

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA,  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**Controle Centralizado e Descentralizado por  
Realimentação de Estados Via Controle Ótimo e  
Programação Linear**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE  
SANTA CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE  
EM ENGENHARIA ELÉTRICA



Juan Carlos Molina Molina

Florianópolis - SC, Brasil  
17 de Fevereiro de 1997

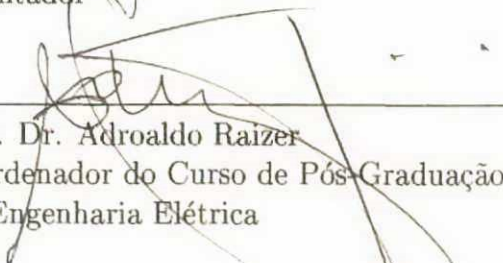
**Controle Centralizado e Descentralizado por Realimentação de Estados Via  
Controle Ótimo e Programação Linear**

**Juan Carlos Molina Molina**

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de **Mestre em Engenharia** na especialidade **Engenharia Elétrica**, área de concentração **Controle, Automação e Informática Industrial**, e aprovada em sua forma final pelo curso de pós-graduação.



Prof. Dr. Eugênio de Bona Castelan Neto  
Orientador



Prof. Dr. Adroaldo Raizer  
Coordenador do Curso de Pós-Graduação  
em Engenharia Elétrica

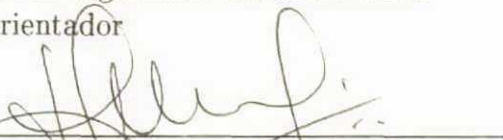
**Banca Examinadora**



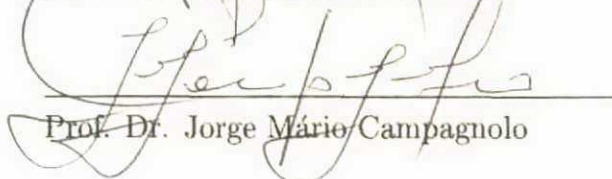
Prof. Dr. Eugênio de Bona Castelan Neto  
Orientador



Prof. Dr. Aguinaldo Silveira e Silva  
Co-orientador



Prof. Dr. Edson Roberto de Pieri



Prof. Dr. Jorge Mário Campagnolo

# Agradecimentos

A meus pais, Jairo e Cecília, porque a eles devo o que eu sou. Sem seu apoio, decisão, coragem, constância e força, não chegaria até onde eu estou.

A minha esposa, companheira e amiga, Amparo Patricia, por seu apoio, compreensão, tolerância e amor incondicional.

A meus irmãos, minha avó Nina, tios, primos, cunhados, sogros, familiares e amigos, por sua constante preocupação, interesse e apoio.

A meu orientador Eugênio de Bona Castelan Neto e co-orientador Aguinaldo Silveira e Silva, pela competência, conhecimentos transmitidos e troca de idéias.

Aos companheiros do LCMI e das "Baías", por estes dois anos de convivência, amizade e companherismo.

Aos professores, analistas, secretária e demais funcionários do LCMI.

Ao professor Edson Roberto de Pieri por sua constante preocupação e apoio.

Ao professor Basílio E. A. Milani da UNICAMP por seus valiosos aportes.

Ao professor Jorge Mário Campagnolo.

A EMPRESAS PÚBLICAS DE MEDELLIN - EEPPM (Colômbia) e a CNPq (Brasil) pelo apoio para a realização deste trabalho.

A todas aquelas pessoas que não estão aqui explicitamente incluídas, mas que de alguma maneira contribuíram no desenvolvimento deste trabalho.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução Geral</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Controle por Realimentação de Estados - Generalidades</b>	<b>5</b>
2.1	Introdução . . . . .	5
2.2	Formulação Geral do Problema de Controle por Realimentação de Estados	6
2.2.1	Controlabilidade e Estabilizabilidade . . . . .	8
2.2.2	Obtenção da Matriz de Realimentação de Estados . . . . .	10
2.3	Alocação Parcial de Pólos - Sistema de Ordem Reduzida . . . . .	11
2.4	Controle Descentralizado por Realimentação de Estados . . . . .	13
2.4.1	Formulação Geral do Problema . . . . .	13
2.4.2	Obtenção da Matriz de Realimentação de Estados . . . . .	16
2.5	Conclusão . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Controle Centralizado por Realimentação de Estados Via Controle Ótimo e Programação Linear</b>	<b>19</b>
3.1	Introdução . . . . .	19
3.2	Controle Ótimo . . . . .	20
3.2.1	Alocação Regional de Pólos Via LQR . . . . .	22
3.2.2	Sistema de Ordem Reduzida . . . . .	24
3.3	Programação Linear . . . . .	29

3.3.1	Formulação do Problema Controle Centralizado por Realimentação de Estados como um Problema de Invariância Positiva . . . . .	29
3.3.2	Caso $n \leq 2m$ . . . . .	31
3.3.3	Caso $n > 2m$ . . . . .	35
3.3.4	Alocação Parcial de Pólos Via Programação Linear . . . . .	37
3.4	Exemplo Ilustrativo . . . . .	37
3.4.1	Alocação Regional de Pólos Via LQR . . . . .	38
3.4.2	Alocação Regional de Pólos Via Programação Linear . . . . .	38
3.4.3	Sistema de Ordem Reduzida . . . . .	40
3.5	Conclusão . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Controle Descentralizado por Realimentação de Estados Via Controle Ótimo e Programação Linear</b> . . . . .	<b>47</b>
4.1	Introdução . . . . .	47
4.2	Controle Ótimo . . . . .	48
4.3	Programação Linear . . . . .	52
4.4	Exemplo Ilustrativo . . . . .	58
4.4.1	Controle Ótimo . . . . .	59
4.4.2	Programação Linear . . . . .	60
4.5	Conclusão . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Conclusões Gerais e Sugestões para Futuros Trabalhos</b> . . . . .	<b>67</b>
5.1	Conclusões Gerais . . . . .	67
5.1.1	Caso Centralizado . . . . .	67
5.1.2	Caso Descentralizado . . . . .	68
5.2	Sugestões para Futuros Trabalhos . . . . .	69

<b>A</b>	<b>Invariância Positiva de Conjuntos Poliedrais</b>	<b>75</b>
A.1	Definições Básicas . . . . .	75
A.2	Invariância Positiva . . . . .	76
A.2.1	Interpretação das Relações de Invariância Positiva . . . . .	77
<b>B</b>	<b>Programação Linear e Produto de Kronecker</b>	<b>79</b>
B.1	Programação Linear . . . . .	79
B.2	Produto de Kronecker . . . . .	80

# Notação

- $I_n$  Matriz identidade de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .
- $0_{m \times n}$  Matriz de  $\mathbb{R}^{m \times n}$  com componentes iguais a zero (0).
- $1_n$  Vetor de  $\mathbb{R}^n$  com componentes iguais a um (1).
- $A^T$  Matriz transposta da matriz  $A$ .
- $A_{ij}$  Componente  $ij$  da matriz  $A$ .
- $(A_{12})_{ij}$  Componente  $ij$  da matriz  $A_{12}$ .
- $A \otimes B$  Produto de Kronecker das matrizes  $A$  e  $B$ .
- $\sigma(A)$  Espectro da matriz  $A$ .
- $tr(A)$  Traço da matriz  $A$ .
- $\mathcal{Ker}(A)$  Kernel da matriz  $A$ .
- $Re(\lambda_i)$  Parte real de  $\lambda_i$ , para  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ .

# Resumo

Este trabalho trata o problema de controle centralizado e descentralizado por realimentação de estados via controle ótimo e programação linear.

Para o caso centralizado é feita uma revisão dos conceitos básicos do regulador linear quadrático (LQR). É mostrado como é possível, além de estabilizar ou alocar os pólos do sistema com uma margem de estabilidade pré-estabelecida via controle ótimo, alocar os pólos em uma faixa vertical do plano complexo. É explorada a utilização de um sistema de ordem reduzida, introduzindo uma condição suficiente para alocar parcialmente os pólos do sistema via LQR. Mostra-se como o sistema reduzido pode ser utilizado não apenas para alocar parcialmente os pólos do sistema via LQR, mas também para projetar o LQR de energia mínima que estabiliza ou aloca os pólos do sistema com uma margem de estabilidade pré-estabelecida ou em uma faixa vertical.

O problema de controle centralizado por realimentação de estados também é reformulado como um problema de invariância positiva de conjuntos poliedrais. É utilizada uma transformação do sistema na forma de controlabilidade para determinar um poliedro e uma matriz de realimentação de estados que torna o poliedro positivamente invariante e aloca os pólos do sistema com uma margem de estabilidade pré-estabelecida. O problema é resolvido via programação linear.

O problema do regulador linear quadrático é formulado para o caso descentralizado. É mostrado um algoritmo iterativo para encontrar a matriz de realimentação de estados descentralizada que resolve o problema. No algoritmo é solucionada a cada iteração uma equação de Riccati com matriz de ponderação de estados modificada em função da restrição de descentralização.

O problema de controle descentralizado por realimentação de estados é reformulado como um problema de invariância positiva de conjuntos poliedrais, como extensão do caso centralizado. É proposto um algoritmo construtivo para encontrar um poliedro e uma matriz de realimentação de estados descentralizada que torna o poliedro positivamente invariante e aloca os pólos do sistema com uma margem de estabilidade pré-estabelecida. No algoritmo, o sistema interconectado é transformado de forma a obter cada subsistema isolado na forma de controlabilidade. Nos cálculos consideram-se tanto os subsistemas quanto a interconexão entre eles. O problema é resolvido via programação linear.

**Palavras Chaves:** Controle Descentralizado, Controle Ótimo, Controle por Realimentação de Estados, Programação Linear, Sistemas Lineares.



# Resumen

Este trabajo trata el problema de control centralizado y descentralizado por realimentación de estados vía control óptimo y programación lineal.

Para el caso centralizado es efectuada una revisión de los conceptos básicos del regulador lineal cuadrático (LQR). Es mostrado como es posible, además de estabilizar o posicionar los polos del sistema con una margen de estabilidad pre-establecida vía control óptimo, posicionar los polos en un banda vertical del plano complejo. Es explorada la utilización de un sistema de orden reducida, introduciendo una condición suficiente para posicionar parcialmente los polos del sistema vía LQR. Es mostrado como el sistema reducido puede ser utilizado no solo para posicionar parcialmente los polos del sistema vía LQR, sino también para diseñar el LQR de energía mínima que estabiliza o posiciona los polos del sistema con una margen de estabilidad pre-establecida o en una banda vertical.

El problema de control centralizado por realimentación de estados es reformulado como un problema de invariancia positiva de conjuntos poliedrales. Es utilizada una transformación del sistema en la forma de controlabilidad para determinar un poliedro y una matriz de realimentación de estados que vuelve o poliedro positivamente invariante y posiciona los polos del sistema con una margen de estabilidad pre-establecida. El problema es resuelto vía programación lineal.

El problema del regulador lineal cuadrático es formulado para el caso descentralizado. Es mostrado un algoritmo iterativo para encontrar la matriz de realimentación de estados descentralizada que resuelve el problema. En el algoritmo es solucionada en cada iteración una ecuación de Riccati con matriz de ponderación de estados modificada en función de la restricción de descentralización.

El problema de control descentralizado por realimentación de estados es reformulado como un problema de invariancia positiva de conjuntos poliedrales. Es propuesto un algoritmo constructivo para encontrar un poliedro y una matriz de realimentación de estados descentralizada que vuelve o poliedro positivamente invariante y posiciona los polos del sistema interconectado con una margen de estabilidad pre-establecida. En el algoritmo, el sistema interconectado es transformado de forma a obtener cada subsistema aislado en la forma de controlabilidad. En los cálculos se consideran tanto los subsistemas como la interconexión entre ellos. El problema es resuelto vía programación lineal.

**Palabras Claves:** Control Descentralizado, Control Óptimo, Control por Realimentación de Estados, Programación Lineal, Sistemas Lineales.

# Abstract

This work deals with the problem of centralized and decentralized control by state feedback via optimal control and linear programming.

The basic concepts of the linear quadratic regulator (LQR) are firstly reviewed. In particular, it is shown how the closed loop poles can be assigned with a pre-specified degree of stability or into a vertical strip of the complex plane. It is introduced a sufficient condition for partial pole assignment via LQR and a reduced order system can be used for the design of the controller. It is shown how the reduced system is also used for closed loop pole assignment with a pre-specified degree of stability or in a vertical strip via minimum energy LQR design.

The problem of centralized control by state feedback is reformulated as a problem of closed loop positive invariance of polyhedral sets. The system is transformed into the controllability form and a positively invariant polyhedron and the associated state feedback matrix are determined by using linear programming technique. This methodology allows the assignment of the closed loop poles with a pre-specified degree of stability.

The linear quadratic regulator problem is formulated for the decentralized case. It is shown an iterative algorithm for finding a decentralized state feedback matrix which solves the problem. A Riccati equation is solved at each iteration in order to modify the state weight matrix to obtain the decentralization constraint.

Finally, as an extension of the centralized case, the problem of the decentralized control by state feedback is reformulated as a problem of positive invariance of polyhedral sets. A constructive algorithm is proposed for finding a closed loop positively invariant polyhedron and the associated decentralized state feedback matrix by using linear programming technique. The computations take into account both the isolated subsystems and their interconnections. The adequate similarity transformation is obtained by putting each subsystem in the controllability form.

**Key Words:** Decentralized Control, Linear Programming, Linear Systems, Optimal Control, State Feedback Control.

# Capítulo 1

## Introdução Geral

A *estabilidade* e o *comportamento dinâmico* de um sistema de controle dependem principalmente da posição dos seus pólos no plano complexo. Quando um sistema a controlar é instável ou apresenta um desempenho não satisfatório, pode-se modificar a resposta do sistema controlado alterando a posição dos pólos, pela utilização de uma *realimentação* dos estados ou das saídas do sistema.

O problema de síntese, que consiste em projetar a matriz de ganhos de realimentação dos estados ou das saídas, visando estabilizar ou melhorar o comportamento dinâmico de um sistema, é denominado *problema de controle por realimentação de estados ou de saídas*.

Neste trabalho será estudado o problema de realimentação de estados para sistemas lineares, invariantes e contínuos no tempo, representados por variáveis de estado e com todos os seus estados acessíveis para realimentação. Caso os estados não sejam todos acessíveis, é possível projetar um *observador de estados* [7], [18].

As abordagens para o projeto da matriz de realimentação de estados vão desde o posicionamento de pólos até o controle ótimo, como será mostrado neste trabalho. Em ambos os casos podem ser estudados, entre outros, os problemas de *estabilização e de alocação regional e parcial de pólos*.

Geralmente estes estudos são baseados na noção de *centralização*, isto é, toda a informação disponível sobre o sistema e os cálculos baseados nesta informação (controle do sistema) são centralizados, em um único lugar. No desenvolvimento deste trabalho, se não for especificado o contrário, trata-se do caso *centralizado*.

No estudo do controle de sistemas interconectados de grande porte, como é o caso dos Sistemas Elétricos de Potência, Sistemas Sócio-econômicos e os Sistemas de Transporte, entre outros, aparece uma característica importante que deve ser devidamente considerada, a *descentralização*. Esta classe de sistemas é caracterizada por separação geográfica e

o sistema global pode ser considerado como um conjunto de subsistemas ou estações de controle local unidas aos restantes subsistemas por meio de uma rede interconectada.

Em cada estação de controle local, o controlador utiliza apenas as medidas das saídas ou dos estados locais e controla apenas entradas locais. Porém, todos os controladores estão envolvidos no controle do mesmo sistema interconectado de grande porte.

Por razões econômicas e de confiabilidade, na atualidade há uma tendência a uma decisão descentralizada, computação distribuída e controle hierárquico [27]. No entanto, a maioria das ferramentas desenvolvidas supondo a centralização, não podem ser aplicadas diretamente aos sistemas descentralizados, sendo necessário adaptá-las às características do controle descentralizado.

O objetivo deste trabalho é abordar via controle ótimo e programação linear o problema de controle centralizado e descentralizado por realimentação de estados. Também é de interesse estudar para o caso centralizado a utilização de um sistema de ordem reduzida para o projeto dos controladores.

Dentro deste contexto, a apresentação do presente trabalho é distribuída da seguinte forma:

**Capítulo 2:** É apresentada a formulação geral do problema de *controle por realimentação de estados*. São mostradas as condições para a existência da matriz de realimentação de estados satisfazendo os requisitos exigidos para estabilização e alocação regional de pólos no sistema [7], [30].

Quando o sistema possui pólos "bons" (estáveis ou com dinâmica desejada) e pólos "ruins" (instáveis ou com dinâmica não desejada), é possível modificar apenas estes últimos. Para tanto, pode-se utilizar um sistema de ordem reduzida associado com a dinâmica dos pólos que deseja-se modificar e desacoplado da dinâmica dos pólos que deseja-se deixar inalterados na malha fechada [15]. Este problema é definido como *alocação parcial de pólos*.

É formulado o problema de *controle descentralizado por realimentação de estados* de um sistema interconectado [27]. É mostrado como a controlabilidade do sistema interconectado não implica na existência de uma matriz de realimentação de estados descentralizada que estabilize ou aloque os pólos do sistema. Como uma extensão do conceito de modos fixos centralizados é introduzido o conceito de modos fixos descentralizados. É mostrada uma condição necessária e suficiente, em termos destes modos, para a existência de uma matriz de realimentação de estados descentralizada satisfazendo os requisitos exigidos para estabilização e alocação regional de pólos no sistema interconectado [3], [10], [27], [29].

**Capítulo 3:** O problema de controle centralizado por realimentação de estados é tratado por diferentes abordagens via:

- *Controle Ótimo:* É feita uma revisão dos conceitos básicos do *Regulador Linear Quadrático (LQR)* [2], [11], [19] para estabilização e alocação regional dos

pólos do sistema, mostrando como é possível obter uma alocação em uma faixa vertical do plano complexo [25].

É proposta uma condição suficiente para alocação parcial de pólos via LQR. É mostrado como é possível utilizar um sistema de ordem reduzida não apenas para alocar parcialmente os pólos do sistema via LQR, mas também para projetar o LQR de energia mínima que estabiliza ou aloca os pólos do sistema com uma margem de estabilidade pré-estabelecida ou em uma faixa vertical do plano complexo.

- *Programação Linear*: O problema de controle centralizado por realimentação de estados é reformulado como um problema de *invariância positiva de conjuntos poliedrais* [22].

Para solucionar o problema deve-se determinar um poliedro convexo e compacto no espaço de estados, e uma matriz de realimentação de estados que torne o poliedro positivamente invariante com respeito ao sistema em malha fechada e aloque os pólos do sistema com margem de estabilidade pré-estabelecida. Mostra-se como o problema pode ser resolvido via *programação linear*.

Para ilustrar a utilização destes métodos é apresentado um exemplo numérico. O software utilizado para os diferentes cálculos é o *Scilab-2.2* do Scilab Group (Inria, Enpc). Para resolver os programas lineares, estes são levados à sua forma padrão.

**Capítulo 4:** O problema de controle descentralizado por realimentação de estados é tratado por abordagens via:

- *Controle Ótimo*: O problema *linear quadrático* é formulado para o caso descentralizado, apresentando um algoritmo para sua resolução [13]. Além de estabilizar o sistema, é mostrado como é possível alocar regionalmente os pólos.
- *Programação Linear*: Como uma extensão do caso centralizado, mediante a utilização da propriedade de *invariância positiva de conjuntos poliedrais*, é reformulado o problema de controle descentralizado por realimentação de estados. De forma análoga ao caso centralizado, para solucionar o problema deve-se determinar um poliedro convexo e compacto no espaço de estados, e uma matriz de realimentação de estados descentralizada que torne o poliedro positivamente invariante com respeito ao sistema interconectado em malha fechada e aloque os pólos do sistema interconectado com margem de estabilidade pré-estabelecida. Mostra-se como o problema pode ser resolvido via *programação linear*.

Para ilustrar a utilização destes métodos é apresentado um exemplo numérico.

**Capítulo 5:** São apresentadas as conclusões gerais e as sugestões para futuros trabalhos.

**Apêndice A:** É apresentada uma breve revisão dos conceitos básicos de *conjuntos poliedrais* e a propriedade de *invariância positiva* [6], [15], [16], [23].

É mostrado que para tornar um poliedro positivamente invariante com respeito a um sistema linear é necessário resolver duas relações matriciais, conhecidas como

relações de invariância positiva, e que a solução da primeira relação é equivalente a alocar parcialmente os pólos do sistema.

**Apêndice B:** São apresentados alguns conceitos básicos da *programação linear* e o *produto de Kronecker* [17].

É mostrado também, como é possível formular um problema de programação linear na sua forma padrão, utilizando propriedades do produto de Kronecker.

## Capítulo 2

# Controle por Realimentação de Estados - Generalidades

### 2.1 Introdução

Neste capítulo é apresentada a formulação geral do problema de controle por realimentação de estados, a qual permite modificar a estabilidade e o comportamento dinâmico do sistema controlado, mudando a posição dos seus pólos na malha fechada. Neste contexto, são definidos os conceitos de *alocação arbitrária e regional de pólos*, *controlabilidade*, *modos fixos e estabilizabilidade*, e *alocação com respeito a uma região* [7], [18], [30].

É mostrado que uma condição necessária e suficiente para a existência de uma matriz de realimentação de estados que aloque arbitrariamente os pólos do sistema, é que este seja *completamente controlável*. No caso do sistema ser não-controlável, uma condição necessária e suficiente para a existência de uma matriz de realimentação de estados tal que o sistema em malha fechada seja estável, é que seus modos fixos sejam estáveis. Esta última condição é generalizada para alocação de pólos em uma região qualquer do semiplano esquerdo do plano complexo.

Quando o sistema possui pólos "bons" (estáveis e com dinâmica desejada) e pólos "ruins" (instáveis ou com dinâmica não desejada), é possível modificar apenas estes últimos. Para tanto, pode-se utilizar um sistema de ordem reduzida associado com a dinâmica dos pólos que deseja-se alterar e desacoplado da dinâmica dos pólos que deseja-se deixar inalterados na malha fechada [15]. Este problema é definido como *alocação parcial de pólos* e será também considerado neste capítulo.

É feita a formulação geral do problema de controle descentralizado por realimentação de estados de sistemas interconectados [27]. O conceito de modos fixos (centralizados) pode ser estendido para o caso descentralizado, introduzindo assim a noção de modos fixos descentralizados. A controlabilidade do sistema interconectado não garante a existência

de uma matriz de realimentação de estados descentralizada que estabilize ou aloque os pólos do sistema interconectado. É mostrada uma condição necessária e suficiente, em função dos modos fixos descentralizados, para a existência desta matriz descentralizada [3], [10], [27], [29].

## 2.2 Formulação Geral do Problema de Controle por Realimentação de Estados

Seja o sistema linear, invariante e contínuo no tempo, descrito pela equação de estados:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.1)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz de dinâmica,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de entradas e  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é a matriz de entrada.

O espectro da matriz  $A$ , denotado  $\sigma(A)$ , é o conjunto de seus autovalores:

$$\sigma(A) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$$

Cada elemento deste conjunto será referido no que segue, simplesmente como um *modo* ou *pólo* do sistema.

Seja uma lei de controle do tipo *realimentação de estados*, dada por:

$$u(t) = Kx(t) + v(t) \quad (2.2)$$

onde  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é a matriz de realimentação de estados e  $v(t) \in \mathbb{R}^m$  é uma nova entrada de controle ou de referência.

Quando a lei de controle (2.2) é aplicada ao sistema em malha aberta (2.1), como mostrado na figura 2.1, obtém-se o sistema em malha fechada:

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + Bv(t) \quad (2.3)$$

cujos pólos são dados pelo espectro da matriz  $(A + BK)$ :

$$\sigma(A + BK) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

De (2.3), observa-se que os pólos do sistema controlado são, em geral, modificados pela aplicação da matriz  $K$ . Assim, a matriz  $K$  pode ser projetada de forma tal que:

- Dado um conjunto simétrico pré-estabelecido  $\Lambda$  de  $n$  números complexos, contido no semiplano esquerdo do plano complexo, os pólos do sistema em malha fechada sejam definidos por este conjunto,  $\sigma(A + BK) = \Lambda$ . Trata-se, neste caso, de um problema de *Alocação Arbitrária de Pólos*.



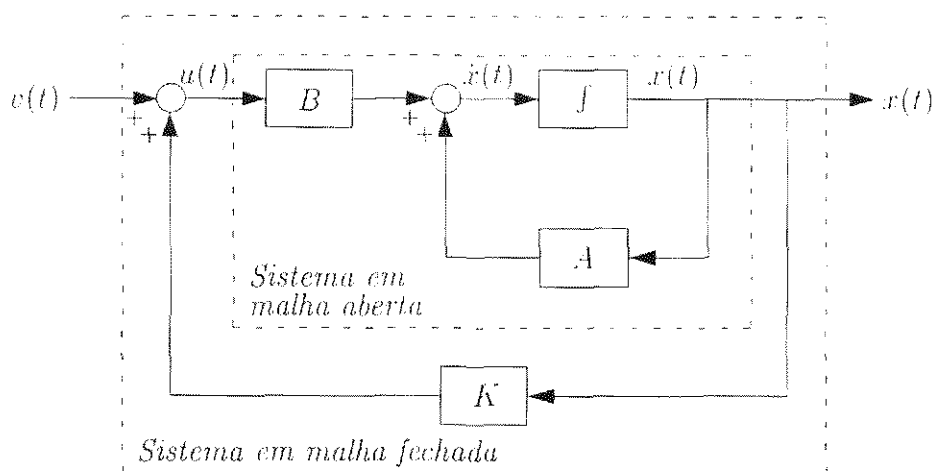
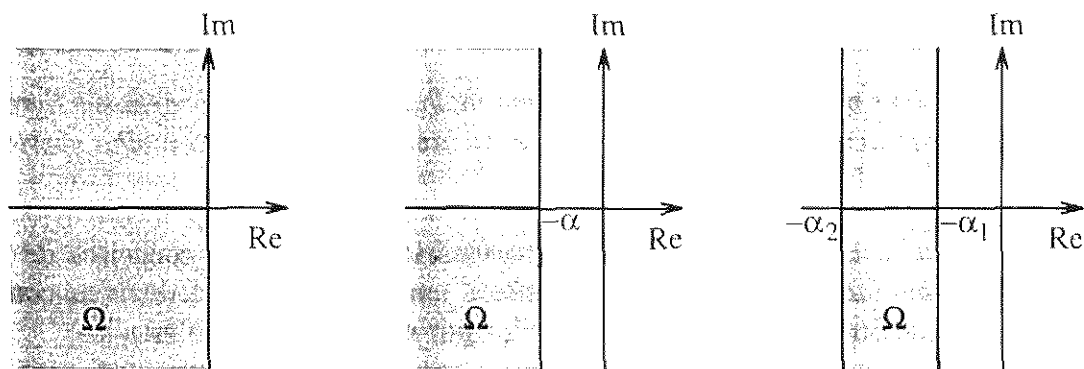


Figura 2.1: Controle por Realimentação de Estados

- Dada uma região  $\Omega$  contida no semiplano esquerdo do plano complexo, os pólos do sistema em malha fechada estejam contidos nesta região, ou seja,  $\sigma(A + BK) \subset \Omega \subset \mathcal{C}^-$ . Tem-se, neste caso, um problema de *Alocação Regional de Pólos*.
- Os pólos do sistema em malha fechada estejam contidos no semiplano esquerdo do plano complexo, ou seja,  $\sigma(A + BK) \subset \mathcal{C}^-$ , sendo assim um problema de *Estabilização*.



(a) Região de Estabilidade      (b) Região com Margem de Estabilidade  $-\alpha$ , com  $\alpha \geq 0$       (c) Região ou Faixa Vertical, com  $\alpha_2 > \alpha_1 \geq 0$

Figura 2.2: Regiões do Plano Complexo

Na figura 2.2 são mostradas as regiões do plano complexo que serão consideradas. Observa-se que a região com margem de estabilidade  $-\alpha$  pode ser considerada como um caso particular da faixa vertical, com  $\alpha_1 = \alpha$  e  $\alpha_2 \rightarrow -\infty$ . A região de estabilidade pode

ser considerada como um caso particular da região com margem de estabilidade  $-\alpha$ , com  $\alpha = 0$ .

### 2.2.1 Controlabilidade e Estabilizabilidade

*O sistema (2.1) é controlável no tempo  $t_0$ , se existe um tempo finito  $t_1 > t_0$  tal que para qualquer estado inicial  $x(t_0)$  e qualquer estado  $x_1$  no espaço de estados, existe uma entrada de controle  $u(t)$  que transfira o estado  $x(t_0)$  no estado  $x_1$  no tempo  $t_1$  [7].*

O sistema (2.1) é controlável, ou simplesmente o par  $(A, B)$  é controlável, se e somente se qualquer uma das seguintes condições equivalentes é satisfeita:

- A matriz de controlabilidade:

$$U = \left[ B \mid AB \mid A^2B \dots \mid A^{n-1}B \right] \in \mathbb{R}^{n \times nm}$$

tem posto  $n$ .

- Para cada autovalor  $\mu_i$  de  $A$ ,  $i = 1 \dots n$ , a matriz complexa:

$$\left[ \mu_i I - A \mid B \right] \in \mathbb{C}^{n \times (n+m)}$$

tem posto  $n$ .

Deve-se salientar que aqui são apresentadas somente as duas condições anteriores, mas existem outras equivalentes [7], [18].

*Pode-se mostrar que os pólos do sistema em malha fechada (2.3) podem ser livremente alocáveis por realimentação de estados, se e somente se o sistema em malha aberta (2.1) é controlável [7], [30].*

Se o sistema (2.1) é não-controlável, é necessário introduzir os conceitos de *modos fixos, estabilizabilidade e alocação com respeito a uma região*, para deduzir as condições para estabilização ou alocação regional de pólos por realimentação de estados.

*O conjunto de pólos do sistema (2.3) invariante sob a aplicação de qualquer matriz  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , é definido como modos fixos do sistema (2.1).*

Como visto, se o sistema (2.1) é completamente controlável, os pólos do sistema são livremente alocáveis e portanto o sistema não possui modos fixos. Assim, pode-se verificar que *o sistema (2.1) possui modos fixos se e somente se o sistema é não-controlável [7].*

Suponha agora que o sistema (2.1) é não-controlável, com  $n_1 < n$  sendo o posto da matriz de controlabilidade do sistema. Mediante uma escolha adequada de base [7],

pode-se transformar o sistema em:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_c \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0_{(n-n_1) \times n_1} & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0_{(n-n_1) \times m} \end{bmatrix} u(t) \quad (2.4)$$

com  $\bar{x}_c \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $\bar{x}_{\bar{c}} \in \mathbb{R}^{n-n_1}$ ,  $A_c \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ,  $\bar{A}_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 \times (n-n_1)}$ ,  $\bar{A}_{\bar{c}} \in \mathbb{R}^{(n-n_1) \times (n-n_1)}$  e  $\bar{B}_c \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}$ .

Tem-se que o subsistema de ordem  $n_1$ :

$$\dot{\bar{x}}_c(t) = A_c \bar{x}_c(t) + \bar{B}_c u(t) \quad (2.5)$$

é controlável.

Seja uma lei de controle do tipo realimentação de estados:

$$u = \begin{bmatrix} \bar{K}_1 & | & \bar{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + v(t) \quad (2.6)$$

onde  $\begin{bmatrix} \bar{K}_1 & | & \bar{K}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é a *matriz de realimentação de estados*, com  $\bar{K}_1 \in \mathbb{R}^{m \times n_1}$  e  $\bar{K}_2 \in \mathbb{R}^{m \times (n-n_1)}$ , e  $v(t) \in \mathbb{R}^m$  é uma *nova entrada de controle ou de referência*.

Quando a lei de controle dada por (2.6) é aplicada ao sistema em malha aberta (2.4), obtém-se o sistema em malha fechada:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_c \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c + \bar{B}_c \bar{K}_1 & \bar{A}_{12} + \bar{B}_c \bar{K}_2 \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + B v(t) \quad (2.7)$$

cujos pólos são dados por:

$$\sigma(\bar{A}_c + \bar{B}_c \bar{K}_1) \cup \sigma(\bar{A}_{\bar{c}})$$

onde:

- Os pólos do subsistema controlável de malha fechada, dados pelo espectro de  $\bar{A}_c + \bar{B}_c \bar{K}_1$ , são *livremente alocáveis* pela realimentação de estados  $\bar{K}_1$ , pois o subsistema (2.5) é controlável.
- Os modos do subsistema não-controlável, dados pelo espectro de  $\bar{A}_{\bar{c}}$ , são *invariantes* ou *fixos* sob qualquer aplicação de matriz de realimentação de estados  $\begin{bmatrix} \bar{K}_1 & | & \bar{K}_2 \end{bmatrix}$ .

Assim, os modos fixos do sistema (2.4) são dados pelo espectro da matriz  $A_{\bar{c}}$ . Dado que o espectro de uma matriz não muda sob a aplicação de uma relação de similaridade ou mudança de base, estes são os mesmos modos fixos do sistema (2.1).

Portanto, se o sistema (2.1) é não-controlável, com  $n_1 < n$  sendo o posto da matriz de controlabilidade, sob a aplicação da lei de controle do tipo realimentação de estados (2.2), o sistema possui:

- Um conjunto de  $n - n_1$  *modos fixos*, invariantes sob  $\bar{K}$ , dados pelo espectro de  $\bar{A}_F$ . Pode-se verificar que:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} \mu_i I - \bar{A} & \bar{B} \end{bmatrix} = \text{posto} \begin{bmatrix} \mu_i I - A & B \end{bmatrix} = n_1 < n, \quad \forall \mu_i \in \sigma(\bar{A}_F)$$

- Um conjunto de  $n_1$  *modos livremente alocáveis* por  $K$ .

Agora, para estabilizar o sistema não-controlável (2.1) utilizando-se realimentação de estados, os  $n - n_1$  modos fixos têm que ser estáveis, de forma tal que ao mudar os  $n_1$  pólos que são controláveis, o sistema possa ser estabilizado. Assim:

*O sistema (2.1) é estabilizável se seus modos fixos são estáveis. Logo, existe uma realimentação de estados tal que o sistema em malha fechada resultante é estável, se e somente se o sistema (2.1) é estabilizável [18].*

O conceito de estabilizabilidade pode ser generalizado para uma região qualquer  $\Omega$  no semiplano esquerdo do plano complexo. Neste caso, pode-se dizer que *o sistema (2.1) é alocável com respeito a  $\Omega$ , se seus modos fixos pertencem a esta região. Portanto, existe uma realimentação de estados tal que o sistema em malha fechada resultante tem seus pólos contidos em  $\Omega$ , se e somente se o sistema é alocável com respeito a  $\Omega$ .*

## 2.2.2 Obtenção da Matriz de Realimentação de Estados

Na literatura encontram-se diferentes métodos para o projeto da matriz de realimentação de estados, desde técnicas de alocação de pólos até controle ótimo. Em particular, neste trabalho serão explorados dois métodos via:

- *Controle Ótimo*: Neste caso, minimiza-se um índice de desempenho ou função custo do tipo quadrático, obtendo assim, um *Regulador Linear Quadrático (LQR)* que estabilize ou aloque regionalmente os pólos do sistema [2], [11], [19].
- *Programação Linear*: Os problemas de estabilização e alocação regional de pólos por realimentação de estados são reformulados como problemas de *Invariância Positiva* de um poliedro com respeito ao sistema em malha fechada, utilizando programação linear para sua solução [22]. Neste caso, as funções de Lyapunov utilizadas são do tipo poliedral [6], [16].

## 2.3 Alocação Parcial de Pólos - Sistema de Ordem Reduzida

Considera-se o sistema em malha aberta (2.1) não-controlável e com seus pólos divididos em dois subconjuntos,  $\sigma_b$  e  $\sigma_r$ , assim:

$$\sigma(A) = \sigma_b \cup \sigma_r = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-r}\} \cup \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r\} \text{ e } \sigma_b \cap \sigma_r = \{\emptyset\}$$

onde:

- O subconjunto  $\sigma_b$  é formado pelos pólos "bons" (estáveis e com dinâmica desejada) do sistema de malha aberta, isto é, que pertencem a alguma região desejável  $\Omega$  contida no semiplano esquerdo do plano complexo, com propriedades dinâmicas desejadas para o sistema de malha fechada.
- O subconjunto  $\sigma_r$  é formado pelos pólos "ruins" (instáveis ou com dinâmica não desejada) do sistema de malha aberta, isto é,  $\mu_i \notin \Omega$  para  $i = 1 \dots r$ . Estes pólos são assumidos serem controláveis:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} \mu_i I - A & B \end{bmatrix} = n$$

Seja o subespaço  $A$ -invariante  $\mathcal{V}_b$  associado aos  $(n-r)$  pólos "bons" de malha aberta. Seja  $\mathcal{V}_r$  um subespaço complementar de  $\mathcal{V}_b$ , ou seja  $\mathcal{V}_b \oplus \mathcal{V}_r = \mathbb{R}^n$ , associado aos pólos "ruins" e controláveis. Considera-se a seguinte mudança de base no sistema (2.1):

$$x(t) = \begin{bmatrix} Q_b & | & Q_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_b(t) \\ \bar{x}_r(t) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

onde a matriz  $Q = \begin{bmatrix} Q_b & | & Q_r \end{bmatrix}$  é ortogonal e tal que as colunas de  $Q_b \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$  geram uma base para  $\mathcal{V}_b$  e as colunas de  $Q_r \in \mathbb{R}^{n \times r}$  geram uma base para  $\mathcal{V}_r$ . Em particular, a matriz  $Q$  pode ser obtida a partir de uma decomposição de Schur da matriz  $A$ , reordenando, se necessário, seus blocos [15].

Na base ortonormal formada pelas colunas da matriz  $Q$ , o sistema de malha aberta (2.1) é representado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_b(t) \\ \dot{\bar{x}}_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_b & A_{12} \\ 0_{r \times (n-r)} & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_b(t) \\ \bar{x}_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_b \\ B_r \end{bmatrix} u(t) \quad (2.9)$$

onde:

- $A_Q = Q^T A Q = \begin{bmatrix} A_b & A_{12} \\ 0_{r \times (n-r)} & A_r \end{bmatrix}$

$$\bullet B_Q = Q^T B = \begin{bmatrix} B_b \\ B_r \end{bmatrix}$$

Nota-se que a dinâmica de  $\bar{x}_r$ , associada aos pólos "ruins" a serem modificados é desacoplada de  $\bar{x}_b$ . Assim, pode-se isolar o seguinte sistema de ordem reduzida de malha aberta:

$$\dot{\bar{x}}_r(t) = A_r \bar{x}_r(t) + B_r u(t) \quad (2.10)$$

Este sistema de ordem reduzida é completamente controlável, dado que os pólos de  $A_r$  são assumidos serem controláveis [30].

Considerando a mudança de base (2.8) na lei de controle (2.2), obtém-se:

$$u(t) = \begin{bmatrix} K_b & | & K_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_b(t) \\ \bar{x}_r(t) \end{bmatrix} + v(t) \quad (2.11)$$

onde  $K_Q = \begin{bmatrix} K_b & | & K_r \end{bmatrix}$  é a representação da matriz  $K$  na nova base, com  $K_b = KQ_b \in \mathbb{R}^{m \times (n-r)}$  e  $K_r = KQ_r \in \mathbb{R}^{m \times r}$ .

Para alocar parcialmente os pólos do sistema (2.1),  $K_Q$  tem que ter a forma:

$$K_Q = \begin{bmatrix} 0 & | & K_r \end{bmatrix}, \text{ com } \text{rank}(K_r) = r \quad (2.12)$$

assim,  $\mathcal{V}_b = \text{Ker}(K)$  e  $\text{Ker}(K)$  é  $(A + BK)$ -invariante [30].

Substituindo (2.12) em (2.11), tem-se:

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0 & | & K_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_b(t) \\ \bar{x}_r(t) \end{bmatrix} + v(t) \quad (2.13)$$

Quando a lei de controle por realimentação de estados dada por (2.13) é aplicada ao sistema em malha aberta (2.9), resulta no seguinte sistema em malha fechada:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_b(t) \\ \dot{\bar{x}}_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_b & A_{12} + B_b K_r \\ 0_{r \times (n-r)} & A_r + B_r K_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_b(t) \\ \bar{x}_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_b \\ B_r \end{bmatrix} v(t) \quad (2.14)$$

E devido ao fato de que o espectro de uma matriz não muda com a aplicação de uma relação de similaridade, tem-se que os pólos do sistema em malha fechada são dados por:

$$\sigma(A + BK) = \sigma(A_b) \cup \sigma(A_r + B_r K_r)$$

onde:

- Os pólos "bons" do sistema em malha aberta (2.1), dados pelo espectro de  $A_b$ , são mantidos inalterados na malha fechada.

- Os pólos "ruins" do sistema em malha aberta (2.1), dados pelo espectro de  $A_r$ , são modificados na malha fechada, dado que a matriz de realimentação de estados  $K_r$  aloca os pólos do sistema de ordem reduzida (2.10).

Portanto, é possível projetar a matriz de realimentação de estados  $K_r$  de forma tal a estabilizar ou alocar regionalmente os pólos do sistema de ordem reduzida (2.10) e portanto, estabilizar ou alocar parcialmente os pólos do sistema global (2.1).

Neste trabalho será projetada a matriz de realimentação de estados para alocar parcialmente os pólos do sistema, por abordagens via Controle Ótimo e Programação Linear utilizando o sistema de ordem reduzida.

## 2.4 Controle Descentralizado por Realimentação de Estados

### 2.4.1 Formulação Geral do Problema

Seja o sistema linear, invariante e contínuo no tempo, composto pela interconexão de  $N$  subsistemas, descrito pela equação de estados [27]:

$$\dot{x}(t) = A_D x(t) + B_D u(t) + A_I x(t) \quad (2.15)$$

onde os *vectores de estados e de controle* do sistema interconectado são:

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t)^T & x_2(t)^T & \cdots & x_N(t)^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n \\ u(t) &= \begin{bmatrix} u_1(t)^T & u_2(t)^T & \cdots & u_N(t)^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

com  $x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$  e  $u_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$  sendo os *vectores de estados e de controle*, respectivamente, de cada subsistema isolado  $i$ , com  $n = \sum_{i=1}^N n_i$  e  $m = \sum_{i=1}^N m_i$  para  $i = 1, 2, \dots, N$ .

As matrizes  $A_D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B_D \in \mathbb{R}^{m \times n}$  são bloco diagonal:

$$A_D = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_N \end{bmatrix}, \quad B_D = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_N \end{bmatrix}$$

onde  $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$  e  $B_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , são as matrizes de *dinâmica e de entrada*, respectivamente, do subsistema isolado  $i$ .

A matriz de interconexões do sistema,  $A_I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , é:

$$A_I = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & 0 & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

onde  $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, N$ ,  $i \neq j$ , é a matriz de interconexão do subsistema  $i$  com o subsistema  $j$ .

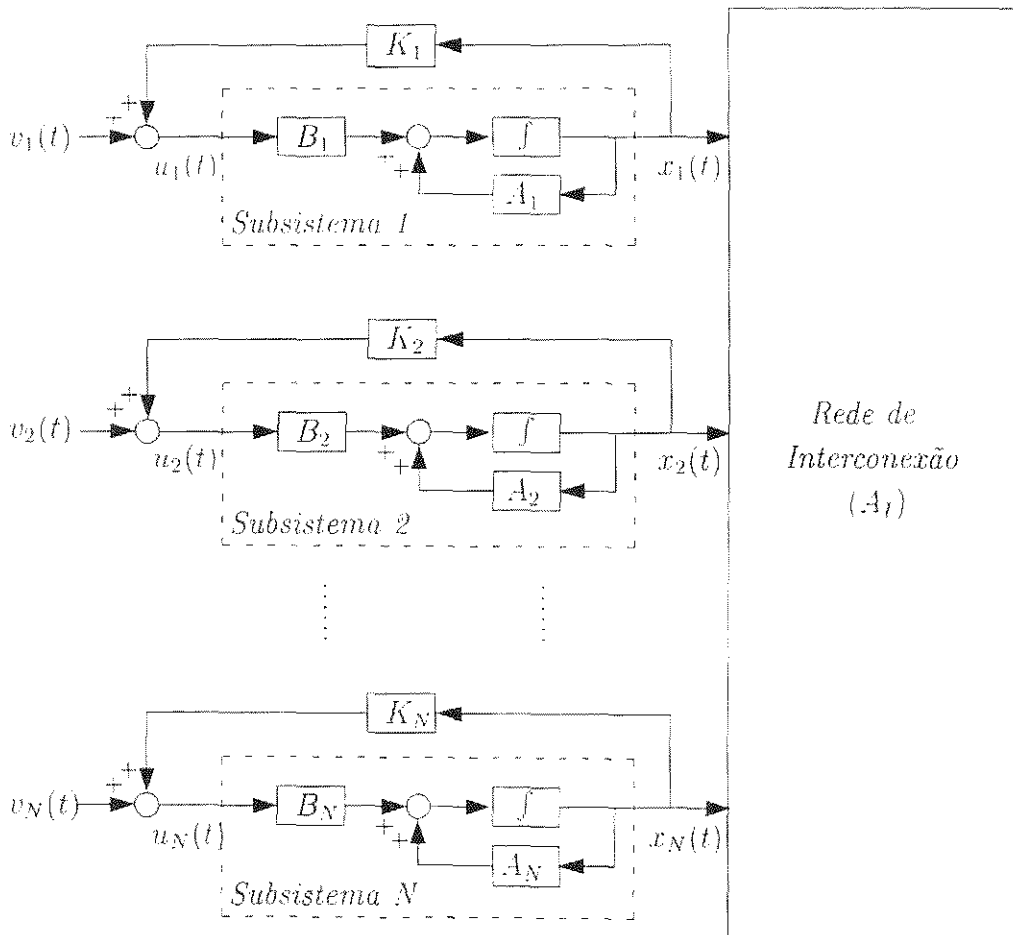


Figura 2.3: Controle Descentralizado por Realimentação de Estados

Seja agora uma lei de controle descentralizada por realimentação de estados:

$$u(t) = K_D x(t) + v(t) \quad (2.16)$$

onde a matriz de ganhos de realimentação de estados descentralizada,  $K_D \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , é



bloco diagonal:

$$K_D = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_N \end{bmatrix}$$

com  $K_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , sendo a matriz de realimentação de estados para o subsistema isolado  $i$ . O vetor  $v(t) = [v_1(t)^T \ v_2(t)^T \ \cdots \ v_N(t)^T]^T \in \mathbb{R}^m$  é uma nova entrada de controle ou de referência para o sistema interconectado, com  $v_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$  sendo uma nova entrada de controle ou de referência para o subsistema isolado  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

A lei de controle (2.16) obedece à estrutura de informação descentralizada, onde cada subsistema controla apenas variáveis locais, implicando que cada subsistema isolado tem sua lei de controle individual:

$$u_i(t) = K_i(t)x_i(t) + v_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Aplicando a lei de controle (2.16) ao sistema interconectado em malha aberta (2.15), como mostrado na figura (2.3), obtém-se o sistema interconectado em malha fechada:

$$\dot{x}(t) = (A_D + B_D K_D)x(t) + A_I x(t) + B_D v(t) \quad (2.17)$$

que pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_N(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 + B_1 K_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 + B_2 K_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_N + B_N K_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & 0 & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix} &+ \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_N(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O problema de *controle descentralizado por realimentação de estados* consiste em obter uma matriz de realimentação de estados descentralizada  $K_D$  para o sistema interconectado, ou equivalentemente uma matriz de realimentação de estados  $K_i$  para cada subsistema isolado, tal que estabilize ou aloque os pólos do sistema interconectado como desejado.

A controlabilidade do sistema interconectado (2.15) não implica na existência de uma matriz de realimentação de estados descentralizada que estabilize ou aloque os pólos do sistema interconectado [3], [29].

O conceito de modos fixos (centralizados) pode ser estendido para o caso descentrali-

zado. Assim, seja  $\mathcal{K}_D$  o conjunto de matrizes bloco diagonal:

$$\mathcal{K}_D = \{K_D; K_D = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_N \end{bmatrix}, K_i \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}, i = 1, 2, \dots, N\}$$

O conjunto de modos do sistema em malha fechada (2.17) invariante sob todas as aplicações de uma matriz de realimentação de estados descentralizada,  $K_D \in \mathcal{K}_D$ , é definido como o conjunto de modos fixos descentralizados,  $\Lambda_D$ , do sistema interconectado (2.15) [3], [10], [27], [29]:

$$\Lambda_D = \bigcap_{K_D \in \mathcal{K}_D} \sigma(A_D + B_D K_D + A_I)$$

Em [1] é mostrado como os modos fixos descentralizados podem ser caracterizados algebricamente.

Pode-se verificar que para o sistema interconectado em malha aberta (2.15) existe uma matriz de realimentação de estados descentralizada tal que o sistema interconectado em malha fechada (2.17) é estável, se e somente se os modos fixos descentralizados são estáveis [3], [27], [29].

O resultado anterior pode ser generalizado para a alocação de pólos em uma região  $\Omega$  qualquer do semiplano esquerdo do plano complexo. Para o sistema interconectado em malha aberta (2.15) existe uma matriz de realimentação de estados descentralizada tal que os pólos do sistema são alocados em  $\Omega$ , se e somente se os modos fixos descentralizados estão contidos em  $\Omega$  [10].

## 2.4.2 Obtenção da Matriz de Realimentação de Estados

Para o projeto da matriz de realimentação de estados descentralizada serão consideradas neste trabalho duas diferentes abordagens via:

- *Controle Ótimo*: O problema linear quadrático é estendido para o caso descentralizado. Através de um algoritmo iterativo é encontrada a matriz de realimentação de estados descentralizada que resolve o problema [13].
- *Programação Linear*: Como uma extensão do caso centralizado, o problema de estabilização e alocação regional de pólos por realimentação de estados descentralizada é reformulado como um problema de *Invariância Positiva* de um poliedro com respeito ao sistema interconectado em malha fechada, utilizando programação linear para sua solução.

## 2.5 Conclusão

Neste capítulo foram apresentados os conceitos básicos referentes ao problema de controle por realimentação de estados. Mostrou-se como a estabilidade e a dinâmica de um sistema a controlar, podem ser modificadas utilizando-se uma realimentação de estados.

Foram introduzidos os conceitos de *alocação arbitrária e regional de pólos, controlabilidade, modos fixos e estabilizabilidade, e alocação com respeito a uma região*. Foram lembradas as condições necessárias e suficientes para a existência de uma matriz de realimentação de estados que estabilize ou aloque os pólos do sistema.

Para alocar parcialmente os pólos do sistema a controlar, foi mostrado como é possível utilizar um sistema de ordem reduzida, diminuindo consideravelmente os cálculos da matriz de realimentação de estados, sobre todo quando o sistema é de ordem elevada.

Os métodos de projeto da matriz de realimentação de estados vão desde a alocação de pólos até o controle ótimo, como será visto no próximo capítulo.

Também, foi formulado o problema de controle descentralizado por realimentação de estados. Foi introduzido o conceito de modos fixos descentralizados e apresentada uma condição necessária e suficiente, em função destes modos, para a existência de uma matriz de realimentação de estados descentralizada que estabilize ou aloque os pólos do sistema.

No capítulo 4 serão apresentados dois métodos para o projeto da matriz de realimentação de estados descentralizada, via controle ótimo e programação linear.

Deve-se salientar que em lugar de utilizar uma realimentação de estados, pode-se utilizar uma realimentação de saídas, como mostrado na figura 2.4, onde a saída do sistema em malha aberta representado pela equação de estados (2.1), é dada pela equação:

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.18)$$

onde  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  é o *vector de saídas* e  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  é a *matriz de saída*.

A lei de controle do tipo realimentação de saídas utilizada, é definida por:

$$u(t) = Fy(t) \quad (2.19)$$

com  $F \in \mathbb{R}^{m \times p}$  sendo a *matriz de realimentação de saídas*.

O sistema em malha fechada resultante ao aplicar a lei de lei de controle (2.19), é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + BFC)x(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

cujos pólos são dados pelo espectro da matriz  $(A + BFC)$ .

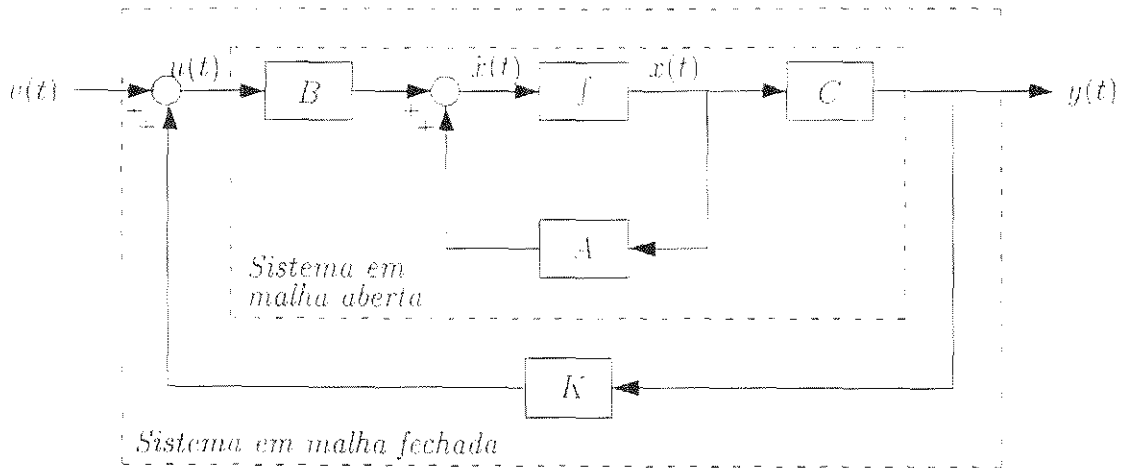


Figura 2.4: Controle por Realimentação de Saídas

Em geral, as condições para a existência de uma matriz de realimentação de saídas que solucione o problema de estabilização, ou o problema de alocação de pólos, são mais restritivas que aquelas associadas ao caso de realimentação de estados. O problema de controle por realimentação de saídas não será tratado neste trabalho.

# Capítulo 3

## Controle Centralizado por Realimentação de Estados Via Controle Ótimo e Programação Linear

### 3.1 Introdução

Neste capítulo é tratado via controle ótimo e programação linear, o problema de controle centralizado por realimentação de estados de sistemas lineares, invariantes e contínuos no tempo, representados por variáveis de estados.

É considerado um *critério de desempenho quadrático* associado com o esforço de controle e a rapidez de convergência dos estados. O problema do *regulador linear quadrático (LQR)* consiste em minimizar este critério de desempenho sujeito às restrições do sistema linear. Da minimização obtém-se uma *lei de controle ótimo por realimentação de estados* que estabiliza o sistema. A matriz de ganhos de realimentação de estados é encontrada em função da solução de uma *equação algébrica de Riccati* [2], [11], [19]. Quando a matriz de ponderação de estados é zero, minimiza-se apenas o esforço de controle e o controlador obtido é conhecido como *LQR de energia mínima*.

Modificando o critério de desempenho é possível alocar os pólos em uma região à esquerda de uma linha vertical no plano complexo. Para tanto, resolve-se uma *equação modificada de Riccati com matriz A deslocada*. O sistema em malha fechada é dito possuir uma *margem ou grau de estabilidade*  $-\alpha$  [2], [11]. Mediante uma modificação do ganho do LQR de energia mínima que aloca os pólos do sistema com uma margem de estabilidade  $-\alpha_1$ , é possível alocar os pólos em uma faixa vertical do plano complexo (como mostrada na figura 2.2 c, com  $\alpha_2 > \alpha_1 \geq 0$ ) [25].

Neste capítulo é apresentada uma condição suficiente, em termos da matriz de ponderação de estados, para alocar parcialmente os pólos do sistema via LQR. É mostrado como o sistema de ordem reduzida pode ser utilizado não apenas para projetar o LQR que aloca parcialmente os pólos do sistema. Pode-se utilizar também para projetar o LQR de energia mínima que estabiliza ou aloca os pólos com uma margem de estabilidade pré-estabelecida ou em uma faixa vertical do plano complexo.

A seguir, o problema de controle centralizado por realimentação de estados é reformulado como um problema de *invariância positiva* de conjuntos poliedrais (vide Apêndice A).

Usando uma transformação do sistema na forma de controlabilidade [7] é determinado um poliedro convexo e compacto no espaço de estados e uma matriz de realimentação de estados que torna este poliedro positivamente invariante com respeito ao sistema em malha fechada e aloca os pólos com margem de estabilidade  $-\alpha$ . Os cálculos do poliedro e a matriz de realimentação de estados são feitos via *programação linear* [22]. Para alocar parcialmente os pólos do sistema com margem de estabilidade pré-estabelecida, pode-se utilizar o sistema de ordem reduzida para calcular a matriz de realimentação de estados via programação linear.

Por último, para ilustrar a utilização dos métodos apresentados, via controle ótimo e programação linear, é desenvolvido um exemplo numérico.

## 3.2 Controle Ótimo

Seja o sistema linear, invariante e contínuo no tempo, descrito pela equação de estados:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad x(0) = x_0, \quad (3.1)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$  é o *vetor de estados inicial*.

Considera-se um *critério de desempenho do tipo quadrático* [2], [11], [19]:

$$J(u(t)) = \int_0^T \{x^T(t)Wx(t) + u^T(t)Ru(t)\} dt \quad (3.2)$$

onde:

- A *matriz de ponderação de estados*,  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , é *simétrica e positiva semi-definida*.
- A *matriz de ponderação de controle*,  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , é *simétrica e positiva definida*.
- O tempo finito  $T$  é *fixo*, mas o estado final  $x(T)$  é *livre*.

O problema do *Regulador Linear Quadrático (LQR)* consiste em minimizar o critério de desempenho (3.2) sujeito as restrições do sistema (3.1). Desta minimização, obtém-se uma *lei de controle ótimo do tipo realimentação de estados* [2], [11], [19]:

$$u^*(t) = K^*x(t)$$

onde a *matriz ótima de realimentação de estados*,  $K^*$ , é dada por:

$$K^* = -R^{-1}B^T P^* \quad (3.3)$$

com a matriz  $P^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , *simétrica e positiva semi-definida*, sendo a solução da *equação diferencial de Riccati*:

$$-\dot{P} = A^T P^* + P^* A - P^* B R^{-1} B^T P^* + W, \text{ com } P(T) = 0$$

Supondo-se que o par  $(A, B)$  é controlável e que o par  $(A, W^{\frac{1}{2}})$  é observável, a matriz ótima de realimentação de estados,  $K^*$ , é única. No entanto, é variante no tempo devido ao fato de depender da matriz  $P^*$ , a qual também é variante no tempo.

No caso de sistemas invariantes no tempo, é mais prático considerar o tempo  $T$  tendendo para infinito. Neste caso, a equação diferencial de Riccati torna-se *algébrica*:

$$A^T P^* + P^* A - P^* B R^{-1} B^T P^* + W = 0 \quad (3.4)$$

e a matriz de realimentação de estados ótima,  $K^*$ , obtida por (3.3) é *constante*.

Pode-se verificar que o sistema ótimo em malha fechada resultante:

$$\dot{x}(t) = (A + BK^*)x(t)$$

é *assintoticamente estável*, com seus pólos contidos no semiplano esquerdo do plano complexo.

O *critério de desempenho ótimo*,  $J(u^*(t))$ , é dado por [2]:

$$J(u^*(t)) = \frac{1}{2} x_0^T P^* x_0$$

As hipóteses de controlabilidade de  $(A, B)$  e observabilidade de  $(A, W^{\frac{1}{2}})$ , podem ser relaxadas para estabilizabilidade e detectabilidade, respectivamente [2], [18].

Se a matriz de ponderação de estados é zero ( $W = 0$ ), minimiza-se apenas o esforço de controle e o controlador obtido é conhecido como *LQR de energia mínima*. Pode-se verificar que os pólos estáveis do sistema (3.1) são mantidos inalterados, enquanto os instáveis são refletidos com respeito ao eixo vertical do plano complexo [2], [18].

### 3.2.1 Alocação Regional de Pólos Via LQR

Na prática pode ser de interesse não apenas estabilizar o sistema, mas alocar os pólos em uma região pré-estabelecida do semiplano esquerdo do plano complexo. Como visto no capítulo anterior, neste trabalho serão consideradas as seguintes regiões para a alocação de pólos:

- Uma região à esquerda de uma linha vertical no plano complexo ( $\alpha \geq 0$ ), como mostrada na figura 2.2 b, tal que:

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < -\alpha, \forall \lambda_i \in \sigma(A + BK^*)$$

O sistema em malha fechada é dito possuir uma *marginem ou grau de estabilidade*  $-\alpha$ .

Em particular, quando  $\alpha = 0$  trata-se do caso de *estabilização*. A linha vertical é o eixo imaginário do plano complexo e o sistema é dito simplesmente *estável*.

- Uma *faixa vertical* do plano complexo (com  $\alpha_2 > \alpha_1 \geq 0$ ), como mostrada na figura 2.2 c, tal que:

$$-\alpha_2 < \operatorname{Re}(\lambda_i) < -\alpha_1, \forall \lambda_i \in \sigma(A + BK^*)$$

#### • Margem de Estabilidade $-\alpha$

Considera-se o *critério de desempenho quadrático* [2], [11], [19]:

$$J(u(t)) = \int_0^{\infty} e^{2\alpha t} \{x^T(t) \dot{W} x(t) + u^T(t) \dot{R} u(t)\} dt \quad (3.5)$$

onde:

- A *matriz de ponderação de estados*,  $\dot{W} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , é *simétrica e positiva semi-definida*.
- A *matriz de ponderação de controle*,  $\dot{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , é *simétrica e positiva definida*.
- $\alpha \geq 0$  é uma constante real que determina uma linha vertical no eixo real negativo do plano complexo.

Considerando:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= e^{\alpha t} x(t) \\ \hat{u}(t) &= e^{\alpha t} u(t) \end{aligned}$$

o sistema em malha aberta (3.1), fica:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A + \alpha I_n) \hat{x}(t) + B \hat{u}(t) \quad (3.6)$$



Supondo-se que o par  $(A + \alpha I_n, B)$  é controlável e que o par  $(A, W^{\frac{1}{2}})$  é observável, a solução do problema do LQR constante dado por (3.5) e (3.6) resultará em um estado  $\hat{x}(t)$  assintoticamente estável. Assim,  $x(t)$  será assintoticamente estável com margem ou grau de estabilidade  $-\alpha$ , dado que  $\dot{x}(t) = e^{-\alpha t}x(t)$ .

Portanto, para obter uma matriz de realimentação de estados ótima (constante) que leve a um sistema em malha fechada com margem de estabilidade  $-\alpha$ , soluciona-se a equação modificada de Riccati com matriz  $A$  deslocada [2], [11]:

$$(A + \alpha I_n)^T \hat{P}^* + \hat{P}^*(A + \alpha I_n) - \hat{P}^* B R^{-1} B^T \hat{P}^* + \hat{W} = 0 \quad (3.7)$$

A matriz ótima de realimentação de estados é dada por:

$$\hat{K}^* = -\hat{R}^{-1} B^T \hat{P}^*$$

A lei de controle ótimo por realimentação de estados (LQR):

$$u^*(t) = \hat{K}^* x(t)$$

implica em um sistema em malha fechada:

$$\dot{x}(t) = (A + B \hat{K}^*) x(t)$$

assintoticamente estável com margem de estabilidade  $-\alpha$ .

No caso do LQR de energia mínima ( $\hat{W} = 0$ ), os pólos do sistema (3.1) à esquerda da linha vertical  $-\alpha$  são mantidos inalterados, enquanto os que estão à direita são refletidos com respeito à linha vertical  $-\alpha$  [2], [18].

## • Faixa Vertical

Seja o critério de desempenho quadrático de energia mínima:

$$J(u(t)) = \int_0^{\infty} u^T(t) \tilde{R} u(t) dt \quad (3.8)$$

onde a matriz de ponderação de controle,  $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , é simétrica e positiva definida.

Sejam  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , com  $\alpha_2 > \alpha_1 \geq 0$ , duas constantes reais que determinam uma faixa vertical  $\{-\alpha_2, -\alpha_1\}$  no semiplano esquerdo do plano complexo. Como mostrado em [25], o critério de desempenho (3.8) pode ser utilizado para obter alocação de pólos em uma faixa vertical  $\{-\alpha_2, -\alpha_1\}$  do plano complexo, pela modificação do ganho ótimo que aloca os pólos com margem de estabilidade  $-\alpha_1$ .

Como visto anteriormente, se a matriz  $\tilde{P}^*$ , simétrica e positiva semi-definida, é a solução da equação modificada de Riccati:

$$(A + \alpha_1 I_n)^T \tilde{P}^* + \tilde{P}^*(A + \alpha_1 I_n) - \tilde{P}^* B \tilde{R}^{-1} B^T \tilde{P}^* = 0 \quad (3.9)$$

obtém-se a matriz ótima de realimentação de estados:

$$\tilde{K}^* = -\tilde{R}^{-1}B^T\tilde{P}^*$$

e a lei de controle ótimo por realimentação de estados (LQR de energia mínima):

$$u^*(t) = \tilde{K}^*x(t)$$

que quando aplicada ao sistema em malha aberta (3.1), leva a um sistema ótimo em malha fechada assintoticamente estável com margem de estabilidade  $-\alpha_1$ .

Seja a lei de controle ótimo modificada [25]:

$$u^*(t) = \eta\tilde{K}^*x(t)$$

onde o ganho  $\eta$  é ajustado como:

$$\eta = \frac{1}{2} - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\text{tr}(A^+)} = \frac{1}{2} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\sum_{i=1}^{n^+}\mu_i} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\text{tr}(B\tilde{K}^*)} \quad (3.10)$$

A matriz  $A^+ \in \mathfrak{R}^{n^+ \times n^+}$  associada com  $A$ , é definida como uma matriz qualquer tal que seus autovalores são dados por:

$$\sigma(A^+) = \{\mu_1^+, \mu_2^+, \dots, \mu_{n^+}^+, \text{ e } n^- \text{ autovalores nulos}\} \quad (3.11)$$

onde  $n = n^+ + n^-$ , e  $\mu_i^+$ ,  $i = 1 \dots n^+$ , são os  $n^+$  pólos do sistema em malha aberta (3.1) que estão à direita da linha vertical  $-\alpha_1$  do plano complexo.

Se a lei de controle ótimo modificada (LQR de energia mínima) é aplicada ao sistema em malha aberta (3.1), então obtém-se o seguinte sistema em malha fechada:

$$\dot{x}(t) = (A + \eta B\tilde{K}^*)x(t)$$

no qual ficam inalterados os  $n^-$  pólos de malha aberta que possuem margem de estabilidade  $-\alpha_1$ , e os  $n^+$  pólos restantes de malha fechada são alocados na *faixa vertical*  $\{-\alpha_2, -\alpha_1\}$  do plano complexo [25].

### 3.2.2 Sistema de Ordem Reduzida

Como visto no capítulo anterior, os pólos do sistema (3.1) podem ser divididos em dois subconjuntos contendo os  $r$  pólos "ruins" (assumidos controláveis) e os  $n - r$  "bons". Mediante uma escolha adequada de base:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_b & Q_r \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n \times n}, \text{ com } Q_b \in \mathfrak{R}^{n \times (n-r)}, Q_r \in \mathfrak{R}^{n \times r} \text{ e } QQ^T = I_n$$

pode-se transformar o sistema em malha aberta (3.1) em:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A_Q\bar{x}(t) + B_Q u(t); \quad \bar{x}(0) = x_0 \quad (3.12)$$

onde:

$$\hat{x} = Q^T x(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}_b(t) \\ \hat{x}_r(t) \end{bmatrix}, \quad A_Q = Q^T A Q = \begin{bmatrix} A_b & A_{12} \\ 0_{(n-r) \times r} & A_r \end{bmatrix}, \quad B_Q = Q^T B = \begin{bmatrix} B_b \\ B_r \end{bmatrix}$$

A dinâmica de  $x_r$ , associada aos pólos "ruins" a serem modificados na malha fechada, é desacoplada de  $\hat{x}_b$ , associado aos pólos "bons" a serem mantidos inalterados. Assim, pode-se isolar o seguinte sistema reduzido de malha aberta:

$$\dot{\hat{x}}_r(t) = A_r \hat{x}_r(t) + B_r u(t) \quad (3.13)$$

que é completamente controlável, dado que os pólos de  $A_r$  são assumidos serem controláveis.

O critério de desempenho quadrático (3.5) é dado na nova base por:

$$J(u(t)) = \int_0^\infty e^{2\alpha t} \{ \hat{x}^T(t) \hat{W}_Q \hat{x}(t) + u^T(t) \hat{R} u(t) \} dt \quad (3.14)$$

com

$$\hat{W}_Q = Q^T \hat{W} Q = \begin{bmatrix} \hat{W}_b & \hat{W}_{12} \\ \hat{W}_{12}^T & \hat{W}_r \end{bmatrix}$$

onde  $\hat{W}_Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\hat{W}_b \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$  e  $\hat{W}_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$  são simétricas e positivas semi-definidas, e  $\hat{W}_{12} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times r}$ .

Como visto, se o critério de desempenho (3.14) é minimizado sujeito as restrições do sistema (3.12), obtém-se uma lei de controle ótimo do tipo realimentação de estados:

$$u^*(t) = \hat{K}_Q^* \hat{x}(t) = -\hat{R}^{-1} B_Q^T \hat{P}_Q^* x(t)$$

A matriz simétrica e positiva semi-definida,  $\hat{P}_Q^* = Q^T P^* Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , é solução da equação (modificada) de Riccati na nova base:

$$(A_Q + \alpha I_n)^T \hat{P}_Q^* + \hat{P}_Q^* (A_Q + \alpha I_n) - \hat{P}_Q^* B_Q \hat{R}^{-1} B_Q^T \hat{P}_Q^* - \hat{W}_Q = 0 \quad (3.15)$$

A matriz ótima de realimentação de estados na base original é dada por:

$$K^* = \hat{K}_Q^* Q^T$$

#### • Alocação Parcial de Pólos Via LQR

Sejam os subconjuntos de pólos "bons" e "ruins" de malha aberta,  $\sigma_b$  e  $\sigma_r$ , dados por:

$$\sigma_b = \{ \lambda_i \in \sigma(A) : \text{Re}(\lambda_i) < -\alpha, \quad i = 1, \dots, (n-r) \}$$

$$\sigma_r = \{ \mu_j \in \sigma(A) : \text{Re}(\mu_j) \geq -\alpha, \quad j = 1, \dots, r \}$$

Considera-se o critério de desempenho quadrático associado ao sistema reduzido:

$$J_r(u(t)) = \int_0^{\infty} e^{2\alpha t} \{ \bar{x}_r^T(t) \dot{W}_r \bar{x}_r(t) + u^T(t) \dot{R} u(t) \} dt \quad (3.16)$$

Quando este critério de desempenho é minimizado sujeito às restrições do sistema reduzido (3.13), obtém-se:

$$\hat{K}_r^* = -\hat{R}^{-1} B_r^T \hat{P}_r^*$$

onde a matriz  $\hat{P}_r^*$ , simétrica e positiva semi-definida, é solução da equação (modificada) de Riccati para o sistema reduzido:

$$(A_r - \alpha I_r)^T \hat{P}_r^* + \hat{P}_r^* (A_r + \alpha I_r) - \hat{P}_r^* B_r \hat{R}^{-1} B_r^T \hat{P}_r^* + \dot{W}_r = 0 \quad (3.17)$$

A matriz ótima de realimentação de estados na base original que aloca parcialmente os pólos com margem de estabilidade  $-\alpha$ , é dada por:

$$\hat{K}^* = K_r^* Q_r^T$$

Observa-se que definindo:

$$\dot{W}_Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dot{W}_r \end{bmatrix} \text{ e } \hat{P}_Q^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{P}_r^* \end{bmatrix}$$

o critério de desempenho (3.14) fica:

$$J(u(t)) = \int_0^{\infty} e^{2\alpha t} \left\{ \begin{bmatrix} \bar{x}_b^T(t) & \bar{x}_r^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dot{W}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_b(t) \\ \bar{x}_r(t) \end{bmatrix} + u^T(t) \dot{R} u(t) \right\} dt$$

A equação (modificada) de Riccati (3.15) pode ser reescrita na forma:

$$\begin{bmatrix} (A_b + \alpha I_{n-r})^T & 0 \\ A_{12}^T & (A_r + \alpha I_r)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{P}_r^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{P}_r^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b + \alpha I_{n-r} & A_{12} \\ 0 & A_r + \alpha I_r \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{P}_r^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_b \\ B_r \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} B_b^T & B_r^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{P}_r^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dot{W}_r \end{bmatrix} = 0$$

de onde:

$$\hat{K}_Q^* = -\hat{R}^{-1} \begin{bmatrix} B_b^T & B_r^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{P}_r^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\hat{R}^{-1} B_r^T \hat{P}_r^* \end{bmatrix}$$

Deve-se salientar que neste caso, para  $\dot{W} = Q_r \dot{W}_r Q_r^T$ , têm-se:

$$\dot{W}_r^{\frac{1}{2}} = \dot{W}_r^{\frac{1}{2}} Q_r^T \text{ e } \begin{bmatrix} \lambda_i I_n - A \\ \dot{W}_r^{\frac{1}{2}} Q_r^T \end{bmatrix} v_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall \lambda_i \in \sigma_b$$

Portanto o par  $(A, \hat{W}^{\frac{1}{2}})$  é não-observável. Entretanto, assumindo-se a observabilidade do par  $(A_r, \hat{W}_r^{\frac{1}{2}})$ , o par  $(A, \hat{W}^{\frac{1}{2}})$  é detectável, uma vez que os pólos "bons" não-observáveis são estáveis [7], [18].

A partir do desenvolvimento anterior pode-se estabelecer o resultado seguinte:

**Proposição 1** *Dada a matriz:*

$$\hat{W} = Q \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{W}_r \end{bmatrix} Q^T = Q_r \hat{W}_r Q_r^T$$

*A solução da equação de Riccati (3.7) é dada pela matriz:*

$$\hat{P}^* = Q \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{P}_r^* \end{bmatrix} Q^T = Q_r \hat{P}_r^* Q_r^T$$

*onde  $\hat{P}_r^*$  é solução da equação de Riccati (3.17) para o sistema reduzido. Neste caso, a matriz ótima de realimentação de estados:*

$$\hat{K}^* = -\hat{R}^{-1} B^T \hat{P}^* = -\hat{R}^{-1} B_r^T \hat{P}_r^* Q_r^T$$

*aloca parcialmente o espectro do sistema (3.1) com margem de estabilidade  $-\alpha$ .*

□

### • LQR de Energia Mínima

A alocação de pólos do sistema via LQR de energia mínima pode ser considerada como um caso particular da alocação parcial de pólos via LQR, com  $\hat{W} = \hat{W}_Q = 0$ . Neste caso, os pólos que estão à esquerda de  $-\alpha$ , dados por  $\sigma_l$ , são mantidos inalterados, enquanto os que estão à direita, dados por  $\sigma_r$ , são refletidos com respeito à linha vertical  $-\alpha$ . Logo, é possível utilizar o sistema de ordem reduzida (3.13) para projetar o LQR de energia mínima que aloca os pólos do sistema global (3.1) em uma região com margem de estabilidade  $-\alpha$ . Para tanto, minimiza-se o critério de desempenho quadrático de energia mínima:

$$J(u(t)) = \int_0^{\infty} e^{2\alpha t} \{u^T(t) R u(t)\} dt \quad (3.18)$$

sujeito às restrições do sistema de ordem reduzida (3.13).

A matriz de ponderação de controle,  $R \in \mathcal{R}^{m \times m}$ , é simétrica e positiva definida, e  $\alpha \geq 0$  é uma constante real.

Da minimização obtém-se a lei de controle ótimo por realimentação de estados:

$$u^*(t) = \hat{K}_r^* \hat{x}_r(t) = -R^{-1} B_r^T \hat{P}_r^* \hat{x}_r(t)$$

onde a matriz simétrica e positiva semi-definida,  $P_r^* \in \mathbb{R}^{r \times r}$ , é solução da equação (modificada) de Riccati para o sistema reduzido:

$$(A_r + \alpha I_r)^T P_r^* + P_r^* (A_r + \alpha I_r) - P_r^* B_r R^{-1} B_r^T P_r^* = 0 \quad (3.19)$$

A lei de controle ótimo por realimentação de estados (LQR de energia mínima):

$$u^*(t) = K^* x(t) = -R^{-1} B_r^T P_r^* Q_r^T x(t)$$

aloca os pólos do sistema (3.1) com margem de estabilidade  $-\alpha$ .

### • Alocação em Faixa Vertical Via LQR de Energia Mínima

Seja o critério de desempenho (3.8) e as constantes reais  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , com  $\alpha_2 > \alpha_1 \geq 0$ , que determinam uma *faixa vertical*  $\{-\alpha_2, -\alpha_1\}$  no plano complexo.

Sejam os subconjuntos de pólos "bons" e "ruins" de malha aberta,  $\sigma_b$  e  $\sigma_r$ , dados por:

$$\begin{aligned} \sigma_b &= \{\lambda_i \in \sigma(A) : -\alpha_2 < \operatorname{Re}(\lambda_i) < -\alpha_1, i = 1, \dots, (n-r)\} \\ \sigma_r &= \sigma_{r_1} \cup \sigma_{r_2} \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} \sigma_{r_1} &= \{\mu_j^- \in \sigma(A) : \operatorname{Re}(\mu_j^-) \geq -\alpha_1, j = 1, \dots, n^-\} \\ \sigma_{r_2} &= \{\mu_j^- \in \sigma(A) : \operatorname{Re}(\mu_j^-) \leq -\alpha_2, j = 1, \dots, n^-\} \end{aligned}$$

com  $n^+ + n^- = r$ .

Define-se a matriz  $A_r^+ \in \mathbb{R}^{(n^+) \times (n^+)}$  associada à matriz  $A_r$ , tal que  $\sigma(A_r^+) = \sigma_{r_1}$ . Portanto:

$$\sigma(A^+) = \sigma(A_r^+) = \sigma_{r_1}$$

com a matriz  $A^+$  definida por (3.11).

Logo, o traço da matriz  $A^+$  pode ser escrito como:

$$\operatorname{tr}(A^+) = \operatorname{tr}(A_r^+) = \sum_{i=1}^{n^+} \mu_i^+$$

e o ganho  $\eta$  dado por (3.10), fica:

$$\eta = \frac{1}{2} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2 \operatorname{tr}(A_r^+)} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2 \sum_{i=1}^{n^-} \mu_i^-} = \frac{1}{2} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\operatorname{tr}(B_r K_r^*)} \quad (3.20)$$

Assim, pode-se utilizar o sistema de ordem reduzida (3.13) para projetar o LQR de energia mínima que aloca os pólos do sistema (3.1) em uma faixa vertical do plano complexo. Para tanto, resolve-se a equação (modificada) de Riccati para o sistema reduzido:

$$(A_r - \alpha_1 I_r)^T \tilde{P}_r^* + \tilde{P}_r^* (A_r + \alpha_1 I_r) - \tilde{P}_r^* B_r \tilde{R}^{-1} B_r^T \tilde{P}_r^* = 0 \quad (3.21)$$

obtendo a matriz de realimentação de estados,  $\tilde{K}_r^* \in \mathbb{R}^{m \times r}$ , como:

$$\tilde{K}_r^* = -\tilde{R}^{-1} B_r^T \tilde{P}_r^*$$

A lei de controle ótimo (LQR de energia mínima):

$$u^*(t) = \tilde{K}_r^* \tilde{x}_r(t)$$

aloca os pólos do sistema de ordem reduzida (3.13) em uma região com margem de estabilidade  $-\alpha_1$ .

Neste caso a lei de controle anterior é modificada para:

$$u^*(t) = \eta \tilde{K}_r^* \tilde{x}_r(t)$$

com o ganho  $\eta$  dado por (3.20).

Se a lei de controle anterior é aplicada ao sistema de ordem reduzida (3.13), então resulta em um sistema reduzido em malha fechada com seus pólos contidos na faixa vertical  $\{-\alpha_2, -\alpha_1\}$ .

A lei de controle ótimo (LQR de energia mínima) para o sistema global (3.1), é dada por:

$$u^*(t) = \eta \tilde{K}_r^* x(t) = \eta \tilde{K}_r^* Q_r^T x(t)$$

e leva a um sistema em malha fechada no qual ficam inalterados os  $n^-$  pólos de malha aberta que possuem margem de estabilidade  $-\alpha_1$ , e os  $n^+$  pólos restantes de malha fechada são alocados na *faixa vertical*  $\{-\alpha_2, -\alpha_1\}$  do plano complexo. Pode-se verificar que esta lei de controle é equivalente à que foi obtida anteriormente utilizando-se o sistema global.

## 3.3 Programação Linear

### 3.3.1 Formulação do Problema Controle Centralizado por Realimentação de Estados como um Problema de Invariância Positiva

Considera-se o sistema linear, invariante e contínuo no tempo, dado por (3.1), controlável e com  $\text{posto}(B) = m \leq n$ .

Seja uma lei de controle do tipo realimentação de estados, dada por:

$$u(t) = Kx(t)$$

onde  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é a matriz de ganhos de realimentação de estados.

Quando esta lei de controle é aplicada ao sistema em malha aberta (3.1), resulta no sistema em malha fechada:

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) \quad (3.22)$$

Deseja-se projetar uma matriz de realimentação de estados  $K$ , que aloque os pólos do sistema em malha fechada em uma região com margem de estabilidade  $-\alpha$ , com  $\alpha \geq 0$ , como mostrado na figura 2.2b:

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq -\alpha, \quad \forall \lambda_i \in \sigma(A + BK)$$

Considera-se um poliedro convexo e compacto, definido no espaço de estados por (vide Apêndice A):

$$S(G, \omega) = \{x(t); \quad -\omega \leq Gx(t) \leq \omega\}$$

com  $\omega \in \mathbb{R}^n > 0$ ,  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\operatorname{posto}(G) = n$ .

O poliedro  $S(G, \omega)$  é positivamente invariante com respeito ao sistema em malha fechada (3.22), se todas as trajetórias do sistema geradas no interior deste poliedro, ficam contidas nele [6], [16]. Para obter a invariância positiva de um poliedro e a estabilidade do sistema em malha fechada, devem ser satisfeitas duas relações matriciais conhecidas como relações de invariância positiva (vide Apêndice A).

A solução das relações de invariância positiva permite sintetizar uma lei de controle que aloca os pólos e estabiliza o sistema em malha fechada. Assim, se uma matriz  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é solução factível do seguinte conjunto de restrições:

$$HG = G(A + BK) \quad (3.23)$$

$$\hat{H}\omega \leq -\alpha\omega \quad (3.24)$$

com  $\alpha \geq 0$  e  $\hat{H}_{ij} = \begin{cases} H_{ii} & \text{para } i = j \\ |H_{ij}| & \text{para } i \neq j \end{cases}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , então  $K$  aloca os pólos do sistema em malha fechada (3.22) em uma região com margem de estabilidade  $-\alpha$  [22].

Portanto, o problema de alocação de pólos em uma região com margem de estabilidade  $-\alpha$ , pode ser tratado como um problema de invariância positiva. Deve-se determinar um poliedro,  $S(G, \omega)$ , e uma matriz de realimentação de estados,  $K$ , que torne o poliedro positivamente invariante com respeito ao sistema em malha fechada e aloque os pólos com margem de estabilidade  $-\alpha$ .



### 3.3.2 Caso $n \leq 2m$

A proposição seguinte baseia-se nos resultados encontrados inicialmente em [22]:

**Proposição 2** *Dado o sistema em malha aberta (3.1) controlável, com  $n \leq 2m$ .*

*Seja  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz ortogonal que coloca o par  $(A, B)$  na forma de controlabilidade  $(\bar{A}, \bar{B})$  [7]:*

$$A = M^T A M = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\bar{B} = M^T B = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0_{n-m} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

*com  $\bar{A}_{11} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\bar{A}_{12} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ ,  $\bar{A}_{21} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$ ,  $\bar{A}_{22} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ ,  $\bar{B}_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\bar{A}_{21}$  tem posto completo por linhas:  $\text{posto}(\bar{A}_{21}) = n - m$  e  $\bar{B}_1$  tem posto completo:  $\text{posto}(\bar{B}_1) = m$ .*

*Seja a matriz:*

$$G = \bar{G} M^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.27)$$

*com:*

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} I_m & \bar{G}_{12} \\ 0_{(n-m) \times m} & I_{n-m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \bar{G}_{12} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)} \quad (3.28)$$

*Então, sempre existem uma matriz  $\bar{G}_{12}$  e uma matriz de realimentação de estados  $K$ , tal que o poliedro  $S(G, 1_n)$  é positivamente invariante e os pólos do sistema em malha fechada possuem margem de estabilidade  $-\alpha$  (com  $\alpha \in \mathbb{R}^+ \geq 0$ ).*

### Demonstração

Considera-se:

$$H_{22} + \bar{A}_{21} \bar{G}_{12} = \bar{A}_{22} \quad (3.29)$$

$$\dot{H}_{22} 1_{n-m} \leq -\alpha 1_{n-m} - [\bar{A}_{21}] 1_m \quad (3.30)$$

onde  $(\dot{H}_{22})_{ij} = \begin{cases} (H_{22})_{ii} & \text{para } i = j \\ |(H_{22})_{ij}| & \text{para } i \neq j \end{cases}$ ,  $i, j = 1, \dots, (n-m)$  e são desconhecidas as variáveis  $H_{22} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$  e  $\bar{G}_{12} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ .

Pode-se verificar que é sempre possível encontrar  $H_{22}$  que satisfaz (3.30), escolhendo-se os elementos da sua diagonal negativos e suficientemente pequenos. Assim, para qualquer matriz  $H_{22}$  solução de (3.30), existe  $\bar{G}_{12}$  que satisfaz (3.29), pois  $\bar{A}_{21} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$ , com  $n \leq 2m$ , é de posto completo [7]. Em particular:

$$\bar{G}_{12} = \bar{A}_{21}^{-1} (\bar{A}_{22} - H_{22})$$

Consideram-se agora as matrizes  $H_{11} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $H_{12} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ , tal que:

$$\hat{H}_{11} \mathbf{1}_m + |H_{12}| \mathbf{1}_{n-m} \leq -\alpha \mathbf{1}_m \quad (3.31)$$

$$\text{com } (\hat{H}_{11})_{ij} = \begin{cases} (H_{11})_{ii} & \text{para } i = j \\ |(H_{11})_{ij}| & \text{para } i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, m$$

Sejam as matrizes  $\tilde{K}_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $\tilde{K}_2 \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ , tal que as equações seguintes sejam satisfeitas:

$$H_{11} = A_{11} + \tilde{G}_{12} \tilde{A}_{21} + \tilde{B}_1 \tilde{K}_1 \quad (3.32)$$

$$H_{11} \tilde{G}_{12} + H_{12} = \tilde{A}_{12} + \tilde{G}_{12} A_{22} + \tilde{B}_1 \tilde{K}_2 \quad (3.33)$$

Observa-se que sempre existem  $\tilde{K}_1$  e  $\tilde{K}_2$ , dado que  $\tilde{B}_1$  é de posto completo.

Fazendo-se  $H_{21} = \tilde{A}_{21}$  e considerando as equações (3.29), (3.30), (3.31), (3.32) e (3.33), pode-se escrever matricialmente:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & \tilde{G}_{12} \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & \tilde{G}_{12} \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{K}_1 & \tilde{K}_2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{H}_{11} & |H_{12}| \\ |H_{21}| & \hat{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_m \\ \mathbf{1}_{n-m} \end{bmatrix} \leq -\alpha \begin{bmatrix} \mathbf{1}_m \\ \mathbf{1}_{n-m} \end{bmatrix}$$

de onde:

$$H\tilde{G} = \tilde{G}(\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}) \quad (3.34)$$

$$\hat{H}\mathbf{1}_n \leq -\alpha \mathbf{1}_n \quad (3.35)$$

com  $H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$ ,  $\hat{H} = \begin{bmatrix} \hat{H}_{11} & |H_{12}| \\ |H_{21}| & \hat{H}_{22} \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_1 & \tilde{K}_2 \end{bmatrix}$  e  $\tilde{G}$  dada por (3.28).

Pós-multiplicando ambos os lados da equação (3.34) por  $M^T$ , e dado que  $M^T M = I_n$ , tem-se:

$$H\tilde{G}M^T = \tilde{G}M^T M(\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K})M^T$$

de onde, levando em conta (3.25), (3.26) e (3.27), obtém-se:

$$HG = G(A + BK) \quad (3.36)$$

com:

$$K = \tilde{K}M^T = \begin{bmatrix} \tilde{K}_1 & \tilde{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1^T \\ M_2^T \end{bmatrix}, \quad M_1 \in \mathbb{R}^{n \times m} \text{ e } M_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}$$

Logo, o poliedro  $\mathcal{S}(G, \mathbf{1}_n)$  é positivamente invariante com respeito ao sistema em malha fechada (3.22) com margem de estabilidade  $-\alpha$ , pois são satisfeitas as equações (3.35) e (3.36), conhecidas como relações de invariância positiva (vide Apêndice A), [6], [16].

□

Observa-se da demonstração anterior que solucionando as equações (3.29) e (3.30) obtém-se a matriz  $\tilde{G}_{12}$  e portanto, a matriz  $G$ , dada por (3.27), ficando determinado o poliedro  $S(G, 1_n)$ . Posteriormente, solucionando as equações (3.31), (3.32) e (3.33), com  $\tilde{K}_1 = KM_1$  e  $\tilde{K}_2 = KM_2$ , é obtida a matriz de realimentação de estados,  $K$ , que torna o poliedro  $S(G, 1_n)$  positivamente invariante com respeito ao sistema em malha fechada e aloca os pólos com margem de estabilidade  $-\alpha$ .

A solução das equações (3.29) e (3.30), e das equações (3.31), (3.32) e (3.33), pode ser obtida via programação linear, como:

$$\begin{aligned} \min_{H_{22}, \tilde{G}_{12}} J_1 & & (3.37) \\ \text{s.a.:} & \\ H_{22} + \tilde{A}_{21}\tilde{G}_{12} &= \tilde{A}_{22} \\ \tilde{H}_{22}1_{n-m} &\leq -\alpha 1_{n-m} - |\tilde{A}_{21}|1_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_{H_{11}, H_{12}, K} J_2 & & (3.38) \\ \text{s.a.:} & \\ H_{11} &= \tilde{A}_{11} + \tilde{G}_{12}\tilde{A}_{21} + \tilde{B}_1KM_1 \\ H_{11}\tilde{G}_{12} + H_{12} &= \tilde{A}_{12} + \tilde{G}_{12}\tilde{A}_{22} + \tilde{B}_1KM_2 \\ \tilde{H}_{11}1_m + |H_{12}|1_{n-m} &\leq -\alpha 1_m \end{aligned}$$

Os funcionais  $J_1$  e  $J_2$  podem ser escolhidos, por exemplo, de forma tal a minimizar a norma de  $\tilde{G}_{12}$  e  $K$ , respectivamente [14]. Assim:

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n-m} |(\tilde{G}_{12})_{ij}| \\ J_2 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |K_{ij}| \end{aligned}$$

Considera-se a manipulação de variáveis clássica em programação linear:

- $H_{22} = H_{22}^+ - H_{22}^-$  e  $\tilde{H}_{22} = H_{22}^- + H_{22}^-$ , com:

$$\begin{aligned} (H_{22}^+)^{ij} &= \begin{cases} (H_{22})_{ij} & \text{para } i \neq j \text{ e } (H_{22})_{ij} \geq 0 \\ (H_{22})_{ij} & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } (H_{22})_{ij} < 0 \end{cases} \\ (H_{22}^-)^{ij} &= \begin{cases} -(H_{22})_{ij} & \text{para } i \neq j \text{ e } (H_{22})_{ij} < 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \end{aligned} \quad , i, j = 1, \dots, (n-m)$$

- $\tilde{G}_{12} = G_{12}^+ - \tilde{G}_{12}^-$  e  $|\tilde{G}_{12}| = G_{12}^+ + \tilde{G}_{12}^-$ , com:

$$\begin{cases} (\tilde{G}_{12}^+)_{ij} \geq 0 \\ (\tilde{G}_{12}^-)_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad . \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, (n-m)$$

- $H_{11} = H_{11}^+ - H_{11}^-$  e  $\hat{H}_{11} = H_{11}^+ + H_{11}^-$ , com:

$$\begin{cases} (H_{11}^+)_{ij} = \begin{cases} (H_{11})_{ij} & \text{para } i \neq j \text{ e } (H_{11})_{ij} \geq 0 \\ (H_{11})_{ij} & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } (H_{11})_{ij} < 0 \end{cases} \\ (H_{11}^-)_{ij} = \begin{cases} -(H_{11})_{ij} & \text{para } i \neq j \text{ e } (H_{11})_{ij} < 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \end{cases} \quad . \quad i, j = 1, \dots, m$$

- $H_{12} = H_{12}^+ - H_{12}^-$  e  $|H_{12}| = H_{12}^+ + H_{12}^-$ , com:

$$\begin{cases} (H_{12}^+)_{ij} \geq 0 \\ (H_{12}^-)_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad . \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, (n-m)$$

- $K = K^+ - \tilde{K}^-$  e  $|K| = K^+ + \tilde{K}^-$ , com:

$$\begin{cases} (K^+)_{ij} \geq 0 \\ (\tilde{K}^-)_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad . \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

Utilizando-se propriedades do *produto de Kronecker* [17], pode-se transformar cada um dos problemas de programação linear, dados por (3.37) e (3.38), à sua forma padrão (vide Apêndice B):

$$\min_{\mathcal{X}_1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n-m} \{(G_{12}^+)_{ij} + (G_{12}^-)_{ij}\}$$

s.a.:

$$\begin{cases} [I_{(n-m)} \otimes I_{(n-m)} & -I_{(n-m)} \otimes I_{(n-m)} & I_{n-m} \otimes A_{21} & -I_{n-m} \otimes A_{21}] \mathcal{X}_1 = \text{vec}(\tilde{A}_{22}) \\ [I_{n-m}^T \otimes I_{n-m} & I_{n-m}^T \otimes I_{n-m} & 0_{(n-m) \times (n-m)} & 0_{(n-m) \times (n-m)}] \mathcal{X}_1 \leq -\alpha \mathbf{1}_{n-m} - |\tilde{A}_{21}| \mathbf{1}_m \\ \mathcal{X}_1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\min_{\mathcal{X}_2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \{K_{ij}^+ + K_{ij}^-\}$$

s.a.:

$$\begin{cases} C_1 \mathcal{X}_2 = \text{vec}(\tilde{A}_{11} + \tilde{G}_{12} \tilde{A}_{21}) \\ C_2 \mathcal{X}_2 = \text{vec}(\tilde{A}_{12} + \tilde{G}_{12} \tilde{A}_{22}) \\ C_3 \mathcal{X}_2 \leq -\alpha \mathbf{1}_m \\ \mathcal{X}_2 \geq 0 \end{cases}$$

onde:

$$\mathcal{X}_1 = \begin{bmatrix} \text{vec}(H_{22}^+) \\ \text{vec}(H_{22}^-) \\ \text{vec}(\tilde{G}_{12}^+) \\ \text{vec}(\tilde{G}_{12}^-) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X}_2 = \begin{bmatrix} \text{vec}(H_{11}^+) \\ \text{vec}(H_{11}^-) \\ \text{vec}(H_{12}^+) \\ \text{vec}(H_{12}^-) \\ \text{vec}(K^+) \\ \text{vec}(K^-) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= \begin{bmatrix} I_m \otimes I_m & -I_m \otimes I_m & 0_{m^2 \times m(n-m)} & 0_{m^2 \times m(n-m)} & -M_1^T \otimes \bar{B}_1 & M_1^T \otimes \bar{B}_1 \end{bmatrix} \\
C_2 &= \begin{bmatrix} \bar{G}_{12}^T \otimes I_m & \bar{G}_{12}^T \otimes I_m & I_{(n-m) \times m} \otimes I_m & -I_{(n-m) \times m} \otimes I_m & -M_2^T \otimes B_1 & M_2^T \otimes \bar{B}_1 \end{bmatrix} \\
C_3 &= \begin{bmatrix} I_m^T \otimes I_m & I_m^T \otimes I_m & I_{n-m}^T \otimes I_m & I_{n-m}^T \otimes I_m & 0_{m \times mn} & 0_{m \times mn} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

O programa linear na forma padrão para calcular  $\bar{G}_{12}$  possui  $(n-m)^2$  equações com  $2n(n-m)$  variáveis desconhecidas. O programa linear na forma padrão para calcular  $K$  possui  $m(n+1)$  equações com  $4mn$  variáveis desconhecidas.

### 3.3.3 Caso $n > 2m$

Pode-se verificar que a proposição apresentada anteriormente, para encontrar um poliedro  $S(G, I_n)$  e uma matriz de realimentação de estados  $K$ , no caso  $n \leq 2m$ , pode ser estendida para o caso  $n > 2m$ , da seguinte maneira:

**Proposição 3** *Dado o sistema em malha aberta (3.1) controlável, com  $n > 2m$ .*

Seja  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz ortogonal que coloca o par  $(A, B)$  na forma de controlabilidade  $(\bar{A}, \bar{B})$  [7]:

$$\bar{A} = M^T A M = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{13} & \cdots & \bar{A}_{1, \ell-1} & \bar{A}_{1\ell} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{23} & \cdots & \bar{A}_{2, \ell-1} & \bar{A}_{2\ell} \\ 0 & \bar{A}_{32} & \bar{A}_{33} & \cdots & \bar{A}_{3, \ell-1} & \bar{A}_{3\ell} \\ 0 & 0 & \bar{A}_{43} & \cdots & \bar{A}_{4, \ell-1} & \bar{A}_{4\ell} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \bar{A}_{\ell, \ell-1} & \bar{A}_{\ell\ell} \end{bmatrix}, \text{ com } \bar{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}, \quad (3.39)$$

$$\bar{B} = M^T B = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ com } \bar{B}_1 \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (3.40)$$

onde os elementos do conjunto  $\{n_1, n_2, \dots, n_\ell\}$  são os índices de controlabilidade do sistema (3.1), com  $m = n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_\ell \geq 0$ , e  $n_1 + n_2 + \dots + n_\ell = n$ , dado que o par  $(A, B)$  é controlável.

$\text{posto}(\bar{B}_1) = n_1 = m$ ,  $\text{posto}(\bar{A}_{11}) = n_1 = m$ ,  $\text{posto}(\bar{A}_{21}) = n_2, \dots$ ,  $\text{posto}(\bar{A}_{\ell, \ell-1}) = n_\ell$ .

Seja a matriz:

$$G = GM^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.41)$$

onde:

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & \tilde{G}_{12} & \tilde{G}_{13} & \cdots & \tilde{G}_{1,\ell-1} & \tilde{G}_{1\ell} \\ 0 & I_{n_2} & \tilde{G}_{23} & \cdots & \tilde{G}_{2,\ell-1} & \tilde{G}_{2\ell} \\ 0 & 0 & I_{n_3} & \cdots & \tilde{G}_{3,\ell-1} & \tilde{G}_{3\ell} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \tilde{G}_{4,\ell-1} & \tilde{G}_{4\ell} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{n_\ell} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \text{ com } \tilde{G}_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j} \quad (3.42)$$

Então, sempre existem matrizes  $\tilde{G}_{ij}$  e uma matriz de realimentação de estados  $K$ , tal que o poliedro  $S(G, L_n)$  é positivamente invariante e os pólos do sistema em malha fechada possuem margem de estabilidade  $-\alpha$  (com  $\alpha \in \mathbb{R}^+ \geq 0$ ).

### Demonstração

De forma similar ao caso  $n \leq 2n$ , pode-se demonstrar esta proposição, verificando que para encontrar a matriz  $\tilde{G}$ , dada por (3.41), deve-se encontrar:

- Cada matriz  $\tilde{G}_{i-1,i}$ ,  $i = \ell, (\ell - 1), \dots, 2$ , solucionando-se cada programa linear:

$$\begin{aligned} & \min_{u_i, \tilde{G}_{i-1,i}} J_{1i} \\ & \text{s.a.:} \\ & H_{ii} + \tilde{A}_{i,i-1} \tilde{G}_{i-1,i} = \tilde{A}_{ii} + \tilde{G}_{i,i+1} \tilde{A}_{i+1,i} \\ & \tilde{H}_{ii} 1_{n_i} \leq -\alpha 1_{n_i} - |\tilde{A}_{i,i-1}| 1_{n_{i-1}} \end{aligned}$$

com  $\tilde{G}_{i,i+1} = 0$  para  $i = \ell$ .

- Cada matriz  $\tilde{G}_{i-2,i}$ ,  $i = \ell, (\ell - 1), \dots, 3$ , calculada como:

$$\tilde{G}_{i-2,i} = \tilde{A}_{i-1,i-2}^{-1} (\tilde{A}_{i-1,i} + \tilde{G}_{i-1,i} \tilde{A}_{ii} + \tilde{G}_{i-1,i-1} \tilde{A}_{i-1,i} - H_{i-1,i-1} \tilde{G}_{i-1,i})$$

com  $\tilde{G}_{i-1,i+1} = 0$  para  $i = \ell$ .

- Cada matriz  $\tilde{G}_{i-3,i}$ , para  $i = \ell, (\ell - 1), \dots, 4$ , calculada como:

$$\tilde{G}_{i-3,i} = \tilde{A}_{i-2,i-3}^{-1} (\tilde{A}_{i-2,i} + \tilde{G}_{i-2,i-1} \tilde{A}_{i-1,i} + \tilde{G}_{i-2,i} \tilde{A}_{ii} + \tilde{G}_{i-2,i+1} \tilde{A}_{i+1,i} - H_{i-2,i-2} \tilde{G}_{i-2,i})$$

com  $\tilde{G}_{i-2,i+1} = 0$  para  $i = \ell$ .

⋮

- A matriz  $\tilde{G}_{1\ell}$ , calculada como:

$$G_{1\ell} = \tilde{A}_{21}^+ (\tilde{A}_{2\ell} + \tilde{G}_{23} \tilde{A}_{3\ell} + \tilde{G}_{24} \tilde{A}_{4\ell} \dots + \tilde{G}_{2\ell} \tilde{A}_{\ell\ell} - H_{22} \tilde{G}_{2\ell})$$



Pode-se verificar que o sistema é controlável e estável, com seus pólos dados por:

$$\sigma(A) = \{-0.3967 \pm 0.1312j, -0.8879, -2.0471, -2.5357 \pm 0.5474j\}$$

### 3.4.1 Alocação Regional de Pólos Via LQR

Deseja-se alocar os pólos do sistema, via LQR, em uma região com margem de estabilidade  $-1.5$ . Assim, é considerado o critério de desempenho quadrático (3.5), com  $\alpha = 1.5$ ,  $\tilde{W} = I_6$  e  $\tilde{R} = I_2$ .

A solução da equação modificada de Riccati (3.7) é:

$$\hat{P}^* = \begin{bmatrix} 39.6591 & -63.8049 & 74.0662 & -42.8971 & -1.0505 & 35.9353 \\ -63.8049 & 142.7266 & -161.2536 & 71.0991 & 13.5101 & -66.6929 \\ 74.0662 & -161.2536 & 184.0381 & -83.7675 & -14.0512 & 76.9013 \\ -42.8971 & 71.0991 & -83.7675 & 50.6945 & 0.4007 & -40.0362 \\ -1.0505 & 13.5101 & -14.0512 & 0.4007 & 4.5335 & -3.3975 \\ 35.9353 & -66.6929 & 76.9013 & -40.0362 & -3.3975 & 35.1271 \end{bmatrix}$$

A matriz ótima de realimentação de estados:

$$\hat{K}^* = -\hat{R}^{-1}B^T\hat{P}^* = \begin{bmatrix} -6.4980 & 4.4778 & -6.0575 & 4.6706 & -1.0758 & -4.4087 \\ 8.0123 & -17.9163 & 20.9174 & -11.0590 & -1.5366 & 8.3067 \end{bmatrix}$$

leva a um sistema em malha fechada com pólos dados por:

$$\sigma(A + B\hat{K}^*) = \{-2.064, -2.4133 \pm 0.57155j, -2.7070, -3.7178 \pm 0.6158j\}$$

### 3.4.2 Alocação Regional de Pólos Via Programação Linear

Deseja-se alocar os pólos do sistema, via programação linear, em uma região com margem de estabilidade  $-1.5$ . Assim, a matriz  $M \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  que coloca o par  $(A, B)$  na forma de controlabilidade  $(\tilde{A}, \tilde{B})$ , com  $n = 6 > 2m = 4$ , é:

$$M = \begin{bmatrix} -0.4850 & -0.2245 & 0.7361 & 0.4127 & -0.0226 & 0.0386 \\ -0.4850 & -0.2245 & -0.2043 & -0.4015 & -0.5335 & 0.4761 \\ -0.4850 & -0.2245 & -0.5223 & 0.2653 & 0.6043 & 0.0766 \\ -0.4850 & 0.4116 & 0.1451 & -0.5488 & 0.1915 & -0.4860 \\ -0.2425 & 0.5239 & -0.3091 & 0.5447 & -0.4795 & -0.2106 \\ 0.0000 & 0.6362 & 0.1640 & 0.0041 & 0.2879 & 0.6967 \end{bmatrix}$$

Assim, o par  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  é dado por:

$$\tilde{A} = M^T A M = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} \\ 0_{2 \times 2} & \tilde{A}_{32} & \tilde{A}_{33} \end{bmatrix}$$



$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1.0882 & -1.2752 & -0.9642 & 0.9635 & 1.0272 & -0.4660 \\ 0.1597 & -2.4284 & -0.0877 & 0.2451 & 0.5145 & -0.6456 \\ -0.9154 & 0.3685 & -1.3885 & 0.0724 & 0.3239 & -0.4134 \\ 0.0000 & -0.2901 & -0.2255 & -0.9593 & 0.5612 & 0.7777 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0345 & 0.8499 & -0.6221 & -0.2151 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.6865 & 0.0000 & -0.7541 & -2.3133 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = M^T B = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.0615 & -0.7276 \\ 0.0000 & 1.5718 \\ 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

onde  $t = 3$ , e os índices de controlabilidade são  $n_1 = n_2 = n_3 = 2$ .  
 $\text{posto}(\bar{A}_{11}) = 2$ ,  $\text{posto}(\bar{A}_{21}) = 2$ ,  $\text{posto}(\bar{A}_{32}) = 2$ ,  $\text{posto}(\bar{B}_1) = 2$ .

A matriz  $\bar{G} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  é dada por:

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} I_2 & \bar{G}_{12} & \bar{G}_{13} \\ 0_{2 \times 2} & I_2 & \bar{G}_{23} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & -3.9101 & 0.0000 & 6.0289 & -1.1232 \\ 0.0000 & 1.0000 & 1.1248 & -9.0474 & -11.0900 & -1.5726 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & -0.9138 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 2.1106 & -0.2530 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

onde a matriz  $\bar{G}_{23} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  é solução factível do programa linear:

$$\begin{aligned} \min_{H_{33}, \bar{G}_{23}} \quad & \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \{ |(\bar{G}_{23})_{ij}| \} \\ \text{s.a.:} \quad & H_{33} + \bar{A}_{32} \bar{G}_{23} = \bar{A}_{33} \\ & H_{33} \mathbf{1}_2 \leq -1.5 \times \mathbf{1}_2 + |\bar{A}_{32}| \mathbf{1}_2 \end{aligned}$$

a matriz  $\bar{G}_{12} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  é solução factível do programa linear:

$$\begin{aligned} \min_{H_{22}, \bar{G}_{12}} \quad & \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \{ |(G_{12})_{ij}| \} \\ \text{s.a.:} \quad & H_{22} + \bar{A}_{21} \bar{G}_{12} = \bar{A}_{22} + \bar{G}_{23} \bar{A}_{32} \\ & H_{22} \mathbf{1}_2 \leq -1.5 \times \mathbf{1}_2 + |\bar{A}_{21}| \mathbf{1}_2 \end{aligned}$$

e a matriz  $G_{13} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  é calculada como:

$$\bar{G}_{13} = \bar{A}_{21}^{-1} \{ \bar{A}_{23} + \bar{G}_{23} \bar{A}_{33} - H_{22} \bar{G}_{23} \}$$

Logo, a matriz  $G \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ , com  $\text{posto}(G) = 6$ , é dada por:

$$\tilde{G} = \tilde{G}M^T = \begin{bmatrix} -3.5433 & -3.4371 & 5.1146 & 0.6486 & -1.6886 & 0.3124 \\ -2.9406 & 8.3465 & -10.0349 & 4.1803 & 0.8973 & -3.5058 \\ 0.7568 & 0.2831 & -1.0745 & -0.0299 & 0.1291 & -0.0991 \\ 0.3552 & -1.6481 & 1.5214 & -0.0215 & -0.4141 & 0.4356 \\ -0.0226 & -0.5335 & 0.6043 & 0.1915 & -0.4795 & 0.2879 \\ 0.0386 & 0.4761 & 0.0766 & -0.4860 & -0.2106 & 0.6966 \end{bmatrix}$$

ficando determinado o poliedro  $S(G, 1_6)$ .

A matriz de realimentação de estados,  $K \in \mathbb{R}^{2 \times 6}$ , é obtida solucionando o programa linear:

$$\begin{aligned} \min_{H_{11}, H_{12}, H_{13}, K} \quad & \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^6 |K_{ij}| \\ \text{s.a.:} \quad & H_{11} = \tilde{A}_{11} + \tilde{G}_{12} \tilde{A}_{21} + \tilde{B}_1 K M_1 \\ & H_{11} \tilde{G}_{12} + H_{12} = \tilde{A}_{12} + \tilde{G}_{12} \tilde{A}_{22} + \tilde{G}_{13} \tilde{A}_{32} + \tilde{B}_1 K M_2 \\ & H_{11} \tilde{G}_{13} + H_{12} \tilde{G}_{23} + H_{13} = \tilde{A}_{13} + \tilde{G}_{12} \tilde{A}_{23} + \tilde{G}_{13} \tilde{A}_{33} + \tilde{B}_1 K M_3 \\ & \tilde{H}_{11} 1_2 + |H_{12}| 1_2 + |H_{13}| 1_2 \leq -1.5 \times 1_2 \end{aligned}$$

obtendo-se a matriz de realimentação de estados:

$$K = \begin{bmatrix} -1.4278 & -0.9434 & 0.0000 & -0.9077 & -0.7185 & -1.0217 \\ 3.3455 & -6.4303 & 7.7188 & -5.5959 & -0.3582 & 3.4407 \end{bmatrix}$$

que leva a um sistema em malha fechada com pólos dados por:

$$\sigma(A + BK) = \{-1.5000, -1.5496, -1.7901, -2.3133, -2.3844, -5.4141\}$$

### 3.4.3 Sistema de Ordem Reduzida

Consideram-se os subconjuntos de pólos "bons" e "ruins" do sistema,  $\sigma_b$  e  $\sigma_r$ , dados por:

$$\sigma(A) = \sigma_b \cup \sigma_r = \{-2.5357 \pm 0.5474j, -2.0471\} \cup \{-0.3967 \pm 0.1312j, -0.8879\}$$

A partir de uma decomposição de Schur, obtém-se a matriz  $Q \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ :

$$Q = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} Q_b & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array} \right] = \begin{bmatrix} -0.1323 & -0.3211 & -0.4315 & | & 0.6823 & 0.4593 & -0.1286 \\ -0.5813 & 0.4395 & -0.0166 & | & 0.4321 & -0.5292 & -0.0408 \\ -0.6771 & 0.1680 & 0.1368 & | & -0.3789 & 0.5792 & -0.1237 \\ -0.1251 & -0.0181 & 0.0327 & | & 0.0915 & 0.1205 & 0.9798 \\ -0.0736 & -0.3738 & 0.8607 & | & 0.3280 & 0.0171 & -0.0778 \\ 0.4060 & 0.7316 & 0.2297 & | & 0.2967 & 0.3982 & -0.0190 \end{bmatrix}$$

que transforma o sistema (3.1) no sistema (3.12), com:

$$A_b = \begin{bmatrix} -2.3891 & -0.9126 & -0.3689 \\ 0.3519 & -2.6824 & -0.2665 \\ 0.0000 & 0.0000 & 2.0471 \end{bmatrix}, \quad \sigma(A_b) = \sigma_b$$

$$A_r = \begin{bmatrix} -0.3927 & -0.5056 & 0.9835 \\ 0.0341 & -0.4007 & -0.1856 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.8879 \end{bmatrix}, \quad \sigma(A_r) = \sigma_r$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} -1.4421 & 0.9369 & -0.5779 \\ 0.2834 & -0.4392 & 0.4775 \\ -0.5898 & -0.3260 & -0.6730 \end{bmatrix}$$

$$B_b = \begin{bmatrix} -1.5527 & 0.2073 \\ 0.0814 & 0.3396 \\ 0.1516 & 1.1233 \end{bmatrix}, \quad B_r = \begin{bmatrix} 0.9911 & 0.7163 \\ 0.6384 & 0.5358 \\ 0.6476 & 0.8829 \end{bmatrix}$$

#### • Alocação Parcial de Pólos Via LQR

Deseja-se alocar apenas os pólos "ruins" do sistema, via LQR, em uma região com margem de estabilidade  $-\alpha = -1.5$ . Assim, considera-se o critério de desempenho quadrático (3.5), com  $\hat{R} = I_2$  e  $\hat{W} = Q_r \hat{W}_r Q_r^T$ , onde  $\hat{W}_r = I_3$ .

A solução da equação modificada de Riccati (3.17), é dada por:

$$\hat{P}_r^* = \begin{bmatrix} 19.5079 & -54.9933 & 24.7444 \\ -54.9933 & 207.7657 & -104.0759 \\ 24.7444 & -104.0759 & 55.5418 \end{bmatrix}$$

A matriz ótima de realimentação de estados (LQR) para o sistema reduzido, é:

$$\hat{K}_r^* = -\hat{R}^{-1} B_r^T \hat{P}_r^* = \begin{bmatrix} -0.2531 & -10.7258 & 5.9446 \\ -6.3549 & 19.9589 & -10.9979 \end{bmatrix}$$

A matriz ótima de realimentação de estados (LQR) para o sistema global (3.1) é dada por:

$$\hat{K}^* = \hat{K}_r^* Q_r^T = \begin{bmatrix} -5.8641 & 5.3244 & -6.8527 & 4.5088 & -0.7289 & -4.4597 \\ 6.2461 & -12.8602 & 15.3306 & -8.9524 & -0.8876 & 6.2719 \end{bmatrix}$$

e leva a um sistema em malha fechada com pólos dados por:

$$\sigma(A + BK^*) = \{-2.0471, -2.3565, -2.5357 \pm 0.5475j, -2.5723, -3.5688\}$$

Observa-se que foram alocados apenas os pólos "ruins". Pode-se verificar que para obter a matriz de realimentação de estados ótima,  $K^*$ , pode ser resolvida a equação de Riccati (3.4) para o sistema global, com  $W = Q_r W_r Q_r^T$ . Obviamente, o fato de usar o sistema de ordem reduzida diminui os cálculos a nível de resolução da equação de Riccati.

### • LQR de Energia Mínima

Utilizando o sistema reduzido, deseja-se projetar um LQR de energia mínima que aloque os pólos do sistema com margem de estabilidade  $-a = -1.5$ . Para tanto, considera-se o critério de desempenho (3.18) para o sistema reduzido, com  $R = I_2$ .

A solução da equação modificada de Riccati (3.19) é:

$$P_r^* = \begin{bmatrix} 9.4028 & -31.7601 & 16.5294 \\ -31.7601 & 152.6803 & -84.4344 \\ 16.5294 & -84.4344 & 48.0969 \end{bmatrix}$$

A matriz ótima de realimentação de estados para o sistema reduzido, é dada por:

$$K_r^* = -R^{-1} B_r^T P_r^* = \begin{bmatrix} 0.2506 & -11.3075 & 6.3693 \\ -4.3121 & 15.4899 & -9.0643 \end{bmatrix}$$

A matriz ótima de realimentação de estados para o sistema (3.1), é dada por:

$$K^* = K_r^* Q_r^* = \begin{bmatrix} -5.8421 & 5.8326 & -7.4331 & 4.9009 & -0.6066 & -4.5500 \\ 5.3386 & -9.6912 & 11.7284 & -7.4093 & -0.4443 & 5.0616 \end{bmatrix}$$

e leva a um sistema em malha fechada com pólos dados por:

$$\sigma(A + BK^*) = \{-2.0471, -2.1120, -2.5357 \pm 0.5474j, -2.6032 \pm 0.1312j\}$$

Pode-se verificar, que os mesmos resultados podem ser obtidos minimizando o critério de desempenho (3.18) sujeito as restrições do sistema (3.1).

Os resultados aqui mostrados (LQR de energia mínima) podem ser obtidos utilizando-se o sistema global.

### • Alocação Parcial de Pólos Via Programação Linear

Deseja-se alocar parcialmente os pólos do sistema, via programação linear, em uma região com margem de estabilidade  $-1.5$ .

A matriz  $M_r \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  que coloca o par  $(A_r, B_r)$  na forma de controlabilidade  $(\bar{A}_r, \bar{B}_r)$ , com  $r = 3 < 2m = 4$ , é:

$$M_r = \begin{bmatrix} -0.7368 & 0.4951 & 0.4603 \\ -0.4746 & 0.1061 & -0.8737 \\ -0.4814 & -0.8623 & 0.1567 \end{bmatrix}$$

Assim, o par  $(A_r, \bar{B}_r)$  é dado por:

$$\bar{A}_r = M_r^T A_r M_r = \begin{bmatrix} \bar{A}_{r11} & \bar{A}_{r12} \\ \bar{A}_{r21} & \bar{A}_{r22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3676 & 0.3752 & -0.3986 \\ -0.3141 & -1.1887 & 0.3613 \\ -0.1296 & -0.5021 & -0.1249 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_r = M_r^T B_r = \begin{bmatrix} B_{r1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.3451 & -1.2072 \\ 0.0000 & -0.3497 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

A matriz  $\bar{G}_r \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  é dada por:

$$\bar{G}_r = \begin{bmatrix} I_2 & \bar{G}_{r12} \\ 0_{1 \times 2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & -3.9966 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

onde  $\bar{G}_{r12} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  é solução factível do programa linear:

$$\begin{aligned} \min_{H_{r22}, \bar{G}_{r12}} \quad & |(\bar{G}_{r12})_{11}| + |(\bar{G}_{r12})_{21}| \\ \text{s.a.:} \quad & \\ & H_{r22} = -\bar{A}_{r21} \bar{G}_{r12} + A_{r22} \\ & \bar{H}_{r22} \leq -1.5 - \bar{A}_{r21} 1_2 \end{aligned}$$

Assim, a matriz  $G_r \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , com  $\text{posto}(G_r) = 3$ , é dada por:

$$G_r = \bar{G}_r M_r^T = \begin{bmatrix} -0.7368 & -0.4746 & -0.4814 \\ -1.3449 & 3.5983 & -1.4887 \\ 0.4603 & -0.8737 & 0.1567 \end{bmatrix}$$

ficando o poliedro  $S(G_r, 1_3)$  determinado.

A matriz de realimentação de estados,  $K_r \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ , para o sistema reduzido é encontrada solucionando o programa linear:

$$\begin{aligned} \min_{H_{r11}, H_{r12}, K_r} \quad & \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 |(K_r)_{ij}| \\ \text{s.a.:} \quad & \\ & H_{r11} = \bar{A}_{r11} + \bar{G}_{r12} \bar{A}_{r21} + B_{r1} K_r M_{r1} \\ & H_{r11} \bar{G}_{r12} + H_{r12} = \bar{A}_{r12} + \bar{G}_{r12} \bar{A}_{r22} + B_{r1} K_r M_{r2} \\ & \bar{H}_{r11} 1_2 + |H_{r12}| \leq -1.5 \times 1_2 \end{aligned}$$

obtendo-se:

$$K_r = \begin{bmatrix} -4.2481 & -1.2981 & 0.0000 \\ -3.9066 & 13.2531 & -8.2961 \end{bmatrix}$$

A matriz de realimentação de estados para o sistema (3.1), é dada por:

$$K = K_r Q_r^T = \begin{bmatrix} -3.4948 & -1.1488 & 0.8578 & -0.5454 & -1.4156 & -1.7775 \\ 4.4889 & -8.3635 & 10.1841 & -6.8891 & -0.4093 & 1.2765 \end{bmatrix}$$

que leva a um sistema em malha fechada com pólos dados por:

$$\sigma(A + BK) = \{-1.5, -2.047, -2.131, -2.535 \pm 0.547j, -6.11\}$$

### 3.5 Conclusão

Neste capítulo foi tratado o problema de controle centralizado por realimentação de estados via controle ótimo e programação linear.

Foram lembrados os conceitos básicos do regulador linear quadrático (LQR). Da minimização de um critério de desempenho quadrático, associado à rapidez de convergência dos estados e à energia de controle, é obtida uma lei controle ótimo por realimentação de estados (LQR) que estabiliza ou aloca os pólos do sistema em uma região com margem de estabilidade pré-estabelecida. A matriz de ganhos de realimentação é calculada em função da matriz solução de uma equação (modificada) de Riccati.

Se no critério de desempenho considera-se a apenas o termo correspondente à energia de controle, obtém-se de sua minimização um LQR de energia mínima. Neste caso os pólos estáveis são mantidos inalterados, enquanto os instáveis são alocados no seu reflexo com respeito ao eixo vertical do plano complexo.

Mostrou-se como é possível, além de estabilizar ou alocar os pólos do sistema com uma margem de estabilidade pré-estabelecida, alocar os pólos em uma faixa vertical do plano complexo via LQR de energia mínima. Para tanto, modifica-se o ganho que aloca os pólos do sistema em uma região com margem de estabilidade pré-estabelecida.

Foi introduzida uma condição suficiente, em termos da matriz de ponderação de estados, para alocar parcialmente os pólos do sistema via LQR. Foi visto como o sistema reduzido pode ser utilizado não apenas para alocar parcialmente os pólos do sistema via LQR, mas também para projetar o LQR de energia mínima que aloca os pólos do sistema em uma região com margem de estabilidade pré-estabelecida ou em uma faixa vertical do plano complexo.

Posteriormente, o problema de controle por realimentação de estados foi reformulado como um problema de invariância positiva de conjuntos poliedrais.

Levando o sistema à forma de controlabilidade foi determinado um poliedro convexo e compacto no espaço de estados e uma matriz de realimentação de estados que torna o poliedro positivamente invariante e aloca os pólos do sistema com margem de estabilidade pré-estabelecida. O problema é resolvido utilizando-se programação linear.

Foi apresentado um exemplo numérico mostrando a utilização dos métodos expostos. No exemplo verificou-se como é possível alocar os pólos do sistema em uma região com margem de estabilidade pré-estabelecida ou em uma faixa vertical via controle ótimo.

O sistema de ordem reduzida foi utilizado tanto para alocar parcialmente os pólos do sistema via LQR, quanto para alocar os pólos do sistema em uma região com margem de estabilidade pré-estabelecida ou em uma faixa vertical via LQR de energia mínima. Em particular, no projeto do LQR de energia mínima, para estabilizar ou alocar os pólos em uma região com margem de estabilidade pré-estabelecida ou em uma faixa vertical, foi verificado que é equivalente realizar os cálculos no sistema original ou no sistema reduzido. Obviamente, o fato de utilizar o sistema reduzido diminui os cálculos.

Na solução obtida via programação linear, a margem de estabilidade pré-estabelecida foi obtida. Porém, alguns pólos ficaram muito afastados da linha vertical  $-1.5$ . Este resultado é devido à presença das componentes dos termos da matriz de dinâmica na nova base,  $\bar{A}_{21}$  e  $\bar{A}_{32}$ , nas equações a serem resolvidas para o cálculo do poliedro. O sistema de ordem reduzida foi utilizado para projetar a matriz de realimentação de estados que aloca parcialmente os pólos do sistema via programação linear.

# Capítulo 4

## Controle Descentralizado por Realimentação de Estados Via Controle Ótimo e Programação Linear

### 4.1 Introdução

Neste capítulo é tratado via controle ótimo e programação linear, o problema de controle descentralizado por realimentação de estados de sistemas lineares, invariantes e contínuos no tempo, descritos por variáveis de estados. O sistema considerado é composto pela interconexão de um número limitado de subsistemas.

O problema do *regulador linear quadrático* é formulado para o caso descentralizado. Para encontrar a matriz de realimentação de estados descentralizada, que estabiliza ou aloca os pólos do sistema interconectado com margem de estabilidade pré-estabelecida e minimiza o *critério de desempenho quadrático*, é apresentado um algoritmo iterativo que utiliza uma equação de Riccati com matriz de ponderação de estados modificada em função da estrutura descentralizada requerida [13].

Posteriormente, como extensão do caso centralizado, o problema de controle descentralizado por realimentação de estados é reformulado como um problema de *invariância positiva* de conjuntos polidrais. O sistema interconectado é transformado de forma tal que cada subsistema isolado é levado à sua forma de controlabilidade. A seguir, determina-se um poliedro convexo e compacto no espaço de estados e uma matriz de realimentação de estados descentralizada que torne o poliedro positivamente invariante e aloque os pólos do sistema interconectado com margem de estabilidade pré-estabelecida. Nos cálculos do poliedro e da matriz de realimentação de estados descentralizada, além de considerar os subsistemas, são consideradas as interconexões. O problema pode ser resolvido via



programação linear.

Para ilustrar a utilização destes métodos é apresentado um exemplo numérico.

## 4.2 Controle Ótimo

Considera-se o sistema linear, invariante e contínuo no tempo, composto pela interconexão de  $N$  subsistemas, com seus modos fixos descentralizados [27] estáveis com margem de estabilidade  $-\alpha$  (com  $\alpha \geq 0$ ), descrito pela equação de estados:

$$\dot{x}(t) = A_D x(t) + B_D u(t) + A_I x(t), \quad x(0) = x_0 \quad (4.1)$$

com:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t)^T & x_2(t)^T & \cdots & x_N(t)^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n, \quad x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t)^T & u_2(t)^T & \cdots & u_N(t)^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^m, \quad u_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$$

$$A_D = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_N \end{bmatrix}, \quad A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$$

$$B_D = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_N \end{bmatrix}, \quad B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times m_i}$$

$$A_I = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & 0 & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}, \quad i \neq j$$

onde  $i, j = 1, 2, \dots, N$ ,  $n = \sum_{i=1}^N n_i$ ,  $m = \sum_{i=1}^N m_i$ .

Considera-se o critério de desempenho do tipo quadrático:

$$J(u(t)) = \int_0^\infty e^{2\alpha t} \{x^T(t)Wx(t) + u^T(t)Ru(t)\} dt \quad (4.2)$$

onde a matriz de ponderação de estados,  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , é simétrica e positiva semi-definida, a matriz de ponderação de controle,  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , é simétrica e positiva definida, e  $\alpha$  é uma constante real positiva.

Como visto no capítulo anterior, a minimização do critério de desempenho (4.2) sujeito às restrições do sistema interconectado (4.1) é conhecido como problema linear quadrático. Da minimização, sem considerar a restrição de descentralização, obtém-se uma lei de controle ótimo do tipo realimentação de estados:

$$u^*(t) = K^*x(t) = -R^{-1}B_D^T P^*x(t) \quad (4.3)$$

onde a matriz simétrica e positiva semi-definida  $P^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é solução da equação (modificada) de Riccati:

$$(A_D + A_I + \alpha I_n)^T P^* + P^*(A_D + A_I + \alpha I_n) - P^*B_D R^{-1}B_D^T P^* + W = 0$$

A aplicação da lei de controle ótimo (4.3) ao sistema interconectado em malha aberta (4.1) resulta em um sistema ótimo em malha fechada:

$$\dot{x}(t) = (A_D + A_I + B_D K^*)x(t)$$

estável com margem de estabilidade  $\alpha$ .

Seja  $F(K)$  uma função que depende das restrições estruturais da matriz de realimentação. Em particular, para o caso de realimentação descentralizada de estados, tem-se [13]:

$$F(K) = K - \text{bloco diagonal} \{K\}$$

onde a matriz *bloco diagonal*  $\{K\}$  é dada por:

$$\text{bloco diagonal} \{K\} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_N \end{bmatrix}, \quad K_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}$$

Seja  $\Theta$  o conjunto das matrizes  $K$  que têm estrutura descentralizada, isto é [13]:

$$\Theta = \{K \in \mathbb{R}^{m \times n}; F(K) = K - \text{bloco diagonal} \{K\} = 0\}$$

Assim, pode-se formular o problema de controle ótimo com restrição de descentralização, como:

$$\min_{K \in \Theta} J(K)$$

Pode-se verificar que com a restrição de  $K \in \Theta$ , geralmente a matriz  $K^*$  obtida não resolve o problema de minimização anterior. Como ferramentas para apresentar o algoritmo para solução do problema, são introduzidos os teoremas seguintes:

**Teorema 1** [13] *Seja  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tal que:*

$$K + L = -R^{-1}B_D^T P$$

onde  $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é uma matriz arbitrária e  $P$  é uma matriz simétrica e positiva definida, solução da equação de Riccati:

$$(A_D + A_I + \alpha I_n)^T P + P(A_D + A_I - \alpha I_n) - PB_D R^{-1} B_D^T P - W - L^T R L = 0$$

Então a matriz  $(A_D + A_I + B_D K)$  é estável com margem de estabilidade  $-\alpha$ .

□

**Teorema 2** [13] *Seja  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tal que satisfaz a hipótese do teorema 1.*

Então:

$$J(K) = \frac{1}{2} x_0^T P x_0 \geq \frac{1}{2} x_0^T P^* x_0 = J(K^*), \quad \forall L \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

□

A matriz  $L$  no Teorema 1 é arbitrária, e portanto, pode ser escolhida de tal forma a obter uma solução factível  $K \in \Theta$  e minimizar ao mesmo tempo a degradação da subotimalidade. Segundo o Teorema 2,  $J(K) \geq J(K^*)$ , e como  $J(K^*)$  é associada a  $L = 0$ , então o problema pode ser reduzido a minimizar o afastamento de  $L$  com respeito a  $L = 0$  [12], [13], [21]:

$$\min \left\{ \|L\|_e^2; \left( -R^{-1}B_D^T P - L \right) \in \Theta \right\} \quad (4.4)$$

onde  $\|L\|_e$  é a norma euclidiana de  $L$ , definida por  $\|L\|_e = \left( \text{Tr}(L^T L) \right)^{\frac{1}{2}}$

Para o conjunto de restrições  $\Theta$ , a solução do problema (4.4) é dada por [13]:

$$L = F(-R^{-1}B_D^T P) = -R^{-1}B_D^T P - \text{bloco diagonal} \{ -R^{-1}B_D^T P \}$$

Observa-se que neste caso, obtém-se:

$$\begin{aligned} K &= -R^{-1}B_D^T P + R^{-1}B_D^T P + \text{bloco diagonal} \{ -R^{-1}B_D^T P \} \\ K &= \text{bloco diagonal} \{ -R^{-1}B_D^T P \} \end{aligned}$$

O grau de subotimalidade é definido como o índice [13]:

$$\gamma_\alpha \triangleq \frac{J(K) - J(K^*)}{J(K^*)}$$

Baseados no desenvolvimento anterior, tem-se o algoritmo seguinte:

**Algoritmo 1** [13]

(i) Fazer  $i = 0$  e  $P_0 = P^*$ .

(ii) Determinar:

$$L_{i+1} = F(-R^{-1}B_D^T P_i) = -R^{-1}B_D^T P_i - \text{bloco diagonal}\{-R^{-1}B_D^T P_i\}$$

(iii) Definir:

$$W_{i+1} = W + L_{i+1}^T R L_{i+1}$$

Resolver a equação de Riccati:

$$(A_D + A_I + \alpha I_n)^T P_{i+1} + P_{i+1}(A_D + A_I + \alpha I_n) - P_{i+1} B_D R^{-1} B_D^T P_{i+1} + W_{i+1} = 0$$

(iv) Se  $\rho \leq \epsilon$ ,  $\epsilon$  sendo um número real positivo suficientemente pequeno, ir ao passo (v). Senão fazer  $i \leftarrow i + 1$  e retornar ao passo (ii).

O valor de  $\rho$  usado como teste de convergência, é dado por:

$$\rho = \frac{\|L_{i+1} - L_i\|}{\|L_i\|}, \text{ ou}$$

$$\rho = \frac{\|P_{i+1} - P_i\|}{\|P_i\|}, \text{ ou}$$

$$\rho = \frac{J(K_{i+1}) - J(K_i)}{J(K_i)}$$

(v) Calcular a matriz de realimentação de estados descentralizada:

$$K = -R^{-1}B_D^T P_i - L_{i+1}$$

□

Supondo que o vetor de estados inicial seja uma variável aleatória de média zero e covariância igual à matriz identidade, tem-se [12], [13], [21]:

$$J(K) \approx \frac{1}{2} \text{tr}(P)$$

Assim, a segunda definição de  $\rho$  no algoritmo anterior e o grau de subotimalidade, podem ser reescritos assim:

$$\rho = \frac{|\text{tr}(P_{i+1}) - \text{tr}(P_i)|}{|\text{tr}(P_i)|}$$

$$\gamma_o = \frac{\text{tr}(P) - \text{tr}(P^*)}{\text{tr}(P^*)}$$

Dado que em geral  $K \neq K^*$ , a convergência do algoritmo não é imediata, embora apresente uma rápida variação nas primeiras iterações. Para melhorar a eficiência computacional do algoritmo, especialmente para sistemas de grande porte, é requerido um bom algoritmo para resolver a equação algébrica de Riccati [12].

### 4.3 Programação Linear

Considera-se o sistema linear, invariante e contínuo no tempo, composto pela interconexão de  $N$  subsistemas, dado por (4.1), com seus modos fixos descentralizados estáveis com margem de estabilidade  $-\alpha$  (com  $\alpha \geq 0$ ) e com  $\text{posto}(B_i) = m_i \leq n_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Seja uma lei de controle descentralizada do tipo realimentação de estados, dada por:

$$u(t) = K_D x(t) \quad (4.5)$$

onde a matriz de realimentação de estados descentralizada,  $K_D \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , é bloco diagonal:

$$K_D = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_N \end{bmatrix}, \quad K_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.6)$$

Aplicando a lei de controle (4.5) ao sistema interconectado em malha aberta (4.1), obtém-se o sistema interconectado em malha fechada:

$$\dot{x}(t) = (A_D + B_D K_D)x(t) + A_I x(t) \quad (4.7)$$

Como mostrado no capítulo anterior, o problema de controle por realimentação de estados pode ser reformulado como um problema de invariância positiva. Aqui serão apresentados um algoritmo construtivo e uma proposição, para  $n_i \leq 2m_i$ , para encontrar um poliedro  $S(G, I_n)$  e uma matriz de realimentação de estados descentralizada  $K_D$  que torne o poliedro positivamente invariante e aloque os pólos do sistema interconectado (4.1) com uma margem de estabilidade pré-estabelecida. Nos cálculos para determinar o poliedro e obter a matriz de realimentação de estados são considerados tanto os subsistemas isolados quanto as interconexões entre eles.

Para obter um poliedro  $S(G, I_n)$  e uma matriz de realimentação de estados descentralizada  $K_D$  que torne o poliedro positivamente invariante e aloque os pólos do sistema interconectado com uma margem de estabilidade pré-estabelecida, apresentam-se o algoritmo construtivo e proposição que seguem. Cada subsistema isolado, dado pelo par  $(A_i, B_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , é suposto controlável e com  $n_i \leq 2m_i$ .

## Algoritmo 2

(i) Montar a matriz  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  dada por:

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_N \end{bmatrix}$$

onde a matriz ortogonal  $M_i \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$  coloca o par  $(A_i, B_i)$  na forma de controlabilidade  $(\bar{A}_i, \bar{B}_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Na nova base, tem-se:

$$\bar{A}_D = M^T A_D M = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{A}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_N \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\bar{A}_I = M^T A_I M = \begin{bmatrix} 0 & \bar{A}_{12} & \cdots & \bar{A}_{1N} \\ \bar{A}_{21} & 0 & \cdots & \bar{A}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & \bar{A}_{N2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$\bar{B}_D = M^T B_D = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_N \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

com:

$$\begin{aligned} \bar{A}_i &= M_i^T A_i M_i = \begin{bmatrix} A_i^{11} & A_i^{12} \\ A_i^{21} & A_i^{22} \end{bmatrix} \\ A_{ij} &= M_i^T A_{ij} M_j = \begin{bmatrix} \bar{A}_{ij}^{11} & \bar{A}_{ij}^{12} \\ \bar{A}_{ij}^{21} & \bar{A}_{ij}^{22} \end{bmatrix} \\ \bar{B}_i &= M_i^T B_i = \begin{bmatrix} \bar{B}_i^1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

para  $i, j = 1, 2, \dots, N$ ,  $i \neq j$ , e onde:

$A_i^{11} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$ ,  $\bar{A}_i^{12} \in \mathbb{R}^{m_i \times (n_i - m_i)}$ ,  $A_i^{21} \in \mathbb{R}^{(n_i - m_i) \times m_i}$ ,  $A_i^{22} \in \mathbb{R}^{(n_i - m_i) \times (n_i - m_i)}$ ,  $\bar{B}_i^1 \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$ ,  $\bar{A}_{ij}^{11} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_j}$ ,  $\bar{A}_{ij}^{12} \in \mathbb{R}^{m_i \times (n_j - m_j)}$ ,  $A_{ij}^{21} \in \mathbb{R}^{(n_i - m_i) \times m_j}$ ,  $\bar{A}_{ij}^{22} \in \mathbb{R}^{(n_i - m_i) \times (n_j - m_j)}$ ,  $\text{posto}(\bar{A}_i^{11}) = m_i$ ,  $\text{posto}(\bar{A}_i^{21}) = n_i - m_i$ ,  $\text{posto}(\bar{B}_i^1) = m_i$ .

(ii) Obter as matrizes  $G_i^{12} \in \mathfrak{R}^{m_i \times (n_i - m_i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , solucionando o programa linear:

$$\begin{aligned} & \min_{H_{11}^{22}, \dots, H_{1N}^{22}, \dots, H_{N1}^{22}, \dots, H_{NN}^{22}, G_1^{12}, \dots, G_N^{12}} \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{l=1}^{n_i-m_i} |(G_i^{12})_{lj}| \right) \quad (1.11) \\ & \text{s.a.:} \\ & \begin{aligned} H_{11}^{22} + \bar{A}_1^{21} G_1^{12} &= \bar{A}_1^{22} \\ H_{12}^{22} + \bar{A}_{12}^{21} \bar{G}_2^{12} &= \bar{A}_{12}^{22} \\ &\vdots \\ H_{1N}^{22} + \bar{A}_{1N}^{21} \bar{G}_N^{12} &= \bar{A}_{1N}^{22} \\ H_{21}^{22} + \bar{A}_{21}^{21} \bar{G}_1^{12} &= \bar{A}_{21}^{22} \\ H_{22}^{22} + \bar{A}_2^{21} \bar{G}_2^{12} &= \bar{A}_2^{22} \\ &\vdots \\ H_{2N}^{22} + \bar{A}_{2N}^{21} \bar{G}_N^{12} &= \bar{A}_{2N}^{22} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ H_{N1}^{22} + \bar{A}_{N1}^{21} \bar{G}_1^{12} &= \bar{A}_{N1}^{22} \\ H_{N2}^{22} + \bar{A}_{N2}^{21} \bar{G}_2^{12} &= \bar{A}_{N2}^{22} \\ &\vdots \\ H_{NN}^{22} + \bar{A}_N^{21} \bar{G}_N^{12} &= \bar{A}_N^{22} \end{aligned} \\ & \begin{aligned} \hat{H}_{11}^{22} \mathbf{1}_{n_1-m_1} + |H_{12}^{22}| \mathbf{1}_{n_2-m_2} + \dots + |H_{1N}^{22}| \mathbf{1}_{n_N-m_N} &\leq -\alpha \mathbf{1}_{n_1-m_1} - |\bar{A}_1^{21}| \mathbf{1}_{m_1} - \\ &\quad - |\bar{A}_{12}^{21}| \mathbf{1}_{m_2} - \dots - |\bar{A}_{1N}^{21}| \mathbf{1}_{m_N} \\ |H_{21}^{22}| \mathbf{1}_{n_1-m_1} + \hat{H}_{22}^{22} \mathbf{1}_{n_2-m_2} + \dots + |H_{2N}^{22}| \mathbf{1}_{n_N-m_N} &\leq -\alpha \mathbf{1}_{n_2-m_2} - |\bar{A}_2^{21}| \mathbf{1}_{m_1} - \\ &\quad - |\bar{A}_2^{21}| \mathbf{1}_{m_2} - \dots - |\bar{A}_{2N}^{21}| \mathbf{1}_{m_N} \\ |H_{N1}^{22}| \mathbf{1}_{n_1-m_1} + |H_{N2}^{22}| \mathbf{1}_{n_2-m_2} + \dots + \hat{H}_{NN}^{22} \mathbf{1}_{n_N-m_N} &\leq -\alpha \mathbf{1}_{n_N-m_N} - |\bar{A}_{N1}^{21}| \mathbf{1}_{m_1} - \\ &\quad - |\bar{A}_{N2}^{21}| \mathbf{1}_{m_2} - \dots - |\bar{A}_N^{21}| \mathbf{1}_{m_N} \end{aligned} \end{aligned}$$

onde:

- $(H_n^{22})_{ij} = \begin{cases} (H_n^{22})_{ij} & \text{para } i = j \\ |(H_n^{22})_{ij}| & \text{para } i \neq j \end{cases}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, (n_i - m_i)$ ;
- São desconhecidas as matrizes  $H_j^{22} \in \mathfrak{R}^{(n_i - m_i) \times (n_i - m_i)}$  e  $G_i^{12} \in \mathfrak{R}^{m_i \times (n_i - m_i)}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, N$ .

(iii) Se o programa linear anterior tem solução factível, obter as matrizes de realimentação de estados  $K_i \in \mathfrak{R}^{m_i \times n_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , resolvendo cada um dos  $N$  programas lineares:





Para obter a matriz  $K_N$ :

$$\begin{aligned}
 & \min_{H_{N1}^{11}, \dots, H_{NX}^{11}, H_{N1}^{12}, \dots, H_{NX}^{12}, K_N} \sum_{i=1}^{m_N} |K_N|_{ij} \\
 & \text{s.a.:} \\
 & \quad H_{N1}^{11} = A_{N1}^{11} + \bar{G}_N^{12} \bar{A}_{N1}^{21} \\
 & \quad H_{N1}^{11} \bar{G}_1^{12} + H_{N1}^{12} = \bar{A}_{N1}^{12} - \bar{G}_N^{12} A_{N1}^{22} \\
 & \quad H_{N2}^{11} = \bar{A}_{N2}^{11} + \bar{G}_N^{12} A_{N2}^{21} \\
 & \quad H_{N2}^{11} \bar{G}_2^{12} + H_{N2}^{12} = \bar{A}_{N2}^{12} + \bar{G}_N^{12} \bar{A}_{N2}^{22} \\
 & \quad \vdots \\
 & \quad H_{NX}^{11} = A_N^{11} - \bar{G}_N^{12} \bar{A}_N^{21} + \bar{B}_N^1 K_N M_N^1 \\
 & \quad H_{NX}^{11} \bar{G}_N^{12} + H_{NX}^{12} = \bar{A}_N^{12} + \bar{G}_N^{12} A_N^{22} + \bar{B}_N^1 K_N M_N^2 \\
 & \quad |H_{N1}^{11}| 1_{m_1} + |H_{N1}^{12}| 1_{n_1-m_1} + |H_{N2}^{11}| 1_{m_2} + \dots \\
 & \quad \dots + |H_{N2}^{12}| 1_{n_2-m_2} + |H_{NX}^{11}| 1_{m_N} + |H_{NX}^{12}| 1_{n_N-m_N} \leq -\alpha 1_{m_2}
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

onde:

- $M_i = \begin{bmatrix} M_i^1 & M_i^2 \end{bmatrix}$ ,  $M_i^1 \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$  e  $M_i^2 \in \mathbb{R}^{m_i \times (n_i - m_i)}$ ;
- $(\hat{H}_i^{11})_{ij} = \begin{cases} (H_i^{11})_{ij} & \text{para } i = j \\ |(H_i^{11})_{ij}| & \text{para } i \neq j \end{cases}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, m_i$ ;
- São desconhecidas as matrizes  $H_j^{11} \in \mathbb{R}^{m_j \times m_j}$ ,  $H_j^{12} \in \mathbb{R}^{m_j \times (n_j - m_j)}$  e  $K_i \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, N$ .

(iv) Calcular a matriz de realimentação de estados descentralizada  $K_D$ , dada por (4.6), e obter o poliedro  $S(G, 1_n)$ , calculando a matriz:

$$G = \tilde{G} M^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \tag{4.15}$$

com:

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{G}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{G}_N \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

$$\tilde{G}_i = \begin{bmatrix} I_{m_i} & \tilde{G}_i^{12} \\ 0 & I_{n_i - m_i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i} \tag{4.17}$$

**Proposição 4** *Seja o sistema interconectado em malha aberta (4.11), com seus modos próprios descentralizados estáveis com margem de estabilidade  $-\alpha$  (para  $\alpha > 0$ ). Cada subsistema isolado, dado pelo par  $(A_i, B_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , é suposto controlável e com  $n_i \leq 2m_i$ .*

*Sejam a matriz de realimentação de estados descentralizada  $K_D$  e o poliedro  $S(G, V_n)$ , obtidos através do algoritmo anterior.*

*Então, o poliedro  $S(G, V_n)$  é positivamente invariante e os pólos do sistema interconectado em malha fechada possuem margem de estabilidade  $-\alpha$ .*

### Demonstração

Considerando o conjunto de equações e inequações dadas nos programas lineares (4.11) à (4.14), e fazendo-se  $H_{ij}^{21} = \bar{A}_{ij}^{21}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, N$ ,  $i \neq j$ , e  $H_{ii}^{21} = \bar{A}_i^{21}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , pode-se escrever matricialmente:

$$H\bar{G} = G(\bar{A}_D + \bar{A}_I + B_D\bar{K}_D) \quad (4.18)$$

$$\dot{H}1_n \leq -\alpha 1_n \quad (4.19)$$

com  $A_D$ ,  $A_I$ ,  $\bar{B}_D$  e  $\bar{G}$  dados por (4.8), (4.9), (4.10) e (4.16), respectivamente, e:

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1N} \\ H_{12} & H_{22} & \cdots & H_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1} & H_{N2} & \cdots & H_{NN} \end{bmatrix}, \quad H_{ij} = \begin{bmatrix} H_{ij}^{11} & H_{ij}^{12} \\ H_{ij}^{21} & H_{ij}^{22} \end{bmatrix}, \quad \forall i, j$$

$$\dot{H} = \begin{bmatrix} \dot{H}_{11} & \dot{H}_{12} & \cdots & \dot{H}_{1N} \\ \dot{H}_{12} & \dot{H}_{22} & \cdots & \dot{H}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{H}_{N1} & \dot{H}_{N2} & \cdots & \dot{H}_{NN} \end{bmatrix}, \quad H_{ii} = \begin{bmatrix} \dot{H}_{ii}^{11} & \dot{H}_{ii}^{12} \\ \dot{H}_{ii}^{21} & \dot{H}_{ii}^{22} \end{bmatrix}, \quad \forall i, j$$

$$\bar{K}_D = K_D M = \begin{bmatrix} \bar{K}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{K}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{K}_N \end{bmatrix}, \quad \bar{K}_i = K_i M_i = \begin{bmatrix} K_i M_i^1 & K_i M_i^2 \end{bmatrix}, \quad \forall i$$

Pós-multiplicando ambos os lados da equação (4.18) por  $M^T$ , e dado que  $M^T M = I_n$ , tem-se:

$$H\bar{G}M^T = \dot{G}M^T M(\bar{A}_I + \bar{A}_I + B_D\bar{K}_D)M^T$$

de onde, levando em conta (4.8), (4.9), (4.10) e (4.15), obtém-se:

$$HG = G(A_D + A_I + B_D K_D) \quad (4.20)$$

com  $K_{L'} = K_D M^T$ .

Assim, o poliedro  $St(G, 1_{n_I})$  é positivamente invariante com respeito ao sistema interconectado em malha fechada (2.15) com margem de estabilidade  $-\alpha$ , dado que são satisfeitas as relações de invariância positiva (4.20) e (4.19).

□

É importante observar que a escolha da utilização da matriz  $G$  na forma bloco diagonal foi inspirada nos resultados de [4] para o caso discreto.

## 4.4 Exemplo Ilustrativo

Considera-se o sistema linear, invariante e contínuo no tempo, composto pela interconexão de 2 subsistemas e descrito pela equação de estados:

$$\dot{x}(t) = A_D x(t) + B_D u(t) + A_I x(t) \quad (4.21)$$

com:

$$A_D = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix}, \quad B_D = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}, \quad n_1 = 5, \quad m_1 = 3, \quad n_2 = 8, \quad m_2 = 4$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.4000 & 0.2000 & 0.6000 & 0.2000 & -0.2000 \\ 0.0000 & -0.5000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.4000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -2.0000 & 0.0000 & 0.2000 \\ 0.2000 & 0.1000 & 0.5000 & -1.2500 & 0.0000 \\ 0.2500 & 0.0000 & -0.2000 & 0.5000 & -1.0000 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0.0537 & 0.1499 & 0.0091 & 0.0441 & 0.0821 & 0.1356 & 0.1231 & 0.1421 \\ 0.0369 & 0.0710 & 0.1341 & 0.0019 & 0.1294 & 0.0631 & 0.0831 & 0.0883 \\ 0.1238 & 0.0922 & 0.0212 & 0.0467 & 0.0393 & 0.0581 & 0.1092 & 0.0000 \\ 0.0736 & 0.1086 & 0.1151 & 0.0655 & 0.0472 & 0.1456 & 0.0932 & 0.1208 \\ 0.0684 & 0.0433 & 0.0000 & 0.0914 & 0.0233 & 0.0192 & 0.1056 & 0.0955 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 2.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -1.0000 & -2.0000 & 1.0000 & 0.0000 & -3.0000 & -1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -1.0000 & 0.0000 & -3.0000 & 0.0000 & 4.0000 & 2.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \\ -1.0000 & 2.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & -1.0000 & -1.0000 & 2.0000 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0.1496 & 0.0506 & 0.0034 & 0.0598 & 0.0627 \\ 0.0645 & 0.1488 & 0.1307 & 0.0874 & 0.0788 \\ 0.0292 & 0.0633 & 0.0436 & 0.0328 & 0.0971 \\ 0.1497 & 0.0209 & 0.0963 & 0.0148 & 0.1426 \\ 0.0264 & 0.0326 & 0.0574 & 0.0581 & 0.0328 \\ 0.0151 & 0.0006 & 0.1261 & 0.0079 & 0.0770 \\ 0.0110 & 0.1230 & 0.0764 & 0.0303 & 0.0382 \\ 0.0592 & 0.0300 & 0.0306 & 0.0571 & 0.0831 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1.0000 & -1.0000 & 0.0000 \\ 2.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -2.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

Os pólos do sistema interconectado de malha aberta são:

$$\sigma(A_D + A_I) = \{1.8883 \pm 1.1340j, 0.0001, -0.0743 \pm 1.4411j, -0.2939, \\ -0.4407 \pm 0.7174j, -0.7993 \pm 0.1382j, -1.4655, -1.8624, -3.6759\}$$

Pode-se verificar que o sistema não possui modos fixos descentralizados.

#### 4.4.1 Controle Ótimo

Deseja-se alocar os pólos do sistema interconectado, via controle ótimo descentralizado, em uma região com margem de estabilidade  $-1$ . Para tanto, considera-se o critério de desempenho quadrático (4.2), com a constante  $\alpha = 1$  e as matrizes de ponderação de estados e de controle dadas por  $W = I_{13}$  e  $R = I_7$ , respectivamente.

Utilizando-se o algoritmo 1 para determinar a matriz de realimentação de estados descentralizada que minimiza o critério de desempenho (4.2), obtém-se em 5 iterações:

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}$$

60

com:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1.1470 & 1.2626 & 0.7055 & 1.0166 & 1.2619 \\ -1.3636 & 0.7396 & -0.3460 & -0.4834 & -0.3556 \\ -0.1986 & 0.0664 & 0.0820 & -1.2821 & -0.4670 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1.9805 & 0.9391 & -1.6253 & 1.3937 & 1.2395 & 0.8942 & -2.1585 & -1.2858 \\ 2.6175 & 1.7930 & 1.0464 & -1.3681 & 0.2256 & 3.7013 & -1.7885 & -3.1449 \\ 1.2319 & 1.7953 & -4.2152 & 0.0076 & 2.8126 & 3.2088 & 2.7000 & 0.9215 \\ -0.9942 & 3.0705 & -2.6917 & 0.6475 & 2.7168 & 2.3341 & 12.7193 & 7.9955 \end{bmatrix}$$

Os valores do erro e do grau de subotimalidade obtidos, são:

$$\rho = \frac{|tr(P_{i+1}) - tr(P_i)|}{|tr(P_i)|} = 1.4000 \times 10^{-6}$$

$$\gamma_o = \frac{tr(P) - tr(P^*)}{tr(P^*)} = 0.1544$$

Os pólos do sistema interconectado de malha fechada são dados por:

$$\sigma(A_D + A_I + B_D K_D) = \{-1.3437, -1.7483, -1.8596 \pm 0.8487j, -2.6960 \pm 1.4481j, -2.4370, -2.9196, -3.5101, -3.6698 \pm 0.4399j, -4.1102 \pm 1.0311j\}$$

#### 4.4.2 Programação Linear

Deseja-se alocar os pólos do sistema interconectado, via programação linear, em uma região com margem de estabilidade  $-1$ . Assim, através da utilização do algoritmo 2, obtém-se:

- (i) As matrizes  $M_1 \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$  e  $M_2 \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$  que definem a matriz  $M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}$  e que colocam os pares  $(A_1, B_1)$  e  $(A_2, B_2)$  na forma de controlabilidade  $(\bar{A}_1, \bar{B}_1)$  e  $(A_2, \bar{B}_2)$ , são dadas por:

$$M_1 = \left[ M_1^1 \mid M_1^2 \right] = \left[ \begin{array}{ccc|cc} 0.0000 & -0.4472 & 0.8944 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.8944 & -0.4472 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.4082 & 0.0000 & 0.0000 & -0.2073 & -0.8890 \\ 0.8164 & 0.0000 & 0.0000 & -0.5184 & -0.2540 \\ -0.4082 & 0.0000 & 0.0000 & -0.8295 & 0.3810 \end{array} \right]$$

$$M_2 = \left[ M_2^1 \mid M_2^2 \right]$$

$$M_2 = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} -0.5773 & 0.0000 & 0.5163 & 0.0000 & -0.3140 & 0.1514 & -0.4384 & -0.2936 \\ 0.0000 & -0.7071 & 0.0000 & 0.0000 & 0.5234 & -0.1554 & -0.1483 & 0.0293 \\ -0.5773 & 0.0000 & -0.2581 & 0.0000 & 0.4187 & 0.5740 & 0.2955 & 0.0880 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.7745 & 0.0000 & 0.3140 & -0.1514 & 0.4384 & 0.2936 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.5773 & 0.0000 & -0.2581 & 0.0000 & -0.1046 & -0.7255 & 0.1428 & 0.2055 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.2617 & 0.2232 & -0.3252 & 0.8808 \\ 0.0000 & -0.7071 & 0.0000 & 0.0000 & -0.5234 & 0.1554 & 0.4483 & -0.0293 \end{array} \right]$$

Na nova base, tem-se:

$$A_D = M^T A_D M = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & 0 \\ 0 & \bar{A}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_I = M^T A_{D_I} M = \begin{bmatrix} 0 & A_{I2} \\ \bar{A}_{21} & 0 \end{bmatrix}.$$

$$B_D = M^T B_D = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 & 0 \\ 0 & \bar{B}_2 \end{bmatrix}$$

com:

$$\bar{A}_1 = M_1^T A_1 M_1 = \begin{bmatrix} \bar{A}_1^{11} & \bar{A}_1^{12} \\ \bar{A}_1^{21} & \bar{A}_1^{22} \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_1 = \left[ \begin{array}{ccc|cc} -1.6666 & -0.1004 & 0.0182 & 0.0931 & -0.7258 \\ 0.1460 & -0.4000 & 0.0000 & 0.3246 & 0.1590 \\ 0.0730 & -0.2000 & -0.5000 & 0.0927 & -0.6588 \\ \hline -0.2624 & 0.1854 & -0.2550 & -0.8413 & -0.0447 \\ 0.0000 & 0.0028 & 0.0511 & -0.1264 & -1.7419 \end{array} \right]$$

$$\bar{A}_2 = M_2^T A_2 M_2 = \begin{bmatrix} \bar{A}_2^{11} & \bar{A}_2^{12} \\ \bar{A}_2^{21} & \bar{A}_2^{22} \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_2 = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} -0.3333 & 0.0000 & 0.2981 & -1.7320 & 0.1208 & -1.1784 & -2.0535 & -0.4237 \\ -0.4082 & 2.0000 & 0.3651 & 0.7071 & -0.7772 & -0.6539 & -0.6480 & 0.4982 \\ -0.1490 & -1.0954 & 0.1333 & -1.5491 & 0.2567 & -0.2490 & 0.9362 & -0.3942 \\ -0.5773 & 1.4142 & -0.2581 & -3.0000 & 2.5124 & -0.6298 & 0.7000 & -3.3765 \\ \hline -0.6648 & 2.7018 & -0.2162 & 1.4655 & -0.1424 & 0.5510 & -0.3824 & 0.5086 \\ 0.6007 & 0.0000 & -0.2964 & 1.7181 & 0.0331 & 0.7299 & 1.6034 & -0.7551 \\ 0.9471 & 0.0000 & -0.1526 & 0.0000 & 0.0735 & 0.1552 & -0.6564 & -0.1089 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.0454 & 0.0000 & 0.6178 & 0.2125 & -0.2534 & 0.2689 \end{array} \right]$$

$$A_{12} = M_1^T A_{12} M_2 = \begin{bmatrix} \bar{A}_{12}^{11} & \bar{A}_{12}^{12} \\ \bar{A}_{12}^{21} & \bar{A}_{12}^{22} \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} -0.0890 & -0.0657 & -0.0563 & -0.0129 & 0.0207 & -0.0152 & 0.0600 & 0.0190 \\ 0.1721 & 0.1930 & 0.0162 & 0.1524 & 0.0116 & -0.0223 & -0.0010 & -0.1381 \\ -0.0420 & -0.1343 & 0.0355 & -0.0155 & -0.0406 & -0.0843 & -0.0292 & 0.0813 \\ \hline 0.1663 & 0.1790 & -0.1115 & 0.0519 & 0.0418 & -0.0020 & 0.0046 & -0.1653 \\ 0.1339 & 0.0617 & -0.0376 & 0.0380 & -0.0173 & 0.0167 & 0.0794 & -0.0714 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = M_2^T A_{21} M_1 = \begin{bmatrix} \bar{A}_{21}^{11} & \bar{A}_{21}^{12} \\ \bar{A}_{21}^{21} & \bar{A}_{21}^{22} \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0.0492 & 0.1091 & -0.0705 & 0.1642 & 0.0514 \\ 0.0098 & 0.1522 & -0.0216 & 0.1715 & 0.0837 \\ -0.0272 & -0.1043 & 0.1510 & -0.1044 & 0.0002 \\ -0.0106 & 0.0409 & -0.0090 & 0.0692 & 0.0532 \\ \hline -0.0402 & -0.0468 & -0.0116 & -0.0549 & -0.0436 \\ 0.0514 & -0.0474 & -0.0154 & 0.0075 & 0.0635 \\ -0.0534 & 0.0760 & 0.0434 & -0.0369 & 0.0309 \\ -0.0697 & -0.1042 & -0.0347 & -0.1036 & -0.0869 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_1 = M_1^T B_1 = \begin{bmatrix} \bar{B}_1^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & -2.4494 \\ -2.2360 & -0.4472 & 0.0000 \\ 0.0000 & -1.3416 & 0.0000 \\ \hline 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_2 = M_2^T B_2 = \begin{bmatrix} \bar{B}_2^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -0.5773 & -1.7320 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -1.4142 \\ 1.2909 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -1.0000 & 0.0000 \\ \hline 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

(ii) As matrizes  $\bar{G}_1^{12} \in \mathfrak{R}^{3 \times 2}$  e  $G_2^{12} \in \mathfrak{R}^{1 \times 4}$  são solução factível do programa linear:

$$\begin{aligned} & \min_{H_{11}^{22}, H_{12}^{22}, H_{21}^{22}, H_{22}^{22}, \bar{G}_1^{12}, G_2^{12}} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 |(G_1^{12})_{ij}| + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^2 |(G_2^{12})_{ij}| \\ \text{s.a.:} & \\ & H_{11}^{22} + \bar{A}_1^{21} \bar{G}_1^{12} = \bar{A}_1^{22} \\ & H_{12}^{22} + \bar{A}_2^{21} \bar{G}_1^{12} = \bar{A}_2^{22} \\ & H_{21}^{22} + \bar{A}_1^{21} G_2^{12} = \bar{A}_1^{22} \\ & H_{22}^{22} + \bar{A}_2^{21} G_2^{12} = \bar{A}_2^{22} \\ & \hat{H}_{11}^{22} |1_2 + |H_{12}^{22}| |1_4 \leq -1_2 - |\bar{A}_1^{21}| |1_3 - |\bar{A}_2^{21}| |1_1 \\ & |H_{21}^{22}| |1_2 + \hat{H}_{22}^{22} |1_4 \leq -1_4 - |\bar{A}_2^{21}| |1_3 - \bar{A}_2^{21} |1_1 \end{aligned}$$

obtendo-se:

$$G_1^{12} = \begin{bmatrix} -6.8737 & -1.6418 \\ 6.5379 & 1.0548 \\ -2.8364 & 2.6322 \end{bmatrix}$$

$$G_2^{12} = \begin{bmatrix} 2.2664 & -0.5892 & 3.6913 & -5.5116 \\ 7.6032 & -4.7448 & -0.4384 & -1.6785 \\ 13.5823 & -4.6729 & 5.5723 & -33.4881 \\ -3.4925 & 8.1665 & 0.0000 & -4.2902 \end{bmatrix}$$

$$\bar{G}_1 = \begin{bmatrix} I_3 & \bar{G}_1^{12} \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} I_4 & G_2^{12} \\ 0 & I_4 \end{bmatrix} \text{ e } \bar{G} = \begin{bmatrix} \bar{G}_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix}$$

(iii) A matriz de realimentação de estados  $K_1 \in \mathfrak{R}^{3 \times 5}$  é solução factível do programa linear:

$$\begin{aligned} & \min_{H_{11}^{11}, H_{12}^{12}, H_{13}^{13}, H_{14}^{14}, K_1} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 |(K_1)_{ij}| \\ \text{s.a.:} & \\ & H_{11}^{11} = \bar{A}_1^{11} + \bar{G}_1^{12} \bar{A}_1^{21} + \bar{B}_1^1 K_1 M_1^1 \\ & H_{11}^{11} \bar{G}_1^{12} + H_{11}^{12} = \bar{A}_1^{12} + \bar{G}_1^{12} \bar{A}_1^{22} + \bar{B}_1^1 K_1 M_1^2 \\ & H_{12}^{11} = \bar{A}_2^{11} + \bar{G}_1^{12} \bar{A}_2^{21} \\ & H_{12}^{11} \bar{G}_2^{12} + H_{12}^{12} = \bar{A}_2^{12} + \bar{G}_1^{12} \bar{A}_2^{22} \\ & \hat{H}_{11}^{11} |1_3 + |H_{11}^{12}| |1_2 + |H_{12}^{11}| |1_1 + |H_{12}^{12}| |1_1 \leq -1_3 \end{aligned}$$

obtendo-se:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -10.0208 & -9.7699 & 19.9016 & -45.7462 & -71.2012 \\ 17.5560 & -8.1791 & 38.8743 & 0.0000 & 45.5259 \\ 0.7702 & 0.0000 & 59.5745 & 116.8207 & 113.1102 \end{bmatrix}$$



A matriz de realimentação de estados  $K_2 \in \mathbb{R}^{4 \times 8}$  é solução factível do programa linear:

$$\begin{aligned} \min_{H_{21}^{11}, H_{21}^{12}, H_{22}^{11}, H_{22}^{12}, K_2} \quad & \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^8 |(K_2)_{ij}| \\ \text{s.a.:} \quad & H_{21}^{11} = \bar{A}_{21}^{11} - G_2^{12} \bar{A}_2^{21} \\ & H_{21}^{11} \bar{G}_1^{12} + H_{21}^{12} = \bar{A}_{21}^{12} + G_2^{12} \bar{A}_{21}^{22} \\ & H_{22}^{11} = \bar{A}_2^{11} + \bar{G}_2^{12} \bar{A}_2^{21} + \bar{B}_2^1 K_2 M_2^1 \\ & H_{22}^{11} \bar{G}_2^{12} + H_{22}^{12} = \bar{A}_2^{12} + G_2^{12} \bar{A}_2^{22} + \bar{B}_2^1 K_2 M_2^2 \\ & |H_{21}^{11}|1_3 + |H_{21}^{12}|1_2 + |H_{22}^{11}|1_4 + |H_{22}^{12}|1_4 \leq -1_4 \end{aligned}$$

obtendo-se:

$$K_2 = \begin{bmatrix} -39.9337 & -50.3423 & -26.4377 & 20.0905 & 8.0000 & 57.3715 & 491.5097 & 89.3423 \\ -20.4013 & -17.9216 & 5.3875 & 11.6982 & -3.0000 & -1.7508 & 0.0000 & 0.0000 \\ 24.1667 & -34.9897 & 31.7052 & -31.2347 & -15.9571 & -67.3907 & 0.0000 & 16.3346 \\ -8.2867 & 11.5243 & 1.6796 & 11.5408 & -2.6147 & 17.2975 & 0.0000 & -41.3938 \end{bmatrix}$$

(iv) Assim, ficam determinados o poliedro  $S(G, 1_{13})$ , com  $G \equiv GM^T$ , e a matriz de realimentação de estados descentralizada:

$$K_D = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}$$

Os pólos do sistema interconectado de malha fechada são:

$$\sigma(A_D + A_I + B_D K_D) = \{-1.2472, -1.8222, -3.4987, -4.8517, -6.9904, -10.0808, -10.7133, -15.2054 \pm 0.6953j, -20.7469, -25.7972, -27.8473, -60.8300\}$$

## 4.5 Conclusão

Neste capítulo foi tratado o problema de controle descentralizado por realimentação de estados via controle ótimo e programação linear.

Como uma extensão do caso centralizado, o problema do regulador linear quadrático foi formulado para o caso descentralizado. Levando em conta a estrutura descentralizada da matriz de realimentação de estados, o problema de minimização de um critério de desempenho quadrático foi reformulado, verificando que neste caso, em geral, a matriz de realimentação de estados obtida não resolve este problema, isto é, não é descentralizada [13].

Para solucionar o problema foi apresentado um algoritmo [13], através do qual é obtida a matriz de realimentação de estados descentralizada que estabiliza ou aloca os pólos

do sistema interconectado em uma região com margem de estabilidade pré-estabelecida e minimiza o critério de desempenho sujeito à restrição de descentralização.

A cada iteração, no algoritmo, é modificada a matriz de ponderação de estados dependendo da estrutura de descentralização requerida na matriz de ganhos de realimentação. A seguir, é resolvida uma equação de Riccati com a matriz de ponderação de estados modificada. Deve-se salientar que este algoritmo pode ser utilizado para atingir qualquer outra restrição estrutural sobre a matriz de realimentação [13].

A seguir, como no caso centralizado, o problema de controle por realimentação de estados descentralizado foi reformulado como um problema de invariância positiva de conjuntos poliedrais. Para a solução do problema foram apresentados um algoritmo construtivo e uma proposição.

No algoritmo, foi transformado o sistema interconectado de forma que cada subsistema isolado fique representado na forma de controlabilidade. Logo, foi determinado um poliedro convexo e compacto no espaço de estados e uma matriz de realimentação de estados descentralizada que torna o poliedro positivamente invariante e aloca os pólos do sistema interconectado com margem de estabilidade pré-estabelecida. Além de considerar os subsistemas isolados, são consideradas as interconexões para os cálculos do poliedro e da matriz de realimentação de estados descentralizada. O problema foi resolvido utilizando-se programação linear.

Para mostrar a utilização dos métodos expostos, foi apresentado um exemplo numérico. A solução obtida via controle ótimo, apresentou uma rápida convergência. Na solução obtida via programação linear, a margem de estabilidade pré-estabelecida foi obtida. Entretanto, ficaram na malha fechada alguns pólos muito afastados da linha vertical  $-1$ . Isto se deve à presença das componentes dos termos dos subsistemas e das interconexões na nova base,  $A_1^{21}$ ,  $\bar{A}_2^{21}$ ,  $A_{12}^{21}$  e  $\bar{A}_{31}^{21}$ , nas equações a serem resolvidas para o cálculo do poliedro. Observou-se também a obtenção de ganhos altos na matriz de realimentação de estados.

# Capítulo 5

## Conclusões Gerais e Sugestões para Futuros Trabalhos

### 5.1 Conclusões Gerais

Neste trabalho foram tratados via controle ótimo e programação linear os problemas de controle centralizado e descentralizado por realimentação de estados.

Foi formulado o problema geral de controle (centralizado) por realimentação de estados, introduzindo os conceitos de alocação arbitrária e regional de pólos, controlabilidade, modos fixos e estabilizabilidade, e alocação com respeito a uma região [7], [18], [30]. Também, foi formulado o problema geral de controle descentralizado por realimentação de estados de sistemas interconectados [27]. O conceito de modos fixos (centralizados) foi estendido para o caso descentralizado [3], [10], [27], [29].

Mostrou-se como é possível utilizar um sistema de ordem reduzida para projetar uma matriz de realimentação de estados que aloque parcialmente os pólos do sistema, isto é, que modifique apenas os pólos, escolhidos a priori, com dinâmica não desejada [15].

#### 5.1.1 Caso Centralizado

Para este caso foram relembrados os conceitos básicos do regulador linear quadrático (LQR) [2], [11], [19]. Foi mostrado como é possível, além de estabilizar ou alocar os pólos do sistema em uma região com margem de estabilidade pré-estabelecida via LQR [2], [11], [19], alocar os pólos em uma faixa vertical via LQR de energia mínima [25].

Foi explorado o sistema de ordem reduzida, mostrando-se como este sistema pode ser utilizado não apenas para alocar parcialmente os pólos do sistema via LQR, mas também

para o projeto do LQR de energia mínima que estabiliza ou aloca os pólos do sistema em uma região com margem de estabilidade pré-estabelecida ou em uma faixa vertical. Foi apresentada uma condição suficiente, em termos da matriz de ponderação de estados, para alocação parcial de pólos do sistema via LQR. A utilização do sistema reduzido torna-se interessante especialmente em sistemas de ordem elevada, diminuindo os cálculos a nível de resolução da equação de Riccati.

O problema de controle por realimentação de estados foi reformulado como um problema de invariância positiva de conjuntos poliedrais. Baseados nos resultados obtidos inicialmente em [22], o sistema foi transformado à forma de controlabilidade para determinar um poliedro convexo e compacto no espaço de estados e uma matriz de realimentação de estados que torna o poliedro positivamente invariante e aloca os pólos do sistema em uma região com margem de estabilidade pré-estabelecida. A solução do problema foi obtida via programação linear.

O método apresentado via programação linear é uma alternativa para a solução do problema de controle por realimentação de estados. Nesta abordagem, a margem de estabilidade pré-estabelecida para alocar os pólos do sistema é obtida. Porém, alguns pólos de malha fechada ficam muito afastados da linha vertical  $-\alpha$ .

### 5.1.2 Caso Descentralizado

Como extensão do caso centralizado, foi formulado o problema do regulador linear quadrático para o caso descentralizado. Em geral a matriz de realimentação de estados obtida não é descentralizada. Foi apresentado um algoritmo iterativo para obter a matriz de realimentação de estados descentralizada que minimiza um critério de desempenho quadrático e estabiliza ou aloca os pólos do sistema em uma região com margem de estabilidade pré-estabelecida [13]. No algoritmo é resolvido a cada iteração uma equação de Riccati com matriz de ponderação de estados modificada em função da estrutura descentralizada requerida [13]. O algoritmo não apresenta convergência imediata, embora tenha uma rápida variação nas primeiras iterações. Um bom algoritmo para resolver a equação de Riccati melhora o processo computacional, especialmente para sistemas de grande porte [12].

Da mesma forma que foi feito para o caso centralizado, foi reformulado o problema de controle descentralizado por realimentação de estados como um problema de invariância positiva de conjuntos poliedrais. Foi introduzido um algoritmo construtivo e uma proposição para resolver o problema. No algoritmo, o sistema foi transformado de forma que cada subsistema isolado fique na forma de controlabilidade. Com o sistema nesta base, foi determinado um poliedro convexo e compacto no espaço de estados e uma matriz de realimentação de estados descentralizada que torna o poliedro positivamente invariante e aloca os pólos do sistema interconectado em uma região com margem de estabilidade pré-estabelecida. Para os cálculos do poliedro e da matriz de realimentação de estados são considerados tanto os subsistemas isolados quanto as interconexões entre eles. A

programação linear é utilizada como ferramenta para solucionar o problema.

Como no caso centralizado, o método apresentado via programação linear é uma alternativa para a solução do problema de controle descentralizado por realimentação de estados. Nesta abordagem, a margem de estabilidade pré-estabelecida para alocar os pólos do sistema interconectado é obtida. Entretanto, na malha fechada ficam alguns pólos muito afastados da linha vertical  $-\alpha$ . Além disto, os ganhos obtidos na matriz de realimentação de estados descentralizada são de valores elevados.

## 5.2 Sugestões para Futuros Trabalhos

Para desenvolver futuros trabalhos são sugeridos os tópicos seguintes:

- Como visto no método apresentado via programação linear, no caso centralizado e no descentralizado, a margem de estabilidade pré-estabelecida é obtida. Porém, ficam na malha fechada alguns pólos muito afastados da linha vertical  $-\alpha$ . Assim, pode ser interessante encontrar um outro poliedro positivamente invariante, tal que a matriz de realimentação de estados obtida aloque os pólos do sistema perto da linha vertical  $-\alpha$  e/ou sejam minimizados os valores dos ganhos obtidos. Neste sentido, em [22] é mostrado um exemplo numérico para o caso centralizado.
- Com respeito à abordagem via programação linear para o caso descentralizado, tem-se:
  - Encontrar as condições sobre o sistema interconectado sob as quais existe solução factível dos programas lineares no algoritmo 2.
  - O algoritmo 2 foi desenvolvido neste trabalho para o caso de cada subsistema possuir  $n_i \leq 2m_i$ . Assim, é sugerido estender o algoritmo para o caso de cada subsistema possuir  $n_i > 2m_i$ , ou alguns subsistemas possuírem  $n_i \leq 2m_i$  e outros  $n_i > 2m_i$ .
  - Encontrar uma transformação que coloque o sistema interconectado em uma forma mais adequada para a obtenção de um poliedro e uma matriz de realimentação de estados descentralizada que torne o poliedro positivamente invariante e aloque os pólos do sistema com margem de estabilidade pré-estabelecida.

# Bibliografia

- [1] B. D. O. Anderson, D. J. Clements - *Algebraic Characterization of Fixed Modes in Decentralized Control*. Automatica, Vol.17, No.5, pp.703-712, 1981.
- [2] B. D. O. Anderson, J. B. Moore - *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*. Prentice-Hall, New Jersey, 1989.
- [3] M. Aoki - *On Feedback Stabilizability of Decentralized Dynamic Systems*. Automatica, Vol.8, pp. 163-173, 1972.
- [4] G. Bitsoris - *On the Linear Decentralized Constrained Regulation Problem of Discrete-time Dynamical Systems*. Information and Decision Technologies, 14, pp. 229-239, North Holland, 1988.
- [5] P. F. Bregalda, A. A. F. de Oliveira, C. T. Bornstein - *Introdução à Programação Linear*. Editora Campus, Rio de Janeiro, 1988.
- [6] E. B. Castelan - *Sur l'invariance positive et la Commande sous Contraintes de Systèmes Linéaires Multivariables*. Thèse de l'Université Paul Sabatier (Toulouse, France).
- [7] C. T. Chen - *Linear Systems, Theory and Design*. Holt-Rinehart-Winston (HRW), 1984.
- [8] V. Chvátal - *Linear Programming*. W. H. Freeman and Company, USA, 1980.
- [9] J. P. Corfmat, A. S. Morse - *Decentralized Control of Linear Multivariable Systems*. Automatica, Vol.12, pp. 479-495, 1976.
- [10] E. J. Davison - *Recent Results on Decentralized Control of Large Scale Multivariable Systems*. Multivariable Technological Systems, 1th. IFAC, 1977.
- [11] P. Dorato, C. Abdallah, V. Cerone - *Linear-Quadratic Control: An Introduction*. Prentice Hall, USA, 1995.
- [12] F. D. Freitas - *Ajuste de Estabilizadores de Sistemas de Potência Via Controle Ótimo com Restrições Estruturais*. Dissertação de Doutorado, LABSPOT, Universidade Federal de Santa Catarina, 1995.

- [13] J. C. Geromel, P. L. D. Peres - *Decentralised Load-frequency Control*. IEE Proceedings, Vol.132, Pt.D, No.5, pp. 225-230, September 1985.
- [14] P. E. Gill, W. Murray, M. W. Wright - *Practical Optimization*. Academic Press, London, 1981.
- [15] J. M. Gomes da Silva - *Aplicação do Posicionamento Parcial de Autoestrutura ao Problema de Regulação sob Restrições nas Variáveis de Controle*. Dissertação de Mestrado, ICMI, Universidade Federal de Santa Catarina, 1994.
- [16] J. C. Hennet - *Discrete Time Constrained Systems*. Control and Dynamic Systems, vol. 71, pp.157-213, 1995.
- [17] R. A. Horn, C. R. Johnsons - *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, USA, 1991.
- [18] T. Kailath - *Linear Systems*. Prentice-Hall, New Jersey, 1980.
- [19] D. E. Kirk - *Optimal Control Theory: An Introduction*. Prentice-Hall, New Jersey, 1970.
- [20] D. G. Luenberger - *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley Publishing Company, California, 1973.
- [21] H. E. P. Mac-Leod - *Controle Ótimo Descentralizado para o Projeto e Coordenação de Sinais Estabilizadores em Sistemas Elétricos de Potência*. Dissertação de Doutorado, LABSPOT, Universidade Federal de Santa Catarina, 1992.
- [22] S. A. Marques - *Sistemas Lineares Sujeitos a Restrições: Regulação Robusta e Alocação Regional de Pólos*. Dissertação de Mestrado, LAC, Universidade Estadual de Campinas, 1994.
- [23] T. C. T. Rocha - *Domínios Positivamente Invariantes de Sistemas Lineares com Restrições nas Variáveis de Controle*. Dissertação de Mestrado, ICMI, Universidade Federal de Santa Catarina, 1994.
- [24] M. E. Sezer, D. D. Siljak - *Decentralized Control*. The Control Handbook - IEEE, CRC Press, pp.779-793, 1996.
- [25] L. S. Shieh, H. M. Dib, B. C. Meinnis - *Linear Quadratic Regulators with Eigenvalue Placement in a Vertical Strip*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-31, pp.241-243, 1986.
- [26] D. D. Siljak - *Large-scale Dynamic Systems: Stability and Structure*. North Holland, New York, 1978.
- [27] D. D. Siljak - *Decentralized Control of Complex Systems*. Academic Press, Cambridge, MA, 1991.

- [28] M. Tarokh - *Approach to Pole Assignment by Centralised and decentralised Output Feedback*. IEE Proceedings, Vol. 136, Pt. D, No.2, March 1989.
- [29] S. Wang, E. J. Davison - *On the Stabilization of Decentralized Control Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-18, No.5, pp. 473-478, October 1973.
- [30] W. M. Wonham - *Linear Multivariable Control, a Geometric Approach*. Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1985.



# Apêndice A

## Invariância Positiva de Conjuntos Poliedrais

Neste apêndice é feita uma breve revisão dos conceitos básicos de invariância positiva de conjuntos poliedrais [6], [15], [16], [23]. Antes de introduzir este conceito, são apresentadas algumas definições.

### A.1 Definições Básicas

Seja  $\mathcal{D}$  um conjunto não vazio qualquer dentro de um espaço Euclidiano, e seja  $x$  um ponto qualquer pertencente a este conjunto.

#### Definições

- *Conjunto Limitado:* O conjunto  $\mathcal{D}$  é limitado se para qualquer que seja a vizinhança  $\mathcal{U}$  do vetor  $x \in \mathcal{D}$ ,  $\exists \alpha > 0$  tal que  $\alpha x \in \mathcal{U}$ .
- *Ponto Limite:* O ponto  $x$  é um ponto limite do conjunto  $\mathcal{D}$  se cada vizinhança de  $x$  contém um ponto de  $\mathcal{D} - \{x\}$ .
- *Conjunto Fechado:* O conjunto  $\mathcal{D}$  é fechado se ele contém todos seus pontos limites.
- *Conjunto Compacto:* O conjunto  $\mathcal{D}$  é compacto se é fechado e limitado.
- *Conjunto Convexo:* O conjunto  $\mathcal{D}$  é convexo se:

$$(1 - \beta)x + \beta y \in \mathcal{D}, \text{ para } x, y \in \mathcal{D}, \text{ e } 0 \leq \beta \leq 1$$

- *Poliedro Convexo:* Todo poliedro convexo não nulo de  $\mathbb{R}^n$  pode ser caracterizado por uma matriz  $G \in \mathbb{R}^{q \times n}$  e por um vetor  $\omega \in \mathbb{R}^q$ ,  $\omega \neq 0$  com  $\omega_i \geq 0$ , definido por:

$$S(G, \omega) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n: -\omega \leq Gx \leq \omega\} \quad (\text{A.1})$$

□

## A.2 Invariância Positiva

Seja um sistema linear, invariante e contínuo no tempo, descrito por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t) \quad (\text{A.2})$$

com  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ .

Seja uma lei de controle por realimentação de estados, dada por:

$$u(t) = Kx(t), \quad K \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

que leva ao sistema em malha fechada:

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) \quad (\text{A.3})$$

*Um conjunto não vazio  $\mathcal{D}$  é positivamente invariante com respeito ao sistema linear em malha fechada (A.3), se para qualquer condição inicial pertencente ao conjunto  $\mathcal{D}$ , no tempo  $t = t_0$ , a trajetória do sistema permanece dentro deste conjunto  $\mathcal{D}$  para  $t > t_0$ .*

A invariância positiva do poliedro  $S(G, \omega)$  pode então ser caracterizada em termos das trajetórias do sistema (A.3) como segue:

**Proposição 5** *O poliedro convexo  $S(G, \omega)$  é um conjunto positivamente invariante do sistema (A.3) se e somente se:*

$$-\omega \leq Gx \leq \omega \Rightarrow -\omega \leq Ge^{(A+BK)t}x_0 \leq \omega, \quad \forall x \in S(G, \omega), \quad \forall t \geq 0$$

□

A invariância positiva do poliedro  $S(G, \omega)$  com respeito ao sistema linear em malha fechada (A.3) é equivalente à satisfação de duas relações matriciais conhecidas como relações de invariância positiva, como mostrado na proposição seguinte:

**Proposição 6** O poliedro  $S(G, \omega)$  é um conjunto positivamente invariante do sistema (A.3) se e somente se existe uma matriz  $H \in \mathbb{R}^{m \times g}$  tal que:

$$HG = G(A + BK) \quad (\text{A.4})$$

$$H\omega \leq 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\text{com } H_{ij} = \begin{cases} H_{ii} & \text{para } i = j \\ |H_{ij}| & \text{para } i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

□

Dado um poliedro convexo e compacto, como definido por (A.1), que contenha a origem no seu interior ( $\omega_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, g$ ), pode-se trabalhar sempre com sua forma normalizada:

$$S_n(G, \omega) = S(G_n, 1_g) \stackrel{\hat{=}}{=} \{x \in \mathbb{R}^m; -1_g \leq W^{-1}Gx \leq 1_g\}$$

onde  $W = \text{diag}\{\omega_i\}$ , é uma matriz diagonal com  $\omega_i > 0$ ;  $1_g$  é um vetor de dimensão  $g$  cujas componentes são todas iguais a 1;  $G_n \stackrel{\hat{=}}{=} W^{-1}G$ .

## A.2.1 Interpretação das Relações de Invariância Positiva

### • Primeira Relação

A relação de invariância (A.4) pode ser interpretada em termos de  $(A + BK)$ -invariância do subespaço  $\mathcal{Ker}(G) = \{x \in \mathbb{R}^m; Gx = 0\}$ , ou seja:

$$\exists H; HG = G(A + BK) \iff \mathcal{Ker}(G) \text{ é } (A + BK)\text{-invariante}$$

Assim, seja  $V_o$  uma matriz cujas colunas são os autovetores de  $(A + BK)$ , e tais que formam uma base de  $\mathcal{Ker}(G)$ , então:

$$KV_o = 0$$

e portanto:

$$(A + BK)V_o = AV_o = \Lambda_o V_o$$

sendo  $\Lambda_o$  a representação da matriz  $A$  na forma canônica de Jordan associada ao subespaço  $\mathcal{Ker}(G)$ .

No caso de  $g \geq n$ , com  $\text{rank}(G) = n$ , tem-se  $\mathcal{Ker}(G) = 0$  e portanto  $V_o = 0$ . Assim, a relação anterior implica em que os autovalores e autovetores associados de malha aberta são modificados na malha fechada. Portanto, neste caso a relação de invariância (A.4) é equivalente a uma alocação de pólos do sistema (A.2).

• Segunda Relação

Trabalhando com o poliedro em sua forma normalizada  $S(G_n, 1_g)$ , pode-se expressar e interpretar a relação (A.5) através do conceito de *norma logarítmica* ou *medida infinita de matriz*,  $\mu_\infty(\cdot)$ . Dada uma matriz  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , tem-se que:

$$\mu_\infty(F) = \max_i \{F_{ii} + F_{ij}\}$$

e por propriedades de normas logarítmicas:

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} \leq \mu_\infty(F), \forall \lambda_i \in \sigma(F)$$

Portanto, a relação (A.5) pode ser reescrita como:

$$\mu_\infty(H) \leq 0$$

e por propriedades das normas logarítmicas, *os autovalores de  $H$  terão todos seus partes reais não-positivas*:

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} \leq 0, \forall \lambda_i \in \sigma(H)$$

Em particular, se (A.5) é estritamente verificada, garante-se a estabilidade assintótica dos autovalores de  $H$ . As propriedades espectrais de  $H$  também podem ser obtidas a partir dos conceitos de matriz essencialmente não negativa ou M- matriz.

Portanto, no caso de  $g \geq n$ , com  $\operatorname{rank}(G) = n$ , o espectro de  $(A + BK)$  estará contido (quando  $g > n$ ) ou será igual (quando  $g = n$ ) ao espectro de  $H$ :

$$\sigma(A + BK) \subseteq \sigma(H)$$

e dado que a estabilidade dos autovalores de  $H$  é garantida pela relação (A.5), então é garantida a estabilidade dos autovalores de  $(A + BK)$ .

# Apêndice B

## Programação Linear e Produto de Kronecker

Neste apêndice é feita uma breve revisão da programação linear [5], [8], [14], [20] e do Produto de Kronecker [17].

### B.1 Programação Linear

A programação linear tem por objetivo encontrar a melhor solução para problemas que tenham seus modelos representados por expressões lineares. É um programa matemático onde a *função objetivo*, a maximizar ou minimizar, é linear nas variáveis desconhecidas e as *restrições*, que devem ser respeitadas, consistem de equações e inequações lineares.

As restrições representam normalmente limitações de recursos disponíveis ou exigências e condições que devem ser satisfeitas no problema. Essas restrições do modelo determinam uma região convexa conhecida como *conjunto de soluções factíveis*. A melhor das soluções factíveis, que maximiza ou minimiza a função objetivo, é conhecida como *solução ótima*.

A forma exata das restrições pode variar de um problema para outro, mas qualquer problema de programação linear pode ser transformado na *forma padrão*:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c'x \\ \text{s.a.:} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{B.1}$$

onde  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $m < n$ .

A desigualdade vetorial  $x \geq 0$  significa que cada componente do vetor  $x$  é não-negativa.

Para todo problema de programação linear com restrições  $Ax = b$ ,  $Ax \leq b$  ou  $Ax \geq b$ , tem-se:

- O mínimo ou máximo é alcançado em um dos vértices do conjunto factível. Neste caso o conjunto pode ser limitado ou ilimitado.
- O mínimo é  $-\infty$ , ou o máximo é  $+\infty$ . Neste caso o conjunto factível é ilimitado.
- O conjunto factível é vazio. Nenhum vetor satisfaz todas as restrições.

## B.2 Produto de Kronecker

O produto de Kronecker é uma ferramenta para reescrever diversos tipos de equações matriciais lineares de modo a obter uma forma equivalente. Em particular, pode ser utilizado para expressar um problema de programação linear com restrições lineares na forma padrão.

O produto de Kronecker é definido para duas matrizes de tamanhos arbitrários sobre qualquer anel Real ou Complexo. Sem perda de generalidade, será considerado o anel dos Reais ( $\mathbb{R}$ ):

O produto de Kronecker de  $A = [A_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $B = [B_{ij}] \in \mathbb{R}^{p \times q}$  é denotado por  $A \otimes B$  e é definido como sendo a matriz bloco:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} A_{11}B & \cdots & A_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}B & \cdots & A_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}$$

Em geral, tem-se  $A \otimes B \neq B \otimes A$ .

A cada matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é associada o vetor  $vec(A)$ , definido assim:

$$vec(A) = \begin{bmatrix} A_{11} \\ \vdots \\ A_{m1} \\ A_{12} \\ \vdots \\ A_{m2} \\ \vdots \\ \vdots \\ A_{1n} \\ \vdots \\ A_{mn} \end{bmatrix}$$

Algumas propriedades básicas do produto de Kronecker, são:

- $I_m \otimes I_n = I_{mn}$ ,  $A \otimes 0 = 0$ ,  $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ;
- $(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\beta B)$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ ;
- $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$ ,  $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ ;
- $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$ ,  $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{r \times s}$ ;
- $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$ ,  $\forall A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times q}$ ;
- $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$ ,  $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B, C \in \mathbb{R}^{p \times q}$ .

Para obter uma representação conveniente para muitas transformações matriciais lineares e equações matriciais lineares, uma observação chave é:

Sejam as matrizes  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$  e  $C \in \mathbb{R}^{r \times s}$  dadas e seja a matriz  $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$  desconhecida. A equação matricial:

$$AXB = C$$

é equivalente ao sistema de  $qr$  equações com  $np$  variáveis desconhecidas:

$$(B^T \otimes A) \text{vec}(X) = \text{vec}(C)$$

Algumas equações matriciais lineares reescritas usando o produto de Kronecker, são:

- $AX = B$ , é equivalente a:  $(I \otimes A) \text{vec}(X) = \text{vec}(B)$ ;
- $AX + XB = C$ , é equivalente a:  $[(I \otimes A) + (B^T \otimes I)] \text{vec}(X) = \text{vec}(C)$ ;
- $AXB = C$ , é equivalente a:  $(B^T \otimes A) \text{vec}(X) = \text{vec}(C)$ ;
- $A_1 X B_1 + \dots + A_k X B_k = C$ , é equivalente a:  $[B_1^T \otimes A_1 + \dots + B_k^T \otimes A_k] \text{vec}(X) = \text{vec}(C)$ ;
- $AX + YB = C$ , é equivalente a:  $(I \otimes A) \text{vec}(X) + (B^T \otimes I) \text{vec}(Y) = \text{vec}(C)$ .