1.5. Análise estrutural do PRP

Além da vinculação da solução geométrica com a representação entrada-saida pode-se fazer uma análise estrutural do PRP. Suponha-se que o sistema (1) possa ser representado, numa certa base, pelas seguintes equações:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ B_2 C_1 & A_{22} \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \end{vmatrix} u + \begin{vmatrix} E_1 \\ 0 \end{vmatrix} q$$

$$z = [0 \quad C_2] x$$

(16)

Então uma lei de realimentação $u = Fx$ com $F = [-C_1 \ F_0]$ para F_0 arbitrária gerará em MF o sistema:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{vmatrix} A_{11} - B_1 C_1 & A_{12} + B_1 F_0 \\ 0 & A_{22} + B_2 F_0 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} E_1 \\ 0 \end{vmatrix} q$$

$$z = [0 \quad C_2] x$$

que tem sua saída $z(t)$ livre dos efeitos da perturbação $q(t)$ para todo tempo t . Este resultado é colocado formalmente no seguinte teorema:

TEOREMA 4.5. [Gomes 84]

O PRP tem solução para o sistema (1) se é possível achar uma base na qual a representação do sistema seja (A, B, C, D) :

$$\frac{dx}{dt} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \end{vmatrix} u + \begin{vmatrix} E_1 \\ 0 \end{vmatrix} q$$

$$z = [0 \quad C_2] x$$

com $A_{11} \in \mathbb{R}^{l \times l}$, e onde se verifica:

(i) $A_{21} = B_2 C_1$ para alguma matriz C_1 e,

(ii) l inteiro tal que $\dim q(t) < l < n - \dim y(t)$.

Nota-se a relação direta entre o teorema 4.5 e a representação da equação (12), onde a base escolhida é a que cria a partição do espaço X em $V^*(\text{Ker}C)$ e $V^*(\text{Ker}C)$. Dado que o

PRP tem solução, portanto $\text{Im}E \subset V^*(\text{Ker}C)$, vale que $\dim q(t) < 1$ e, como $\dim V^*(\text{ker}C) < \dim \text{Ker}C$, se verifica $1 < n - \dim z(t)$.

A representação (16) permite analisar o sistema (1) como composto pelos subsistemas S_1 e S_2 , dados pelas equações:

$$\begin{aligned} S1: \quad x_1 &= A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + B_1 u + E_1 q \\ y_1 &= C_1 x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S2: \quad x_2 &= A_{22} x_2 + B_2 (u + y_1) \\ y_2 &= y = C_2 x_2 \end{aligned}$$

o que equivale em um diagrama de blocos à estrutura da figura 4.1.

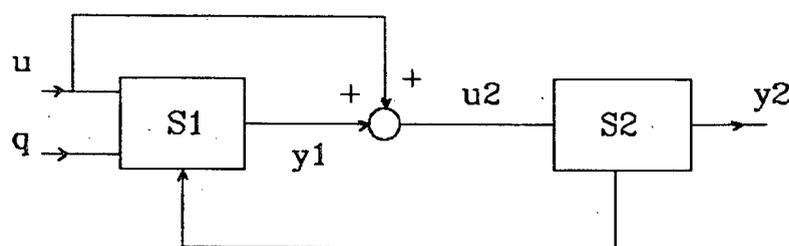


Figura 4.1. Estrutura da solução do PRP.

sempre que os subsistema S_1 e S_2 sejam estritamente causais. Formalmente:

TEOREMA 4.6. [Bhattacharyya 83-a]

O PRP tem solução SSE o sistema (1) apresenta uma estrutura como na figura 1 com os sistemas S_1 e S_2 estritamente causais.

Este teorema permite ver a importância da estrutura da figura 4.1, pois qualquer que seja o sistema em estudo, sempre que exista solução para o PRP sua estrutura poderá ser transformada em aquela.

4.2.1.6. Comentários gerais

As conclusões a respeito da utilização da representação entrada-saída na solução do PRP de forma global não devem ser mal interpretadas. Mesmo que ela permita achar as condições de existência da solução e que estas sejam equivalentes as geométricas e matriciais, não será possível a síntese de uma lei $u=Fx$ se na representação o estado x não é acessível. Porém a importância de uma expressão frequencial das CNeS para a solução do PRP se baseia principalmente na possibilidade de utilizar algoritmos alternativos, muitas vezes mais simples e robustos. Este ponto será explorado com mais detalhe nos próximos itens.

Com respeito ao problema de robustez dos métodos analisados frente a variações paramétricas existem ainda muitos pontos para serem pesquisados. Somente alguns poucos trabalhos foram realizados na procura de um subespaço $V^*(\text{Ker}C)$, comum a uma família de sistemas representados por um conjunto de mapas (A,B,C,E) ,

[Bhattacharyya 83-b], [Basile 87]. Nesse ponto, a análise comparativa dos métodos polinomiais e geométricos pode estabelecer uma base de conhecimentos que permita, em futuras pesquisas, vincular condições de robustez entre uma e outra teoria.

Como já foi analisado no problema de posicionamento de pólos, toda técnica de controle que utilize a realimentação do vetor de estados está limitada pela possibilidade real de se medir diretamente aquele vetor. Assim quando o vetor de estados for não mensurável deverão ser utilizadas técnicas de realimentação da saída. Nesses casos, tanto para a análise como para a síntese da solução é possível representar o sistema por variáveis de estado ou por funções de transferência.

Os resultados obtidos fornecem ao engenheiro de controle uma visão geral do PRP, já que vinculam diretamente a estrutura do sistema a suas diferentes representações. Pode-se concluir que o enfoque geométrico-matricial se apresenta como mais adequado para obter a solução do PRP, dado que o estudo prévio realizado para a determinação da existência da mesma consiste em uma parte importante do procedimento de síntese da lei $u = Fx$.

4.2.2. Controle por realimentação da saída.

Em geral, quando não é possível medir diretamente o vetor de estados de um dado sistema, a solução do problema de controle deve ser abordada via realimentação da saída mensurável. Assim seja o sistema representado pelas equações:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B u + E q \\ y &= C x \quad t > 0, x(0) = x_0 \\ z &= D x \end{aligned} \quad (17)$$

com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $E \in \mathbb{R}^{n \times p}$, e onde $x \in X(\dim n)$, $u \in U(\dim m)$, $q \in Q(\dim p)$, $y \in Y(\dim l)$, $z \in Z(\dim k)$, são respectivamente o estado, a entrada de controle, a perturbação, a saída mensurável, e a saída a controlar. Suponha-se ainda a seguinte lei de realimentação estática da saída:

$$u = K y$$

Assim o sistema em MF fica representado pelas equações:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + BKC) x + E q \\ z &= D x \end{aligned} \quad (18)$$

e problema de rejeição de perturbações por realimentação estática da saída (PRPES) se coloca como:

PRPES: Achar $K: Y \rightarrow U$ tal que o sistema em MF de equações (18) possua uma saída $z(t)$ livre dos efeitos de $q(t)$ para todo $t > 0$. Isto significa que os modos alcançáveis pela perturbação sejam ocultos da saída:

$$\langle A + BKC \mid \text{Im } E \rangle \subset \text{Ker } D$$

Esta condição é equivalente a achar um subespaço V tal que seja (A,B,C) -invariante e verifique:

$$\text{Im } E \subset V \subset \text{Ker } D$$

A utilização de uma realimentação estática da saída cria condições muito exigentes para o sistema, isto é, a solução poderá ser aplicada com sucesso somente em sistemas muito particulares. Para obter condições menos restritivas propõe-se o seguinte caminho:

(i) Gera-se um sistema de r integradores do tipo:

$$dw/dt = v \quad \text{com } \dim(w) = r$$

(ii) Cria-se o sistema aumentado seguinte:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} dx/dt \\ dw/dt \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E \\ 0 \end{vmatrix} q \\ \begin{vmatrix} y \\ w \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ w \end{vmatrix} \\ z &= [D \quad 0] [x^t \quad w^t]^t \quad t > 0 \end{aligned} \quad (19)$$

onde as matrizes serão chamadas A_a , B_a , C_a , D_a , e E_a .

(iii) Supõe-se uma realimentação estática da saída aumentada:

$$\begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K & L \\ M & N \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ w \end{vmatrix} \quad t > 0 \quad (20)$$

com $N \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $M \in \mathbb{R}^{r \times l}$, $K \in \mathbb{R}^{m \times l}$, $L \in \mathbb{R}^{m \times r}$, e gera-se o sistema em MF a partir de (19) e (20),

$$\begin{bmatrix} dx/dt \\ dw/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BKC & BL \\ MC & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} q$$

$$z = [D \quad 0] [x^t \quad w^t]^t \quad t > 0 \quad (21)$$

onde a matriz do sistema em MF será chamada A_a^f .

Assim, aplicando ao sistema aumentado (21) a condição de rejeição de perturbações por realimentação estática, obte-se:

$$\langle A_a^f \mid \text{Im } E_a \rangle \subset \text{Ker } D_a$$

ou equivalentemente:

$$\langle A + BKC \mid [\text{Im } E \ (+) \ O] \rangle \subset \text{Ker } D \ (+) \ W \quad (22)$$

onde O é o espaço nulo de W . Matricialmente esta condição equivale a:

$$[D \ 0] (A_a^f)^i [E^t \ 0]^t = 0 \text{ para todo } i=0,1,\dots,n+r-1.$$

A partir deste raciocínio pode-se formular o problema de realimentação dinâmica para o sistema representado na equação (17) como sendo uma realimentação estática sobre o sistema aumentado representado em (19). Portanto é possível formular o problema de rejeição de perturbações com realimentação dinâmica da saída (PRPDS) como segue:

PRPDS: Dado o sistema (17), solucionar o PRPDS consiste em achar um espaço de extensão W e mapas $K, L, M,$ e $N,$ como na equação (20), tais que exista um subespaço $V \subset X (+) W,$ A_a^f -invariante e que verifique:

$$\text{Im}E (+) O \subset V \subset \text{Ker}D (+) W \quad (23)$$

A compensação dinâmica resultante pode ser representada pelo compensador dinâmico de equações:

$$\begin{aligned} dw/dt &= N w + M y \\ u &= K y + L w \quad t > 0 \end{aligned} \quad (24)$$

A análise da existência da solução deste problema é feita no próximo ítem.

4.2.2.1. Existência da solução

O primeiro passo antes de iniciar a procura de um compensador que solucione o PRPDS consiste em analisar as condições sob as quais existe a mencionada solução. Uma CNeS para a existência de solução em função dos pares (C,A,B) estudados no capítulo 2 é dada no seguinte teorema.

TEOREMA 4.7 [Schumacher 80-b]

O PRPDS tem solução SSE existe um par- $(C,A,B), (V_1,V_2),$ que verifique:

$$\text{Im}E \subset V_1 \subset V_2 \subset \text{Ker}D \quad (25)$$

Além disso a dimensão mínima necessária do compensador é:

$$\dim\text{-min} = \min[\dim V_2 - \dim V_1].$$

Conclui-se a partir da condição (25) que a existência de um único subespaço V_3 tal que seja (A,B)-invariante e (C,A)-invariante e verifique:

$$\text{Im}E \subset V_3 \subset \text{Ker}D \quad (26)$$

é uma CS para a existência da solução do PRPDS. Mas deve ser notado que tanto a equação (25) como a (26) não apresentam características construtivas já que para sua verificação é necessária a procura da existência dos subespaços V_1 e V_2 ou V_3 . Para obter uma solução construtiva do resultado do teorema 4.7 procede-se da seguinte maneira:

(i) Separa-se a equação (25) em:

$$V_2 \subset \text{Ker}D \quad \text{com } V_2 \text{ (A,B)-invariante} \quad (27a)$$

$$\text{Im}E \subset V_1 \quad \text{com } V_1 \text{ (C,A)-invariante} \quad (27b)$$

$$V_1 \subset V_2 \quad (27c)$$

(ii) Geram-se os subespaços $V^*(\text{Ker}D)$ e $V_*(\text{Im}E)$ tais que:

$V^*(\text{Ker}D)$ é o maior subespaço (A,B)-invariante contido em $\text{Ker}D$

$V_*(\text{Im}E)$ é o menor subespaço (C,A)-invariante que contém $\text{Im}E$

(iii) Substitui-se o teorema 4.7 pelo seguinte corolário,

COROLÁRIO [23]

O PRPDS tem solução SSE $V_*(\text{Im}E) \subset V^*(\text{Ker}D)$ (28)

A importância do corolário se fundamenta na possibilidade de construção da condição (28) através dos diversos algoritmos existentes para o cálculo de $V^*(\text{Im}E)$ e $V_*(\text{Ker}D)$, ver referências [Basile 69], [Morse 73], [Wonham 79], [Aplevich 79], [Vardulakis 81], [Van Dooren 81] e [Solak 86]. As condições geométricas achadas podem ser diretamente vinculadas às condições matriciais, obtendo-se dessa forma algoritmos alternativos para sua verificação. Recentemente Linnemann (1986), apresenta um enfoque matricial do PRPDS onde a condição de solução é sujeita à existência de uma forma condensada particular das matrizes do sistema em MA. Nesse mesmo trabalho também são apresentados algoritmos de verificação das condições e de síntese do controlador.

Além de condições matriciais, é também de interesse prático a obtenção de condições polinomiais equivalentes. Utilizando a representação entrada-saída do sistema é possível gerar condições que geralmente são de aplicação mais simples e de características mais robustas que as geométricas. Este ponto será analisado com maior detalhe no ítem 4.2.2.4.

4.2.2.2. Uma solução alternativa do PRPDS. As condições na função de transferência do sistema.

Para analisar as condições vistas no ítem anterior à luz da teoria de funções de transferência é necessário representar ao sistema como:

$$\begin{vmatrix} z(s) \\ y(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u(s) \\ q(s) \end{vmatrix} \quad (29)$$

onde as $G_{ij}(s)$ são matrizes racionais estritamente próprias e vinculam-se com a representação (17) através das equações:

$$\begin{aligned} G_{11} &= D(sI-A)^{-1} B & G_{12} &= D(sI-A)^{-1} E \\ G_{21} &= C(sI-A)^{-1} B & G_{22} &= C(sI-A)^{-1} E \end{aligned}$$

e o compensador da equação (24) é dado por:

$$C(s) = L(sI-N)^{-1} M + K \quad (30)$$

sendo $C(s)$ uma matriz racional própria.

A partir das equações (29) e (30) o PRPDS consiste em achar uma matriz $C(s)$ própria tal que, dadas $G_{ij}(s)$ estritamente próprias, a função de transferência em MF que relaciona a perturbação $q(s)$ com a saída $z(s)$ seja identicamente nula, i.e.:

$$G_{11}(s)C(s)[I - G_{21}(s)C(s)]^{-1}G_{22}(s) + G_{12}(s) = 0 \quad (31)$$

O problema reduz-se então a achar uma solução $C(s)$ para a equação (31), ou de forma equivalente, uma solução $X(s)$ para a equação (32):

$$G_{11}(s) X(s) G_{22}(s) + G_{12}(s) = 0 \quad (32)$$

onde $X(s) = C(s) [I - G_{21}(s)C(s)]^{-1}$ é uma matriz racional própria.

Esta última equação, mesmo constituindo um caminho para a síntese do compensador, não permite uma verificação prévia da existência da solução. Por isso é importante achar uma condição de verificação sistemática que relacione as matrizes de transferência de MA do sistema com a existência de solução. Para alcançar esse objetivo basta vincular as ordens das matrizes de transferência (definidas como no capítulo 2) com a solução da equação (32).

TEOREMA 4.8. [Bhattacharyya 82]

(a) As condições (i) e (ii) abaixo são CN para a existência de uma solução própria da equação (32):

$$(i) G_{12ij}(s) \neq 0 \rightarrow G_{22j}^c(s) \neq 0 \text{ e } G_{11i}^l(s) \neq 0 \quad (33a)$$

$$(ii) O(G_{12ij}) = < O(G_{22j}^c) + O(G_{11i}^l) \quad i=1\dots l, j=1\dots p \quad (33b)$$

$$(b) \text{ Se } \text{posto}(G_{110})=1 \quad \text{e} \quad \text{posto}(G_{220})=p \quad (34)$$

então a condição (33) também é suficiente, onde G_{110} e G_{220} são respectivamente, as matrizes de coeficientes máximos por linha e por coluna de G_{11} e G_{22} .

A prova deste teorema pode ser realizada diretamente no plano da frequência dando consistência a este enfoque, mas também é possível demonstrar a equivalência com as condições geométricas da equação (28), [Ohm 84].

4.2.2.3. O PRPDS na representação por frações polinomiais.

Utilizando uma representação polinomial do sistema pode se fazer uma análise equivalente das condições estudadas no ítem 4.2.2.1. e 4.2.2.2. Suponha-se a seguinte representação para o sistema em malha aberta:

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} T \\ P \end{pmatrix} Q^{-1} \begin{bmatrix} R & S \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} u \\ q \end{pmatrix} \quad (35)$$

onde as matrizes polinomiais T , P , Q , R , S , K_1 , K_2 , K_3 , e K_4 , vinculam-se com as funções de transferência estritamente próprias do sistema através das seguintes equações:

$$G_{11}(s) = T Q^{-1} R + K_1 \quad G_{12}(s) = T Q^{-1} S + K_2 \quad (36a)$$

$$G_{21}(s) = P Q^{-1} R + K_3 \quad G_{22}(s) = P Q^{-1} S + K_4 \quad (36b)$$

Além disso se verifica que:

$Q \in R[s]^{\text{IXI}}$ é tal que Q^{-1} é própria

PQ^{-1} e $Q^{-1}R$ são estritamente próprias.

Cabe mencionar que estas hipóteses não constituem restrições para o problema geral, [Ozgurer 85].

Com esta representação a solução do PRPDS consiste, como no ítem 4.2.2.2., em achar

uma lei de compensação:

$$u = -C(s)y + v \quad (37)$$

tal que seja solução da equação:

$$G_{11}(s)C(s)[I - G_{21}(s)C(s)]^{-1}G_{21}(s) + G_{12}(s) = 0$$

ou de forma equivalente:

$$G_{11}(s)X(s)G_{21}(s) + G_{12}(s) = 0$$

onde $X(s) = C(s)[I - G_{21}(s)C(s)]^{-1}$ é própria.

A equação (32) pode ser estudada através do problema conhecido como "two-side matching problem", que consiste em achar a solução (X) da equação $A = BXC$, onde A , B e C são matrizes polinomiais e X deve pertencer aos anéis $R_p(s)$, $R_{po}(s)$ ou $R[s]$.

Para conseguir determinar o vínculo entre a equação $A = BXC$ e o PRPDS basta representar as funções de transferência $G_{ij}(s)$ pelos seguintes sistemas de equações polinomiais:

$$G_{22}(s) \text{ <----> } Z_2 = \left| \begin{array}{cc} Q & S \\ -P & K_4 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \text{sistema perturbação-saída} \\ \text{mensurável} \end{array}$$

$$G_{11}(s) \text{ <----> } Z_3 = \left| \begin{array}{cc} Q & R \\ -T & K_1 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \text{sistema controle-saída a} \\ \text{controlar} \end{array}$$

$$G_{12}(s) \text{ <----> } Z_4 = \left| \begin{array}{cc} Q & S \\ -T & K_2 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \text{sistema perturbação-saída} \\ \text{a controlar} \end{array}$$

e expressar (32) em função de Z_2, Z_3, Z_4 :

$$Z_4 = Z_3 X Z_2 \quad (38)$$

A partir da equação (38) pode-se estabelecer o seguinte teorema:

TEOREMA 4.9.[Ozgurer 85]

O PRPDS tem solução SSE a equação (38) tem uma solução própria $X(s) \in R_p(s)$.

Combinando este último resultado com a solução da equação $A=BXC$ estudada no capítulo 2 tem-se:

COROLÁRIO:

O PRPDS tem solução SSE se verifica:

$$(i) Z_{12} = 0 \quad Z_{22} = 0 \quad e \quad Z_{21} = 0 \quad (39a)$$

$$(ii) \text{ grau}(z_{11ij}(s)) = < u_i + v_j \quad \text{para todo } i=1..t, j=1..w. \quad (39b)$$

onde:

$$U Z_3 = \begin{vmatrix} \bar{z}_3 \\ 0 \end{vmatrix} \quad Z_2 V = [\bar{z}_2 \quad 0]$$

$$\bar{z}_4 = U Z_4 V = \begin{vmatrix} \bar{z}_{11} & \bar{z}_{12} \\ \bar{z}_{21} & \bar{z}_{22} \end{vmatrix}$$

e onde:

U e V são unimodulares,

Z_3 é própria por linhas com graus $[u_1 \dots u_t]$,

Z_2 é própria por colunas com graus $[v_1 \dots v_w]$,

$Z_{11} \in R[s]^{t \times w}$.

A equivalência entre as expressões achadas na teoria polinomial e os resultados da teoria geométrica é de maneira simples estabelecida no seguinte teorema:

TEOREMA 4.10. [Ozgurer 86]

$V_*(\text{Im}E) \subset V^*(\text{Ker}D)$ SSE existe uma solução própria de (38).

Além disso pode se provar [Ozgurer 86] que no cálculo dos graus por linha de Z_3 e por coluna de Z_4 são sintetizadas, respectivamente, bases dos subespaços $V^*(\text{Ker}D)$ e $V_*(\text{Im}E)$. Isto cria uma maneira alternativa de verificação das condições geométricas.

4.2.2.4. Comparação dos enfoques analisados.

Antes de estudar a síntese do controlador que soluciona o PRPDS é importante analisar as alternativas apresentadas para verificar a existência da solução. Nesta tarefa de análise comparativa das condições existem três propriedades importantes a considerar: (i) a interpretação física do problema, (ii) a simplicidade de aplicação, (iii) a robustez frente a perturbações paramétricas.

As condições obtidas pelo enfoque geométrico levam vantagem no primeiro ponto já que elas colocam de uma maneira muito simples e intuitiva o que acontece fisicamente com o sistema. Já para interpretar as condições de ordem das equações (33a)-e (33b) é necessário utilizar uma representação de blocos do sistema. Seja então o seguinte diagrama que mostra a evolução do sinal de perturbação dentro do sistema:

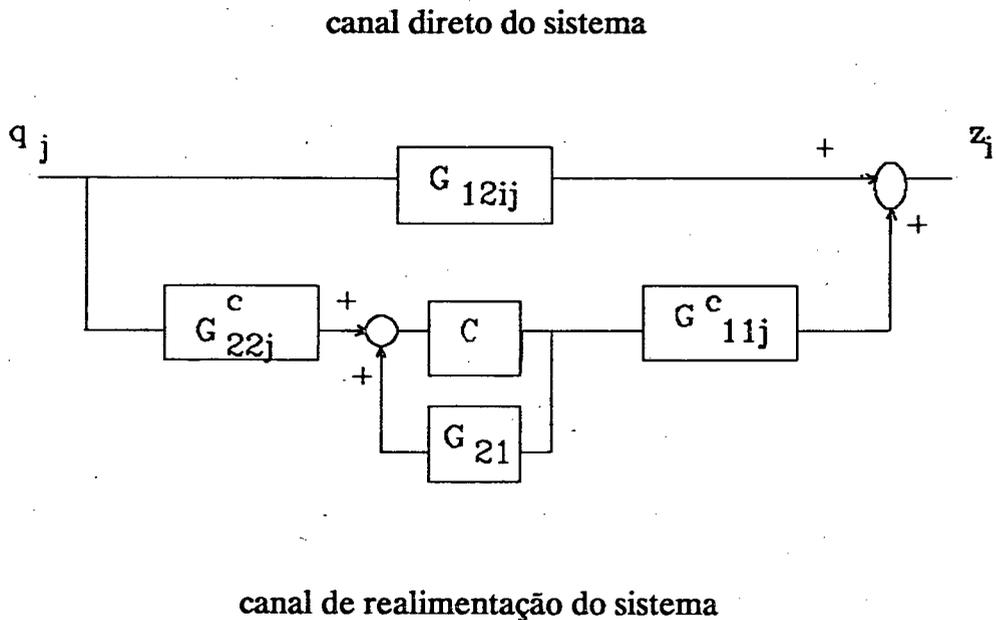


Figura 4.2. Evolução do sinal de perturbação

Nesse diagrama, se a quantidade de zeros de um bloco é associada à velocidade de trânsito dos sinais através dele, resulta claro que a condição (33b), que de fato coloca um limite superior na quantidade de zeros de $G_{12ij}(s)$, está impondo como condição de solução que a velocidade de trânsito da perturbação no canal direto nunca seja maior que no canal de realimentação. Nota-se assim que a condição nas ordens das matrizes é somente necessária, pois não sempre existirá um compensador $C(s)$, que na posição do diagrama, mantenha as propriedades de velocidade de trânsito estabelecidas. Com respeito as equações polinomiais (39a) e (39b) não se conhece uma interpretação física equivalente.

No que diz respeito à aplicação das condições, a vantagem é das equações nas funções de transferência. Observe-se que a verificação das condições (33a) e (33b) pode se realizar por simples inspeção e que algoritmicamente é bem mais complicado o cálculo dos subespaços $V^*(\text{Ker}D)$ e $V_*(\text{Im}E)$ que o das matrizes G_{110} e G_{220} .

Nos casos mais gerais encontrados na prática as condições nas funções de transferência do sistema apresentam-se como mais robustas. Considerando o sistema na sua representação entrada-saída como na equação (29), uma perturbação nos seus parâmetros, i.e., coeficientes dos polinômios numerador e denominador, não alterará as condições da equação (33) quando que não produzam cancelamentos entre os mencionados polinômios. Assim, se para a mencionada perturbação, (34) continua valendo, pode-se afirmar que (33) é uma condição de solução robusta, [Bhattacharyya 83].

Já no caso de perturbações nos parâmetros da representação por variáveis de estado, a verificação da condição (28) implica em uma nova síntese dos subespaços $V^*(\text{Im}E)$ e $V_*(\text{Ker}D)$, i.e., a condição não é robusta as mencionadas perturbações. Porém deve notar-se que ela será verificada sempre que as equações (33) e (34) o sejam.

Como foi mencionado, as perturbações aceitas na representação entrada-saída são tais que não alteram a ordem do sistema, i.e., não são consideradas aquelas perturbações que produziriam perdas de controlabilidade ou observabilidade do estado do sistema. No caso de acontecer este tipo de perturbação todos os enfoques forneceriam condições não robustas, mas o enfoque geométrico estaria mostrando com detalhe as mudanças internas do sistema.

4.2.2.4. Síntese da solução

Após verificada alguma das condições que asseguram a existência da solução para o PRPDS é necessário optar por uma das possíveis técnicas de cálculo do compensador. Este procedimento, que será chamado síntese da solução, conduz à obtenção das matrizes K , L , M , e N , ou equivalentemente à função de transferência $C(s)$, já definidas nas equações (24) e (30) ou (37) respectivamente. A ordem deste compensador dependerá, logicamente, da metodologia empregada para o cálculo. Em geral se considera como mais vantajosa aquela técnica que consegue obter a menor ordem no compensador sob similares condições de complexidade dos algoritmos.

Da mesma forma que para as condições de solução, tem-se três caminhos teóricos diferentes para se obter a síntese do compensador. O primeiro se baseia nas condições geométricas achadas e utiliza portanto a representação por variáveis de estado do sistema. O segundo, ocupa-se da solução da equação (32) na representação entrada-saída e o terceiro baseia seu cálculo na solução da equação $A = BXC$.

(i) Síntese pelo enfoque geométrico-matricial.

A síntese das matrizes K, L, M, N , para resolver o PRPDS pode se basear nas propriedades dos pares (C, A, B) , [Schumacher 80-b], analisadas no capítulo 2, ou na resolução de equações matriciais que envolvem formas condensadas das matrizes A, B, C, D e E , [Linemann 87]. No trabalho de Schumacher (1980), a solução do PRPDS consiste em achar um subespaço $V \subset X (+) W$ tal que seja A_f -invariante e que verifique a equação (23):

$$\text{Im}E (+) O \subset V \subset \text{Ker}D (+) W \quad (23)$$

Definindo respectivamente a "projeção" (V_p) e "intersecção" (V_i) de um subespaço V , $V \subset X (+) W$ com o espaço X como:

$$V_p = \{ x \in X \text{ tal que existe } w \in W \text{ e } [x^t \ w^t]^t \in V \}$$

$$V_i = \{ x \in X \text{ tal que } [x^t \ 0]^t \in V \}$$

a condição de solução (23) equivale a:

$$\text{Im}E \subset V_i \subset V_p \subset \text{Ker}D \quad (40)$$

A partir desta relação, se são escolhidos $V_i = V_*(\text{Im}E)$ e $V_p = V^*(\text{Ker}D)$ a condição (35) se verifica automaticamente e somente resta encontrar V tal que seja A_F -invariante e tenha V_i e V_p como "intersecção" e "projeção" respetivamente.

Com estas considerações a síntese se baseia no seguinte teorema:

TEOREMA 4.9 [Schumacher 80-b].

Dado o par (C,A,B) , (V_1, V_2) , existe um espaço de extensão W , de $\dim W = \dim V_2 - \dim V_1$, e mapas K, L, M, N , tais que $V_1 = V_i$ e $V_2 = V_p$ para um dado subespaço $V \subset X (+) W$.

Os passos a seguir na mencionada síntese são:

PASSO 1.

Escolhe-se o espaço linear W com a propriedade:

$$\dim W = \dim V_2 - \dim V_1,$$

sendo que $V_1 = V_*(\text{Im}E)$ e $V_2 = V^*(\text{Ker}D)$.

PASSO 2.

Escolhe-se o mapa $R: V_2 \rightarrow W$ tal que $\text{Ker}R = V_1$, e define-se

$$V = \{ [x^t \ (Rx)^t]^t \text{ tal que } x \in V_2 \} \subset X (+) W.$$

Com esta escolha de V se garante a condição $V_i = V_1$ e $V_2 = V_p$.

PASSO 3.

Escolhe-se $K, L, M,$ e N para que V seja A_f -invariante. Para isso:

$$A_f V = \begin{vmatrix} A + BKC & BL \\ MC & N \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ Rx \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [A + B(KC + LR)] x \\ (MC + NR) x \end{vmatrix}$$

deverá estar contido no espaço V para todo $x \in V_2$.

Como V_2 é (A,B) -invariante escolhe-se:

$$A + B(KC + LR) = A + BF \text{ com } F \in F(V_2),$$

daí resulta :

$$KC + LR = F \tag{41}$$

A outra condição impõe que $(MC + NR)x = R(A + BF)x$ para todo x , ou seja:

$$NR + MC = R(A + BF) \tag{42}$$

Com as equações (36) e (37) a síntese é completada com a escolha de uma das possíveis soluções.

Uma forma de se fazer esta escolha, consiste em aproveitar as propriedades dos pares (C,A,B) para fixar as matrizes K e M de modo a assegurar a existência de N e L que verifiquem (41) e (42), [Schumacher 80-b]. A matriz $K, K:Y \rightarrow U$, se escolhe para verificar:

$$F = KC + F_0, \quad V_1 \subset \text{Ker}F_0$$

$$G = BK + G_0, \quad \text{Im}G_0 \subset V_2$$

sendo que $(F,G) \subset P(V_1, V_2)$.

A matriz M se escolhe: $M = -RG_0$. A partir destas relações obtém-se L e N de:

$$LR = F_0 \quad NR = R(A + BF + G_0C).$$

Com esta proposta não fica resolvido o problema da ordem mínima do compensador. Como a dimensão de W depende da diferença de dimensões de V_1 e V_2 , a escolha mais adequada parece não ser o par $V_*(\text{Im}E), V^*(\text{Ker}D)$. Muito pelo contrário a procura deve apontar em direção de um par (C,A,B) que verifique a condição (40) com mínima dimensão para V_2 e máxima para V_1 . Este raciocínio, válido teoricamente, apresenta a dificuldade de não ser sistemático. Além do apontado, resta comentar que os graus de liberdade encontrados na síntese do compensador são utilizados geralmente para impor, ao sistema, outras especificações de controle.

No trabalho de Linnemann (1987), é apresentado um método de síntese alternativo. Nele, as condições de solução estão sujeitas à existência de uma matriz S

inversível tal que as matrizes do sistema possam ser levadas a uma forma condensada (porém não canônica) como se descreve na continuação:

$$\tilde{A} = S^{-1}AS = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & \dots & A_{35} \\ 0 & A_{42} & \dots & A_{45} \\ 0 & A_{52} & \dots & A_{55} \end{vmatrix} \quad \bar{B} = S^{-1}B = \begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \bar{E} = S^{-1}E = \begin{vmatrix} E_1 \\ E_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$C = CS = [0 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ C_5] \quad D = DS = [0 \ 0 \ 0 \ D_4 \ D_5]$$

onde B_4 e C_2 são de posto completo. Verificada esta condição o compensador solução é calculado a partir das seguintes equações:

$$B_4 K C_2 = -A_{42} \ , \ M C_2 = A_{32} + B_3 K C_2 \quad (43)$$

$$B_4 L = -A_{43} - B_4 K C_3 \ , \ N = A_{33} + B_3 K C_3 + B_3 L - M C_3$$

A ordem do compensador depende diretamente da escolha de S pois a matriz A_{33} fixa a dimensão da matriz N , e pode ser provado que para um dado S a dimensão do compensador coincide com $(\dim V^*(\text{Ker}D) - \dim V_*(\text{Im}E))$. As equações (43) podem ser resolvidas utilizando a decomposição em valores singulares das matrizes do sistema, gerando assim um conjunto de soluções de dimensão escolhida.

(ii) Síntese na representação entrada-saída.

Para sintetizar o compensador que resolve o PRPDS é necessário achar uma matriz própria $X(s)$ tal que:

$$G_{11}(s) X(s) G_{22}(s) + G_{12}(s) = 0 \quad (32)$$

Supondo verificada a condição (34) do teorema 4.8. é possível expressar as matrizes $G_{11}(s)$ e $G_{22}(s)$ como:

$$G_{11}(s) = D_{11}(s) G'_{11}(s)$$

$$G_{22}(s) = G'_{22}(s) D_{22}(s)$$

onde: $D_{11}(s) = \text{diag}(s^{t_1}, s^{t_2}, \dots, s^{t_l})$, $O(G'_{ii}) = t_i$

$$D_{22}(s) = \text{diag}(s^{c_1}, s^{c_2}, \dots, s^{c_p})$$
, $O(G'_{22}) = c_j$

e $G'_{11}(s)$ e $G'_{22}(s)$ são bicausais por direita e por esquerda respectivamente [Hautus 78].

Assim a solução é colocada como, [Ohm 84]:

$$X(s) = -G^+_{11}(s) D_{11}^{-1}(s) G_{12}(s) D_{22}^{-1}(s) G^+_{22}(s) \quad (44)$$

onde $G^+_{11}(s)$ e $G^+_{22}(s)$ são respectivamente, inversas próprias por direita e esquerda de $G'_{11}(s)$ e $G'_{22}(s)$. A solução $X(s)$ é própria pois a condição (33b) do teorema 4.8 assegura que $D_{11}^{-1}(s) G_{12}(s) D_{22}^{-1}(s)$ é própria.

Um outro procedimento de síntese baseado nas expansões em series de potência de Laurent das matrizes $G_{ij}(s)$ e $X(s)$ pode ser analisado em [Ohm 84].

A partir da obtenção de $X(s)$ o compensador $C(s)$ é calculado da equação:

$$C(s) = (I + G_{21}(s) X(s))^{-1}$$

(iii) Síntese na representação polinomial.

A síntese do compensador nesta representação consiste basicamente em achar uma solução própria da equação (38) ou de forma equivalente, da equação $A = BXC$ estudada no capítulo 2. Assim se:

$$X(s) = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$$

é a solução própria achada o compensador $C(s)$ é calculado como:

$$C(s) = X_4 (I - G_{21}(s) X_4)^{-1}$$

4.3. Solução assintótica do problema de rejeição de perturbações.

O projeto de um compensador para a obtenção da rejeição total de perturbações é, em geral, pouco aplicável a casos práticos já que as CN e S estabelecidas para a existência da solução carecem de generalidade. Assim quando não é possível achar uma desse tipo, isto é, que rejeite todo tipo de perturbação para todo tempo, deve tentar-se alguma outra menos exigente. No caso mais simples o problema se reduz a impor condições assintóticas de rejeição no sistema em MF. Formalmente a saída do sistema $y(t)$ deverá verificar:

$$y(t) \rightarrow f(u(t)) \quad \text{com } u(t) = \text{entrada de controle e } f(.) \text{ uma função linear} \quad (45)$$

$$t \rightarrow \infty$$

sendo que para todo outro instante de tempo,

$$y(t) = f(u(t), q(t)) \quad \text{com } q(t) = \text{perturbação.} \quad (46)$$

Para se lograr este objetivo é preciso conhecer a classe de perturbações que entram no sistema. No caso de tratar-se de uma perturbação estável, isto é, que verifica a condição $q(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, a única condição a estabelecer no sistema em MF é a estabilidade (equivalente a possuir todos os seus polos com parte real negativa). Já se a perturbação é instável, $q(t) \not\rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, além da condição de estabilidade deverão conhecer-se os modos de excitação da mesma para criar um compensador que obtenha a condição (45).

Com estas considerações a análise do problema de rejeição de perturbações de forma assintótica (PRPA) levará em conta somente o conjunto de perturbações instáveis. Elas serão definidas (no plano s) como:

$$Q = \{ q(s) \text{ estritamente própria e } q(s) = n_q(s)/d_q(s) \text{ com } Z[d_q(s)] \subset C^+ \} \quad (47)$$

Além das considerações na classe de perturbações é necessário, para definir totalmente o problema a ser estudado, fixar uma configuração de controle. Serão analisadas as estruturas que se mostram nas fig. 4.3 e 4.4.

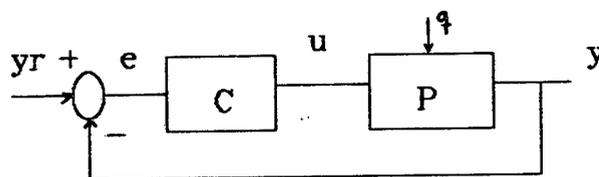


Figura 4.3. Estrutura clássica de servocompensador.

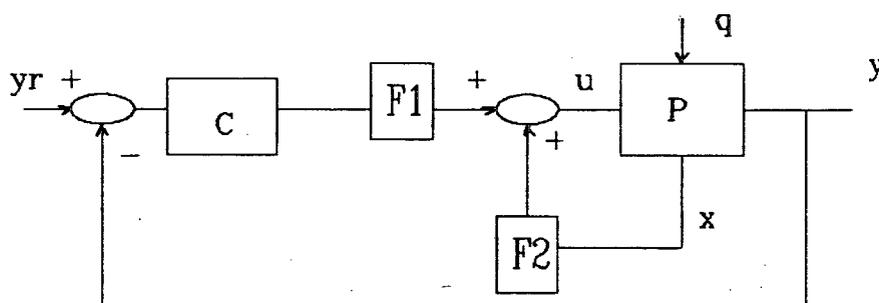


Figura 4.4. Estrutura de servocompensador com realimentação de estados.

Em ambos modelos são considerados de forma geral, tanto perturbações na entrada, em pontos intermediários, como na saída da planta. Nestes esquemas de controle, planta e compensador podem ser representados por funções de transferência ou por variáveis de estado. As equivalências são estabelecidas, para a planta, nas seguintes expressões:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Eq$$

$$y = Dx + Kq + Gu \quad \text{com } x(0) = x_0 \text{ e } t > 0.$$

$$y(s) = [P_1(s) \ P_2(s)] [u^t(s) \ q^t(s)]^t$$

com $P_1(s) = D(sI - A)^{-1} B + G$, e

$$P_2(s) = D(sI - A)^{-1} E + K,$$

onde a escolha das matrizes E, e K permite obter quaisquer das configurações mencionadas para a perturbação.

Com todas as considerações anteriores coloca-se o PRPA da seguinte maneira:

Achar um compensador C, ou um compensador e uma realimentação de estados, respectivamente nas configurações das figuras 4.3. e 4.4., de forma tal que o sistema em MF apresente uma resposta $y(t)$ tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad \text{para } y_r(t) = 0, q(t) \in Q, \text{ e para todo } t. \quad (48)$$

4.3.1. Estrutura clássica do servocompensador. Enfoque polinomial, [Callier 82], [Vidyasagar 85].

4.3.1.1. Existência da solução

Na estrutura da figura 4.3. as representações entrada-saída da planta P e do compensador C verificarão as seguintes hipóteses:

Hipóteses 1

(i) $P =$ matriz $n_o \times n_i$, racional e estritamente própria, cuja representação em matrizes polinomiais vem dada por:

$$(D_{pe}, N_{pe}) \text{ fração coprima por esquerda de } P, P = D_{pe}^{-1} N_{pe}$$

$$(N_{pd}, D_{pd}) \text{ fração coprima por direita de } P, P = N_{pd} D_{pd}^{-1}.$$

Considera-se que os zeros de P verificam:

$$Z[P] \wedge Z[Q] = / 0 \quad (49)$$

(ii) $C =$ matriz $n_o \times n_o$, racional própria, cuja representação em matrizes polinomiais vem dada por:

$$(D_{ce}, N_{ce}) \text{ fração coprima por esquerda de } C, C = D_{ce}^{-1} N_{ce}$$

$$(N_{cd}, D_{cd}) \text{ fração coprima por direita de } C, C = N_{cd} D_{cd}^{-1}.$$

Em malha fechada a função de transferência é:

$$FTMF = [PC(I+PC)^{-1} \quad L(I+PC)^{-1}] \quad (50)$$

matriz que relaciona o vetor de entrada $[u^t(s) \quad q^t(s)]^t$ com a saída $y(t)$. A matriz L representa a função de transferência direta entre o ponto de entrada da perturbação e a saída da planta, e tem seus valores limites em I e P .

Os pólos deste sistema resultam da solução da equação :

$$\det(I + PC) = 0 \leftrightarrow \det(D_{pe}D_{cd} + N_{pe}N_{cd}) = 0 \quad (51)$$

Condição Necessária para existência da solução.

Sob as hipóteses 1 no sistema em MA, a condição (47) na perturbação $q(t)$ e sendo o sistema em MF estável,

SE

o sistema em MF rejeita assintoticamente toda perturbação $q(t) \in Q$,

ENTÃO

para todo $s \in Z[Q]$ vale $\det(N_{pe}N_{cd}) \neq 0$ ou equivalentemente:

$$\text{posto}(N_{pe}) = \text{posto}(N_{cd}) = n_o = < n_i.$$

Esta última condição exige, para que exista solução ao PRPA, que, nem a planta nem o compensador tenham zeros coincidentes com os modos da perturbação.

Condição Suficiente para existência da solução.

Sob as hipóteses 1 no sistema em MA, e a condição (47) na perturbação $q(t)$,

SE

o sistema em MF é estável, $Z[\det(I+PC)] \in C^-$, e $d_q(s) \in R[s]$ é fator de todo elemento de D_{cd} ($D_{cd}(s) = d_q(s)D_c(s)$ para algum $D_c(s) \in R[s]^{n_o \times n_o}$),

ENTÃO

o sistema em MF rejeita assintoticamente toda perturbação $q(t) \in Q$.

Observe que esta condição é simplesmente uma generalização da dos sistemas monovariáveis. Para isso basta lembrar que se $P(s)$ não possui como pólos os modos instáveis a serem rejeitados, é necessário que os mesmos façam parte da dinâmica do compensador.

Como observações gerais destas duas condições tem-se:

- (i) as mesmas indicam o caminho da síntese do compensador solução
- (ii) a condição de estabilidade, colocada nos métodos anteriores (PRP, PRPES, PRPDS) como uma especificação de projeto adicional e complementar, é, neste enfoque, necessária para a existência da solução. Observe que se o sistema for instável, qualquer perturbação $q(t) \in Q$ que afete a saída $y(t)$ em um instante qualquer $t \in [0, \infty)$, fará com que no regime permanente $y(t)$ possua termos instáveis e dependentes da perturbação.

4.3.1.2. Síntese da solução.

Baseando-se nas condições analisadas no ítem anterior, a síntese do compensador $C(s) \in R(s)$ nixno para rejeitar assintoticamente as perturbações $q(t) \in Q$, deve realizar-se nos seguintes passos:

(i) escolhe-se $D_x(s) \in R[s]^{nixno}$ tal que $Z(\det(D_x(s))) \in C$

(ii) Acha-se uma solução (X, Y) da equação: $X \cdot d_q \cdot D_{pd} + Y \cdot N_{pd} = D_x$ (52)
tal que $(X, Y) \in R[s]^{nixni} \times R[s]^{nixno}$ e $(d_q \cdot X, Y)$ seja uma fração coprima pela esquerda.

(iii) calcula-se o compensador $C(s) = (d_q \cdot X)^{-1} Y = D_{ce}^{-1} N_{ce}$

Deve-se notar que:

(a) a condição (i) assegura a estabilidade de MF (cuja dinâmica é dada pela equação (52))

(b) a solução da equação (52) na condição (ii) pode ser obtida da mesma forma que no problema de posicionamento de pólos do capítulo 3, mas levando em consideração a condição de rejeição dada por:

$$\text{posto}(Y(s)) = n_0 \text{ para todo } s \in Z[Q],$$

isto assegura que se $(d_q X, Y)$ é uma fração coprima pela esquerda, (X, Y) também o será.

(c) a existência de uma solução (X, Y) estritamente própria da equação (52), e portanto de um compensador bem conformado, é assegurada sempre que D_x seja escolhida reduzida por linhas e colunas com graus respectivos l_i e c_i , sendo que estes verificam a relação:

$$l_i \geq \text{grau}(d_q(s)) + u - 1 \text{ para todo } i=1..n$$

onde $u = \max[\text{grau}(D_{pe}) \mid i=1..n]$.

(d) uma escolha adequada de D_x levará a obter valores de l_i suficientemente grandes como para assegurar a existência da solução verificando (c).

(e) um algoritmo de cálculo deste compensador será similar ao analisado no capítulo 3, onde trocando D_{pe} por $d_q D_{pe}$ fica para as equações de Berzout:

$$\begin{vmatrix} V_d & U_d \\ -N_{pe} & -d_q D_{pe} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d_q D_{pd} & -U_e \\ N_{pd} & V_e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{vmatrix}$$

$$X = D_x V_d - N_x N_{pl}$$

$$Y = D_x U_d + N_x d_q D_{pe}$$

4.3.2. Estrutura do servocompensador com realimentação de estados. Enfoque matricial.

4.3.2.1. Existência da solução.

Considere-se a estrutura da figura 4.4. com a seguinte representação para a planta P:

$$dx/dt = A x + B u + E q$$

$$y = D x \quad \text{com } x(0) = x_0 \text{ e } t > 0.$$

e as seguintes hipóteses de trabalho:

Hipóteses 2

(i) O par (A, B) é estabilizável.

(ii) Os zeros de transmissão da planta P não são modos da perturbação $q(t)$. Esta condição é equivalente à relação já estabelecida entre os zeros de Q e P: $Z[Q] \wedge Z[P] \neq 0$.

Considere o compensador C de estrutura:

$$dx_c/dt = A_c x_c + B_c u_c$$

$$z_c = D_c x_c$$

com matrizes A_c , B_c e D_c tais que:

$$A_c = \text{diag}[A_{ci}], B_c = \text{diag}[B_{ci}], i = 1, \dots, (\dim y)$$

$$D_c = \text{Identidade}$$

onde cada par (A_{ci}, B_{ci}) é uma representação canônica controlável da função de transferência irreduzível:

$$Q_0(s) = q_1(s) q_2(s) \dots q_k(s) \dots$$

que representa todos os modos existentes nas perturbações $q(t) \in Q$.

Com C definido desta forma o sistema aumentado fica:

$$\begin{bmatrix} dx/dt \\ dx_c/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_c D & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 0 \\ B_c \end{bmatrix} y_r$$

$$y = [D \quad 0] [x^t \quad x_c^t]^t$$

onde x_c é o estado do compensador.

Para que o PRPA tenha solução deverá verificarse:

$$y(t) \rightarrow 0 \quad \text{para } y_r = 0 \quad \text{e } q(t) \in Q \quad (53)$$

$$t \rightarrow \infty$$

Condição suficiente de solução

Com a estrutura definida para o compensador, SE valem as hipóteses 2 existirá uma lei de realimentação para o sistema aumentado, $u = F x_a$ com $F = [F_1 \quad F_2]$ e $x_a = [x^t \quad x_c^t]^t$, tal que o sistema em MF verifica a condição (53).

É simples verificar que com as hipóteses 2 fica assegurada a estabilizabilidade do sistema composto, [Chen 70], e que nessas condições existirá uma lei de realimentação que estabiliza o sistema, [Wonham 79]. Verificando-se a estabilidade de MF, a estrutura do compensador estabelecerá a rejeição de perturbações $q(t) \in Q$.

4.3.2.2. Síntese da solução.

O procedimento de síntese pode resumir-se aos seguintes passos:

- (i) verificar a estabilizabilidade do par (A, B) ,
- (ii) verificar que $Z[P] \wedge Z[Q] \neq 0$,
- (iii) modelizar o servocompensador de acordo com as perturbações,
- (iv) montar o sistema aumentado,
- (v) utilizar algum procedimento de posicionamento de pólos para posicionar a parte controlável do sistema e determinar a lei de realimentação F .

Quando o vetor de estados não é acessível pode se realizar uma realimentação através de um estimador do estado, (sempre que o sistema seja detectável) e utilizar o teorema da separação para estabelecer a lei de realimentação que soluciona o PRPA. Nota-se que o compensador é sempre uma realização controlável e observável já que é calculado a partir de uma função de transferência irredutível. No caso de usar o observador o sistema ficaria como na figura 4.5.

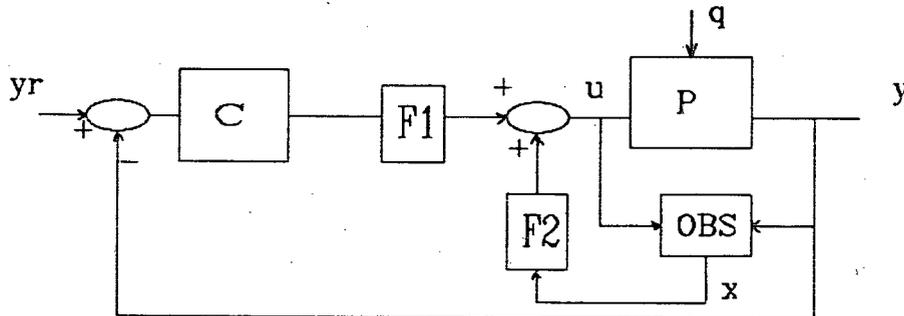


Figura 4.5. Servocompensador com realimentação de estados via observador.

4.3.3. Robustez do compensador.

Neste tipo de compensador é possível uma análise simples do problema de perturbações paramétricas. Interessa determinar qual é o conjunto de perturbações paramétricas admissíveis na planta, ou mesmo no compensador, sem mudar as características de estabilidade nem as de rejeição de perturbações $q(t) \in Q$.

Utiliza-se linhas para identificar os parâmetros e os elementos perturbados.

A partir da análise feita fica claro que mantendo-se as condições:

(i) $Z[P'] \wedge Z[Q] \neq 0$;

(ii) (N'_{cd}, d_q, D'_c) é um par coprimo pela direita, ou equivalentemente o controlador (A'_c, B'_c) continua sendo uma representação mínima das perturbações $q(t) \in Q$;

(iii) o sistema em MF é estável;

o sistema perturbado em MF rejeitará assintoticamente toda perturbação $q(t) \in Q$.

Para estabelecer a relação direta entre as perturbações nos parâmetros da planta e a solução do problema, se poderá considerar $C(s)$ não perturbado, e se o conjunto de plantas perturbadas é reduzido a aquelas que verificam (i), a condição de estabilidade em MF para toda planta P , contida naquele conjunto, assegura a solução robusta do PRPA. Desta forma o análise de robustez reduz-se a dos compensadores que estabilizam o sistema em MF.

4.3.4. O vínculo com o problema de rastreamento assintótico de referências.

Uma característica importante que apresentam as estruturas analisadas em MF, é a possibilidade de estudar simultaneamente o PRPA e o rastreamento assintótico de referências da mesma classe que a perturbação. De fato se o compensador $C(s)$ da figura 4.3. ou o par (A_c, B_c) da figura 4.4. forem projetados para rejeitar assintoticamente toda perturbação $q(t) \in Q$, então ambos sistemas rastrearão assintoticamente toda referência $y_r \in Q$. Como já foi analisado que o sistema em MF das figuras 4.3. ou 4.4. rejeitam assintoticamente toda perturbação $q(t) \in Q$ independentemente do ponto de entrada na planta, é possível utilizar, sem perda de generalidade, a estrutura da figura 4.6. para provar que $y(t) \rightarrow y_r(t)$ quando $t \rightarrow \infty$ sempre que $y_r(t) \in Q$. Para isso basta comparar, na figura 4.6., as matrizes de transferência $T y-q$ e $T e-y_r$.

$$T y-q = (I + PC)^{-1} \quad T e-y_r = (I + PC)^{-1}$$

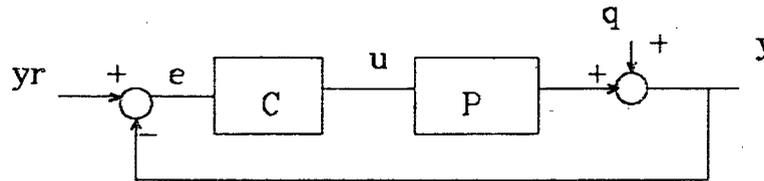


Figura 4.6. Perturbação na saída da planta.

e concluir que:

SE

$y(t) \rightarrow 0$ para toda $q(t) \in Q$,

$t \rightarrow \infty$

ENTÃO

$e(t) \rightarrow 0$ para toda $y_r(t) \in Q$, e portanto,

$t \rightarrow \infty$

$y(t) \rightarrow y_r(t)$ para toda $y_r(t) \in Q$,

$t \rightarrow \infty$

o que implica em rastreamento assintótico da referência $y_r(t)$.

4.3.5. Comentários gerais.

Um ponto importante a ser destacado neste estudo, é a exigência da estabilidade do sistema em malha fechada para obter a rejeição assintótica das

perturbações. Como em geral a especificação de estabilidade é exigida na maioria dos projetos de controle, a observação anterior não resulta por demais restritiva. Porém usando somente as técnicas de controle para a solução do PRP, PRPES ou PRPDS é possível obter uma saída instável (para entrada limitada) e livre de perturbações.

Outro ponto importante a considerar é a resposta transitória do sistema. Dependendo da importância que esta tiver para o projetista, a solução assintótica do problema de rejeição de perturbações poderá ser não satisfatória. Em geral, mesmo conhecendo os possíveis modos da perturbação, o problema torna-se crítico quando o seu ponto de entrada é desconhecido. De forma geral pode se dizer que a solução assintótica não é adequada aos problemas onde se requer respostas transitórias robustas e se desconhece a função de transferência perturbação-saída de MA.

4.4. Conclusões.

Como pontos importantes a serem destacados na análise feita neste capítulo coloca-se:

- a complexidade da solução é, logicamente, tanto maior quanto mais exigentes são as especificações de rejeição colocadas pelo projetista,
- a análise do problema pode ser feita por vários caminhos sendo que o geométrico se apresenta como mais claro a nível conceitual e o polinomial mais operativo,
- os procedimentos de síntese do compensador colocados no ítem 4.2.2.4 dão uma solução teórica do problema, mas não analisam a robustez algorítmica do cálculo. Para isso deverão ser realizados novos trabalhos de pesquisa que poderão utilizar este como base,

- o problema da rejeição assintótica, por ser o de solução mais simples, apresenta um método de síntese do controlador que pode ser implementado na prática com resultados satisfatórios. Basicamente a robustez do método de cálculo de $C(s)$ está sujeita ao algoritmo de posicionamento de pólos que se utilize.

Finalmente deve-se colocar que, na maioria das aplicações de controle, o problema de rejeição de perturbações é analisado conjuntamente com o posicionamento de pólos ou a estabilidade em malha fechada, e que isto gera maiores restrições nas condições de existência de solução e também maior complexidade na síntese dos compensadores. Este problema será analisado no próximo capítulo.

CAPÍTULO 5: POSICIONAMENTO DE PÓLOS E REJEIÇÃO DE PERTURBAÇÕES

5.1. Introdução.

Quando é projetado um controlador para obter rejeição de perturbações em MF, geralmente também são especificadas outras condições como estabilidade (E) ou posicionamento de pólos (PP). É por este motivo que o estudo de ambos problemas, simultaneamente, tem grande interesse prático. Levando em conta a análise feita nos capítulos anteriores, deve-se fazer um estudo que considere o problema segundo diferentes estruturas de controle e/ou diferentes especificações de rejeição. O problema da estabilidade será considerado como um caso particular do posicionamento de pólos de igual forma que no capítulo 3. As considerações a respeito dos modos não controláveis ou não observáveis feitas naquele capítulo continuam valendo, já que no problema da rejeição de perturbações são somente consideradas as influências da perturbação na saída do sistema.

Serão analisados os seguintes problemas:

(i) rejeição total e posicionamento de pólos utilizando:

(a) realimentação de estados (PRPPP) e,

(b) realimentação da saída (PRPSPP);

(ii) rejeição assintótica e posicionamento de pólos (PRPAPP).

A nomenclatura a utilizar será a mesma dos capítulos anteriores e valem também os comentários feitos no capítulo 4 no que diz respeito dos problemas de rejeição total.

5.2. Rejeição total de perturbações e posicionamento de pólos.

5.2.1. Usando realimentação de estados

Dado um SLM representado pelas equações:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A x + B u + E q \quad t > 0 \text{ e } x(0) = x_0 \\ z &= C x \end{aligned} \quad (1)$$

o objetivo do controle é achar uma lei de realimentação $u = Fx + v$ de modo a obter em MF:

$$z(t) = 0 \quad (2)$$

para todo $q(t)$ e com $x_0 = 0, v(t) = 0$ para todo t ,

$$\sigma(A + BF) \subset C_b \quad (3)$$

onde C_b é um conjunto arbitrário de números complexos simétrico com respeito ao eixo real. As condições (2) e (3) são logicamente as mesmas que se analisaram nos PRP e PPP.

5.2.1.1. Enfoque geométrico do PRPPP.

(a) Análise do problema.

Considera-se a classe de subespaços de X , $H^+(A, B, \text{Ker}C)$, definida por:

$$H^+(A,B,KerC) = \{ V \subset X \text{ tal que } V \subset J(A,B,KerC) \text{ e existe } F \subset F(V) \text{ tal que} \\ @[(A+BF)|V] \subset C_b \} \quad (4)$$

e calcula-se o elemento máximo desta classe $V_b^*(KerC)$. O espectro do mapa $A+BF$, para uma lei $F \subset F[V_b^*(KerC)]$, pode-se decompor em:

$$\begin{aligned} @[(A+BF)] &= @[(A+BF)|V_b^*(KerC)] \cup @[(A+BF)|X/V_b^*(KerC)] \\ &= @[(A+BF)|V_b^*(KerC)] \cup @[\overline{(A+BF)}] \end{aligned}$$

Com a escolha do conjunto C_b é possível estabelecer uma partição de X nas partes estáveis (ou boas) e instáveis (ou ruins) relativas a aquele conjunto. Assim tem-se:

$$X = X_r(A) (+) X_b(A)$$

Observa-se que com a escolha de $F \subset F[V_b^*(KerC)]$ fixam-se, dentro do conjunto desejado C_b , os autovalores do mapa restrito $(A+BF)|[V_b^*(KerC)]$ e da mesma forma que no PRP o mapa F não fica totalmente determinado. Se os graus de liberdade restantes na determinação do mapa F permitirem o posicionamento dos restantes autovalores do mapa $\overline{(A+BF)}$ dentro de C_b , e a imagem da perturbação estiver contida em $V_b^*(KerC)$, então, para o dado C_b , o problema terá solução. Este problema assim colocado pode ser chamado de rejeição de perturbações com estabilidade relativa a C_b (PRPER). Formalmente:

TEOREMA 5.1.

O PRPER tem solução SSE o sistema (1) verifica:

$$X_r(A) \subset \langle A, B \rangle \quad (5a)$$

$$\text{Im } E \subset V_b^*(KerC) \quad (5b)$$

Notar:

(i) que se verifica $V_b^*(\text{Ker}C) \subset V^*(\text{Ker}C)$ e portanto existe solução ao PRP.

(ii) que se a condição (5a) é substituída por $X^+(A) \subset \langle A, B \rangle$, i.e. (A,B) estabilizável, o teorema dá a solução ao problema de rejeição de perturbações com estabilidade (PRPE). Isto equivale a escolher $C_b = C^-$.

(iii) o subespaço $V_b^*(\text{Ker}C)$ cria a seguinte partição do espaço X e do espectro do mapa $A+BF$:

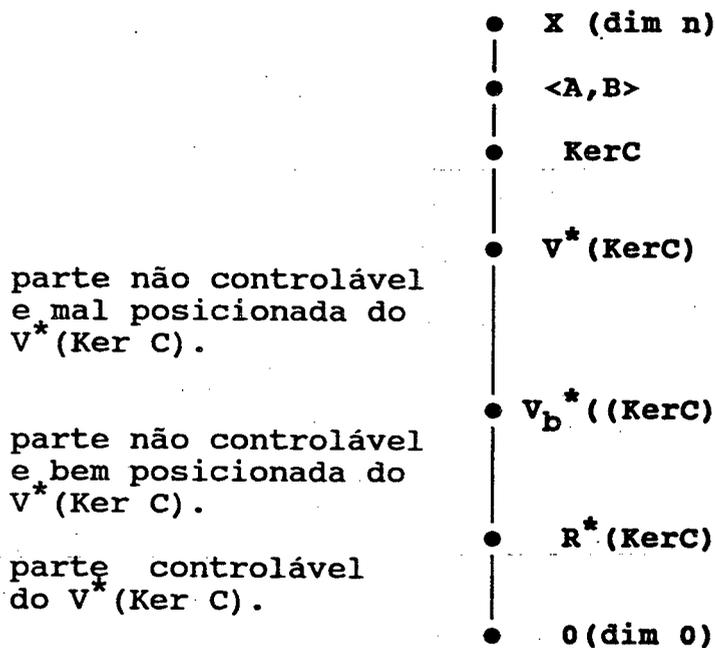


Figura 5.1. Diagrama de espectros da partição do espaço X.

onde:

$R^*(\text{Ker}C)$ é o maior subespaço de controlabilidade do $\text{Ker}C$, e

$V^*(\text{Ker}C)$ o maior subespaço (A,B) invariante do $\text{Ker}C$.

Este diagrama mostra claramente as condições de solução e permite associá-las ao problema real.

Se o PRPER é alterado de forma tal a exigir que o sistema em malha fechada possa ter seus pólos posicionados em qualquer conjunto $C_b \subset C^*$, então ele se transforma no problema de rejeição de perturbações com alocação arbitrária de pólos (PRPPP). Esta condição, claramente mais restritiva, é equivalente a supor a condição mais desfavorável no PRPER já analisado, isto é, que nenhum dos autovalores do mapa $A+BF$ restrito ao subespaço $V_b^*(\text{Ker}C)/R^*(\text{Ker}C)$ esteja no conjunto desejado C_b , então resulta:

$$V_b^*(\text{Ker}C) = R^*(\text{Ker}C) \quad (6)$$

resultado que pode ser facilmente interpretado no diagrama da figura 5.1. Sob esta hipótese pode ser usado o algoritmo de cálculo de $R^*(\text{Ker}C)$ analisado no capítulo 2. Desta forma as condições de solução para o PRPPP podem ser colocadas formalmente como segue:

TEOREMA 5.2.

O PRPPP tem solução SSE o sistema (1) verifica:

$$\langle A, B \rangle = X \iff (A, B) \text{ controlável} \\ \text{Im } E \subset R^*(\text{Ker}C)$$

Observe-se que neste caso deve exigir-se controlabilidade do par (A, B) , já que em qualquer outro caso não é possível que $X_r(A)$ esteja contido em $\langle A, B \rangle$ para qualquer C_b escolhido arbitrariamente. Isto pode ser facilmente comprovado escolhendo um conjunto C_b discreto.

(b) Síntese da solução .

Para a síntese da lei $u = Fx$ que soluciona o PRPER pode ser utilizado o cálculo já feito no estudo da existência da solução. Conhecido o espaço $V_b^*(\text{Ker}C)$ calcula-se uma lei F_1 tal que $F_1 \in F(V_b^*(\text{Ker}C))$ e gera-se uma matriz de MF $A_1 = A + BF_1$. O par (A_1, B) induz no subespaço $\langle A, B \rangle / V_b^*(\text{Ker}C)$ o par (A'_1, B'_1) que é controlável [Wonham 79], e por tanto existe uma segunda lei $F_2: \langle A, B \rangle / V_b^*(\text{Ker}C) \rightarrow U$ tal que o espectro $\sigma((A'_1 + B'_1 F_2) / \langle A, B \rangle) \subset C_b$. Esta lei F_2 pode ser calculada aplicando qualquer algoritmo de posicionamento de pólos no subsistema (A'_1, B'_1) .

Já para o cálculo de $V_b^*(\text{Ker}C)$ segue-se os seguintes passos:

(i) calcula-se $V^*(\text{Ker}C)$ e $F_0 \in F(V^*(\text{Ker}C))$ e gera-se $A_0 = A + BF_0$.

(ii) determina-se o polinômio mínimo $\text{polmin}(s)$ do mapa $\tilde{A}_0 | [V^*(\text{Ker}C)/R^*(\text{Ker}C)]$, onde \tilde{A}_0 é o mapa induzido por A_0 no subespaço $X/R^*(\text{Ker}C)$. Assim :

$$\text{polmin}(s) = \text{polminb}(s) \cdot \text{polminr}(s)$$

onde:

$\text{polminb}(s)$ tem suas raízes em C_b

$\text{polminr}(s)$ tem suas raízes em C_r

(iii) calcula-se $X_b^* = \text{Ker} [\text{polminb}(\tilde{A}_0)] \cdot [V^*(\text{ker}C)/R^*(\text{ker}C)]$

(iv) determina-se a projeção canônica $P: X \rightarrow X/R^*(\text{Ker}C)$ e calcula-se P^{-1} .

(v) calcula-se o subespaço $V_b^*(\text{Ker}C) = P^{-1}X_b^*$.

Para a solução do PRPPP basta considerar, sob condições de controlabilidade do par (A,B) , a síntese do subespaço $R^*(\text{Ker}C)$ analisada no capítulo 2.

No restante do capítulo se tratará exclusivamente o PRPPP.

5.2.1.2. Enfoque matricial do PRPPP.

(a) Análise da solução.

A utilização das formas matriciais condensadas permitem, como no PRP já analisado, uma outra maneira de resolução do PRPPP. Mediante uma transformação de coordenadas o sistema (A,B,C,D) é expresso de forma condensada, e a verificação do posto de algumas de suas submatrizes permite concluir sobre a existência da solução. Formalmente:

TEOREMA 5.3. [Linemann 87]

O PRPPP tem solução SSE o par (A,B) é controlável e existe uma matriz inversível $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \tilde{E} = T^{-1}E = \begin{vmatrix} E_1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\tilde{C} = CT = [0 \quad C_2 \quad 0]$$

onde $A_{ij} \in \mathbb{R}^{r_1 \times r_j}$, $B_i \in \mathbb{R}^{r_1 \times m}$, $E_i \in \mathbb{R}^{r_1 \times l}$, $C_j \in \mathbb{R}^{l \times r_j}$, e:

$$\text{posto}(B_2) = r_2$$

$$\text{posto} \left(\begin{array}{cc|c} A_{11} - sI_{r_1} & B_1 & \\ \hline A_{21} & B_2 & \end{array} \right) = r_1 + r_2 \quad \text{para } s \in \mathbb{C}.$$

Os algoritmos de cálculo da transformação T são estáveis e podem ser analisados com detalhe nas referências [Aplevich 79], [Van Dooren 81] e [Linemann 87].

(b) Síntese da solução.

O procedimento de síntese da matriz de realimentação de estados é similar ao analisado para o método geométrico. A matriz F é obtida como resultado da transformação:

$$F = P \left(\begin{array}{ccc|c} F_{11} & 0 & 0 & \\ \hline F_{21} & F_{22} & F_{23} & T \end{array} \right)$$

onde T é a matriz que gera a forma condensada, e P é tal que:

$$\left(\begin{array}{cc|c} B_{11} & B_{12} & \\ \hline 0 & B_{22} & \\ 0 & 0 & \end{array} \right) P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} B_1 & \\ \hline B_2 & \\ 0 & \end{array} \right) = B'$$

As submatrizes F_{ij} são determinadas com as seguintes equações:

$$F_{21} \text{ é tal que } B_{22} F_{21} = -A_{21}$$

F_{22} e F_{23} são tais que
$$\begin{pmatrix} A_{22} + B_{22}F_{22} & A_{23} + B_{22}F_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = C_2$$

F_{11} é tal que
$$\mathcal{A}(A_{11} + B_{12}F_1 + B_{11}F_1) = C_1$$

onde C_1 e C_2 são uma partição de C_b , $C_1 \cup C_2 = C_b$.

Observa-se que os algoritmos que resolvem as equações acima são de posicionamento de pólos de subsistemas do sistema original, ou de resolução de equações lineares.

5.2.1.3. Análise estrutural do PRPPP.

A estrutura do sistema sob análise pode fornecer suficiente informação a respeito do PRPPP. Suponha-se que o sistema (1) possa ser representado, como foi analisado no capítulo 4, pela estrutura da seguinte figura:

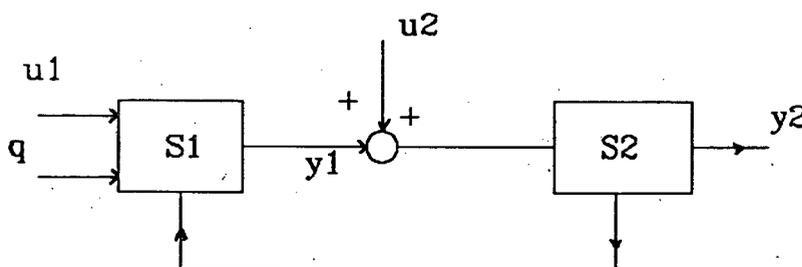


Figura 5.1. Estrutura solução do PRPPP.

Assim o PRPPP terá solução SSE os subsistemas S_1 e S_2 da figura 5.1. são estritamente causais, S_1 é controlável através de u_1 e S_2 é controlável através de u_2 . Desta forma uma

realimentação do estado de S_1 na entrada u_2 eliminará o efeito da perturbação em S_2 para solucionar o PRP como no capítulo 4, e realimentações de estado independentes posicionarão os pólos do sistema composto. Representando ao sistema pelas equações:

$$dx_1/dt = A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + B_1 u_1 + E_1 q$$

$$y_1 = C_1 x_1$$

$$dx_2/dt = A_{22} x_2 + B_2(u_2 + y_1)$$

$$y_2 = C_2 x_2 = z$$

o que é possível pela condição de causalidade, basta escolher a matriz de realimentação F como:

$$F = \begin{vmatrix} F_1 & 0 \\ -C_1 & F_4 \end{vmatrix}, \quad [u_1^t \quad u_2^t]^t = F [x_1^t \quad x_2^t]^t$$

e usar qualquer algoritmo de posicionamento de pólos nos subsistemas S_1 e S_2 para achar F_1 e F_4 .

5.2.2. Usando realimentação da saída.

Em muitos casos práticos o vetor de estados do sistema (1) não é mensurável, e portanto não são aplicáveis as técnicas de realimentação analisadas no ítem 5.2.1. Nessas condições a solução do problema pode ser atingida mediante técnicas de realimentação do vetor de saída mensurável do sistema (y). A estrutura mais geral para estudar uma realimentação deste tipo é a do compensador dinâmico de equações:

$$dw/dt = M w + N y \quad t \geq 0$$

$$u = K y + L w \quad \text{e } \dim(w) = 1 \quad (7)$$

ou seu equivalente na representação polinomial:

$$Q_c x_c = u_c \quad (8a)$$

$$y_c = P_c x_c \quad (8b)$$

onde x_c é o pseudo estado do compensador e se verifica:

$$C(s) = P_c Q_c^{-1}$$

$$y(s) = C(s) u_c(s)$$

A malha fechada é obtida vinculando o compensador e a planta segundo as seguintes equações:

$$u_c = y$$

$$u = -y_c + v \quad v = \text{entrada externa}$$

Assim o problema de rejeição de perturbações e posicionamento de pólos com realimentação da saída (PRPSPP) é colocado como:

(i) na representação por variáveis de estado:

Achar o compensador dinâmico da equação (7) para obter, no sistema em malha fechada de equações:

$$\begin{bmatrix} dx/dt \\ dx_c/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BKC & BL \\ ML & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z = [D \quad 0] [x^t \quad x_c^t]^t \quad (9)$$

uma saída $z(t) = 0$ para $x_0 = 0$, para todo $q(t)$ e todo t , e uma dinâmica de MF dada pelo espectro $\sigma(A_f) \subset C_b \subset C^-$ (A_f é a matriz de malha fechada);

(ii) na representação polinomial:

Achar o compensador da equação (8) tal que, em malha fechada com o sistema:

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ P \end{pmatrix} Q^{-1} \begin{bmatrix} R & S \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ q \end{pmatrix} \quad (10)$$

gere uma função de transferência de q para z identicamente nula, e posicione os pólos de MF do sistema em $C_b \subset C^-$.

5.2.2.1. Enfoque geométrico do PRPSPP.

(a) Análise da solução.

A solução deste problema na teoria geométrica pode ser analisada como uma conjunção das soluções obtidas para o PRPDS e PRPPP do capítulo 4 e ítem 5.2.1. respectivamente. A partir das condições de solução destes problemas, isto é, das equações:

$$V_*(\text{Im}E) \subset V^*(\text{Ker}D) \quad (11)$$

$$\text{Im}E \subset V_b^*(\text{Ker}D) \quad (12)$$

e da relação $V_b^*(\text{Ker}D) \subset V^*(\text{Ker}D)$ já estabelecida, pode-se gerar uma outra condição mais restritiva:

$$V_*(\text{Im}E) \subset V_b^*(\text{Ker}D) \subset V^*(\text{Ker}D) \quad (13)$$

tal que estabelece a solução do PRPS e ao mesmo tempo faz possível a alocação arbitrária do espectro do mapa $A+BF|V_b^*(\text{Ker}C)$ para um determinado conjunto de mapas F . Dualmente pode-se gerar o subespaço $V_b^*(\text{Im}E)$ como sendo o menor da classe H^- , isto é, dos subespaços (C,A) -invariantes que contém a $\text{Im}E$ e verificam $@[A+CG|V_b^*(\text{Im}E)] \subset C_b \subset C^-$, e propor uma nova condição:

$$V_b^*(\text{Im}E) \subset V_b^*(\text{Ker}D) \quad (14)$$

ainda mais restritiva que a anterior. Mas pelo fato de verificar-se $V_b^*(\text{Im}E) \subset V_b^*(\text{Im}E)$, (14) estabelece a existência da solução para o PRPS e, ao mesmo tempo assegura o posicionamento arbitrário das partes fixas do espectro de A_f , isto é, aquelas partes que não podem ser mexidas após a escolha de uma lei de realimentação. Assim se à condição (14) é acrescentada a observabilidade e controlabilidade do sistema em MA (sistema completo), obtém-se uma condição necessária e suficiente para a solução do PRPSPP. Observa-se que a observabilidade e controlabilidade permitem o posicionamento arbitrário na região livre do espectro. Formalmente:

TEOREMA 5.4. [Willems 81]

O PRPSPP tem solução SSE, (C,A,B) completo e se verifica:

$$V_b^*(\text{Im}E) \subset V_b^*(\text{Ker}D) \quad (15)$$

A condição estabelecida no teorema 5.4. cria uma dependência entre a solução do problema e os algoritmos de determinação dos subespaços $V_b^*(\text{Im}E)$ e $V_b^*(\text{Ker}D)$. Com o objetivo de simplificar a implementação da solução pode se considerar que não existe parte alguma do espectro fixo de A_f posicionado na região desejada (condição válida para

infinitos conjuntos C_b e portanto geral), hipótese já utilizada no ítem 5.2.1., e obter como consequência:

$$V_b^*(\text{Im}E) = N^*(\text{Im}E)$$

$$V_b^*(\text{Ker}D) = R^*(\text{Ker}D)$$

Com esta simplificação o PRPSPP terá solução SSE o sistema for completo e $N^*(\text{Im}E)$ e $R^*(\text{Ker}D)$. Os algoritmos para a determinação de $N^*(\text{Im}E)$ e $R^*(\text{Ker}D)$ são os analisados no capítulo 2.

Em geral a probabilidade de existência de solução ao PRPSPP está vinculada às dimensões dos vetores de entrada, saída e perturbação. Assim pode-se dizer que o PRPSPP terá geralmente solução SSE:

número de entradas > número de saídas a controlar

número de saídas mensuráveis > número de perturbações.

(b) Síntese da solução, [Willems 81].

A síntese do compensador solução é realizada em três passos. O primeiro para estabelecer a rejeição de perturbações e particionar o sistema em dois subsistemas desacoplados, e os dois posteriores para estabelecer o posicionamento de pólos em cada um desses subsistemas.

Passo 1:

Partindo da condição de solução do problema, isto é:

$$V_{b^*}(\text{Im } E) \subset V_b^*(\text{Ker } D)$$

$$\text{onde: } V_{b^*}(\text{Im } E) = \min \text{ de } H^- \quad V_b^*(\text{Ker } D) = \max \text{ de } H^+$$

é possível gerar um sistema aumentado do sistema original com dimensão $= < (\dim V_b^* - \dim V_{b^*})$, de equações:

$$dx^a/dt = A^a x^a + B^a u^a + E^a q$$

$$y^a = C^a x^a$$

$$z^a = D^a x^a$$

com as seguintes propriedades:

Existe um subespaço L^a , (A^a, B^a, C^a) -invariante, isto é, existe uma lei $u^a = K^a y^a + u_1^a$ tal que no sistema em MF:

$$dx^a/dt = A_f x^a + B^a u_1^a + E^a q$$

$$y^a = C^a x^a$$

$$z^a = D^a x^a$$

$$A_f = A^a + B^a K^a C^a$$

(16)

se verifica que L^a é A_f -invariante, e vale:

$$V_{b^*}(\text{Im } E) = L^a \wedge X \subset P L^a = V_b^*(\text{Ker } D)$$

e $\text{Im } G^a \subset L^a \subset \text{Ker } D^a$ onde $L^a \subset H^{a+} \wedge H^{a-}$.

Então dado que $\langle A_f | \text{Im } E^a \rangle \subset L_1^a \subset \langle \text{Ker } D^a | A_f \rangle$ o sistema aumentado em MF rejeita a perturbação. Para estabelecer o posicionamento de pólos, se realiza, perviamente, uma partição do estado do sistema $x^a \subset X^a$ em dois subespaços complementares:

(i) X^a / L^a , de mapa induzido \bar{A}_f e

(ii) o seu complemento canônico, que nota-se $S^a | L^a$ e possui um mapa induzido $A_f | L^a$.

Matricialmente tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} dx^a_1/dt \\ dx^a_2/dt \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A^a_{11} & A^a_{12} \\ 0 & A^a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x^a_1 \\ x^a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B^a_1 \\ B^a_2 \end{vmatrix} u^a_1 + \\ &+ \begin{vmatrix} E^a_1 \\ E^a_2 \end{vmatrix} q \end{aligned}$$

$$y^a = [C^a_1 \ C^a_2] [x^a_1 \ x^a_2]^t$$

$$z^a = [D^a_1 \ D^a_2] [x^a_1 \ x^a_2]^t$$

onde $x^a_1 \subset S^a | L^a$ e $x^a_2 \subset X_a / L^a$.

Observe que a matriz $A^a_{21} = 0$ devido à A_f -invariância de L^a .

Assim tem-se que $S^a | L^a$ é controlável pois $L^a \subset H^+(\text{Ker } D)$ e $S^a | L^a$ é observável pois o sistema completo é observável. Note que se $S^a | L^a$ for não observável, dado que $A^a_{21} = 0$, o sistema total também seria não observável.

De forma dual, para o subsistema X^a/L^a , tem-se que X^a/L^a é observável pois o sistema completo o é, e X^a/L^a é controlável pois $L^a \subset H^-(\text{Im } E)$.

Com as propriedades provadas para os subsistemas X^a/L^a e S^a/L^a é possível posicionar os pólos de cada um arbitrariamente em forma "desacoplada" com realimentações parciais.

Passo 2: Posicionamento de pólos no subsistema S^a/L^a

Cria-se uma extensão W_2 do subsistema S^a/L^a tal que se gere uma matriz de MF A_{2f} e existe um subespaço L^a_2 tal que:

(i) $L^a_2 = L^a_1 (+) W_2$, L^a_2 é A_{2f} -invariante e

$$\text{Im } E^a_2 \subset L^a_2 \subset \text{Ker } D^a_2,$$

(ii) $@(A_{2f}|L^a_2) \subset C_b$ e $@(\bar{A}_{2f}) \subset C_b$.

Com isso ficam posicionados os pólos do subsistema S^a/L^a , ao mesmo tempo que é mantida a propriedade de rejeição.

Passo 3: Posicionamento de pólos de X^a/L^a .

Cria-se uma extensão W_3 do subsistema X^a/L^a e uma lei de realimentação tal que:

(i) $L^a_3 = L^a_2$, L^a_2 é A_{3f} -invariante (A_{3f} é a nova matriz de MF)

e $\text{Im } E^a_3 \subset L^a_3 \subset \text{Ker } D^a_3,$

$$(ii) \ @ (A_{3f} | L^a_3) = \ @ (A_{3f} | L^a_2) \ c \ C_b$$

$$e \ @ (A_{3f}) \ c \ C_b.$$

Desta forma é completado o posicionamento de pólos mantendo a rejeição de perturbações.

5.2.2.2. Enfoque polinomial do PRPSPP.

(a) Análise do problema.

A solução do PRPSPP na representação polinomial da equação (10) é analisada como uma extensão do problema sem posicionamento de pólos do capítulo 4. Reescrevendo a equação que impõe a rejeição de perturbações tem-se:

$$G_{11}(s) X(s) G_{21}(s) + G_{12}(s) = 0 \quad (17)$$

onde $X(s)$, solução própria de (17), deve ser achada para se conseguir o posicionamento de pólos do sistema em MF.

Se o sistema é representado por:

$$Q x_s = R u + S q$$

$$z = T x_s + K_1 u + K_2 q \quad x_s = \text{pseudo estado do sistema}$$

$$y = P x_s + K_3 u + K_4 q$$

o compensador por:

$$Q_c x_c = u_c$$

$$y_c = P_c x_c \quad x_c = \text{pseudo estado do compensador}$$

e a lei de realimentação por:

$$u = -y_c + v$$

$$u_c = y \quad v = \text{entrada externa para controle de MF}$$

o sistema aumentado terá uma dinâmica dada por:

$$\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ x_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S \\ 0 \end{bmatrix} q$$

e realimentando:

$$\begin{bmatrix} Q & R P_c \\ -P & Q_c + K_3 P_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ x_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ K_3 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} S \\ K_4 \end{bmatrix} q$$

Assim a matriz polinomial:

$$\theta_f = \begin{bmatrix} Q & R P_c \\ -P & Q_c + K_3 P_c \end{bmatrix}$$

deverá ser estável para garantir estabilidade de MF e deverá verificar-se:

$$Z[\det(\theta_f)] \subset C_b \subset C^-$$

para estabelecer o posicionamento de pólos.

As condições de solução colocadas devem ser expressas em função das equações de MA do sistema. Lembrando a análise feita no capítulo 4 estabelece-se o seguinte teorema:

TEOREMA 5.5. [Ozgurer 86][Eldem 89]

O PRPSPP tem solução SSE a equação:

$$Z_4 = Z_3 X Z_2 \quad (18)$$

tem solução nos anéis $R_p(s)$ e $R[s]$ e as matrizes P, Q e R verificam:

Q e R são coprimas por esquerda

P e Q são coprimas por direita.

Combinando as condições de solução da equação (18), estudadas no capítulo 2, com o resultado do teorema anterior, tem-se:

COROLARIO:

O PRPSPP tem solução SSE:

(i) o maior fator comum pela direita de P e Q, e o maior fator comum pela esquerda de Q e R são unimodulares,

(ii) $Z_{12} = 0, Z_{21} = 0, Z_{22} = 0,$

$\text{grau}(Z_{11ij}) = < u_i + v_j$ para todo i, j , e

$M_3^{-1} Z_{11} M_2^{-1}$ é polinomial.

onde a nomenclatura usada é a mesma do capítulo 4.

(b) Síntese da solução.

Analogamente ao analisado no capítulo 4, a síntese da solução do PRPSPP na representação polinomial se reduz a uma das soluções da equação $A=BXC$ estudadas no capítulo 2. Maiores detalhes deste procedimento podem ser achados nas referências [Ozgurer 85], [Ozgurer 86], [Eldem 89].

5.3. Rejeição assintótica de perturbações e posicionamento de pólos.

Como foi mencionado no capítulo 4, o problema de rejeição assintótica não pode ser resolvido para qualquer escolha da dinâmica de MF do sistema, mas somente se o posicionamento arbitrário dos pólos, simultâneo à rejeição, se realiza em um conjunto C_b que verifica:

$$C_b \subset C \quad (19)$$

Sob a condição (19) o problema que se deve analisar difere bem pouco do estudado no capítulo 4.

No caso de utilizar a estrutura clássica do servo compensador da figura 4.4.a. e a representação por frações polinomiais da planta e compensador, o PRPAPP é solucionado como no capítulo 4 com exceção da condição nos zeros do determinante da matriz $D_x[s]$. Para o caso de posicionamento de pólos deve considerar-se:

$$D_x[s] \subset R[s]^{n \times n} \text{ tal que } Z[\det(D_x[s])] \subset C_b \subset C$$

O restante do equacionamento é o mesmo do capítulo 4.

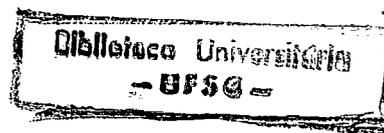
Também existem poucas diferenças na solução do PRPAPP quando é utilizado o servocompensador com realimentação de estados da figura 4.4.b.. Simplesmente o novo problema é solucionado mudando a condição de (A,B) estabilizável pela de (A,B) controlável. Já no caso de utilizar um par observador-realimentação de estados, deve ser acrescentada a condição (C,A) observável.

De uma maneira geral aqui se confirma o estudado nos capítulos 2 e 3, isto é, o PRPAPP é um problema mais amplo que o PRPA, e este último pode ser considerado como caso particular do primeiro.

5.4. Conclusões.

Uma análise detalhada dos diferentes problemas colocados neste capítulo mostra que:

- (i) o problema de rejeição total de perturbações com posicionamento de pólos apresenta, tanto no procedimento de análise como de síntese, maiores dificuldades que seus equivalentes nos problemas isolados estudados nos capítulos 3 e 4;
- (ii) o problema de rejeição assintótica com posicionamento de pólos tem, de fato, uma solução equivalente ao problema simples de rejeição do capítulo 4, já que neste último a estabilidade do sistema em malha fechada é exigida como condição de solução;
- (iii) as soluções do PRPSPP estabelecidas nas teorias polinomial e geométrica, embora equivalentes, continuam apresentando as mesmas características já mencionadas nos



capítulos anteriores, isto é, as primeiras resultam de aplicação mais simples e as segundas colocam a solução de forma mais facilmente interpretável;

(iv) os algoritmos de obtenção da solução que foram apresentados têm um carácter teórico-acadêmico. Nota-se como ponto de interesse para futuras pesquisas, a análise e o desenvolvimento de algoritmos com boas características numéricas para a solução destes problemas.

CAPÍTULO 6: DESACOPLAMENTO ENTRADA-SAÍDA

6.1. Introdução.

Todo sistema linear multivariável pode ser analisado como o resultado da interconexão de vários subsistemas de menor dimensão, e em alguns casos particulares, como composto por um conjunto de sistemas monovariáveis. As mencionadas interconexões criam, entre as diversas partes do sistema, um acoplamento que é observado nas relações entrada-saída do sistema completo. Assim, as entradas de cada subsistema influenciam as saídas de varios deles e não somente as do próprio. Este acoplamento entre as diferentes partes impede que seja realizado um estudo em forma independente para cada subsistema, fato que, se fosse possível, facilitaria enormemente as técnicas de controle a serem empregadas.

Assim, baseando-se na simplicidade das técnicas de controle monovariável e na existência de uma relação direta entre complexidade dos algoritmos de controle e dimensão do sistema, pode-se concluir que a análise das técnicas de desacoplamento torna-se um ponto muito importante dentro da teoria de controle de SLM.

O objetivo de uma técnica de desacoplamento consiste então em utilizar uma realimentação dos estados ou saídas do sistema em MA para obter em MF um conjunto de subsistemas que possam ser controlados independentemente. Assim, a especificação de desacoplamento deve entender-se como aquela que procura obter, no sistema em MF, o cumprimento simultâneo das condições de: (i) não interação entre as ações de controle e (ii) controlabilidade de cada uma das saídas. Esta última condição está estritamente vinculada ao problema de estabelecimento de uma certa relação estática e dinâmica entre os pares (z_i, u_j) . Por este motivo, e a diferença dos outros problemas tratados neste

trabalho, a estabilidade ou o posicionamento de pólos do sistema em MF serão estudados conjuntamente com o problema de desacoplamento.

As condições de desacoplamento podem ser colocadas através de diferentes tipos de especificação. Entre elas, a mais exigente para o sistema é aquela que estabelece um desacoplamento dinâmico e entre todos os subsistemas que compõem o sistema global. Outras soluções mais simples podem ser analisadas se são especificadas somente condições de desacoplamento parcial (estático, dinâmico unilateral, etc).

Como primeiro passo antes de realizar a síntese ou projeto do controlador deve-se analisar a existência de solução para o problema especificamente colocado, i.e, sob quais condições do sistema de MA é possível projetar um dado compensador para obter, em MF, alguma das especificações de projeto já mencionadas. É claro então que as condições a verificar pelo sistema em MA serão tanto mais exigentes quanto o sejam as especificações de controle.

Levando em conta os fatos mencionados, far-se-á, neste capítulo uma análise das diferentes soluções teóricas do problema de desacoplamento com e sem acrescentar condições de estabilidade ou posicionamento de pólos.

6.2. Desacoplamento total

Considere um SLM onde as saídas escalares z_{ij} tem sido agrupadas em k subconjuntos disjuntos de forma tal que cada um deles representa características físicas particulares do sistema total. Suponha também que o sistema é controlado por um conjunto de entradas escalares $u_l, l=1...m \geq k$. Em muitos casos práticos é de interesse realizar um esquema em MF que permita que cada entrada u_l controle cada subconjunto

de saídas em forma independente, isto é, sem afetar o comportamento dos outros subconjuntos. Quando é possível realizar um controle desse tipo, diz-se que o sistema foi desacoplado totalmente, e que a ação de controle é não interativa.

6.2.1. Enfoque geométrico do problema de desacoplamento total.

6.2.1.1. Análise do problema.

Seja o SLM representado pelas equações:

$$\begin{aligned} dx/dt &= A x + B u \\ y &= C x & x(0) &= x_0, t > 0 \\ z_i &= D_i x & i &= 1 \dots k \end{aligned} \quad (1)$$

onde $x \in X(\text{dim } n)$, $u \in U(\text{dim } m)$, $y \in Y(\text{dim } r)$, e $z_i \in Z_i(\text{dim } l_i)$ são respectivamente o estado, a entrada, a saída mensurável e as saídas a controlar, e onde se adota para a saída:

$$Z = Z_1 (+) Z_2 (+) \dots (+) Z_k.$$

O objetivo do controle é encontrar uma lei de realimentação do tipo:

$$u = f(x, y, w, v_1, \dots, v_k) \quad (2)$$

onde w é uma variável auxiliar e os vetores v_i representam os conjuntos de entradas de controle escalares, tal que em MF cada saída z_i seja controlada exclusivamente por cada v_i .

(a) Realimentação de estados.

Quando o estado do sistema é mensurável, a lei de controle da equação (2) transforma-se em uma lei do tipo:

$$u = Fx + G_1 v_1 + G_2 v_2 + \dots + G_k v_k \quad (3)$$

onde $F: U \rightarrow X$ e $G_i: U \rightarrow U$.

Com esta lei de realimentação o sistema em MF é representado na equação (4), e cada uma das relações entrada-saída é estabelecida pelas funções de transferência dadas em (5).

$$\begin{aligned} dx/dt &= (A + BF)x + BG_1 v_1 + BG_2 v_2 + \dots + BG_k v_k \\ z_i &= D_i x \quad i=1\dots k \end{aligned} \quad (4)$$

$$T_{ij}(s) = D_j (sI - A - BF)^{-1} BG_i \quad (5)$$

Como o objetivo é que cada entrada v_i controle, unicamente, uma saída z_j , as condições de solução podem ser estabelecidas em função dos subespaços controlados por cada v_i . Assim, seja R_i o subespaço de controlabilidade dado por:

$$R_i = \langle A + BF \mid \text{Im}(BG_i) \rangle \quad (6)$$

Como v_i não deve afetar a saída $j \neq i$, tem-se:

$$D_j R_i = 0 \quad \text{para todo } i \neq j \quad (7)$$

e como v_i deve controlar z_i :

$$D_i R_i = \text{Im } D_i \quad \text{para todo } i \quad (8)$$

o que implica que, com uma escolha adequada, todo elemento da imagem de D_i pode ser alcançado por v_i .

A partir do anterior pode se definir formalmente o problema de desacoplamento total por realimentação de estados (PDT) como sêgue:

PDT: Achar um conjunto de mapas $F, G_i, i=1..k$, tais que para o sistema em MF representado em (4), os R_i definidos em (6) verifiquem as equações (7) e (8), ou equivalentemente, que as funções de transferência definidas em (5) verifiquem:

$$T_{ij} = 0 \quad \text{para todo } i \neq j \quad \text{entre } 1 \text{ e } k.$$

Definindo $K_i = \text{Ker } D_i$ para $i=1..k$, e lembrando que a equação (6) pode ser colocada como, [Wonham 79]:

$$R_i = \langle A + BF \mid \text{Im } B \wedge R_i \rangle \quad (9)$$

as equações (7) e (8) podem ser respectivamente reescritas como:

$$R_i \subset \text{Interseção } (K_j) \quad i=1..k \\ i \neq j \quad (10)$$

$$R_i + K_i = X \quad i=1..k \quad (11)$$

Geralmente a condição (10) é conhecida como condição de não interação e a (11) como de controlabilidade. Resulta claro que a condição de controlabilidade do par (A,B) é

necessária para que cada saída z_i seja controlada. A condição de estabilizabilidade poderia ser utilizada se a convergência a zero dos estados não controláveis fosse suficientemente rápida para não influenciar a resposta dos outros estados.

Um ponto importante de ser analisado neste problema é a compatibilidade da família de subespaços R_i relacionados ao par (A,B) , [Wonham 79]. Observe que a condição (9) impõe a existência de um mapa F comum a todos os subespaços R_i , isto é, deve existir pelo menos um "amigo comum" entre as famílias $F(R_i)$, ou equivalentemente:

$$\text{Interseção } F(R_i) \neq 0 \quad (12)$$

$$i=1..k$$

A maneira mais direta de se atacar o PDT seria calculando os subespaços máximos de controlabilidade:

$$R_i^* = \max T(A,B,K_i^*)$$

$$\text{onde } K_i^* = \text{Interseção } K_j \quad i=1..k$$

$$i \neq j$$

que geram pares F_i, R_i^* que verificam (10). Mas a condição (11) com os R_i^* passa agora a ser somente necessária já que mesmo se ela é verificada por todos os R_i^* , nada assegura que estes sejam compatíveis. Com este raciocínio fica claro que para o problema mais geral, isto é, para uma escolha qualquer dos K_i , a solução usando simplesmente uma lei $u=Fx$ é pouco provável. Para encontrar uma CN e S no caso de realimentação de estados, é preciso acrescentar alguma hipótese na escolha dos D_i . Considere que os subespaços K_i verificam:

$$\text{Inteseção } K_i = 0 \quad (13)$$

$$i=1..k$$

o que implica que se $D_i x = 0$ para todo $i=1..k$, então $x = 0$, isto é, o mapa $D: X \rightarrow Y$ definido pela soma direta:

$$D x = D_1 x (+) D_2 x (+) \dots (+) D_k x \text{ é mónico.}$$

Nesse caso diz-se que a saída do sistema é completa.

Com esta hipótese a CN e S para a existência da solução é colocada no seguinte teorema:

TEOREMA 6.1. [Wonham 79]

Sujeito à condição (13) o PDT tem solução SSE:

$$R_i^* + K_i = X \text{ para todo } i=1..k \quad (14)$$

Para ver que (14) sujeita a (13) gera a independência dos K_i^* e portanto a independência e compatibilidade dos R_i^* basta colocar:

$$K_i^* \cap \sum_{j \neq i} K_j^* = \left(\bigcap_{r \neq i} K_r \right) \cap \sum_{j \neq i} \left(\bigcap_{s \neq j} K_s \right) \subset \left(\bigcap_{r \neq i} K_r \right) \cap K_i = \bigcap_{r=1}^k K_r = \emptyset$$

Se além das condições de desacoplamento já colocadas se especifica uma determinada região do plano complexo para alocar os pólos de MF, deve ser considerada a condição de controlabilidade do sistema total. Assim, se o par (A,B) for controlável a independência dos K_i^* permite o posicionamento de pólos do sistema em MF. Formalmente:

TEOREMA 6.2. [Wonham 79]

Se (A,B) é controlável e se verifica (13), então seja uma partição qualquer de C_b e C^* tal que $C_b = \text{União } C_{bi}$ e os C_{bi} são-admissíveis. Então existe uma lei de realimentação F tal que:

$$F \text{ c Interseção } F(R^*_i) \quad (15a)$$

$$i=1..k$$

$$@ [(A+BF) | R^*_i] = C_{bi} \quad (15b)$$

$$@ [A+BF] = C_b \quad (15c)$$

Assim, as condições (13) e (14) dão uma solução ao PDT com posicionamento de pólos (PDTPP), já que escolhendo F para verificar (15) está-se escolhendo uma lei de realimentação que sintetiza a condição (14) de desacoplamento.

A aplicação da solução apresentada tem como dificuldade principal a condição de independência dos R^*_i . Esta condição é, em geral, não válida para o sistema (1), mas pode gerar-se, através de uma dinâmica de integradores, um sistema aumentado que possua as propriedades desejadas sem exigir condição alguma na saída do sistema.

(b) A solução para o sistema aumentado.

Seja o conjunto de integradores dado por:

$$dx_c/dt = B_c u_c \quad (16)$$

onde $x_c \in X_c$ ($\dim n_c$) e $u_c \in U_c$.

Gera-se o sistema aumentado dado por:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} dx/dt \\ dx_c/dt \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ x_c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B & 0 \\ 0 & B_c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u \\ u_c \end{vmatrix} \\ y &= [C \quad 0] [x^t \quad x_c^t]^t \\ z_i &= [D_i \quad 0] [x^t \quad x_c^t]^t \end{aligned} \quad (17)$$

e nota-se com subíndice a às variáveis, subespaços e matrizes do novo sistema aumentado.

O problema de desacoplamento total para o sistema aumentado, (PDTA) é colocado como:

PDTA: Achar, para o sistema (1), uma extensão dada pela equação (16) e k subespaços de controlabilidade aumentados R_{ia} tais que:

$$\begin{aligned} \text{Inteseção } F_a(R_{ia}) &= / 0 \\ i &= 1..k \end{aligned} \quad (18a)$$

$$\begin{aligned} R_{ia} \text{ c Interseção } (K_j (+) X_c) & \quad i=1..k \\ i & \neq j \end{aligned} \quad (18b)$$

$$R_{ia} + (K_i (+) X_c) = X_a \quad (18c)$$

que de fato são, respectivamente, as condições de compatibilidade, desacoplamento e controlabilidade para o sistema aumentado. A solução é colocada a seguir:

TEOREMA 6.3 [Wonham 79]:

O PDTA tem solução SSE $R_i^* + K_i = X$ (19)

onde R_i^* é o definido para o sistema sem aumentar.

A flexibilidade obtida ao aumentar o sistema permite sintetizar os subespaços R_{ia} de forma tal que resultam independentes, e portanto se torna possível escolher uma única F_a comum a todos os R_{ia} . Pelo mesmo fato que no teorema 6.2, e se (A,B) controlável, a independência dos R_{ia} permite o posicionamento dos pólos do sistema aumentado. Assim, existe F_a tal que soluciona o PDTA com posicionamento de pólos (PDTAPP), isto é:

$$\text{@(A}_a + B_a F_a) \text{ c } C_b = \text{União}(C_{bi})$$

$$\text{@(A}_a + B_a F_a | R_{ai}) \text{ c } C_{bi}$$

O resultado do teorema 6.3 pode ser interpretado através de uma estrutura de compensação dinâmica. Observe-se que a dinâmica da extensão do sistema é:

$$dx_c/dt = B_c u_c$$

e sendo que u_c é escolhido pela realimentação como:

$$u_c = F_{21} x + F_{22} x_c + \text{Soma } G_i v_i \quad \text{com}$$

$$F_a = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix}$$

obtem-se, compondo as equações, uma estrutura de compensação:

$$dx_c/dt = B_c F_{22} x_c + B_c F_{21} x + \text{Soma } B_c G_i v_i$$

$$u = F_{12} x_c + F_{11} x + \text{Soma } G_i v_i$$

que é equivalente à:

$$\begin{aligned} dw/dt &= N w + M y + \text{Soma } H_i v_i \\ u &= L w + K y + \text{Soma } G_i v_i \end{aligned}$$

onde a saída mensurável do sistema é coincidente com o estado ($C = I$).

Quando o PDTA tem solução, a ordem necessária do compensador solução não é maior que [Wonham 79]:

$$n_c = \sum_{i=1}^k \dim(R_i^*) - \dim\left(\sum_{i=1}^k R_i^*\right) \quad (20)$$

Esta forma de calcular a ordem máxima necessária pode ser analisada de forma intuitiva. Observe que se os R_i^* fossem independentes, $n_c = 0$ e portanto não seria necessário aumentar a ordem do sistema, fato que simplesmente confirma o teorema 6.1. Já quando os R_i^* não são independentes, a equação (20) coloca o número de estados que fazem falta para se conseguir a condição de solução. Cabe resaltar que essa ordem não é mínima já que a condição de independência dos R_i^* é suficiente mas não necessária para a obtenção da compatibilidade. Uma análise mais detalhada deste ponto pode ser achada no trabalho de Wonham e nas referências nele citadas.

(c) Compensação utilizando realimentação da saída mensurável

Quando o estado do sistema não é mensurável, a estratégia de controle analisada em (b) é substituída por uma similar onde o vetor x é substituído pela saída mensurável (y) do sistema. Assim, o compensador dinâmico tem as seguintes equações:

$$\begin{aligned} dw/dt &= N w + M y \\ u &= L w + K y + \text{Soma } G_i v_i \\ & \quad i=1..k \end{aligned} \quad (21)$$

onde w é o estado do compensador e v_i as entradas externas de controle. Em malha fechada, o sistema tem as equações:

$$\begin{aligned} dx_a/dt &= A_a x_a + \text{Soma } G_{ia} v_i \\ & \quad i=1..k \\ z_i &= D_{ia} x_a \quad i=1..k \end{aligned} \quad (22)$$

onde:

$$x_a = \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \quad A_a = \begin{bmatrix} A+BKC & BL \\ MC & N \end{bmatrix} \quad G_{ia} = \begin{bmatrix} BG_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad D_{ia} = [D_i \quad 0]$$

e o problema de desacoplamento total com realimentação dinâmica da saída (PDTS) é colocado como:

Achar os mapas N , M , L , K e G_i tais que o sistema em MF representado pelas equações (22) tenha cada z_i controlado exclusivamente pela entrada v_i . Geométricamente isto equivale a dizer que:

$$\langle A_a \mid \text{Im } G_{ia} \rangle \cap \bigcap_{j \neq i} \text{Ker } D_{ja} \quad (23)$$

ou seja que os modos controlados pela entrada v_j sejam ocultos da saída z_j para todo $j \neq i$.

Se além disso, supondo (A,B) controlável, é exigida a alocação de pólos em MF, deverá verificar-se a controlabilidade de cada saída z_j desde cada entrada u_j , isto é:

$$D_{ia} \langle A_a \mid \text{Im } G_{ia} \rangle = \text{Im } D_{ia} \quad (24)$$

Desta forma (23) e (24) constituem as condições de existência de solução para o PDTS com posicionamento de pólos (PDTSP).

PDTSP:

Para se analisar o PDTSP vale realizar uma comparação com o PDTAP do item (b). Observa-se que em ambos casos é utilizada uma compensação dinâmica e que somente muda a variável mensurável (x no PDTAP, e y no PDTSP). Mas se o par (C,A) for observável, a informação contida no estado x pode ser obtida através de um observador. Com isso, as condições para a existência da solução do PDTSP serão as mesmas que no PDTAP mais a observabilidade do par (C,A) . Formalmente coloca-se:

TEOREMA 6.5 [Leite 88]:

Se o par (A,B) é controlável então as CN e S para a existência da solução do PDTSP são:

$$(i) (C,A) \text{ observável}; \quad (25)$$

$$(ii) R_i^* + K_i = X \quad i=1\dots k \quad (26)$$

com R_i^* e K_i definidos como no item (a).

Nota-se que se simplesmente for colocada a condição de estabilidade o par (C,A) deverá ser somente detectável. No caso que se deseje analisar o problema sem a condição de alocação de pólos, é possível uma análise através dos pares (C,A,B) estudados no capítulo 2, [Leite 86].

6.2.1.2. Síntese da solução.

(a) Usando realimentação de estados

Considere o PDT analisado no ítem 6.2.1.1. Se a condição necessária para a existência da solução for verificada, a síntese do mapa F consiste em encontrar um "amigo comum" dos subespaços R_i^* . Note-se que no caso mais geral, onde não é verificada a condição de saída completa da equação (13), a procura de uma única F pode não ter sucesso.

Já no caso do PDTA a solução existirá sempre que se verifique a condição (19), e a síntese do mapa F dependerá da forma de escolher o compensador dinâmico que assegura a compatibilidade dos R_{ia}^* . Para se lograr esta última condição define-se, [Wonham 79]:

$$(i) X_c \text{ tal que } \dim(X_c) = n_c \text{ e } X_a = X (+) X_c$$

onde n_c e a dimensão definida em (20);

$$(ii) E_i : X_a \rightarrow X_a \text{ tais que } \text{Im } E_i \subset X_c \quad i=1\dots k.$$

Assim, para cada R_i^* calculam-se os R_{ia} como:

$$R_{ia} = (I + E_i) R_i^* \quad i=1\dots k.$$

Com esta escolha os R_{ia} resultam independentes e por tanto a existência de $F_a: X_a \rightarrow U_a$, solução do PDTA, é garantida.

Para encontrar os mapas E_i pode se aplicar o seguinte procedimento, [Wonham 79]:

$$\text{Define-se } L_1 = 0 \text{ e } L_i = R_i^* \wedge \sum_{j=1}^{i-1} R_j^* \quad i=2\dots k,$$

$$\text{que de fato verificam } \sum_{i=1}^k \dim(L_i) = \dim(X_C).$$

A partir deles escolhem-se os E_i tais que verifiquem:

$$L_i \text{ isomorfo com } E_i L_i = \text{Im } E_i \subset X_C \quad i=1\dots k,$$

o que assegura a sua independência e portanto a dos R_{ia} .

Além da solução do PDT, a condição de independência permite, sempre que (A,B) controlável, escolher uma F_a tal que o espectro $\sigma[(A+B_a F_a)|R_{ia}] \subset C_{bi}$, isto é, após estabelecer o desacoplamento, os graus de liberdade na determinação dos coeficientes f_{ij} da matriz F_a são suficientes para obter o posicionamento dos pólos de MF.

(b) Usando realimentação da saída, [Leite 88].

O procedimento de síntese do compensador que soluciona o PDTSP divide-se em duas etapas. Na primeira é obtida a alocação dos pólos de MF, e na segunda estabelece-se o desacoplamento.

Etapa 1:

Dado que (C,A) é observável é possível achar V^1 e X tal que (Wonham, 1979):

$$V^1 \cap \text{Ker } C = X \text{ e } @(A+GC) = C_g \text{ e } C^r$$

onde $A+GC$ é o mapa induzido por $A+GC$ em X/V^1 e C_g é um conjunto de $n-p$ números complexos simétricos.

Como (A,B) é controlável existe F tal que $@(A+BF) = C_f \text{ e } C^r$.

Considere-se a extensão de X através do espaço W_0 de dimensão $n-p$ e o mapa S_0 definido por:

$$S_0 : X \rightarrow W_0 \text{ e } \text{Ker}(S_0) = V^1$$

e seja o compensador dinâmico de equações:

$$u = Ky + L_0 w_0$$

$$dw_0/dt = M_0 y + N_0 w_0$$

(27)

que gera o sistema em MF:

$$\begin{vmatrix} dx/dt \\ dw_0/dt \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+BKC & BL_0 \\ M_0 C & N_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ w_0 \end{vmatrix} = A_0 [x^t \quad w_0^t]^t$$

de espectro dado por:

$$@(A_0) = \overline{@(A+BF)} \cup @(A+GC) = C_f \cup C_g$$

Com isso os pólos de MF ficam posicionados. Para definir totalmente o compensador de equações (27), as matrizes K , L_0 , M_0 , e N_0 são escolhidas para que o subespaço:

$$T_0 = \{ [x^t (R_0 x)^t]^t, x \in X \} \text{ seja } A_0\text{-invariante.}$$

Assim, acha-se K tal que:

$$F = KC + F_0 \text{ com } V^1 \subset \text{Ker}(F_0) \text{ e } F \subset F(V^2 = X) \quad (28a)$$

$$G = BK + G_0 \text{ com } \text{Im } G_0 \subset V^2 \text{ e } G \subset G(V^1) \quad (28b)$$

e escolhe-se:

$$L_0: W_0 \rightarrow U \text{ tal que } L_0 S_0 = F_0 \quad (29a)$$

$$M_0: U \rightarrow W_0 \text{ tal que } M_0 = -S_0 G_0 \quad (29b)$$

$$N_0: W_0 \rightarrow W_0 \text{ tal que } N_0 S_0 = S_0 (A + BF + G_0 C) \quad (29c)$$

Etapa 2:

A partir da síntese anterior define-se o compensador total como:

$$u = Ky + L_0 w_0 + \sum_{i=1}^k L_i w_i + \sum_{i=1}^k G_i v_i$$

$$dw_0/dt = M_0 y + N_0 w_0 + \sum_{i=1}^k N_i w_i + \sum_{i=1}^k J_i v_i$$

$$dw_i/dt = A_i w_i + H_i v_i \quad w_i \in W_i \quad i=1..k$$

onde os mapas L_i , G_i , N_i , J_i , A_i , e H_i devem ser calculados para obter o desacoplamento sem mudar as condições de estabilidade da etapa 1. O sistema em MF é representado nas equações:

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{l} dx/dt \\ dw_0/dt \\ dw_1/dt \\ \vdots \\ dw_k/dt \end{array} \right| = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc|cc} A+BKC & BL_0 & BL_1 & \dots & BL_k \\ M_0K & N_0 & N_1 & \dots & N_k \\ \hline & & A_1 & \dots & 0 \\ & 0 & 0 & \dots A_i \dots & 0 \\ & & 0 & \dots & A_k \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} x \\ w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_k \end{array} \right| + \end{array}$$

+ Soma $\sum_{i=1}^k B_{Ci} v_i$ onde os B_{Ci} são definidos como:

$$B_{Ci} = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{l} BG_1 \\ J_1 \\ \hline H_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right| \quad \dots \quad B_{Ck} = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{l} BG_k \\ J_k \\ \hline 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right| \end{array}$$

Sejam $C_i \in \mathbb{C}^k$ conjuntos de números complexos simétricos. Como os R_i^* ($\dim n_i$) são subespaços de controlabilidade, existem F_i e G_i tais que:

$$F_i: X \rightarrow U \quad G_i: U \rightarrow U$$

$$(A+BF)R_i^* \subset R_i^*$$

$$R_i^* = \langle (A+BF) \mid \text{Im}(BG_i) \rangle$$

(30)

$$\mathcal{A}[(A+BF_i) | R_i^*] = C_i \quad i=1..k$$

Portanto escolhendo a dinâmica de cada A_i se arbitra a alocação de pólos do sistema total em MF. Definindo W_i isomorfo com R_i^* e $S_i: R_i^* \rightarrow W_i$ e F_i que verifique (30) calcula-se A_i para obter:

$$A_i S_i = S_i \langle A+BF_i | R_i^* \rangle$$

condição que equivale, dado que S_i é um isomorfismo, a $\mathcal{A}(A_i) = C_i$.

O espaço de extensão W se define como:

$$W = W_0 (+) W_1 (+) W_2 (+) \dots (+) W_k$$

e seja T_i a extensão do subespaço R_i^* ao espaço aumentado W :

$$T_i = \{ x_a \text{ tais que } x_a = x (+) S_0 x (+) S_i (+) x, x \in R_i^* \}$$

que por definição verifica a condição de não interação colocada em (24). Logo se T_i for A_c -invariante e alcançável pela nova entrada $\text{Im } B_{ci}$, o PDTSPF fica resolvido. Para obter a A_c -invariância de T_i escolhe-se:

$$L_i S_i x = (F_i - F) x \quad x \in R_i^*$$

$$S_0 (A+BF) x + N_i S_i x = S_0 (A+BF_i) x \quad x \in R_i^*$$

Além disso escolhendo:

$$J_i = S_o B G_i \quad H_i = S_i B G_i$$

resulta para os mapas B_{ci} : $\text{Im } B_{ci} \subset T_i$ e como:

$$R_i^* = \langle A + BF_i \mid BG_i \rangle \quad \text{vale } T_i = \langle A_c \mid \text{Im } B_{ci} \rangle, \text{ o que}$$

implica na condição de alcançabilidade desejada.

6.2.2. Enfoque polinomial do problema de desacoplamento total, [Desoer 81], [Vardulakis 87], [Ferreira 88].

6.2.2.1. Análise do problema.

Seja um sistema linear multivariável representado pela função de transferência $P(s)$ e $R(s)^{noxi}$, e seja a estrutura de controle por realimentação unitária da saída da fig. 6.2.

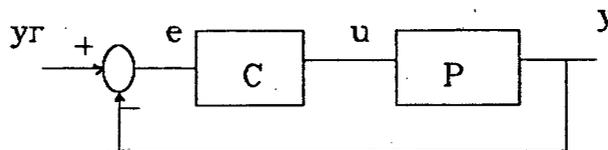


Figura 6.2. Estrutura de controle.

O problema que se coloca é achar, na estrutura da fig. 6.2, um compensador $C(s)$ e $R(s)^{n \times n}$, tal que o sistema em MF possua uma função de transferência bloco diagonal e com seus pólos em uma região C_b e C^* do plano complexo. Além disso, o sistema total em MF deve ser internamente estável. O problema assim formulado é chamado de desacoplamento total com posicionamento de pólos via realimentação unitária (PDTPPU).

Seja C_T o complemento de C_b ($C_b \cup C_T = C$) e considere a representação em frações coprimas por direita de $P(s)$:

$$P(s) = N(s) D^{-1}(s)$$

Sejam $\text{pol}N(s)$ e $\text{pol}D(s)$ as partes dos polinômios invariantes de N e D que possuem todas suas raízes em C_T . Assim, pode-se estabelecer uma condição necessária e suficiente para a existência de um $C(s)$ que soluciona o PDTPPU através do seguinte teorema:

TEOREMA 6.6 [Ferreira 87]

Suponha-se que $\text{pol}N(s)$ e $\text{pol}D(s)$ são coprimos. Assim, existe $C(s)$ que soluciona o PDTPPU SSE $P(s)$ é de posto completo por linhas.

Este teorema permite testar de maneira muito simples a existência de solução para o PDTPPU já que os polinômios invariantes de N e D podem ser facilmente achados a partir da forma de Smith das matrizes N e D .

Uma condição similar mas somente suficiente para a existência da solução é obtida a partir dos polinômios $a_1(s)$ e $b_1(s)$ da matriz de Mc. Millan de $P(s)$ dada como:

$$S(s) = \text{bloco diag}(a_1/b_1, a_2/b_2, \dots), \text{ [Vardulakis 87]}$$

Assim, se a_1' e b_1' são respectivamente as partes de a_1 e b_1 com raízes em C_r , a solução para $P(s)$ própria existe SE a_1' e b_1' são coprimos.

No caso particular onde o conjunto de plantas $P(s)$ é reduzido as que verificam $n_0 = n_i$, a condição de posto completo de $P(s)$ permite trabalhar com $P^{-1}(s)$ e obter o compensador de uma forma muito simples. Isto será analisado na continuação.

6.2.2.2. Síntese da solução.

No caso mais geral, isto é, quando P é retangular e de posto completo a condição nos polinômios $\text{pol}N(s)$ e $\text{pol}D(s)$ permite definir C_1 como sendo [Ferreira 87]:

$$C_1 = \frac{\text{pol}N(s)}{m(s) \text{ pol}D(s)} D(s) U(s) \begin{vmatrix} N^{-1}(s) \\ 0 \end{vmatrix}$$

onde $U(s)$ é uma matriz polinomial unimodular tal que $NU = [N \ 0]$, e m é um polinômio com raízes em C_b escolhido para que C_1 seja próprio e $\text{pol}N/m \text{ pol}D$ estritamente próprio. Com esta escolha se verifica que:

$$P(s) C_1(s) = \frac{\text{pol}N(s)}{m(s) \text{ pol}D(s)} I$$

e também não existem cancelamentos de pólos e zeros dentro do conjunto C_r , o que assegura que $P(s) C_1(s)$ é internamente estabilizável no conjunto C_b .

Se a função de transferência de MF desacoplada é dada por $H(s) = \text{diagonal}(h_i)$ com $i=1\dots n_0$ e $h_i = n_i/d_i$, então a solução do problema é dada pelas soluções próprias x_i/y_i das equações:

$$x_i(s) \text{ pol}N(s) + y_i(s) m(s) \text{ pol}D(s) = d_i$$

Estas soluções existem se $\text{grau}(d_i) \geq 2 \text{ grau}(m \text{ pol}D) - 1$ para todo i [Callier 81]. Se os graus dos polinômios d_i não forem suficientemente grandes deverão ser acrescentados novos pólos em d_i que não comprometam a dinâmica da solução desejada e permitam uma solução x_i/y_i própria.

Com os x_i/y_i achados o compensador solução resulta:

$$C(s) = C_1(s) \text{ diag}(x_i/y_i) \quad i=1..n_0.$$

No caso particular de P quadrada tem-se a seguinte simplificação no procedimento [Callier 81]:

Calcula-se $P(s)^{-1}$. Se $P(s)$ tiver zeros em C_r calcula-se $N(s)^{-1}$ e escolhem-se polinômios $g_j(s)$ tais que para os elementos $n'_{ij}(s)$ de $N(s)^{-1}$ se verifique:

$$n'_{ij}(s) g_j(s) \text{ analítica em } C_r \text{ para todo } i.$$

Em outro caso os $g_j(s)$ se escolhem unitários. Assim o compensador $C(s)$ é calculado como:

$$C(s) = P(s)^{-1} \text{ diag} \left[\frac{n_j(s) g_j(s)}{d_j(s) - n_j(s) g_j(s)} \right]$$

e o grau dos polinômios $d_j(s)$ deve ser escolhido para assegurar que $C(s)$ seja próprio.

6.3. Desacoplamento parcial e estático.

Em muitos casos práticos não é necessário exigir do sistema em MF condições de desacoplamento totais, porém podem ser utilizadas outras do tipo parcial ou estacionário. Nesses casos as condições que deverá verificar o sistema em MA serão menos restritas.

Dentro das possíveis estruturas de desacoplamento parcial, destaca-se particularmente aquela que propõe uma relação "triangular" entre as saídas. Isto pois ela permite, através de realização de um controle sequencial das saídas do sistema, obter um comportamento similar ao de desacoplamento total. Suponha-se que fosse possível obter uma estrutura de controle onde cada entrada u_i controlasse a saída z_i sem perturbar a evolução de z_j com $j < i$. Assim, após estabelecida a saída z_i poderão mudar-se as seguintes z_j (com $j > i$) sem alterá-la.

Formalmente o desacoplamento triangular consiste em achar, para o sistema de equações (1), um mapa F de realimentação e subespaços R_i tais que:

$$R_i = \langle (A + BF) | (\text{Im } B \wedge R_i) \rangle \quad i=1\dots k$$

$$R_i \subset \bigcap_{j=1}^{i-1} \text{Ker } D_j \quad i=2\dots k \quad (31)$$

$$R_i + \text{Ker } D_i = X \quad i=1\dots k.$$

Uma condição N e S para a existência de solução é:

TEOREMA 6.7 [Wonham 79]:

O problema de desacoplamento triangular tem solução SSE:

$$R_i^* + \text{Ker } D_i = X \quad i=1..k$$

onde os R_i^* são os máximos das classes de subespaços R_i que verificam a condição (31).

Outras especificações parciais de desacoplamento podem ser analisadas de maneira similar ao caso anterior, bastando para isso a colocação do problema através dos conceitos de não interação e controlabilidade.

Já quando não for possível obter alguma condição de desacoplamento dinâmico parcial, pode ser interessante desacoplar estaticamente (regime estacionário), seja em forma parcial ou total. Para isso, supondo o sistema representado pela sua função de transferência, calcula-se o vínculo estático entre $z_i(t)$ e $u_j(t)$ através da relação $z_i(s)/u_j(s)$ e da condição de estabilidade em MF. A partir destas relações calcula-se, quando possível, a matriz de realimentação estática que resolve o desacoplamento desejado.

6.4. Conclusões.

A solução do problema de desacoplamento apresenta algumas características diferentes dos problemas analisados nos capítulos anteriores. Como ponto principal nota-se que a solução polinomial do PDTSPP além de ser operativamente mais simples que a geométrica, pode ser vinculada de forma simples ao fenômeno físico do desacoplamento. Além disso a solução total do problema pode ser obtida de forma combinada, isto é, desacoplando através de técnicas geométricas e posicionando os pólos de cada malha com técnicas polinomiais.

Por outro lado nota-se que, de forma similar aos outros problemas já estudados, quando o sistema permite a medição direta do vetor de estados, a solução do PDT por realimentação de estados usando enfoque geométrico se apresenta como a mais adequada.

Como último ponto deve notar-se, novamente, o carácter académico dos algoritmos apresentados para a síntese de compensadores.

PARTE 3

Aplicações e Conclusões

CAPÍTULO 7: APLICAÇÕES.

7.1. Introdução.

O estudo comparativo das diferentes técnicas de controle de um SLM, realizado na segunda parte deste trabalho, permitirá a aplicação das diferentes teorias a um problema prático específico, visando obter como resultado a melhor opção de controle. O problema escolhido para este estudo é o do controle de um motor de indução controlado por tensão. A escolha desta máquina elétrica como modelo para a aplicação se baseia nos aspectos seguintes:

- (i) a importância prática da solução, e
- (ii) a possibilidade de estudar, num mesmo modelo, todos os problemas analisados na parte dois do trabalho.

Dado que o modelo real do motor é não linear, será feita uma análise sobre o modelo linearizado no seu ponto de funcionamento nominal. Após a obtenção da melhor solução linear possível, será generalizada a estratégia de controle para o modelo não linear. Todos os resultados serão avaliados através das respostas temporais do modelo obtidas em simulação por computador. Serão usados para isso os pacotes SIMAP, [Luz 88] e PID, [Caetano 88].

7.2. Especificação do problema.

Na prática é de grande interesse obter condições para controlar o motor de indução de maneira similar a um motor de corrente contínua. Para isso deve se estabelecer

o desacoplamento entre o fluxo no entreferro e a velocidade mecânica do motor, isto é, que ambas variáveis possam ser controladas independentemente. Esta condição é de fato a principal na especificação de controle, que considera também as características de resposta e as perturbações no sistema. Levando em conta todas elas é possível formular o problema global da seguinte maneira:

Projetar uma lei de compensação para um motor de indução, cujo modelo corresponde a uma linearização no ponto de funcionamento nominal, de modo a obter, em malha fechada, as seguintes características:

- (a) desacoplamento entre o fluxo e a velocidade
- (b) rejeição de perturbações de torque de carga
- (c) características de resposta de velocidade com sobrepasso próximo de 0% e tempo de estabelecimento adequado às especificações de torque máximo do motor
- (d) seguimento assintótico de referências constantes
- (e) robustez frente a perturbações paramétricas.

O modelo não linear do motor a controlar, sob as hipóteses de:

- simetria trifásica;
- desprezar termos de segunda ordem como perdas no entreferro, harmônicas de ranuras e deslocamentos de correntes;
- distribuição senoidal da força magnetomotriz;
- acoplamento indutivo associando toda a dispersão ao estator;

é representado pelo seguinte conjunto de equações diferenciais, [Barbi 85]:

$$L_r i_m^r w_r - R_r i_s^q = 0 \quad (1)$$

$$w_s = n w_m + w_r \quad (2)$$

$$R_r i_s^d = R_r i_m^r + L_r d/dt(i_m^r) \quad (3)$$

$$V_s^q = R_s i_s^q + d L_s d/dt(i_s^q) + w_s d L_s i_d^s + w_s (1-d) L_s i_m^r \quad (4)$$

$$V_s^d = R_s i_s^d + d L_s d/dt(i_s^d) - w_s d L_s i_s^q + w_s (1-d) L_s d/dt(i_m^r) \quad (5)$$

$$J d/dt(w_m) + B w_m + T_c = n(L_m/L_r) i_s^q \Theta_r \quad (6)$$

$$\Theta_r = K_{\Theta}(i_m^r) \quad (7)$$

onde:

R_s e R_r são, respectivamente, as resistências estatórica e rotórica vistas desde o estator,

L_s e L_r são, respectivamente, as indutâncias estatórica e rotórica vistas desde o estator,

w_m e w_r são, respectivamente, as velocidades mecânica e rotórica,

i_m^r , i_d^s , e i_s^q são, respectivamente, as correntes rotórica, direta e de quadratura,

V_s^d e V_s^q são, respectivamente, as tensões de controle direta e de quadratura,

n é o número de pares de pólos da máquina,

d é o fator de dispersão,

T_c é o torque externo de carga,

J é o momento de inercia,

B é o atrito,

Θ_r é o fluxo rotórico, e

$K_{\Theta}(i_m^r)$ é a característica magnética que define a equação (7) e se representa na figura 7.1.

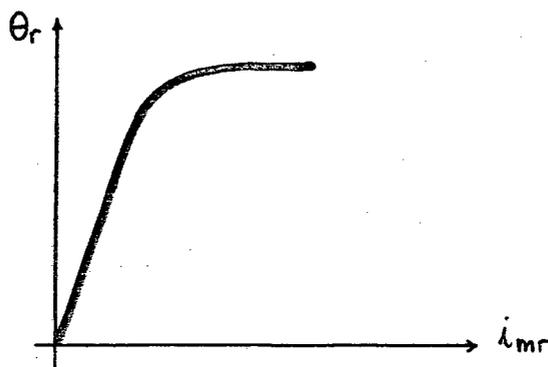


Figura 7.1. Característica magnética do motor.

Para o caso particular estudado, os parâmetros nominais, isto é, medidos em frio, apresentam os seguintes valores:

$$R_T = 1.14 \text{ ohms}$$

$$R_S = 0.88 \text{ ohms}$$

$$L_T = L_S = 0.094 \text{ Hy}$$

$$L_m = \text{inductância magnetizante} = 0.091 \text{ Hy}$$

$$d = 0.0628$$

$$n = 2$$

$$J = 0.04 \text{ Js}$$

$$B = 0.01 \text{ Js}$$

e as variações por temperatura geram valores de R_T e R_S superiores aos nominais em 30%.

O ponto de funcionamento nominal é estabelecido em:

$$w_{m0} = 1800 \text{ rpm} \tag{8a}$$

$$T_0 = 13.5 \text{ Nm} \tag{8b}$$

$$e_{r0} = 0.7 \text{ T} \tag{8c}$$

e as limitações de torque são:

$$T_{\text{máximo}} = T_{\text{max}} = 40.0 \text{ Nm}$$

O modelo linear, utilizando incrementos em torno ao ponto de funcionamento nominal e desprezando termos de segunda ordem e maiores, é dado pelas equações:

(i) na representação de estados,

$$\begin{aligned} dx/dt &= A x + B u + E q \\ y &= C x \end{aligned} \quad (9)$$

onde:

$x = (i_m^r, d/dt(i_m^r), i_s^q, w_m)$ é o estado do sistema;

$u = (V_s^d, V_s^q)$ é o controle;

$q = T_c$ é a perturbação;

$y = (\theta_r, i_s^q, w_m)$ é a saída a controlar.

(ii) na representação entrada-saída,

$$y(s) = G_1(s) u(s) + G_2(s) q(s) \quad (10)$$

onde:

$u(s) = (V_s^d(s), V_s^q(s))$ é o controle;

$q(s) = T_c(s)$ é a perturbação;

$y(s) = (\theta_r(s), i_s^q(s), w_m(s))$ é a saída a controlar.

Note que de fato as variáveis de saída a controlar são θ_r , T (torque da máquina) e w_m , mas

como, conhecendo o fluxo Θ_r e a corrente i_s^q o torque fica perfeitamente determinado, pode considerar-se que o vetor de saída a controlar é o próprio $y = [\Theta_r \ i_s^q \ w_m]^t$.

As matrizes das equações (9) e (10) são respectivamente:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{R_r R_s}{d L_s L_r} - \frac{(R_r i_s^q)^2}{(L_r i_m^r)^2} & -\frac{(R_r L_s + L_r R_s)}{d L_s L_r} & \frac{w_s R_r}{L_r} & \frac{n i_s^q R_r}{L_r} \\ \frac{-n w_m}{d} & -\frac{w_s L_r}{R_r} & -\frac{(R_r L_s + L_r R_s)}{d L_s L_r} & \frac{-n i_m^r}{d} \\ \frac{n L_m^2 i_s^q}{L_r J} & 0 & \frac{n L_m^2 i_m^r}{L_r J} & \frac{-D}{J} \end{array} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ R_r / d & L_s L_r \\ 0 & 1/d L_s \\ 0 & 0 \end{array} \quad E = \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1/J \end{array} \quad C = \begin{array}{c} L_m \ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{array} \end{array}$$

$$G_1 = 1/d \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0.2 s^2 + 70 s + 830 & 6.7 s + 140 \\ -5.3 s^2 - 980s - 1.1 \cdot 10^3 & 0.2s^3 + 5.8 s^2 + 36s - 170 \\ 170 s - 3.01 \cdot 10^4 & 0.57 s^2 + 190 s + 1.5 \cdot 10^3 \end{array} \end{array}$$

$$G_2 = 1/d \begin{array}{c} \begin{array}{c} -6.04 \cdot 10^3 s + 2.7 \cdot 10^6 \\ 1.2 \cdot 10^4 + 4.2 \cdot 10^6 s + 1.3 \cdot 10^7 \\ 25 s^3 - 1.7 \cdot 10^4 s^2 - 3.2 \cdot 10^6 s - 1.65 \cdot 10^7 \end{array} \end{array}$$

$$d = 10^4 (s^4 + 684 s^3 + 1.46 \cdot 10^5 + 8.4 \cdot 10^6 s + 1.9 \cdot 10^7)$$

7.3. Solução do problema.

7.3.1. Solução para o modelo linearizado.

7.3.1.1. Análise do problema do desacoplamento com posicionamento de pólos.

Como o vetor de estados do sistema em estudo é mensurável, a primeira tentativa de solução, por ser a mais simples, será através de uma realimentação de estados. Assim deveser verificada a CN de solução estudada no capítulo 6. Utilizando o conjunto de valores nominais para os parâmetros do sistema, as equações de estado ficam:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2054.4 & -362.5 & 4760.2 & 241.6 \\ -6000.0 & -32.36 & -362.5 & -244.9 \\ -43.87 & 0 & 33.87 & -0.25 \end{vmatrix} \\
 B &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2054.4 & 0 \\ 0 & 169.4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & E = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -25 \end{vmatrix} \\
 C &= \begin{vmatrix} 0.091 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Dado que existem somente duas entradas para o controle das três saídas do

sistema, é proposto um esquema de controle como segue:

$$u = [u_1 \ u_2]^t = Fx + Hv \text{ com } F \in \mathbb{R}^{2 \times 4} \text{ e } H \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

onde u_1 controla o fluxo θ_r e u_2 controla o par i_s^q, w_m .

Assim os blocos da matriz de saída C são:

$$C_1 = [\ 0.091 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \]$$

$$C_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Calculados $K_1 = \text{Ker } C_2$ e $K_2 = \text{Ker } C_1$ e os subespaços $V^*(K_1)$, $V^*(K_2)$, $R^*(K_1)$, $R^*(K_2)$ é testada a relação:

$$R^*(K_i) + \text{Ker } C_i = X \text{ para } i=1,2.$$

Para $i=1$:

$$K_1 = \text{Im} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Usando o algoritmo do capítulo 2 tem-se:

$$V_1^* = \text{Im} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$e \quad R^*_1 = \text{Im} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

e por tanto $R^*_1 + \text{Ker } C_1 = X$

Para $i=2$:

$$K_2 = \text{Im} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Usando o algoritmo do capítulo 2 tem-se:

$$V^*_2 = \text{Im} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$e \quad R^*_2 = \text{Im} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

e por tanto $R^*_2 + \text{Ker } C_2 = X$.

Existe então a possibilidade de gerar uma lei de desacoplamento parcial triangular, como a analisada no capítulo 6, isto é, pode-se obter uma saída $y_1 = \Theta_r$ controlada exclusivamente por v_1 e um vetor de saída $[y_2 \ y_3]^t = [i_s^q \ w_m]^t$ controlado por ambas entradas v_1 e v_2 . Ao mesmo tempo os pólos de malha fechada do sistema podem ser posicionados arbitrariamente.

A síntese da mencionada lei de realimentação pode ser analisada, neste caso particular, onde as saídas são proporcionais aos estados, através da matriz de malha fechada $A + BF$.

Se a lei de realimentação é:

$$F = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \end{vmatrix}$$

a matriz $A + BF$ fica:

$$A+BF = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21}+b_{21}f_{11} & a_{22}+b_{21}f_{12} & a_{23}+b_{21}f_{13} & a_{24}+b_{21}f_{14} \\ a_{31}+b_{32}f_{21} & a_{32}+b_{32}f_{22} & a_{33}+b_{32}f_{23} & a_{34}+b_{32}f_{24} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

onde $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$.

Então para se obter o desacoplamento parcial basta escolher:

$$f_{13} = -a_{23}/b_{21} \quad f_{14} = -a_{24}/b_{21}$$

e para que a influência da dinâmica do fluxo sobre a de corrente i_s^q seja eliminada escolhe-se:

$$f_{21} = -a_{31}/b_{32} \quad f_{22} = -a_{32}/b_{32}$$

Os valores restantes da lei F podem ser usados para o posicionamento de pólos das duas malhas de segunda ordem resultantes, mas como existem outras especificações de projeto

do sistema, os mesmos serão calculados após a análise do problema de rejeição de perturbações.

7.3.1.2. Análise do problema de rejeição de perturbações.

Como primeira tentativa deve-se procurar uma solução que obtenha rejeição total de perturbações. Para isso pode ser analisada a simples condição necessária de existencia de uma lei $u = Fx$ para rejeição total, isto é:

$$\text{Im } E \subset \text{Ker } C$$

$$\text{Como } \text{Im } E = \text{Im} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \text{Ker } C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

a condição não é verificada e por tanto deve tentar-se uma solução menos restritiva. Propõe-se então uma solução assintótica para perturbações de torque constantes.

A partir desta análise e do estudado no ponto (a) pode-se fazer uma especificação definitiva do problema, isto é, que considere as restrições próprias da estrutura do sistema.

Assim, são especificadas:

- (1) desacoplamento parcial (a dinâmica do fluxo é independente da do torque e velocidade);

- (2) posicionamento arbitrário de pólos (visando obter a dinâmica desejada para o fluxo e a velocidade);
- (3) rejeição assintótica de perturbações de torque constantes;
- (4) seguimento assintótico de referências constantes de velocidade;
- (5) análise da robustez frente a perturbações paramétricas.

O esquema de malha fechada a utilizar é representado na figura 7.1. Nesse esquema, mediante uma lei de realimentação de estados é garantida a especificação (1) e o posicionamento de pólos da malha de fluxo. Já para a obtenção das especificações (2), (3), e (4) na malha de velocidade é utilizado um servocompensador com uma estrutura do tipo analisado no capítulo 4. Dado que as perturbações de torque de carga são constantes o modelo do servocompensador de velocidade é:

$$dx_c/dt = y_r - y \quad (\text{integrador})$$

onde $y = w_m$ e y_r é a referência de velocidade.

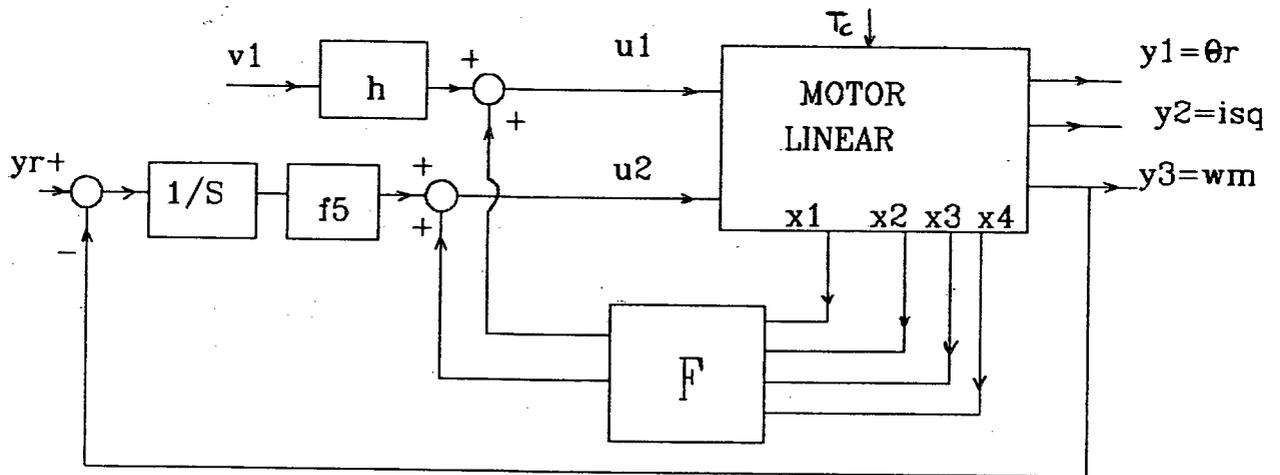


Figura 7.1. Esquema total de controle.

7.3.1.3. Síntese da solução total.

O primeiro passo a ser executado simplesmente calcula os valores dos elementos da matriz de realimentação de estados que asseguram o desacoplamento.

Assim:

$$f_{13} = -2.32, f_{14} = -0.12, f_{21} = 35.42, f_{22} = 0.19$$

e como a dinâmica do fluxo resulta independente de i_s^q e de w_m , basta utilizar f_{11} e f_{12} para posicionar os respectivos pólos. Escolhendo os polos de malha fechada do fluxo em -8 e

-10 resulta:

$$f_{11} = 0.961 \quad f_{12} = 0.168$$

Com estas escolhas o esquema do sub-sistema fluxo pode reduzir-se ao da figura 7.2.,

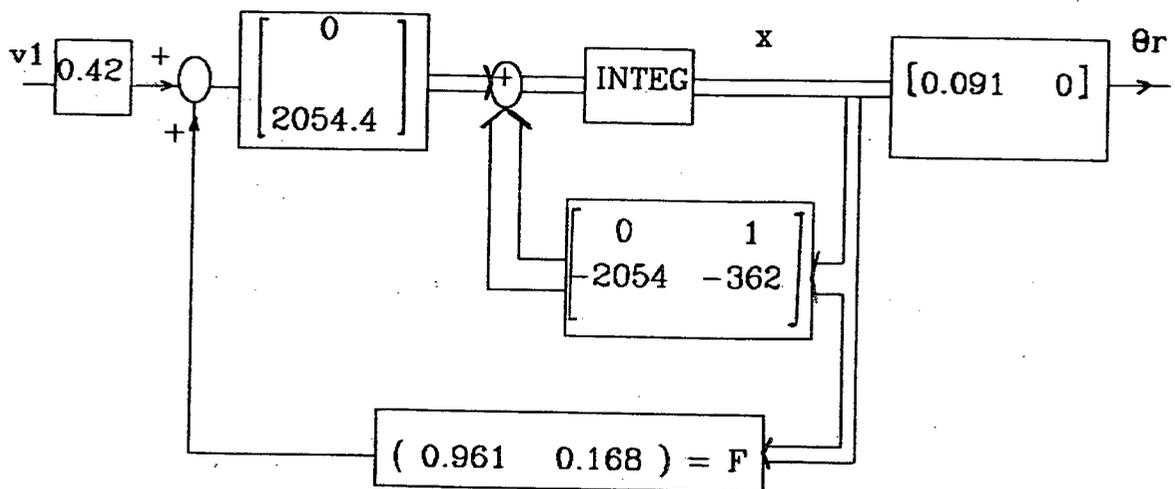


Figura 7.2. Malha fechada de fluxo.

que é representado pelas equações de malha fechada:

$$\begin{vmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -80.0 & -18.0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 879.1 \end{vmatrix} v_1$$

$$y_1 = \theta_r = [0.091 \quad 0] [x_1 \quad x_2]^t$$

onde a entrada v_1 fixa o valor de regime do fluxo θ_r

Note-se que o valor de h é escolhido para que em regime permanente se verifique $\Theta_r = v_1$.

Para o cálculo completo da lei de realimentação resta somente determinar os valores de f_{23} e f_{24} da lei $u = Fx$ e o ganho f_5 do servocompensador. Para isso devem ser consideradas as especificações de torque e velocidade. Na figura 7.3. é apresentado um esquema mais detalhado da estratégia de controle da malha de velocidade. Nele i_m^r , que de fato representa o incremento de corrente respeito do ponto de funcionamento nominal e é proporcional ao fluxo incremental, pode ser considerada nula já que o fluxo é mantido constante durante as mudanças de velocidade. Esta forma de operação do motor de indução é de fato possível devido ao desacoplamento obtido no ponto ítem 7.3.1.1.

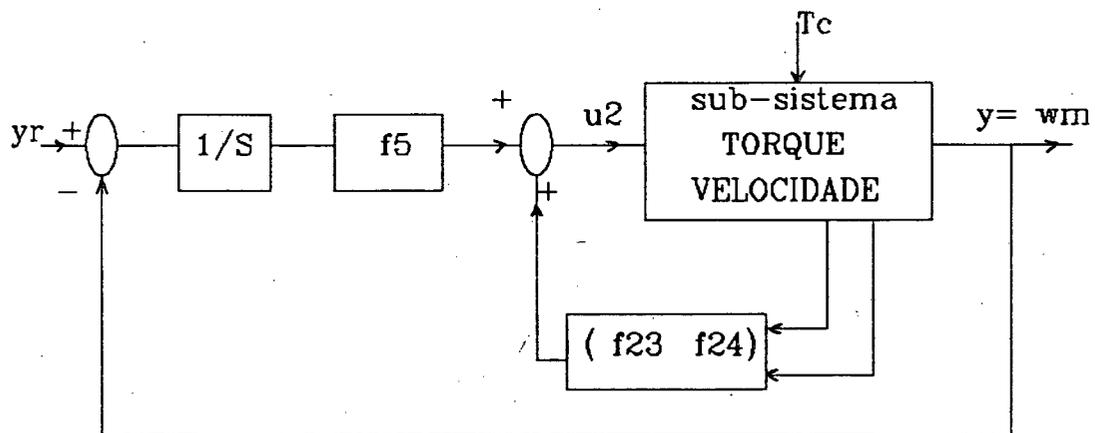


Figura 7.3. Malha fechada de velocidade.

As equações do sub-sistema torque-velocidade são:

$$\begin{bmatrix} dx_3/dt \\ dx_4/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -362.5 & -244.9 \\ 33.87 & -0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 169.4 \\ 0 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ -25 \end{bmatrix} q$$

$$y = [0 \quad 1] [x_3 \quad x_4]^t$$

e as do servo-compensador e lei de realimentação são respectivamente:

$$dx_5/dt = y_r - x_4$$

$$u_2 = [f_{23} \quad f_{24} \quad f_5] [x_3 \quad x_4 \quad x_5]^t$$

Com isso o sub-sistema torque velocidade aumentado é representado pelas seguintes equações:

$$\begin{vmatrix} dx_3/dt \\ dx_4/dt \\ dx_5/dt \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -362.5 & -244.9 & 0 \\ 33.87 & -0.25 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 169.4 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} u_2$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 \\ -25 \\ 0 \end{vmatrix} q + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} Y_r$$

$$y = [0 \quad 1 \quad 0] [x_3 \quad x_4 \quad x_5]^t$$

A escolha dos valores de f_{23} , f_{24} , e f_5 pode ser realizada utilizando qualquer técnica de posicionamento de pólos. Levando-se em conta as especificações de resposta temporal escolhe-se para os pólos de MF:

$$p_1 = -30 \quad p_2 = -35 \quad p_3 = -32$$

resultando para a matriz F os seguintes valores:

$$f_{23} = -1.569 \quad f_{24} = -.904 \quad f_5 = -5.856$$

Assim o sistema total aumentado em malha fechada possui a seguinte representação:

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} dx_1/dt \\ dx_2/dt \\ dx_3/dt \\ dx_4/dt \\ dx_5/dt \end{array} \right| = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -80 & -18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -96.75 & 91.7 & 992 \\ -43.87 & 0 & 33.87 & -.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \right| \end{array} +$$

$$+ \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -25 \\ 0 \end{array} \right| \end{array} q + \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 879.1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} v_1 \\ y_r \end{array} \right| \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \right| = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} .091 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right| \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \right]^t$$

Dado que o sistema linear é válido para representar o motor trabalhando nas vizinhanças do ponto nominal de operação $P = (\theta_{r0}, i_s^q, w_{m0})$, as limitações de torque não serão consideradas. Observe que se a máquina está trabalhando em torno do ponto P, as variações de torque, devidas às mudanças de referência de velocidade, não superam os valores máximos estabelecidos.

Os resultados desta técnica de controle podem ser avaliados através das seguintes simulações. Na figs. 7.4, 7.5, e 7.6 são respectivamente plotadas as respostas de fluxo, torque e velocidade para excitações do tipo degrau em v_1 e w_m . Já na fig. 7.7 se mostra a evolução da velocidade w_m frente a perturbações de torque de carga constantes. Observe que como as variáveis são consideradas incrementais, o ponto de operação "incremental" é 0 para qualquer uma de elas.

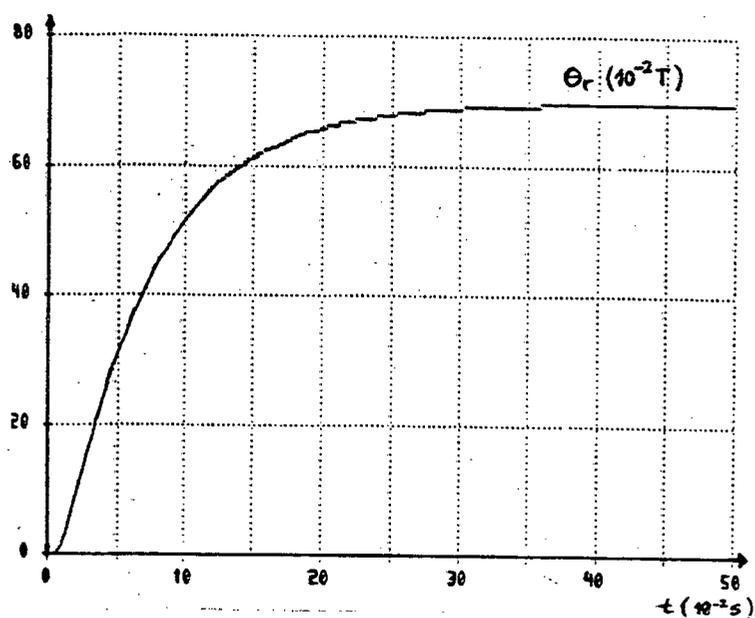


Fig. 7.4. Resposta de Θ_r a um degrau de 10% de v_1 nominal.

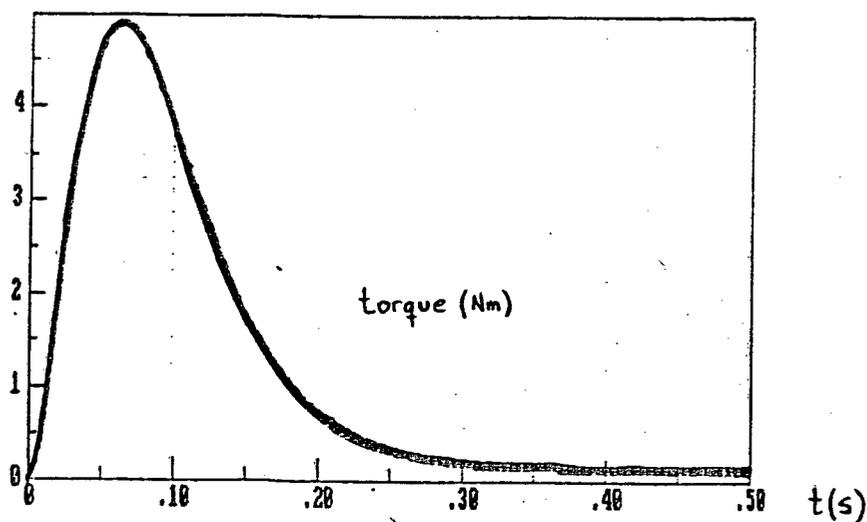


Fig. 7.5. Resposta de T a um degrau de 10% de w_{mref} nominal.

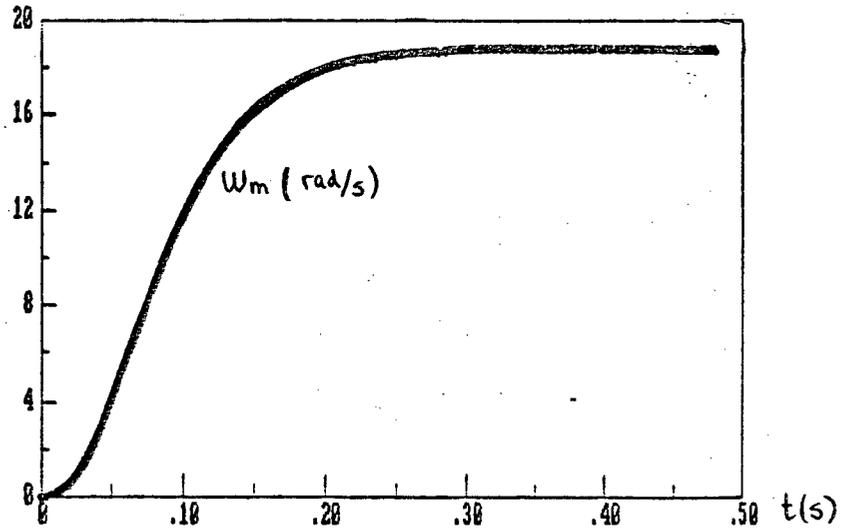


Fig. 7.6. Resposta de w_m a um degrau de 10% de w_{mref} nominal.

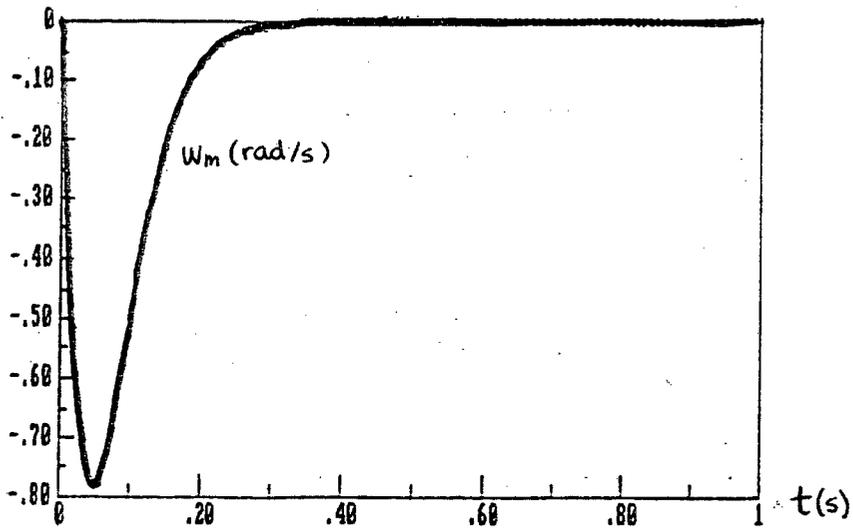


Fig. 7.7. Resposta de w_m a uma perturbação de 10% de T_c nominal.

7.3.1.4. Uma solução alternativa para a malha de velocidade: o controlador clássico PI.

Mantendo a estrutura de desacoplamento estudada no item 7.3.1.1. e escolhendo na matriz de realimentação de estados $f_{23} = 0$ e $f_{24} = 0$, é possível gerar, para a malha de controle de velocidade, um modelo equivalente no plano s como é mostrado na figura 7.8. Nesse esquema, o fluxo Θ_r , que é controlado em uma malha independente, será considerado como um parâmetro que assume valores constantes durante as variações de velocidade.

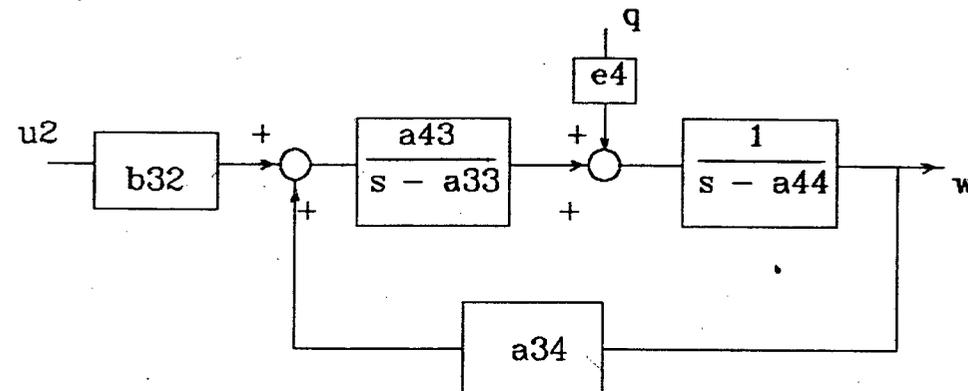


Figura 7.8. Modelo no plano s da malha de velocidade do motor de indução desacoplado.

O modelo apresentado na figura 7.8. é semelhante ao do motor de corrente contínua descrito na figura 7.9. Esta semelhança permite a utilização das conhecidas técnicas de controle de motores de corrente contínua para controlar a malha de velocidade do motor de indução desacoplado. Assim, propõe-se um controlador PI que permite obter: (i) rejeição assintótica de perturbações de torque constantes, (ii) seguimento assintótico de referências constantes, e (iii) uma dinâmica de malha fechada dentro de especificações. O ajuste dos parâmetros do PI é feito segundo conceitos clássicos e o esquema de controle é mostrado na figura 7.10. Analogamente à solução linear do ítem 7.3.1.3., os parâmetros do PI são calculados sem considerar as restrições no torque do motor pois o mesmo evolui

sem ultrapassar os limites máximos impostos.

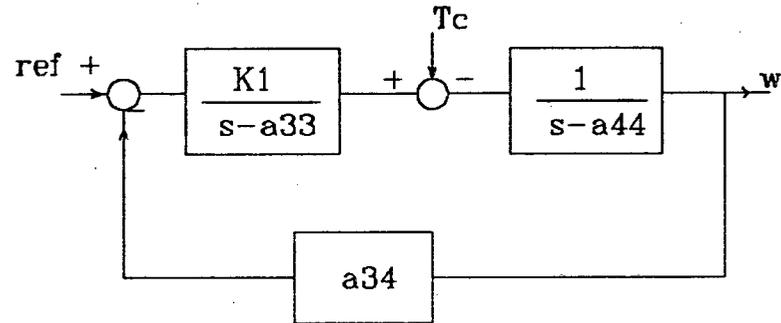


Figura 7.9. Modelo do motor de corrente contínua.

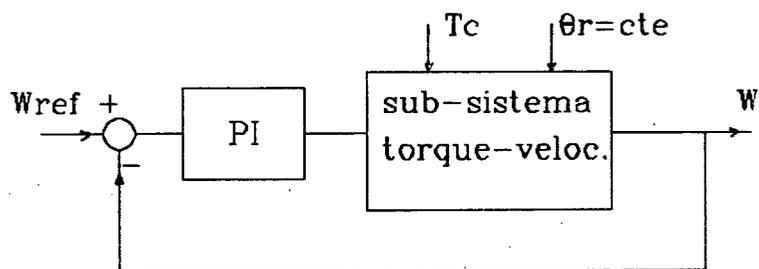


Figura 7.10. Controlador PI aplicado à malha de velocidade.

Os parâmetros do controlador PI, de estrutura dada por $C(s) = K_p(1 + 1/T_i s)$, são fixados em:

$$T_i = 13 \quad K_p = 6.5$$

obtendo-se uma resposta de torque e velocidade dentro de especificações como se aprecia, respectivamente, nas figs. 7.11 e 7.12. Na fig. 7.13 é mostrada a evolução de w_m para uma

perturbação de torque de carga constante.

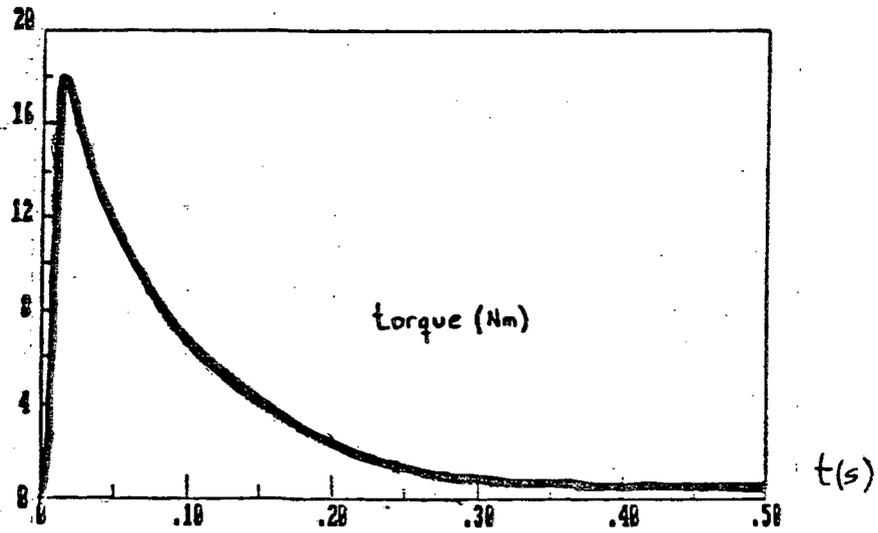


Fig. 7.11. Resposta de T a um degrau de 10% de w_{mref} nominal.

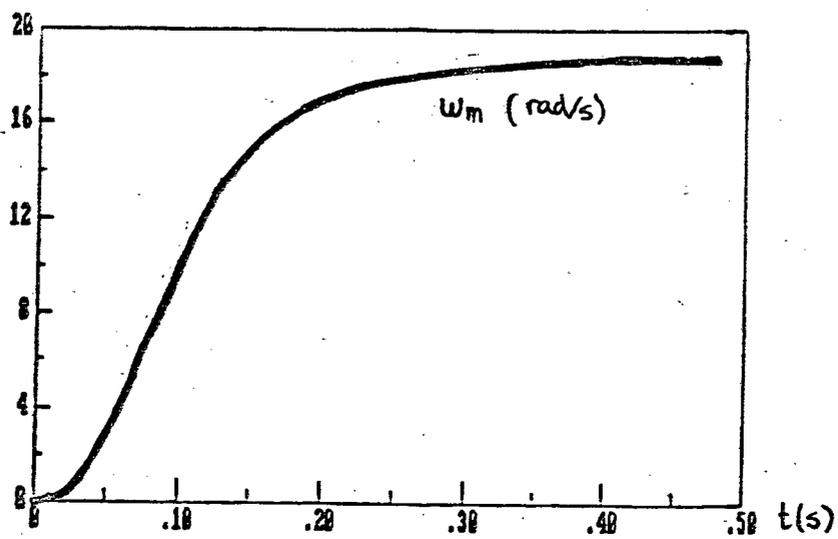


Fig. 7.12. Resposta de w_m a um degrau de 10% de w_{mref} nominal.

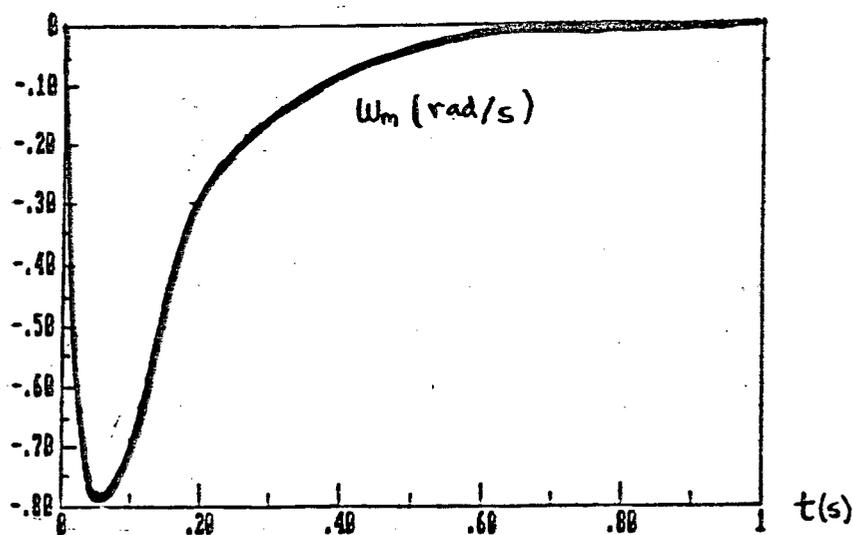


Fig. 7.13. Resposta de w_m a uma perturbação de 10% de T_c nominal.

7.3.2. A solução do problema não linear real.

7.3.2.1. Generalização da solução linear.

As soluções achadas para o modelo linearizado serão válidas exclusivamente para pequenas variações de velocidade ou fluxo em torno dos valores de funcionamento nominal. Assim, para os casos onde o motor opera nessas condições os esquemas analisados poderiam ser utilizados. Na prática, no funcionamento como servomotor, é desejável aplicar grandes mudanças de referência e manter as respostas dentro das especificações colocadas em 7.2. Para se lograr isso, não é possível aplicar o controle do modelo linearizado. Entretanto, pode-se utilizar a ideia geral da estratégia para conseguir um controlador não linear que obtenha resultados similares.

Assim, a seguinte lei de realimentação desacopla o fluxo de w_m e i_s^q :

$$V_s^d(p) = v_1 - n d L_s w_m(p) i_s^q(p) - d L_s R_r (i_s^q(p))^2 / L_r i_m^r(p) \quad (12)$$

onde v_1 é a entrada externa de controle.

Se além do desacoplamento se deseja estabelecer especificações na dinâmica de MF, é possível utilizar uma lei do tipo:

$$v_1 = f_1 \theta_r + f_2 d/dt(i_m^r) + G_1 v_1$$

Com esta lei a função de transferência de v_1 para i_m^r resulta:

$$\frac{i_m^r}{v_1} = \frac{G_1}{(0.88 - f_1) + (0.167 - f_2)s + 4.9 \cdot 10^{-4} s^2} \quad (13)$$

Nessa transferência os valores f_1 e f_2 são escolhidos para se obter uma dinâmica dentro de especificação, e o valor de G_1 fixa o ganho estático. Os valores de f_1 e f_2 se escolhem:

$$f_1 = 0.841 \quad f_2 = 0.158 \quad (14)$$

posicionando os pólos em $s = (-8,0)$ e $s = (-10,0)$.

O sistema de malha fechada com a lei de realimentação estabelecida é representado no diagrama da figura 7.15.a., e seu equivalente supondo o desacoplamento perfeito na figura 7.15.b. Nota-se que a velocidade não esta sendo controlada.

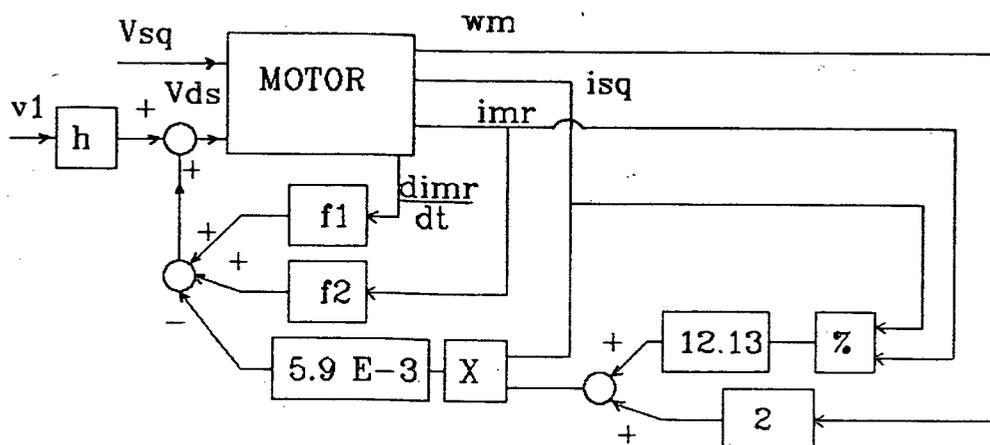


Figura 7.15.a. Desacoplamento não linear.

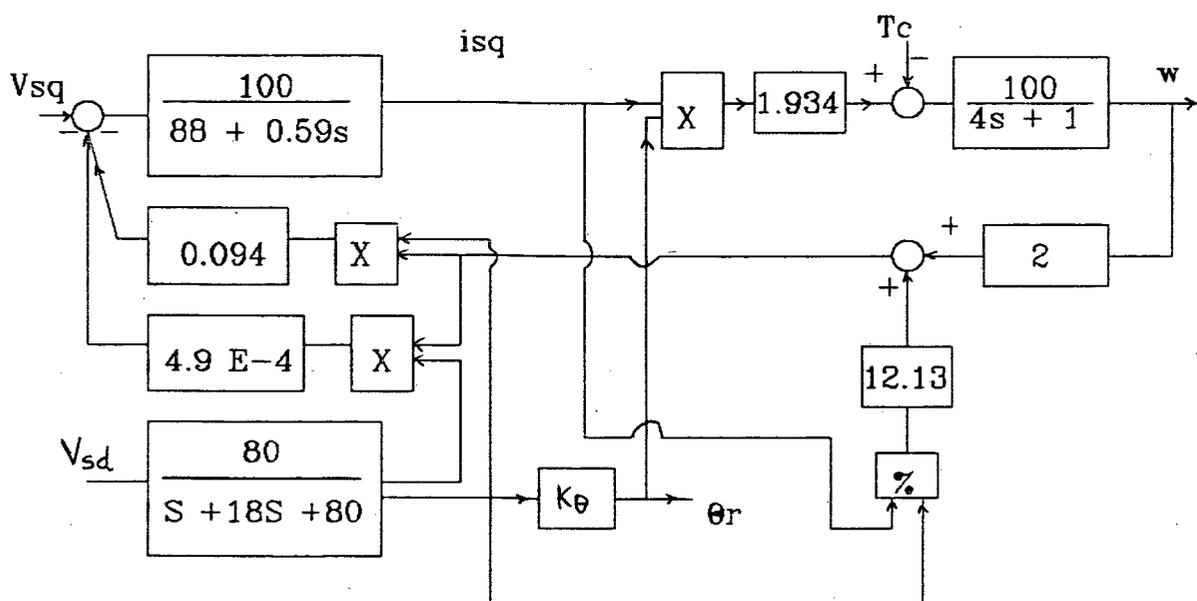


Figura 7.15.b. Modelo não linear desacoplado.

A partir desta primeira etapa do controle supõe-se que as variações de referência de velocidade são realizadas mantendo v_1 constante, o que implica em assumir que tanto i_m^r como θ_r permanecem constantes. Assim tem-se o modelo da malha de velocidade como na figura 7.16,

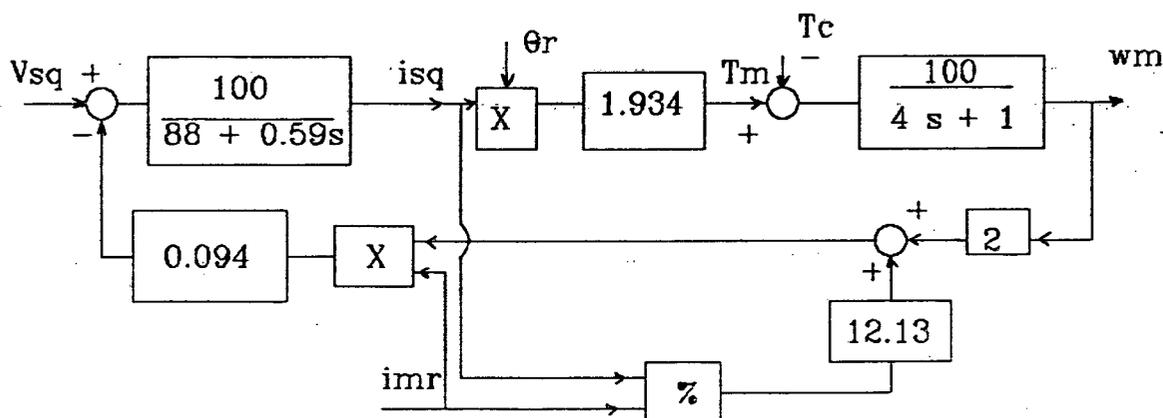


Figura 7.16. Malha de velocidade com fluxo constante.

que apresenta uma função de transferência linear e com parâmetros dependentes dos valores estabelecidos de i_m^r e θ_r como se mostra nas equações (15) e (16).

$$\left. \frac{w_m}{V_s^q} \right|_{T_c=0} = \frac{1.934 \cdot 10^4 \cdot \theta_r}{(4s+1)(1301+0.59s) + 3635.9 \cdot i_m^r \cdot \theta_r} \quad (15)$$

$$\left. \frac{w_m}{T_c} \right|_{V_s^q=0} = \frac{100(88+0.59s)}{(4s+1)(1301+0.59s) + 3635.9 \cdot i_m^r \cdot \theta_r} \quad (16)$$

7.3.2.2. Limitações de torque. Estratégia de ajuste do sinal de controle.

Para a obtenção das condições estáticas de resposta estabelecidas em 7.2. é necessário utilizar, na malha torque-velocidade de equações (15) e (16), um controlador com características integrativas. Assim, é proposto um controlador digital de estrutura PID, que permite também posicionar adequadamente os pólos de MF. Porém, quando é preciso manter as características de velocidade especificadas em 7.2. e o torque do motor deve ser

limitado a um conjunto de valores prefixados, o controlador linear proposto não pode ser utilizado isoladamente. Deve-se partir então, para soluções que limitem o torque sem comprometer a resposta de velocidade. O controlador digital PID utilizado apresenta a estrutura seguinte:

$$v_2(k) = v_2(k-1) + h_1 e(k) + h_2 e(k-1) + h_3 e(k-2)$$

$$e(k) = w_{\text{ref}}(k) - w_m(k)$$

Para evitar que o torque T e a corrente i_s^q superem os valores máximos estabelecidos é utilizado um bloco de saturação entre o controlador e o sistema. Para otimizar a síntese deste bloco é necessário conhecer a corrente e o torque em cada período de amostragem. Assim, o objetivo da saturação será limitar o controle de tal forma que gere uma evolução de torque ou corrente no limite de saturação.

Considere-se um período de amostragem t_s e as equações (15) e (16). Assim, a equação discreta da corrente i_s^q é dada por:

$$i_s^q(k+1) = a i_s^q(k) + b w_m(k) + c v_2 + f(T_c) \quad (17)$$

onde $f(T_c)$, definida para $[kt_s, (k+1)t_s]$, representa os efeitos da perturbação de carga T_c sobre a corrente $i_s^q(k+1)$, e pode ser desprezado se o período de amostragem é escolhido suficientemente pequeno, [Zeni 84]. Assim, usando a equação resultante desta simplificação como um preditor de $i_s^q(k+1)$, o torque T pode ser limitado ao seu valor máximo T_{max} utilizando a estratégia de saturação seguinte:

Passo 1:

$$v_{2\max}(k) = [i_s^q \max - a i_s^q(k) - b w_m(k)]/c$$

Passo 2:

SE $|v_2(k)| > |v_{2\max}(k)|$ **ENTÃO**

$$v_2(k) = v_{2\max}(k)$$

FIM

Quando o controle aplicado ao sistema for o valor de saturação $v_{2\max}$, as variáveis internas do PID deverão ser recalculadas para evitar a integração de um valor de erro diferente do real. Assim é proposta a seguinte estratégia de eliminação de sobrecarga da ação integral, [Bruciapaglia 86]:

$$v_2(k-1) = v_{2\max}(k);$$

$$e(k-2) = e(k-1);$$

$$e(k-1) = [v_{2\max}(k) - v_2(k-1) - h_1 e(k-1) - h_2 e(k-2)]/h_1.$$

Na figura 7.17. mostra-se um esquema completo da estratégia de controle não linear proposta.

Note-se:

(i) dado que o fluxo Θ_r é mantido constante, a corrente i_s^q pode ser utilizada como uma medida do torque da máquina;

(ii) o controlador da fig. 7.17. atua linearmente somente quando $|v_2(k)| < |v_{2\max}(k)|$;

(iii) o bloco de saturação proposto permite obter, quando o sistema satura, a resposta de w_m mais rápida possível, já que o torque é mantido constante no seu valor máximo durante o transitório de velocidade.

Os parâmetros do PID são ajustados para o ponto de funcionamento nominal dado por $i_s^q = 7.69$ A e $\theta_r = 0.7$ T e de modo a obter a resposta de w_m mais rápida possível sem sobre sinal. Note-se que eles deverão ser mudados quando seja escolhido um outro valor de referência para o fluxo. Porém deve se observar que os novos parâmetros podem ser calculados previamente e mantidos como uma tabela de esquema de trabalho.

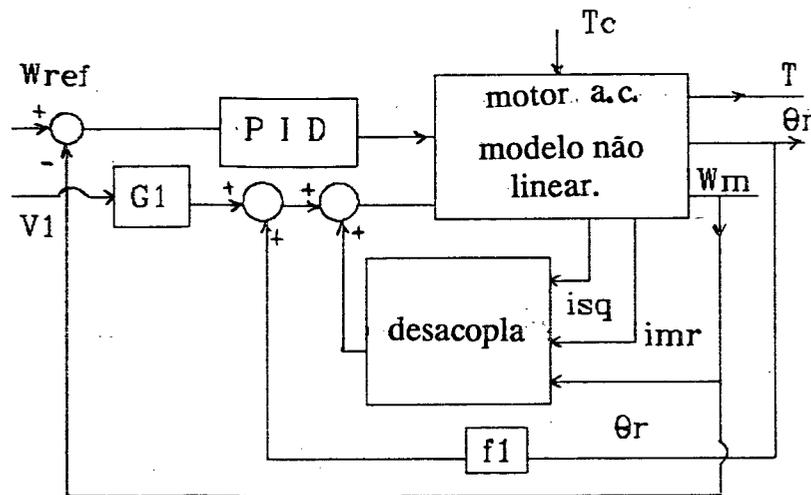


Figura 7.17. Estratégia completa de controle para o modelo não linear.

7.3.2.3. Resultados da simulação da estratégia de controle não linear. Análise da robustez. As possibilidades de aplicação prática.

Para avaliar a boa performance da estratégia de controle proposta, serão analisadas, neste ítem, as respostas temporais do modelo da fig. 7.17. Numa primeira etapa se avaliam os resultados do ponto de vista teórico, isto é, sem considerar perturbações paramétricas no sistema. Em seguida, para estudar as possibilidades de aplicação real da estratégia, são colocados resultados que levam em conta as diferenças entre os parâmetros reais e os nominais do modelo.

Na fig. 7.18. se mostra a evolução de θ_r desde zero até seu estabelecimento no valor nominal com o motor parado. Para isso é aplicado na entrada do sistema um degrau de valor nominal na entrada v_1 , e se mantém $w_m = 0$. Com θ_r estabelecido é aplicado um degrau de referência de velocidade para levar o motor a w_m nominal. Assim, na fig. 7.19 é mostrada a evolução de T e w_m para uma inversão total de velocidade. Já na fig. 7.20 se observam as boas propriedades da malha de controle no que diz respeito à rejeição de perturbações de carga. Observe que, embora a resposta de w_m seja muito lenta, a amplitude máxima de Δw_m é menor que 0.2% do valor nominal (para $T_c = 100\%$ de T_n). Se nas especificações de projeto forem colocadas as condições de respeito ao tempo de resposta da figura 7.20, o ajuste do PID deveria ser modificado, [Hang 89].

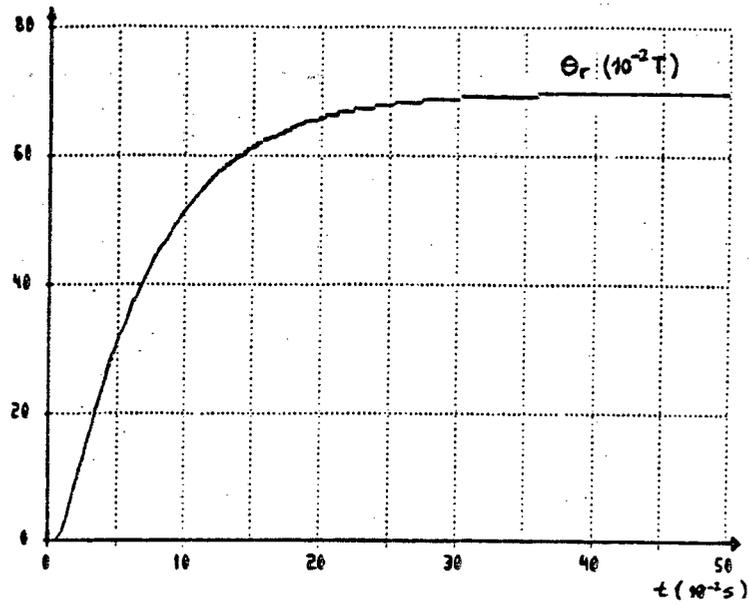


Fig. 7.18. Estabelecimento de Θ_r no seu valor nominal.

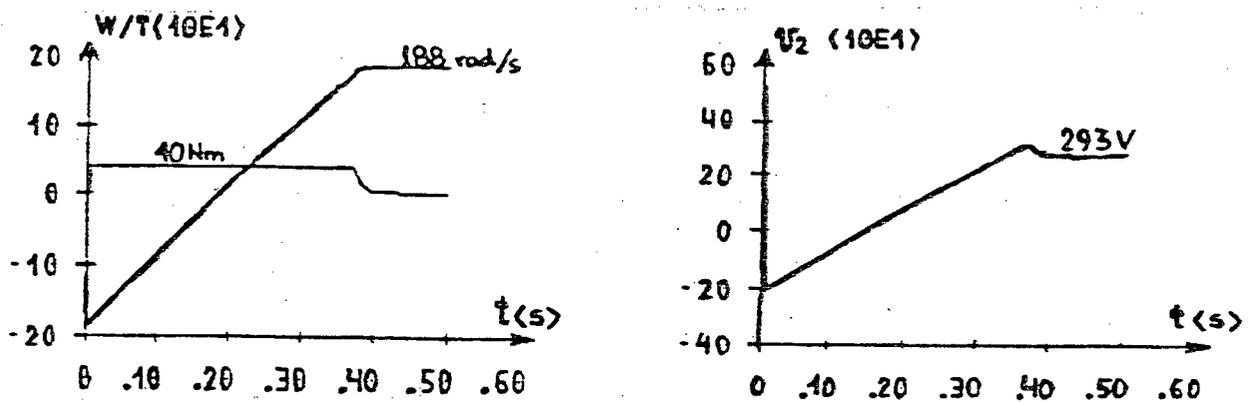


Fig. 7.19. (a) Resposta de T e ω_m durante uma inversão completa de velocidade.(b) Controle aplicado.

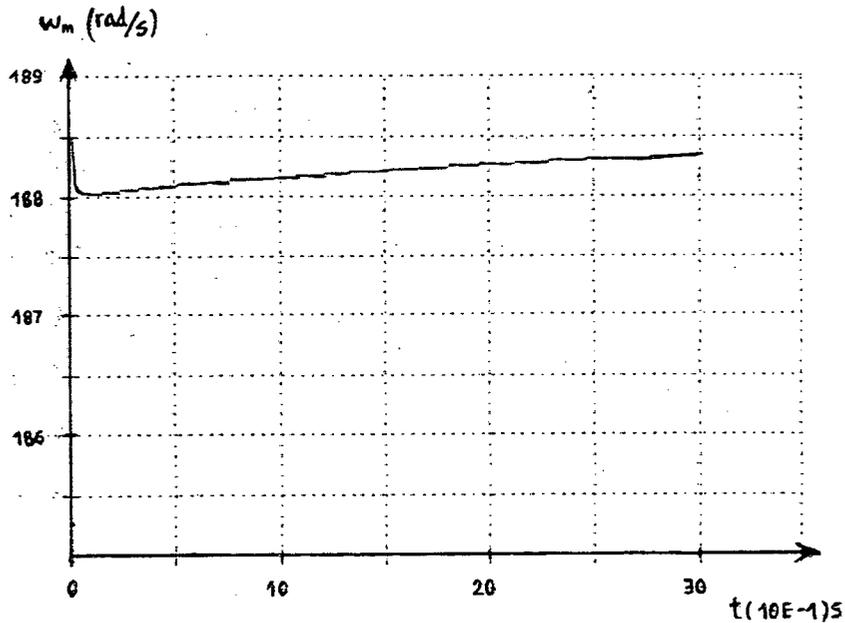
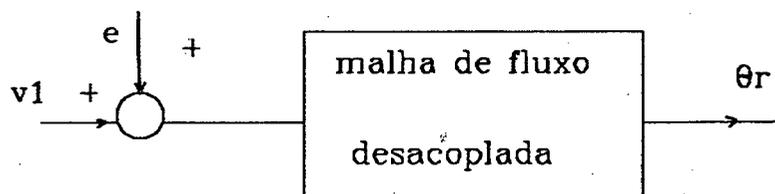


Fig. 7.20. Resposta de w_m a uma perturbação de carga T_c de 100% do torque nominal.

Quando são consideradas as variações de R_r e R_s devidas as mudanças de temperatura, isto é: -

$$R_s = R_{s0} + \Delta R_s(\text{temp}) \quad R_r = R_{r0} + \Delta R_r(\text{temp})$$

a lei de desacoplamento proposta já não conseguirá eliminar totalmente os efeitos de i_s^q e de w_m na dinâmica do fluxo. Assim, pode se modelar o sistema perturbado como no esquema seguinte:



onde e é o erro de desacoplamento e vale:

$$e = d L_S (i_S q)^2 \Delta R_T / L_T i_m^T$$

e na malha de fluxo desacoplada são considerados os parâmetros perturbados.

Utilizando o novo modelo da malha de fluxo se simula uma inversão completa de velocidade. Os resultados obtidos se mostram na fig. 7.21. A partir deles pode se constatar a robustez da lei de desacoplamento. Observe que para variações de 30% em R_T e R_S , o fluxo Θ_T sofre variações menores que 3%. Também utilizando o modelo de parâmetros perturbados se observa, na fig. 7.22, a evolução de T e w_m para uma inversão total de velocidade. A excelente robustez do controle de velocidade e torque pode ser avaliada comparando as respostas das figs. 7.22 e 7.19.

Estes últimos resultados permitem concluir que a estratégia de controle proposta funcionaria muito bem se fosse implementada num motor real.

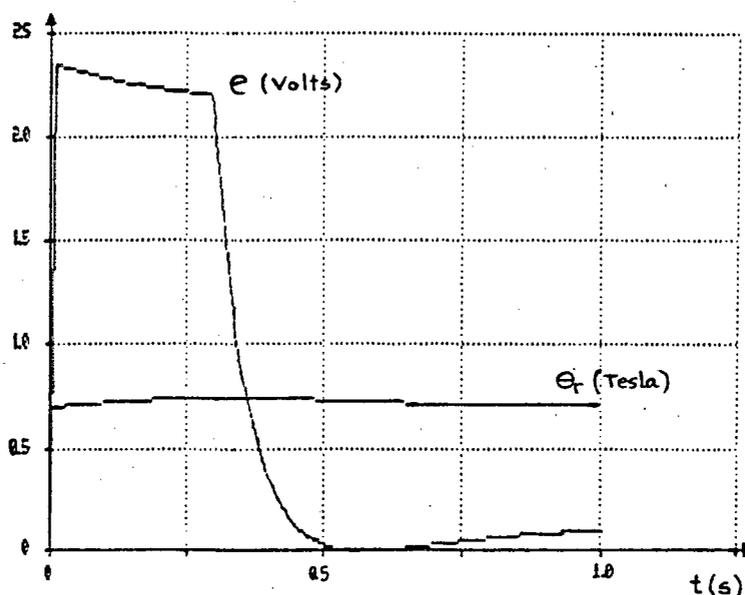


Figura 7.21. Evolução do erro e e do fluxo Θ_T numa inversão completa de velocidade.

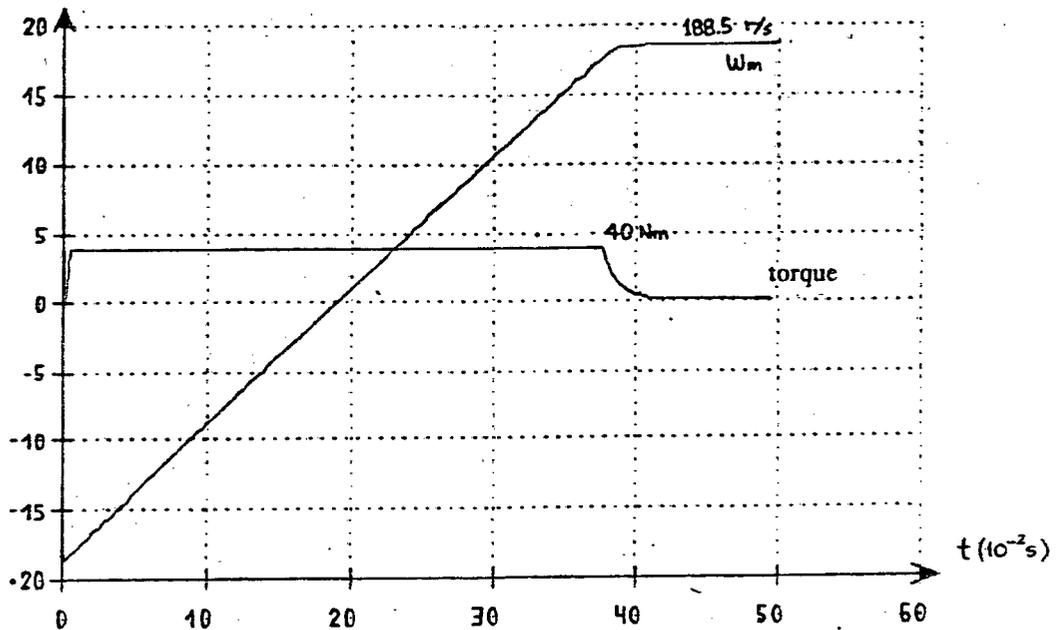


Figura 7.22. Evolução de T e ω_m para uma inversão completa de velocidade.

7.4. Conclusões.

Neste capítulo foi mostrado como um problema geral de controle multivariável pode ser especificado e resolvido a partir da escolha da abordagem mais adequada dentre as diversas possíveis. Além disso, mostrou-se como uma solução desenvolvida para o modelo linearizado do sistema pode servir de base para obter, a partir de uma generalização, a solução para o caso não linear. Deve-se destacar também o fato de aplicar, com sucesso, resultados de controle teórico a um problema de grande importância prática como o controle de motores de indução.

Nota-se que a solução proposta para o sistema não linear apresenta uma excelente performance tanto no caso de se trabalhar com parâmetros nominais ou perturbados. Baseando-se nessa última característica pode-se concluir que a estratégia de controle proposta deve funcionar satisfatoriamente em aplicações reais.

CAPÍTULO 8: CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

O objetivo deste trabalho foi realizar um estudo comparativo das soluções apresentadas pelas teorias geométrica e polinomial no que diz respeito aos mais importantes problemas de controle da teoria de sistemas lineares multivariáveis. Em particular foram analisados os problemas de posicionamento de pólos, da estabilidade, da rejeição de perturbações e do desacoplamento entrada-saída. Além disso foram colocados os problemas que resultam da combinação dos dois últimos com os dois primeiros.

Primeiramente, para cada problema, foram colocados os aspectos da análise da solução, isto é, das condições que devem se verificar no sistema para que seja possível achar um compensador solução. Neste ponto destacou-se a simplicidade e clareza conceitual da abordagem geométrica dos problemas de posicionamento de pólos e rejeição de perturbações. Já do ponto de vista operativo foram analisadas uma série de condições alternativas que se apresentam como vantajosas na hora de serem aplicadas. No que diz respeito ao problema do desacoplamento, a abordagem polinomial se apresenta, tanto a nível de análise como de síntese, e salvo o caso de realimentação de estados, não somente como mais apropriadas para serem aplicadas mas também igualmente simples e claras a nível conceitual como as geométricas.

Dentro do conjunto de procedimentos de síntese de compensadores, pode-se dizer que foram analisados os métodos teóricos mais importantes. Esta análise permite apreciar a maior ou menor simplicidade de cálculo de cada algoritmo, mas não os compara considerando o importante problema da estabilidade numérica associada a cada um deles. Este ponto deverá ser futuramente analisado se se pretende a implementação de alguma das técnicas de controle colocadas neste trabalho.

Na última parte do trabalho se apresenta a solução do controle por desacoplamento de um motor de indução alimentado por tensão. Os principais objetivos desta parte do trabalho são:

- (i) mostrar como deve-se realizar a análise e reespecificação do problema de controle para adaptá-lo às restrições do próprio sistema físico,
- (ii) mostrar como escolher a melhor solução dentre as várias possíveis baseando-se na análise comparativa dos diferentes métodos,
- (iii) obter, para um problema de interesse prático como o controle de motores a.c., uma solução teoricamente bem fundamentada e que apresente resultados práticos satisfatórios.

No que se refere a este último ponto destaca-se a utilização da solução obtida para o modelo linear, na criação de uma lei de controle não linear e que apresenta excelentes resultados.

Como contribuições mais importantes deste trabalho destacam-se:

- o esforço de síntese das diferentes soluções estudadas ao longo das últimas décadas. Isto permite que o trabalho seja usado como importante material de referência quando se deseja aprofundar em algum dos assuntos nele citados,
- a apresentação comparativa das diferentes soluções tanto a nível de análise como de síntese de controladores,

- a solução do problema de controle por desacoplamento do motor a.c., obtida através da aplicação dos resultados geométrico-polinomiais colocados no trabalho.

Como perspectivas de continuidade de estudos e pesquisas nas linhas de este trabalho propõe-se:

- continuar o estudo comparativo dos métodos de síntese de controladores no que se refere à estabilidade numérica dos algoritmos;

- especificar e implementar pacotes de PASC para sistemas multivariáveis que permitam a especificação e a modelagem através das representação polinomial ou matricial e portanto a aplicação das diversas técnicas de controle aqui estudadas;

- estudar a robustez a perturbações paramétricas das soluções de cada um dos problemas colocados neste trabalho para obter resultados de maior aplicabilidade prática. Como já foi mencionado nos capítulos 3 e 4, existem já alguns estudos nesta direção, principalmente na teoria polinomial. Porém resulta importante obter não somente novos resultados nesta teoria, mas também estabelecer uma equivalência com a geométrica;

- analisar com maior profundidade o problema do controle por desacoplamento do motor a.c. no que diz respeito à robustez a perturbações paramétricas;

- estudar o problema de desacoplamento parcial com estabilidade e/ou posicionamento de pólos para estruturas particulares de interesse prático.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[Aplevich 79]

Aplevich, J.D. Tableau methods for analysis and design of linear systems. *Automatica*, 1979, pp 419.

[Barbi 85]

Barbi, I. Teoria fundamental do motor de indução. Editora da UFSC, 1985.

[Basile 69]

Basile, G. and Marro, G. Controlled and conditioned invariant subspaces in linear system theory. *J. on Optimization Theory and Applications*, 1969, pp 306.

[Basile 87]

Basile, G. and Marro, G. On the robust controlled invariant. *Systems and Control Letters*, 9, 1987.

[Bruciapaglia 86]

Bruciapaglia, A. H. and R. Apolonio, (1986). Uma estratégia de eliminação de sobrecarga de ação integral para controladores PID discretos: aplicação no controle de velocidade de um motor cc. *Anais do II Congresso Latinoamericano de Control Automático*, Buenos Aires, 519-524.

[Bhattacharyya 75]

Bhattacharyya, S.P. On calculating maximal (A,B) invariant subspaces. *IEEE t. on A.C.*, 1985, pp 264.

[Bhattacharyya 82]

Bhattacharyya, S.P. Transfer function conditions for output feedback disturbance rejection. IEEE t. on A.C., august 1982, pp 974.

[Bhattacharyya 83]

Bhattacharyya, S.P., del Nero Gomes, A.C. and Howze, J.W. The structure of robust disturbance rejection control. IEEE t. on A.C., 1983, pp 874.

[Bhattacharyya 83]

Bhattacharyya, S.P. Generalized controllability (A,B) invariant subspaces and parameter invariant control. SIAM J. Algebra and Disc. Methods, vol 4, n^o 4, december 1983.

[Bhattacharyya 84]

Bhattacharyya, S.P. and Howze, J.W. Transfer function conditions for stabilizability. IEEE t. on A.C., march 1984.

[Bhattacharyya 85]

Bhattacharyya, S.P. and Howze, J.W. Transfer function conditions for stability. IEEE t. on A.C., june 1985.

[Bhattacharyya 87]

Bhattacharyya, S.P. Robust Stabilization Against Structured Perturbations. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer Verlag, New York, 1987.

[Caetano 89]

Caetano, S. Sistema de desenvolvimento para controladores PID. Nota interna do Laboratório de Controle e Micro Informática, UFSC, 1989.

[Callier 82]

Callier, F.M. and Desoer, Ch.A. Multivariable feedback systems. Springer Verlag, New York.

[Chen 70]

Chen, C.T. Introduction to linear system theory. Holt, Rinehart and Winston, INC. New York.

[Cheng 81]

Cheng, L. and Pearson, J.B. Synthesis of linear multivariable regulators. IEEE t. on A.C., february 1981.

[Davison 75]

Davison, E.J. and Wang, S.H. On pole assignment in linear multivariable systems using output feedback. IEEE t. on A.C. n^o 20, 1975.

[Descusse 82]

Descusse, J. A new sufficient condition for output stabilizability of linear systems. IEEE t. on A.C., february 1982.

[Desoer 81]

Desoer, C.A. and Chen, M.J. Design of multivariable feedback systems with stable plant. IEEE t. on A.C. n^o 2, april 1981.

[Eldem 88]

Eldem, V. and Ozgurer, A.B. Disturbance decoupling problems by measurement feedback: A characterization of all solutions and fixed modes. SIAM J. on C. and Optimiz., vol 26, n^o 1, 1988.

[Fahmy 82]

Fahmy M. and O'Reilly, J. On eigenstructure assignment in linear multivariable systems. IEEE t. on A.C. n^o 3, june-1982.

[Fahmy 83]

Fahmy M. and O'Reilly, J. Eigenstructure assignment in linear multivariable systems. A parametric solution. IEEE t. on A.C. n^o 5, october 1982.

[Ferreira 88]

Ferreira, P.M.G. Comments on: Internal Stabilization and Decoupling in linear multivariable systems by unit output feedback compensation. IEEE t. on A.C., december 1988, pp 1195.

[Fontes 88]

Fontes, A. Desenvolvimento e implementação de algoritmos numericamente estáveis para posicionamento de pólos por realimentação de estados em sistemas lineares multivariáveis. Dissertação de mestrado do curso de pós-graduação em engenharia elétrica da UFSC, julho de 1988.

[Gomes 84]

Gomes, A.C.N. Teoria Geométrica. Curso de teoria matemática de sistemas, CNPq, UFRJ, 1984.

[Hang 89]

Hang, C.C. The choice of controller zeros. IEEE Control System Magazine, january 1989, pp 72.

[Hautus 78]

Hautus, M.L. and Heyman, M. Linear feedback - An algebraic approach. SIAM J. on Control and Optimiz., vol 16, january 1978.

[Kabamba 82]

Kabamba, P.T. and Longman, R.W. Exact pole assignment using direct or dynamic output feedback. IEEE t. on A.C. n^o 6, december 1982.

[Kailath 80]

Kailath, T. Linear systems. Prentice Hall, New York.

[Kimura 75]

Kimura, H. Pole assignment by gain output feedback. IEEE t. on A.C. n^o 20, 1975.

[Leite 86]

Leite, V.M.P. Controle não interativo usando pares (C,A,B). Anales del 2^o Congreso Latinoamericano de Control Automático, pp 76. Buenos Aires, Argentina, 1986.

[Leite 88]

Leite, V.M.P. e Silva, P.S.P. Controle não iterativo com realimentação dinâmica para sistemas lineares invariantes no tempo. Anales del 3^o Congreso Latinoamericano de Control Automático, Vina del Mar, Chile, 1988.

[Linnemann 86]

Linnemann, A. Condensed forms for disturbance decoupling by measurement feedback. Proceedens of 25 th Conference on Desition and Control, Athenns, Greece, December 1986, pp 532.

[Linnemann 87]

Linnemann, A. A condensed form for disturbance decoupling with simultaneous pole placement using state feedback. Technical note. Department of electrical engineering, university of Kassel, West Germany, 1987.

[Luz 89]

Luz, L.T.O. Sistema para a modelagem e simulação de sistemas elétricos de potência. Nota interna do Laboratório de Controle e Micro Informática, UFSC, 1989.

[Magni 85]

Magni, J.F. A necessary condition for pole assignability by output feedback. Proceedens of 24 th Conference on Desition and Control, Ft. Lauderdale, Fl. December 1985, pp 194.

[Morse 73]

Morse, A.S. Structural invariants of linear multivariable systems. SIAM J. on Control, 1973, pp.446.

[Ohm 84]

Ohm, D.Y., Bhattacharyya, S.P. and Howze, J.W. Transfer function conditions for (C,A,B) pairs. IEEE t. on A.C., february 1984, pp 172.

[Ozgurer 85]

Ozgurer, A.B. and Eldem, V. Disturbance decoupling problems via dynamic output feedback. IEEE t. on A.C., n^o 8, august 1985.

[Ozgurer 86]

Ozgurer, A.B. Polinomial characterizations of (H-F) invariant subspaces with applications. Linear Algebra and Applications. 73: 1-31, 1986.

[Solak 86]

Solak, M.K. A direct computational method for determining the maximal (A,B) invariant subspace contained in $\ker C$. IEEE t. on A.C., 1986, pp 349.

[Schumacher 80-a]

Schumacher, J.M. A complement in pole placement. IEEE t. on A.C., april 1980.

[Schumacher 80-b]

Schumacher, J.M. Compensator synthesis using (C,A,B) pairs. IEEE t. on A.C., december 1980.

[Van Dooren 81]

Van Dooren, P.M. The generalized eigenstructure problem in linear systems theory. IEEE t. on A.C., 1981, pp 111.

[Vardulakis 81]

Vardulakis, A. On the structure of maximal (A,B) invariant subspaces: A polynomial matrix approach. IEEE t. on A.C., 1981, pp 422.

[Vardulakis 87]

Vardulakis, A. Internal Stabilization and Decoupling in linear multivariable systems by unit output feedback compensation. IEEE t. on A.C., august 1987, pp 735.

[Vidyasagar 85]

Vidyasagar, M. Control system synthesis: A factorization approach. The MIT Press, Cambridge, Massachusets.

[Willems 81]

Willens, J. and Commaut. Disturbance decoupling by measurement feedback with stability or pole placement. SIAM J. on Control, july 1981, pp 490.

[Wonham 79]

Wonham, W. M. (1979). Linear multivariable control: A geometric approach, second edition. Springer Verlag, New York.

[Zeni 84]

Zeni Jr., N., E. de Bona Castelan, R.S. Neves de Lemos, A.H. Bruciapaglia, (1984). Controle discreto de velocidade de um motor de corrente contínua. Uma técnica de limitação dinâmica da corrente de armadura. Anais do 1º Congresso Latinoamericano de Automática, 304-308.