

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

APLICAÇÃO DO POSICIONAMENTO PARCIAL
DE AUTOESTRUTURA AO PROBLEMA DE REGULAÇÃO
SOB RESTRIÇÕES NAS VARIÁVEIS DE CONTROLE

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA
CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA
ELÉTRICA

JOÃO MANOEL GOMES DA SILVA JUNIOR

FLORIANÓPOLIS, ABRIL DE 1994

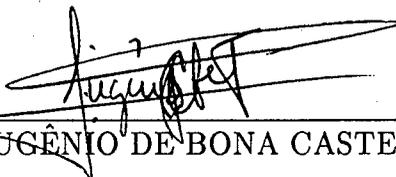
APLICAÇÃO DO POSICIONAMENTO PARCIAL DE AUTOESTRUTURA
AO PROBLEMA DE REGULAÇÃO SOB RESTRIÇÕES
NAS VARIÁVEIS DE CONTROLE

JOÃO MANOEL GOMES DA SILVA JUNIOR

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO
TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO SISTEMAS DE CONTROLE,
E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. EUGÊNIO DE BONA CASTELAN NETO, Dr.

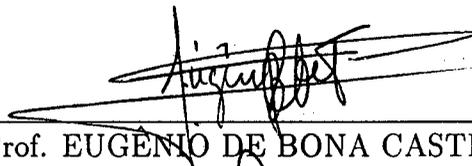
Orientador



Prof. ROBERTO DE SOUZA SALGADO, Ph.D.

Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

BANCA EXAMINADORA:



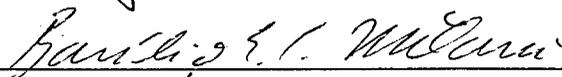
Prof. EUGÊNIO DE BONA CASTELAN NETO, Dr.

Orientador

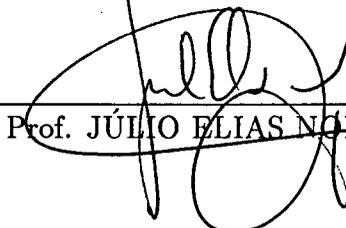


Prof. JOSÉ EDUARDO RIBEIRO CURY, Dr.

Co-orientador



Prof. BASÍLIO E. A. MILANI, Dr.



Prof. JÚLIO ELIAS NORMEY-RICO, MSc.

À meus pais, minha irmã
e meu avô.

Ao meu amor, *Sílvia*.

Agradecimentos

Ao professor Eugênio de Bona Castelan Neto, pela dedicação e competência com que orientou este trabalho e pela amizade desenvolvida entre nós durante este período.

Ao professor José Cury, pelos conhecimentos transmitidos, que foram fundamentais na elaboração desta dissertação.

Aos companheiros e amigos Tong Jiao e Flávio Soares, pela amizade e convivência diária destes dois últimos anos.

Aos colegas e amigos Arão Fischman e Alexandre Sanfelice Bazanella, pela troca de idéias.

A todos colegas do pós-graduação (sobretudo ao pessoal das "bairias"), pela amizade, companherismo e pelos momentos de descontração.

Aos meus pais Lisete e João Manoel, ao meu avô João e a minha mana Isabela pelo amor, incentivo para seguir na busca de novos conhecimentos e apoio incondicional, sobretudo nos momentos mais difíceis. A minha namorada Sílvia, que foi além disso amiga e companheira, pelo amor, dedicação, apoio e que mesmo estando à distância sempre esteve presente compartilhando minhas preocupações e meus sucessos.

A CAPES e ao povo brasileiro pelo financiamento deste trabalho.

A Deus.

Resumo

O objetivo deste trabalho é o estudo do problema de regulação de sistemas lineares sob restrições nas variáveis de controle. O tratamento deste problema é baseado na propriedade de invariância positiva e na aplicação de uma lei de controle do tipo realimentação de estados. Em particular, é estudado o caso em que as restrições definem uma região poliedral no espaço de controle. Pela natureza da lei de controle, tem-se então, correspondentemente, a definição de uma região poliedral no espaço de estados. A solução do problema pode ser obtida fazendo-se com que esta região seja positivamente invariante em relação ao sistema em malha fechada. Para tanto, devem ser resolvidas duas relações matriciais, conhecidas por relações de invariância positiva.

Neste trabalho, a satisfação das relações de invariância positiva para a solução do problema é equivalente à manutenção, em malha fechada, de um certo número de autovalores e autovetores do sistema em malha aberta. Assim sendo, é explorada a utilização explícita do posicionamento parcial de autoestrutura na resolução do problema. É proposta então, uma metodologia de resolução a partir da utilização de um sistema de ordem reduzida. Dentro deste contexto, alguns métodos e algoritmos já existentes para a solução do problema são reformulados para tratá-lo através de um sistema de ordem reduzida. São analisadas então, as vantagens da metodologia proposta e como alguns problemas das abordagens originais podem ser superados por sua utilização.

Abstract

The purpose of this work is to study the regulation problem of linear linear systems subject to control constraints. The treatment of the problem is based on positive invariance property and the application of a state feedback control law. In particular, the case in which constraints define a polyhedral region in the control space is studied. By the nature of the control law, we have, equivalently, a polyhedral region in the state space. A solution of this problem can be obtained if we made this region positively invariant with respect to the closed loop system. For that, two matricial relations must be solved. These two relations are called *positive invariance relations*.

In this work, the satisfaction of positive invariance relations are equivalent to maintenance, in the closed loop system, of a part of the open loop eigenvalues and associated eigenvectors. In this way, we explore the explicit use of partial eigenstructure assignment techniques to solve the underlying problem. Then, a reduced order framework is proposed to deal with control constrained problem in linear systems. In this context, some methods and algorithms of the related literature are reformulated and an analysis of the advantages of the purposed methodology and how some technical limitations can be overcome is carried out.

Lista de Figuras

1.1	Domínio D	6
1.2	(a)Poliedro limitado; (b)Poliedro não limitado	7
1.3	Propriedade de invariância positiva	8
1.4	(a)Poliedro simétrico; (b)Poliedro dissimétrico	17
1.5	Domínios $D_0, E, S(F, u_{max}, u_{min})$	21
3.1	O poliedro $S(F, u_{max}, u_{min})$ e sua projeção $S(F_r, u_{max}, u_{min})$	44
3.2	Trajetória do sistema reduzido e o poliedro $S(F_r, 1_m)$	62
3.3	Resposta temporal do sinal de controle	62
3.4	Trajetória do sinal de controle e o poliedro Ω	63
3.5	Comparação do tamanho dos poliedros $S(F_r, 1_m)$	64
3.6	Resposta temporal do Sistema Reduzido	66
3.7	Resposta temporal do Sistema Reduzido	66
3.8	Resposta temporal do sinal de controle	66
3.9	O poliedro Ω e a trajetória de controle	67
4.1	Poliedros $D_0(K, w)$ e $S(F, u_{max}, u_{min})$ e a trajetória do sistema	78
4.2	Resposta temporal dos estados	78
4.3	Resposta temporal do controle	79
4.4	$D_0(K, w)$ e $S(F, u_{max}, u_{min})$	88
4.5	Ampliação de $D_0(K, w)$ e $S(F, u_{max}, u_{min})$	89
4.6	Resposta temporal do estado do sistema reduzido	89

4.7	Resposta temporal do sinal de controle	90
A.1	Projeção em um subespaço segundo outro	107
A.2	Espaço Quociente	108
A.3	Diagrama Comutativo	110

Índice

Introdução	1
1 A Propriedade de Invariância Positiva e o Problema de Regulação sob Restrições nas Variáveis de Controle	4
1.1 Introdução	4
1.2 Sistemas Sujeitos à Restrições no Controle	5
1.3 Domínios Positivamente Invariantes	6
1.4 Invariância Positiva de Domínios Poliedrais	9
1.4.1 Poliedros Convexos	9
1.4.2 Poliedros Simétricos	12
1.4.3 Poliedros Dissimétricos	15
1.5 Utilização da Propriedade de Invariância Positiva no Problema de Regulação sob Restrições nas Variáveis de Controle (PRRVC)	19
1.6 Conclusão	23
2 Sobre Posicionamento Parcial de Autoestrutura	24
2.1 Introdução	24
2.2 Aspectos Geométricos	25
2.3 Caracterização Algébrica	29
2.4 Aspectos Algorítmicos	30
2.4.1 Obtenção de um Sistema de Ordem Reduzida	30
2.4.2 Obtenção da Lei de Controle	34

2.4.3	Relação entre os autovetores do sistema total e do sistema reduzido	35
2.4.4	Algoritmo Genérico	36
2.5	Síntese de leis de Controle Utilizando Posicionamento Parcial de Autoestrutura .	37
2.6	Exemplo	39
2.7	Conclusão	41
3	Resolução do PRRVC Utilizando Posicionamento Parcial de Autoestrutura	42
3.1	Introdução	42
3.2	A Invariância Positiva no Sistema de Ordem Reduzida	43
3.3	Abordagem por Posicionamento Parcial de Autoestrutura	47
3.3.1	Caso $r \leq m$	49
3.3.2	Caso $r > m$	51
3.4	O Domínio de Estados Iniciais Admissíveis	56
3.5	Construção de Poliedros Dissimétricos	58
3.6	Exemplos	61
3.7	Conclusão	67
4	Resolução do PRRVC Utilizando um Sistema de Ordem Reduzida e Técnicas de Otimização	69
4.1	Introdução	69
4.2	Abordagem por Programação não Linear	70
4.2.1	Formulação do Problema para o Sistema como um Todo	70
4.2.2	Formulação do Problema para o Sistema de Ordem Reduzida	73
4.3	Abordagem por Programação Linear	80
4.3.1	Formulação para o Sistema como um Todo	80
4.3.2	Formulação do Problema para o Sistema de Ordem Reduzida	84
4.3.3	Relação entre F e B	90
4.4	Conclusão	91

	xii
Conclusão	94
Bibliografia	97
A Conceitos da Teoria Geométrica	102
A.1 Espaços Vetoriais Lineares	102
A.2 Subespaços Vetoriais Lineares	103
A.3 Mapas e Matrizes	104
A.4 Espaço Quociente e Projeção Canônica	106
A.5 Subespaços A – <i>invariantes</i> e Mapas induzidos	109
B Posicionamento de Autoestrutura	112

Introdução

A teoria de controle moderna tem, nas últimas décadas, voltado-se para a abordagem de problemas existentes no ambiente industrial que, tendo em vista sua complexidade e a busca de índices de desempenho, rendimento e produtividade cada vez mais exigentes, a abordagem clássica de controle já não é capaz de resolver em sua plenitude. Aliado a isto, aplicações envolvendo equipamentos de alta tecnologia e confiabilidade, como é o caso da indústria bélica e aeroespacial, exigem, cada vez mais, estratégias de controle que levem em conta todas as particularidades dos sistemas com o intuito de garantir alta precisão nas respostas, bem como imunidade a falhas e comportamentos não previstos.

Neste sentido, destaca-se o interesse pelo estudo dos sistemas multivariáveis. Técnicas e algoritmos de controle são estudados a fim de garantir e atender necessidades de controle tais como: estabilidade, desacoplamento, descentralização, robustez e rejeição à perturbações. Estes algoritmos pressupõem, em geral, a aplicação de sinais de controle lineares e sem qualquer tipo de restrições.

Nos sistemas físicos reais, entretanto, restrições de ordem tecnológica e de segurança se fazem presentes. Estas restrições se traduzem na possibilidade de aplicação de sinais de controle limitados entre valores máximos e mínimos e também em limitações sobre as variáveis de estado do sistema. Entre outros exemplos, podemos citar: as válvulas, que apresentam uma abertura máxima e uma mínima; amplificadores, que devem operar dentro das fronteiras da tensão de alimentação; atuadores de aquecimento ou resfriamento, cuja potência máxima entregue ou retirada do sistema não pode ultrapassar valores pré-estabelecidos a fim de não serem danificados; conversores de potência, os quais só podem acionar máquinas dentro do limite máximo de potência para o qual foram projetados; restrições de torque e velocidade em máquinas elétricas devido a aspectos construtivos.

Entretanto, o que se tem utilizado na prática até então, é o projeto de leis de controle lineares que ignoram, a priori, este tipo de restrições. Consta-se que o controle assim concebido não se comporta satisfatoriamente quando o sistema é submetido a fortes perturbações ou fortes mudanças de referência. Este comportamento não satisfatório é decorrente dos ajus-

tes heurísticos aplicados a posteriori do projeto do controlador, freqüentemente utilizados na indústria, tais como: o controle saturado e o controle dual (aplicação de uma lei de controle mais fraca se o estado corrente do sistema está muito afastado do ponto de equilíbrio). Estes métodos, que não consideram as restrições a priori, levam o sistema e o controlador, inicialmente projetados para uma operação linear, a se comportarem de uma maneira não linear. Dessa forma, a análise de estabilidade feita não é mais válida e o sistema pode vir a apresentar ciclos-limite, pontos de equilíbrio parasitas, e até mesmo tornar-se instável.

A partir da última década, estudos começaram a ser desenvolvidos de forma a integrar as restrições sobre as variáveis de controle e de estado no projeto dos controladores. Primeiramente, pensou-se em integrar o problema no contexto do controle ótimo [21] [22] [39]. Contudo, a aplicação de técnicas de controle ótimo levam freqüentemente a algoritmos de controle não lineares muito difíceis de serem implementados. Outra abordagem, que tem sido a mais utilizada nos últimos trabalhos na área, é a que explora o conceito de domínios positivamente invariantes [32] [36]. Este conceito pode ser considerado como uma extensão do conceito de domínios produzidos por funções de Lyapunov.

Relativamente a um sistema dinâmico, um domínio de estados positivamente invariante caracteriza-se pela propriedade de que, para qualquer condição inicial pertencente ao domínio, no tempo $t = t_0$, a trajetória do sistema permanece dentro do domínio para $t > t_0$. Particularmente, se o sistema é linear e o domínio é do tipo poliedral, sua invariância positiva é obtida pela satisfação de duas relações matriciais conhecidas como *relações de invariância positiva* [2] [6] [55].

Assumindo-se então que as restrições definem um domínio poliedral no espaço de controle, teremos, pela utilização de uma lei de controle do tipo realimentação de estados, um poliedro correspondente no espaço de estados definindo o domínio de comportamento linear do sistema em malha fechada. Neste caso, um objetivo a ser atingido pode ser o de manter a trajetória do sistema em malha fechada confinada dentro deste domínio poliedral de comportamento linear. Para isto, a solução do problema pode ser obtida fazendo-se com que este domínio seja positivamente invariante em relação ao sistema em malha fechada. Por esta abordagem, a satisfação das relações matriciais de invariância positiva implicam na manutenção, no sistema em malha fechada, de um certo número de autovalores e autovetores do sistema em malha aberta [14]. Surge assim, a necessidade de se utilizar técnicas de posicionamento parcial de autoestrutura para a resolução deste problema.

O objetivo deste trabalho consiste então, no estudo do problema de regulação sob restrições nas variáveis de controle (PRRVC) pela construção de domínios poliedrais positivamente invariantes em relação ao sistema controlado. Em particular, ter-se-á interesse na obtenção de

leis de controle do tipo realimentação de estados que, para um dado conjunto de condições iniciais admissíveis, garantam o respeito linear às restrições (não haja saturação do sinal de controle) conjuntamente com a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada. O enfoque central da dissertação estará na utilização explícita do conceito de posicionamento parcial de autoestrutura na resolução do PRRVC. Será mostrado como é possível o tratamento do problema através do uso de um sistema de ordem reduzida associado à autoestrutura do sistema que será efetivamente alterada. Esta abordagem trará algumas vantagens gerais no tratamento do problema bem como possibilitará a realização de melhorias em metodologias já propostas na literatura.

Esta dissertação está então, assim organizada:

No capítulo 1 é apresentado, de forma genérica, o problema de regulação sob as variáveis de controle. A partir disto, justifica-se a abordagem do problema pela utilização do conceito de invariância positiva. Será estudada então, a propriedade de invariância positiva de conjuntos poliedrais. A partir disto, será visto que a utilização de uma lei de controle por realimentação de estados permitirá que a solução das relações de invariância positiva possa ser obtida através de um posicionamento parcial de autoestrutura.

Assim, o capítulo 2 é dedicado ao estudo e a formalização teórica do posicionamento parcial de autoestrutura. Para tanto, serão utilizados elementos da teoria de controle geométrica [58], cujos principais conceitos são descritos no apêndice A. Sugere-se ao leitor que não esteja familiarizado com a abordagem geométrica, a leitura do apêndice A anteriormente a deste capítulo.

No capítulo 3 é mostrado como o problema de controle sob restrições nas variáveis de controle (PRRVC) pode ser tratado através de um sistema de ordem reduzida. Em particular, é visto que o PRRVC pode ser resolvido por uma escolha apropriada da autoestrutura do sistema reduzido. No apêndice B é apresentado de forma resumida um estudo sobre os graus de liberdade envolvidos em um posicionamento de autoestrutura genérico.

Por fim, seguindo-se com a metodologia de tratar o problema a partir de um sistema de ordem reduzida, são apresentados, no capítulo 4, métodos para a solução do PRRVC baseados em algoritmos de otimização. Neste caso, será visto como formular programas lineares e não lineares para a resolução do PRRVC, utilizando-se um sistema de ordem reduzida.

Capítulo 1

A Propriedade de Invariância Positiva e o Problema de Regulação sob Restrições nas Variáveis de Controle

1.1 Introdução

Na prática, a disponibilidade de energia para o controle de sistemas não é infinita; as limitações de ordem tecnológica e/ou de segurança permitem apenas a aplicação de sinais de controle que devem respeitar certos limites. Em geral, estas restrições definem domínios poliedrais convexos no espaço de controle. A trajetória do sinal de controle deve então, estar necessariamente contida neste domínio, seja pela aplicação de uma lei de controle linear ou não linear (uma lei de controle saturada, por exemplo).

Neste capítulo será apresentado, inicialmente, o problema de regulação sob a presença de restrições nas variáveis de controle. A abordagem escolhida para o tratamento do problema passará pela utilização da propriedade de invariância positiva. Será feito então, um estudo sobre esta propriedade e, em seguida, será visto sua aplicação na solução do problema. A lei de controle a ser considerada é do tipo realimentação de estados. Dessa forma, ao domínio delimitado pelas restrições no espaço de controle, corresponderá um domínio no espaço de estados, no qual a trajetória do estado do sistema deverá estar confinada. Assim, será visto que a solução do problema pode ser obtida fazendo-se com que este domínio seja positivamente invariante em relação ao sistema em malha fechada.

1.2 Sistemas Sujeitos à Restrições no Controle

Seja o sistema linear, contínuo e invariante no tempo, descrito pela equação dinâmica:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.1)$$

onde $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$, $x \in \mathcal{X}$ e $u \in \mathcal{U}$. \mathcal{U} é o espaço de controle e \mathcal{X} é o espaço de estados.

Suponhamos agora que o vetor de controle, $u(t)$, esteja restrito a uma dada região \mathcal{D} no espaço de controle. Consideremos, por exemplo, que limitações físicas nos atuadores do sistema não permitem a aplicação de um sinal de controle qualquer. O valor de $u(t)$ a ser aplicado ao sistema deve, necessariamente, pertencer ao domínio \mathcal{D} :

$$u(t) \in \mathcal{D} \subset \mathcal{U} \quad , \quad \forall t$$

Neste caso, diz-se que o sistema (1.1) está sujeito a restrições no controle.

Em geral, as restrições físicas sobre o controle se traduzem pela possibilidade de aplicação de sinais entre limites máximos e mínimos:

$$u_{min} \leq u(t) \leq u_{max} \quad (1.2)$$

Dessa forma, a região \mathcal{D} define um poliedro no espaço de controle. Por exemplo, se o sistema possui duas entradas de controle sujeitas à restrições do tipo (1.2), a região \mathcal{D} tem a forma de um retângulo. No caso de 3 entradas \mathcal{D} toma a forma de um paralelepípedo e com mais de 3 entradas pode-se dizer que temos *hiperparalelepípedos*.

Suponhamos agora que $u(t)$ é calculada por uma lei de controle, a princípio, qualquer. Seja então $\phi_u(t, u(t_0), t_0)$, a *função de transição* ou *trajetória* do sinal de controle. Ela mostra como o sinal de controle a partir do tempo $t = t_0$, evolui até $u(t)$ no instante $t \geq t_0$. Logo, em um sistema com restrições no controle tem-se, necessariamente, a trajetória do sinal de controle confinada a região \mathcal{D} :

$$\phi_u(t, u(t_0), t_0) \in \mathcal{D}$$

Muitas vezes é desejável que a trajetória esteja totalmente contida no interior de \mathcal{D} , $int(\mathcal{D})$; geralmente este fato está associado a um comportamento linear da lei de controle. Uma lei de controle saturada, por exemplo, apresenta parte de sua trajetória na fronteira de \mathcal{D} , $\delta(\mathcal{D})$.

Na seção seguinte apresentaremos o conceito de invariância positiva, o qual está relacionado com o confinamento de trajetórias a domínios específicos.

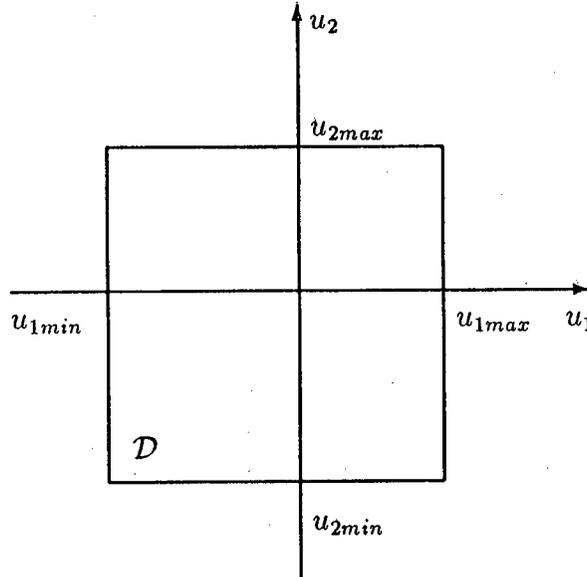


Figura 1.1: Domínio D

1.3 Domínios Positivamente Invariantes

Para o estudo da propriedade de invariância positiva consideremos o sistema linear, autônomo, contínuo e invariante no tempo descrito pela equação dinâmica:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) \quad (1.3)$$

onde $A_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $x \in \mathcal{X}$, $\mathcal{X} \triangleq \mathbb{R}^n$.

Seja $\phi(t, x(t_0), t_0) = \phi(t, x_0)$ a função trajetória do sistema (1.3). Esta função mostra, a cada instante de tempo, $t > t_0$, a evolução do sistema a partir da condição inicial $x_0 = x(t_0)$.

Considere-se agora um conjunto não vazio Ω , contido no espaço de estados:

$$\Omega \subset \mathcal{X} \quad (1.4)$$

Este conjunto pode ser limitado ou não, conforme as definições abaixo:

Definição 1.1 (Conjunto Não Limitado) : Um conjunto $\Omega \subset \mathcal{X}$ é dito ser não limitado na direção dada pelo vetor $x \in \Omega$, se para todo escalar α , tem-se que $\alpha x \in \Omega$, ou seja:

$$\exists x \in \Omega \text{ tal que } \alpha x \in \Omega, \quad \forall \alpha > 0$$

□

Definição 1.2 (Conjunto Limitado) : Um conjunto $\Omega \subset \mathcal{X}$ é dito ser limitado se para qualquer vetor $x \in \Omega$, existe um escalar α , tal que $\alpha x \notin \Omega$:

$$\forall x \in \Omega \Rightarrow \exists \alpha \text{ tal que } \alpha x \notin \Omega$$

□

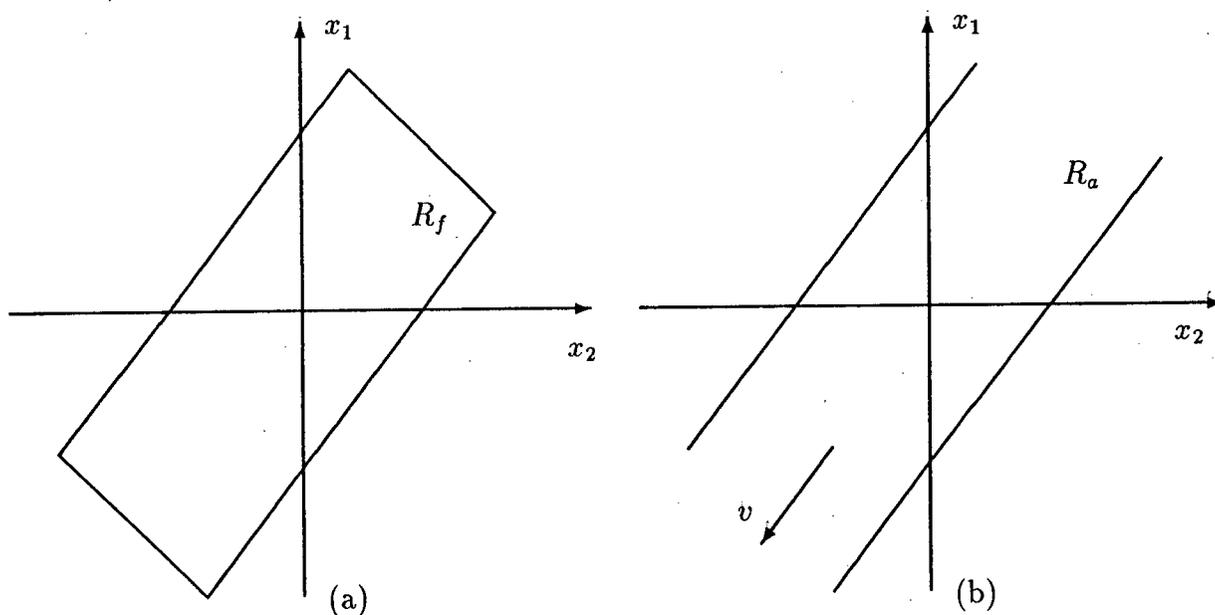


Figura 1.2: (a) Poliedro limitado; (b) Poliedro não limitado

O conjunto de trajetórias de (1.3) que emanam de Ω é notado por:

$$\phi(t, \Omega) \triangleq \{\phi(t, x_0) ; x_0 \in \Omega\} , \quad \forall t \geq 0 \quad (1.5)$$

Estamos então em condições de apresentar a definição de um conjunto positivamente invariante em relação ao sistema (1.3).

Definição 1.3 (Conjunto Positivamente Invariante) [36]

O conjunto não vazio Ω é um conjunto positivamente invariante do sistema (1.3) se, para toda condição inicial pertencente a Ω , as trajetórias correspondentes permanecem em Ω , ou seja, o sistema (1.3) apresenta a seguinte propriedade:

$$\phi(t, \Omega) \subseteq \Omega \quad (1.6)$$

□

O conjunto Ω pode, particularmente, ser um subespaço, um cone [50] ou poliedro. No caso de ser um subespaço, a invariância positiva de Ω é equivalente a sua A_0 -invariância (vide apêndice A). Neste trabalho, teremos interesse especial no estudo de conjuntos Ω do tipo poliedral.

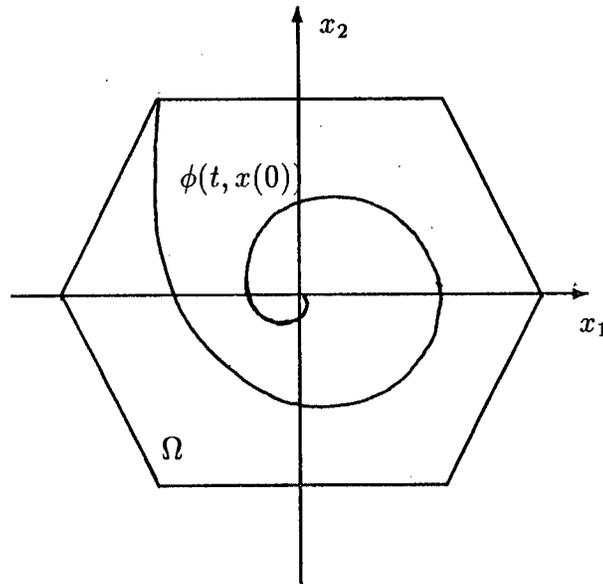


Figura 1.3: Propriedade de invariância positiva

De uma maneira geral, a invariância positiva de um conjunto Ω não implica a convergência assintótica das trajetórias para a origem. Se o sistema em questão é estável, ele admite domínios positivamente invariantes do tipo:

$$R(V(x), c) = \{x \in \mathcal{X}; V(x) \leq c, \quad c > 0\} \quad (1.7)$$

com $V(x)$ sendo uma função de Lyapunov qualquer associada ao sistema (1.3).

Assim, todo sistema dinâmico estável admite domínios positivamente invariantes. A fronteira dos domínios do tipo (1.7) são determinados pelas *curvas de nível* $V(x) = c > 0$ [43][57]. A forma destes domínios vai depender então, da função de Lyapunov escolhida. Em particular, se $V(x) = x^T P x$, com P definida positiva, estes conjuntos assumirão uma forma *hiperhelipsoidal*.

Na aplicação ao problema de controle sob restrições será de interesse principal o estudo de conjuntos poliedrais positivamente invariantes, pois as restrições impostas delimitam, em geral, regiões poliedrais no espaço de controle e de estados. No sentido de otimizar o conjunto de condições iniciais, para as quais se possa garantir a estabilidade e o respeito às restrições de controle, devemos buscar conjuntos positivamente invariantes de mesma natureza que os

impostos pelas restrições. Baseados neste fato, apresentaremos na seção seguinte resultados relativos a invariância positiva de domínios poliedrais.

1.4 Invariância Positiva de Domínios Poliedrais

Nesta seção serão apresentados resultados básicos relativos à invariância positiva de domínios poliedrais. Inicialmente serão vistas propriedades genéricas a poliedros convexos e, em seguida, a particularização dos resultados para poliedros simétricos e dissimétricos.

1.4.1 Poliedros Convexos

Definição 1.4 (Poliedro Convexo) : *Todo poliedro não vazio de \mathbb{R}^n pode ser caracterizado por uma matriz $Q \in \mathbb{R}^{g \times n}$ e por um vetor $\rho \in \mathbb{R}^g$, podendo ser definido por:*

$$R(Q, \rho) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n ; Qx \leq \rho\}$$

□

Observemos que a região $R(Q, \rho)$ é delimitada por um conjunto de g hiperplanos do tipo $q_i x = \rho_i$, onde q_i representa a i -ésima linha de Q .

A invariância positiva de $R(Q, \rho)$ pode ser caracterizada em termos das trajetórias do sistema (1.3) pela seguinte propriedade:

Propriedade 1.1 : *O poliedro convexo $R(Q, \rho)$ é um conjunto positivamente invariante do sistema (1.3) se e somente se:*

$$Qx_0 \leq \rho \implies Qe^{A_0 t} x_0 \leq \rho, \quad \forall x_0 \in R(Q, \rho), \quad \forall t \geq 0$$

□

No entanto, a formulação de condições algébricas que descrevam esta propriedade é fundamental para sua aplicação em teoria de controle. Para tanto, são fundamentais os conceitos de *matriz essencialmente não negativa* e *M-matriz*. Estas definições, bem como as propriedades associadas a estas matrizes, serão utilizadas na formulação das condições necessárias e suficientes para a invariância positiva de domínios poliedrais.

Definição 1.5 (Matriz essencialmente não negativa) [54] [45] : Uma matriz $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é essencialmente não negativa se:

$$N_{ij} \geq 0, \quad \forall j \neq i, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

□

Definição 1.6 (M-matriz) [3] [41] : Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que para todo $i \neq j$, $A_{ij} \leq 0$, é uma M-matriz se e somente se todos seus autovalores possuem parte real positiva.

□

Propriedade 1.2 [3] [41] : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com $A_{ij} \leq 0$ é uma M-matriz se e somente se existe um vetor $x > 0$ ($x_i > 0$, para todo $i = 1, \dots, n$) tal que $Ax > 0$.

□

Assim, se N é uma matriz essencialmente não negativa e existe um vetor $x > 0$ tal que $Nx < 0$, então $-N$ é uma M-matriz.

A proposição seguinte fornece uma condição algébrica necessária e suficiente para que $R(Q, \rho)$ seja um poliedro positivamente invariante do sistema (1.3).

Proposição 1.1 (Invariância Positiva de $R(Q, \rho)$) [14] : O poliedro $R(Q, \rho)$ é um conjunto positivamente invariante do sistema (1.3) se e somente se existe uma matriz essencialmente não negativa $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{g \times g}$ tal que:

$$\mathcal{H}Q = QA_0 \tag{1.8}$$

$$\mathcal{H}\rho \leq 0 \tag{1.9}$$

□

Suponhamos agora que a origem, $x = 0$, pertence ao interior de $R(Q, \rho)$. Neste caso, as componentes do vetor ρ são estritamente positivas ($\rho > 0$). Podemos mostrar que a invariância positiva de $R(Q, \rho)$ é equivalente ao não crescimento, ao longo das trajetórias do sistema (1.3), da função escalar semidefinida não negativa [8]:

$$v(x) = \max_{i=1}^g \left\{ \frac{(Qx)_i}{\rho_i}, 0 \right\} \tag{1.10}$$

O lema seguinte fornece uma condição necessária e suficiente para a existência de uma matriz $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{g \times g}$ que satisfaça a relação (1.8).

Lema 1.1 [14] : Uma condição necessária e suficiente para a existência de uma matriz $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{g \times g}$ que satisfaça $\mathcal{H}Q = QA_0$ é que $\text{Ker} Q$ seja um espaço A_0 -invariante.

Demonstração:

Necessidade: A partir da condição $\mathcal{H}Q = QA_0$, se $x \in \mathbb{R}^n$ é tal que $Qx = 0$, então $QA_0x = 0$; por conseguinte, $\dot{x} = A_0x \in \text{Ker} Q$ para todo $x \in \text{Ker} Q$. Logo, $\text{Ker} Q$ é um subespaço A_0 -invariante. Em notação geométrica, tem-se: $A_0\text{Ker} Q \subset \text{Ker} Q$.

Suficiência: Se $\text{Ker} Q$ é A_0 -invariante, então: $\forall x \in \mathbb{R}^n ; Qx = 0 \implies QA_0x = 0$. Esta implicação é equivalente à:

$$\text{Ker} Q \subset \text{Ker} QA_0 \quad (1.11)$$

O subespaço ortogonal e complementar de $\text{Ker} Q$ em \mathbb{R}^n é gerado pelos vetores coluna de Q^T e o subespaço ortogonal e complementar de $\text{Ker} QA_0$ em \mathbb{R}^n é gerado pelos vetores coluna de $[QA_0]^T$ [47]. A condição (1.11) implica:

$$\text{Im}\{[QA_0]^T\} \subset \text{Im}\{Q^T\}$$

Logo, cada vetor linha de QA_0 pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores linha de Q :

$$[QA_0]_i = [\mathcal{H}_{i1} \dots \mathcal{H}_{ig}]Q, \quad \text{para } i = 1, \dots, g \quad (1.12)$$

Assim, obtem-se (1.8) por concatenação das g condições. (1.12).

□

Sob a hipótese de que $\text{posto}(Q) = g < n$, a relação (1.8) pode ser interpretada como uma equação de projeção canônica (vide apêndice A). Neste caso, como $\text{Ker} Q$ é um subespaço A_0 -invariante, Q representa a matriz de projeção canônica de A_0 no espaço quociente $\mathcal{X}/\text{Ker} Q$ e \mathcal{H} representa o mapa induzido por A_0 em $\text{Ker} Q$. Em particular, se $\text{posto}(Q) = n$ temos $\text{Ker} Q = 0$ e conseqüentemente sempre existirá uma matriz \mathcal{H} que satisfaz a relação (1.8), que neste caso será equivalente a uma relação de similaridade [18].

O sistema (1.3) é de interesse especial quando representa um sistema do tipo (1.1) controlado por uma lei de retroação de estados. Neste caso, a condição de A_0 -invariância de $\text{Ker} Q$ é equivalente à (A, B) -invariância de $\text{Ker} Q$.

Analisando-se a equação (1.9), podemos concluir que, sob a hipótese de que $\rho > 0$, $-\mathcal{H}$ é uma M -matriz, pois \mathcal{H} é uma matriz essencialmente não-negativa e existe um vetor $\rho > 0$

tal que $\mathcal{H}\rho \leq 0$. Dessa forma, podemos deduzir algumas propriedades sobre os autovalores de \mathcal{H} (vide [3] [41]). Em particular, se a inequação é estritamente verificada, $\mathcal{H} < 0$, $-\mathcal{H}$ é uma M -matriz não singular e, portanto, os autovalores de \mathcal{H} têm suas partes reais estritamente negativas. Por conseqüência, o sistema que descreve a dinâmica induzida no espaço quociente $\mathcal{X}/\text{Ker}Q$:

$$\dot{y}(t) = \mathcal{H}y(t) \quad , \quad \text{com } y(t) = Qx(t)$$

é assintoticamente estável.

1.4.2 Poliedros Simétricos

Definição 1.7 (Poliedro Simétrico) : Um poliedro simétrico $S(G,w)$ é definido por:

$$S(G,w) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n ; -w \leq Gx \leq w\}$$

onde $G \in \mathbb{R}^{g \times n}$, $w \in \mathbb{R}^g$, $w \neq 0$ com $w_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, g$.

□

As condições algébricas para a invariância positiva de poliedros simétricos, são dadas pela proposição seguinte, que pode ser entendida como uma especialização da proposição 1.1 [14].

Proposição 1.2 [8] [13] : $S(G,w)$ é um poliedro positivamente invariante de (1.3) se e somente se existe uma matriz $H \in \mathbb{R}^{g \times g}$ tal que:

$$\hat{H}G = GA_0 \quad (1.13)$$

$$\hat{H}w \leq 0 \quad (1.14)$$

$$\text{com } \hat{H}_{ij} \triangleq \begin{cases} H_{ii} & \text{para } i = j \\ |H_{ii}| & \text{para } i \neq j \end{cases} , \quad (i,j) = 1, \dots, m.$$

□

Temos que \hat{H} é uma matriz essencialmente não negativa que satisfaz: $\hat{H}w \leq 0$, com w tendo todas suas componentes não negativas ($w > 0$). Então, \hat{H} é uma $-M$ -matriz e todos os elementos de sua diagonal principal são não-positivos [3] [41]:

$$\hat{H}_{ii} = H_{ii} \leq 0$$

Se o elemento H_{ii} é nulo, então todos os elementos da linha correspondente são também nulos: $H_{ij} = 0$. Em particular, se a inequação (1.14) é estritamente verificada, todos os elementos da diagonal principal de H são estritamente negativos:

$$\hat{H}w \leq 0 \implies H_{ii} < 0$$

Pode ser mostrado [14] que a invariância positiva de $S(G, w)$, com $w > 0$, é equivalente ao não crescimento, ao longo das trajetórias do sistema (1.3), da função escalar semi-definida positiva:

$$v(x) = \max_{i=1}^g \left\{ \frac{|(Gx)_i|}{w_i} \right\} \quad (1.15)$$

assim $\dot{v}(x(t)) \leq 0$, $\forall x(t) \in \mathcal{X}$ e $\forall t \geq 0$.

A função $v(x)$ é uma *semi-norma generalizada* do tipo L_∞ [23]. Podemos chamá-la de *função* ou *semi-norma poliedral*.

Se $\text{posto}(G) < n$, a semi-norma poliedral $v(x)$ se anula para todo valor de $x \in \text{Ker}G$. Isto determina a característica semi-definida positiva de $v(x)$. Por outro lado, se $S(G, w)$ é positivamente invariante e $\text{posto}(G) = n$, $v(x) = 0$ se e somente se $x = 0$. Neste caso, como $\dot{v}(x(t)) \leq 0$, $\forall x(t) \in \mathcal{X}$ e $\text{posto}(G) = n$, a norma poliedral, $v(x)$, é uma função de Lyapunov do sistema (1.3). Se sua derivada, $\dot{v}(x) < 0 \forall x \neq 0$, o sistema (1.3) é assintoticamente estável e a norma poliedral é contrativa ao longo de suas trajetórias.

Dado um poliedro simétrico, podemos sempre trabalhar com sua forma normalizada:

$$S_n(G, w) = S(G_n, 1_g) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n ; -1_g \leq M^{-1}Gx \leq 1_g\} \quad (1.16)$$

onde M é uma matriz diagonal com $m_{ii} = w_i > 0$; 1_g é um vetor de dimensão g cujas componentes são todas iguais a 1; e $G_n \triangleq M^{-1}G$.

Se $S(G, w)$ é poliedro positivamente invariante em relação à (1.3) temos que $S(G_n, 1_g)$ também o é, pois são representações matemáticas diferentes para o mesmo poliedro. Dessa maneira, pela proposição 1.2, existe uma matriz H_n tal que:

$$H_n G_n = G_n A_0 \quad (1.17)$$

$$\hat{H}_n 1_g \leq 0 \quad (1.18)$$

Substituindo-se G_n por $M^{-1}G$ na equação (1.18) e utilizando o fato de que $\dot{H}G = GA_0$, obtém-se:

$$H = M H_n M^{-1} \quad (1.19)$$

por outro lado, como $M = \text{diag}(w_i)$, e $w_i > 0$, podemos escrever que $M\hat{H}_n M^{-1}w \leq 0$ e conseqüentemente:

$$\hat{H} = M\hat{H}_n M^{-1} \quad (1.20)$$

Trabalhando com o poliedro em sua forma normalizada, pode-se expressar e interpretar a relação (1.18) através do conceito de *norma logaritmica* (ou *medida infinita de matriz*) [35] [57], $\mu_\infty(\cdot)$. Dada uma matriz P temos que:

$$\mu_\infty(P) = \max_i \{p_{ii} + \sum_j |p_{ij}|\}$$

Assim, a relação (1.18) pode ser reescrita como:

$$\mu_\infty(H_n) \leq 0 \quad (1.21)$$

A seguir, apresentaremos algumas propriedades relativas à medida infinita de uma matriz que nos permitirão tirar algumas conclusões a respeito da relação (1.18).

Propriedade 1.3 [57] : *A medida infinita $\mu_\infty(\cdot)$ de uma matriz P tem as seguintes propriedades:*

$$(i) \quad -\|P\|_\infty \leq -\mu_\infty(-P) \leq \mu_\infty(P) \leq \|P\|_\infty$$

$$(ii) \quad \mu_\infty(\alpha P) = \alpha \mu_\infty(P) \quad \forall \alpha \geq 0$$

$$(iii) \quad \mu_\infty(P + Q) \leq \mu_\infty(P) + \mu_\infty(Q)$$

$$(iv) \quad \mu_\infty(-P) \leq \text{Re}(\lambda) \leq \mu_\infty(P), \text{ onde } \text{Re}(\lambda) \text{ é a parte real de qualquer autovalor de } P.$$

□

Pelo item (iv) da propriedade (1.3), se a relação (1.18) é satisfeita, os autovalores de H_n terão todos suas partes reais não-positivas. Como H_n é similar de H , esta é uma outra maneira de verificar que a dinâmica induzida no espaço quociente ($\mathcal{X}/\mathcal{Ker} G$):

$$\dot{y}(t) = Hy(t) \quad , \quad \text{com } y(t) = Gx(t)$$

é estável se a relação (1.18) é satisfeita. Em particular, se esta é estritamente verificada temos garantida a estabilidade assintótica. Esta conclusão, como já fora visto na seção anterior, poderia ter sido obtida a partir da utilização do conceito de M -matriz.

1.4.3 Poliedros Dissimétricos

Definição 1.8 (Poliedro Dissimétrico) : Um poliedro dissimétrico $S(G, w_m, w_M)$ é definido por:

$$S(G, w_m, w_M) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n ; -w_m \leq Gx \leq w_M\}$$

onde $G \in \mathbb{R}^{g \times n}$, $w_m, w_M \in \mathbb{R}^g$, $w_m, w_M \neq 0$ com $w_{mi}, w_{Mi} \geq 0$ para $i = 1, \dots, g$.

□

As condições para a invariância positiva de um poliedro dissimétrico em relação à (1.3) são dadas pela seguinte proposição:

Proposição 1.3 [8] : $S(G, w_m, w_M)$ é um poliedro positivamente invariante de (1.3) se e somente se existe uma matriz $H \in \mathbb{R}^{g \times g}$ tal que:

$$HG = GA_0 \tag{1.22}$$

$$\tilde{H} \begin{bmatrix} w_M \\ w_m \end{bmatrix} \leq 0 \tag{1.23}$$

$$\text{onde: } \tilde{H} = \begin{bmatrix} \hat{H}^+ & \hat{H}^- \\ \hat{H}^- & \hat{H}^+ \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{cases} \hat{H}_{ij}^+ \triangleq \begin{cases} H_{ii} & \text{para } i = j \\ \max H_{ij}, 0 & \text{para } i \neq j \end{cases}, & i, j = 1, \dots, g. \\ \hat{H}_{ij}^- \triangleq \begin{cases} 0 & \text{para } i = j \\ \max -H_{ij}, 0 & \text{para } i \neq j \end{cases}, & i, j = 1, \dots, g. \end{cases}$$

□

Note que este resultado pode ser visto como um caso particular da proposição 1.1 para poliedros convexos genéricos com $Q = \begin{bmatrix} G \\ -G \end{bmatrix}$, $\mathcal{H} = \tilde{H}$ e $\rho = \begin{bmatrix} w_M \\ w_m \end{bmatrix}$. Neste caso, observa-se também que $H = \hat{H}^+ - \hat{H}^-$ e define-se $\hat{H} \triangleq \hat{H}^+ + \hat{H}^-$.

A relação (1.22) é, pelo lema (1.1), equivalente a A_0 -invariância de $\text{Ker}G$. Será mostrado agora que, analogamente aos poliedros simétricos, a relação (1.23) implica a estabilidade da matriz H , ou seja, o espectro de H está contido no semiplano esquerdo do plano complexo ($\sigma(H) \subset \mathbb{C}^-$).

A relação (1.22) pode ser reescrita em duas inequações:

$$\hat{H}^+ w_M + \hat{H}^- w_m \leq 0 \tag{1.24}$$

$$\hat{H}^- w_M + \hat{H}^+ w_m \leq 0 \tag{1.25}$$

Somando-se (1.24) e (1.25), tem-se que:

$$\begin{aligned} (\hat{H}^+ + \hat{H}^-)w_M + (\hat{H}^+ + \hat{H}^-)w_m &\leq 0 \\ (\hat{H}^+ + \hat{H}^-)(w_M + w_m) &\leq 0 \\ \hat{H}(w_M + w_m) &\leq 0 \end{aligned} \quad (1.26)$$

Definamos agora uma matriz M diagonal, tal que os elementos de sua diagonal são dados por $(w_{M_i} + w_{m_i})$ ($M = \text{diag}((w_M + w_m)_i)$) e matrizes \hat{H}_n^+ e \hat{H}_n^- da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \hat{H}_n^+ &\triangleq M^{-1}\hat{H}^+M \\ \hat{H}_n^- &\triangleq M^{-1}\hat{H}^-M \end{aligned}$$

Como todos elementos de M são não negativos, podemos definir:

$$\begin{aligned} H_n &\triangleq \hat{H}_n^+ - \hat{H}_n^- = M^{-1}\hat{H}^+M - M^{-1}\hat{H}^-M = M^{-1}HM \\ \hat{H}_n &\triangleq \hat{H}_n^+ + \hat{H}_n^- = M^{-1}\hat{H}^+M + M^{-1}\hat{H}^-M = M^{-1}\hat{H}M \end{aligned}$$

A partir da equação (1.26) e pela construção de M , podemos escrever que:

$$\begin{aligned} M^{-1}(\hat{H}^+ + \hat{H}^-)M1_g &\leq 0 \\ \hat{H}_n1_g &\leq 0 \end{aligned} \quad (1.27)$$

A relação (1.27) é equivalente a:

$$\mu_\infty(\hat{H}_n) \leq 0 \quad (1.28)$$

Pelo item (iv) da propriedade (1.3), se a relação (1.18) é satisfeita, os autovalores de H_n terão todos suas partes reais não-positivas. Como H_n é similar de H , tem-se que a dinâmica induzida no espaço quociente ($\mathcal{X}/\text{Ker } G$):

$$\dot{y}(t) = Hy(t) \quad , \quad \text{com } y(t) = Gx(t)$$

é estável se a relação (1.23) é satisfeita. Em particular, se esta é estritamente verificada temos garantida a estabilidade assintótica.

Como no caso anterior, a invariância positiva de $S(G, w_M, w_m)$ é equivalente ao não crescimento, ao longo das trajetórias do sistema, da função semi-definida positiva:

$$v(x) = \max_{i=1}^g \left\{ \max \left(\frac{|(Gx)_i|}{(w_M)_i}, \frac{|(Gx)_i|}{(w_m)_i} \right) \right\}$$

No decorrer do trabalho, as equações do tipo (1.8), (1.14) e (1.22) serão referenciadas como *primeira relação de invariância positiva* e as relações (1.9), (1.14) e (1.22), como *segunda relação de invariância positiva*. Na observação a seguir, será visto como ficam estas relações para o caso de termos um sistema discreto no tempo.

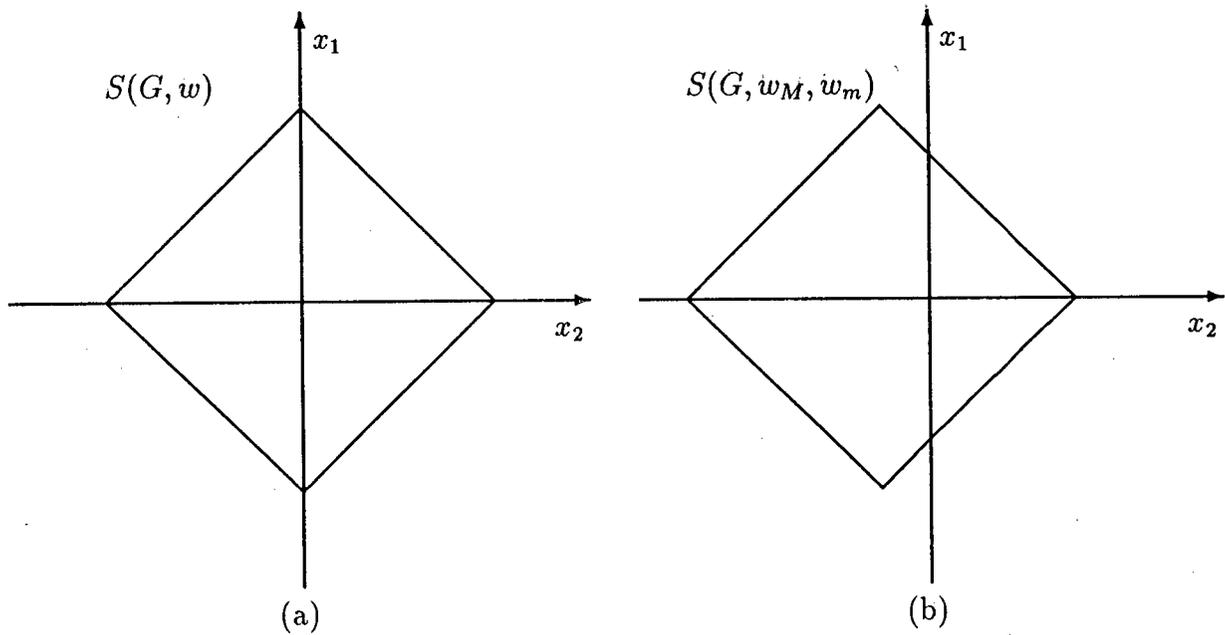


Figura 1.4: (a) Poliedro simétrico; (b) Poliedro dissimétrico

Observação 1.1 (Invariância Positiva no Caso Discreto) : Para o caso de um sistema discreto no tempo dado por

$$x(k+1) = A_0 x(k) \quad (1.29)$$

as relações de invariância positiva para domínios poliedrais são semelhantes as vistas para o caso do sistema ser contínuo no tempo (1.3). A primeira relação de invariância é a mesma, havendo uma pequena modificação na segunda relação de invariância positiva. O estudo detalhado para este caso pode ser encontrado em [2] [4] [5] [5] [29]. Vejamos, resumidamente, como ficam estas relações para cada um dos tipos de poliedros vistos acima.

- Poliedros Convexos $R(Q, \rho)$:

$$\mathcal{H}Q = QA_0 \quad (1.30)$$

$$\mathcal{H}\rho \leq \rho \quad (1.31)$$

com $\mathcal{H}_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$.

- Poliedros Simétricos $S(G, w)$:

$$HG = GA_0 \quad (1.32)$$

$$|H|w \leq w \quad (1.33)$$

com $H_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$ e onde $|H|$ corresponde à uma matriz cujas componentes são iguais ao módulo das componentes de H .

No caso contínuo, foi visto que a relação (1.14) é equivalente a que todos os autovalores de H sejam estáveis. Para mostrar este fato, pode-se utilizar o conceito de M -matriz ou as propriedades da norma logarítmica de uma matriz. Analogamente ao caso contínuo, será mostrado agora que, para o caso discreto, a segunda relação de invariância positiva (1.33) é equivalente a que todos os autovalores de H sejam estáveis, ou seja, estejam contidos dentro do círculo de raio unitário no plano complexo. Utilizaremos para isto o conceito e as propriedades da norma infinita de uma matriz, $\|\cdot\|_\infty$. Dada uma matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ temos que:

$$\|P\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n \{ |p_{ij}| \} \quad (1.34)$$

e $\|P\|_\infty \geq \rho(P) \triangleq \max\{|\lambda_i(P)|; 1 \leq i \leq n\}$, onde ρ é o raio espectral de P [19] e λ_i é um dos autovalores da matriz P .

Definindo $M = \text{diag}(w_i)$, e como $w_i > 0$, podemos escrever que:

$$|H| = |MH_nM^{-1}| = M|H_n|M^{-1} \quad (1.35)$$

Aplicando a equação (1.35) em (1.33) temos que:

$$|H_n|1_g \leq 1_g \quad (1.36)$$

mas pela definição de norma infinita, (1.36) é equivalente a:

$$\|H_n\|_\infty \leq 1 \quad (1.37)$$

e, conseqüentemente $\rho(H) \leq \|H_n\|_\infty \leq 1$, e como H_n é similar de H , temos que todos os autovalores de H estão contidos no círculo de raio unitário no plano complexo.

• Poliedros Dissimétricos $S(G, w_M, w_m)$:

$$HG = GA_0 \quad (1.38)$$

$$\hat{H} \begin{bmatrix} w_M \\ w_m \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} w_M \\ w_m \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

$$\text{com } \hat{H} = \begin{bmatrix} H^+ & H^- \\ H^- & H^+ \end{bmatrix} \text{ e } \begin{cases} H_{ij}^+ \triangleq \begin{cases} H_{ij} & \text{se } H_{ij} > 0 \\ 0 & \text{se } H_{ij} \leq 0 \end{cases} \\ H_{ij}^- \triangleq \begin{cases} 0 & \text{se } H_{ij} \geq 0 \\ -H_{ij} & \text{se } H_{ij} < 0 \end{cases} \end{cases}, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Da mesma maneira que no caso contínuo, só que agora utilizando o conceito de norma infinita, é possível mostrar que a relação (1.39) implica que todos os autovalores de H estejam contidos dentro do círculo de raio unitário e, portanto, sejam estáveis.

1.5 Utilização da Propriedade de Invariância Positiva no Problema de Regulação sob Restrições nas Variáveis de Controle (PRRVC)

Nesta seção será analisado o *problema de regulação sob restrições nas as variáveis de controle*, que será abreviado por PRRVC. Em particular, a lei de controle considerada será a realimentação de estados. Neste caso, a solução do problema pode ser obtida pela construção de uma matriz de realimentação de estados que garanta a invariância positiva de um domínio poliedral no espaço de estados. A abordagem do problema será feita considerando-se o caso contínuo, sendo que a extensão para o caso discreto é imediata. As diferenças básicas entre o caso contínuo e o discreto estão na segunda relação de invariância positiva (vide observação 1.1) e na região de estabilidade no plano complexo (no caso contínuo deve ser considerado o círculo de raio unitário). Para isto, consideremos o seguinte sistema linear, contínuo e invariante no tempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.40)$$

onde $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ e $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$, $x \in \mathcal{X}$, $u \in \mathcal{U}$, $\mathcal{X} \triangleq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} \triangleq \mathbb{R}^m$ e o par (A, B) é suposto ser estabilizável.

O vetor de controle, u , está submetido a restrições lineares, que definem o seguinte poliedro simétrico, Ω , no espaço de controle:

$$\Omega = \{u \in \mathbb{R}^m ; -u_{min} \leq u \leq u_{max}\} \quad (1.41)$$

com $(u_{max})_i, (u_{min})_i > 0$ para $i = 1, \dots, m$ (todas as componentes de u_{max} e u_{min} são positivas e diferentes de zero).

Consideremos também um conjunto de estados iniciais admissíveis do tipo poliedral para o sistema (1.40):

$$D_0(K, w) = \{x \in \mathbb{R}^n ; Kx \leq w\} \quad (1.42)$$

Seja agora a lei de controle por realimentação de estados:

$$u(t) = Fx(t) \quad , \quad \text{com } F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (1.43)$$

Temos dessa maneira, um poliedro correspondente no espaço de estados, $S(F, u_{max}, u_{min})$, dado por:

$$S(F, u_{max}, u_{min}) = \{x \in \mathbb{R}^n : -u_{min} \leq Fx \leq u_{max}\} \quad (1.44)$$

ou, equivalentemente, em notação geométrica:

$$S(F, u_{max}, u_{min}) = F^{-1}\Omega \quad (1.45)$$

Quando sujeito à restrições de entrada do tipo acima (1.41), o sistema (1.40) sob a lei de controle dada por (1.43) é chamado de um *sistema dinâmico localmente linear*. O modelo linear em malha fechada:

$$\dot{x} = (A + BF)x(t) \quad (1.46)$$

é válido apenas para estados pertencentes à $S(F, u_{max}, u_{min})$. Fora de $S(F, u_{max}, u_{min})$ um vetor de entradas admissíveis pode ser aplicado usando uma lei de controle do tipo saturação [28] [50], formulada como:

$$u_i = (sat(Fx))_i = \begin{cases} (u_{max})_i & , \text{ se } (Fx)_i > (u_{max})_i \\ (Fx)_i & , \text{ se } -(u_{min})_i \leq (Fx)_i \leq (u_{max})_i \\ -(u_{min})_i & , \text{ se } (Fx)_i < -(u_{min})_i \end{cases} \quad (1.47)$$

o que implicará em um comportamento não linear do sistema. Neste caso, a análise e a garantia de estabilidade do sistema em malha fechada não são triviais [42] [50] [51].

Neste trabalho o interesse está concentrado no cálculo de uma *lei de controle linear* do tipo (1.43) tal que as restrições (1.41) sejam respeitadas sem a saturação do sinal de controle e o sistema em malha fechada seja assintoticamente estável. Para tanto, devemos calcular uma matriz de realimentação de estados, F , tal que para todo estado inicial, $x(0) = x_0$, pertencente a um domínio de estados iniciais admissíveis, $x_0 \in D_0$, o vetor de estados seja levado para a origem (ponto de equilíbrio do sistema) linearmente e sua trajetória esteja confinada em $S(F, u_{max}, u_{min})$. A resolução do problema pode então ser obtida se :

- Os autovalores do sistema em malha fechada, $\sigma(A + BF)$, estão contidos na região de estabilidade do plano complexo.
- Existe um conjunto E , positivamente invariante em relação à (1.46), tal que:

$$D_0 \subseteq E \subseteq S(F, u_{max}, u_{min})$$

Na literatura são encontradas basicamente duas abordagens para a construção do domínio E :

1^a) E é considerado como sendo D_0 [4][56].

A solução neste caso, consiste em encontrar um par (H, F) que verifique simultaneamente as equações de invariância positiva:

$$HD_0 = D_0(A + BF) \quad (1.48)$$

$$\tilde{H} \begin{bmatrix} u_{max} \\ u_{min} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (1.49)$$

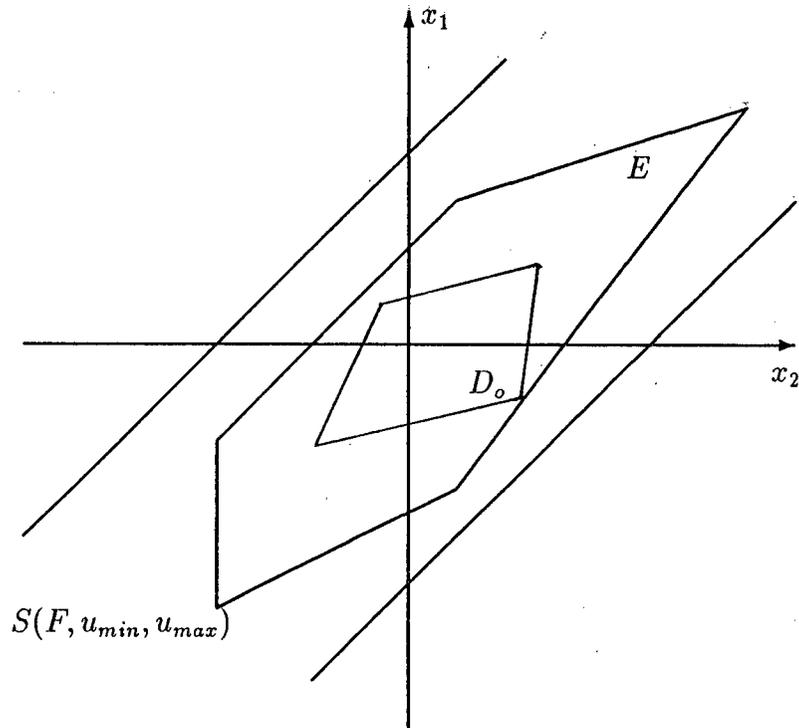


Figura 1.5: Domínios D_0 , E , $S(F, u_{max}, u_{min})$

com a restrição adicional de que $D_0(K, w) \subseteq S(F, u_{max}, u_{min})$. Isto pode ser feito utilizando-se algoritmos de otimização, particularmente de programação linear, haja visto que as equações matriciais envolvidas são lineares.

2^a) E é considerado como sendo $S(F, u_{max}, u_{min})$ [9][14] [29].

Sendo E considerado como $S(F, u_{max}, u_{min})$, devemos pela proposição 1.3 encontrar uma matriz F e uma matriz H , tais que sejam satisfeitas as equações de invariância positiva:

$$HF = F(A + BF) \quad (1.50)$$

$$\tilde{H} \begin{bmatrix} u_{max} \\ u_{min} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (1.51)$$

e além disso que garantam que $D_0(K, w) \subseteq S(F, u_{max}, u_{min})$.

Observemos que a equação (1.50) é não linear, uma vez que suas incógnitas são os elementos de H e F . Assim, uma solução para o problema pode ser obtida formulando-se um problema de otimização não linear [9].

Em particular, no presente trabalho será explorada a segunda abordagem.

Pelo lema (1.1), a igualdade (1.50) pode ser interpretada em termos da $(A + BF)$ -invariância do $\mathcal{Ker} F$ [14]. Se F satisfaz esta propriedade, podemos escrever a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} \lambda_i I - A & -B \\ F & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{com } w_i = Fv_i \quad (1.52)$$

As frequências λ_i do sistema $S(A, B, F)$ e as direções v_i associadas são necessariamente autovalores e autovetores generalizados do sistema em malha aberta, pois:

$$(\lambda_i I - A)v_i - Bw_i = (\lambda_i I - A)v_i - BFv_i = 0 \quad (1.53)$$

e como $v_i \in \mathcal{Ker} F$,

$$(\lambda_i I - A)v_i = 0 \quad (1.54)$$

Assim, a invariância positiva de $S(F, u_{max}, u_{min})$ só pode ser garantida com estabilidade, se mantivermos ao menos $(n - m)$ autovalores estáveis em malha aberta no sistema em malha fechada, pois esta é a dimensão mínima do $\mathcal{Ker} F$.

Em [14] preocupou-se, inicialmente, em modificar, através da realimentação de estados, apenas os autovalores instáveis do sistema (1.40). A autoestrutura a ser posicionada deve então garantir conjuntamente as relações (1.48), (1.49) e a estabilidade do sistema em malha fechada (1.46). Considerando-se (r) como o número de autovalores instáveis do sistema, foram analisados dois casos:

1. $r \leq m$: é garantida a invariância positiva de $S(F, u_{max}, u_{min})$ conjuntamente com a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada. Neste caso a dimensão de $\mathcal{Ker} F$ é igual a $(n - r)$.
2. $r > m$: neste caso não é possível garantir a invariância positiva de $S(F, u_{max}, u_{min})$ e a estabilidade do sistema conjuntamente. Então, uma técnica alternativa à solução consiste em garantir a invariância positiva de um poliedro $S(\mathcal{F}, u_{max}, u_{min}) \subset S(F, u_{max}, u_{min})$, que será considerado um conjunto de condições iniciais admissíveis para o modelo linear (1.46). Neste caso, podemos construir um poliedro $S(\mathcal{F}, u_{max}, u_{min})$ que tenha $(n - m)$ pares de faces determinadas pelas linhas de F e é não limitado em $(n - r)$ direções associadas a autovalores estáveis em malha aberta [14].

De uma forma mais genérica, podemos modificar não apenas os pólos instáveis como também alguns pólos estáveis em malha aberta a fim de obtermos uma melhoria na dinâmica do sistema. Chamaremos estes pólos estáveis que serão modificados de pólos "pseudo-estáveis". Assim (r) será o número de pólos instáveis mais o número de pólos "pseudo-estáveis".

Veremos então, no capítulo 3 que, para resolver o problema de invariância positiva de um poliedro $S(F, u_{max}, u_{min})$ ou $S(\mathcal{F}, u_{max}, u_{min})$, depara-se com um problema de posicionamento parcial de autoestrutura, onde $(n - r)$ autovetores e autovalores em malha aberta serão mantidos no sistema em malha fechada.

1.6 Conclusão

Restrições de ordem tecnológica e de segurança em sistemas físicos requerem que a trajetória do sinal de controle esteja contida em uma dada região \mathcal{D} no espaço de controle. Esta região, em geral, toma a forma poliedral. A propriedade que garante o confinamento de uma trajetória a um dado conjunto é chamada de invariância positiva. Assim sendo, analisou-se neste capítulo a propriedade de invariância positiva de domínios poliedrais.

Para que um conjunto seja positivamente invariante em relação a um dado sistema linear, deve-se satisfazer duas relações matriciais, dadas genericamente por (1.8) e (1.9).

Particularmente para o caso em que a lei de controle é do tipo realimentação de estados, definiu-se o problema de regulação sob restrições nas variáveis de controle, PRRVC. Neste caso, o poliedro delimitado pelas restrições corresponde a um poliedro no espaço de estados, $S(F, u_{min}, u_{max})$. A solução para este problema pode ser obtida garantindo-se a estabilidade em malha fechada do sistema e a construção de um domínio positivamente invariante que contenha um domínio de estados iniciais admissíveis D_o , contido em $S(F, u_{max}, u_{min})$.

Neste trabalho será explorada a abordagem pela qual a lei de controle é projetada de forma a fazer o poliedro $S(F, u_{max}, u_{min})$ positivamente invariante em relação ao sistema em malha fechada. Para isto, se faz necessária a $(A + BF)$ -invariância do $\text{Ker } F$. Logo, a resolução da 1ª relação de invariância positiva, neste caso, é equivalente a manutenção, no sistema em malha fechada, de ao menos $(n - m)$ autovalores do sistema em malha aberta. Este fato sugere a idéia de um posicionamento parcial de autoestrutura. Em alguns casos, a invariância positiva de $S(F, u_{max}, u_{min})$ não pode ser obtida conjuntamente com a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada, devendo então, ser construído um poliedro limitado em um número maior de direções.

O próximo capítulo será dedicado ao estudo do problema de posicionamento parcial de autoestrutura, o qual servirá de base para os algoritmos a serem apresentados nos capítulos 3 e 4.

Capítulo 2

Sobre Posicionamento Parcial de Autoestrutura

2.1 Introdução

As técnicas de posicionamento de autoestrutura por realimentação de estados e de saída vêm sendo, através dos anos, aplicadas com sucesso em vários problemas de controle de sistemas lineares. Em geral, quando utiliza-se este tipo de abordagem, a estabilização e/ou melhora do comportamento dinâmico do sistema é obtida através do deslocamento de todos os pólos do sistema, associando-se a estes, explícita ou implicitamente, um novo conjunto de autovetores [17][38]. Para sistemas de ordem elevada o cálculo de matrizes de realimentação de estados que façam o posicionamento de todos os pólos do sistema torna-se muito oneroso e pouco confiável computacionalmente [44]. Assim, no caso em que existem poucos pólos instáveis ou de dinâmica não satisfatória em malha aberta, torna-se interessante trabalhar com algoritmos que posicionem apenas estes pólos, deixando a autoestrutura restante do sistema inalterada, caracterizando assim, um posicionamento parcial de autoestrutura.

Outra motivação para o estudo do posicionamento parcial de autoestrutura, como foi visto no capítulo 1, é no tratamento do problema de regulação sob restrições de controle utilizando a propriedade de invariância positiva. Neste caso, utiliza-se uma lei do tipo realimentação de estados para a construção de um poliedro do tipo $S(F, u_{min}, u_{max})$ positivamente invariante em relação ao sistema em malha fechada. A satisfação da primeira relação de invariância positiva (1.50) requer a manutenção em malha fechada de um determinado número de autovalores e autovetores do sistema em malha aberta [14] [26].

Embora importante para a solução dos problemas acima, poucos trabalhos abordam diretamente o posicionamento parcial de autoestrutura. Dentre eles podemos citar o trabalho de

Saad [44], que aplica um algoritmo por projeção ao caso monovariável, e o artigo de Nichols [40], que faz uma generalização do algoritmo anterior ao caso multivariável e considera o problema de sensibilidade dos autovalores do sistema a variações paramétricas. Além disso, a formalização teórica e a caracterização algébrica da solução do problema não são devidamente abordadas nesses trabalhos.

O objetivo do presente capítulo será então, tratar formalmente o problema de posicionamento parcial de autoestrutura e mostrar como sua solução algébrica pode ser obtida pela utilização de um sistema de ordem reduzida [25] [27]. Na seção 2, a definição do posicionamento parcial e uma condição necessária e suficiente para sua obtenção serão apresentadas segundo a abordagem geométrica de Wonham [58]. A seguir, na seção 3, será apresentado um algoritmo matricial. A idéia básica deste algoritmo é o de projeção a nível geométrico, o que possibilita realizar os cálculos utilizando-se um sistema de ordem reduzida. Na seção 4, será mostrado como é possível determinar a dinâmica do sinal de controle por um posicionamento parcial de autoestrutura. Por fim, será apresentado um exemplo ilustrativo de aplicação do algoritmo proposto.

2.2 Aspectos Geométricos

Nesta seção formalizaremos o conceito de posicionamento parcial de autoestrutura utilizando elementos da teoria de controle geométrico. A idéia básica a ser explorada é a de particionar o espaço de estados em dois subespaços complementares e garantir que o espectro da restrição do sistema a um destes subespaços seja mantido inalterado pela aplicação da realimentação de estados.

Consideremos novamente o sistema linear, contínuo e invariante no tempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.1)$$

onde $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ e $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$, $x \in \mathcal{X}$, $u \in \mathcal{U}$, $\mathcal{X} \triangleq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} \triangleq \mathbb{R}^m$.

Seja o espectro de A dado pelo conjunto simétrico em relação ao eixo real: $\sigma(A) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$. Associado a $\sigma(A)$, temos um conjunto de autovetores generalizados, linearmente independentes, $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

Seja agora uma lei de controle por realimentação de estados, $u(t) = Fx(t)$, de forma que o sistema em malha fechada seja dado por:

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) \quad (2.2)$$

Definição 2.1 (Posicionamento Parcial de Autoestrutura) : *Se para um subespaço $\mathcal{V}_o \subset \mathcal{X}$, de dimensão $(n - r)$ e A - invariante, o espectro da restrição de A ao subespaço \mathcal{V}_o e os autovetores de A contidos em \mathcal{V}_o , não se alteram com a aplicação de F , diz-se então, que F posiciona parcialmente a autoestrutura do sistema em malha fechada com relação a \mathcal{V}_o .*

□

Em outras palavras, F é tal que o sistema (2.2) tem seu espectro dado pelo conjunto simétrico em relação ao eixo real, $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$, e seus autovetores correspondentes são dados pelo conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_{n-r}, v_1, \dots, v_r\}$, ou seja:

$$\sigma(A | \mathcal{V}_o) = \sigma(A + BF | \mathcal{V}_o) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}\} \quad (2.3)$$

$$AV_o = (A + BF)V_o = V_o\Lambda_o \quad (2.4)$$

onde $V_o = [u_1, u_2, \dots, u_{n-r}]$ e Λ_o é a representação matricial do mapa $A|_{\mathcal{V}_o}$ na forma canônica de Jordan.

A partir da definição apresentada acima, podemos enunciar uma proposição que fornece uma condição necessária e suficiente para o posicionamento de autoestrutura.

Proposição 2.1 : *Para \mathcal{V}_o como na definição (2.1), F posiciona parcialmente a autoestrutura de A com relação a \mathcal{V}_o se e somente se $(BF) | \mathcal{V}_o = 0$.*

Demonstração:

Necessidade:

Para que $(A + BF)V_o = AV_o = \Lambda_o V_o$ devemos ter necessariamente $BFV_o = 0$.

Suficiência: Notemos inicialmente que se $(BF)|_{\mathcal{V}_o} = 0$, \mathcal{V}_o é também $(A + BF)$ - invariante. Considerando a representação do sistema realimentado em uma base conveniente, $(A + BF)$ pode ser escrita como:

$$A + BF = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (BF)_{11} & (BF)_{12} \\ 0 & (BF)_{22} \end{bmatrix}$$

onde A_{11} e $(BF)_{11}$ são respectivamente as representações matriciais de $A | \mathcal{V}_o$ e $(BF) | \mathcal{V}_o$ enquanto A_{22} e $(BF)_{22}$ são respectivamente as representações matriciais dos mapas induzidos por A e BF no espaço quociente $\mathcal{X}/\mathcal{V}_o$. Se $(BF) | \mathcal{V}_o = 0$ temos que:

$$A + BF = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} + BF_{12} \\ 0 & A_{22} + BF_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\sigma(A + BF) &= \sigma(A_{11}) \dot{\cup} \sigma(A_{22} + BF_{22}) \\ \sigma(A | \mathcal{V}_o) &= \sigma(A + BF | \mathcal{V}_o) = \sigma(A_{11})\end{aligned}$$

Sejam agora V_o e Λ_o como definidos anteriormente, temos então que: $AV_o = V_o\Lambda_o$. E, como $(BF)|_{\mathcal{V}_o} = 0$, $(A + BF)V_o = V_o\Lambda_o$. Assim fica caracterizado o posicionamento parcial de autoestrutura de acordo com a definição (2.1).

□

Consideraremos a partir de agora, sem perda de generalidade, que B é mônico, ou seja, suas representações matriciais são de posto completo. Neste caso, é válida a seguinte observação.

Observação 2.1 : Se B é mônico uma condição equivalente a $(BF) | \mathcal{V}_o = 0$ é $\mathcal{V}_o \subseteq \text{Ker } F$.

□

Formularemos a seguir uma proposição que garantirá a livre alocação de parte do espectro do mapa induzido por A no espaço quociente $\mathcal{X}/\mathcal{V}_o$ no caso particular de um posicionamento parcial de autoestrutura. Esta proposição dará então, a condição para a livre alocação de autoestrutura de um sistema de ordem reduzida, associado ao mapa induzido por A no espaço quociente $\mathcal{X}/\mathcal{V}_o$, a ser vista nas seções seguintes. Este resultado pode ser visto como uma variação do resultado obtido em [46] relativo à alocação do espectro de um sistema qualquer.

Proposição 2.2 : Seja \mathcal{V}_o um subespaço A -invariante e o subespaço $\delta \triangleq (\mathcal{V}_o + \langle A | \text{Im} B \rangle)$. Então, para uma F tal que $\mathcal{V}_o \subseteq \text{Ker } F$, o espectro de $(A + BF)$ se decompõe em:

$$\sigma(A + BF) = \sigma(A | \mathcal{V}_o) \dot{\cup} \sigma(A + BF | \delta / \mathcal{V}_o) \dot{\cup} \sigma(A + BF | \mathcal{X} / \delta)$$

onde, o espectro de $(A + BF)$ "entre" δ e \mathcal{V}_o , $\sigma(A + BF | \delta / \mathcal{V}_o)$, é livremente alocável por F e o espectro de $(A + BF)$ "entre" \mathcal{X} e δ , $\sigma(A + BF | \mathcal{X} / \delta)$ é fixo.

Demonstração:

Notemos inicialmente que δ é $(A + BF)$ -invariante, pois tanto \mathcal{V}_o quanto $\langle A | \text{Im} B \rangle$ o são.

Como $\text{Im} B \subset \delta$, em uma base conveniente temos $B = \begin{bmatrix} B_\delta \\ O \end{bmatrix}$. Consideremos então $(A | \delta)$. Definindo $P_\delta : \delta \rightarrow \delta / \mathcal{V}_o$ como a projeção canônica de δ em δ / \mathcal{V}_o e $\overline{B}_\delta \triangleq P_\delta B_\delta$ temos:

$$\delta / \mathcal{V}_o = P_\delta \delta = P_\delta (\mathcal{V}_o + \langle A | \text{Im} B \rangle)$$

Por definição, $P_\delta \mathcal{V}_o = 0$, dessa forma:

$$P_\delta(\mathcal{V}_o + \langle A | \text{Im} B \rangle) = P_\delta(\langle (A|\delta) | \text{Im} B_\delta \rangle) = P_\delta(\text{Im} B_\delta + (A|\delta)\text{Im} B_\delta + \dots + (A|\delta)^{n-1}\text{Im} B_\delta)$$

Como $P_\delta(A|\delta) = (\overline{A|\delta})P_\delta$ (equação de projeção canônica) temos que:

$$\delta/\mathcal{V}_o = \text{Im}(P_\delta B_\delta) + (\overline{A|\delta})\text{Im}(P_\delta B_\delta) + \dots + (\overline{A|\delta})^{n-1}\text{Im}(P_\delta B_\delta) = \langle \overline{A|\delta} | \text{Im} \overline{B}_\delta \rangle$$

Logo $(\overline{A|\delta}, \overline{B}_\delta)$ é controlável e, portanto, $\sigma(\overline{A|\delta} + \overline{B}_\delta \overline{F}_\delta)$ é livremente alocável por $\overline{F}_\delta : \delta/\mathcal{V}_o \rightarrow \mathcal{U}$.

Mas, definindo-se $F : \delta \rightarrow \mathcal{U}$, $F_\delta \triangleq \overline{F}_\delta P_\delta$, tem-se:

$$(\overline{A|\delta} + \overline{B}_\delta \overline{F}_\delta)P_\delta = \overline{A|\delta}P_\delta + \overline{B}_\delta \overline{F}_\delta P_\delta = P_\delta(A|\delta) + P_\delta B_\delta F_\delta = P_\delta(A|\delta + B_\delta F_\delta)$$

Portanto $(\overline{A|\delta} + \overline{B}_\delta \overline{F}_\delta) = \overline{(A|\delta + B_\delta F_\delta)}$.

Seja agora $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$, tal que $F|\delta = F_\delta$. Temos que $\mathcal{V}_o \subseteq \text{Ker} F_\delta$, pois $F_\delta \mathcal{V}_o = \overline{F}_\delta P_\delta \mathcal{V}_o = 0$. Portanto, pela proposição (2.1) temos:

$$\sigma((A + BF)|\delta) = \sigma(A|\mathcal{V}_o) \dot{\cup} \sigma(\overline{A|\delta + B_\delta F_\delta})$$

Consideremos agora a projeção canônica $P : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}/\delta$:

$$(\overline{A + BF})P = P(A + BF) = PA = \overline{A}_{\mathcal{X}/\delta}P$$

com $\overline{A}_{\mathcal{X}/\delta}$ sendo o mapa induzido por A no espaço quociente \mathcal{X}/δ , pois $\text{Im}(BF) \subset \text{Im} B \subset \delta$ e $P\delta = 0$. Assim $\sigma(\overline{A + BF}) = \sigma(\overline{A}_{\mathcal{X}/\delta})$ para toda F . Portanto, como $\sigma(\overline{A|\delta + B_\delta F_\delta}) = \sigma(A + BF \parallel \delta/\mathcal{V}_o)$ e $\sigma(\overline{A + BF}) = \sigma(A + BF \parallel \mathcal{X}/\delta)$ e pela proposição (2.1):

$$\sigma(A + BF) = \sigma(A|\mathcal{V}_o) \dot{\cup} \sigma(A + BF \parallel \delta/\mathcal{V}_o) \dot{\cup} \sigma(A + BF \parallel \mathcal{X}/\delta)$$

com $\sigma(A + BF \parallel \delta/\mathcal{V}_o)$ livremente alocável por F e $\sigma(A + BF \parallel \mathcal{X}/\delta)$ fixo, pois denota um conjunto de autovalores não controláveis. □

A partir da proposição acima podemos concluir o seguinte:

1. Se o sistema (A, B) é controlável, $\delta = \mathcal{X} = \langle A | \text{Im} B \rangle$ e o espectro do mapa induzido por A em $\mathcal{X}/\mathcal{V}_o$, $\overline{A}_{\mathcal{X}/\mathcal{V}_o}$, é livremente alocável por F .
2. Se (A, B) é não-controlável podemos ter dois casos:

- (a) Os modos não controláveis estão todos contidos em $\sigma(A|\mathcal{V}_o)$. Neste caso, o espectro do mapa induzido por A em $\mathcal{X}/\mathcal{V}_o$, é livremente alocável por F .
- (b) Existem modos não controláveis em $\sigma(\bar{A}_{\mathcal{X}/\mathcal{V}_o})$. Assim, $\sigma(A+BF \parallel \delta/\mathcal{V}_o)$ é livremente alocável por F e $\sigma(A+BF \parallel \mathcal{X}/\delta)$ é fixo. Entretanto, os autovetores associados a $\sigma(A+BF \parallel \mathcal{X}/\delta)$ podem ser realocados [38].

2.3 Caracterização Algébrica

Apresentaremos agora um resultado que mostra a equivalência entre o posicionamento parcial de autoestrutura e a verificação de uma equação de projeção canônica.

Proposição 2.3 *Uma matriz F de retroação de estados posiciona parcialmente a autoestrutura do sistema (2.1) com a relação a \mathcal{V}_o se e somente se existe uma matriz $\Sigma \in \mathbb{R}^{r \times r}$ tal que:*

$$\Sigma \mathcal{F} = \mathcal{F}(A + BF) \quad (2.5)$$

com $\mathcal{V}_o \triangleq \text{Ker} \mathcal{F} \subset \text{Ker} F$.

Demonstração:

Necessidade: Pela proposição 2.1 e considerando a observação 2.1, se F posiciona parcialmente a autoestrutura de A , então existe um subespaço A – invariante, $\mathcal{V}_o \subseteq \text{Ker} F$. Dessa forma, \mathcal{V}_o é também $(A + BF)$ – invariante. Definindo $\mathcal{V}_o \triangleq \text{Ker} \mathcal{F}$, pelo lema (1.1) existe Σ tal que a relação (2.5) é satisfeita.

Suficiência: Se existe uma matriz Σ tal que a relação (2.5) é satisfeita, temos, pelo lema (1.1), que $\mathcal{V}_o \triangleq \text{Ker} \mathcal{F}$ é $(A + BF)$ – invariante. Portanto, como $\mathcal{V}_o \subseteq \text{Ker} F$ temos a condição para o posicionamento parcial de autoestrutura dada pela proposição (2.1) é satisfeita. \square

Observemos que se $\text{posto}(\mathcal{F})$ é completo, a equação (2.5) é uma equação de projeção canônica (vide apêndice A) onde: \mathcal{F} é a projeção canônica de \mathcal{X} em $\mathcal{X}/\mathcal{V}_o$ e Σ é o mapa induzido por \mathcal{F} no espaço quociente $\mathcal{X}/\mathcal{V}_o$.

Como $\text{Ker} \mathcal{F} \subset \text{Ker} F$, é sempre possível escolher $\mathcal{F} = \begin{bmatrix} F \\ Q \end{bmatrix}$, sendo $Q \in \mathbb{R}^{(r-m) \times n}$. No caso particular em que $\mathcal{V}_o = \text{Ker} F$, podemos formular o seguinte corolário:

Corolário 2.1 : *Existe $H \in \mathbb{R}^{m \times m}$ tal que a igualdade:*

$$HF = F(A + BF) \quad (2.6)$$

seja satisfeita, se e somente se F posiciona parcialmente a autoestrutura de A com relação a \mathcal{V}_o .

□

Como visto no capítulo 1, as equações (2.5) e (2.6) aparecem explicitamente quando desejamos construir poliedros do tipo $S(\mathcal{F}, u_{max}, u_{min})$, positivamente invariantes em relação ao sistema em malha fechada, contidos no domínio de comportamento linear do sistema, $S(\mathcal{F}, u_{max}, u_{min}) \subseteq S(F, u_{max}, u_{min})$.

Considerando agora o modelo linear em malha fechada (2.2) e a equação (2.6) e pré-multiplicando-se (2.2) por F temos que:

$$\dot{u}(t) = Hu(t) \quad (2.7)$$

A equação acima mostra que, no caso particular em que $\mathcal{V}_o = \text{Ker } F$, a dinâmica da variável de controle é completamente definida pelo sistema autônomo (2.7). Dessa forma, algumas propriedades desejáveis para a dinâmica da variável de controle podem ser obtidas por uma escolha apropriada do par (H, F) . Também é possível determinar uma equação dinâmica similar no caso $\mathcal{V}_o \subset \text{Ker } F$. Na seção 5, veremos em detalhes como satisfazer especificações sobre o sinal de controle a partir de um posicionamento parcial de autoestrutura. Antes disso, será visto na seção seguinte, um algoritmo matricial para a síntese de leis de controle do tipo realimentação de estados que posicionem parcialmente a autoestrutura do sistema a ser controlado.

2.4 Aspectos Algorítmicos

A idéia básica do algoritmo que será apresentado é evidenciar $A|_{\mathcal{V}_o}$ e o mapa induzido no espaço $\mathcal{X}/\mathcal{V}_o$, \bar{A} , pela escolha de uma base apropriada para o espaço de estados. Logo após, faz-se um posicionamento de autoestrutura sobre um sistema de ordem reduzida.

2.4.1 Obtenção de um Sistema de Ordem Reduzida

Seja uma matriz $U = [U_o | U_r]$ tal que suas colunas formem uma base para o espaço de estados, sendo: $U_o \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ uma base para o subespaço \mathcal{V}_o e $U_r \in \mathbb{R}^{n \times r}$ uma base para um subespaço \mathcal{V}_r tal que $\mathcal{V}_o \oplus \mathcal{V}_r = \mathcal{X} \triangleq \mathbb{R}^n$. \mathcal{V}_r é um isomorfismo do espaço quociente $\mathcal{X}/\mathcal{V}_o$. Assumamos agora que deseja-se fazer um posicionamento parcial da autoestrutura do sistema com relação a \mathcal{V}_o .

Seja então a matriz $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a inversa da matriz U :

$$J = [U_o \mid U_r]^{-1} = \begin{bmatrix} J_o \\ J_r \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Fazendo uma mudança de base no sistema (2.1) [18], a partir da matriz U temos que o vetor de estados na nova base é dado por

$$z = \begin{bmatrix} J_o \\ J_r \end{bmatrix} x = Jx \quad (2.9)$$

A nova representação do sistema na base gerada pelas colunas da matriz U fica:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_o(t) \\ \dot{z}_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_o & A_2 \\ 0 & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_o(t) \\ z_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_o \\ B_r \end{bmatrix} u(t) \quad (2.10)$$

onde:

- z_o é a projeção do vetor de estados x no subespaço \mathcal{V}_o ao longo do subespaço \mathcal{V}_r ;
- z_r é a projeção do vetor de estados x no subespaço \mathcal{V}_r ao longo do subespaço \mathcal{V}_o ;
- $A_o \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ é uma representação matricial do mapa $A \mid \mathcal{V}_o$;
- $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ é uma representação matricial do mapa induzido por A no espaço quociente $\mathcal{X}/\mathcal{V}_o$; e
- $B_U \triangleq \begin{bmatrix} B_o \\ B_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_o \\ J_r \end{bmatrix} B$.

Nota-se que $\sigma(A) = \sigma(A_o) \cup \sigma(A_r)$ e que a dinâmica de z_r está desacoplada de z_o , dependendo apenas de A_r , que por sua vez está associada aos pólos que serão modificados.

Assumindo-se, sem perda de generalidade, que o posto de B é completo, para que $\mathcal{V}_o \subseteq \text{Ker } F$, devemos ter:

$$F_U = F[U_o \mid U_r] = [0_{m \times (n-r)} \mid F_r] \quad (2.11)$$

onde F_U é a representação matricial de F na base dada pelas colunas de U .

Logo, o sistema em malha fechada na base dada fica:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_o(t) \\ \dot{z}_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_o & A_2 + B_o F_r \\ 0 & A_r + B_r F_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_o(t) \\ z_r(t) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Podemos então, isolar o seguinte *sistema de ordem reduzida* de interesse para o posicionamento parcial de autoestrutura:

$$\dot{z}_r(t) = A_r z_r(t) + B_r u(t) \quad (2.13)$$

onde $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ e $B_r \in \mathbb{R}^{r \times m}$. A partir de agora o sistema (2.2) será também referenciado como *sistema total* ou *sistema na base original*.

Pela proposição 2.2, se o sistema (2.1) é controlável, o sistema reduzido também o será. Nosso problema resume-se então, a posicionar arbitrariamente os pólos e autovetores do sistema reduzido utilizando-se uma matriz de realimentação de estados F_r , tal que em malha fechada tenhamos:

$$\dot{z}_r(t) = (A_r + B_r F_r) z_r(t) \quad (2.14)$$

No caso de termos algum modo não controlável no sistema reduzido, podemos ainda, conforme a observação 2, reposicionar o autovetor associado.

Deve-se salientar que qualquer matriz de base, $[U_o \mid U_r]$, que coloque o sistema na forma (2.10) pode ser utilizada. Particularmente, sugerimos a utilização de uma base ortonormal ou uma base de autovetores da seguinte maneira:

Base de Autovetores[18]:

Seja $V_o \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$, uma matriz cujas colunas são autovetores correspondentes aos autovalores que devem ficar inalterados pela aplicação da lei $u = Fx$. Dessa forma pode-se dizer que as colunas de V_o geram um subespaço A -invariante, \mathcal{V}_o . Seja agora uma matriz $V_r \in \mathbb{R}^{n \times r}$ cujas colunas são autovetores correspondentes aos autovalores a serem posicionados.

Utilizando a matriz $V = [V_o \mid V_r]$ para fazer uma transformação de similaridade que coloque a matriz de estados do sistema (2.1) na forma de canônica de Jordan, temos:

$$\Lambda = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} \Lambda_o & 0_{(n-r) \times r} \\ 0_{r \times (n-r)} & \Lambda_r \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

com $\Lambda_o \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ e $\Lambda_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$.

Seja:

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} G_o \\ G_r \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

onde G_o e G_r são matrizes cujas linhas são autovetores pela esquerda da matriz A .

Fazendo a transformação de variável

$$z = \begin{bmatrix} G_o \\ G_r \end{bmatrix} x \quad (2.17)$$

o sistema em malha aberta toma a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_o(t) \\ \dot{z}_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_o & 0 \\ 0 & \Lambda_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_o(t) \\ z_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_o \\ B_r \end{bmatrix} u(t) \quad (2.18)$$

$$\text{onde: } \begin{bmatrix} B_o \\ B_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_o \\ G_r \end{bmatrix} B$$

O sistema reduzido em malha fechada é dado por:

$$\dot{z}_r(t) = (\Lambda_r + B_r F_r) z_r(t) \quad (2.19)$$

e a matriz de retroação de estados na base original é dada por:

$$F = [0_{m \times (n-r)} \mid F_r] \begin{bmatrix} G_o \\ G_r \end{bmatrix} = F_r G_r \quad (2.20)$$

Base Ortonormal[40] [44]:

Sejam as matrizes $Q_o \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ e $Q_r \in \mathbb{R}^{n \times r}$ tal que suas colunas formem bases ortonormais para os subespaços \mathcal{V}_o e \mathcal{V}_r respectivamente. Temos então:

$$Q = [Q_o \mid Q_r] \quad \text{com } Q^T Q = Q Q^T = I_n \quad (2.21)$$

Utilizando Q para fazer uma mudança de base no sistema (2.1) estaremos colocando a matriz A numa forma triangular superior:

$$R = Q^T A Q = \begin{bmatrix} R_o & R_2 \\ 0_{r \times (n-r)} & R_r \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

onde $R_o \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ e $R_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$.

Seja:

$$z = \begin{bmatrix} Q_o^T \\ Q_r^T \end{bmatrix} x = Q^T x \quad (2.23)$$

A representação do sistema em malha aberta na base formada pelas colunas de Q toma a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_o(t) \\ \dot{z}_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_o & R_2 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_o(t) \\ z_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_o \\ B_r \end{bmatrix} u(t) \quad (2.24)$$

$$\text{com } \begin{bmatrix} B_o \\ B_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_o^T \\ Q_r^T \end{bmatrix} B$$

O sistema reduzido em malha fechada é dado por:

$$\dot{z}_r(t) = (R_r + B_r F_r) z_r(t) \quad (2.25)$$

e a matriz de retroação de estados na base original é dada por:

$$F = [0_{m \times (n-r)} \mid F_r] \begin{bmatrix} Q_o^T \\ Q_r^T \end{bmatrix} = F_r Q_r^T \quad (2.26)$$

Observemos que a base ortonormal e a representação do sistema como em (2.10) podem ser facilmente obtidas a partir de uma decomposição de Schur da matriz A original [40] [44]. No caso dos blocos de Schur não estarem na ordem desejada é sempre possível fazer um reordenamento dos mesmos através de Rotações de Givens ou Transformações de Householder [20][40].

A utilização de uma base de autovetores, pode parecer, a priori, uma escolha mais óbvia e intuitiva. Entretanto, o uso de uma base ortonormal, obtida através de uma decomposição de Schur, tem a vantagem de fornecer uma metodologia sistemática, numericamente estável e eficiente computacionalmente [20][40]. Em particular, não é necessária nenhuma inversão matricial para a transformação de similaridade [18] e o cálculo de autovalores é feito de uma maneira numericamente robusta. Frente a estas vantagens, as demonstrações e desenvolvimentos serão feitos, a partir de agora, utilizando-se bases ortornormais, obtidas a partir da decomposição de Schur da matriz A do sistema.

2.4.2 Obtenção da Lei de Controle

No caso de um posicionamento parcial de autoestrutura, devemos computar uma matriz de realimentação de estados F_r para o sistema reduzido (2.13).

Pelo visto para o posicionamento de autoestrutura genérico (vide apêndice B), devemos então, uma vez especificado um autovalor a ser posicionado em malha fechada, escolher um autovetor para o sistema reduzido no *subespaço de transmissão reduzido* definido por:

$$\Gamma_r(\lambda_i) \triangleq (\lambda_i I - A_r)^{-1} \text{Im} B_r \quad (2.27)$$

e F_r é então calculado por:

$$F_r = W_r V_r^{-1} \quad (2.28)$$

onde W_r e V_r são respectivamente a matriz de direções de entrada e a matriz de autovetores para o sistema de ordem reduzida.

Algebricamente (vide apêndice B) a seguinte equação deve ser verificada:

$$[\lambda I_r - A_r \mid B_r] \begin{bmatrix} v_r \\ w \end{bmatrix} = 0 \quad (2.29)$$

com v_r, w sendo respectivamente o autovetor do sistema reduzido correspondente ao autovalor λ , e a direção de entrada a ele associada.

Uma vez calculada F_r , vimos na seção 2.4.1 que a F que faz o posicionamento parcial de autoestrutura no sistema total (2.1) é dada por:

$$F = [0_{m \times (n-r)} \mid F_r] U^{-1} \quad (2.30)$$

e os autovetores do sistema total em malha fechada (2.2) associados a $\text{Ker}F$, serão, como já visto, mantidos como em malha aberta.

2.4.3 Relação entre os autovetores do sistema total e do sistema reduzido

Suponhamos λ e v respectivamente um autovalor e um autovetor correspondente para o sistema em malha fechada total (2.2).

Seja, por exemplo, a mudança de base utilizando uma matriz ortogonal $Q = [Q_o \mid Q_r]$ como descrito na seção precedente, tal que:

$$A = QA_QQ^T \text{ e } B = Q \begin{bmatrix} B_o \\ B_r \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$\text{com } A_Q = \begin{bmatrix} A_o & A_2 \\ 0_{r \times (n-r)} & A_r \end{bmatrix}$$

O autovetor v na nova base pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} v_o \\ v_r \end{bmatrix} = Q^T v = \begin{bmatrix} Q_o^T \\ Q_r^T \end{bmatrix} v$$

onde v_o é a projeção de v em \mathcal{V}_o ao longo do subespaço \mathcal{V}_r ; e v_r é a projeção de v em \mathcal{V}_r ao longo do subespaço \mathcal{V}_o ;

Substituindo (2.31) em uma equação análoga a (2.29) para o sistema como um todo, podemos escrever que:

$$[\lambda I_n - QA_QQ^T \mid -Q \begin{bmatrix} B_o \\ B_r \end{bmatrix}] \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = 0$$

com w sendo a direção de entrada correspondente ao autovetor v do sistema como um todo, com $w = Fv$.

$$Q[\lambda I_n - A_Q \mid - \begin{bmatrix} B_o \\ B_r \end{bmatrix}] \begin{bmatrix} Q_o^T v \\ w \end{bmatrix} = 0$$

$$[Q_o \mid Q_r] \begin{bmatrix} (\lambda I_{(n-r)} - A_o) & A_2 & -B_o \\ 0_{r \times (n-r)} & (\lambda I_r - A_r) & -B_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_o^T v \\ Q_r^T v \\ w \end{bmatrix} = 0 \quad (2.32)$$

Como $\text{Ker}Q = 0$ (pois Q é de posto completo), para que a equação (2.32) seja satisfeita devemos ter:

1.

$$(\lambda I_r - A_r)Q_r^T v = B_r w$$

e temos então que:

$$(\lambda I_r - A_r)v_r = B_r w \quad (2.33)$$

da onde podemos concluir que v_r é autovetor do sistema reduzido, e $w = Fv = Fv_r$, pois $\mathcal{V}_o \subset \text{Ker } F$.

2.

$$[\lambda I_{(n-r)} - A_o \mid A_2 \mid -B_o] \begin{bmatrix} Q_o^T v \\ Q_r^T v \\ w \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda I_{n-r} - A_o)Q_o^T v + A_2 Q_r^T v = B_o w$$

e temos então que:

$$(\lambda I_{n-r} - A_o)v_o + A_2 v_r = B_o w \quad (2.34)$$

Conclui-se então, que encontrado um autovetor no sistema reduzido, v_r , pela equação (2.33) pode-se, através da relação (2.34) encontrar v_o . O autovetor correspondente para o sistema total v , é obtido por:

$$v = [Q_o \mid Q_r] \begin{bmatrix} v_o \\ v_r \end{bmatrix}$$

2.4.4 Algoritmo Genérico

A partir do visto acima, podemos formular o seguinte algoritmo genérico para o posicionamento parcial de autoestrutura:

1. Determinar uma matriz $[U_o \mid U_r]$ onde U_o é uma base para o subespaço associado aos autovalores que devem permanecer inalterados e U_r é uma base para o subespaço cujos autovalores associados deseja-se modificar.
2. Fazer uma transformação de similaridade no sistema (2.1) usando como nova base as colunas de $[U_o \mid U_r]$, obtendo-se o sistema na forma (2.10).
3. Calcular uma matriz realimentação de estado F_r que posicione a autoestrutura do sistema reduzido (2.13) como desejado.
4. Obter a matriz F na base original: $F = [0_{m \times (n-r)} \mid F_r] [U_o \mid U_r]^{-1}$.

No passo 3, o projeto de F_r deve ser orientado no sentido de satisfazer certas especificações. Em [40], tem-se por objetivo a insensibilidade dos autovalores do sistema frente à perturbações paramétricas. Em particular, se são dadas especificações sobre o comportamento dinâmico do sinal de controle, F_r pode ser calculada a fim de satisfazê-las, como veremos a seguir.

2.5 Síntese de leis de Controle Utilizando Posicionamento Parcial de Autoestrutura

Nesta seção será visto como é possível a definição da dinâmica do sinal de controle, $u = Fx$, a partir de um posicionamento parcial de autoestrutura. O interesse em definir a dinâmica de controle fica evidenciado no tratamento do problema de regulação com restrições sobre o controle. A exigência de que o sinal de controle respeite certos limites pode ser entendida como uma especificação sobre sua trajetória e, portanto, da dinâmica a ele associada.

Lembrando que temos (r) autovalores/autovetores a serem posicionados, e (m) entradas de controle, dividiremos a abordagem em 2 casos:

Caso $r \leq m$:

Consideremos o sistema reduzido em malha fechada (2.14). Escolhamos (r) colunas de B_r e formemos a matriz B_{r1} tal que o par (A, B_{r1}) seja controlável. Em geral, escolhe-se colunas linearmente independentes a fim de evitar redundância de controle. As entradas de controle associadas as colunas escolhidas de B_r (B_{r1}) é que serão efetivamente utilizadas no controle. As demais $(m - r)$ entradas serão consideradas inativas e, portanto, assumirão valor zero. Pela proposição 2.1, a dimensão de $\text{Ker } F$ deve ser igual a $(n - r)$ (número de autovalores/autovetores que permanecerão inalterados). Assim, sem perda de generalidade, podemos sempre assumir que $(m - r)$ linhas de F_r e correspondentemente de F são nulas. Logo:

$$B_r \triangleq [B_{r1} \mid B_{r2}] ; u \triangleq \begin{bmatrix} u_1 \\ 0_{(m-r)*1} \end{bmatrix} \text{ ou } F_r \triangleq \begin{bmatrix} F_{r1} \\ 0_{(m-r)*r} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

No caso em que $r = m$, temos que $F_{r1} = F_r$ e $u_1 = u$, não havendo assim entradas inativas.

Em malha fechada podemos reescrever o sistema reduzido como:

$$\dot{z}_r = (A_r + B_{r1}F_{r1})z_r \quad (2.36)$$

Chamando de $W_{r1} \in \mathbb{R}^{r*r}$, a matriz de direções de entrada escolhida para o sistema reduzido (2.36) e $V_r \in \mathbb{R}^{r*r}$ a matriz de autovetores associada, podemos escrever: $F_{r1}V_r = W_{r1}$. Seja Λ_r a representação de $(A_r + B_{r1}F_{r1})$ na forma canônica de Jordan: $(A_r + B_{r1}F_{r1})V_r = V_r\Lambda_r$. Definindo $H_r \triangleq W_{r1}\Lambda_r W_{r1}^{-1}$, temos:

$$H_r F_{r1} = F_{r1}(A_r + B_{r1}F_{r1}) \quad (2.37)$$

Notemos que, (2.37) é uma equação de similaridade.

Multiplicando-se ambos os lados da equação (2.36) por F_r e utilizando-se (2.37), obtém-se o seguinte sistema autônomo que define a dinâmica do sinal de controle:

$$\dot{u}_1(t) = H_r u_1(t) \quad (2.38)$$

Observemos que a matriz H_r é definida a partir das direções de entrada W_r e dos autovalores do sistema reduzido em malha fechada:

$$W_r = \begin{bmatrix} W_{r1} \\ 0_{(m-r) \times r} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Assim, podemos dizer que a dinâmica do sinal de controle fica completamente determinada pela escolha de uma matriz H_r apropriada, ou equivalentemente, da autoestrutura a ser conferida ao sistema reduzido em malha fechada.

Caso $r > m$

Neste caso, podemos assumir que $\text{posto}(B_r) = q \leq m < r$. Escolhamos então, q colunas de B_r linearmente independentes a fim de formar uma matriz B_{r1} , como no caso anterior.

Consideremos uma matriz $G_r \in \mathbb{R}^{(r-q) \times r}$, de posto completo, e definamos a seguinte matriz:

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} F_{r1} \\ G_r \end{bmatrix}$$

Dessa forma $\text{Ker } \mathcal{F} \subset \text{Ker } F$.

Seja uma matriz $W_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ tal que $\mathcal{F}W_r = \dot{W}_r$, definida da seguinte maneira:

$$W_r = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_3 & W_4 \end{bmatrix}$$

e definamos a matriz Σ :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \Sigma_3 & \Sigma_4 \end{bmatrix}$$

tal que $\Sigma = W_r \Lambda_r W_r^{-1}$, com Λ_r sendo a representação na forma canônica de Jordan do sistema reduzido (2.36). Podemos então escrever que:

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \Sigma_3 & \Sigma_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{r1} \\ G_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{r1} \\ G_r \end{bmatrix} (A_r + B_{r1} F_{r1}) \quad (2.40)$$

A matriz Σ é então, similar a $(A_r + B_{r1} F_{r1})$. Multiplicando-se ambos os lados da equação (2.36) por \mathcal{F} e utilizando-se (2.40), obtém-se a seguinte equação envolvendo a dinâmica do sinal de controle:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}(t) \\ G_r \dot{z}_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \Sigma_3 & \Sigma_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ G_r z_r(t) \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Observa-se que neste caso a dinâmica de controle:

$$\dot{u}(t) = \Sigma_1 u(t) + \Sigma_2 G_r z_r(t) \quad (2.42)$$

é influenciada diretamente pelo vetor de estados, não sendo descrita como um sistema autônomo

No capítulo 3 será mostrado que as equações (2.37) e (2.40) são equivalentes a (2.6) e (2.5) respectivamente. Isso garantirá que a construção de um poliedro limitado, positivamente em relação ao sistema reduzido, corresponderá a um poliedro não limitado para o sistema nominal em malha fechada.

A fim de ilustrar a aplicação da metodologia descrita, veremos agora um exemplo:

2.6 Exemplo

Seja o sistema linear (2.1) descrito pelas seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.01 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.2855 & -0.707 & 1.3229 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.4220 & 0.1761 \\ 3.0447 & -7.5922 \\ -5.52 & 4.99 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A partir de uma decomposição de Schur da matriz A, obtemos:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.3329 & 0.4360 & -0.6246 & -0.5558 \\ -0.9278 & 0.2824 & -0.2329 & -0.0724 \\ -0.0534 & -0.6935 & -0.6902 & 0.1997 \\ 0.1599 & 0.4992 & -0.2814 & 0.8037 \end{bmatrix}$$

As matrizes do sistema na base dada pelas colunas de Q ficam:

$$A_Q = \begin{bmatrix} -0.3340 & 1.8471 & -1.3044 & 2.8270 \\ 0 & -1.9809 & 0.0993 & -1.5363 \\ 0 & 0 & -0.1898 & 0.3168 \\ 0 & 0 & -0.7273 & 0.7510 \end{bmatrix}$$

$$B_Q = \begin{bmatrix} -2.3894 & 6.8358 \\ 4.8719 & -5.5280 \\ 2.8371 & -1.7857 \\ -1.5572 & 1.4480 \end{bmatrix}$$

Pela decomposição de Schur, os autovalores de A são: $\lambda_1 = -1.9809$, $\lambda_2 = -0.3340$, $\lambda_3 = 0.2806 + j0.0954$ e $\lambda_4 = 0.2806 - j0.0954$. Vamos então, fazer um posicionamento parcial de autoestrutura deslocando o par de autovalores complexos conjugados instáveis para $\alpha_1 = -1.5$ e $\alpha_2 = -0.5$, de tal forma que os modos referentes a α_1 e α_2 estejam desacoplados de u_2 (segunda entrada de controle) e u_1 (primeira entrada de controle) respectivamente.

A partir das matrizes acima formamos o seguinte sistema reduzido:

$$\dot{z}_r = \begin{bmatrix} -0.1898 & 0.3168 \\ -0.7273 & 0.7510 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 2.8371 & -1.7857 \\ -1.5572 & 1.4480 \end{bmatrix} u$$

A dinâmica desejada para a variável de controle é então:

$$\dot{u}(t) = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -1.5 \end{bmatrix} u(t)$$

como $H_r = W_r \Lambda_r W_r^{-1}$, devemos ter:

$$W_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando o método de Moore para calcular uma matriz de realimentação de estados F_r :

$$V_r = \begin{bmatrix} -6.5362 & 1.4084 \\ -2.5550 & -0.1883 \end{bmatrix}$$

onde as colunas de W_r são as direções de entrada escolhidas que satisfazem as condições de desacoplamento exigidas, e as colunas de V_r são os autovetores associados obtidos pela equação $v_{rj} = (\lambda_j I_r - A_r)^{-1} B_r w_{rj}$.

A partir das duas matrizes acima e aplicando a equação (2.28) obtemos:

$$F_r = \begin{bmatrix} -0.0390 & -0.2917 \\ 0.5291 & -1.3536 \end{bmatrix}$$

e assim, a F que faz o posicionamento parcial no sistema inicial é obtida através da equação (2.26):

$$F = \begin{bmatrix} 0.1865 & 0.0302 & -0.0313 & -0.2234 \\ 0.4218 & -0.0253 & -0.6355 & -1.2368 \end{bmatrix}$$

Poderíamos ter escolhido, ao invés da base ortonormal, a seguinte base de autovetores:

$$V = \begin{bmatrix} -0.0417 & 0.3329 & 0.4344 & 0.0451 \\ -0.8804 & -0.9278 & 0.8077 & 0.2784 \\ 0.4216 & -0.0534 & -0.0592 & -0.0539 \\ -0.2128 & 0.1599 & -0.2475 & -0.1080 \end{bmatrix}$$

Dessa maneira teríamos:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1.9809 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3340 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2806 & 0.0954 \\ 0 & 0 & -0.0954 & 0.2806 \end{bmatrix}$$

$$\dot{z}_r = \begin{bmatrix} 0.2806 & 0.0954 \\ -0.0954 & 0.2806 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} -12.0583 & 7.9116 \\ 54.0295 & -38.4354 \end{bmatrix} u$$

$$V_r = \begin{bmatrix} 23.5520 & -5.5834 \\ -66.3340 & 21.2861 \end{bmatrix}; F_r = \begin{bmatrix} 0.1625 & 0.0426 \\ 0.5065 & 0.1798 \end{bmatrix}$$

2.7 Conclusão

Neste capítulo definiu-se o posicionamento parcial de autoestrutura à luz da teoria geométrica. Formulou-se uma condição geométrica necessária e suficiente para garantir o posicionamento parcial de autoestrutura em um dado sistema linear. Mostrou-se que o posicionamento parcial de autoestrutura é equivalente à solução de uma equação algébrica não linear do mesmo tipo que uma primeira relação de invariância positiva, vista no capítulo anterior. A partir disto apresentou-se uma metodologia para a solução do problema. Resumindo a metodologia, formulou-se um algoritmo matricial. A idéia básica explorada neste algoritmo foi a de resolver um problema de posicionamento geral de autoestrutura para um sistema de ordem reduzida. Este sistema é obtido por uma projeção do sistema proposto em um subespaço associado aos autovalores em malha aberta que devem ser reposicionados. A utilização de um sistema reduzido obtido através de uma decomposição de Schur, tem a vantagem de minimizar consideravelmente problemas numéricos inerentes ao posicionamento de autoestrutura em sistemas de ordem elevada.

Como aplicação, mostrou-se como é possível projetar a dinâmica do sinal de controle a partir de um posicionamento parcial de autoestrutura. Em particular, as definições e os resultados apresentados neste capítulo, são de grande importância na resolução do problema de regulação sob restrições nas variáveis de controle, a ser abordado nos próximos capítulos.

Capítulo 3

Resolução do PRRVC Utilizando Posicionamento Parcial de Autoestrutura

3.1 Introdução

Vários trabalhos recentes têm utilizado a propriedade de invariância positiva de domínios poliedrais no tratamento de problemas de regulação de sistemas lineares sob restrições nas variáveis de controle (vide entre outros [7] [9] [14] [31] [56]). Neste sentido, diferentes abordagens são utilizadas para a resolução das equações de invariância positiva em relação a um dado sistema linear. Em particular, quando a lei de controle utilizada é do tipo realimentação de estados e estamos interessados na invariância positiva de poliedros do tipo $S(F, u_{min}, u_{max})$, temos 3 abordagens principais: por posicionamento parcial de autoestrutura [14] [26]; por programação não-linear [9]; por programação linear [31].

Como visto no capítulo 1, a resolução da 1ª equação de invariância positiva (1.50) é equivalente à $(A + BF)$ -invariância de $\mathcal{Ker} F$, correspondendo à manutenção de no mínimo $(n - m)$ autovalores/autovetores do sistema em malha aberta. Isto equivale a obter-se uma matriz de realimentação de estados F que posicione parcialmente a autoestrutura do sistema em relação a um subespaço $\mathcal{V}_o \triangleq \mathcal{Ker} F$ [27]. Dessa forma, a matriz F pode ser calculada a partir da utilização de um sistema de ordem reduzida conforme mostrado no capítulo 2. Entretanto, nas abordagens existentes para o cálculo de poliedros positivamente invariantes do tipo $S(F, u_{min}, u_{max})$ não é feito o uso explícito desta característica do problema. As formulações dos algoritmos têm sido feitas sempre considerando-se o sistema como um todo.

Neste capítulo estaremos interessados, inicialmente, em mostrar como é possível a resolução do problema de regulação sob restrições nas variáveis de controle, utilizando-se um

sistema de ordem reduzida e posicionamento parcial de autoestrutura. Neste sentido, será mostrado que a resolução das equações de invariância positiva para o sistema como um todo é equivalente à resolução de equações análogas para o sistema de ordem reduzida. Este sistema, como já visto, é obtido pela projeção do sistema original em um subespaço associado a autoestrutura instável ou cuja dinâmica deseje-se alterar. A partir disto, propõe-se um algoritmo genérico, utilizando o sistema de ordem reduzida, para a resolução do PRRVC. A seguir, será mostrado como é possível, a partir de uma escolha apropriada da autoestrutura do sistema de ordem reduzida em malha fechada, resolver o *Problema de Regulação sob Restrições nas Variáveis de Controle* (PRRVC).

3.2 A Invariância Positiva no Sistema de Ordem Reduzida

Considerando-se novamente o sistema em malha fechada:

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) \quad (3.1)$$

As restrições no vetor de controle são representadas no espaço de estados pelo poliedro:

$$S(F, u_{max}, u_{min}) = \{x \in \mathbb{R}^n; -u_{min} \leq Fx \leq u_{max}\} \quad (3.2)$$

A fim de solucionar o PRRVC, desejamos que o poliedro $S(F, u_{max}, u_{min})$ seja positivamente invariante em relação ao sistema (3.1). Para tanto, devemos satisfazer a $(A + BF)$ -invariância de $\mathcal{Ker} F$, mantendo ao menos $(n - m)$ autovetores/autovalores como em malha aberta. Dessa forma, $\forall x \in \mathcal{Ker} F$, tem-se que as restrições de controle são respeitadas, pois $u = Fx = 0$. Logo, $S(F, u_{min}, u_{max})$ é um poliedro não limitado nas direções associadas a $\mathcal{Ker} F$ e limitado nas direções associadas a $(\mathbb{R}^n / \mathcal{Ker} F)$. É importante lembrar que, para garantir a estabilidade do sistema em malha fechada, estes $(n - m)$ autovalores sejam estáveis.

Tomando-se $\mathcal{V}_0 \triangleq \mathcal{Ker} F$, devemos fazer um posicionamento parcial de autoestrutura em relação a \mathcal{V}_0 . Isto equivale, como visto no capítulo 2, a calcular uma matriz de realimentação de estados F_r para um sistema de ordem reduzida, obtido pela projeção, segundo \mathcal{V}_0 , do sistema original em um subespaço \mathcal{V}_r complementar a \mathcal{V}_0 . Assim temos o sistema reduzido em malha fechada:

$$\dot{z}_r(t) = (A_r + B_r F_r)z_r(t) \quad (3.3)$$

A trajetória do sistema (3.3), $\phi_r(t, z_r(t_0), t_0) = \phi_r(t, z_r(0))$, é dada pela projeção da trajetória de estado $\phi(t, x(0))$ do sistema (3.1) no subespaço \mathcal{V}_r , ao longo de \mathcal{V}_0 .

Seguindo o mesmo raciocínio, a projeção do poliedro $S(F, u_{min}, u_{max})$ no subespaço \mathcal{V}_r é dada então, por um poliedro limitado $S(F_r, u_{min}, u_{max})$ (pois \mathcal{V}_r é isomorfo de $(\mathbb{R}^n / \text{Ker } F)$).

Dessa forma, se a trajetória $\phi(t, x(0))$ está confinada em $S(F, u_{min}, u_{max})$, a trajetória $\phi(t, z_r(0))$ estará contida em $S(F_r, u_{min}, u_{max})$. Graficamente, podemos exemplificar este fato para o caso tridimensional, supondo \mathcal{V}_0 de dimensão 1 e \mathcal{V}_r de dimensão 2, com \mathcal{V}_r ortogonal a \mathcal{V}_0 . Neste caso, o poliedro $S(F, u_{min}, u_{max})$ é representado por um "tubo" de seção poliedral, aberto nas direções associadas a $\text{Ker } F = \mathcal{V}_0$, como mostrada na figura (3.1).

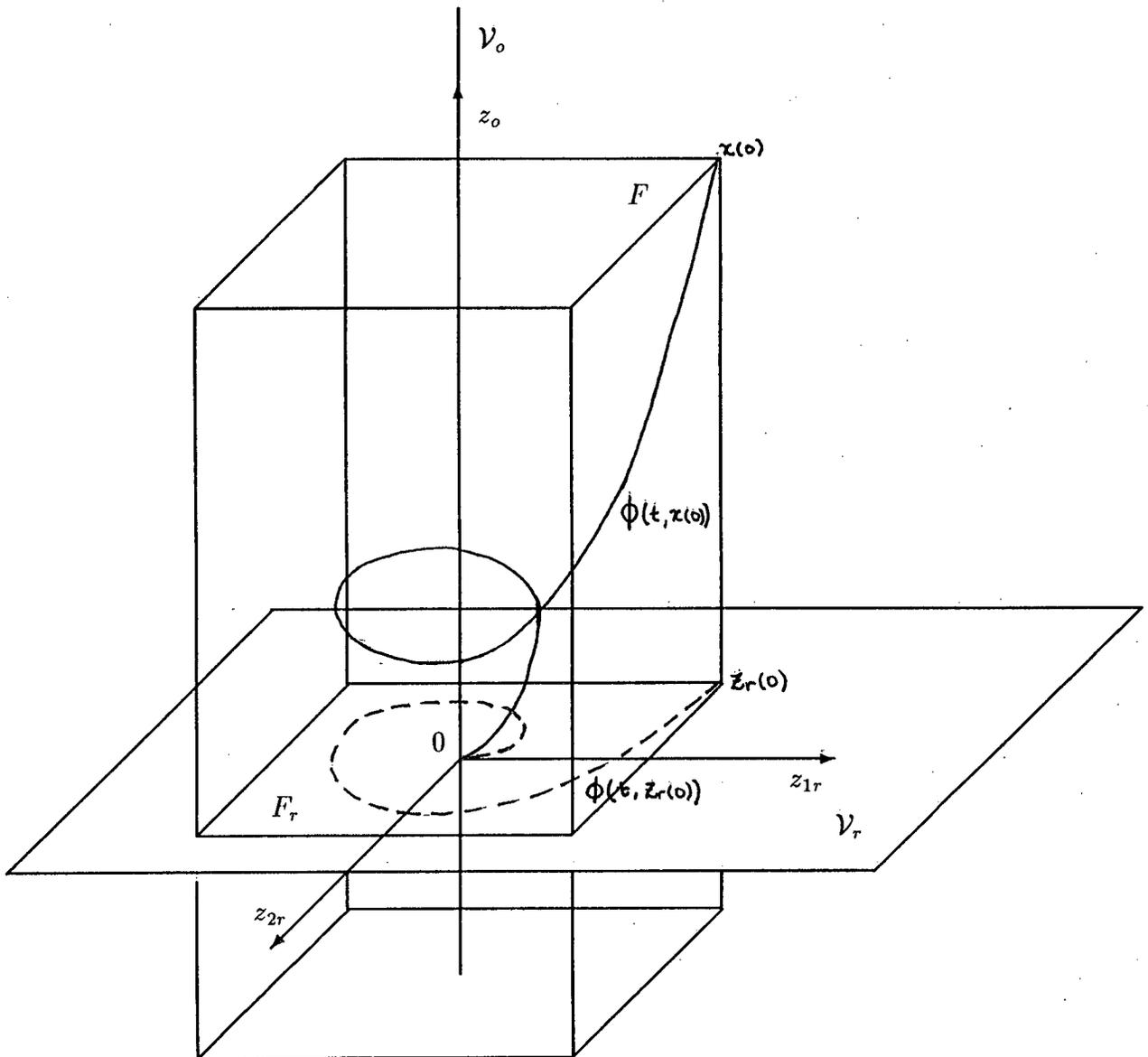


Figura 3.1: O poliedro $S(F, u_{max}, u_{min})$ e sua projeção $S(F_r, u_{max}, u_{min})$

Este raciocínio sugere então, que seja possível a construção de um poliedro positivamente invariante $S(F, u_{max}, u_{min})$ em relação a (3.1), a partir da garantia de invariância positiva

de um poliedro $S(F_r, u_{max}, u_{min})$ em relação a (3.3). A fim de demonstrar este fato, veremos a seguir, uma proposição que mostra a equivalência entre a satisfação da primeira equação de invariância positiva para o sistema original e a satisfação de uma equação análoga para o sistema de ordem reduzida.

Proposição 3.1 :

$$HF = F(A + BF) \quad (3.4)$$

se e somente se

$$HF_r = F_r(A_r + B_r F_r) \quad (3.5)$$

Demonstração:

A demonstração desta proposição será feita utilizando-se uma base ortonormal $[Q_o | Q_r]$, onde Q_o é uma base para o subespaço \mathcal{V}_o e Q_r é uma base para o subespaço \mathcal{V}_r . Neste caso, basta fazermos uma transformação de Schur na matriz A . Demonstração análoga pode ser feita utilizando-se uma base de Jordan ou qualquer outra base que coloque o sistema na forma (2.10).

Necessidade: Como $\text{Ker } F = \mathcal{V}_o$, podemos escrever que:

$$\bar{F} = F [Q_o | Q_r] = [0 | F_r] \quad (3.6)$$

Usando (3.6) em (3.4) podemos escrever:

$$\begin{aligned} H[0 | F_r] \begin{bmatrix} Q_o^T \\ Q_r^T \end{bmatrix} &= [0 | F_r] \begin{bmatrix} Q_o^T \\ Q_r^T \end{bmatrix} (A + B[0 | F_r] \begin{bmatrix} Q_o^T \\ Q_r^T \end{bmatrix}) \\ H[0 | F_r] \begin{bmatrix} Q_o^T \\ Q_r^T \end{bmatrix} &= [0 | F_r] \left(\begin{bmatrix} Q_o^T \\ Q_r^T \end{bmatrix} A [Q_o | Q_r] + \begin{bmatrix} Q_o^T \\ Q_r^T \end{bmatrix} B [0 | F_r] \right) \begin{bmatrix} Q_o^T \\ Q_r^T \end{bmatrix} \\ [0 | HF_r] &= [0 | F_r] \left(\begin{bmatrix} A_o & A_2 \\ 0 & A_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_o \\ B_r \end{bmatrix} [0 | F_r] \right) \\ [0 | HF_r] &= [0 | F_r] \begin{bmatrix} A_o & A_2 + B_o F_r \\ 0 & A_r + B_r F_r \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde devemos ter:

$$HF_r = F_r(A_r + B_r F_r) \quad (3.8)$$

Podemos dizer, a partir de (3.7), que (3.5) corresponde à escrita de (3.4) na base representada pelas colunas de Q .

Suficiência: Pós multiplicando-se ambos os lados da equação (3.5) por Q_r^T temos:

$$HF_r Q_r^T = F_r (A_r Q_r^T + B_r F_r Q_r^T)$$

como $F = F_r Q_r^T$ e $B_r = Q_r^T B$ temos:

$$HF = F_r (A_r Q_r^T + Q_r^T B F)$$

por outro lado,

$$Q_r^T A = A_r Q_r^T$$

logo temos

$$HF = F_r Q_r^T (A + B F)$$

$$HF = F (A + B F)$$

□

No caso em que H satisfaz a desigualdade $\tilde{H} \begin{bmatrix} u_{max} \\ u_{min} \end{bmatrix} \leq 0$ temos o seguinte corolário.

Corolário 3.1 : $S(F, u_{min}, u_{max})$ é um poliedro positivamente invariante do sistema (3.1) se e somente se $S(F_r, u_{min}, u_{max})$ é um poliedro positivamente invariante do sistema (3.3).

□

Podemos então, a partir do corolário acima, formular o seguinte algoritmo genérico para a resolução do PRRVC:

Algoritmo Para a Resolução do PRRVC Utilizando um Sistema de Ordem Reduzida [15]

- **Passo 1:** Fazer uma decomposição de Schur na matriz A do sistema, com um possível reordenamento dos blocos da diagonal, a fim de obter a matriz $Q = [Q_o \mid Q_r]$. Isolar então, o sistema de ordem reduzida.
- **Passo 2:** Escolher uma metodologia apropriada para computar F_r de maneira obter $S(F_r, u_{max}, u_{min})$ positivamente invariante em relação ao sistema reduzido em malha fechada (e, quando necessário, satisfazer outros requerimentos de controle).
- **Passo 3:** Computar $F = F_r Q_r^T$.

□

Dessa forma, a resolução do PRRVC pode ser feita trabalhando-se com um sistema de ordem reduzida. As principais vantagens genéricas do procedimento acima estão relacionadas com as boas propriedades numéricas da decomposição de Schur, e pelo fato de se trabalhar com um sistema dimensionalmente menor, o que fará com que problemas numéricos associados a ordem do sistema sejam minimizados.

A seguir, veremos como é possível, a partir de uma escolha adequada da autoestrutura, executar o passo 2 do algoritmo proposto e resolver o PRRVC. No capítulo 4 serão utilizadas técnicas de otimização para realizar este mesmo passo.

3.3 Abordagem por Posicionamento Parcial de Autoestrutura

É sabido que, por uma escolha adequada da autoestrutura do sistema, podemos conferir propriedades particulares ao sistema em malha fechada tais como: insensibilidade a variações paramétricas, robustez, desacoplamentos, rejeição à perturbações entre outras [17]. Em particular, por uma escolha adequada de autovalores e autovetores, podemos sempre encontrar uma matriz H e uma matriz F tal que as relações de invariância positiva (1.50) e (1.51) sejam satisfeitas em relação ao sistema em malha fechada (3.1).

Em [14], é proposta uma escolha de direções de entrada e autovetores que levam a obtenção da invariância positiva de um poliedro $S(F, u_{min}, u_{max})$, com H na forma canônica de Jordan no caso em que $r \leq m$. Para o caso em que $r > m$, uma escolha similar leva a obtenção de H em uma forma triangular superior e à invariância positiva de um poliedro $S(\mathcal{F}, u_{min}, u_{max}) \subset S(F, u_{min}, u_{max})$.

Implicitamente, este algoritmo faz um posicionamento parcial de autoestrutura no sistema (3.1). Veremos então agora, como é possível o tratamento do problema através da escolha de direções de entrada e autovetores diretamente no sistema de ordem reduzida.

Seja o sistema linear representado por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_0u_0(t) \quad , \quad \text{para } t \geq 0 \quad (3.9)$$

com: $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u_0(t) \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_0 \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $m \leq n$ e $\text{posto}(B_0) = m$.

Para nosso desenvolvimento inicial, consideremos que o vetor de controle, u_0 , está submetido a restrições lineares que definem o seguinte poliedro simétrico, Ω_0 , no espaço de

controle:

$$\Omega_0 = \{u_0 \in \mathbb{R}^m ; -1_m \leq Su_0 \leq 1_m\} , \quad \text{com } S \in \mathbb{R}^{s \times m} \quad (3.10)$$

Como visto no capítulo 1, todo conjunto de restrições simétricas englobando a origem, pode ser colocado nesta forma por uma escolha adequada das linhas da matriz S .

Sob a ação de uma retroação de estados linear constante:

$$u_0(t) = F_0x(t) , \quad \text{com } F_0 \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (3.11)$$

a evolução do sistema em malha fechada é descrita por:

$$\dot{x}(t) = (A + B_0F_0)x(t) \quad (3.12)$$

Temos então um poliedro correspondente no espaço de estados, $S(SF_0, 1_m)$, dado por:

$$S(SF_0, 1_m) = \{x \in \mathbb{R}^n : -1_m \leq SF_0x \leq 1_m\} \quad (3.13)$$

ou, em notação geométrica,

$$S(SF_0, 1_m) = (SF_0)^{-1}\Omega_0 \quad (3.14)$$

Assumamos agora que $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $\text{posto}(S) = m$. Façamos agora uma troca de variáveis de entrada do tipo:

$$u(t) = Su_0(t) \quad (3.15)$$

A equação do sistema em malha aberta e em malha fechada podem então ser reescritas como:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.16)$$

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) \quad (3.17)$$

com : $B = B_0S^{-1}$ e $F = SF_0$

Com a aplicação da lei de controle dada agora por:

$$u(t) = Fx(t) \quad (3.18)$$

as restrições representadas em (3.10) e (3.13) são simplificadas para:

$$\Omega = \{u \in \mathcal{U} ; -1_m \leq u \leq 1_m\} , \quad \text{para } t \geq 0 \quad (3.19)$$

e

$$S(F, 1_m) = \{x \in \mathbb{R}^n ; -1_m \leq Fx \leq 1_m\} \quad (3.20)$$

ou, geometricamente:

$$S(F, 1_m) = F^{-1}\Omega \quad (3.21)$$

Assim, $S(F, 1_m)$ é positivamente invariante em relação ao sistema (3.17) se e somente se $S(SF_0, 1_m) = S(F_0, S^{-1}1_m)$ é positivamente invariante em relação ao sistema (3.12).

Hipótese 3.1 : *O sistema em malha aberta (3.16) é estabilizável [18] e possui (r) autovalores instáveis ou cuja dinâmica se queira alterar controláveis. Os outros $(n - r)$ autovalores são supostos estáveis e permanecerão inalterados pela aplicação da lei de controle, $u(t) = Fx(t)$.*

□

Dessa forma, podemos montar o sistema de ordem reduzida associado aos (r) autovalores instáveis e/ou de dinâmica não satisfatória.

$$\dot{z}_r(t) = A_r z_r(t) + B_r u(t) \quad (3.22)$$

Dividiremos a apresentação da solução para o PRRVC em 2 casos, como feito em [14]:

3.3.1 Caso $r \leq m$

Como visto na seção 1.5, a condição $r \leq m$ é necessária para a existência de uma matriz de retroação de estados, F , para a qual o sistema em malha fechada é estável e admite $S(F, 1_m)$ como poliedro positivamente invariante. A proposição seguinte garante que se $r \leq m$ é sempre possível construir esta matriz.

Proposição 3.2 [14] : *No caso em que $r \leq m$ é sempre possível, sob a hipótese 3.1, de construir uma matriz de retroação de estados F tal que o sistema em malha fechada seja estável e admita $S(F, 1_m)$ como domínio positivamente invariante. De forma equivalente, $S(SF_0, 1_m)$ com $F_0 = S^{-1}F$ é poliedro positivamente invariante do sistema (3.12).*

Demonstração:

Pelo corolário 3.1 temos que a invariância positiva de $S(F, 1_m)$ em relação a (3.1) é equivalente a invariância positiva de $S(F_r, 1_m)$ em relação ao sistema de ordem reduzida (3.3). Assim, a demonstração desta propriedade, diferentemente da apresentada em [14], será feita

utilizando-se o sistema de ordem reduzida. Esta prova terá caráter construtivo, podendo ser entendida como um algoritmo para a obtenção de uma matriz F_r e, conseqüentemente, da F que irá resolver o PRRVC. O procedimento é dividido em duas partes:

Parte 1: Os (r) pólos do sistema reduzido em malha fechada, notados por $\lambda_l = \mu_l + j\sigma_l$ são escolhidos simples, distintos entre si e diferentes dos valores próprios em malha aberta de forma tal que a condição espectral abaixo seja satisfeita:

$$\mu_l < -|\sigma_l| \quad (3.23)$$

Parte 2: Sendo $r < m$, devemos escolher (r) colunas de B_r . Neste caso, estaremos utilizando apenas (r) entradas para fazer o posicionamento da autoestrutura do sistema. As demais $k = (m - r)$ entradas serão consideradas inativas, ou seja, assumirão valor nulo.

Tomemos agora W_r de forma que suas colunas sejam vetores da base canônica de dimensão (m) e suas k -ésimas componentes correspondentes às k -ésimas colunas de B_r que não serão consideradas para efeitos de controle, sejam nulas.

Para facilitar, assumamos que apenas as (r) primeiras variáveis de controle serão utilizadas (consideraremos que as (r) primeiras colunas de B_r são escolhidas). Neste caso W_r toma a seguinte forma:

$$W_r = \begin{bmatrix} I_r \\ 0_{(m-r) \times r} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Notemos que esta hipótese é perfeitamente concebível, uma vez que sempre podemos reordenar convenientemente as colunas de B . Caso não se deseje fazer este reordenamento, as $(m - r)$ linhas de W_r que devemos ter nulas não serão necessariamente as últimas, mas os resultados obtidos serão equivalentes.

A partir de W_r dado por (3.24), calcula-se a matriz de autovetores V_r pelo método de Moore (vide cap.2 e apêndice B). Temos então por construção:

$$F_r = \begin{bmatrix} V_r^{-1} \\ 0_{(m-r) \times r} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Consideremos agora a matriz Λ_r como a representação de $(A_r + B_r F_r)$ na forma canônica de Jordan. Podemos escrever:

$$\Lambda_r V_r^{-1} = V_r^{-1} (A_r + B_r F_r) \quad (3.26)$$

Assim, se escolhermos a matriz H como:

$$H = \begin{bmatrix} \Lambda_r & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

onde $h \in \mathfrak{R}^{(m-r) \times (m-r)}$ pode ser escolhido como qualquer matriz diagonal de elementos não positivos, temos que a primeira equação de invariância positiva (1.50) é verificada, pois:

$$\begin{bmatrix} \Lambda_r & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r^{-1} \\ 0_{(m-r) \times r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_r^{-1} \\ 0_{(m-r) \times r} \end{bmatrix} (A_r + B_r F_r) \quad (3.28)$$

ou seja,

$$H F_r = F_r (A_r + B_r F_r) \quad (3.29)$$

Como os autovalores do sistema reduzido foram escolhidos de forma a respeitar a relação (3.23) temos que:

$$\hat{H} 1_m \leq 0 \quad (3.30)$$

Com isto é verificada a segunda relação de invariância positiva (1.51) e temos a invariância positiva do poliedro $S(F_r, 1_m)$ em relação ao sistema (3.3). Temos então que $F = [0_{(n-r) \times m} \mid F_r] * [V_o \mid V_r]^{-1}$ e, pelo corolário 3.1, é garantida a invariância positiva do poliedro $S(F, 1_m)$ em relação ao sistema (3.1).

Convém notar que, como temos sempre $(m - r)$ entradas inativas, $(m - r)$ linhas de F_r e de F serão nulas. Por conseguinte, teremos $(m - r)$ restrições em Ω que sempre serão respeitadas.

□

3.3.2 Caso $r > m$

Uma vez que a dimensão mínima de $\mathcal{Ker} F$ é igual a $(n - m)$, e devemos ter $\mathcal{V}_o \triangleq \mathcal{Ker} F$ associado a $(n - r)$ autovalores de malha aberta que serão mantidos no sistema em malha fechada, não é possível a construção de um poliedro $S(F, 1_m)$ positivamente invariante em relação ao sistema em malha fechada e a estabilização do mesmo sistema quando temos os $r > m$ autovalores a serem alterados instáveis. A solução do problema pode então ser obtida limitando-se o poliedro $S(F, 1_m)$ em $(r - m)$ direções associadas a autovalores instáveis em malha aberta. Neste caso, obtém-se um poliedro $S(\mathcal{F}, 1_r) \subset S(F, 1_m)$ que possui $(n - m)$ pares de faces determinadas pelas linhas de F e é não limitado em $(n - r)$ direções associadas aos autovalores estáveis em malha aberta que foram mantidos. Isto pode ser feito tomando-se:

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} F \\ E \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

sendo $E \in \mathfrak{R}^{(r-m) \times n}$ uma matriz qualquer de posto completo. Deste modo, o conjunto $S(\mathcal{F}, 1_r)$ é considerado o domínio de condições iniciais admissíveis para os quais o respeito às restrições é garantido sem a saturação e com convergência assintótica para a origem.

Pensando em termos de sistema reduzido, deve então ser possível calcular um poliedro positivamente invariante $S(\mathcal{F}_r, 1_r)$ equivalente a projeção de $S(\mathcal{F}, 1_r)$ no subespaço associado aos (r) autovalores a serem alterados. O suporte teórico para este fato é dado pela proposição e pelo corolário que serão apresentados a seguir.

Proposição 3.3 :

$$\Sigma \mathcal{F} = \mathcal{F}(A + BF) \quad (3.32)$$

se e somente se

$$\Sigma \mathcal{F}_r = \mathcal{F}_r(A_r + B_r \mathcal{F}_r) \quad (3.33)$$

Demonstração: Análoga a demonstração da proposição (3.1) fazendo-se:

$$\mathcal{F}_r = \begin{bmatrix} F_r \\ E_r \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

com $F_r = FQ_r$ e $E_r = EQ_r$.

□

Considerando-se a desigualdade $\hat{\Sigma}1_r \leq 0$, temos o seguinte corolário:

Corolário 3.2 : Se $r > m$, $S(\mathcal{F}, 1_m)$ é poliedro positivamente invariante do sistema (3.1) se e somente se $S(\mathcal{F}_r, 1_r)$ é poliedro positivamente invariante do sistema (3.3).

□

Mostraremos agora, similarmente ao feito para a proposição 3.2, que é sempre possível construir um poliedro positivamente invariante em relação ao sistema (3.1), do tipo $S(\mathcal{F}, 1_m)$, contido no poliedro $S(F, 1_m)$.

Proposição 3.4 [14] : Se $r > m$, sob a hipótese 3.1, é sempre possível calcular uma matriz de retroação de estados $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e uma matriz de posto pleno $E \in \mathbb{R}^{(r-m) \times n}$, tal que:

$$S(\mathcal{F}, 1_m) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n ; - \begin{bmatrix} 1_m \\ 1_{(r-m)} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} F \\ E \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 1_m \\ 1_{(r-m)} \end{bmatrix} \right\}$$

é um poliedro positivamente invariante do sistema (3.1).

Demonstração:

A demonstração desta proposição é similar a feita para a proposição 3.2. Pelo corolário 3.2 a invariância positiva de $S(\mathcal{F}, 1_m)$ em relação ao sistema 3.1 é equivalente a invariância positiva de $S(\mathcal{F}_r, 1_m)$ em relação ao sistema reduzido em malha fechada (3.3) e, assim, podemos fazer esta prova de forma construtiva em duas partes utilizando o sistema de ordem reduzida.

Parte 1: Os pólos do sistema reduzido em malha fechada são escolhidos distintos entre si e diferentes dos pólos em malha aberta. Devem também ser escolhidos dentro da região do plano complexo definida por:

$$\mu_i < -|\sigma_i| \quad (3.35)$$

Seja $G_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$, a matriz de autovetores a esquerda do sistema reduzido em malha fechada. O poliedro $S(G_r, 1_r)$ é positivamente invariante em relação ao sistema (3.3), pois:

$$\Lambda_r G_r = G_r (A_r + B_r F_r) \quad (3.36)$$

$$\hat{\Lambda}_r 1_r \leq 0 \quad (3.37)$$

Consideremos agora as matrizes $W_r \in \mathbb{R}^{m \times r}$ e $V_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$:

$$W_r = [W_1 \ W_2], \quad \text{com } W_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}, \ W_2 \in \mathbb{R}^{m \times (r-m)}$$

$$V_r = [V_1 \ V_2], \quad \text{com } V_1 \in \mathbb{R}^{r \times m}, \ V_2 \in \mathbb{R}^{r \times (r-m)}$$

De forma similar, a matriz G_r é decomposta como:

$$G_r = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}, \quad \text{com } G_1 \in \mathbb{R}^{m \times r}, \ G_2 \in \mathbb{R}^{(r-m) \times r}.$$

Suponhamos também que os autovalores de Λ_r são escolhidos tais que Λ_r possa ser decomposta em dois blocos, $\Lambda_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $\Lambda_2 \in \mathbb{R}^{(r-m) \times (r-m)}$. Logo, a forma real de Jordan de $(A + BF)$ fica:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix}$$

Por convenção, os blocos que formam Λ_1 e Λ_2 são ordenados em ordem crescente de $\gamma_i = \mu_i + |\sigma_i|$. maior valor de γ_i , notado por γ_{max} , é estritamente negativo, pois a inequação (3.35) é respeitada. Então, γ_{max} , corresponde ao último autovalor de Λ_r . Sob estas hipóteses, a condição (3.37) pode ser substituída por:

$$\hat{\Lambda}_1 1_m \leq \gamma_{max} 1_m \ ; \ \hat{\Lambda}_2 1_{r-m} \leq \gamma_{max} 1_{r-m} \quad (3.38)$$

A matriz de retroação de estados que faz o posicionamento de autoestrutura no sistema reduzido é dada por:

$$F_r = [W_1 \ W_2][V_1 \ V_2]^{-1} = [W_1 \ W_2] \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Parte 2: Escolhendo a matriz W_1 de direções de entrada associadas à Λ_1 como $W_1 = I_m$, pode-se escrever que:

$$W_1 \Lambda_1 = \Lambda_1 W_1. \quad (3.40)$$

Como os autovalores de Λ_1 satisfazem (3.35) é sempre possível construir uma matriz $M \in \mathfrak{R}^{m \times (r-m)}$, não nula, tal que:

$$\hat{\Lambda}_1 1_m + |M| 1_{r-m} \leq 0_r \quad (3.41)$$

Para isto é suficiente que as componentes de M sejam tais que:

$$\sum_{j=1}^{r-m} |M_{lj}| \leq -(\mu_l + |\sigma_l|), \text{ para } l = 1, \dots, m \quad (3.42)$$

Os vetores coluna de W_2 podem então, ser determinados pela equação matricial :

$$W_2 \Lambda_2 = \Lambda_1 W_2 + M \quad (3.43)$$

Em particular, supondo que os autovalores λ_{2j} são reais, a j -ésima coluna de W_2 , w_{2j} pode ser calculada a partir da j -ésima coluna de M , m_j , por:

$$w_{2j} = (\lambda_{2j} I_m - \Lambda_1)^{-1} m_j, \text{ para } j = 1, \dots, (r-m). \quad (3.44)$$

A partir de (3.43) podemos escrever a seguinte equação [14]:

$$\begin{bmatrix} \Lambda_1 & M \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & W_2 \\ 0 & I_{r-m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & W_2 \\ 0 & I_{r-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Os vetores coluna das matrizes V_1 e V_2 são calculados a partir dos vetores coluna das matrizes W_1 e W_2 pelo método de Moore. Assim, a matriz de retroação de estados F_r é calculada como:

$$F_r = [I_m \ W_2][V_1 \ V_2]^{-1} = [I_m \ W_2] \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

O poliedro $S \left(\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1_m \\ 1_{r-m} \end{bmatrix} \right)$ é positivamente invariante em relação ao sistema reduzido em malha fechada, pois as relações (3.36) e (3.37) são satisfeitas.

Seja a matriz $\Sigma \in \mathbb{R}^{r \times r}$ definida como:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & M \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Pela construção utilizada:

$$\hat{\Sigma} 1_r \leq 1_r \quad (3.48)$$

Pela relação (3.45) podemos escrever:

$$\Sigma U = U \Lambda_r \quad (3.49)$$

onde: $U = \begin{bmatrix} I_m & W_2 \\ 0 & I_{r-m} \end{bmatrix}$

Seja agora $G_r = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = [V_1 \mid V_2]^{-1}$, assim podemos escrever:

$$\Lambda_r G_r = G_r (A_r + B_r F_r) \quad (3.50)$$

Pré multiplicando a equação (3.50) por U e utilizando a relação (3.45) temos:

$$\Sigma U G_r = U G_r (A_r + B_r F_r) \quad (3.51)$$

Chamando $U G_r$ de \mathcal{F}_r , temos que:

$$\mathcal{F}_r = \begin{bmatrix} G_1 + W_2 G_2 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_r \\ G_2 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Assim o poliedro $S(\mathcal{F}_r, 1_r)$ é um poliedro positivamente invariante do sistema reduzido em malha fechada (3.3). Pelo corolário (3.2) o poliedro $S(\mathcal{F}, 1_m)$ é positivamente invariante do sistema (3.1), sendo $\mathcal{F} = [0_{r \times (n-r)} \mid \mathcal{F}_r][V_1 \mid V_2]^{-1}$.

□

Observação 3.1 : Nos dois casos analisados acima, utilizamos como direções de entrada, w_i , vetores da base canônica de ordem (m) . Este fato, equivale a controlarmos o modo do sistema o qual esta associada a direção w_i por uma única entrada. Na grande maioria dos casos este método pode ser aplicado sem maiores problemas. Entretanto, podemos nos deparar com as seguintes dificuldades:

1. Os modos do sistema reduzido não são controláveis por uma determinada entrada. Isto equivale a termos uma coluna de B_r nula. Neste caso, devemos descartar o uso desta coluna e considerarmos (m) como o número de colunas não nulas em B_r . A seguir basta verificar o caso em que o problema se encontra e proceder como descrito acima.

2. Para dois autovalores distintos escolhidos em malha fechada obtemos autovetores linearmente dependentes [33]. Dessa forma não é possível obter uma matriz F_r . Temos várias saídas neste caso: modificar um dos autovalores; escolher uma outra coluna de B_r , no caso $r < m$, ou simplesmente desconsiderar esta coluna de B_r (considerando a entrada associada como inativa) e calcular uma matriz H na forma triangular aplicando o procedimento do caso $r > m$.

□

3.4 O Domínio de Estados Iniciais Admissíveis

Pela abordagem apresentada, o domínio de estados iniciais admissíveis pode ser considerado como o próprio poliedro $S(F, u_{max}, u_{min})$ (ou $S(\mathcal{F}, u_{max}, u_{min})$) [7]. Este, por sua vez, é conhecido apenas posteriormente ao cálculo de F . Assim, tendo-se como dado de projeto, um conjunto pré definido D_0 de estados iniciais, um teste para verificar se $D_0 \subset S(F, u_{max}, u_{min})$ deve ser feito. Caso esta condição não seja verificada, tem-se ainda vários graus de liberdade na escolha dos autovetores que serão modificados pelo posicionamento parcial de autoestrutura. Por exemplo, a partir da escolha de uma matriz H diferente da forma canônica de Jordan, pode-se calcular uma nova F e, conseqüentemente, tem-se um poliedro $S(F, u_{max}, u_{min})$ com forma diferente.

Como $S(F, u_{max}, u_{min})$ (ou $S(\mathcal{F}, u_{max}, u_{min})$) são não limitados nas direções associadas a \mathcal{V}_o , as componentes dos autovetores do sistema em malha fechada (3.1) em \mathcal{V}_o não irão influenciar no tamanho e na forma do poliedro. Por outro lado, modificando-se as componentes dos autovetores no subespaço \mathcal{V}_r , estaremos modificando a seção transversal do "hipertubo" (vide fig3.1) representado por $S(F, u_{max}, u_{min})$.

Como foi visto na seção 2.4.3, a projeção de um autovetor do sistema (3.1) no subespaço \mathcal{V}_r , corresponde ao autovetor do sistema reduzido. Este fato sugere então, que a análise da forma e do tamanho relativo da região de estados iniciais admissíveis, possa ser feita em sua projeção no subespaço \mathcal{V}_r . Novamente, a análise pode ser feita através do sistema de ordem reduzida, ou seja, estaremos interessados em analisar o tamanho e a forma do poliedro $S(F_r, u_{max}, u_{min})$ (ou $S(\mathcal{F}_r, u_{max}, u_{min})$), que é a projeção de $S(F, u_{max}, u_{min})$ ($S(\mathcal{F}, u_{max}, u_{min})$) em \mathcal{V}_r . Neste caso, a condição $D_0 \subset S(F, u_{max}, u_{min})$ pode então, ser substituída por $D_{0r} \subset S(F_r, u_{max}, u_{min})$, com D_{0r} representando a projeção de D_0 em \mathcal{V}_r .

Particularmente, se calcularmos o volume do poliedro limitado $S(F_r, u_{max}, u_{min})$ (ou $S(\mathcal{F}_r, u_{max}, u_{min})$), teremos uma medida de qualidade do posicionamento da autoestrutura do

sistema reduzido sob dois pontos de vista [29]:

- **Maximização do domínio de estados iniciais admissíveis:**

Através da escolha adequada dos autovetores, podemos modificar a forma do poliedro $S(F_r, u_{max}, u_{min})$ (ou $S(\mathcal{F}_r, u_{max}, u_{min})$) de forma tal que ele apresente o máximo volume e conseqüentemente o maior tamanho possível.

- **Robustez da alocação da autoestrutura do sistema reduzido:**

O máximo volume de $S(F_r, u_{max}, u_{min})$ ($S(\mathcal{F}_r, u_{max}, u_{min})$) é obtido pela escolha de autovetores do sistema reduzido que sejam mais ortogonais entre si quanto possível. Esta situação, por sua vez, caracteriza a mínima sensibilidade da autoestrutura do sistema reduzido a perturbações estruturais [34]. A partir da busca de ortogonalidade entre os autovetores do sistema reduzido, é mostrado em [40], que se está fazendo com que os ângulos dos autovetores para o sistema total em malha fechada (3.1) sejam o mais próximo possível de 90° . Assim, projetamos F_r a fim de garantir uma maior robustez ao sistema de ordem reduzida, estaremos certamente, contribuindo para uma maior insensibilidade dos autovalores do sistema original a variações paramétricas [34].

O volume de $S(F_r, u_{max}, u_{min})$ é dado por $2^r |det(V_r)|$ [29]. Logo, no algoritmo utilizando H na forma canônica de Jordan, os graus de liberdade que se tem na escolha de $S(F_r, u_{max}, u_{min})$ correspondem à seleção e o posicionamento de (r) autovalores, λ_i , pela escolha adequada de (r) entre (m) direções de entrada possíveis. Isto equivale a escolhermos quais as $(m - r)$ linhas de F serão nulas, ou qual das entradas de controle irá atuar em cada variável de estado. Pode-se então formular o seguinte problema combinatório [29] para a alocação da autoestrutura do sistema reduzido:

$$\max_{V_r = \langle v_{r1}, \dots, v_{rr} \rangle} |det(V_r)|$$

sujeito à:

$$(\lambda_i I_r - A_r)v_{ri} = \sum_{j=1}^m z_{ij} B_{rj} \text{ para } \lambda_i \in \mathfrak{R}^n$$

e

$$\begin{cases} (\mu_i I_r - A_r)v_{ri} - \sigma_i v_{r(i+1)} = \sum_{j=1}^m z_{ij} B_{rj} \\ \sigma_i v_{ri} + (\mu_i I_r - A_r)v_{r(i+1)} = \sum_{j=1}^m z_{ij} B_{r(j+1)} \end{cases}$$

para $\lambda_i = \mu_i + j\sigma_i$, $\lambda_{i+1} = \mu_i - j\sigma_i$, $z_{(i+1)(j+1)} = z_{ij}$.

com

$$\sum_{i=1}^r z_{ij} \leq 1, \quad \sum_{j=1}^m z_{ij} = 1, \quad z_{ij} = 1 \text{ ou } 0.$$

Dessa maneira, a j -ésima coluna de B_r é associada a λ_i se e somente se $z_{ij} = 1$.

Para valores razoáveis de m , este problema de atribuição não linear pode ser resolvido por enumeração. Para sistemas de ordem mais elevada, técnicas mais sofisticadas tais como *branch and bound*, devem ser utilizadas [29].

Muitos sistemas estão sujeitos à perturbações impulsivas que são mais freqüentes ou de maior amplitude em um número reduzido de variáveis de estado. O domínio de estados iniciais admissíveis deve preferencialmente ser maximizado nas direções associadas a estas perturbações. Deve-se então encontrar uma solução que se adapte melhor a um domínio de estados iniciais D_0 , pré estabelecido, através da utilização dos graus de liberdade na escolha dos autovetores e direções de entrada como visto acima.

3.5 Construção de Poliedros Dissimétricos

Pela metodologia apresentada na seção 3.3, temos, por construção, que a matriz H é composta pela forma canônica de Jordan do sistema de ordem reduzida.

No caso de poliedros simétricos do tipo $S(F_r, 1_m)$ ou $S(\mathcal{F}_r, 1_r)$, a fim de que seja satisfeita a segunda relação de invariância positiva, devemos satisfazer a condição espectral (3.23) ou (3.35).

Para poliedros dissimétricos, esta condição espectral é um pouco diferente e pode ser obtida a partir da segunda relação de invariância positiva. Consideremos primeiramente o caso em que $r \leq m$. Para isto consideremos, sem perda de generalidade, uma matriz H com um par de autovalores complexos conjugados e um autovalor real:

$$\begin{bmatrix} \mu_i & \sigma_i & 0 \\ -\sigma_i & \mu_i & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{i+2} \end{bmatrix}$$

Assim temos que:

$$\hat{H}^+ = \begin{bmatrix} \mu_i & |\sigma_i| & 0 \\ 0 & \mu_i & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{i+2} \end{bmatrix}, \quad \hat{H}^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ |\sigma_i| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e a segunda relação de invariância positiva é dada por:

$$\begin{bmatrix} \mu_i & |\sigma_i| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_i & 0 & |\sigma_i| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{i+2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_i & |\sigma_i| & 0 \\ |\sigma_i| & 0 & 0 & 0 & \mu_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{i+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (u_{max})_i \\ (u_{max})_{i+1} \\ (u_{max})_{i+2} \\ (u_{min})_i \\ (u_{min})_{i+1} \\ (u_{min})_{i+2} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde devemos ter que:

$$\mu_i(u_{max})_i + |\sigma_i|(u_{max})_{i+1} \leq 0 \implies -|\sigma_i| \frac{(u_{max})_{i+1}}{(u_{max})_i} \quad (3.53)$$

$$\mu_i(u_{max})_{i+1} + |\sigma_i|(u_{min})_i \leq 0 \implies -|\sigma_i| \frac{(u_{min})_i}{(u_{max})_{i+1}} \quad (3.54)$$

$$\mu_i(u_{min})_i + |\sigma_i|(u_{min})_{i+1} \leq 0 \implies -|\sigma_i| \frac{(u_{min})_{i+1}}{(u_{min})_i} \quad (3.55)$$

$$\mu_i(u_{min})_{i+1} + |\sigma_i|(u_{max})_i \leq 0 \implies -|\sigma_i| \frac{(u_{max})_i}{(u_{min})_{i+1}} \quad (3.56)$$

$$\lambda_{i+2}(u_{max})_{i+2} \leq 0 \quad (3.57)$$

$$\lambda_{i+2}(u_{min})_{i+2} \leq 0 \quad (3.58)$$

Podemos então, formular a seguinte condição espectral genérica para autovalores complexos:

$$\mu_i \leq -\max \left(\frac{|\sigma_i|(u_{max})_{i+1}}{(u_{max})_i}, \frac{|\sigma_i|(u_{min})_i}{(u_{max})_{i+1}}, \frac{|\sigma_i|(u_{min})_{i+1}}{(u_{min})_i}, \frac{|\sigma_i|(u_{max})_i}{(u_{min})_{i+1}} \right) \quad (3.59)$$

e para autovalores reais, como no caso simétrico, temos que:

$$\lambda_{i+2} \leq 0 \quad (3.60)$$

A partir da escolha dos autovalores para o sistema reduzido respeitando as condições genéricas (3.59) e (3.60), o procedimento para o cálculo de uma F_r tal que $S(F_r, u_{max}, u_{min})$ seja positivamente invariante em relação ao sistema (3.3) é idêntico ao desenvolvido para poliedros simétricos.

Analisemos agora o caso $r > m$. A fim de ilustrar a metodologia de análise, suponhamos que a matriz Σ possui um par de autovalores complexos e um autovalor real, com $(r - m) = 1$:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mu_i & \sigma_i & m_1 \\ -\sigma_i & \mu_i & m_2 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

temos então que:

$$\Sigma^+ = \begin{bmatrix} \mu_i & |\sigma_i| & m_1 \\ 0 & \mu_i & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}, \quad \Sigma^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ |\sigma_i| & 0 & |m_2| \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a segunda relação de invariância positiva fica:

$$\begin{bmatrix} \mu_i & |\sigma_i| & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_i & 0 & |\sigma_i| & 0 & |m_2| \\ 0 & 0 & \lambda_{i+2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_i & |\sigma_i| & m_1 \\ |\sigma_i| & 0 & |m_2| & 0 & \mu_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{i+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (u_{max})_i \\ (u_{max})_{i+1} \\ (u_{max})_{i+2} \\ (u_{min})_i \\ (u_{min})_{i+1} \\ (u_{min})_{i+2} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

logo, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$\mu_i(u_{max})_i + |\sigma_i|(u_{max})_{i+1} + |m_1|(u_{max})_{i+2} \leq 0 \quad (3.61)$$

$$\mu_i(u_{max})_{i+1} + |\sigma_i|(u_{min})_i + |m_2|(u_{min})_{i+2} \leq 0 \quad (3.62)$$

$$\mu_i(u_{min})_i + |\sigma_i|(u_{min})_{i+1} + |m_1|(u_{min})_{i+2} \leq 0 \quad (3.63)$$

$$\mu_i(u_{min})_{i+1} + |\sigma_i|(u_{max})_i + |m_2|(u_{max})_{i+2} \leq 0 \quad (3.64)$$

$$\lambda_{i+2}(u_{max})_{i+2} \leq 0 \quad (3.65)$$

$$\lambda_{i+2}(u_{min})_{i+2} \leq 0 \quad (3.66)$$

Podemos então, formular a seguinte condição espectral genérica para autovalores complexos:

$$\mu_i \leq -\max \left(\frac{|\sigma_i|(u_{max})_{i+1} + |m_1|(u_{max})_{i+2}}{(u_{max})_i}, \right. \quad (3.67)$$

$$\left. \frac{|\sigma_i|(u_{min})_i + |m_2|(u_{min})_{i+2}}{(u_{max})_{i+1}}, \right. \quad (3.68)$$

$$\left. \frac{|\sigma_i|(u_{min})_{i+1} + |m_1|(u_{min})_{i+2}}{(u_{min})_i}, \right. \quad (3.69)$$

$$\left. \frac{|\sigma_i|(u_{max})_i + |m_2|(u_{max})_{i+2}}{(u_{min})_{i+1}} \right) \quad (3.70)$$

e para autovalores reais, como no caso simétrico, temos que:

$$\lambda_{i+2} \leq 0 \quad (3.71)$$

Neste exemplo foi assumido $m_1 > 0$ e $m_2 < 0$. Cabe ressaltar, que dependendo do valor de $(r - m)$ e do sinal dos escolhidos m_i 's, obtém-se condições espectrais semelhantes às vistas acima a título de exemplificação do procedimento.

Como no caso $r \leq m$, a partir da escolha de autovalores que respeitem as condições espectrais, o procedimento para o cálculo de F_r tal que $S(\mathcal{F}_r, u_{max}, u_{min})$ seja positivamente invariante em relação à (3.3), segue como o visto para poliedros simétricos.

Observação 3.2 *No caso de sistemas discretos no tempo, a partir da segunda relação de invariância dada pela observação (1.1), temos a seguinte relação espectral [5] para poliedros simétricos:*

$$|\mu_i| + |\sigma_i| \leq 1$$

Esta relação, similarmente ao caso contínuo, deve ser satisfeita na escolha dos autovalores do sistema reduzido.

Para poliedros dissimétricos, as condições espectrais são obtidas analogamente ao caso contínuo, considerando-se a segunda relação de invariância positiva vista na observação 1.1. Obtidas as condições espectrais, a metodologia para a resolução do problema para o caso discreto é idêntica à vista para o caso contínuo [29].

3.6 Exemplos

Exemplo 3.1 Seja o sistema descrito pelas seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.01 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.2855 & -0.707 & 1.3229 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1761 \\ 3.0447 & -7.5922 \\ -5.52 & 4.99 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Deseja-se encontrar uma matriz de realimentação F tal que: as restrições simétricas do tipo (3.20) sejam respeitadas, o sistema em malha fechada seja estável.

Solução

Fazendo uma transformação de Schür na matriz A , obtemos a matriz Q cujas colunas formam uma base ortonormal para o espaço de estados $\mathcal{X} \triangleq \mathbb{R}^4$.

$$Q = \begin{bmatrix} 0.3329 & 0.4360 & -0.6246 & -0.5558 \\ -0.9278 & 0.2824 & -0.2329 & -0.0724 \\ -0.0534 & -0.6935 & -0.6902 & -0.1997 \\ 0.1599 & 0.4992 & -0.2814 & 0.8037 \end{bmatrix}$$

As matrizes do sistema na base dada pelas colunas de Q ficam:

$$A_Q = \begin{bmatrix} -0.3340 & 1.8471 & -1.3044 & 2.8270 \\ 0 & -1.9809 & 0.0993 & -1.5363 \\ 0 & 0 & -0.1898 & 0.3168 \\ 0 & 0 & -0.7273 & 0.7510 \end{bmatrix}; B_Q = \begin{bmatrix} -2.3894 & 6.8358 \\ 4.8719 & -5.5280 \\ 2.8371 & -1.7857 \\ -1.5572 & 1.4480 \end{bmatrix}$$

Os autovalores de A são: $\lambda_1 = -1.9809$, $\lambda_2 = -0.3340$, $\lambda_3 = 0.2806 + j0.0954$ e $\lambda_4 = 0.2806 - j0.0954$. A fim de solucionar o problema proposto, vamos posicionar em malha fechada $\lambda_3 = -1.5$ e $\lambda_4 = -0.5$, mantendo-se λ_1 e λ_2 como em malha aberta.

A partir das matrizes acima formamos o seguinte sistema reduzido:

$$\dot{z}_r = \begin{bmatrix} -0.1898 & 0.3168 \\ -0.7273 & 0.7510 \end{bmatrix} z_r + \begin{bmatrix} 2.8371 & -1.7857 \\ -1.5572 & 1.4480 \end{bmatrix} u$$

Temos $r = m = 2$. Vamos então, de acordo com a proposição (3.1), calcular F_r que coloque os pólos do sistema reduzido em -1.5 e -0.5 e ao mesmo tempo garanta a invariância positiva de $S(F_r, 1_m)$. Para tanto, vamos utilizar o método proposto para o caso $r \leq m$. Devemos escolher então a matriz de direções de entrada como identidade:

$$W_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

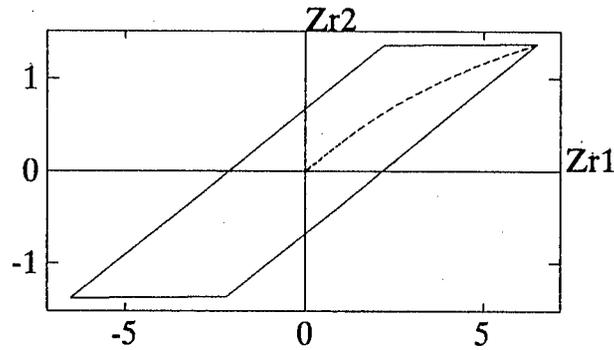


Figura 3.2: Trajetória do sistema reduzido e o poliedro $S(F_r, 1_m)$

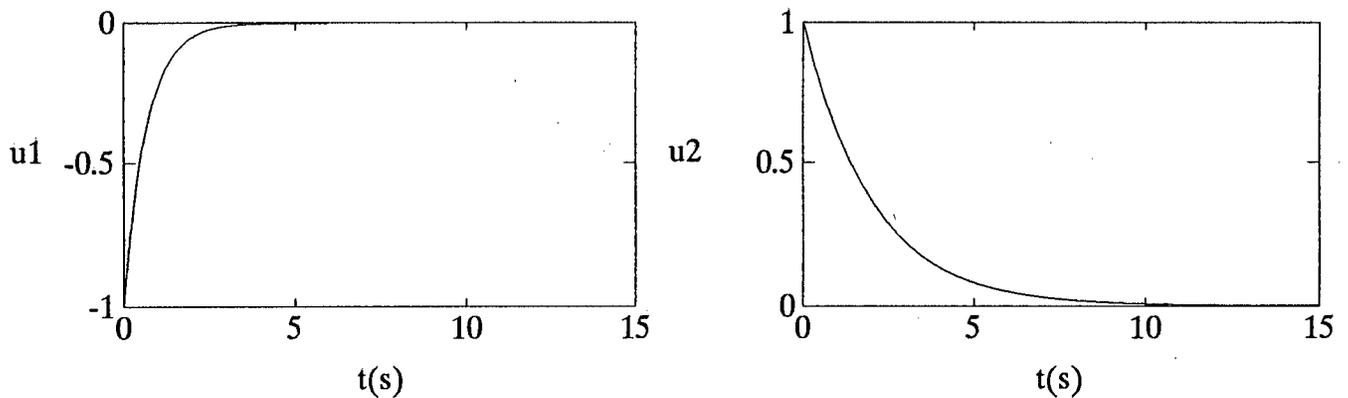


Figura 3.3: Resposta temporal do sinal de controle

Calculando os autovetores do sistema reduzido em malha fechada pela equação $v_r = (\Lambda_r I_r - A_r)^{-1} B_r w_r$ obtemos a matriz

$$V_r = \begin{bmatrix} -2.1636 & 4.3535 \\ -0.0073 & 1.3734 \end{bmatrix}$$

Sendo $F_r = W_r V_r^{-1}$ e $F = [0_{(n-r)*m} \mid F_r] Q^T$ obtemos:

$$F_r = \begin{bmatrix} -0.4672 & 1.4809 \\ -0.0025 & 0.7360 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -0.5312 & 0.0016 & 0.6181 & 1.3217 \\ -0.4075 & -0.0527 & 0.1487 & 0.5922 \end{bmatrix}$$

Pelo método proposto:

$$H = \begin{bmatrix} -1.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

A trajetória do sistema a partir da condição inicial projetada $z_r(0) = [6.5171 \ 1.3806]^T$, bem como o poliedro $S(F_r, 1_m)$ são mostrados na figura (3.2). As componentes do sinal de controle são mostradas na figura (3.3). Nota-se que tanto u_1 quanto u_2 não violam os limites impostos pelas restrições. A trajetória do sinal de controle e o poliedro Ω no espaço de controle são vistos na figura (3.4).

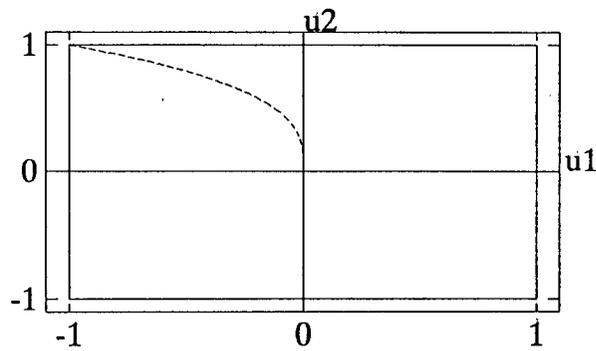


Figura 3.4: Trajetória do sinal de controle e o poliedro Ω

No cálculo de F_r feito acima, o autovetor -1.5 foi associado à direção de entrada $[1 \ 0]^T$ e o autovalor -0.5 à direção $[0 \ 1]^T$. Vamos analisar agora (de acordo com a seção 1.4), o que ocorre se fizermos a outra combinação possível, ou seja, -0.5 associado à $[1 \ 0]^T$ e -1.5 à $[0 \ 1]^T$:

$$W_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; V_r = \begin{bmatrix} -6.5362 & 1.4084 \\ -2.5550 & -0.1883 \end{bmatrix}$$

$$F_r = \begin{bmatrix} -0.0390 & -0.2917 \\ 0.5291 & -1.3536 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0.1865 & 0.0302 & -0.0313 & -0.2234 \\ 0.4218 & -0.0253 & -0.6355 & -1.2368 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -1.5 \end{bmatrix}$$

Neste caso observa-se que o poliedro $S(F_r, 1_m)$ apresenta uma área maior (como pode ser visto na figura (3.5)).

De fato, o determinante de V_r neste último caso é maior. Como foi visto, isto confere uma maior área ao domínio $S(F_r, 1_m)$ e também garante uma maior insensibilidade dos autovalores posicionados com respeito à variações paramétricas.

□

Exemplo 3.2 Seja o sistema descrito pelas seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -3.3805 & -8.6200 & -11.3694 & 9.8250 \\ -2.4838 & 1.6126 & 0.0653 & -0.0680 \\ 3.3586 & -39.2484 & -53.1112 & 44.7186 \\ 0.9044 & -35.1344 & -49.5690 & 41.6791 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0.6868 & 0.5269 \\ 0.5890 & 0.0920 \\ 0.9304 & 0.6539 \\ 0.8462 & 0.4160 \end{bmatrix}$$

Deseja-se encontrar uma matriz de realimentação F tal que: as restrições (3.20) sejam respeitadas, o sistema em malha fechada seja estável

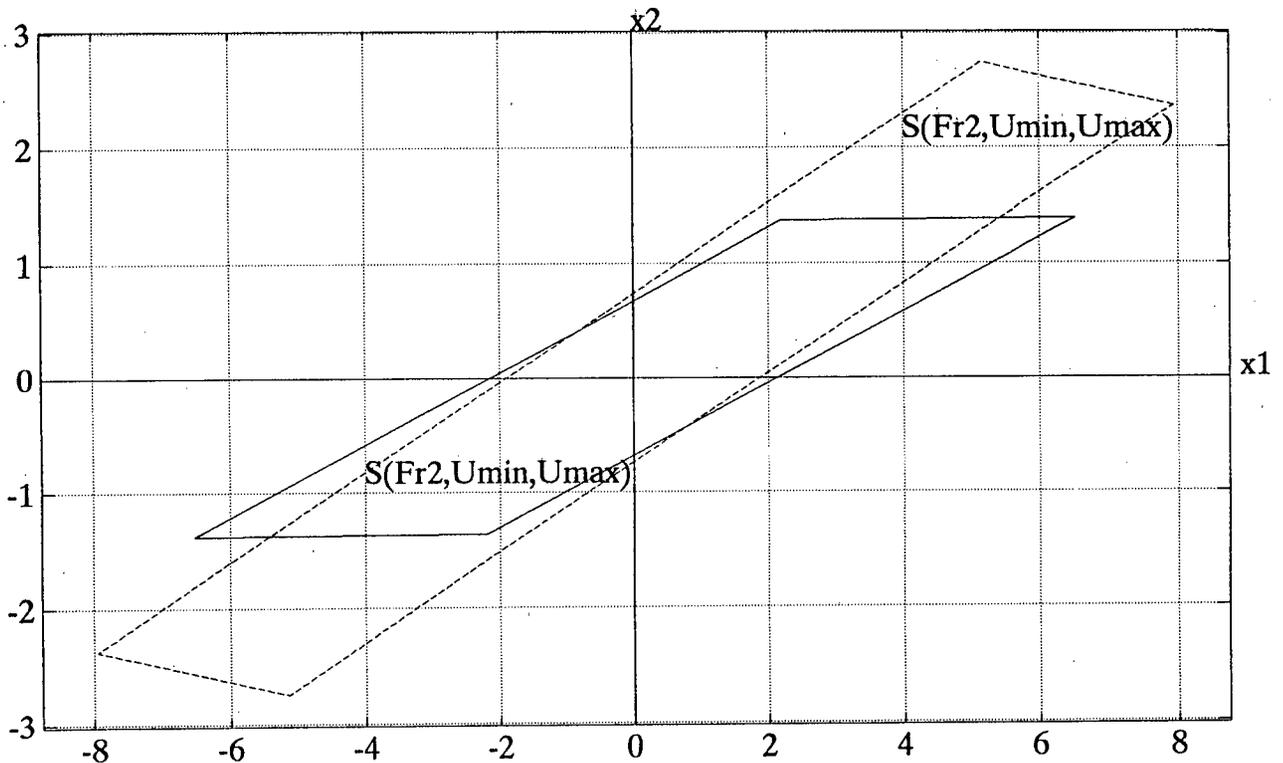


Figura 3.5: Comparação do tamanho dos poliedros $S(F_r, 1_m)$

Solução:

Podemos utilizar a seguinte matriz ortonormal para colocar o sistema em uma forma triangular superior (Transformação de Schur):

$$Q = \begin{bmatrix} 0.2221 & -0.8442 & 0.4879 & 0.0081 \\ 0.0477 & -0.4089 & -0.7199 & -0.5588 \\ 0.6884 & 0.3440 & 0.2913 & -0.5682 \\ 0.6888 & -0.0434 & -0.3986 & 0.6040 \end{bmatrix}$$

As matrizes do sistema na base dada pelas colunas de Q ficam:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -9.9998 & -7.9147 & -6.7059 & 108.5266 \\ 0 & -4.5001 & 2.2672 & 9.9661 \\ 0 & 0 & 1.5001 & 3.0686 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2003 \end{bmatrix}; \bar{B} = \begin{bmatrix} 1.4040 & 0.8581 \\ -0.5372 & -0.2755 \\ -0.1552 & 0.2155 \\ -0.3412 & -0.1675 \end{bmatrix}$$

Os autovalores de A são: $\lambda_1 = -9.9998$, $\lambda_2 = -4.5001$, $\lambda_3 = -0.2003$ e $\lambda_4 = 1.5001$. Assumindo-se também que deseja-se uma melhoria na dinâmica do sistema, escolhemos os autovalores para o sistema em malha fechada como $\lambda_2 = -6$, $\lambda_3 = -3$, $\lambda_4 = -2$, mantendo λ_1 como em malha aberta.

A partir das matrizes acima obtém-se o seguinte sistema reduzido:

$$\dot{z}_r = \begin{bmatrix} -4.5001 & 2.2672 & 9.9661 \\ 0 & 1.5001 & 3.0686 \\ 0 & 0 & -0.2003 \end{bmatrix} z_r + \begin{bmatrix} -0.5372 & -0.2755 \\ -0.1552 & 0.2155 \\ -0.3412 & -0.1675 \end{bmatrix} u$$

Estamos diante de um problema em que $r > m$. Assim, para resolver o problema, devemos determinar uma matriz \mathcal{F}_r , tal que o poliedro $S(\mathcal{F}_r, 1_m)$ seja positivamente invariante em relação a este sistema utilizando para isto o resultado da proposição (3.3).

Para determinar F_r vamos escolher $M = [1 \ 1]^T$. Com isto obtém-se:

$$W_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.25 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; V_r = \begin{bmatrix} -0.0276 & 0.0797 & 0.2385 \\ -0.0034 & -0.0887 & -0.1736 \\ 0.0588 & 0.0598 & 0.1405 \end{bmatrix}$$

$$F_r = \begin{bmatrix} -1.7105 & 9.7637 & 16.7539 \\ -9.9123 & -24.2717 & -6.0483 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \mathcal{F}_r = \begin{bmatrix} -1.7105 & 9.7637 & 16.7539 \\ -9.9123 & -24.2717 & -6.0483 \\ 10.5205 & 13.3102 & 5.7056 \end{bmatrix}$$

Utilizando a equação $\mathcal{F} = \begin{bmatrix} F \\ E \end{bmatrix} = \mathcal{F}_r Q_r^T$ temos:

$$F = \begin{bmatrix} 6.3428 & -15.6919 & -7.2648 & 6.3013 \\ -3.5229 & 24.9063 & -7.0427 & 6.4509 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} -2.3411 & -17.0721 & 4.2539 & -2.3153 \end{bmatrix}$$

O comportamento temporal das variáveis do sistema reduzido é mostrado para a condição inicial projetada $z_r(0) = [-0.2731 \ 0.1694 \ -0.0669]^T$ nas figuras (3.6) (3.7). Na (3.8) tem-se a resposta temporal do sinal de controle. A trajetória do sinal de controle e o respeito às restrições no espaço de controle pode ser acompanhado na figura (3.9).

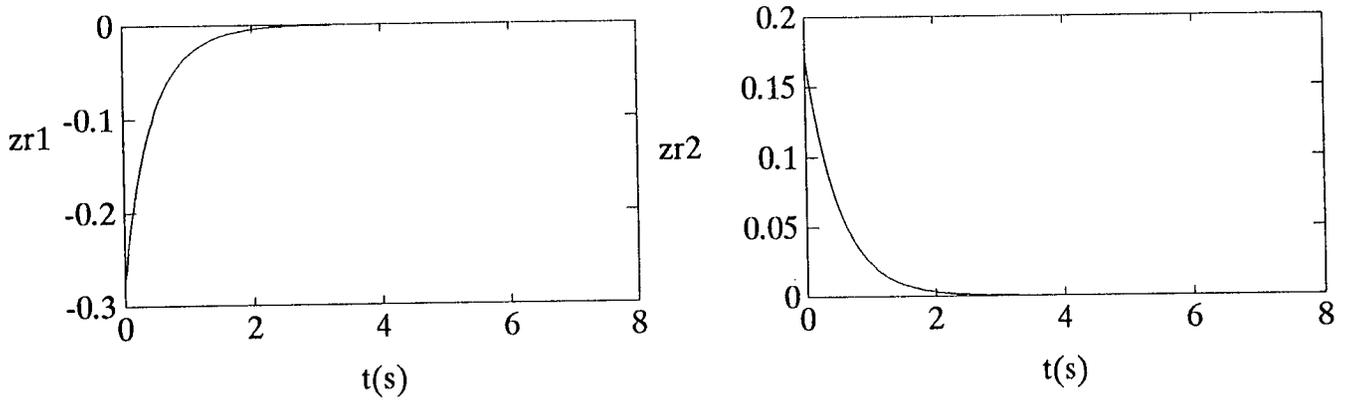


Figura 3.6: Resposta temporal do Sistema Reduzido

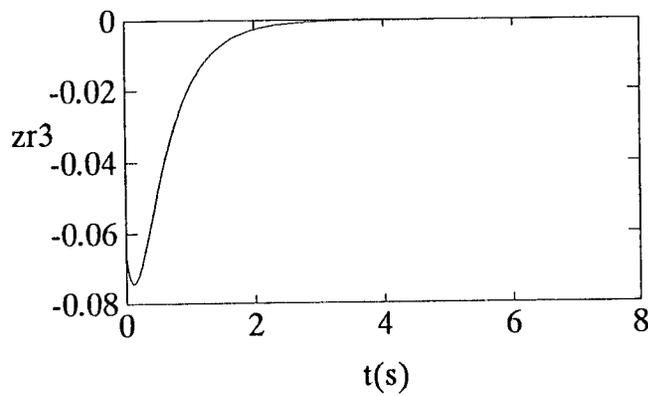


Figura 3.7: Resposta temporal do Sistema Reduzido

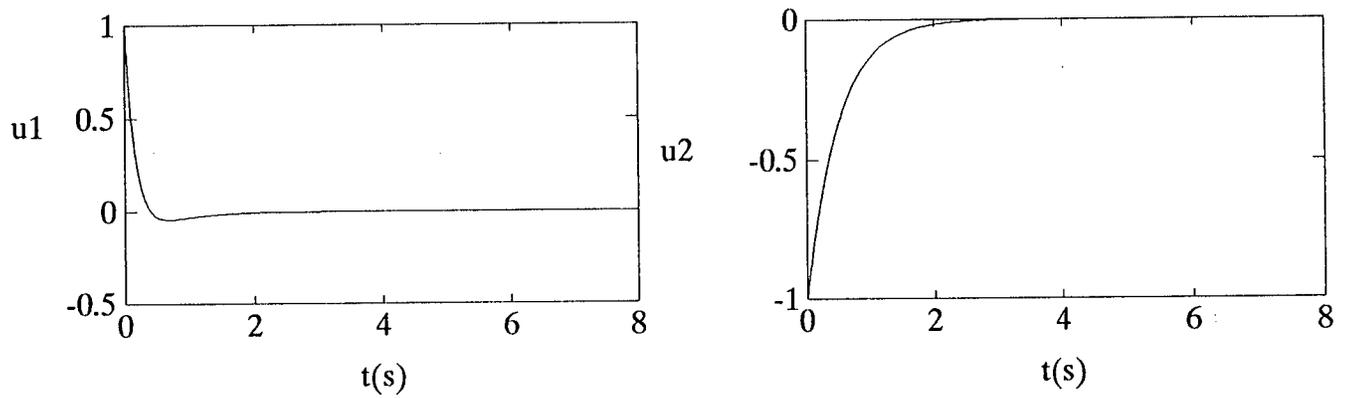


Figura 3.8: Resposta temporal do sinal de controle

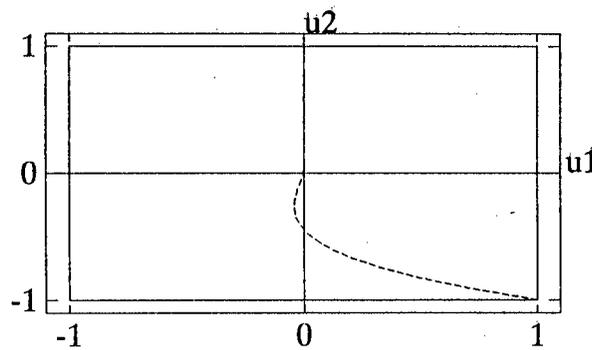


Figura 3.9: O poliedro Ω e a trajetória de controle

3.7 Conclusão

O poliedro $S(F, u_{max}, u_{min})$ é não limitado na direção do subespaço $\mathcal{V}_o \triangleq \text{Ker } F$, delimitando uma região no espaço de estados que toma a forma de um "hipertubo". A projeção de $S(F, u_{max}, u_{min})$ em \mathcal{V}_r ao longo de \mathcal{V}_o determina um poliedro $S(F_r, u_{max}, u_{min})$ que é equivalente ao corte transversal do "hipertubo", segundo o subespaço \mathcal{V}_r . Logo, se $S(F, u_{max}, u_{min})$ é um poliedro positivamente invariante em relação ao sistema total em malha fechada temos, equivalentemente, que a invariância positiva de $S(F_r, u_{max}, u_{min})$ em relação ao sistema reduzido em malha fechada é garantida. Dessa maneira, é possível solucionarmos o PRRVC para o sistema total a partir da solução de um PRRVC para o sistema de ordem reduzida. Formulou-se então, um algoritmo genérico para a resolução do PRRVC utilizando um sistema de ordem reduzida.

A seguir, estudou-se a solução do PRRVC, incorporando ao passo 2 do algoritmo o cálculo de F_r pela abordagem de posicionamento parcial de autoestrutura proposta em [14]. A partir da escolha apropriada da autoestrutura do sistema reduzido encontra-se um par de matrizes (H, F_r) para as quais as relações de invariância positiva são satisfeitas. A fim de mostrar a metodologia utilizou-se um desenvolvimento considerando-se as restrições sobre o vetor de controle simétricas e normalizadas. Foram então analisados dois casos. No primeiro, temos o número de autovalores a serem posicionados (ordem do sistema reduzido) menor ou igual ao número de entradas de controle. Neste caso, garante-se a invariância positiva de um poliedro $S(F_r, 1_m)$ em relação ao sistema reduzido e, equivalentemente, a invariância positiva do poliedro dado por $S(F, 1_m)$; a matriz H correspondente é do tipo bloco diagonal, sendo seus elementos dados pelos autovalores escolhidos para o sistema reduzido em malha fechada (forma canônica real de Jordan). No segundo caso, em que temos o número de pólos a serem posicionados maior que o número de entradas de controle, garante-se a invariância positiva de

um poliedro $S(\mathcal{F}_r, 1_m)$ contido em $S(F_r, 1_m)$ e que corresponde a um poliedro positivamente invariante $S(\mathcal{F}, 1_m)$ em relação ao sistema original. Este poliedro contém $(n - m)$ pares de faces paralelas determinadas pelas linhas da matriz F . A matriz H obtida neste caso, é triangular superior, tendo em sua diagonal principal os autovalores do sistema reduzido em malha fechada.

O poliedro $S(F, u_{max}, u_{min})$ pode ser considerado como um domínio de estados iniciais admissíveis. No entanto, é importante que este poliedro também englobe o domínio de condições iniciais pré estabelecido na formulação do problema. Baseado na escolha da autoestrutura do sistema reduzido, pode-se variar o tamanho e a forma de $S(F_r, u_{max}, u_{min})$ e conseqüentemente de $S(F, u_{max}, u_{min})$. Em particular, se esta escolha é feita no sentido de tornar os ângulos entre os autovetores do sistema reduzido o mais próximo possível de 90° , tem-se que o volume do poliedro $S(F, 1_m)$ (ou $S(\mathcal{F}, 1_m)$) é maximizado. Assim, é possível maximizar a região de estados iniciais para os quais o sistema é levado assintoticamente para a origem sem a saturação do sinal de controle. Ao mesmo tempo, consegue-se uma maior insensibilidade dos autovalores do sistema com relação a variações paramétricas.

A vantagem de trabalharmos com o sistema de ordem reduzida fica evidente quando a ordem do sistema é elevada e temos poucos pólos instáveis e de dinâmica não satisfatória em malha aberta. No cálculo da matriz de realimentação de estados pelo método de Moore a matriz de autovetores a ser invertida será da ordem do sistema reduzido. Se utilizamos uma base ortonormal para colocar o sistema na forma em que se possibilita a extração do sistema reduzido, não necessitamos de inversão matricial na transformação de similaridade, e os autovalores do sistema são obtidos de uma forma numericamente mais robusta. Neste caso, fica clara a minimização problemas computacionais com a utilização da metodologia de posicionamento parcial de autoestrutura a partir de uma decomposição de Schur (utilização de base ortonormal).

No próximo capítulo será abordada a resolução do problema de controle sob restrições por algoritmos de otimização através da utilização direta de um sistema de ordem reduzida.

Capítulo 4

Resolução do PRRVC Utilizando um Sistema de Ordem Reduzida e Técnicas de Otimização

4.1 Introdução

Seguindo a abordagem de tornar o poliedro $S(F, u_{max}, u_{min})$ positivamente invariante em relação ao sistema em malha fechada, serão estudados neste capítulo métodos que solucionam o PRRVC a partir da sua formulação como um problema de otimização. Nas metodologias a serem apresentadas, a função custo é escolhida linear e está associada a velocidade de convergência do sistema para a origem. As relações de invariância positiva e de inclusão do domínio de estados iniciais, D_o , em $S(F, u_{max}, u_{min})$ são consideradas como restrições do problema de otimização.

Dada a necessidade da $(A + BF)$ -invariância do $\text{Ker } F$, com o intuito de satisfazer a primeira relação de invariância positiva, tem-se que a solução do problema de otimização, quando ela existe, leva a uma matriz F que posiciona parcialmente a autoestrutura do sistema. Neste caso, os autovalores associados à $(\mathcal{X}/\text{Ker } F)$ são alocados de modo a apresentarem as menores constantes de tempo possível, implicando em uma maior rapidez da resposta dinâmica do controle.

Nos trabalhos que propõem este tipo de metodologia [4] [9] [31], a formulação do problema de otimização é feita para o sistema como um todo. Baseando-se na proposição 3.1 apresentada no capítulo anterior, iremos neste capítulo, reformular os algoritmos apresentados nestes trabalhos. Estas reformulações serão no sentido da utilização de um sistema de ordem reduzida, a fim de executar o passo 2 do algoritmo proposto no capítulo anterior para a resolução do PRRVC. Será visto então, que este novo tipo de formulação trará algumas vantagens na

resolução do problema.

Na seção 4.1 será vista a abordagem por programação não linear, e na seção 4.2 a abordagem por programação linear. Nos dois casos serão apresentados, primeiramente, a metodologia original (para o sistema como um todo) e, em seguida, a formulação utilizando o sistema de ordem reduzida.

4.2 Abordagem por Programação não Linear

Esta abordagem para a resolução do PRRVC é sugerida por Bitsoris e Vassilaki, em [9], para o caso discreto. Consiste basicamente em resolver um problema de programação não linear no qual procura-se maximizar a velocidade de convergência dos estados do sistema em relação à origem. As restrições do programa não linear (PNL) são dadas então, pelas equações de invariância positiva, uma relação de inclusão do conjunto de estados iniciais pré estabelecidos em $S(F, u_{max}, u_{min})$ e a necessidade de que os autovalores do sistema em malha fechada sejam estáveis.

Esta é uma abordagem bastante intuitiva e simples do ponto de vista da formulação matemática. Entretanto, sua implementação numérica não é trivial. Em geral, os algoritmos para a resolução de programas não-lineares são de implementação complexa e muitas vezes a convergência numérica dos mesmos não é garantida, estando esta, muitas vezes, vinculada a escolha de uma condição inicial adequada para a busca iterativa da solução [37]. Aliado a este fato, surge mais um problema: equacionar algebricamente a restrição para o PNL de que os autovalores em malha fechada devem estar contidos em uma região do plano complexo que garanta a estabilidade do sistema em malha fechada. Aparentemente, não é possível obter um relacionamento matemático capaz de representar esta restrição no PNL. Assim, após o cálculo de F pelo PNL, se faz mister um teste de estabilidade do sistema em malha fechada.

Nesta seção, será visto como é possível, através de um sistema de ordem reduzida, suplantando algumas das desvantagens e problemas associados a esta abordagem. Para isto utilizaremos o caso discreto para a apresentação inicial do problema, ficando a formulação do caso contínuo para um segundo momento.

4.2.1 Formulação do Problema para o Sistema como um Todo

Consideremos o seguinte sistema linear multivariável discreto:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (4.1)$$

sendo $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ e $u(k) \in \mathbb{R}^m$. (A, B) é suposto ser estabilizável.

O vetor de controle é sujeito às seguintes restrições:

$$-u_{min} \leq u(k) \leq u_{max} \quad (4.2)$$

com $(u_{min})_i \geq 0$ e $(u_{max})_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$.

Seja uma lei de controle do tipo realimentação de estados:

$$u(k) = Fx(k) \quad (4.3)$$

com $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que o sistema em malha fechada é então descrito por:

$$x(k+1) = A_0x(k) \quad (4.4)$$

onde $A_0 = A + BF$.

As restrições sobre o vetor de controle definem então o seguinte poliedro no espaço de estados:

$$S(F, u_{min}, u_{max}) = \{ x \in \mathbb{R}^n : -u_{min} \leq Fx \leq u_{max} \} \quad (4.5)$$

Considerando um conjunto de estados iniciais admissíveis definido pelo poliedro fechado:

$$D_0(K, w) = \{ x \in \mathbb{R}^n : Kx \leq w \} \quad (4.6)$$

com $K \in \mathbb{R}^{q \times n}$ e $\text{rank}(K) = n$, a resolução para o PRRVC pode então, ser obtida pelo cálculo de uma matriz de realimentação de estados, F , tal que:

1. $D_0(K, w) \subseteq S(F, u_{min}, u_{max})$
2. $S(F, u_{min}, u_{max})$ seja positivamente em relação ao sistema (4.4).
3. Os autovalores da matriz $(A + BF)$ sejam estáveis.

Uma condição algébrica que garante a relação de inclusão dada no item 1 é fornecida pela proposição seguinte, que utiliza um resultado fundamental da programação linear [9] [11] [48].

Proposição 4.1 : *Os poliedros $D_0(K, w)$ e $S(F, u_{min}, u_{max})$ satisfazem a relação*

$$D_0(K, w) \subseteq S(F, u_{min}, u_{max})$$

se e somente se

$$-u_{min} \leq Fp_{(j)} \leq u_{max}, \quad j = 1, \dots, nv.$$

onde $p_{(j)}$ são os vértices do poliedro fechado $D_0(K, w)$.

□

A fim de obter a solução para o problema, pode-se então formular o seguinte programa não linear (PNL):

$$\begin{aligned} \text{Min } J(F, H^+, H^-) &= \epsilon \\ \text{sujeito à:} \end{aligned}$$

$$FA + FBF = (H^+ - H^-)F \quad (4.7)$$

$$\begin{bmatrix} H^+ & H^- \\ H^- & H^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{min} \\ u_{max} \end{bmatrix} \leq \epsilon \begin{bmatrix} u_{min} \\ u_{max} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$-u_{min} \leq Fp_{(j)} \leq u_{max} \quad , \quad j = 1, \dots, nv. \quad (4.9)$$

$$H^+ \geq 0 \quad , \quad H^- \geq 0 \quad , \quad \epsilon \geq 0 \quad (4.10)$$

onde as incógnitas são os elementos das matrizes F e H . Além disso, deve-se ter que a matriz F encontrada satisfaça:

$$|\sigma(A + BF)| < 1 \quad (4.11)$$

Observando o PNL, nota-se que a equação (4.7) corresponde a primeira relação de invariância positiva para o poliedro $S(F, u_{min}, u_{max})$. Como já foi visto no capítulo 1, esta equação é equivalente a $(A + BF)$ -invariância do $\text{Ker } F$ e a um posicionamento parcial de autoestrutura. Assim, se houver uma solução para o PNL, a matriz F obtida necessariamente produzirá um posicionamento parcial da autoestrutura do sistema (4.1).

A segunda relação de invariância positiva, expressa em (4.8), garante que os autovalores de H estejam contidos dentro de um círculo no plano complexo, cujo raio é igual a ϵ (vide observação 1.1). Diz-se então que o *raio espectral* [19] de H é menor que ϵ ($\rho(H) < \epsilon$). Assim, se $\epsilon < 1$, temos a garantia de que os autovalores de H são estáveis e, conseqüentemente, os autovalores de A que forem alterados pelo posicionamento parcial de autoestrutura são estáveis. Entretanto, nada podemos afirmar quanto aos autovalores que permanecerão inalterados. Se A possuir autovalores instáveis, existe a possibilidade de que um dos autovalores em malha aberta que será mantido em malha fechada pela lei $u = Fx$, seja instável. Este fato ocorre por não haver meios de escrever a relação (4.11) como relações algébricas entre as variáveis do PNL. Desse modo, toda a solução F obtida pelo PNL deve ser testada no sentido de verificar a satisfação de (4.11).

Será visto a seguir como este problema pode ser superado pela utilização explícita de um sistema de ordem reduzida.

4.2.2 Formulação do Problema para o Sistema de Ordem Reduzida

Hipótese 4.1 : Consideremos que a matriz A possui $r \leq m$ autovalores instáveis ou cuja dinâmica deseje-se modificar. Associe-mos estes (r) autovalores a um subespaço \mathcal{V}_r e os outros $(n - r)$ a um subespaço $\mathcal{V}_o \triangleq \text{Ker } F$. Dessa maneira, todos os autovalores de A a serem modificados ou instáveis serão necessariamente os autovalores da matriz A_r do sistema reduzido em malha aberta:

$$z_r(k+1) = A_r z_r(k) + B_r u(k) \quad (4.12)$$

□

Foi considerado por hipótese que $r \leq m$. Assim, teremos no mínimo $(m - r)$ colunas linearmente dependentes em B_r . Assumamos agora que $\text{posto}(B_r) = r$ e escolhamos (r) colunas linearmente independentes em B_r . Estamos assim escolhendo (r) entradas para controlar efetivamente o sistema. As outras $(n - r)$ entradas serão inativas (valor zero).

Sem perda de generalidade, consideremos que $\text{posto}(B_r) = r$ e que as (r) primeiras colunas de B_r sejam linearmente independentes. Podemos notar:

$$B_r = [B_{r1} \mid B_{r2}] \quad (4.13)$$

com $B_{r1} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $B_{r2} \in \mathbb{R}^{r \times (m-r)}$ e $\text{posto}(B_{r1}) = r$.

Seja agora:

$$F_r = \begin{bmatrix} F_{r1} \\ O_{(m-r) \times r} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Uma F_r dada por (4.14), corresponde à não utilização das últimas $(m - r)$ entradas de controle.

O sistema reduzido em malha fechada pode ser escrito como:

$$\dot{z}_r(k+1) = (A_r + B_{r1} F_{r1}) z_r(k) \quad (4.15)$$

Observação 4.1 : No caso de não termos ou não escolhermos as (r) colunas linearmente independentes como as (r) primeiras colunas de B_r , a matriz F_r terá linhas de zeros correspondentes as colunas de B_r que não serão utilizadas (entradas inativas). Neste caso, a matriz B_{r1} será composta pelas (r) colunas escolhidas e a matriz F_{r1} será montada com as linhas não nulas de F_r . Por outro lado, cabe ressaltar que podemos fazer um reordenamento das entradas de controle e, conseqüentemente, termos sempre as (r) primeiras colunas de B_r linearmente independentes.

Consideremos as restrições sobre o vetor de controle (4.2). Podemos escrever:

$$-\begin{bmatrix} u_{min1} \\ u_{min2} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} u_{max1} \\ u_{max2} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

onde $u_1(k) \in \mathbb{R}^r$ e $u_2(k) \in \mathbb{R}^{m-r}$.

Consideremos a partição de B_r feita em (4.13) sem perda de generalidade conforme a observação (4.1). Como não vamos utilizar as $(m-r)$ últimas entradas do vetor de controle, faremos $u_2(k) = 0$. Portanto, uma parte das restrições é automaticamente satisfeita e precisamos satisfazer apenas:

$$-u_{min1} \leq u_1(k) \leq u_{max1} \quad (4.17)$$

A matriz F para o sistema na base original é então dada por:

$$F = \begin{bmatrix} 0_{r*(n-r)} & F_{r1} \\ 0_{(m-r)*(n-r)} & 0_{(m-r)*r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_0^T \\ Q_r^T \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Seja agora uma matriz P , de dimensão apropriada, cujas colunas são os vértices do poliedro $D_0(K, w)$. Projetando os vértices de $D_0(K, w)$ no subespaço \mathcal{V}_r , obtém-se a matriz $P_r \triangleq Q_r^T P$.

Pela proposição 4.1, a condição $D_0(K, w) \subseteq S(F, u_{min}, u_{max})$ é equivalente a:

$$-u_{min} \leq Fp_{(j)} \leq u_{max} \quad (4.19)$$

mas, como $F = F_r Q_r^T$ e $P_r \triangleq Q_r^T P$ tem-se:

$$-u_{min1} \leq F_{r1} p_{r(j)} \leq u_{max1} \quad (4.20)$$

Logo, a relação (4.19) é equivalente a relação (4.20) e pode-se concluir que $D_0(K, w) \subseteq S(F, u_{min}, u_{max})$, se e somente se a projeção dos vértices do poliedro $D_0(K, w)$ em \mathcal{V}_r ao longo de \mathcal{V}_0 , estarão contidos no poliedro $S(F_{r1}, u_{min1}, u_{max1})$, ou equivalentemente, temos que $D_{0r}(K, w) \subseteq S(F_{r1}, u_{min1}, u_{max1})$, sendo $D_{0r}(K, w)$ a projeção de $D_0(K, w)$ em \mathcal{V}_r .

Assim sendo, a resolução de nosso problema se resume a encontrar um poliedro $S(F_{r1}, u_{min1}, u_{max1})$ positivamente invariante em relação ao sistema reduzido em malha fechada dado por (4.15), tal que este seja estável e $D_{0r}(K, w) \subseteq S(F_{r1}, u_{min1}, u_{max1})$. É possível então, reformular-se o programa não linear visto na seção anterior utilizando o sistema de ordem reduzida (PNLR) para:

$$\begin{aligned} \text{Min } J(F_{r1}, H_r^+, H_r^-) &= \epsilon \\ \text{sujeito à:} \end{aligned}$$

$$F_{r1}A_r + F_{r1}B_{r1}F_{r1} = (H_r^+ - H_r^-)F_{r1} \quad (4.21)$$

$$\begin{bmatrix} H_r^+ & H_r^- \\ H_r^- & H_r^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{min1} \\ u_{max1} \end{bmatrix} \leq \epsilon \begin{bmatrix} u_{min1} \\ u_{max1} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$-u_{min1} \leq F_{r1}p_{r(j)} \leq u_{max1} \quad (4.23)$$

$$H_r^+ \geq 0, \quad H_r^- \geq 0, \quad \epsilon \geq 0 \quad (4.24)$$

onde as incógnitas são os elementos das matrizes F_{r1} e H_r

Observação 4.2 : *Notemos que a relação $HF_r = F_r(A_r + B_rF_r)$, no caso em que $r \leq m$, pode ser escrita como:*

$$\begin{bmatrix} H_r & 0_{r \times (m-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{r1} \\ 0_{(m-r) \times n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{r1} \\ 0_{(m-r) \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_o & A_2 \\ 0_{r \times (m-r)} & A_r \end{bmatrix}$$

onde T é uma matriz qualquer. Equivalentemente, devemos ter:

$$H_r F_{r1} = F_{r1} (A_r + B_{r1} F_{r1})$$

Assim, $\sigma(H_r) = \sigma(A_r + B_{r1} F_{r1}) \subseteq \sigma(H)$.

□

Baseado na resolução deste programa não-linear, a seguinte proposição fornece uma condição suficiente para a resolução do PRRVC.

Proposição 4.2 : *Se o PNL tem solução ótima H_r^* , F_{r1}^* , tal que $\epsilon^* < 1$. Então qualquer que seja a condição inicial pertencente a $D_0(K, w)$ temos que o vetor de estados do sistema (4.4) será conduzido assintoticamente a origem, respeitando as restrições impostas ao vetor de controle (4.2) sem a saturação do mesmo.*

Demonstração:

A solução ótima obtida (H_r^* , F_{r1}^* , $\epsilon < 1$) é tal que:

1. A satisfação das equações (4.21) e (4.22) garantem a invariância positiva de $S(F_{r1}, u_{min1}, u_{max1})$ em relação à (4.15). Logo, pela proposição (3.1) e a observação 4.2 tem-se que $S(F, u_{min}, u_{max})$ é poliedro positivamente invariante de (4.4).
2. Tem-se que os autovalores de H_r estão contidos dentro de um círculo de raio ϵ (vide observação 1.1). Como $\sigma(H_r) = \sigma(A_r + B_{r1} F_{r1})$, se $\epsilon < 1$, temos que os autovalores do sistema de ordem reduzida em malha fechada são estáveis.

3. Pela satisfação da relação (4.23), a projeção ao longo de \mathcal{V}_o , de todos os vértices de $D_0(K, w)$ em \mathcal{V}_r está contida $S(F_{r1}, u_{min1}, u_{max1})$ e, portanto, $D_0(K, w) \subseteq S(F, u_{min}, u_{max})$.
4. Os $(n - r)$ pólos do sistema (4.1) que permaneceram inalterados pela aplicação de $F = F_r Q_r^T$ são estáveis por hipótese. Logo, pela satisfação da inequação (4.22), temos a garantia de que todos autovalores de $(A + BF)$ são estáveis.

Portanto, a partir das quatro observações acima, temos que $\forall x_0 \in D_0(K, w)$ a trajetória do sistema (4.4) será assintoticamente estável e haverá o respeito às restrições impostas sobre o vetor de controle, sem sua saturação. Na verdade isto é garantido $\forall x_0 \in S(F, u_{max}, u_{min})$, pois $S(F, u_{max}, u_{min})$ é positivamente invariante em relação ao sistema (4.4). Ainda pode-se mostrar que a velocidade de convergência das variáveis de controle para a origem é maximizada, pois $u(k+1) = Hu(k)$.

□

A abordagem por programação não-linear utilizando um sistema de ordem reduzida apresenta então, como principal vantagem, a garantia de estabilidade do sistema (4.4) se uma solução $(H_r^*, F_{r1}^*, \epsilon^* < 1)$ é encontrada. Além disso, a formulação do PNL para o sistema reduzido é de menor dimensão que para o sistema total. Este fato representa uma vantagem do ponto de vista numérico, uma vez que o número de operações é reduzido.

Como algoritmos para a resolução do programa não linear, podemos citar os métodos do gradiente reduzido e do gradiente projetado [37]. A análise mais detalhada destes métodos e a verificação de qual deles melhor se adapta ao problema em questão foge ao objetivo deste trabalho. A título de ilustração da metodologia, será apresentado um exemplo de aplicação bastante simples. Em particular, neste caso é possível encontrar uma solução analítica aplicando o método do gradiente reduzido [37].

Exemplo 4.1 Seja o sistema discreto no tempo (também utilizado em [9]) dado por (4.1) :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e sujeito à seguinte restrição no vetor de controle:

$$-1 \leq u \leq 1.5$$

O conjunto de condições iniciais admissíveis é dado pelo poliedro $D_0(K, w)$ com:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

cujos vértices são dados pelas colunas da matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Fazendo-se uma decomposição de Schur na matriz A obtemos a base ortonormal Q dada por:

$$Q = \begin{bmatrix} -0.2952 & 0.9554 \\ 0.9554 & 0.2952 \end{bmatrix}$$

as matrizes A e B na base dada pelas colunas de Q são descritas por:

$$A_Q = \begin{bmatrix} -0.6180 & 1.5 \\ 0 & 1.6180 \end{bmatrix}, \quad B_Q = \begin{bmatrix} -0.2952 \\ 0.9554 \end{bmatrix}$$

da onde isolamos o seguinte sistema reduzido:

$$z_r(k+1) = 1.6180z_r(k) + 0.9554u(k)$$

A projeção dos vértices de $D_0(K, w)$ no subespaço \mathcal{V}_r definido pela segunda coluna de Q , é dada pela matriz

$$P_r = [1.2507 \quad -0.6602 \quad -0.2952]$$

podemos então formular o seguinte programa não linear:

Min ϵ
sujeito à:

$$\begin{aligned} F_r 1.618 + F_r 0.9554 F_r &= H_r F_r \\ \begin{bmatrix} H_r^+ & H_r^- \\ H_r^- & H_r^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \end{bmatrix} &\leq \epsilon \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \end{bmatrix} \\ -1 &\leq 1.2507 F_r \leq 1.5 \\ -1 &\leq -0.662 F_r \leq 1.5 \\ -1 &\leq -0.2952 F_r \leq 1.5 \end{aligned}$$

Resolvendo-se o programa não linear pelo método do gradiente reduzido obtem-se:

$$F_r^* = -0.7995 \quad H_r^* = 0.8542 \quad \epsilon^* = 0.8542$$

A matriz F na base original é dada então por:

$$F = [-0.7638 \quad -0.2360]$$

Os autovalores de $(A+BF)$ são então 0.8542 e -0.6180 . Na figura (4.1) são mostrados os domínios $D_0(G, w)$ e o poliedro $S(F, u_{max}, u_{min})$. Na figura (4.2) tem-se a resposta dos estados à condição inicial $x(0) = [1 \ 1]^T$ e na figura (4.3) a resposta temporal do sinal de controle.

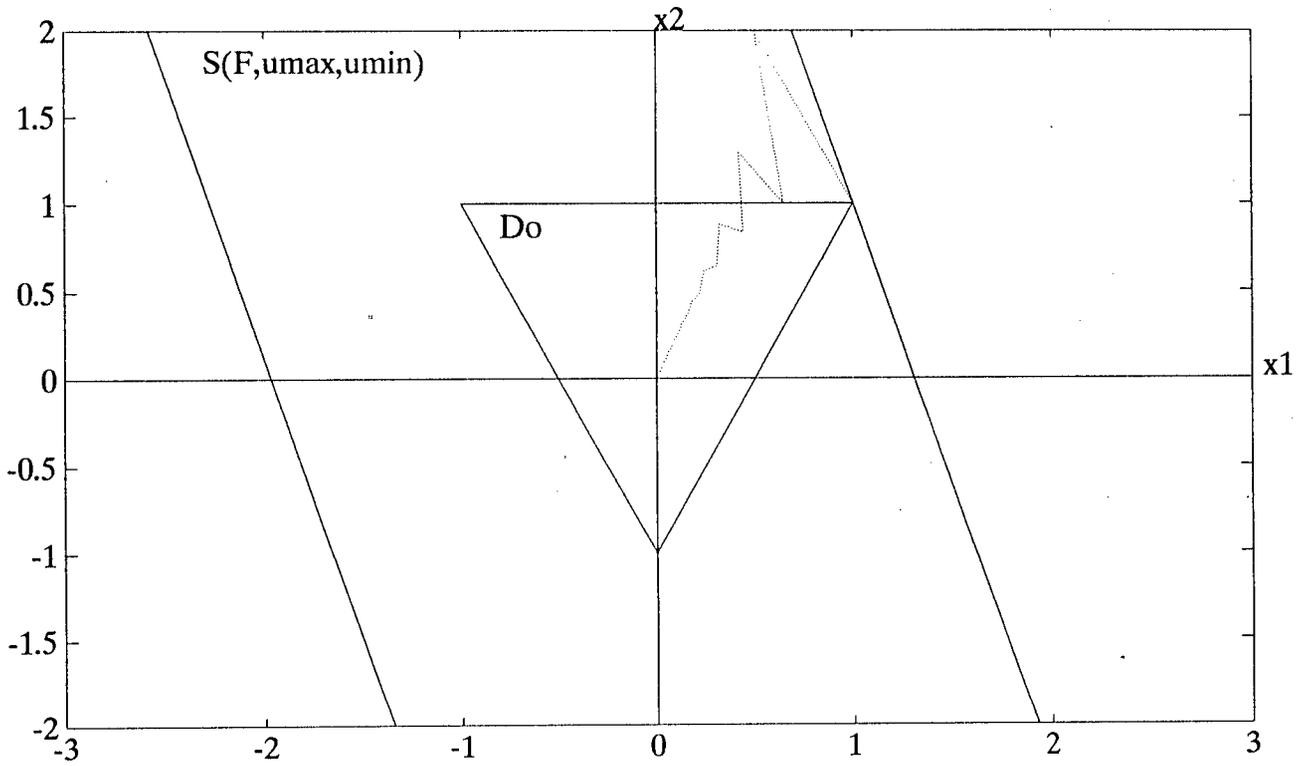


Figura 4.1: Poliedros $D_0(K, w)$ e $S(F, u_{max}, u_{min})$ e a trajetória do sistema

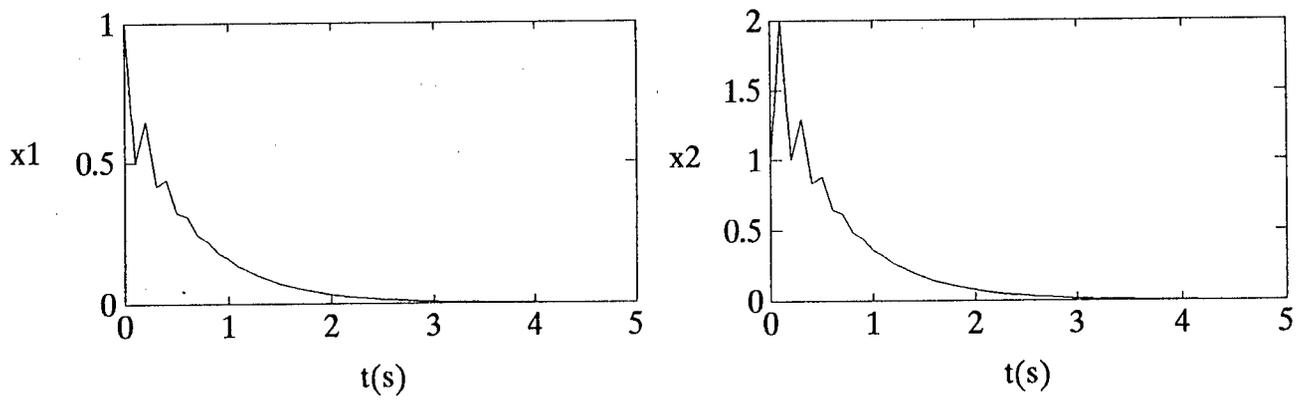


Figura 4.2: Resposta temporal dos estados

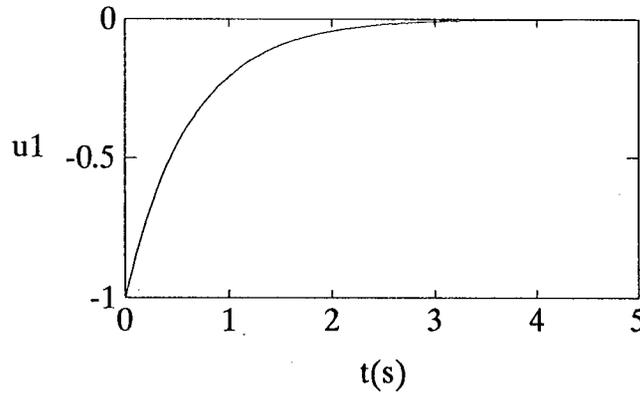


Figura 4.3: Resposta temporal do controle

□

Observação 4.3 (Caso Contínuo) : *No caso do sistema ser contínuo no tempo, a velocidade de convergência do sistema reduzido é otimizada se os autovalores são posicionados com suas partes reais o mais negativo possível. Assim, podemos introduzir uma variável φ a ser maximizada, na segunda relação de invariância positiva. O programa não linear reduzido é dado então por:*

$$\begin{aligned} \text{Max } J(F_{r1}, H_r^+, H_r^-) &= \varphi \\ \text{sujeito à:} \end{aligned}$$

$$F_{r1}A_r + F_{r1}B_{r1}F_{r1} = (H_r^+ - H_r^-)F_{r1}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{H}_r^+ & \hat{H}_r^- \\ \hat{H}_r^- & \hat{H}_r^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{min1} \\ u_{max1} \end{bmatrix} \leq -\varphi \begin{bmatrix} 1_r \\ 1_r \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$-u_{min1} \leq F_{r1}p_{r(j)} \leq u_{max1}$$

$$H_r^+ \geq 0, \quad H_r^- \geq 0, \quad \epsilon \geq 0$$

onde as incógnitas são os elementos das matrizes F_{r1} e $H_r = \hat{H}_r^- - \hat{H}_r^+$.

Assim, pela análise feita no capítulo 1, utilizando a norma logarítmica, tem-se que a relação (4.25), faz com que, se existe uma solução com $\varphi > 0$ para o PNL, a parte real dos autovalores do sistema reduzido em malha fechada serão as mais negativas possíveis, fazendo assim com que a velocidade de convergência da trajetória do sistema reduzido e do sinal de controle para a origem sejam maximizadas.

4.3 Abordagem por Programação Linear

Pela natureza não-linear da primeira relação de invariância positiva,

$$HF = F(A + BF)$$

pode-se, como apresentado na seção precedente, resolver o PRRVC a partir da formulação de um programa não linear. Os métodos envolvidos na resolução daquele tipo de problema são em geral complexos e muitas vezes de convergência não garantida. A fim de contornar este fato, é proposto por Hennes e Beziat [4][31] um método que permite a formulação de um programa linear, o qual pode ser resolvido pela aplicação de um algoritmo SIMPLEX [11][37][48]. Todavia, esta metodologia é válida apenas para o caso particular em que o posto de B é igual a n (B é quadrada e não singular), tornando sua aplicabilidade prática bastante restrita.

Será mostrado nesta seção, como o algoritmo proposto pode ser estendido para casos mais genéricos nos quais $\text{posto}(B) = m < n$. A solução neste caso passará pela formulação de um programa linear para um sistema de ordem reduzida.

4.3.1 Formulação para o Sistema como um Todo

Utilizaremos aqui as mesmas hipóteses consideradas na seção precedente, ou seja: o sistema discreto e invariante no tempo dado por (4.1), as restrições sobre o sinal de controle (4.2), e um conjunto de condições iniciais $D_0(K, w)$ como em (4.6). A aplicação de uma lei de controle do tipo de realimentação de estados (4.3) faz com que o sistema em malha fechada seja dado por (4.4).

Será visto agora, uma proposição que fornece condições para que, a partir da construção de um poliedro $S(G, u_{\min}, u_{\max})$, positivamente invariante em relação ao sistema (4.4), seja possível a obtenção de outros poliedros positivamente invariantes em relação à (4.4).

Proposição 4.3 [31] : *Seja $S(G, u_{\min}, u_{\max})$, com $G \in \mathbb{R}^{g \times n}$, um poliedro positivamente invariante (PPI) do sistema (4.4) e $H \in \mathbb{R}^{g \times g}$ é uma solução associada ao sistema:*

$$G(A + BF) = HG \tag{4.26}$$

$$\hat{H}\rho \leq \rho \tag{4.27}$$

com $\rho \triangleq \begin{bmatrix} u_{\max} \\ u_{\min} \end{bmatrix}$ e \hat{H} definido como na observação 1.1. Então qualquer poliedro $S(Q, u_{\min}, u_{\max})$ é também um PPI em relação ao sistema (4.4) se:

$$Q = \Delta G \quad ; \quad \Delta \in \mathbb{R}^{g \times g} \tag{4.28}$$

$$\Delta H = H\Delta \quad (4.29)$$

Demonstração:

$G(A + BF) = HG$ e $\Delta H = H\Delta$ implica que $Q(A + BF) = HQ$. Logo, sob a condição $\hat{H}\rho \leq \rho$, $S(Q, u_{min}, u_{max})$ é também positivamente invariante em relação ao sistema (4.4). \square

Assim, um controlador dado por $u(k) = Fx(k)$, que faça $S(F, u_{min}, u_{max})$ positivamente invariante em relação ao sistema (4.4) pode ser contruído como segue:

- Selecionar uma matriz $G \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ para a qual $S(G, u_{min}, u_{max})$ pode ser feito positivamente invariante por realimentação de estados.

- Resolver o sistema:

$$\begin{aligned} HG &= G(A + B\Delta G) \\ H\Delta &= \Delta H \\ \hat{H}\rho &\leq \rho \end{aligned} \quad (4.30)$$

- Fazer $F = \Delta G$.

A seguir será apresentada uma proposição que possibilitará a formulação de um programa linear para o PRRVC.

Proposição 4.4 [31] [4]: *Se $m = n$ e $\text{posto}(B) = n$, as condições abaixo garantem a invariância positiva de $S(F, u_{max}, u_{min})$ em relação ao sistema controlado (4.4) e a estabilidade assintótica deste último:*

$$B^{-1}ABH = HB^{-1}AB \quad (4.31)$$

$$F = HB^{-1} - B^{-1}A \quad (4.32)$$

$$\hat{H}\rho < \rho \quad (4.33)$$

Demonstração:

A partir das relações (4.31) e (4.32), podemos chegar a relação $F(A + BF) = HF$, pois:

$$F(A + BF) = (HB^{-1} - B^{-1}A)BHB^{-1} \quad (4.34)$$

$$= H(HB^{-1} - B^{-1}A) \quad (4.35)$$

$$= HF \quad (4.36)$$

Assim, com a satisfação da inequação (4.33), temos que $S(F, u_{min}, u_{max})$ é um conjunto positivamente invariante em relação à (4.4).

Substituindo-se (4.32) na equação do sistema em malha fechada obtém-se:

$$A_0 = BHB^{-1} \quad (4.37)$$

e assim, as matrizes H e A_0 são similares. Dessa forma, a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada é equivalente à convergência para a origem da sequência de controle dada por:

$$u(k+1) = F(A + BF)x(k) \quad (4.38)$$

$$= HFx(k) \quad (4.39)$$

$$u(k+1) = Hu(k) \quad (4.40)$$

A inequação (4.33) garante que todos os autovalores de H são assintoticamente estáveis. Como H é similar de $(A + BF)$ temos a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada garantida.

□

Observa-se neste caso, que $\Delta = H - B^{-1}AB$ e $H\Delta = \Delta H$. Logo, pela proposição 4.3, a invariância positiva de $S(F, u_{max}, u_{min})$ é equivalente a invariância positiva do poliedro $S(B^{-1}, u_{min}, u_{max})$ relativamente ao modelo linear (4.4).

A partir da proposição 4.4 e da proposição 4.1, que, como visto na seção precedente, fornece uma condição algébrica para a satisfação da relação de inclusão

$$D_0(K, w) \subseteq S(F, u_{min}, u_{max}) \quad (4.41)$$

podemos escrever que:

$$-u_{min} \leq (HB^{-1} - B^{-1}A)p_{(j)} \leq u_{max} \quad (4.42)$$

ou

$$B^{-1}Ap_{(j)} - u_{min} \leq (H^+ - H^-)B^{-1}p_{(j)} \leq B^{-1}Ap_{(j)} + u_{max} \quad (4.43)$$

com $p_{(j)}$ sendo o j -ésimo vértice de $D_0(K, w)$, $j = 1, \dots, nv$, nv = número total de vértices.

De posse da equação (4.43) e da proposição 4.4 podemos formular o seguinte programa linear Φ :

$$\text{Min } J(H^+, H^-, \epsilon) = \epsilon$$

sujeito à:

$$\hat{H}\rho \leq \epsilon\rho \quad (4.44)$$

$$B^{-1}AB(H^+ - H^-) = (H^+ - H^-)B^{-1}AB \quad (4.45)$$

$$B^{-1}Ap_{(j)} - u_{min} \leq (H^+ - H^-)B^{-1}p_{(j)} \leq B^{-1}Ap_{(j)} + u_{max} \quad (4.46)$$

para $j = 1, \dots, nv$.

O programa linear Φ , acima formulado, é basicamente o mesmo proposto em [31]. Entretanto, na versão original, não era considerada a relação de inclusão (4.41). A relação (4.46), neste caso foi formulada a fim de satisfazer apenas $-u_{min} \leq Fx_0 \leq u_{max}$, sendo x_0 uma condição inicial dada.

Uma condição suficiente para a resolução do PRRVC decorre da seguinte proposição.

Proposição 4.5 [4] : *Se o programa linear Φ tem uma solução ótima $(H^{+*}, H^{-*}, \epsilon^*)$, com $\epsilon^* < 1$, então o PRRVC é resolvido pela lei de controle:*

$$u(k) = Fx(k) \quad (4.47)$$

com $F = (H^{+*} - H^{-*})B^{-1} - B^{-1}A$

Demonstração:

As relações (4.44) e (4.45) com $0 \leq \epsilon \leq 1$ garantem a invariância positiva de $S(F, u_{max}, u_{min})$ e a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada. A condição (4.46) garante: $\mathcal{D}_0 \subset S(F, u_{max}, u_{min})$.

□

A escolha de minimizar ϵ permite uma otimização da velocidade de convergência do vetor de estados para a origem. Em efeito, sob a hipótese de que u_{min} e $u_{max} > 0$, e $\text{posto}(F) = n$, considere-se a função $\mathcal{L}(x)$ definida positiva, como segue [4]:

$$\mathcal{L}(x) = \max_i \left\{ \max \left[\frac{-(Fx)_i}{(u_{min})_i}, \frac{(Fx)_i}{(u_{max})_i} \right] \right\} \quad (4.48)$$

$$\mathcal{L}(0) = 0$$

É demonstrado em [4] que:

$$\mathcal{L}(x(k+1)) \leq \epsilon \mathcal{L}(x(k)) \max_i \left\{ \max \left[\frac{(u_{min})_i}{(u_{min})_i}, \frac{(u_{max})_i}{(u_{max})_i} \right] \right\} = \epsilon \mathcal{L}(x(k)) \quad (4.49)$$

Assim, se a solução ótima do programa linear é obtida com $\epsilon < 1$, então a função $\mathcal{L}(x)$ descrita em (4.48) é uma função de Lyapunov para o sistema (4.4). De fato temos que:

$$\Delta \mathcal{L}(x(k)) = \mathcal{L}(x(k+1)) - \mathcal{L}(x(k)) < 0$$

Iterando a equação (4.49) a partir de $x(0)$, obtém-se:

$$\mathcal{L}(x(k)) \leq \epsilon^k \mathcal{L}(x(0))$$

Assim, minimizando ϵ fica claro que estamos maximizando a velocidade de convergência do vetor de estados para a origem.

Observemos também que, como $\text{posto}(F) = n$, $\text{Ker } F = 0$, e a primeira relação de invariância positiva é equivalente a uma transformação de similaridade. Dessa maneira, estamos posicionando toda a autoestrutura do sistema (4.1). O subespaço \mathcal{V}_o , associado aos autovalores que devem ser mantidos inalterados para que a primeira relação de invariância positiva seja satisfeita é nulo. A segunda relação de invariância positiva garante que os autovalores de H e conseqüentemente de $(A + BF)$ estão todos contidos em um círculo de raio ϵ (vide observação 1.1). Assim, se $\epsilon < 1$, temos garantida a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada (4.4) e quanto menor ϵ , os autovalores estarão mais próximos a origem conferindo constantes de tempo mais rápidas ao sistema, aumentando assim, a velocidade de convergência do vetor de estados para a origem.

4.3.2 Formulação do Problema para o Sistema de Ordem Reduzida

Pode-se notar que a dimensão do programa linear Φ cresce enormemente com a ordem do sistema original (4.1). Torna-se interessante então, trabalharmos com um sistema de ordem reduzida. Será visto que tratando o problema através do sistema reduzido, a limitação do método ao caso em que $\text{posto}(B) = \text{posto}(A) = n$, pode ser substituída por $\text{posto}(B_r) = \text{posto}(B_{r1}) = r$, onde r é a ordem do sistema reduzido. Esta condição é menos restritiva que a anterior, fato que confere uma aplicabilidade maior ao método.

Consideremos novamente a hipótese 4.1 e B_{r1} como na seção 4.2.2. Pela aplicação de uma lei de realimentação de estados

$$u_1(k+1) = F_{r1} z_r(k) \tag{4.50}$$

o sistema de ordem reduzida em malha fechada é dado por

$$z_r(k+1) = (A_r + B_{r1} F_{r1}) z_r(k) \tag{4.51}$$

Desejamos determinar uma matriz F_{r1} tal que, qualquer que seja a condição inicial, $x(0) \in D_0(K, w)$, a projeção do vetor de estados para o sistema total no subespaço \mathcal{V}_r , dada por z_r , seja levada assintoticamente à origem e as restrições dadas por (4.17) sejam respeitadas.

Sendo F dada por (4.18), $S(F, u_{max}, u_{min})$ não será limitado em $(n-r)$ direções. Então, para que $D_0(K, w) \subseteq S(F, u_{max}, u_{min})$, devemos satisfazer $D_{0r}(K, w) \subseteq S(F_r, u_{max}, u_{min})$, ou equivalentemente, as seguintes inequações:

$$-u_{min1} \leq F_{r1} p_{r(j)} \leq u_{max1} \quad \text{com } j = 1, \dots, nv. \quad (4.52)$$

onde $p_{r(j)}$ são as projeções dos vértices do poliedro $D_0(K, w)$ no subespaço \mathcal{V}_r .

Podemos então formular o seguinte programa linear, Φ_r :

$$\begin{aligned} \text{Min } J(H_r^+, H_r^-, \epsilon) &= \epsilon \\ \text{sujeito à:} \end{aligned}$$

$$\hat{H}_r \rho_1 \leq \epsilon \rho_1 \quad (4.53)$$

$$B_{r1}^{-1} A_r B_{r1} (H_r^+ - H_r^-) = (H_r^+ - H_r^-) B_{r1}^{-1} A_r B_{r1} \quad (4.54)$$

$$B_{r1}^{-1} A_r p_{r(j)} - u_{min1} \leq (H_r^+ - H_r^-) B_{r1}^{-1} p_{r(j)} \leq B_{r1}^{-1} A_r p_{r(j)} + u_{max1} \quad (4.55)$$

para $j = 1, \dots, nv$ e $\rho_1 \triangleq \begin{bmatrix} u_{max1} \\ u_{min1} \end{bmatrix}$.

Aplicando a proposição (4.5), se o programa linear Φ_r tem solução ótima dada por $(H_r^{+*}, H_r^{-*}, \epsilon^*)$, com $\epsilon^* < 1$, o PRRVC reduzido é solucionado através da aplicação da lei de controle (4.50) com:

$$F_{r1} = (H_r^{+*} - H_r^{-*}) B_{r1}^{-1} - B_{r1}^{-1} A_r$$

Observação 4.4 (Caso Contínuo) : da mesma maneira que foi feito com a formulação do programa não linear, podemos formular um programa linear para o caso contínuo da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{Max } J(\hat{H}_r^+, \hat{H}_r^-, \varphi) &= \varphi \\ \text{sujeito à:} \end{aligned}$$

$$\tilde{H}_r \rho_1 \leq \varphi \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

$$B_{r1}^{-1} A_r B_{r1} (\hat{H}_r^+ - \hat{H}_r^-) = (\hat{H}_r^+ - \hat{H}_r^-) B_{r1}^{-1} A_r B_{r1} \quad (4.57)$$

$$B_{r1}^{-1} A_r p_{r(j)} - u_{min1} \leq (\hat{H}_r^+ - \hat{H}_r^-) B_{r1}^{-1} p_{r(j)} \leq B_{r1}^{-1} A_r p_{r(j)} + u_{max1} \quad (4.58)$$

para $j = 1, \dots, nv$ e $\rho_1 \triangleq \begin{bmatrix} u_{max1} \\ u_{min1} \end{bmatrix}$.

Observação 4.5 : Observando a última restrição do programa linear para o caso discreto:

$$B_{r1}^{-1}A_r p_{r(j)} - u_{min1} \leq (H_r^+ - H_r^-)B_{r1}^{-1}p_{r(j)} \leq B_{r1}^{-1}A_r p_{r(j)} + u_{max1} \quad (4.59)$$

se $v = (B_{r1}^{-1}A_r p_{r(j)} - u_{min1}) < 0_r$ e $u = (B_{r1}^{-1}A_r p_{r(j)} + u_{max1}) > 0_r$ qualquer que seja j e com 0_r sendo um vetor de dimensão r com todas suas componentes iguais a zero, temos que:

$$(H_r^+ - H_r^-)B_{r1}^{-1}p_{r(j)} \leq -v \quad (4.60)$$

$$(H_r^+ - H_r^-)B_{r1}^{-1}p_{r(j)} \leq u \quad (4.61)$$

$$(4.62)$$

e como $-v$ e u são vetores com componentes estritamente positivas, uma solução trivial para o problema é $(H_r^+ - H_r^-) = 0$ e $\epsilon = 0$, o que faz com que os autovalores do sistema reduzido sejam todos posicionados na origem (característica de tempo mínimo) e $F_{r1} = B_{r1}^{-1}A_r$. Caso não seja desejado este comportamento, podemos:

1. estabelecer uma fronteira inferior para ϵ do tipo $k \leq \epsilon \leq 1$;
2. aumentar o domínio de condições iniciais ($D_0(K, w)$) a fim de deixar o problema mais restritivo;

Para o caso contínuo se o mesmo fato é observado, o problema pode não ter solução, pois $\hat{H}_r^- \rightarrow \infty$, $\varphi \rightarrow \infty$ e $F_{r1} \rightarrow \infty$. Neste caso podemos:

1. dar um limitante superior a φ ;
2. aumentar o domínio de condições iniciais admissíveis;
3. dar um limitante superior para $\|F_{r1}\|_\infty$;

A partir da solução obtida para o sistema de ordem reduzida, tem-se, pela proposição 3.1 e a observação 4.2 a equivalência entre a invariância positiva de $S(F_r, u_{max}, u_{min})$ e $S(F, u_{max}, u_{min})$. Como os autovalores do sistema reduzido em malha fechada são garantidamente estáveis, e os autovalores que foram mantido inalterados pela aplicação de $F = F_r Q_r^T$, também temos assegurada a estabilidade assintótica do sistema (4.4) e, portanto, temos o PRRVC resolvido. Ilustraremos agora, a aplicação da metodologia proposta:

Exemplo 4.2 Seja $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ com:

$$A = \begin{bmatrix} 0.9964 & 0.0026 & -0.0004 & -0.0460 \\ 0.0045 & 0.9038 & -0.0188 & -0.3834 \\ 0.0097 & 0.0263 & 0.9379 & 0.1223 \\ 0.0005 & 0.0014 & 0.0968 & 1.0063 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0.0444 & 0.0167 \\ 0.2932 & -0.7252 \\ -0.5298 & 0.4726 \\ -0.0268 & 0.0241 \end{bmatrix}$$

O sinal de controle u está submetido às seguintes restrições:

$$-\begin{bmatrix} 2.4 \\ 2 \end{bmatrix} \leq u \leq \begin{bmatrix} 1.4 \\ 2.6 \end{bmatrix}$$

Seja uma região, D_0 dentro do espaço de estados, cujos vértices são dados pelas colunas da matriz Pr abaixo.

$$Pr = \begin{bmatrix} -0.4532 & 0.7453 & 0.2607 & 1.0850 \\ -0.3629 & -0.4439 & -0.7502 & -0.0723 \\ -0.4570 & -0.8036 & -0.0173 & -0.1898 \\ 0.0643 & -0.1550 & 0.9432 & 0.4917 \end{bmatrix}$$

Deseja-se calcular uma lei de controle do tipo realimentação de estados tal que para qualquer condição inicial pertencente ao domínio D_0 , tenhamos um vetor de controle não saturado.

Solução:

Utilizando a matriz Q , cujas colunas formam uma base ortonormal para o espaço de estados:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.3352 & 0.4377 & -0.3268 & -0.7676 \\ -0.9270 & 0.2838 & -0.1807 & -0.1660 \\ -0.0528 & -0.6923 & -0.7104 & -0.1154 \\ 0.1601 & 0.4986 & -0.5966 & 0.6082 \end{bmatrix}$$

As matrizes do sistema na nova base são dadas então por:

$$A_Q = \begin{bmatrix} 0.9673 & 0.1645 & -0.2393 & 0.1890 \\ 0 & 0.8203 & 0.0747 & -0.1254 \\ 0 & 0 & 1.0137 & 0.0030 \\ 0 & 0 & -0.1048 & 1.043 \end{bmatrix}; B_Q = \begin{bmatrix} -0.2332 & 0.6567 \\ 0.4560 & -0.5136 \\ 0.3249 & -0.2245 \\ -0.0379 & 0.0677 \end{bmatrix}$$

Os autovalores do sistema em malha aberta são dados por: $\lambda_1 = 0.9673$, $\lambda_2 = 0.8203$, $\lambda_3 = 1.0284 + j0.0102$ e $\lambda_4 = 1.0284 - j0.0102$. Vamos então resolver o PRRVC no sistema reduzido, de forma que as restrições de controle sejam respeitadas sem a saturação do regulador e o sistema seja estável em malha fechada.

O sistema reduzido a se trabalhar é então dado por:

$$\dot{z}_r = \begin{bmatrix} 1.0137 & 0.0030 \\ -0.1048 & 1.043 \end{bmatrix} z_r + \begin{bmatrix} 0.3249 & -0.2245 \\ -0.0379 & 0.0677 \end{bmatrix} u$$

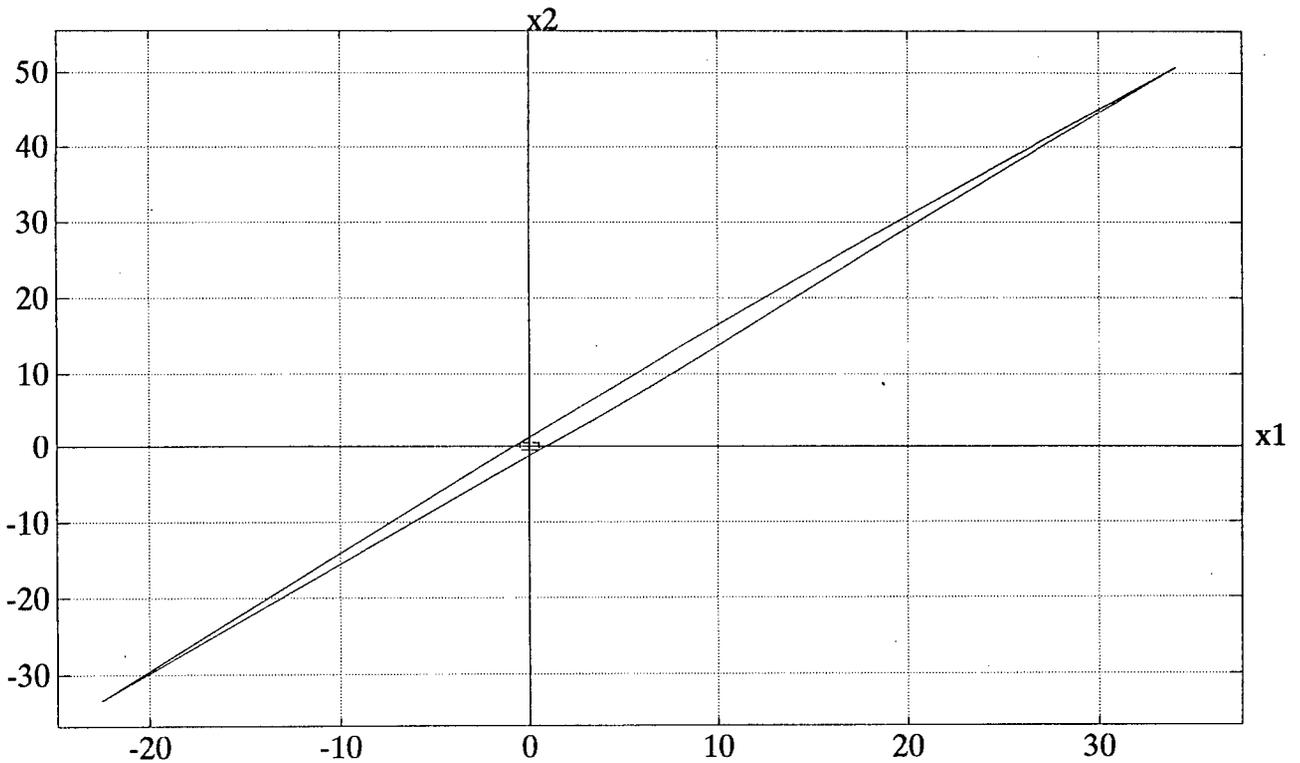


Figura 4.4: $D_0(K, w)$ e $S(F, u_{max}, u_{min})$

A projeção dos vértices da região D_0 no subespaço, \mathcal{V}_r , gerado pelas 2 últimas colunas de Q (Q_r) é dada por:

$$Pr_r = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Resolvendo então o programa linear proposto para o sistema reduzido chegamos ao seguinte:

$$H_r^* = \begin{bmatrix} 0.9781 & 0 \\ 0 & 0.9781 \end{bmatrix} \quad F_r^* = \begin{bmatrix} 1.5673 & -1.0971 \\ 2.4262 & -1.5738 \end{bmatrix}$$

com $\epsilon^* = 0.9781$.

A lei de controle para o sistema original é então calculada por (4.18)

$$F = \begin{bmatrix} 0.3300 & -0.1011 & -0.9869 & -1.6022 \\ 0.4153 & -0.1772 & -1.5421 & -2.4045 \end{bmatrix}$$

Na figura (4.4) são mostrados os domínios $D_0(G, w)$ e o poliedro $S(F, u_{max}, u_{min})$. Este mesmo gráfico é ampliado na figura (4.5). A resposta temporal das variáveis de estado do sistema reduzido e de controle, para a condição inicial projetada $z_r(0) = [-0.5 \ 0.5]^T$, são apresentadas nas figuras (4.6) e (4.7) respectivamente.

□

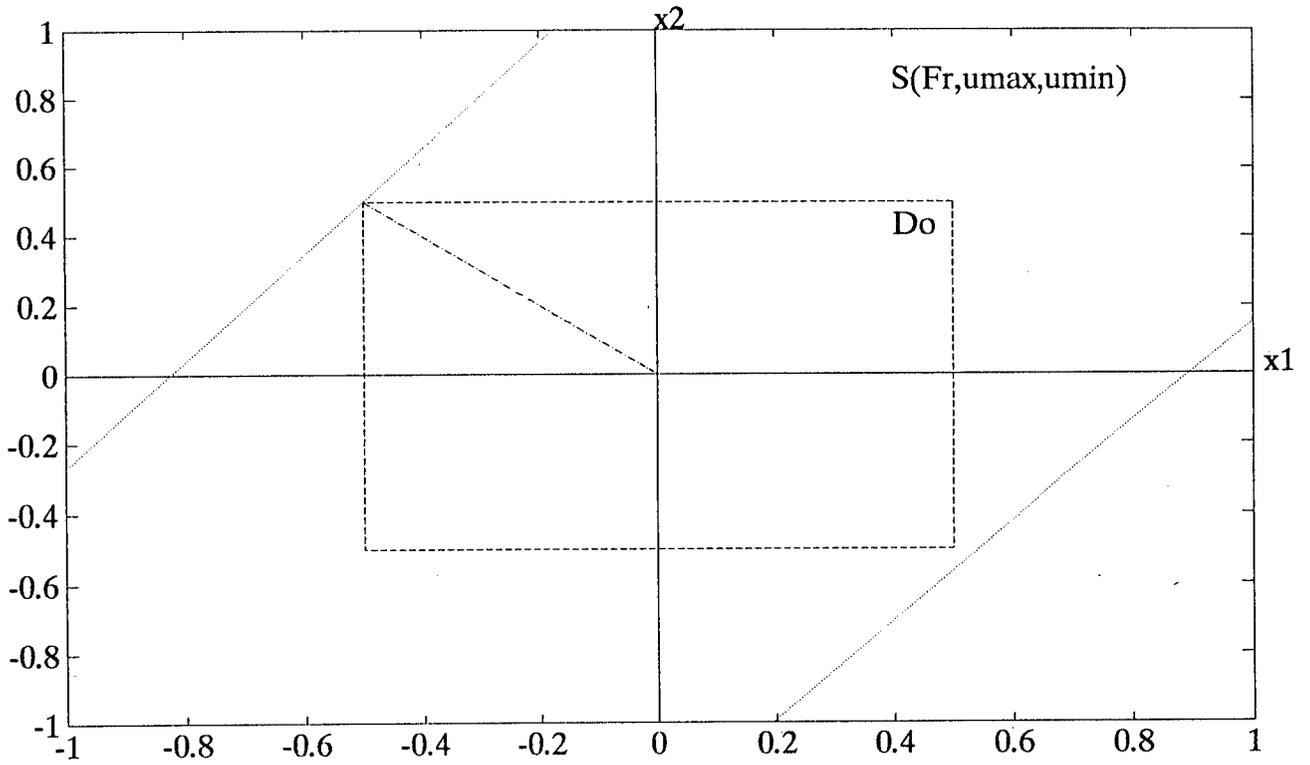


Figura 4.5: Ampliação de $D_0(K, w)$ e $S(F, u_{max}, u_{min})$

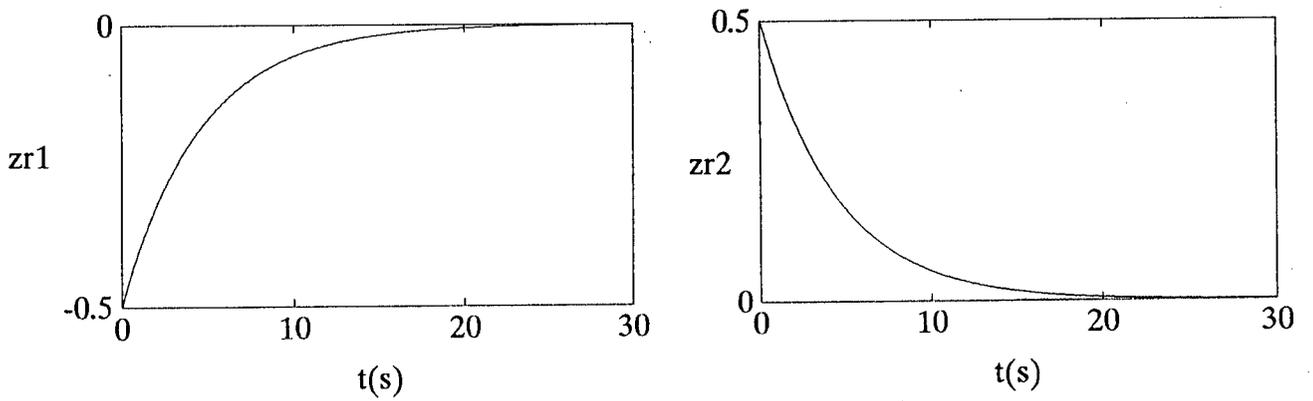


Figura 4.6: Resposta temporal do estado do sistema reduzido

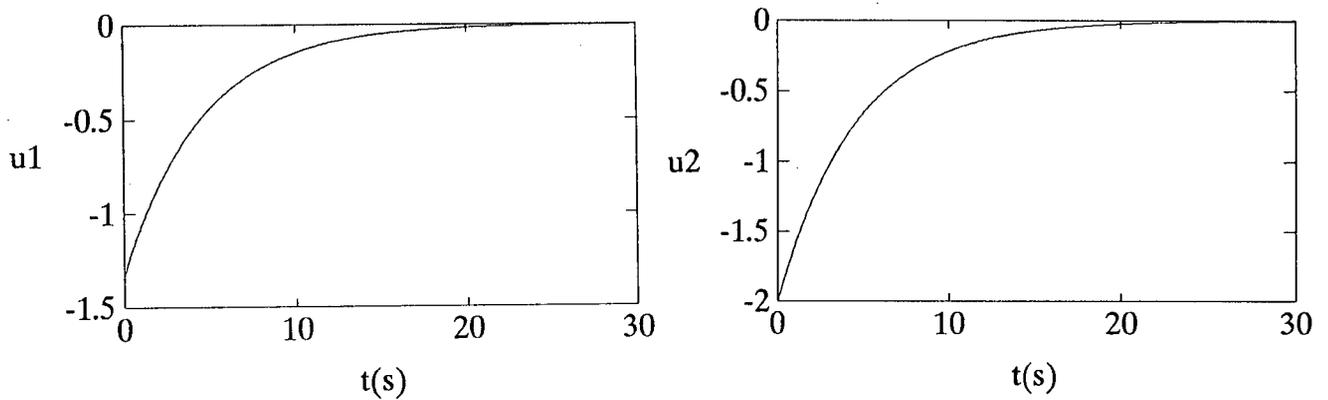


Figura 4.7: Resposta temporal do sinal de controle

4.3.3 Relação entre F e B

Quando $\text{posto}(B) = n$, tem-se, pela proposição 4.3, que $G = B^{-1}$ e $\Delta = H - B^{-1}AB$. Já para o caso em que $\text{posto}(B) = \text{posto}(B_{r1}) = r \leq m$, é possível a partir da equação:

$$\begin{bmatrix} F_{r1} \\ 0_{(m-r)*n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_r & 0_{(m-r)*(m-r)} \\ 0_{(m-r)*r} & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{r*(m-r)} & B_{r1} \\ 0_{(m-r)*(m-r)} & 0_{(m-r)*r} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0_{r*(m-r)} & B_{r1} \\ 0_{(m-r)*(m-r)} & 0_{(m-r)*r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_o & A_2 \\ 0_{r*(m-r)} & A_r \end{bmatrix}$$

e particionando $B = [B_1 \mid B_2]$ tal que $B_r = [B_{r1} \mid B_{r2}] = Q_r^T [B_1 \mid B_2]$ mostrar que:

$$G = \begin{bmatrix} (Q_r^T B_1)^{-1} Q_r^T \\ 0_{(m-r)*n} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} H_r & 0_{(m-r)*(m-r)} \\ 0_{(m-r)*r} & T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (Q_r^T B_1)^{-1} Q_r^T A B_1 & 0_{r*(m-r)} \\ 0_{(m-r)*r} & I_{(m-r)} \end{bmatrix}$$

Notemos que para a relação $HG = G(A + BF)$ ser verificada, $\mathcal{Ker} G$ deve ser um subespaço $(A + BF)$ -invariante. De fato, $\mathcal{Ker} G = \mathcal{V}_o = \mathcal{Ker} F$.

Por esta metodologia, a F calculada está fortemente ligada à estrutura da matriz B . Isto diminui os graus de liberdade no cálculo da matriz F quando deseja-se $D_0(K, w) \subset S(F, u_{max}, u_{min})$ conjuntamente com a invariância positiva de $S(F, u_{max}, u_{min})$. Pode então acontecer que uma solução com $\epsilon > 1$ seja obtida. Neste caso, para que se obtenha uma solução viável ($\epsilon < 1$) para o problema, deve-se considerar um conjunto de estados admissíveis menor, de modo que se encontre uma solução para o programa linear com $\epsilon < 1$. Isto pode ser implementado de forma iterativa. Em cada passo de iteração contraímos ou expandimos o domínio de estados iniciais admissíveis até que o valor de ϵ esteja suficientemente próximo de um valor $\alpha < 1$. A redução do domínio de estados iniciais admissíveis pode ser compensada a posteriori pela utilização de uma lei de controle do tipo saturação. Em [42][50] e [51], são

propostos métodos para a expansão de domínios positivamente invariantes considerando-se a saturação da lei de controle do tipo realimentação de estados.

Em [4] e [31] a metodologia apresentada para o sistema total, foi utilizada em um contexto de controle adaptativo. Em vez de se considerar um conjunto de estados iniciais admissíveis, o programa linear é montado levando em conta apenas o estado atual do sistema. Dessa forma, a equação (4.43) é substituída por:

$$B^{-1}Ax(k) - u_{min} \leq (H^+ - H^-)B^{-1}x(k) \leq B^{-1}Ax(k) + u_{max}$$

onde $x(k)$ é o estado do sistema no instante k . Assim, a cada instante de amostragem uma nova estimativa dos parâmetros da planta é feita e, considerando-se o estado atual do sistema, calcula-se uma matriz F de realimentação de estados.

Utilizando-se a formulação para o sistema reduzido, iremos ganhar bastante no que diz respeito ao tempo de processamento do programa linear. Entretanto, não podemos esquecer que a cada instante de amostragem se faz necessária uma transformação de Schur para a obtenção do novo sistema de ordem reduzida. Uma análise mais detalhada em termos de tempo total de processamento deve então ser feita para cada caso.

Pode-se também considerar uma formulação alternativa para o problema no caso discreto: em vez de se considerar um domínio de estados iniciais admissíveis, o que pode levar a uma solução muito restritiva, considera-se apenas o estado corrente do sistema e, a cada instante de amostragem calcula-se uma nova F . Dessa maneira, quanto mais próximo o estado do sistema estiver do ponto de equilíbrio (origem), uma lei de controle teoricamente "mais forte" pode ser aplicada de forma a aumentarmos a velocidade de convergência respeitando as restrições do sinal de controle. Neste caso, é evidente que a utilização de um sistema de ordem reduzida diminui o tempo de processamento; bastando para isto alteração da relação (4.58) por:

$$B_{r1}^{-1}A_r z_r(k) - u_{min1} \leq (\hat{H}_r^+ - \hat{H}_r^-)B_{r1}^{-1}z_r(k) \leq B_{r1}^{-1}A_r z_r(k) + u_{max1}$$

onde $z_r(k)$ é a projeção do estado atual do sistema, $x(k)$, no subespaço \mathcal{V}_r ao longo do subespaço \mathcal{V}_o .

4.4 Conclusão

Foi estudado, neste capítulo, como equacionar o PRRVC em termos de um problema de otimização. A partir da introdução de uma nova variável (ϵ) na segunda relação de invariância positiva, pode-se montar um programa não linear ou linear da seguinte maneira: a função custo

é dada por ϵ e as especificações para a solução do PRRVC são as restrições do programa. Deste modo, se existe uma solução ótima para o programa, a matriz F obtida por esta solução resolve o PRRVC. A matriz F calculada posiciona parcialmente a autoestrutura do sistema fazendo com que os autovalores alocados tendam a ser o mais próximo da origem no caso de um sistema discreto, ou o mais negativo possível no caso contínuo. Estar-se-á encontrando então, uma solução que tende a maximizar a velocidade de convergência das variáveis de controle para a origem, ao mesmo tempo que as restrições sobre o vetor de controle são respeitadas sem a sua saturação.

Como a solução obtida posiciona parcialmente a autoestrutura do sistema, podemos realizar o passo 2 do algoritmo genérico para solução do PRRVC formulado do capítulo 3, a partir da formulação do problema de otimização para o sistema de ordem reduzida. Assim, a partir da projeção do sistema e de um conjunto D_0 de condições iniciais admissíveis em \mathcal{V}_r , é possível encontrar uma solução (H^*, F_r^*, ϵ^*) para o problema de otimização que garante:

- $D_{0r} \subset S(F_r, u_{max}, u_{min})$
- A invariância positiva de $S(F_r, u_{max}, u_{min})$ em relação ao sistema reduzido em malha fechada.
- A estabilidade do sistema reduzido.

Conseqüentemente, como os autovalores associados a \mathcal{V}_o são supostos estáveis e pelo resultado da proposição 3.1, temos que o PRRVC é solucionado para o sistema total.

A natureza não linear da primeira relação de invariância positiva leva a formulação de um programa não linear. Pela abordagem proposta em [9], não é garantida a estabilidade do sistema total em malha fechada a partir da resolução do programa. Vimos que utilizando-se o sistema de ordem reduzida é possível superar este problema.

Se a matriz B do sistema total em malha aberta é quadrada e não singular, pode-se formular um programa linear [31]. Comparativamente com um programa não linear, um programa linear tem a vantagem de utilizar métodos genéricos de resolução e bem mais simples de serem implementados, como é o caso do algoritmo SIMPLEX. Nesta formulação, a hipótese feita sobre a matriz B é pouco realista considerando-se os sistemas de controle reais. Por outro lado, se utilizamos um sistema de ordem reduzida, a exigência de termos a matriz B_r de mesma dimensão que A_r é bem menos restritiva, tornando a aplicabilidade da metodologia mais viável. Cabe ressaltar, entretanto, que a solução obtida neste caso está extremamente ligada a estrutura da matriz B , fato que faz com que sejam menores os graus de liberdade na procura de uma solução que garanta $D_0 \subset S(F, u_{max}, u_{min})$.

Em ambos os casos (linear e não linear), a utilização do sistema de ordem reduzida tem a vantagem de reduzir a dimensão do problema. Com isto, tende-se a melhorar a robustez a numérica e o tempo de processamento associado à resolução do programa.

Conclusão

Restrições sobre as variáveis de controle e de estados são inerentes aos sistemas de controle. Limitações físicas e de segurança dos atuadores e componentes do sistema determinam, por exemplo, a faixa de aplicação de sinais de controle. Entretanto, as principais estratégias de controle existentes não consideram estas restrições como um dado de projeto. Na prática, em geral, projeta-se uma lei de controle linear, sem considerar qualquer tipo de limitações sobre o vetor de controle e/ou sobre o vetor de estados. Assim, com o intuito de garantir o funcionamento da estratégia de controle dentro dos limites impostos, são feitos ajustes (na maioria das vezes heurísticos) nas fases de simulação e implementação do controlador. Este fato muitas vezes confere um caráter não linear à lei de controle, como é o caso da aplicação de sinais saturados. Dessa forma, o sistema pode apresentar comportamentos indesejáveis tais como o aparecimento de ciclos-limite, pontos de equilíbrio parasitas, e até mesmo instabilidade. Portanto, a incorporação das restrições citadas desde o início do projeto é um objetivo importante na elaboração de algoritmos de controle.

As restrições impostas sobre o vetor de controle determinam, em geral, regiões poliedrais no espaço de controle, onde a trajetória do sinal de controle deve obrigatoriamente estar confinada. Sugere-se então, para a resolução do problema, a utilização da propriedade de invariância positiva de domínios poliedrais. No capítulo 1 viu-se que um domínio positivamente invariante caracteriza-se pelo fato de que, qualquer que seja a trajetória dele emanando, nele permanece confinada.

Pela aplicação de uma lei de controle do tipo realimentação de estados, $u = Fx$, tem-se que um poliedro no espaço de controle corresponde a um poliedro no espaço de estados $S(F, u_{max}, u_{min})$. Assim, dado um conjunto de condições iniciais admissíveis D_0 , a solução do problema de regulação sob restrições nas variáveis de controle (PRRVC) pode ser dada por uma matriz F calculada de forma tal que: $S(F, u_{max}, u_{min})$ contenha D_0 , seja positivamente invariante em relação ao sistema em malha fechada e este seja estável. Para isto, se faz necessária a resolução de duas relações conhecidas como relações de invariância positiva. Foi visto então, neste caso, que a satisfação da primeira relação de invariância positiva é equivalente a $(A + BF)$ -

invariância do $\mathcal{Ker} F$ que, por sua vez, equivale a um posicionamento parcial de autoestrutura em relação a um subespaço A -*invariante* $\mathcal{V}_o \triangleq \mathcal{Ker} F$. Frente a este fato, definiu-se o objetivo deste trabalho como o estudo da solução do PRRVC aplicando-se diretamente o conceito de posicionamento parcial de autoestrutura.

Por este fato, e pela escassez de trabalhos sobre o assunto, dedicou-se um capítulo desta dissertação à formalização, de uma maneira original, da teoria para o tratamento do posicionamento parcial de autoestrutura. Utilizando-se a linguagem geométrica definiu-se seu conceito e as condições necessárias e suficientes para sua obtenção. Foi proposto um algoritmo genérico para a execução de um posicionamento parcial de autoestrutura em relação à um dado subespaço A -*invariante* \mathcal{V}_o . A idéia básica deste algoritmo é a de fazer uma mudança de base no sistema original a fim de podermos extrair um sistema de ordem reduzida associado aos autovalores a serem alterados. A seguir, procede-se com o cálculo de uma matriz de realimentação de estados, F_r , que faça a alocação da autoestrutura do sistema reduzido e volta-se a base original calculando-se F a partir de F_r .

No capítulo 3 mostrou-se que a satisfação da primeira relação de invariância positiva para o sistema como um todo equivale a satisfação de uma equação análoga para o sistema de ordem reduzida. Assim, se a segunda relação é satisfeita temos a equivalência entre a invariância positiva de $S(F, u_{max}, u_{min})$ e $S(F_r, u_{max}, u_{min})$. Isto faz com que possamos resolver o PRRVC trabalhando apenas com um sistema de ordem reduzida. A trajetória deste sistema e o poliedro $S(F_r, u_{max}, u_{min})$ são obtidos, respectivamente, como a projeção da trajetória do sistema como um todo e do poliedro $S(F, u_{max}, u_{min})$ no subespaço \mathcal{V}_r , associado a (r) autovalores de malha aberta, instáveis ou cuja dinâmica deseje-se melhorar, ao longo do subespaço $\mathcal{V}_o \triangleq \mathcal{Ker} F$. Dessa forma, qualquer que seja a trajetória do sistema como um todo que esteja confinada em $S(F, u_{max}, u_{min})$ teremos que sua projeção no sistema reduzido estará contida em $S(F_r, u_{max}, u_{min})$.

A partir deste fato foi proposto um algoritmo genérico, também original, para o tratamento do PRRVC, pela utilização de um sistema de ordem reduzida. Este algoritmo constitui-se de 3 passos. No primeiro isola-se o sistema de ordem reduzido de interesse; a seguir calcula-se uma matriz F_r que solucione o PRRVC no sistema reduzido; e, por fim, obtém-se a partir de F_r , a matriz F que soluciona o problema para o sistema como um todo.

Passou-se então a incorporação das metodologias já existentes na literatura para o tratamento do PRRVC no passo 2 do algoritmo proposto, ou seja, os algoritmos existentes são formulados a partir do sistema de ordem reduzida. Primeiramente estudou-se a metodologia por posicionamento parcial de autoestrutura. A resolução do problema é obtida escolhendo-se adequadamente a autoestrutura do sistema de ordem reduzida. A utilização de uma base

ortonormal, obtida a partir de uma decomposição de Schur, é um método eficiente e robusto para a obtenção dos autovalores ao mesmo tempo que permite a extração do sistema de ordem reduzida. Neste caso, a vantagem do uso de um sistema de ordem reduzida é dada pela redução da ordem do problema, fazendo com que dificuldades numéricas relativas ao cálculo da matriz de realimentação de estados bem como o tempo de processamento sejam diminuídos.

No capítulo 4 foi visto como o passo 2 pode ser executado através da solução de problemas de otimização. A função custo neste caso está associada a velocidade de convergência do vetor de estados do sistema para a origem. Na abordagem utilizando programação não linear, mostrou-se que é vantajosa a formulação para o sistema reduzido, pois se existe solução ótima para o problema, a estabilidade do sistema em malha fechada é garantida. No caso da abordagem por programação linear, o uso da formulação com o sistema reduzido permite que a aplicabilidade do método seja mais geral. Em ambos os casos, o tamanho do problema de otimização é diminuído. Isto faz com que o número de operações envolvidas na resolução numérica do problema sejam reduzidas, conferindo uma maior eficiência e confiabilidade a estes métodos. Deve ser salientado que outras metodologias poderão ser concebidas de forma a serem incorporados ao passo 2 do algoritmo.

Conclui-se, a partir dos resultados teóricos obtidos, que o objetivo do trabalho foi plenamente alcançado. Abrem-se, no entanto, perspectivas de uma continuidade do mesmo. Neste sentido, podemos citar, entre outros, alguns tópicos pouco ou ainda não abordados:

- O estudo da robustez da dinâmica de controle pela utilização da propriedade de invariância positiva.
- Resolução do PRRVC para sistemas lineares incertos [10] [49].
- Incorporação de observadores de estado na solução do PRRVC.
- Solução do PRRVC por retroação de saída [16].
- O PRRVC em sistemas singulares [52] [53].
- O problema de seguimento de referência sob restrições de controle.

Bibliografia

- [1] A. BENZAOUIA, C. BURGAT, *The Regulator Problem for a Class of Linear Systems with Constrained Control*. Systems and Control Letters, vol.10, No 5, 1988, pp.357-363.
- [2] A. BENZAOUIA, C. BURGAT, *Regulator Problem for Discrete-Time Systems with Non-Symmetrical Constrained Control*. Int. J. of Control, vol.48, No 6, 1988, pp.2441-2451.
- [3] A. BERMAN, R.J. PLEMMONS, *Non-Negative Matrices in the Mathematical Sciences*, Academic Press, 1979, New York.
- [4] J.P. BEZIAT, *Sur la Commande Adaptative Multivariable Sous Contraintes*. Thèse de l'Université Paul Sabatier (Toulouse, France), Rapport LASS No. 89093.
- [5] G. BITSORIS, *Positively Invariant Polyhedral Sets of Discrete-Time Linear Systems*. Int. Journal of Control, vol.47, 1988, pp.1713-26.
- [6] G. BITSORIS, *On the Positive Invariance of Polyhedral Sets for Discrete-Time Systems*. Systems and Control Letters, vol.11, 1988, pp.243-248.
- [7] G. BITSORIS, *The Linear Constrained Regulation Problem for Discrete-Time Systems*. IFAC 1990, Tallinn, vol.2, pp.287-292.
- [8] G. BITSORIS, *Existence of Positively Invariant Polyhedral Sets for Continuous-Time Linear Systems*. C-TAT, vol.7, No 3, pp.407-427, 1991.
- [9] G. BITSORIS, M. VASSILAKI, *Optimization Approach to the Linear Constrained Regulation Problem For Discrete-Time Systems*. Int. J. Systems SCI, 1991, vol 22, No. 10, pp. 1953-1960.
- [10] F. BLANCHINI, *Constrained Control for Uncertain Linear Systems*. J. of Optimization Theory and Appl., vol.71, No 3, 1991, pp.465-484.
- [11] P.F. BREGALDA, A.F. DE OLIVEIRA, C.T. BORNSTEIN, *Introdução à Programação Linear*, 3ª edição, Ed. Campus.

- [12] E.B. CASTELAN, *On Invariant Polyedra of Continuous-Time Linear Systems*. Proceedings of 30th CDC, Brighton, Dez 1991, pp.1736-1741.
- [13] E.B. CASTELAN, *On Invariant Polyedra of Continuous-Time Linear Systems*. IEEE-TAC, vol.38, nov 1993, pp. 1680-1685.
- [14] E.B. CASTELAN, *Sur l'invariance Positive et la Commande sous Contraintes de Systèmes Linéaires multivariables*. Thèse de l'Université Paul Sabatier (Toulouse, France), Rapport LAAS No.92223.
- [15] E.B. CASTELAN, J.M. GOMES DA SILVA, J.E.R. CURY, *A Reduced Order Framework Applied to Linear Systems with Constrained Controls*. Artigo submetido ao CDC de 1994.
- [16] E.B. CASTELAN, S. TARBOURIECH *On Positive Invariance and Output Feedback Stabilization of Input Constrained Linear Systems*. Artigo submetido ao ACC de 1994.
- [17] C. CHAMPETIER, J. MAGNI, *Analyse et Synthèse de Lois de Commande Modales*, Rech. Aérosp., no.1986-6, Novembre-Décembre, pp 17-35.
- [18] C.T. CHEN, *Linear Systems, Theory and Design*, Holt-Rinehart-Winston (HRW), 1984.
- [19] P.G. CIARLET, *Introduction à l'Analyse Numérique Matricielle et à l'Optimisation*. Masson, Paris, 1982.
- [20] J.J. DONGARRA, S. HAMMARLING, J. WILKINSON, *Numerical Considerations in Computing Invariant Subspaces*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., Vol.13, No.1, pp145-161, Jan. 1992.
- [21] J.F. FRANKENA, R. SIVAN, *A New Linear Optimal Control Law for Linear Systems*. Int. J. of Control, vol.30, No 1, 1979, pp.159-178.
- [22] J.P. GAUTHIER, G. BORNARD, *Commande Multivariable en Présence de Contraintes de Type Inégalité*. RAIRO, vol.7, No 13, pp.205-222.
- [23] I. GLAZMAN, Y. LIUBITCH, *Analyse Linéaire dans les Espaces de Dimension Finie*. Editions MIR, Moscou 1974.
- [24] G.H. GOLUB, C. VAN LOAN, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, 1988.
- [25] J.M. GOMES DA SILVA Jr., E.B. CASTELAN, J.R. CURY, *Posicionamento Parcial de Autoestrutura*. Relatório Técnico RT 93-21, LCMI/UFSC.

- [26] J.M. GOMES DA SILVA Jr., E.B. CASTELAN, *Controle de Sistemas Lineares sob Restrições de Entrada: Uma Abordagem por Posicionamento Parcial de Autoestrutura*. Relatório Técnico RT 93-28, LCMI/UFSC.
- [27] J.M. GOMES da SILVA Jr., E.B. CASTELAN, J.E. CURY, *Sobre Posicionamento Parcial de Autoestrutura*. Artigo submetido ao 10^o Congresso Brasileiro de Automática.
- [28] P.O. GUTMAN, P. HAGANDER, *A New Design of Constrained Controllers for Linear Systems*. IEEE Trans. on Automatic Control, vol.AC-30, 1985, pp 22-23.
- [29] J.C. HENNET, E.B. CASTELAN, *Constrained Control of Unstable Multivariable Linear Systems*, ECC'93, Groningen, Netherland, 1993, vol.4, pp.2039-2043.
- [30] J.C. HENNET, E.B. CASTELAN, *Robust Invariant Controllers for Constrained Linear Systems*. ACC 1992, vol.2, pp. 993-997.
- [31] J.C. HENNET, J.P. BEZIAT, *A Class of Invariant Regulators for the Discrete-Time Linear Constrained Regulation Problem*. Automatica, Vol.27, No.3, pp. 549-554, 1991.
- [32] R.E. KALMAN et J.E. BERTRAM, *Control Systems Analysis and Design via the Second Method of Lyapunov*. Trans. A.S.M.E, D 82, 1960, pp.394-400.
- [33] N. KARKANIAS, B. KOUVARITAKIS, *The Use of Transmission Concepts in Linear Multivariable System Analysis*. Int.J.Control, 1978, vol.28, No.2, 197-240.
- [34] J. KAUTSKI, N.K. NICHOLS, P. VAN DOOREN, *Robust Pole Assignment in Linear Feedback*, Int. J. Control, vol.41, No 5, 1985, pp. 1129-1155.
- [35] H. KIENDL, J. ADAMY, P. STELZER, *Vector Norms as Lyapunov Functions of Linear Systems*.IEEE-TAC, vol. 37, no. 6, june 1992.
- [36] J.P. LASALLE, *The Stability of Dynamical Systems*. SIAM Regional Conference Series in Applied Mathematics, 1976.
- [37] LUENBERGER, *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley, 1976.
- [38] B.C. MOORE, *On the Flexibility Offered by State Feedback in Multivariable Systems Beyond Closed Loop Eigenvalue Assignment.*, IEEE Trans. on Automatic Control, october 1976, pp 659-672.
- [39] M. MOURADI, *Stabilisation d'un Système Linéaire en Présence de Contraintes sur la Commande*. RAIRO, vol.13, No 2, 1979, pp.127-147.

- [40] N.K. NICHOLS, *Robustness in Partial Pole Placement.*, IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC-32, No 8, 1987, pp 728-732.
- [41] G. POOLE et T. BOUILLON, *A Survey on M-matrices.* SIAM Review, vol.16, No 4, 1974, pp.419-427.
- [42] T. ROCHA, *Domínios Positivamente Invariantes de Sistemas Lineares com Restrições nas Variáveis de Controle.*, Dissertação de Mestrado, LCMI, PGEEL, UFSC.
- [43] J.J. SLOTINE, W. LI, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, 1991.
- [44] Y. SAAD, *A Projection Method for Partial Pole Assignment in Linear State Feedback*, Research Report YALEU/DCS/RR-449, January 1986.
- [45] H. SCHNEIDER, M. VIDYASAGAR, *Cross-Positive Matrices.* SIAM J. Num. Analysis, vol.7, No 4, 1970.
- [46] J.M. SCHUMACHER, *A Complement on Pole Placement.* IEEE, TAC, vol. AC-25, pp.281-282, 1980.
- [47] G. STRANG *Linear Algebra and its Applications.* Academic Press, 1980.
- [48] G. STRANG *Introduction to Applied Mathematics.* Academic Press.
- [49] M. SZNAIER, *Norm Based Robust Control of Constrained Discret Time Linear Systems.* Proceedings of 29th CDC, Honolulu, Hawaii, dezembro 1990, pp.1925-1930.
- [50] S. TARBOURIECH, *Sur la Stabilité des Régulateurs à Retour d'Etat Saturé.* Thèse de l'Université Paul Sabatier (Toulouse, France), LAAS Report No 91047, 1991.
- [51] S. TARBOURIECH, C.BURGAT *Class of Globally Stable Saturated State Feedback Regulators*, Int.J.Syst.Science, vol.23, No.11, pp.1965-1976, 1992.
- [52] S. TARBOURIECH, E.B. CASTELAN, *Positively Invariant Sets for Singular Discrete-Time Systems.* Int. J. Systems Sci., 1993, vol. 24, no. 9, pp. 1687-1705.
- [53] S. TARBOURIECH, E.B. CASTELAN, *The Linear Constrained Regulation Problem for some Linear Continuous-Time Singular Systems.* Proceedings of 2nd IFAC Workshop on System Structure and Control, Praga, Setembro 1992.
- [54] R.S. VARGA, *Matrix Iterative Analysis.* Prentice Hall, 1962.
- [55] M. VASSILAKI, G. BITSORIS, *Constrained Regulation of Linear Continuous-Time Dynamical Systems.* Systems and Control Letters, vol.13, 1989, pp.247-252.

- [56] M. VASSILAKI, J.C. HENNET, G. BITSORIS, *Feedback Control of Linear Discrete-Time Systems under State and Control Constraints*. Int. J. Control, 1988, vol.47, No.6, pp. 1727-1735.
- [57] M. VIDYASAGAR, *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice Hall, 1978.
- [58] W.M. WONHAM, *Linear Multivariable Control, a Geometric Approach.*, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin,(1979).

Apêndice A

Conceitos da Teoria Geométrica

Será feita neste apêndice uma breve revisão de alguns conceitos de álgebra linear e da teoria geométrica que são utilizados no tratamento de problemas de controle de sistemas lineares multivariáveis. Os conceitos e definições aqui apresentados seguem basicamente a abordagem de Wonham [58].

A.1 Espaços Vetoriais Lineares

Um espaço vetorial linear consiste em um grupo aditivo de elementos chamados *vetores* os quais são definidos sobre um *campo de escalares*. Consideraremos apenas espaços sob o campo dos números reais \mathbb{R} ou dos complexos \mathcal{C} .

Seja um espaço vetorial \mathcal{X} sobre o campo \mathcal{C} . Considere agora vetores x_1 e x_2 tal que $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, e escalares c_1 e c_2 tal que $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$. Temos então, por exemplo, que as seguintes propriedades são verificadas:

1. $c_1 x_1 \in \mathcal{X}$
2. $(c_1 + c_2)x_1 = c_1 x_1 + c_2 x_1$
3. $c_1(x_1 + x_2) = c_1 x_1 + c_1 x_2$
4. $(c_1 c_2)x_1 = c_1(c_2 x_1)$

Seja agora $x_1, \dots, x_k \in \mathcal{X}$. O conjunto gerado por todas as combinações lineares de x_i , com coeficientes no campo \mathcal{C} , é denotado por:

$$\text{Span} \langle x_1, \dots, x_k \rangle = \text{Span} \langle x_i, i \in k \rangle$$

Diz-se então que \mathcal{X} é de dimensão finita e igual a k , $\dim(\mathcal{X}) = k$, se existe um conjunto $\{x_1, \dots, x_k\}$ tal que $\text{Span} \langle x_1, \dots, x_k \rangle = \mathcal{X}$. Este conjunto constitui-se em uma *base* do espaço \mathcal{X} .

Um conjunto de vetores $\{x_1, \dots, x_m\} = \{x_i \in \mathcal{X}, i \in \mathbf{m}\}$ é *linearmente independente* sobre o campo dos complexos \mathcal{C} se para todo conjunto de escalares $\{c_i \in \mathcal{C}, i \in \mathbf{m}\}$, a relação:

$$\sum_{i=1}^m c_i x_i = 0$$

implica $c_i = 0 \quad \forall i \in \mathbf{m}$, caso contrário os vetores serão ditos *linearmente dependentes*. Se os vetores x_i são independentes e $x \in \text{Span} \langle x_i, i \in \mathbf{m} \rangle$, então a representação:

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_m x_m$$

é única. Os vetores de uma base são necessariamente independentes.

Seja $\dim(\mathcal{X}) = n$ e uma base $\{x_i, i \in \mathbf{n}\}$ de \mathcal{X} . Se $x \in \mathcal{X}$ então

$$x = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

para um conjunto único de escalares $\{c_i, i \in \mathbf{n}\}$. Diz-se então que $[c_1, \dots, c_n]^T$ é a *representação de x* na base gerada por $\{x_1, \dots, x_n\}$ ou que os c_i 's são as *componentes do vetor x* nesta base.

A.2 Subespaços Vetoriais Lineares

Um subespaço \mathcal{S} do espaço vetorial linear \mathcal{X} é um subconjunto de \mathcal{X} que é um espaço linear sob as operações de adição vetorial e multiplicação por escalar herdadas de \mathcal{X} , ou seja, qualquer que sejam os vetores $x_1, x_2 \in \mathcal{S}$ e os escalares $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$, temos que $(c_1 x_1 + c_2 x_2) \in \mathcal{S}$. A notação $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ é utilizada para dizer que \mathcal{S} é um subespaço de \mathcal{X} . Geometricamente, um subespaço pode ser entendido como um hiperplano passando pela origem de \mathcal{X} ; assim o vetor $0 \in \mathcal{S}$ para todo subespaço $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$. Temos então que $0 \leq \dim(\mathcal{S}) \leq \dim \mathcal{X}$ e $\dim \mathcal{S} = 0$ se e somente se $\mathcal{S} = 0$.

Sejam $\mathcal{V}, \mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ podemos definir:

$$\mathcal{V} + \mathcal{S} \triangleq \{v + s : v \in \mathcal{V}, s \in \mathcal{S}\}$$

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{S} \triangleq \{x : x \in \mathcal{V} \text{ e } x \in \mathcal{S}\}$$

Estas definições são extendidas obviamente a um número finito de subespaços.

Como o subespaço nulo, 0 , está contido em qualquer subespaço, sempre temos que $0 \subset (\mathcal{S} \cap \mathcal{V}) \neq \emptyset$; ou seja, dois subespaços nunca são *disjuntos*. Em particular se $(\mathcal{S} \cap \mathcal{V}) = 0$, diz-se que \mathcal{V} e \mathcal{S} são linearmente independentes e neste caso notamos $\mathcal{V} + \mathcal{S}$ como:

$$\mathcal{V} \oplus \mathcal{S}$$

A.3 Mapas e Matrizes

Sejam \mathcal{X} e \mathcal{Y} espaços vetoriais lineares sobre o campo dos \mathcal{C} (ou \mathfrak{R}). Uma função $\phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ é uma *transformação linear* ou *mapa* se:

$$\phi(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1\phi(x_1) + c_2\phi(x_2)$$

para todo $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ e $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$. Com \mathcal{X} e \mathcal{Y} fixos, consideremos o conjunto $\mathbf{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ de todos os mapas (lineares) $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$. Usualmente utiliza-se a notação $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ em vez de $A \in \mathbf{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Seja agora $\{x_i, i \in \mathbf{n}\}$ uma base para \mathcal{X} e $\{y_j, j \in \mathbf{p}\}$ uma base para \mathcal{Y} . Se $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ é um mapa temos que:

$$Ax_i = a_{1i}y_1 + a_{2i}y_2 + \dots + a_{pi}y_p, \quad i \in \mathbf{n}$$

para elementos $a_{ij} \in \mathcal{C}$, determinados de forma única. Observe que se $x \in \mathcal{X}$ então Ax é completamente determinado por Ax_i aplicando-se propriedades de linearidade (combinações lineares).

A matriz

$$\text{Mat } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{bmatrix}$$

é a *matriz* que representa A no par de bases dadas. Matrizes são úteis para computar a ação dos mapas, enquanto estes representam entes mais abstratos, independentes de base, sendo úteis no desenvolvimento de teoria. Usualmente, a distinção entre o mapa e a matriz pode ser feita no contexto do desenvolvimento matemático e assim podemos escrever $A = \text{Mat } A$. O que deve ficar claro é que existem inúmeras representações matriciais do mapa A , cada qual associada a um par de bases específico.

Considere $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ um mapa. \mathcal{X} é o *domínio* de A e \mathcal{Y} é o *codomínio*. O tamanho de uma matriz correspondente ao mapa A é então $\dim(\mathcal{X}) * \dim(\mathcal{Y})$.

O *Kernel* (ou *espaço nulo*) de A é o subespaço

$$\text{Ker } A \triangleq \{x : x \in \mathcal{X} \text{ e } Ax = 0\} \subset \mathcal{X}$$

enquanto a *Imagem* (ou *Range*) de A é o subespaço

$$\mathcal{I}mA \triangleq \{y : y \in \mathcal{Y} \text{ e } \exists x \in \mathcal{X}, y = Ax\} = \{Ax : x \in \mathcal{X}\} \subset \mathcal{Y}$$

Observe a distinção entre codomínio e imagem.

Se $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$, podemos escrever que:

$$A\mathcal{V} \triangleq \{y : y \in \mathcal{Y} \text{ e } \exists x \in \mathcal{V}, y = Ax\} = \{Ax : x \in \mathcal{V}\} \subset \mathcal{Y}$$

e se $\mathcal{S} \subset \mathcal{Y}$,

$$A^{-1}\mathcal{S} \triangleq \{x : x \in \mathcal{X} \text{ e } Ax \in \mathcal{S}\}$$

Ambos $A\mathcal{V} \subset \mathcal{Y}$ e $A^{-1}\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ são subespaços. Observe que A^{-1} é a *função imagem inversa* do mapa A , e deve ser entendida como uma função de todos os subespaços de \mathcal{Y} naqueles de \mathcal{X} . Neste caso A^{-1} não denota um mapa linear de \mathcal{Y} em \mathcal{X} . Entretanto, no caso especial em que $\dim(\mathcal{X}) = \dim(\mathcal{Y})$ e a inversa ordinária de A existe como um mapa $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$, este mapa também será escrito usualmente por A^{-1} . Uma vez que estas duas utilizações sejam consistentes e de acordo com o contexto, não deve haver confusão.

Um mapa $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ é um *epimorfismo* (ou A é *épico*) se $\mathcal{I}mA = \mathcal{Y}$. A é um *monomorfismo* (ou A é *mônico*) se $\mathcal{K}erA = 0$. Se A é épico e mônico, dizemos que é um *isomorfismo*, e este caso só pode ocorrer quando $\dim(\mathcal{X}) = \dim(\mathcal{Y})$. Então escrevemos que $\mathcal{X} \simeq \mathcal{Y}$, ou seja, que o espaço \mathcal{X} é isomorfo do espaço \mathcal{Y} . Matricialmente, temos que um mapa isomorfo pode ser representado por uma matriz quadrada não singular. Um mapa $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ é um *endomorfismo* de \mathcal{X} . A é um *automorfismo* de \mathcal{X} se A é um isomorfismo.

Consideremos agora um subespaço $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$, $\dim(\mathcal{V}) = k$. Uma vez que \mathcal{V} pode ser considerado como um espaço vetorial linear de dimensão k (pela própria definição de subespaço), um vetor $v \in \mathcal{V}$ pode ser simplesmente descrito como um elemento de \mathcal{V} , ou ser representado como um elemento do espaço \mathcal{X} . Para ilustrar este ponto de vista, seja $\{e_j, j \in k\}$ uma base para o subespaço \mathcal{V} , e seja $\{x_i, i \in n\}$ uma base para o espaço \mathcal{X} . Como $e_j \in \mathcal{V} \subset \mathcal{X}$, cada e_j pode ser representado unicamente na forma

$$e_j = \sum_{i=1}^n v_{ij}x_i, \quad j \in k$$

A matriz $(n \times k)$, $[v_{ij}]$, determina um único mapa $V : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{X}$, denominado *mapa de inserção de \mathcal{V} em \mathcal{X}* . Logo,

$$\text{Mat } V = \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \dots & v_{nk} \end{bmatrix}$$

Um vetor $v \in \mathcal{V}$ tem agora duas alternativas de representação: como uma combinação dos e_j (i.e. como um vetor v de dimensão $k \times 1$); ou como um elemento correspondente de \mathcal{X} (i.e. um vetor $x = Vv$ de dimensão $n \times 1$). Assim se, por exemplo, os k primeiros vetores da base de \mathcal{X} pertencem a \mathcal{V} , a representação de e_j como um vetor de \mathcal{X} é dada por:

$$\begin{bmatrix} v_j \\ 0_{(n-k) \times 1} \end{bmatrix}$$

note que V é mônico. O mapa de inserção é representado por uma matriz cujas colunas formam uma base para \mathcal{V} com relação a base dada para \mathcal{X} . Este é um dispositivo padrão para a representação numérica de um subespaço.

Seja $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, e seja $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ um subespaço cujo mapa de inserção é dado por $V : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{X}$. A restrição de A a \mathcal{V} é o mapa $A|_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{Y}$ dado por:

$$A|_{\mathcal{V}} \triangleq AV$$

assim, $A|_{\mathcal{V}}$ mostra a ação de A sobre \mathcal{V} , mas não é definida fora de \mathcal{V} .

Seja $\mathcal{X} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{S}$. Uma vez que a representação $x = v + s$ ($v \in \mathcal{V}$, $s \in \mathcal{S}$) é única para cada $x \in \mathcal{X}$, existe uma função $x \rightarrow v$, chamada de *projeção de \mathcal{V} ao longo de \mathcal{S}* . É fácil observar que a projeção é um mapa linear $Q : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, tal que a $\text{Im}Q = \mathcal{V}$ e $\text{Ker}Q = \mathcal{S}$; além disso,

$$\mathcal{X} = Q\mathcal{X} \oplus (1 - Q)\mathcal{X}$$

Note que $(1 - Q)$ é a projeção sobre \mathcal{S} ao longo de \mathcal{V} , de forma que $Q(1 - Q) = 0$, ou $Q^2 = Q$. Reciprocamente, se $Q : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ é um mapa tal que $Q^2 = Q$ é fácil mostrar que:

$$\mathcal{X} = \text{Im}Q \oplus \text{Ker}Q$$

i.e. Q é a projeção sobre $\text{Im}Q$ ao longo de $\text{Ker}Q$.

A título de ilustração, consideremos $\mathcal{X} \triangleq \mathbb{R}^2$ e \mathcal{V} e \mathcal{S} duas retas passando pela origem. Assim, a projeção de um vetor $x \in \mathcal{X}$ em \mathcal{V} segundo a direção de \mathcal{S} , pode ser ilustrada geometricamente pela figura (A.1).

A.4 Espaço Quociente e Projeção Canônica

Seja $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$. Chamaremos os vetores $x, y \in \mathcal{X}$ de *equivalentes mod de \mathcal{S}* se $(x - y) \in \mathcal{S}$.

Definição A.1 (Espaço Quociente) *O espaço quociente \mathcal{X}/\mathcal{S} é o conjunto de todas as classes de equivalência*

$$\bar{x} \triangleq \{y : y \in \mathcal{X}, y - x \in \mathcal{S}\}$$

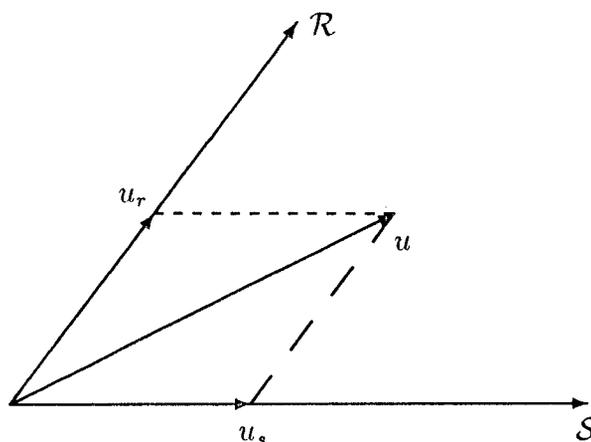


Figura A.1: Projeção em um subespaço segundo outro

Geometricamente, \bar{x} é o hiperplano passando através de x , obtido por translação paralela de \mathcal{S} . Este fato é ilustrado na figura (A.2).

Em \mathcal{X}/\mathcal{S} define-se:

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \triangleq \overline{x_1 + x_2} \quad , \quad x_1, x_2 \in \mathcal{X}$$

e

$$\alpha \bar{x} \triangleq \overline{\alpha x}$$

o que torna \mathcal{X}/\mathcal{S} um espaço vetorial. A origem de \mathcal{X}/\mathcal{S} é a classe de equivalência:

$$\bar{0} = \{y : y \in \mathcal{S}\}$$

Propriedade A.1 : $\dim(\mathcal{X}/\mathcal{S}) = \dim(\mathcal{X}) - \dim(\mathcal{S})$

Demonstração:

Seja \mathcal{R} um subespaço qualquer de \mathcal{X} , tal que :

$$\mathcal{S} \oplus \mathcal{R} = \mathcal{X}$$

se $[r_1 \ r_2 \ \dots \ r_p]$ é uma base de \mathcal{R} temos que

$$\alpha_1 \bar{r}_1 + \alpha_2 \bar{r}_2 + \dots + \alpha_p \bar{r}_p = \overline{\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \dots + \alpha_p r_p} = \bar{0}$$

se e somente se $\alpha_i = 0$, $i \in \mathbf{p}$, pois os r_i são linearmente independentes. Assim $[\bar{r}_1 \ \bar{r}_2 \ \dots \ \bar{r}_p]$ forma uma base para o espaço \mathcal{X}/\mathcal{S} e, portanto,

$$\dim(\mathcal{X}/\mathcal{S}) = \dim(\mathcal{X}) - \dim(\mathcal{S})$$

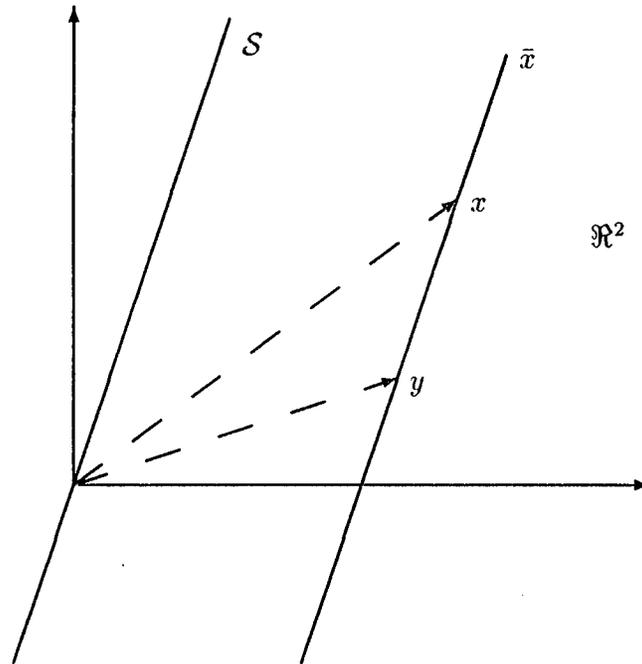


Figura A.2: Espaço Quociente

□

Observemos que se $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, então a imagem de A é isomorfa de $\mathcal{X}/\text{Ker}A$:

$$\text{Im}A = A\mathcal{X} \simeq \mathcal{X}/\text{Ker}A$$

Definição A.2 (Projeção Canônica) A função $x \rightarrow \bar{x}$ é um mapa $P : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}/S$ chamado de projeção canônica de \mathcal{X} em \mathcal{X}/S .

□

Observemos que P é épico, $\text{Im}P = \mathcal{X}/S$, e $\text{Ker}P = S$.

A diferença entre P e a projeção Q definida anteriormente é sutil. Notemos que \mathcal{X}/S não é um subespaço de \mathcal{X} , $S \neq 0$ e Q não é épico. Concretamente, seja $S \oplus \mathcal{R} = \mathcal{X}$ para algum subespaço \mathcal{R} . Tomemos agora uma base para \mathcal{X} da seguinte maneira:

$$X = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_v \ r_1 \ r_2 \ \dots \ r_p]$$

onde $[s_1 \ s_2 \ \dots \ s_v]$ é uma base para S e $[r_1 \ r_2 \ \dots \ r_p]$ é uma base para \mathcal{R} . Seja agora,

$$\bar{X} = [\bar{r}_1 \ \bar{r}_2 \ \dots \ \bar{r}_p]$$

uma base para \mathcal{X}/\mathcal{S} . Temos então nas bases X e \bar{X} que:

$$Q = \begin{bmatrix} 0_{p \times v} & 1_{p \times p} \\ 0_{v \times v} & 0_{v \times p} \end{bmatrix}$$

é a matriz de projeção em \mathcal{R} ao longo de \mathcal{S} e

$$P = \begin{bmatrix} 0_{p \times v} & 1_{p \times p} \end{bmatrix}$$

é a matriz de projeção canônica, ou seja,

$$Ps_i = 0 \text{ e } Pr_i = \bar{r}_i$$

A.5 Subespaços A – invariantes e Mapas induzidos

Seja o sistema linear, autônomo, contínuo e invariante no tempo descrito pela equação dinâmica:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{A.1}$$

onde : $x \in \mathcal{X}$, $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, sendo \mathcal{X} o espaço de estados de dimensão n .

Definição A.3 (A -invariância) : Um subespaço $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ é A – invariante se e somente se $A\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$.

□

Pela definição acima um subespaço é A – invariante se, para qualquer estado inicial pertencente a \mathcal{S} , $x(0) \in \mathcal{S}$, a trajetória de estado resultante permaneça em \mathcal{S} para todo $t > 0$.

Seja P : a projeção canônica de \mathcal{X} no espaço quociente \mathcal{X}/\mathcal{S} .

Definição A.4 (Mapa Induzido) Um mapa $\bar{A} = \mathcal{X}/\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{X}/\mathcal{S}$ tal que:

$$\bar{A}P = PA$$

é chamado de mapa induzido por A no espaço quociente \mathcal{X}/\mathcal{S} .

□

É possível mostra-se que \bar{A} definido desta forma é único.

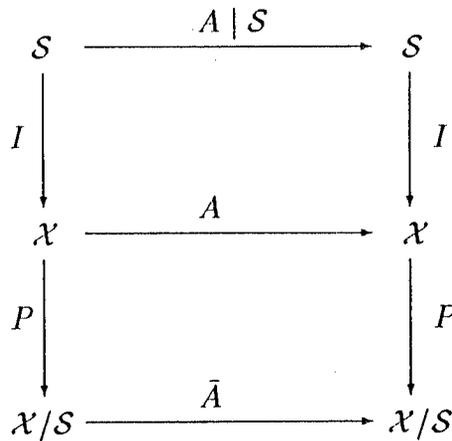


Figura A.3: Diagrama Comutativo

Consideremos agora um subespaço \mathcal{R} tal que $\mathcal{S} \oplus \mathcal{R} = \mathcal{X}$ e as bases X e \bar{X} como definidas na seção anterior. Na base X temos então que a matriz A é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

onde A_{11} e A_{22} são respectivamente as representações matriciais de $A|_{\mathcal{S}}$ na base X e \bar{A} na base \bar{X} .

Considerando o mapa $I : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{X}$ como o mapa de inserção de \mathcal{S} em \mathcal{X} , podemos construir o seguinte diagrama esquemático da figura (A.3), também chamado de *diagrama comutativo*.

Notando como $\sigma(A)$ o espectro do mapa (matriz) A , pode-se escrever que:

$$\sigma(A) = \sigma(A|_{\mathcal{S}}) \dot{\cup} \sigma(\bar{A}) \quad (\text{A.2})$$

onde $\sigma(A|_{\mathcal{S}})$ representa a dinâmica de A no subespaço \mathcal{S} e $\sigma(\bar{A})$ corresponde à dinâmica de A fora de \mathcal{S} .

Consideremos agora, o sistema linear, contínuo e invariante no tempo descrito pela equação dinâmica:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (\text{A.3})$$

onde : $x \in \mathcal{X}$ e $u \in \mathcal{U}$, $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ e $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$, sendo \mathcal{U} o espaço de controle, de dimensão (m).

Definição A.5 ((A, B)-invariância) : Um subespaço $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ é (A, B) - invariante se e somente se: $A\mathcal{S} = \mathcal{S} + \text{Im}B$.

□

Pode-se mostrar que um subespaço $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ é (A, B) – *invariante*, se e somente se, para qualquer estado inicial $x(0) \in \mathcal{X}$, a trajetória de estado resultante pode ser inteiramente mantida em \mathcal{S} para todo $t > 0$, por uma escolha apropriada da entrada de controle $u(t)$. Em particular, esta escolha sempre pode ser feita como uma lei de controle do tipo realimentação de estados:

$$u(t) = Fx(t) \quad \text{com} \quad F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}. \quad (\text{A.4})$$

Neste caso, o sistema em malha fechada é descrito por:

$$\dot{x} = (A + BF)x(t) \quad (\text{A.5})$$

e tem-se $(A + BF)\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$.

A classe das aplicações $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ tais que $(A + BF)\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$ é denotada por $\underline{F}(\mathcal{S})$. Se $F \in \underline{F}(\mathcal{S})$, diz-se que F pertence à classe das "amigas" de \mathcal{S} .

Apêndice B

Posicionamento de Autoestrutura

Diferentemente dos sistemas monovariáveis, nos sistemas multivariáveis a especificação dos autovalores não definem um único sistema em malha fechada. Dado conjunto de autovalores especificados para o sistema em malha fechada, existem várias matrizes de realimentação de estados, F , que produzem o posicionamento desejado. Diz-se então, que existe graus de liberdade na escolha da matriz F . Estes graus de liberdade são traduzidos pela possibilidade de escolha de diferentes conjuntos de autovetores para o sistema em malha fechada. Dependendo dos autovetores escolhidos, para um mesmo conjunto de autovalores, tem-se trajetórias de estado, ou respostas do sistema, completamente diferentes. Assim, em sistemas multivariáveis torna-se necessária não apenas a especificação dos pólos, mas sim, da autoestrutura do sistema em malha fechada.

Considerando o sistema em malha fechada (2.2), podemos escrever a seguinte equação que relaciona o autovalor λ_i com o autovetor v_i :

$$(\lambda_i I - A)v_i = BFv_i \quad (\text{B.1})$$

Definindo $Fv_i \triangleq w_i$, como a *direção de entrada* associada ao autovetor v_i , podemos escrever que:

$$v_i = (\lambda_i I - A)^{-1} B w_i \quad (\text{B.2})$$

ou para autovalores complexos conjugados $(\mu_i + j\sigma_i, \mu_i - j\sigma_i)$, com $\sigma_i \neq 0$:

$$\begin{bmatrix} v_{\mu_i} \\ v_{\sigma_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_i I_n - A & -\sigma_i I_n \\ \sigma_i I_n & \mu_i I_n - A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B & 0_{n \times m} \\ 0_{n \times m} & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{\mu_i} \\ w_{\sigma_i} \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Geometricamente, v_i deve pertencer a um subespaço de \mathfrak{R}^n denominado *subespaço de transmissão* [33] ou *subespaço característico à direita* [17], definido como:

$$\Gamma(\lambda_i) = (\lambda_i I - A)^{-1} \mathcal{I}m B \quad (\text{B.4})$$

$$v_i \in \Gamma(\lambda_i) \tag{B.5}$$

Dessa maneira, sendo especificado um autovalor λ_i para o sistema em malha fechada, temos a liberdade de escolher um autovetor qualquer pertencente ao subespaço definido por (B.4), bastando para isto especificar uma direção de entrada w_i . Sendo λ_i um autovalor controlável, $\dim(\Gamma(\lambda_i)) = \dim(\text{Im}B) = m$, e assim temos sempre a possibilidade de escolha de até m autovetores linearmente independentes em $\Gamma(\lambda_i)$ dependendo do w_i .

Matricialmente, a matriz F pode ser calculada a partir dos autovetores e direções de entrada escolhidas, pelo método de Moore [38], que consiste basicamente em encontrar vetores no *Kernel* da matriz $S(\lambda_i)$ definida como:

$$S(\lambda_i) \triangleq [\lambda_i I - A \mid -B] \tag{B.6}$$

Assim, as colunas da matriz

$$K(\lambda_i) \triangleq \begin{bmatrix} N_{\lambda_i} \\ M_{\lambda_i} \end{bmatrix} \tag{B.7}$$

constituem-se em uma base para o $\text{Ker } S(\lambda_i)$. Dado um $k_i \in K(\lambda_i)$ temos que:

$$v_i = N_{\lambda_i} k_i \tag{B.8}$$

$$w_i = M_{\lambda_i} k_i \tag{B.9}$$

Lembrando que $Fv_i = w_i$, podemos escrever que:

$$F [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n] \tag{B.10}$$

e dessa maneira,

$$F = WV^{-1} \tag{B.11}$$

Observação B.1 (Sobre a Independência Linear dos Autovetores) *Pode acontecer de encontrarmos uma matriz V singular, ou seja, termos autovetores linearmente independentes. Este fato ocorre quando dois ou mais subespaços de transmissão, possuem uma intersecção. Se existe a intersecção entre dois destes subespaços:*

$$\Gamma(\lambda_1) \cap \Gamma(\lambda_2) \neq \emptyset$$

então todos os pares de subespaços de transmissão possuem também uma intersecção. Além disso, esta intersecção é comum a todos os subespaços de transmissão e está incluído em $\text{Im}B$ [33].

Em geral, todos os subespaços de transmissão de um par (A, B) para os quais $m > n/2$, possuem intersecção com $\text{Im}B$. Se $m \leq n/2$ esta intersecção não existe em geral.

Em particular, se N é uma matriz tal que $NB = 0$ (N é o espaço nulo de B pela esquerda), o produto NAB é de posto pleno e $m \leq n/2$, a intersecção $(\Gamma(\lambda_i) \cap \text{Im}B = \emptyset)$ e os autovetores calculados pelo algoritmo proposto são sempre independentes entre si.

No caso em que a independência não é garantida, podemos restringir a escolha dos autovetores candidatos, v_i , satisfazendo a condição:

$$v_i \notin \text{Im}B \quad (\text{B.12})$$

Fazendo-se uma análise modal do sistema em malha fechada [17], temos que os autovetores à esquerda, definidos por V^{-1} , distribuem as excitações (entradas) sobre os modos do sistema; os autovetores à direita, definido em V , repartem estes modos sobre as variáveis de estado; e as direções de entrada repartem os modos sobre as variáveis de controle.

Cabe ressaltar então que a partir de uma escolha adequada de autovetores ou direções de entrada podemos fazer com que o sistema considerado apresente certas características particulares como: robustez, desacoplamento, rejeição a perturbações, respeito a restrições de controle, etc