

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
ELÉTRICA

Formulação LMI para Problemas
de Performance e Robustez

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE
SANTA CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM ENGENHARIA ELÉTRICA

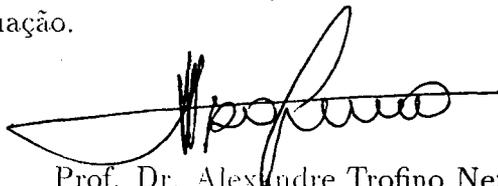
César Augusto Rorato Crusius

11 de maio de 1996

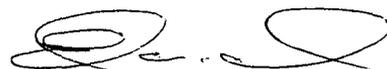
Formulação LMI para Problemas de Performance e Robustez

César Augusto Rorato Crusius

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de **Mestre em Engenharia** na especialidade **Engenharia Elétrica**, área de concentração **Sistemas de Controle**, e aprovada em sua forma final pelo curso de Pós-Graduação.



Prof. Dr. Alexandre Trofino Neto
Orientador



Prof. Dr. Enio Valmor Kassick
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

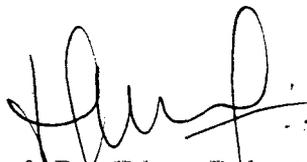
Banca Examinadora



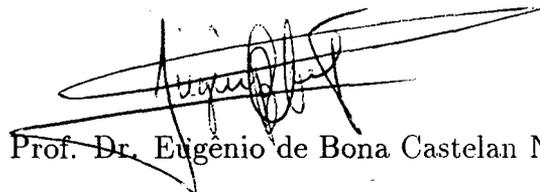
Prof. Dr. Alexandre Trofino Neto
Orientador



Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres



Prof. Dr. Edson Roberto de Pieri



Prof. Dr. Eugênio de Bona Castelan Neto



Prof. Dr. Antônio Augusto Rodrigues Coelho

à Cristina.

à Yeda, ao Carlos e à Tarsila.

Agradecimentos

Agradeço principalmente à minha família, Carlos, Yeda, Tarsila e Cristina, pelo apoio, incentivo e compreensão que tiveram ao longo de toda a minha vida. Sua participação foi fundamental para que eu tivesse todas as condições de desenvolver minhas potencialidades.

Agradeço ao meu orientador Alexandre Trofino pela amizade, pelas discussões frutíferas e pela confiança em minha capacidade para realizar um trabalho tão extenso e desafiador.

Ao amigo André Hentz um agradecimento especial pelo companheirismo, pelas discussões e pela grande amizade. Tenho certeza que sua grande capacidade refletiu-se sobre esse trabalho.

Aos companheiros Carlos Maziero e Edson De Pieri pelas agradáveis horas de convívio durante esses dois anos.

Ao professor Ricardo Reis por ter me dado a primeira oportunidade de trabalhar como pesquisador. Aos professores Tristão e Nelson pelo incentivo e inspiração.

A todos os que permitiram ao CNPq financiar essa jornada.

Por fim agradeço a várias pessoas e grupos que possibilitaram a realização desse trabalho: Linus Torvalds pelo sistema operacional Linux, Donald Knuth pelo T_EX, Leslie Lamport pelo L^AT_EX, Robert Nation pelo gerenciador de janelas FVWM, John Davis pelo editor JED, X Consortium pelo ambiente de janelas X, Free Software Foundation pelo projeto GNU, Scilab Group pelo programa Scilab e a muitos mais.

Sumário

Resumo	ix
Abstract	xi
Notação	xiii
1 Introdução	1
1.1 Definição e um pouco de história	2
1.2 Propriedades de LMI	3
1.2.1 Linearidade	3
1.2.2 Convexidade	4
1.2.3 Complementos de Schur	4
1.2.4 Relação com equação de Riccati	5
1.3 Métodos de solução	6
1.3.1 Método projetivo - Algoritmo de Nemirovskii	6
1.3.2 Método primal-dual	7
1.4 Inequações matriciais bilineares	10
2 Conceitos básicos	11
2.1 Introdução	11
2.2 Setores	11
2.3 Descrição de incertezas	14
2.3.1 Descrição por intervalos	14
2.3.2 Incertezas politópicas	16
2.3.3 Limitada em norma	16
2.3.4 <i>Matching conditions</i>	16
2.4 Definições de Estabilidade	17
2.4.1 Abordagem Lyapunov	17
2.4.2 Abordagem I/O	19
2.4.3 Relação Lyapunov-I/O	20
2.5 Estabilidade de sistemas incertos	21
2.6 Positividade e passividade	22
2.6.1 Definições no domínio tempo	23
2.6.2 Definições no domínio frequência	25
2.6.3 Lema da positividade real	26
2.6.4 Verificações LMI	27
2.7 Conexão positividade- \mathcal{H}_∞	28

3	CrITÉrios de Estabilidade para Sistemas Lur'e	31
3.1	Introdução	31
3.1.1	Estabilidade Absoluta	31
3.1.2	CrITÉrio do pequeno ganho	32
3.2	CrITÉrio do CÍrculo	33
3.2.1	Introdução	33
3.2.2	Caso monovariável	33
3.2.3	Caso multivariável	35
3.2.4	SÍntese	36
3.3	CrITÉrio de Popov	37
3.3.1	Introdução	37
3.3.2	Caso monovariável	38
3.3.3	Caso multivariável	40
3.3.4	SÍntese	42
3.4	CrITÉrio de Brockett e Willems	42
3.4.1	O crITÉrio de estabilidade	42
3.4.2	Formulação LMI	43
3.5	CrITÉrio de Zames e Falb	44
3.5.1	Introdução	44
3.5.2	A idÉia de multiplicadores	44
3.5.3	O crITÉrio de estabilidade	46
3.5.4	Formulação LMI	47
4	Performance e Restrições Estruturais	53
4.1	Introdução	53
4.1.1	Realimentação de estados	54
4.1.2	Extensão para realimentação de saída	54
4.1.3	Extensão para realimentação de saída descentralizada	55
4.1.4	Aplicação na síntese via crITÉrio do círculo	55
4.2	Realimentação de saída	56
4.2.1	LQR e realimentação de saída	56
4.2.2	Problema Restrito de Lyapunov	58
4.2.3	Uma nova abordagem	61
4.3	O problema \mathcal{H}_2	63
4.3.1	A norma em \mathcal{H}_2	63
4.3.2	Definição do problema	64
4.3.3	Realimentação de estados	64
4.3.4	Compensador de ordem completa	65
4.4	O Problema \mathcal{H}_∞	67
4.4.1	A norma em \mathcal{H}_∞	67
4.4.2	Definição do problema	68
4.4.3	Realimentação de estados	69
4.4.4	Compensador de ordem completa	69
4.5	O Problema $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Misto	72
4.5.1	Definição do problema	72
4.5.2	Realimentação de estados	73

5	Conclusões	75
A	Análise convexa	77
A.1	Conjuntos afins	77
A.2	Conjuntos convexos	78
A.3	Funções convexas	79
B	Espaços vetoriais	83
B.1	Espaços de Banach	83
B.2	Espaços de Hilbert	85
B.3	Medida de Lebesgue	86
B.4	Funções Lebesgue mensuráveis	88
B.5	Integral de Lebesgue	88
B.5.1	Funções simples	89
B.5.2	Funções limitadas	89
B.5.3	Funções ilimitadas	91
B.5.4	Integral de Lebesgue e de Riemann	92
B.6	Espaços L_p e \mathcal{L}_p	92
C	Resultados complementares	95
C.1	Matrizes	95
C.1.1	Inversas Generalizadas	95
C.2	Transformação de setores (loop shifting)	96
C.3	Zeros de transmissão	97
C.3.1	Verificação matricial	97
C.3.2	Relação $\det(CB) \neq 0$ e zeros de transmissão	97
C.4	Passividade e positividade	98
C.4.1	Relaxamento da exigência de observabilidade	98
C.4.2	Verificação de positividade no eixo imaginário	98
C.4.3	Prova da verificação LMI para passividade	99
C.4.4	Prova da verificação LMI para passividade estrita	100
C.4.5	Outras definições de passividade estrita	100
C.4.6	Auto-dualidade e parametrização de passividade	100
C.5	Realimentação de saída	102
C.6	Exemplos	102
C.6.1	Forma canônica	102
C.6.2	Estabilização	103
C.6.3	Critério do círculo	104
C.6.4	Problema \mathcal{H}_2	105
	Referências Bibliográficas	107

Lista de Figuras

2.1	Condição de setor monovariável	12
2.2	Região para condição de conicidade	13
2.3	Relações entre conceitos de estabilidade	22
3.1	Sistema realimentado	32
3.2	Critério do círculo simplificado	34
3.3	Interpretação gráfica do critério de Popov	39
3.4	Remoção de multiplicador do sistema	45
3.5	Efeito do multiplicador	46
4.1	Planta	53
4.2	Estimador de estados	66
4.3	Sistema para síntese \mathcal{H}_∞	70
4.4	Planta para o problema misto	72
A.1	Epígrafo de uma função convexa	80
B.1	Somas para integral de Lebesgue	90
B.2	Divisão de $f(x)$	91
C.1	Transformação de setores: (a) Sistema original, $\phi \in [K_1, K_2]$ (b) Primeira transformação, $\phi_1 \in [0, K_2 - K_1]$ (c) Transformação final, $\phi_2 \in [0, \infty)$	96

Resumo

Esse trabalho trata vários problemas de controle sob a abordagem de inequações matriciais lineares (LMI). Um enfoque didático é dado para a apresentação dos problemas e conceitos envolvidos. Inicialmente, conceitos básicos para a compreensão dos problemas são tratados. A partir desses conceitos básicos são tratados os problemas de controle em dois blocos: primeiramente trata-se a estabilidade de sistemas do tipo Lur'e, uma teoria que normalmente é relacionada com sistemas não lineares. São tratados os critérios do círculo, de Popov, de Brockett e Willems e de Zames e Falb. No bloco seguinte tratam-se problemas normalmente relacionados com sistemas lineares. Primeiramente são apresentadas algumas abordagens convexas existentes na literatura para o problema de realimentação estática de estados e de saída. A seguir propõe-se uma nova abordagem para esses problemas via LMI. Na última parte do trabalho os problemas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ são abordados e o problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ é tratado como um exemplo da versatilidade da abordagem LMI.

Abstract

This dissertation is focused mainly on the solution of various control problems via linear matrix inequalities (LMI). A didactic approach was taken for the presentation of every topic of this work. First we give some basic results and concepts which are necessary to the development of the control problems theory. Given these results, the control problems are presented in two blocks: the first block deal with the stability of Lur'e systems, a theory commonly associated with non linear systems. We focus on the circle, Popov, Brockett and Willems, and Zames and Falb stability criteria. The second block deal with problems more commonly associated with linear systems. First we present some known convex solutions to the state and output feedback problems and then we derive a new LMI approach to these problems. In the last part of the work the LMI solutions for the \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ problems are presented and the $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ problem solution is furnished as an example of the versatility of the LMI approach.

Notação

X'	Transposta de X .
X^*	Complexa conjugada transposta de X .
X^+	Pseudo-inversa de Moore-Penrose de X (página 95).
$X > 0$ ($X \geq 0$)	X é positiva (semi) definida.
$\mathcal{R}(X)$	Imagem de X .
$\mathcal{N}(X)$	Núcleo de X .
\mathcal{N}_X	Matriz posto completo cujas colunas formam uma base para $\mathcal{N}(X)$.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto interno (página 85).
$\ \cdot\ $	Norma (página 83).
$\Re[\cdot]$	Parte real.
$\Im[\cdot]$	Parte imaginária.
$\left[\begin{array}{c c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$	Matriz de transferência $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$.
$G(s) \geq 0$	$G(s)$ é passiva (página 26).
$G(s) > 0$	$G(s)$ é fortemente positiva real (página 27).
$G(s) \sim (A, B, C, D)$	Sistema $G(s)$ com realização (A, B, C, D) .

Capítulo 1

Introdução

A teoria de controle evoluiu consideravelmente ao longo das últimas décadas, apresentando soluções para vários tipos de problemas. Essas soluções faziam uso de um ferramental diverso, que envolvia problemas de otimização, equações de Riccati, teoria estatística e outras mais. Certos problemas continuam, porém, sem solução geral, como por exemplo o problema da realimentação descentralizada de saída.

Recentemente, o uso de inequações matriciais lineares (LMI) tem se revelado muito eficiente na procura de soluções para problemas de controle. Além de possibilitar uma solução numérica através de métodos bastante eficientes, a formulação de problemas de controle na forma de inequações matriciais lineares permite o tratamento simultâneo de vários requisitos de desempenho e robustez, o que não era possível (de modo geral) através de métodos utilizados anteriormente. Devido à sua flexibilidade e eficiência numérica, a abordagem de problemas de controle via inequações matriciais lineares tem se tornado um tema de pesquisa bastante explorado.

A principal motivação desse trabalho é colocar de forma sintética e didática vários resultados obtidos a partir dessa abordagem. Os problemas tratados são primeiramente apresentados sob um ponto de vista mais “clássico” para a seguir serem abordados através de LMI. Devido à ampla gama de problemas tratados, o trabalho é dividido em várias partes organizadas da seguinte maneira:

Neste capítulo seguimos com uma breve passagem por vários tópicos sobre LMI em si. No capítulo 2 introduzimos vários conceitos e alguns resultados necessários para o desenvolvimento dos problemas de controle que seguem. De especial interesse são as seções sobre passividade e descrição de incertezas.

No capítulo 3 tratamos da estabilidade de sistemas do tipo Lur’e. São abordados os critérios do círculo, de Popov, de Brockett e Willems e de Zames e Falb. Esses resultados são normalmente tratados sob uma abordagem não linear, mas como poderemos notar a solução LMI para esses problemas é bastante similar àquela fornecida para outros problemas, como por exemplo o problema \mathcal{H}_2 .

No capítulo 4 tratamos de problemas de performance e restrições estruturais. Primeiramente é abordado o problema da realimentação estática de saída. Uma abordagem intuitiva para o tratamento via LMI desse problema é fornecida através do tratamento de sistemas lineares onde $C = [I \ 0]$. Essa abordagem é então estendida para que se possam tratar sistemas com qualquer representação de estados. De posse desse resultado são tratados os problemas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , e a seguir as soluções desses problemas são combinadas

para o tratamento do problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.

Finalizamos o trabalho com três apêndices. No primeiro damos uma breve passagem pela teoria de análise convexa. No segundo abordamos espaços vetoriais, com ênfase na teoria de Lebesgue que, apesar de necessária, raramente é tratada nas referências. O terceiro contém resultados diversos que, apesar de interessantes e importantes, tornariam o texto principal muito extenso e moroso. Esses resultados são apresentados em um apêndice para que o leitor interessado não precise recorrer a outras referências constantemente.

1.1 Definição e um pouco de história

Este trabalho tem como tema principal a aplicação de LMI em problemas de controle. Mas o que é uma LMI? Uma LMI é uma *Inequação Matricial Linear*¹, uma inequação na seguinte forma:

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m F_i x_i > 0 \quad (1.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^m$ é a variável e $F_j = F_j' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes constantes. O problema de encontrar uma solução x tal que $F(x) > 0$ é chamado um *problema de factibilidade LMI*. Embora a formulação pareça bastante específica, veremos que ela encontra muitas aplicações na teoria de controle.

A utilização de LMI no ramo de controle é bastante antiga. Já em 1890 Lyapunov (ver [43] para uma tradução de seu trabalho original) utilizou uma LMI para determinar a estabilidade de sistemas lineares, no que talvez seja a mais famosa LMI utilizada em controle²:

$$A'P + PA < 0$$

Como sabemos, e Lyapunov provou, para verificarmos se essa LMI tem solução $P > 0$ basta escolhermos *qualquer* matriz $Q > 0$ e resolvermos a equação $A'P + PA + Q = 0$. Se encontrarmos $P > 0$, então a LMI tem solução. Caso contrário, não existe P positiva definida que satisfaça a LMI.

Essa abordagem do problema de LMI, a de tentar resolvê-las de forma algébrica, foi a principal durante muito tempo. Talvez isso se deva ao fato de que algoritmos para resolvê-las de forma eficiente não estivessem disponíveis. Não obstante, as propriedades dessas inequações foram estudadas por muitos autores. Willems, em 1971 [64], estudando o clássico problema LQR associado à equação de Riccati $A'P + PA - (PB + S')R^{-1}(S + B'P) + Q = 0$, verificou que ele poderia ser resolvido através da LMI

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + Q & PB + S' \\ S + B'P & R \end{bmatrix} \geq 0$$

Vários outros problemas, desde que expressos na forma de uma equação de Riccati, podem ser colocados de forma automática como uma LMI, como será visto na

¹Mais conhecidas pela sigla do inglês *Linear Matrix Inequalities*.

²Não é difícil transformarmos uma LMI com variáveis matriciais na forma (1.1). Para um exemplo de como fazê-lo consulte a seção C.6.

seção 1.2, através do complemento de Schur. Assim, resultados como o da verificação da positividade real [2] podem ser facilmente colocados nessa formulação.

Uma grande vantagem de colocar problemas na forma LMI é a de que vários problemas podem ser resolvidos conjuntamente: se possuímos k restrições na forma LMI, é fácil notar que um problema equivalente é dado por

$$F(x) = \text{diag}\{F_0(x), F_1(x), \dots, F_k(x)\} > 0,$$

ou seja, exigir que vários problemas na forma de uma LMI sejam satisfeitos simultaneamente é também um problema na forma de uma LMI.

Um grande passo para a popularização de LMI foi a descoberta de algoritmos eficientes para encontrar a solução das mesmas. Algoritmos como o de Nemirovskii [48] são capazes de resolver problemas envolvendo LMI em um espaço de tempo bastante curto em comparação com os métodos antigos. Aos poucos programas matemáticos começam a incluir esses algoritmos, tornando-os disponíveis para os usuários em geral. Durante o desenvolvimento desse trabalho surgiram inclusive “pacotes” computacionais destinados especificamente à solução de LMI. Para a solução dos exemplos desse trabalho foi utilizado o programa *Scilab*, que inclui em sua distribuição um desses pacotes, e utiliza o método primal-dual para a solução das LMI. Há bem pouco tempo atrás o trabalho de solução dessas LMI seria muito maior, incluindo implementação de algoritmos, entre outras coisas.

1.2 Propriedades de LMI

Utilizaremos aqui algumas noções sobre funções e conjuntos convexos. Caso o leitor não esteja familiarizado com essas noções deve consultar antes o apêndice A.

1.2.1 Linearidade

Em primeiro lugar devemos ressaltar a diferença entre a *inequação* $F(x) > 0$ e a *função* $F(x)$. A inequação é claramente não linear em x , pois equivale a exigir que os autovalores de $F(x)$ sejam positivos, e os autovalores de $F(x)$ são, salvo estruturas muito peculiares, altamente não lineares com respeito à variável x . Tratemos então da função $F(x)$.

Como podemos notar, a função $F(x)$ colocada na forma (1.1) *não é linear em* x . De fato, podemos chegar a essa conclusão notando que $F(0) = F_0 \neq 0$. Na verdade, a equação (1.1) é afim em x . Dizemos que uma relação é *afim* quando ela mapeia retas paralelas em retas paralelas e pontos finitos em pontos finitos. O nome LMI vem na verdade da seguinte inequação:

$$\mathcal{F}(x_0, x) = \mathcal{F}(\tilde{x}) \triangleq F_0 x_0 + \sum_{i=1}^m F_i x_i > 0 \quad (1.2)$$

essa sim com \mathcal{F} linear em $\tilde{x} = [x_0 \ x']'$. O que consegue-se mostrar é que qualquer problema na forma (1.1) pode ser representado na forma (1.2) através de uma simples transformação:

Lema 1 *Seja $\mathcal{F}(\tilde{x}) = \text{diag}\{x_0, \mathcal{F}(\tilde{x})\}$. Então \tilde{x} resolve $\mathcal{F}(\tilde{x}) > 0$ se e somente se tem-se $F(x/x_0) > 0$.*

A prova é como segue: se $F(x) > 0$ tem solução, então $\mathcal{F}(\hat{x}) > 0$ também tem com $\hat{x} = [1 \ x']'$. Por outro lado, se $\mathcal{F}(\hat{x}) > 0$ tem solução, então $F(x/x_0) > 0$. Cabe notar que, se $\mathcal{F}(x_0, x) > 0$ tem solução com $x_0 = 0$, então sempre existirá uma outra solução tal que $x_0 \neq 0$, bastando multiplicar x por um escalar positivo grande o suficiente. ■

Assim, a inequação (1.1) é comumente chamada de LMI, apesar de não o ser *strictu sensu*. Um nome mais correto para a definição seria *Inequação Matricial Afim*, nome praticamente não utilizado na literatura.

1.2.2 Convexidade

Talvez a propriedade mais importante das LMI seja a de que o conjunto solução é convexo. A prova é como segue³: sejam y e z dois pontos que satisfazem a inequação (1.1). Seja $x = \alpha y + (1 - \alpha)z$, onde $0 \leq \alpha \leq 1$. Substituindo na definição temos

$$\begin{aligned} F_0 + \sum_{i=1}^m F_i x_i &= F_0 + \sum_{i=1}^m F_i (\alpha y_i + (1 - \alpha)z_i) = \\ &= F_0 + \sum_{i=1}^m F_i z_i + \alpha \sum_{i=1}^m F_i (y_i - z_i) = \\ (1 - \alpha) \left(F_0 + \sum_{i=1}^m F_i z_i \right) &+ \alpha \left(F_0 + \sum_{i=1}^m F_i y_i \right) > 0 \end{aligned}$$

e a prova está completa, pois concluímos que x também é solução da LMI. Essa propriedade é fundamental no desenvolvimento e aplicação de algoritmos eficientes para a solução de LMI.

1.2.3 Complementos de Schur

Os complementos de Schur na verdade não são uma propriedade das LMI, mas sim uma propriedade de matrizes que é extremamente útil em várias aplicações. Os resultados que seguem podem ser encontrados em [10], entre outros. A prova pode ser inferida de resultados da teoria das matrizes [23], e não será feita aqui.

Lema 2 (*Complemento de Schur*) *Seja R^+ a pseudo-inversa da matriz R . As seguintes inequações são equivalentes:*

- $\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \geq 0$
- $R \geq 0, \quad Q - SR^+S' \geq 0, \quad S(I - RR^+) = 0$

Lema 3 (*Complemento de Schur para inequações estritas*) *As seguintes inequações são equivalentes:*

- $\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} > 0$

³Na verdade, basta notarmos que *afinidade* implica *convexidade*. A prova que forneceremos é mais rigorosa mas também simples.

- $R > 0, \quad Q - SR^{-1}S' > 0$

Um ponto interessante a ser notado é que o complemento de Schur não se aplica à expressão $Q + SR^{-1}S' > 0$ a menos que $R < 0$.

1.2.4 Relação com equação de Riccati

Como visto na seção anterior, é fácil transformar uma inequação de Riccati em uma LMI. Mas o que acontece com equações de Riccati? A relação entre as duas já havia sido esboçada em [64], mas um resultado mais completo e abrangente, tanto para o caso contínuo quanto para o caso discreto, pode ser encontrado em [52]. Consideremos a equação

$$\mathcal{R}(P) = A'P + PA - (C' + PB)R^{-1}(C + B'P) + Q \quad (1.3)$$

com as seguintes suposições:

- $Q = Q'$
- $P = P'$
- $R = R' > 0$
- O par (A, B) é estabilizável.

Dizemos que uma solução P_+ da equação $\mathcal{R}(P_+) = 0$ é *máxima* se, para toda P tal que $\mathcal{R}(P) = 0$ tem-se $P_+ \geq P$. Uma das propriedades da equação $\mathcal{R}(P) = 0$ é a de que se existir uma solução máxima, então essa solução é única. A relação entre a equação e a inequação de Riccati é fornecida pelo seguinte resultado

Teorema 4 *Seja $\mathcal{R}(P)$ definido como anteriormente com as suposições já feitas. Seja o conjunto solução \mathcal{S} definido como $\mathcal{S} \triangleq \{P : P = P', \mathcal{R}(P) \geq 0\}$. Então, se $\mathcal{S} \neq \emptyset$,*

- *Existe $P_+ \in \mathcal{S}$ que satisfaz $\mathcal{R}(P_+) = 0$, e ainda P_+ é o elemento máximo do conjunto \mathcal{S} .*
- *Todos os autovalores de $A - BR^{-1}(C + B'P_+)$ estão no semi-plano fechado esquerdo.*

Para a prova, consultar [52]. Uma condição suficiente para que $\mathcal{S} \neq \emptyset$ é a conhecida

$$\begin{bmatrix} Q & C' \\ C & R \end{bmatrix} \geq 0,$$

que garante ainda que $P_+ \geq 0$. A prova é simples: se a condição é satisfeita, então $\mathcal{R}(0) = Q - C'R^{-1}C \geq 0$ (por Schur), e portanto $0 \in \mathcal{S}$. Do teorema anterior segue-se que $P_+ \geq 0$.

1.3 Métodos de solução

Existem vários métodos numéricos para a solução de LMI. Boa parte deles deriva diretamente de métodos para a solução de problemas lineares. Apesar de muito estudados, não existiam, até pouco tempo, métodos realmente eficientes para a solução desses problemas. Em geral, os métodos existentes têm complexidade exponencial⁴, e por isso se tornavam inaplicáveis mesmo em problemas de média dimensão.

Recentemente, porém, surgiram algoritmos de complexidade polinomial para a solução desses problemas. Esses algoritmos propiciaram, pela primeira vez, a possibilidade de aplicação de LMI em problemas de grande dimensão. Vamos descrever aqui o método primal-dual e o método projetivo para a solução de LMI. Os exemplos desse trabalho foram resolvidos com o método primal-dual implementado no programa *Scilab*. O método projetivo é utilizado no programa MATLAB.

O material dessa seção não é necessário para a compreensão do restante do trabalho, e sua leitura pode ser omitida sem prejuízo para o leitor. O que seguem são breves descrições para que o leitor interessado possa ter uma idéia do funcionamento dos métodos.

1.3.1 Método projetivo - Algoritmo de Nemirovskii

Descreveremos aqui a utilização do método projetivo para a solução de LMI, mais especificamente para a solução do problema (1.1). O algoritmo descrito aqui pode ser encontrado em [48], onde os autores também solucionam o problema de otimização linear. Daremos nessa seção uma descrição com mais ênfase na idéia do método, e o leitor interessado em provas as encontrará em [48]. Antes de descrevermos o método necessitamos de algumas definições:

- \mathcal{S} é um espaço de matrizes simétricas com uma estrutura bloco-diagonal definida. O produto escalar nesse espaço é definido, para $P > 0$, como $\langle X, Y \rangle_P = \text{tr}(PXPY)$. A respectiva norma é $\|X\|_P = (\text{tr}(PXPX))^{1/2}$. Note que, se $P = I$, então teremos a norma Frobenius para o espaço.
- \mathcal{P} é o cone de matrizes positivas semidefinidas contido em \mathcal{S} . Denotamos o *interior*⁵ de \mathcal{P} como $\text{int } \mathcal{P}$.
- Associamos à definição de $F(x)$ o mapa linear $x \mapsto \mathcal{F}x$ de \mathbb{R}^n em \mathcal{S} tal que $F(x) = \mathcal{F}x + F_0$. Pode-se mostrar que, definindo-se uma nova variável $u = [x' \ \sigma]'$ pode-se transformar o problema (1.1) em um problema do tipo $\mathcal{U}u > 0$. Assim, por simplicidade, vamos sempre considerar que o problema (1.1) está representado da forma $\mathcal{F}x > 0$. Chamaremos de E a imagem de \mathcal{F} .

⁴Sem grande rigorismo podemos dizer que um método tem *complexidade exponencial* se o tempo necessário para a solução pode ser expresso em algo como $t = a^x$, onde a é constante e x é o número de variáveis envolvidas. Da mesma forma, um método tem *complexidade polinomial* se o tempo pode ser expresso como $t = p(x)$, onde p é um polinômio em x .

⁵O conjunto das matrizes positivas definidas em \mathcal{S} .

- *Projeção ortogonal na métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$* : dado $X \in \mathcal{S}$, a sua projeção X^+ em E é definida como sendo a única solução que satisfaz a condição

$$\forall Y \in E, \langle X^+ - X, Y \rangle_P = 0$$

e pode ser calculada, para $X > 0$, pelo problema de mínimos quadráticos

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|\mathcal{F}x - X\|_P.$$

Temos agora condições de introduzir a idéia básica do algoritmo: dado o cone \mathcal{P} com vértice na origem e E que passe pela origem, encontrar uma matriz X na intersecção de E e $\text{int } \mathcal{P}$. Esse problema possui interessantes propriedades geométricas [48]. O ponto factível é dado então pela solução de $\mathcal{F}x = X$.

A solução para esse problema pode ser obtida através do seguinte algoritmo:

1. Inicializa-se $k = 0$ e $X_k \in \mathcal{P}$, e.g., $X_k = I$.
2. Calcula-se a projeção X_k^+ na métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X_k^{-1}}$.
3. Se $X_k^+ > 0$ o algoritmo está terminado e uma solução factível é fornecida pela solução de $\mathcal{F}x = X_k^+$.
4. Se não, calcula-se

$$X_{k+1}^{-1} = X_k^{-1} - \gamma_k X_k^{-1} (X_k^+ - X_k) X_k^{-1}$$

onde γ_k é um escalar que faz com que $\det(X_{k+1}^{-1}) \geq \frac{\epsilon}{2} \det(X_k^{-1})$. Faz-se $k = k + 1$ e volta-se ao passo 2.

Prova-se que, se o problema for factível, então o algoritmo encontra uma solução em um número finito de passos. Se não for, então o algoritmo em princípio não tem fim, a não ser que um critério de parada seja introduzido. O valor γ_k do algoritmo pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$\gamma_k = \frac{1}{1 + \max \left| \lambda \left(X_k^{-1 \frac{1}{2}} (X_k^+ - X_k) X_k^{-1 \frac{1}{2}} \right) \right|}$$

onde $\lambda(\cdot)$ é o conjunto de autovalores de determinada matriz.

Uma das vantagens do algoritmo de Nemirovskii é que, para uma precisão fixada, existe um critério de parada que garante que o problema *não tem solução*, ou seja, que uma solução pode existir mas que está além da precisão confiável.

1.3.2 Método primal-dual

Descreveremos brevemente o método primal-dual de otimização tratado em [61]. Não entraremos em detalhes, pois esse não é o objetivo desse trabalho. Apresentaremos apenas o desenvolvimento principal, que fornecerá conhecimento suficiente sobre o método e as condições que devem ser satisfeitas para que possamos aplicá-lo. Esses conhecimentos se revelam úteis quando utilizamos as implementações computacionais do mesmo. Assim como no algoritmo de Nemirovskii, necessitamos primeiro de algumas definições:

- \mathcal{S} e \mathcal{P} são definidos como no algoritmo de Nemirovskii, mas com $P = I$ nas definições de norma e produto interno.
- A soma direta $X \oplus Z$ é dada por

$$X \oplus Z = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix},$$

e a soma direta de dois subespaços $(\mathcal{M}_X, \mathcal{M}_Z)$ de \mathcal{S} é dada por $\mathcal{M}_X \oplus \mathcal{M}_Z = \{X \oplus Z : X \in \mathcal{M}_X, Z \in \mathcal{M}_Z\}$.

- O complemento ortogonal de um subespaço \mathcal{M} de \mathcal{S} é dado por $\mathcal{M}^\perp = \{Z \in \mathcal{S} : \langle X, Z \rangle = 0 \forall X \in \mathcal{M}\}$.

O algoritmo primal-dual busca a minimização simultânea dos dois seguintes problemas (consideramos que as matrizes de \mathcal{S} têm dimensão $n \times n$):

$$\begin{aligned} \min \langle C, X \rangle & \quad X \in \mathcal{X} \\ \min \langle Z, D \rangle & \quad Z \in \mathcal{Z} \end{aligned}$$

onde C e D pertencem a \mathcal{S} , $\mathcal{X} = \mathcal{P} \cap (\mathcal{M} + D)$, $\mathcal{Z} = \mathcal{P} \cap (\mathcal{M}^\perp + C)$, e \mathcal{M} é um subespaço de \mathcal{S} . A minimização em X é chamada de *problema primal*, e a minimização em Z é o *problema dual*. Embora esse problema não pareça com um problema LMI, podemos mostrar que qualquer conjunto de inequações de Riccati pode ser colocado na forma descrita. Para maiores detalhes o leitor pode consultar [61].

Uma matriz X é dita primal-factível se ela pertence a \mathcal{X} , e de dual-factível se pertence a \mathcal{Z} . O conceito de estritamente factível se aplica quando, além da restrição anterior, tem-se que a matriz está no interior de \mathcal{P} . Para um par de matrizes factíveis (X, Z) define-se a *distância dual* para os problemas primal e dual como sendo $\langle X, Z \rangle$. Essa distância possui interessantes propriedades, entre elas a de sempre ser positiva e de ser um limitante superior da distância de X e Z à solução ótima dos problemas primal e dual (X^*, Z^*) , ou seja,

$$\begin{aligned} \langle C, X \rangle - \langle C, X^* \rangle & \leq \langle X, Z \rangle \\ \langle Z, D \rangle - \langle Z^*, D \rangle & \leq \langle X, Z \rangle \end{aligned}$$

Para a aplicação do método, supõe-se que são fornecidas duas matrizes *estritamente factíveis* X_0 e Z_0 para os problemas primal e dual⁶. Essa hipótese implica em que

- $\text{int } \mathcal{X}$ e $\text{int } \mathcal{Z}$ não são vazios.
- Os problemas primal e dual são limitados inferiormente em \mathcal{X} e \mathcal{Z} .
- Os problemas são solucionáveis.

Das afirmações acima pode-se concluir que uma matrix X é solução para o problema primal se e somente se existir uma matriz dual-factível Z tal que $\langle X, Z \rangle = 0$. O mesmo é válido para o problema dual. Assim, os dois problemas se reduzem a um único

$$\min \langle X, Z \rangle : X \in \mathcal{X}, Z \in \mathcal{Z}, \tag{1.4}$$

⁶Encontrar essas matrizes é um problema em separado, que não trataremos aqui.

cujo valor ótimo é conhecido e igual a zero. Para a solução desse problema empregamos a conhecida função barreira $F(X) = \log \det X^{-1}$. Uma função barreira é um recurso muito utilizado em otimização, e tem como principal característica tender a infinito a medida em que X se aproxima do limite do espaço utilizável. Nesse caso, o espaço é \mathcal{P} . Como temos duas variáveis, utiliza-se a função barreira $F(X) + F(Z)$. Para um dado $\alpha > 0$ definimos o *centro analítico* dessa função como o par que soluciona

$$\min F(X) + F(Z) : X \in \mathcal{X}, Z \in \mathcal{Z}, \langle X, Z \rangle = \alpha. \quad (1.5)$$

Pode-se provar que, quando α tende a zero, o centro analítico tende à solução do problema (1.4). Os valores de (X, Z) que solucionam (1.5) para um dado α formam o que chamamos de *caminho dos centros*. Dado um par factível (X, Z) , a função

$$\Psi(X, Z) = n \log \langle X, Z \rangle + F(X) + F(Z) - n \log n$$

é um limitante superior para a distância entre (X, Z) e o caminho dos centros. Mais precisamente, ela é um limitante superior da distância entre (X, Z) e a solução de (1.5) para $\alpha = \langle X, Z \rangle$. Podemos mostrar que $\Psi(X, Z)$ tende a infinito na fronteira da região $\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}$. Essa função é de difícil tratamento matemático, pois não é convexa (nem quasiconvexa), a não ser para $\langle X, Z \rangle$ constante. Assim, o que se faz é minimizar a função

$$\Phi(X, Z) = \mu \sqrt{n} \log \langle X, Z \rangle + \Psi(X, Z),$$

onde $\mu \geq 1$ é fornecido *a priori*. Prova-se que o mínimo dessa função satisfaz o problema (1.4). O parâmetro μ pode ser interpretado como a distância relativa que os valores (X, Z) terão do caminho dos centros ao longo do algoritmo. Nota-se em [61] que o valor de $\Psi(X, Z)$ tende a uma constante proporcional a μ ao longo das iterações. Por outro lado, a velocidade de convergência do algoritmo aumenta a medida em que se aumenta μ .

O algoritmo para a minimização de $\Phi(X, Z)$ é como segue: Define-se $Y = X \oplus Z$. Dados $\mu, \epsilon > 0$ a ser utilizado como critério de parada e um escalar $0 < \theta < 0.35$,

1. Encontrar $\delta Y \in \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ tal que

$$\frac{\langle \delta Y, \nabla \Phi(X, Z) \rangle}{\|Y^{-\frac{1}{2}} \delta Y Y^{-\frac{1}{2}}\|} \geq \theta.$$

2. Encontrar $p, q \in \mathbb{R}$ tais que

$$X - p\delta X \in \mathcal{P}, Z - q\delta Z \in \mathcal{P}$$

$$\Phi(X - p\delta X, Z - q\delta Z) \leq \Phi(X, Z) + \log(1 + \theta) - \theta$$

3. Atualizar $Y = (X - p\delta X) \oplus (Z - q\delta Z)$.

4. Caso $\langle X, Z \rangle \leq \epsilon$, considera solução encontrada. Caso contrário, volta ao passo 1.

Para resolver o passo 1 precisamos resolver um problema de minimização quadrática. O passo 2 é resolvido através do método de Newton. Não vamos abordar a solução dos passos do algoritmo aqui. O principal esforço computacional encontra-se no passo 1, e várias maneiras de resolvê-lo existem. Por último esclarecemos que o parâmetro θ representa um compromisso entre número de iterações e esforço computacional por iteração. Para maiores detalhes consultar [61].

1.4 Inequações matriciais bilineares

A colocação de problemas na forma LMI fornece imediatamente meios eficientes de solução através de algoritmos numéricos. Mas essa colocação nem sempre é possível, e por vezes, quando conseguida, torna praticamente impossível a introdução de mais restrições na forma LMI. Um exemplo clássico é a estabilização de sistemas por realimentação de estados: Como será visto na seção 4.1.1, a colocação deste problema na forma LMI nos obriga a fazer uma mudança de variáveis que acaba por “esconder” o ganho de realimentação, que não aparece de forma direta na LMI resultante. Na síntese pelo critério de Popov (teorema 55) nem essa mudança de variável faz com que tenhamos uma LMI. Esse tipo de dificuldade faz com que soluções alternativas sejam procuradas de forma a tornar o ferramental mais flexível. Introduziremos nessa seção o conceito de *inequação matricial bilinear*⁷.

O conceito de BMI foi introduzido por Safonov em [56], mas equações na forma de BMI já eram conhecidas e estudadas anteriormente. Uma BMI pode ser expressa de forma muito similar a uma LMI, da seguinte forma:

$$F_{BMI}(x, y) \triangleq \sum_{i=0}^{n_x} \sum_{j=0}^{n_y} x_i y_j F_{i,j} > 0 \quad (1.6)$$

Como podemos notar, essa formulação é bem mais flexível do que a formulação LMI. De fato, a formulação é tão flexível que praticamente qualquer problema de controle oriundo da teoria de sistemas lineares pode ser colocado na forma de uma BMI (em particular, os problemas de estabilização via realimentação de estados e de saída podem ser expressos através de BMI – ver exemplo 142). Infelizmente a BMI não apresenta propriedades fundamentais da LMI, como por exemplo a convexidade. Para um problema de BMI podem existir ótimos locais não globais, e nem sequer uma solução para o problema de factibilidade está disponível. A formulação é, de fato, bastante ambiciosa no sentido de generalização de problemas. Essa generalidade faz, porém, com que seja difícil vislumbrar uma solução para o mesmo. De toda forma, alguns resultados já foram obtidos para problemas na forma de BMI [57].

⁷Mais conhecidas por BMI, do inglês *Bilinear Matrix Inequalities*.

Capítulo 2

Conceitos básicos

2.1 Introdução

Antes de iniciarmos a descrição dos problemas e de suas soluções via LMI necessitamos de alguns conceitos básicos para a compreensão dos problemas de controle propriamente ditos. Esse capítulo trata exatamente desses conceitos, e a abordagem LMI já se mostra útil em alguns dos mesmos (veja, por exemplo, a seção 2.6).

2.2 Setores

Definiremos o que é um *setor* para o caso monovariável e logo após estenderemos essa definição para o caso multivariável. O caso monovariável nos dá, como é de costume, uma interpretação gráfica que facilita a compreensão da definição. Essas definições podem ser obtidas de várias fontes, em particular de [19] e [67].

Definição 5 *Seja $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $\phi(0) = 0$. Dizemos que $\phi \in \text{setor}(k_1, k_2)$ (utilizaremos o abuso de notação $\phi \in (k_1, k_2)$) se e somente se $k_1 y^2 < y\phi(y) < k_2 y^2, \forall y \in \mathbb{R}$ com $y \neq 0$. De forma similar, diz-se que $\phi \in [k_1, k_2]$ se e somente se $k_1 y^2 \leq y\phi(y) < k_2 y^2, \forall y \in \mathbb{R}$ com $y \neq 0$.*

Existem várias formas de expressarmos as condições mencionadas. Cada uma dessas formas é útil em determinadas deduções. As seguintes condições são equivalentes:

1. $k_1 \leq \phi(y)/y \leq k_2, \forall y \neq 0$
2. $k_1 y^2 \leq y\phi(y) \leq k_2 y^2, \forall y \in \mathbb{R}$
3. $[\phi(y) - k_1 y][\phi(y) - k_2 y] \leq 0, \forall y \in \mathbb{R}$
4. $[\phi(y) - cy]^2 \leq r^2 |y^2|, \forall y \in \mathbb{R}$

onde

$$c \triangleq \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \quad r \triangleq \frac{1}{2}(k_2 - k_1), \quad k_1 k_2 = c^2 - r^2$$

Em particular, a terceira condição de setor é útil, por exemplo, quando desejamos colocar a condição de setor na forma de uma LMI¹. A interpretação gráfica da condição de setor monovariável é a seguinte: a função ϕ deve permanecer na região delimitada pelas retas com declividade k_1 e k_2 no plano \mathbb{R}^2 .

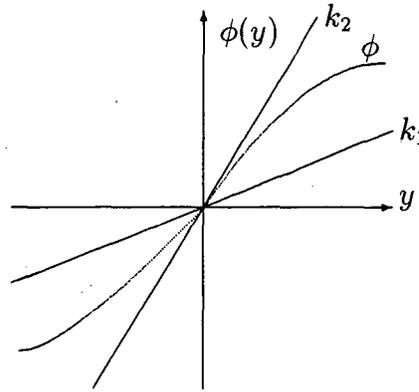


Figura 2.1: Condição de setor monovariável

Essa interpretação está ilustrada na figura 2.1. Assim, torna-se claro, por exemplo, que a função $\phi(y) = y^3$ pertence ao setor $[0, \infty)$. A função $\phi(y) = \sin(y)$ pertence ao setor $(-1, 1]$. Na verdade, ela pertence a setores ainda menores, como pode-se verificar graficamente.

Passemos agora para a condição de setor multivariável. Nesse caso, passaremos a trabalhar em um espaço de Hilbert (veja apêndice B).

Definição 6 *Seja H um espaço de Hilbert. Seja $\phi : H \rightarrow H$ com $\phi(0) = 0$. Sejam $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ com $k_2 \geq k_1$. Então as seguintes condições de setor são equivalentes:*

$$\begin{aligned} \langle \phi(y) - k_1 y, \phi(y) - k_2 y \rangle &\leq 0, & \forall y \in H \\ \|\phi(y) - cy\|^2 &\leq r^2 \|y\|^2, & \forall y \in H \end{aligned}$$

com

$$\begin{cases} c = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ r = \frac{1}{2}(k_2 - k_1) \end{cases} \iff \begin{cases} k_1 + k_2 = 2c \\ k_1 k_2 = c^2 - r^2 \end{cases}$$

As definições fornecidas até agora tratam de operadores *sem memória*, ou seja, ainda não podemos trabalhar com a idéia de *setor* para funções de transferência. Essa idéia será necessária adiante, quando tratarmos dos critérios de estabilidade para sistemas Lur'e. Para definirmos a idéia de setor para funções de transferência definiremos primeiro o conceito de *conicidade*:

Definição 7 *Dizemos que um operador² \mathcal{G} é cônico interior se $\|(\mathcal{G}x)_T - cx_T\| \leq r\|x_T\|$ para algum par (c, r) e para todo $T \geq 0$, onde o subscrito T representa o truncamento da função após T (ver seção 2.4.2).*

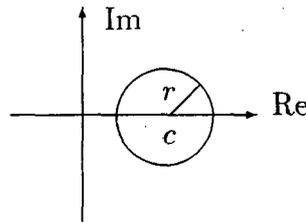


Figura 2.2: Região para condição de conicidade

Para funções de transferência, a definição equivale a exigir que o gráfico de Nyquist de $G(s)$ esteja dentro do círculo de raio r e centro em c . A definição de setor pode ser agora estendida da seguinte forma (para o caso monovariável)

Definição 8 Dizemos que um operador \mathcal{G} pertence ao setor $[c - r, c + r]$ se e somente se ele é cônico interior para os parâmetros c e r .

Para maiores detalhes sobre esse conceito consultar [67]. Passamos diretamente para as operações com setores.

Setor-produto

O que acontece quando colocamos em série dois operadores que estão contidos em diferentes setores? No caso de operadores sem memória o procedimento é simples: basta realizarmos o produto de intervalos dos setores correspondentes. Assim, se $\phi_1 \in [\alpha_1, \beta_1]$ e $\phi_2 \in [\alpha_2, \beta_2]$, então $\phi = \phi_1 \phi_2 \in [\alpha, \beta]$, onde o intervalo $[\alpha, \beta]$ é definido por

$$[\alpha, \beta] \triangleq \{ xy : x \in [\alpha_1, \beta_1], y \in [\alpha_2, \beta_2] \}$$

Mas o que acontece se um³ dos operadores for uma função de transferência? Infelizmente não existe um resultado geral para esse caso. Para algumas classes de operadores podemos derivar resultados interessantes. Citaremos aqui apenas um dos resultados, obtido por Zames [67]:

Lema 9 Sejam os operadores ϕ sem memória e a função de transferência $G(s) = \frac{k\lambda}{s} + \lambda$, com λ e k positivos. Então,

- Se ϕ é positivo, então $\phi\mathcal{G}$ é positivo⁴.
- $\phi \in [\alpha, \beta] \rightarrow \phi\mathcal{G} \in [\alpha, \beta] \times [0, k]$

Outros resultados podem ser obtidos da mesma referência.

¹A colocação na forma de uma LMI se dá através do procedimento \mathcal{S} [10].

²Que pode ter dinâmica.

³Nos casos que consideraremos será importante apenas tratarmos da conexão de um operador sem memória com um com memória.

⁴Sem rigorismo, podemos dizer que ϕ é positivo se $\phi \in [0, \infty)$, e $H(s)$ é positivo se $\text{Re}H(j\omega) \geq 0 \forall \omega$ (ver seção 2.6).

2.3 Descrição de incertezas

Os métodos de controle clássicos consideram, quase sempre, que o modelo que utilizamos para o sistema o representa perfeitamente. É claro que essa hipótese não se verifica na realidade, ou seja, o comportamento do sistema real raramente será o comportamento previsto através do nosso modelo. Para que possamos obter garantias a respeito de estabilidade e performance devemos, portanto, levar em conta de alguma forma as incertezas do nosso modelo. Ao longo do trabalho utilizaremos modelos lineares, da forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t).$$

Normalmente, incertezas nesse tipo de modelo são introduzidas permitindo que a matriz A pertença a um conjunto \mathcal{A} . Dependendo da definição desse conjunto temos vários tipos de descrições de incertezas. As definições fornecidas aqui podem ser obtidas de várias fontes, em particular de [17].

2.3.1 Descrição por intervalos

A descrição de incertezas por intervalos considera que o conjunto \mathcal{A} é definido como

$$\mathcal{A} = \left\{ A : A = A_0 + \sum_{i=1}^j q_i A_i, q_i \in [q_{i_{\min}}, q_{i_{\max}}] \right\},$$

onde as matrizes $A_{0\dots j}$ são conhecidas. O conjunto \mathcal{A} também é conhecido como *matriz-intervalo*. Incertezas do tipo intervalo podem também ser consideradas para funções de transferência polinomiais através do resultado de Kharitonov. Como esse resultado é interessante e útil, trataremos brevemente dele a seguir.

A partir da definição de *polinômios-intervalo* enunciaremos o resultado obtido por Kharitonov e definiremos o conceito de *plantas-intervalo*. Esses conceitos, aliados ao resultado de Kharitonov, são bastante úteis para a análise de sistemas incertos. Um tratamento resumido dos resultados pode ser encontrado em [24]. Para um tratamento mais completo deve-se consultar [6]. Todos os resultados e definições aqui enunciados podem ser encontrados no primeiro.

Polinômios-intervalo

Primeiramente introduziremos a definição de estrutura de incertezas independentes, para logo após definirmos os polinômios-intervalo:

Definição 10 (*Estrutura de Incertezas Independentes*) Um polinômio $p(s, q)$ descrito por

$$p(s, q) = \sum_{i=0}^n a_i(q) s^i$$

tem uma estrutura de incertezas independentes se a_i depende apenas da i -ésima componente do vetor q .

Definição 11 (*Polinômios-intervalo*) A família

$$\mathcal{P} = \{p(s, q) : q \in Q\}$$

é uma família de polinômios-intervalo ou, simplificada, um polinômio-intervalo, se

1. $p(s, q)$ tem estrutura de incertezas independentes.
2. os coeficientes a_i são contínuos em q_i .
3. $q \in Q$, onde Q é um hiper-retângulo.

Como podemos notar, essa definição geralmente é conservativa para aplicações práticas, uma vez que poucos problemas reais possuem incertezas que levem a descrições onde apareçam polinômios-intervalo (na maior parte das vezes os modelos que obtemos não possuem uma estrutura de incertezas independentes).

Plantas-intervalo

Embora a definição de plantas-intervalo não seja necessária para enunciarmos o teorema de Kharitonov, vamos introduzi-la aqui porque essa definição segue logicamente a definição de polinômios intervalo. Essa definição será utilizada para definirmos os critérios de estabilidade para sistemas incertos, mais adiante.

Definição 12 (*Plantas-intervalo*) Definimos uma família de plantas-intervalo, ou simplificada, uma planta-intervalo, como

$$\mathcal{G}_I \triangleq \left\{ G(s, q, r) = \frac{N(s, q)}{D(s, r)} : N \in \mathcal{N}, D \in \mathcal{D} \right\},$$

onde \mathcal{N} e \mathcal{D} são polinômios-intervalo.

Teorema de Kharitonov

Estamos aptos a enunciar o teorema de Kharitonov. Ele nos dá condições de determinar a estabilidade de um polinômio-intervalo em um número finito de passos. Para enunciar o teorema, introduziremos a definição dos polinômios de Kharitonov.

Definição 13 (*Polinômios de Kharitonov*) Seja \mathcal{P} uma família de polinômios-intervalo descritos por

$$p(s, q) = \sum_{i=1}^n [a_i^-, a_i^+] s^i.$$

Definem-se os quatro polinômios de Kharitonov como

$$\begin{aligned} P_1(s) &= a_0^- + a_1^- s + a_2^+ s^2 + a_3^+ s^3 + a_4^- s^4 + \dots \\ P_2(s) &= a_0^+ + a_1^+ s + a_2^- s^2 + a_3^- s^3 + a_4^+ s^4 + \dots \\ P_3(s) &= a_0^+ + a_1^- s + a_2^- s^2 + a_3^+ s^3 + a_4^+ s^4 + \dots \\ P_4(s) &= a_0^- + a_1^+ s + a_2^+ s^2 + a_3^- s^3 + a_4^- s^4 + \dots \end{aligned}$$

Teorema 14 (*Teorema de Kharitonov*) Uma família de polinômios-intervalo com grau invariante é estável se e somente se os seus quatro polinômios de Kharitonov são estáveis.

2.3.2 Incertezas politópicas

Nesse caso, o conjunto \mathcal{A} é definido como um domínio convexo fechado

$$\mathcal{A} = \{A : A = \sum_{i=1}^j q_i A_i, \sum_{i=1}^j q_i = 1, q_i \geq 0\},$$

onde as matrizes A_i são conhecidas. Pela formulação do conjunto \mathcal{A} pode-se notar que as matrizes A_i são os vértices de um politopo⁵. Essa formulação é, talvez, a de mais fácil introdução na abordagem LMI, sendo utilizada por vários autores.

2.3.3 Limitada em norma

Temos agora

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Delta) = \{A : A = A_0 + E\Delta H\},$$

onde A_0 , E e H são matrizes conhecidas e Δ é uma matriz bloco-diagonal, com cada bloco Δ_i satisfazendo $\|\Delta_i\| \leq 1$. Pode-se interpretar esse tipo de descrição como uma descrição via domínios convexos elipsoidais, ou uma descrição politópica com número infinito de vértices. Cabe notar que o campo numérico dos blocos Δ_i não foi definido, apenas que $\|\Delta_i\| \leq 1$. Assim, podemos ter Δ_i pertencente ao campo dos complexos ou reais, e essa diferença pode ser crucial em termos dos resultados obtidos, como veremos em outra seção. Existem ainda duas divisões para esse tipo de descrição de incertezas:

Incerteza estruturada e não-estruturada

Como estamos impondo uma estrutura (bloco-diagonal) em Δ dizemos que Δ é uma *incerteza estruturada*. Caso, porém, não exista restrição na estrutura de Δ , dizemos que Δ é uma *incerteza não-estruturada*.

2.3.4 Matching conditions

Descrições do tipo *matching conditions* refletem a forma como a incerteza é introduzida no modelo. Essa forma normalmente é feita através de uma restrição estrutural. O exemplo mais conhecido de *matching conditions* ocorre com o sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ onde A e B são matrizes incertas descritas pelos seguintes conjuntos:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Delta_1) = \{A : A = A_0 + B_0\Delta_1\}$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\Delta_2) = \{B : B = B_0 + B_0\Delta_2\}$$

onde A_0 e B_0 são matrizes conhecidas, e Δ_1 e Δ_2 representam os elementos incertos que podem ser limitados em norma ou pertencerem a um politopo.

⁵Um *politopo* é um *poliedro convexo*, que pode ser imaginado como um poliedro onde não existam “entradas”.

2.4 Definições de Estabilidade

2.4.1 Abordagem Lyapunov

O conceito de “estabilidade” é intuitivo porém impreciso. Para trabalharmos de forma inequívoca com esse conceito devemos formular definições mais precisas. As definições aqui listadas podem ser encontradas em [59] ou em [62].

Sistemas autônomos

Para esse trabalho estamos de fato interessados nas definições para sistemas não autônomos, ou seja, sistemas da forma $\dot{x} = f(x(t), t)$, onde $x \in \mathbb{R}^n$. Começaremos, porém, com as definições para o sistema autônomo⁶

$$\dot{x} = f(x(t)) \quad (2.1)$$

por serem mais intuitivas. A partir daí, as extensões para sistemas não autônomos serão introduzidas naturalmente. Primeiramente faremos duas definições que facilitarão o desenvolvimento:

- B_R é a região esférica definida pelo conjunto $\{x : \|x\| < R\}$, onde $\|x\| = \sqrt{x'x}$.
- S_R é a esfera em si, ou seja, o conjunto $\{x : \|x\| = R\}$.

Os *pontos de equilíbrio* do sistema (2.1) são todos os pontos onde $f(x(t)) = 0$. Consideraremos, sem perda de generalidade, que a origem é um ponto de equilíbrio desse sistema. Assumiremos também que o sistema possui, para uma dada condição inicial, somente uma solução. Feitas as suposições podemos finalmente partir para as definições de estabilidade:

Estabilidade: O ponto de equilíbrio $x = 0$ é dito *estável* se, para qualquer $R > 0$, existir um escalar $r(R) > 0$ tal que

$$x(0) \in B_r \Rightarrow x(t) \in B_R, \quad \forall t \geq 0.$$

Se, para algum R , não for possível encontrar r que satisfaça as condições, então o ponto de equilíbrio é dito *instável*.

Estabilidade assintótica: A origem é dita *localmente assintoticamente estável* se ele for estável e ainda existir $r > 0$ tal que

$$x(0) \in B_r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Estabilidade exponencial: O ponto de equilíbrio $x = 0$ é *localmente exponencialmente estável* se, para $\|x(0)\|$ suficientemente pequena, existirem $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$ tais que

$$\forall t > 0, \quad \|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda t}.$$

⁶Alguns autores empregam os termos *autônomo* e *não autônomo* para diferenciar sistemas com ou sem funções forçantes. Nesse trabalho adotamos a nomenclatura das referências citadas, onde sistemas com funções forçantes são ditos *forçados*.

Se, nas definições de estabilidade assintótica e exponencial, for possível satisfazer as condições para qualquer estado inicial (em outras palavras, se $B_r = \mathbb{R}^n$), então o ponto de equilíbrio é dito *globalmente assintoticamente/exponencialmente estável*. Para sistemas lineares, a estabilidade assintótica local implica em estabilidade exponencial global.

Sistemas não autônomos

Passaremos agora a tratar sistemas não autônomos, descritos pela equação

$$\dot{x} = f(x(t), t) \quad (2.2)$$

Para esses sistemas torna-se importante o conhecimento de mais um parâmetro, o *tempo inicial*, que será representado por t_0 . Os pontos de equilíbrio são aqueles que satisfazem $f(x(t), t) = 0$ para todo $t \geq t_0$. Assim como nos sistemas autônomos, consideraremos que a origem é um ponto de equilíbrio e que o sistema tem apenas uma solução dados $x(t_0)$ e t_0 . A extensão das definições, como seria de se esperar, é feita *mutatis mutandis* através da introdução do parâmetro t_0 .

Estabilidade: A origem do sistema (2.2) é dita *estável em t_0* se, para todo $R > 0$, existir $r(R, t_0) > 0$ tal que

$$x(t_0) \in B_r \Rightarrow x(t) \in B_R, \quad \forall t \geq t_0.$$

A diferença entre essa definição e a para sistemas autônomos está na dependência de r em relação ao tempo inicial. Caso para algum R não existir r que satisfaça a condição o ponto de equilíbrio é dito *instável*.

Estabilidade assintótica: O ponto de equilíbrio $x = 0$ de (2.2) é *localmente assintoticamente estável em t_0* se ele for estável em t_0 e existir $r(t_0) > 0$ tal que

$$x(t_0) \in B_r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Estabilidade exponencial: O ponto de equilíbrio $x = 0$ é *exponencialmente estável* se existirem $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$ tais que, para $\|x(t_0)\|$ suficientemente pequena,

$$\|x(t)\| \leq \alpha \|x(t_0)\| e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Estabilidade assintótica global: A origem é *globalmente assintoticamente estável em t_0* se ela for assintoticamente estável para todo $x(t_0)$.

Uniformidade

Os conceitos de estabilidade para sistemas não autônomos têm como característica a incômoda presença do tempo inicial. Para que possamos utilizar essas definições sem a preocupação com esse parâmetro (o que é praticamente imperioso na prática) o conceito de *uniformidade* é introduzido. Cabe notar o seguinte:

- Para sistemas autônomos, todas as propriedades de estabilidade são uniformes.

Daí a distinção só tem sentido quando tratamos de sistemas não autônomos. Para a estabilidade simples a extensão para estabilidade uniforme não introduz dificuldades.

Estabilidade uniforme: A origem do sistema (2.2) é *uniformemente estável* se o parâmetro r da definição puder ser escolhido independentemente de t_0 , isto é, $r = r(R)$.

Para a estabilidade assintótica precisamos definir ainda a *convergência uniforme*. A idéia é que os estados do sistema, saindo de uma região B_{R_1} , deslocam-se para uma região menor B_{R_2} após um tempo T independente de t_0 e lá permanecem. A definição matemática será dada depois.

Estabilidade assintótica: O ponto de equilíbrio $x = 0$ é *localmente uniformemente assintoticamente estável* se ele for uniformemente estável e existir uma região B_{R_0} independente de t_0 tal que

$$x(t_0) \in B_{R_0} \Rightarrow x(t) \rightarrow 0 \text{ uniformemente em } t_0.$$

Convergência uniforme: Dizemos que os estados convergem uniformemente em t_0 se, para todo par (R_1, R_2) tal que $0 < R_1 < R_2 \leq R_0$, existe um tempo $T(R_1, R_2) > 0$ tal que, para todo $t_0 \geq 0$,

$$x(t_0) \in B_{R_1} \Rightarrow x(t) \in B_{R_2}, \quad \forall t \geq t_0 + T.$$

Para a estabilidade assintótica uniforme global basta substituir B_{R_0} por \mathbb{R}^n na definição. Dos conceitos vistos, o mais forte e restritivo é o de estabilidade exponencial. De fato, se um sistema for exponencialmente estável⁷ então ele será uniformemente assintoticamente estável.

2.4.2 Abordagem I/O

É suposto, para essa seção, que o leitor possua alguma familiaridade com os espaços \mathcal{L}_p . Caso contrário, recomenda-se a leitura do apêndice B. Os conceitos aqui definidos podem ser encontrados em [62] ou ainda, de forma mais rigorosa, em [19].

Os conceitos de estabilidade I/O são definidos nos espaços $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)$, que denotaremos simplesmente por \mathcal{L}_p . As normas nesses espaços são as usuais. Para o caso multivariável definimos o espaço \mathcal{L}_p^n como todos os vetores $f = [f_1 \ f_2 \ \cdots \ f_n]'$ tais que $f_i \in \mathcal{L}_p$. A norma é definida como

$$\|f\|_p = \left(\sum_i \|f_i\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Sob essa definição, \mathcal{L}_2^n é um espaço de Hilbert.

Antes das definições de estabilidade necessitamos “estender” os espaços \mathcal{L}_p : Definimos o truncamento de uma função f no intervalo $[0, T]$ como sendo

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & \text{se } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{alhores.} \end{cases}$$

⁷Quando dizemos que um sistema é estável estamos nos referindo, na verdade, ao seu ponto de equilíbrio ($x = 0$).

Definição 15 (*Espaço \mathcal{L}_p estendido*) O espaço \mathcal{L}_p estendido (ou extensão de \mathcal{L}_p) consiste de todas as funções $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f_T \in \mathcal{L}_p$ para todo T finito. Representamos esse espaço por \mathcal{L}_{pe} .

A seguir enunciamos alguns fatos importantes sobre os espaços \mathcal{L}_{pe} :

- Para todo $p \in [1, \infty]$ o espaço \mathcal{L}_{pe} é um espaço vetorial linear.
- Apesar dos espaços \mathcal{L}_p serem normados, o espaço \mathcal{L}_{pe} não é.
- Para um dado p , $\|f_T\|_p$ é função não decrescente de T .
- Uma função f pertence a \mathcal{L}_p para um dado p se e somente se existir um número m finito tal que $\|f_T\|_p \leq m$ para todo $T \geq 0$.

Podemos agora partir para as definições de estabilidade. Consideraremos que uma *relação binária* em um conjunto X é um subconjunto de X^2 . Se $A : X \rightarrow X$ é um mapa, então A define uma relação binária $R_A = \{(x, Ax) : x \in X\}$.

Definição 16 (*estabilidade \mathcal{L}_p*) Seja R uma relação binária em \mathcal{L}_{pe} . Então R é dito \mathcal{L}_p -estável se

$$\forall (x, y) \in R, \quad x \in \mathcal{L}_p \Rightarrow y \in \mathcal{L}_p.$$

Se, além disso, existirem escalares finitos γ_p e b_p tais que

$$\forall (x, y) \in R, \quad x \in \mathcal{L}_p \Rightarrow \|y\|_p \leq \gamma_p \|x\|_p + b_p,$$

então R é dita \mathcal{L}_p -estável com ganho finito. Por fim, R é dita \mathcal{L}_p estável com ganho finito e zero bias se for \mathcal{L}_p -estável com ganho finito e $b_p = 0$.

Como seria de se esperar, dizemos que o mapa $A : \mathcal{L}_{pe}^n \rightarrow \mathcal{L}_{pe}^n$ é \mathcal{L}_p -estável se e somente se R_A em \mathcal{L}_{pe} for \mathcal{L}_p -estável. Se o mapa A é linear, então ele é \mathcal{L}_p -estável com ganho finito se e somente se ele for \mathcal{L}_p -estável com ganho finito e zero bias.

O ganho \mathcal{L}_p é definido, para relações binárias \mathcal{L}_p -estáveis com ganho finito, como sendo o mínimo valor de γ_p tal que exista um $b_p \geq 0$ que satisfaça a condição de estabilidade com ganho finito. Para relações estáveis com zero bias a definição é a mesma, apenas tomando-se $b_p = 0$.

Por fim cabe notar que não é exigido, nas definições de estabilidade, que $\|\cdot\|$ seja de fato uma norma. Assim, podem-se definir também conceitos similares para os espaços L_p . Essas definições são utilizadas, por exemplo, em [19]. A escolha entre as duas definições (estabilidade \mathcal{L}_p e L_p) depende apenas da necessidade ou não de se trabalhar em espaços normados.

2.4.3 Relação Lyapunov-I/O

Forneceremos aqui as relações entre as abordagens I/O e de Lyapunov apenas para sistemas lineares, pois essas fornecem um sentimento suficiente da relação entre as duas. Para sistemas não lineares o leitor pode consultar [62].

Consideraremos o sistema

$$G(s) \sim \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right].$$

Os resultados podem ser resumidos nos dois seguintes teoremas:

Teorema 17 *Seja $G(s)$ estabilizável e detectável. Então $G(s)$ é \mathcal{L}_∞ estável se e somente se ele for assintoticamente estável.*

Teorema 18 *Seja o sistema $G(s)$ assintoticamente estável. Então ele é \mathcal{L}_p estável para todo $p \in [1, \infty]$.*

2.5 Estabilidade de sistemas incertos

Sabemos que, para sistemas lineares conhecidos, uma condição necessária e suficiente para a estabilidade assintótica é a de que exista uma matriz $P > 0$ que satisfaça

$$A'P + PA < 0.$$

Caso a matriz A seja incerta, necessitamos de novas definições de estabilidade. As mais utilizadas são as seguintes:

Estabilidade robusta: um sistema é robustamente estável se ele for assintoticamente estável para todo $A \in \mathcal{A}$, isto é, se

$$\forall A \in \mathcal{A}, \exists P > 0 : A'P + PA < 0.$$

Estabilidade quadrática: um sistema é quadraticamente estável se

$$\exists P > 0 : \forall A \in \mathcal{A}, A'P + PA < 0.$$

A diferença entre as duas definições é que a de estabilidade quadrática exige que a *mesma* matriz P garanta a estabilidade para todo o grupo de incertezas. O conceito de estabilidade quadrática pode incluir incertezas variantes no tempo, ao contrário do de estabilidade robusta.

Se as incertezas em A são politópicas, a verificação de estabilidade quadrática é feita através de um problema de factibilidade LMI. De fato, se o politopo de incertezas tem j vértices, então o sistema será quadraticamente estável se e somente se existir uma matriz $P > 0$ tal que

$$A_i'P + PA_i < 0, \quad i = 1 \dots j,$$

onde as matrizes A_i são os vértices do politopo de incertezas. É possível verificar que a factibilidade desse problema implica na estabilidade do sistema para toda matriz pertencente ao politopo: cada uma dessas matrizes pode ser representada pela soma ponderada dos vértices do politopo, ou seja, $A = \sum_i \lambda_i A_i$. Multiplicando cada LMI pelo respectivo λ e somando as j LMI temos

$$\sum_i \lambda_i A_i'P + \sum_i \lambda_i PA_i < 0.$$

Como P é constante tem-se que

$$(\sum_i \lambda_i A_i)' P + P \sum_i \lambda_i A_i < 0,$$

donde $A'P + PA < 0$ para qualquer A pertencente ao politopo. Esse procedimento de prova é quase um padrão para o tratamento LMI de incertezas politópicas, e por isso não será repetido nesse trabalho.

Quando a descrição de incertezas é feita via limitação em norma (seção 2.3), um resultado bastante interessante pode ser derivado em termos dos conceitos de estabilidade robusta e quadrática. Esse resultado pode ser melhor compreendido através do diagrama da figura 2.3.

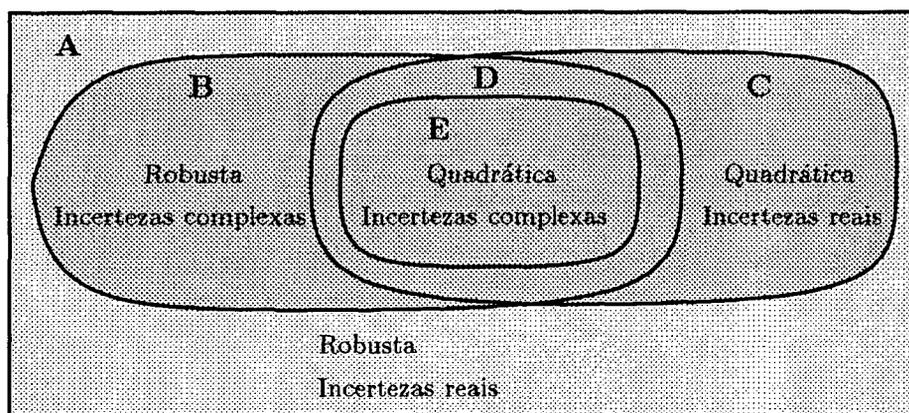


Figura 2.3: Relações entre conceitos de estabilidade

Esse diagrama é feito considerando-se a descrição de incertezas via limitação em norma com incertezas estruturadas, fazendo-se a distinção do campo numérico da variação de Δ . Em [55] os autores provaram que nenhuma das cinco regiões do diagrama é vazia. Isso implica em que, por exemplo, estabilidade robusta para variações complexas de Δ não implique em estabilidade quadrática para variações reais de Δ . Ficou em aberto, no mesmo trabalho, apenas a diferenciação entre as regiões **D** e **E** do diagrama (isto é, não se sabe se de fato as regiões **D** e **E** são realmente distintas).

O resultado interessante ocorre quando tratamos de incertezas não estruturadas. Nesse caso, pode-se provar que a estabilidade quadrática de um sistema para variações tanto nos reais quanto nos complexos é equivalente à estabilidade robusta para variações complexas. Esse resultado permite o tratamento desse tipo de incertezas via LMI através do critério do pequeno ganho, que será visto adiante.

2.6 Positividade e passividade

Dois conceitos muito importantes na análise de estabilidade são os de *passividade*⁸ e *positividade*, com as respectivas extensões para *passividade estrita* e *positividade estrita*. Os

⁸Também chamado de *hiperestabilidade* [3].

conceitos de passividade são formulados para sistemas bastante gerais, que englobam, por exemplo, sistemas não-lineares e variantes no tempo. As definições apresentadas podem ser encontradas em [19] ou ainda em [62] e [44]. As definições de passividade e positividade estão fortemente ligadas ao comportamento físico do sistema. Essa ligação se dá em termos da energia consumida pelo mesmo. Para compreender essa ligação apresentaremos uma forma simplificada de uma das várias definições encontradas na literatura:

Definição 19 (*passividade*)[38] *Um sistema é passivo se ele nunca gera energia no seguinte sentido: a energia fornecida para o sistema nunca é inferior à energia associada ao produto da entrada pela saída do sistema.*

Para alguns sistemas essa definição permite uma idéia física. Em circuitos elétricos, por exemplo, onde injetamos tensão e medimos corrente, essa idéia pode ser aplicada. A mesma idéia física nos leva a um conceito intuitivo para passividade/positividade estrita, a de que o sistema sempre *dissipe* energia. Uma das definições encontradas na literatura para positividade estrita é a que segue:

Definição 20 (*positividade estrita*)[42] *Um sistema é estritamente positivo se sua função de transferência pode ser sintetizada como a impedância de um circuito dissipativo, isto é, um circuito composto de resistores, capacitores dissipativos e indutores dissipativos.*

Está claro que um sistema que satisfaça essa definição sempre dissipará energia. Mas considere, por exemplo, um circuito composto de um resistor, um capacitor ideal e um indutor ideal em série. Esse circuito sempre dissipará energia, mas não se encaixará na definição dada. Esse tipo de dificuldade levou a várias definições. Em [38], por exemplo, foram fornecidas três definições para passividade estrita.

2.6.1 Definições no domínio tempo

Seguimos, então, com definições no domínio tempo. Antes de mais nada, seguimos com algumas definições básicas (para maiores detalhes ver o apêndice B ou [19] e [49]):

- $\mathcal{L}_2^n(\mathbb{R}_+)$ é o espaço das funções $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ quadraticamente integráveis em \mathbb{R}_+ , ou seja, o espaço das funções que satisfazem⁹

$$\int_0^\infty f(t)'f(t)dt < \infty.$$

Definimos o produto interno nesse espaço como

$$\langle x, y \rangle = \int_0^\infty x'y dt.$$

O produto interno $\langle x, y \rangle_T$ é o mesmo, apenas com a integral tomada entre 0 e T . A norma é definida como $\|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle$.

⁹A definição rigorosa encontra-se no apêndice B.

- $\mathcal{L}_{2e}^n(\mathbb{R}_+)$ é o espaço das funções $f(\cdot)$ cuja extensão $f_T(\cdot)$ pertence a \mathcal{L}_2 para todo $T \in \mathbb{R}_+$. A extensão de uma função em T é definida como

$$f_T(t) \triangleq \begin{cases} f(t) & \text{se } t \leq T, \\ 0 & \text{alhores.} \end{cases}$$

Podemos agora enunciar as definições:

Definição 21 (*Passividade*) Um operador $\mathcal{G} : \mathcal{L}_{2e}^n \rightarrow \mathcal{L}_{2e}^n$ é dito passivo se existir um escalar $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle x, \mathcal{G}x \rangle_T \geq \beta, \quad \forall x \in \mathcal{L}_{2e}^n, \quad \forall T \in \mathbb{R}_+. \quad (2.3)$$

Definição 22 (*Passividade estrita*) Um operador $\mathcal{G} : \mathcal{L}_{2e}^n \rightarrow \mathcal{L}_{2e}^n$ é dito estritamente passivo se existirem $\beta \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$ tais que

$$\langle x, \mathcal{G}x \rangle_T \geq \delta \|x_T\|_2^2 + \beta, \quad \forall x \in \mathcal{L}_{2e}^n, \quad \forall T \in \mathbb{R}_+. \quad (2.4)$$

Existem ainda mais duas definições para passividade estrita, mas não são muito utilizadas na prática. Essas definições podem ser encontradas em [38], e são apresentadas no apêndice.

Cabe notar que, para um sistema linear ser estritamente passivo, ele deve ser bipróprio ou impróprio [44]. Se o sistema for estritamente próprio, teremos $\mathcal{G}x$ tendendo a zero nas altas frequências e não existirá $\delta > 0$ que satisfaça (2.4). Para sistemas lineares, podemos considerar sem perda de generalidade que $\beta = 0$ [19]. Utilizando o que sabemos de setores é possível notar que, para sistemas não-lineares do tipo $\mathcal{G}x = g(x)$, tem-se que g é passivo se e somente se $g \in [0, \infty)$, e g é estritamente passivo se e somente se $g \in [\epsilon, \infty)$, com $\epsilon > 0$.

Os conceitos de passividade nos levam a um resultado muito importante, conhecido como *teorema da passividade* ou ainda *lema da passividade*, que enunciaremos de forma simplificada:

Teorema 23 (*Teorema da passividade*) A conexão via realimentação negativa entre um operador passivo e um estritamente passivo é Lyapunov estável¹⁰.

Para maiores detalhes pode-se consultar [19] ou ainda [62]. Esse teorema não é de grande utilidade para os nossos propósitos, pois garante apenas a estabilidade no sentido de Lyapunov.

Consideremos agora apenas sistemas lineares invariantes no tempo. Para esses sistemas costuma-se trabalhar com o conceito de *positividade real*. Esse conceito foi definido no clássico [66] no domínio tempo, e posteriormente a equivalência no domínio frequência foi derivada em [2]. Um bom resumo das definições e condições derivadas para o domínio frequência pode ser encontrada em [32] e em [34]. Interpretações da idéia de positividade podem ser encontradas, por exemplo, em [63] e [42]. Daremos primeiro a definição de Zames no domínio tempo (caso escalar) que, apesar de ser menos útil na nossa análise e válida para sistemas não-lineares, é facilmente relacionável com o conceito de passividade:

¹⁰Para a definição de estabilidade no sentido de Lyapunov consultar a seção 2.4.1.

Definição 24 (*Positividade domínio tempo*) Seja um operador $\mathcal{G} : \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2$, e sejam y, u tais que $y = \mathcal{G}u$. Então \mathcal{G} é dito positivo real se

$$\int_0^{\infty} u(t)y(t)dt \geq 0$$

Como podemos notar, essa definição possui uma forte relação com a condição de passividade: se o operador \mathcal{G} for linear e causal, então as definições de positividade e passividade são equivalentes [19]. A diferença das definições se encontra em seu domínio: o conceito de passividade é definido para o espaço \mathcal{L}_{2e} , enquanto o de positividade é feito em cima do espaço \mathcal{L}_2 . Para sistemas lineares, as duas definições são equivalentes. A positividade pode também ser definida em termos de função de transferência, o que será feito a seguir. Cabe notar que, para a positividade estrita, surgem *dois* conceitos distintos, e que a diferenciação entre os dois nem sempre é ressaltada.

2.6.2 Definições no domínio freqüência

Trataremos agora de sistemas lineares, onde os conceitos de passividade e positividade passam a ser equivalentes.

Definição 25 (*Positividade/passividade*) Uma função de transferência $G(s)$ é positiva real se as seguintes condições forem satisfeitas:

- $G(s)$ for analítica para $\Re[s] > 0$.
- $G^*(s) = G(s^*)$ para $\Re[s] > 0$.
- $G'(s^*) + G(s) \geq 0$ para $\Re[s] > 0$.

Definição 26 (*Positividade estrita forte*) Uma função de transferência $G(s)$ é fortemente estritamente positiva real se $G(s - \epsilon)$ for positiva real para algum $\epsilon > 0$.

Definição 27 (*Positividade estrita fraca*) Uma função de transferência $G(s)$ é fracamente estritamente positiva real se ela for assintoticamente estável e ainda, para todo ω finito, $G(j\omega) + G'(-j\omega) > 0$.

Definição 28 (*Passividade estrita*) Uma função de transferência $G(s)$ é estritamente passiva se, para todo $\omega \geq 0$, existir uma constante $\delta > 0$ tal que

$$G(j\omega) + G^*(j\omega) \geq \delta I.$$

As definições podem ser obtidas de várias referências, entre elas [2], [19] e [42]. Normalmente, o conceito de *positividade estrita forte* é tomado como sendo simplesmente *positividade estrita* (por exemplo em [39]). Na verdade, o conceito de positividade estrita forte impõe, além das condições da fraca, que [42]

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 (G(j\omega) + G'(-j\omega)) > 0$$

e é portanto mais restritivo. Esse fato permite a derivação do seguinte resultado [44]:

Lema 29 (*Lema da positividade*) *A conexão via realimentação negativa de um sistema positivo e um fortemente estritamente positivo é assintoticamente estável.*

O mesmo não pode ser afirmado para o caso da positividade estrita fraca¹¹. A dificuldade está na não equivalência entre positividade estrita e passividade estrita. Como foi notado em [44], para sistemas lineares com as definições dadas anteriormente temos que

- Qualquer versão da positividade estrita implica em passividade do sistema.
- Nenhuma das versões da positividade estrita implica em passividade estrita.

Esses fatos tornam a aplicação do lema da positividade, sem restrições adicionais, muito difícil para sistemas lineares, pois as verificações via variáveis de estado para passividade estrita não podem ser utilizadas para testar a positividade estrita.

2.6.3 Lema da positividade real

Pouco tempo depois de Zames, condições necessárias e suficientes para que um operador $G(s)$ fosse positivo foram derivadas em termos de variáveis de estado. Daremos aqui as condições enunciadas por Anderson em [2] e as extensões para positividade estrita que podem ser encontradas em [39] e [42]:

Teorema 30 (*Lema da positividade real – Anderson*) *Seja $G(s)$ uma função de transferência descrita por $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$, controlável e observável, com pólos no semi-plano esquerdo ou simples no eixo imaginário. Então $G(s)$ é positiva real (denotaremos por $G(s) \geq 0$) se e somente se existirem matrizes $P > 0$, W e L tais que*

$$A'P + PA = -LL' \quad (2.5)$$

$$PB = C' - LW \quad (2.6)$$

$$W'W = D + D' \quad (2.7)$$

Teorema 31 (*Teorema de Anderson para passividade estrita*) *Seja (A, B, C, D) uma representação mínima para $G(s)$, com A Hurwitz ou com pólos simples no eixo imaginário. Então $G(s)$ é estritamente passiva se e somente se existirem matrizes $P > 0$, L , W e um escalar $\epsilon > 0$ tais que (2.5-2.7) sejam satisfeitas, com (2.7) substituída por*

$$W'W = D + D' - \epsilon I.$$

Teorema 32 (*Teorema de Anderson para positividade estrita forte*) *Seja $G(s)$ uma função de transferência descrita por $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$, controlável e observável, A Hurwitz. Então $G(s)$ é fortemente estritamente positiva real se e somente se existirem matrizes $P > 0$, W e L e um escalar $\epsilon > 0$ tais que (2.5-2.7) sejam satisfeitas, com (2.5) substituída por*

$$A'P + PA = -LL' - \epsilon P.$$

¹¹Em [42] os autores provaram a estabilidade para a versão fraca, mas um erro na prova foi detectado em [44]. O contrário também não foi provado, e portanto a versão fraca do lema ainda é uma questão em aberto.

Teorema 33 (Teorema de Anderson para positividade estrita fraca) *Seja $G(s)$ uma função de transferência descrita por $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$, controlável e observável, A Hurwitz. Então $G(s)$ é fracamente estritamente positiva real se e somente se existirem matrizes $P > 0$, W e L tais que (2.5-2.7) sejam satisfeitas e ainda a função de transferência $\mathcal{H}(s) \triangleq L'(sI - A)^{-1}B + W$ for controlável, observável e sem zeros no eixo imaginário.*

Assim, tornou-se possível a verificação da positividade real a partir de uma descrição por variáveis de estado. Note-se, porém, que essa verificação introduz certa conservatividade: para que uma função seja positiva não é necessário, por exemplo, que ela seja controlável e observável.

Através de um conceito um pouco mais restritivo podemos fazer com que a verificação possa ser realizada através de uma equação de Riccati. O resultado que segue pode ser obtido em [32] ou em [33], em um resultado que foi dado como um lema, pois decorre imediatamente dos teoremas anteriores.

Lema 34 *Seja $G(s)$ controlável e observável, com A assintoticamente estável e $D + D' > 0$. Então $G(s)$ é fortemente positiva real¹² (em inglês, strongly positive real) se e somente se existir uma matriz $P > 0$ tal que*

$$A'P + PA + (C - B'P)'(D + D')^{-1}(C - B'P) < 0$$

A nova definição é importante pois *implica em passividade estrita*¹³ De fato, do que vimos anteriormente, a nova definição implica também em positividade estrita no sentido forte e fraco. Devido a essas relações utilizaremos a notação $G(s) > 0$ como abreviação para “ $G(s)$ é fortemente positiva real”.

2.6.4 Verificações LMI

Seguimos com a verificação via LMI da positividade e passividade de funções de transferência. Para derivarmos essa verificação não necessitamos, como pode parecer, passar pela equação de Riccati. Resultados similares podem ser encontrados em [10], porém sem o relacionamento com passividade estrita. A prova dos resultados que seguem pode ser encontrada na seção C.4:

Teorema 35 *Seja $G(s)$ uma matriz de transferência controlável, com representação por variáveis de estado (A, B, C, D) . Então $G(s)$ é passiva se e somente se a seguinte LMI em P for factível:*

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & PB - C' \\ B'P - C & -D - D' \end{bmatrix} \leq 0 \quad P \geq 0 \quad (2.8)$$

¹²Uma função de transferência é *fortemente positiva real* se (1) ela é fracamente estritamente positiva real e (2) $D + D' > 0$.

¹³Esse resultado pode ser obtido pelo leitor da seguinte forma: transformar a inequação do conceito em uma LMI através do complemento de Schur, somar ϵI à LMI, aplicar o complemento de Schur novamente para voltar a uma inequação de Riccati. Não será difícil notar que o termo ϵI que aparece de forma linear poderá ser removido. Aplicando Schur novamente chegamos à conclusão de que a LMI do corolário 36 é satisfeita, comprovando o resultado.

Corolário 36 *Seja $G(s)$ uma função de transferência controlável, com representação por variáveis de estado (A, B, C, D) . Então $G(s)$ é estritamente passiva se e somente a seguinte LMI em P e ϵ for factível:*

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & PB - C' \\ B'P - C & \epsilon I - D - D' \end{bmatrix} \leq 0 \quad P \geq 0, \epsilon > 0$$

A LMI (2.8) aparece em [65] para o caso com $G(s)$ mínimo, o que não é exigido aqui. Essas verificações são para sistemas apenas controláveis. Para sistemas que também são observáveis temos o seguinte resultado, que é útil caso necessitemos inverter a matriz P (o que é feito normalmente nos problemas de síntese):

Corolário 37 *Se além das condições do teorema 35 tivermos (A, C) observável, então pode-se considerar sem perda de generalidade que $P > 0$.*

As definições vistas até agora nos permitem relacionar a condição de positividade como uma restrição à fase do sistema. Sabendo-se que $G(s) + G^*(s) \geq 0 \Rightarrow \forall \omega \in \mathbb{R}, \Re\{G(j\omega)\} \geq 0$, é possível notar que, para que uma função $G(s)$ seja positiva real, o seu gráfico de Nyquist deve estar completamente contido no semi-plano direito, ou seja, a fase de $G(s)$ deve estar contida entre -90° e 90° . Esse resultado permite interpretações bastante interessantes em resultados de estabilidade [12]. Um outro resultado, retirado de [13], também permite interpretações bastante interessantes:

Lema 38 *Um sistema controlável e observável, com $D = 0$, pode ser tornado positivo real por realimentação estática de estados se e somente se $\det(CB) \neq 0$ e os seus zeros de transmissão forem Lyapunov estáveis¹⁴.*

A condição $\det(CB) \neq 0$ equivale, para sistemas onde $D = 0$, a exigir que o número de zeros seja igual ao número de pólos menos um [13]. Uma das implicações desse lema é a de que todo o sistema positivo real possui no máximo um pólo a mais do que zeros. No caso de plantas multivariáveis uma interpretação é fornecida nos apêndices (seção C.3).

2.7 Conexão positividade- \mathcal{H}_∞

Apresentaremos aqui a conexão entre a positividade real e a *limitação real*¹⁵, que é a base da teoria \mathcal{H}_∞ , calcada no teorema do pequeno ganho. Esse resultado, que retiramos de [34], permite estabelecer uma equivalência entre vários resultados da teoria \mathcal{H}_∞ e da teoria baseada na positividade real. Primeiramente vamos definir o conceito de *função limitada real*

Definição 39 *Uma matriz de transferência $H(s)$ é dita limitada real se as duas condições forem satisfeitas:*

1. $H(s)$ é assintoticamente estável.
2. $\|H(s)\|_\infty \leq 1$

¹⁴Na referência, essa última condição define o sistema como sendo de *fase fracamente mínima*.

¹⁵Em inglês, a definição tem o nome de *bounded real*.

Assim, notamos que, como no caso da positividade real, a limitação real também tem uma interpretação no gráfico de Nyquist: se uma função é limitada real, então seu gráfico de Nyquist está inteiramente contido no círculo de centro na origem e raio unitário.

Essa interpretação sugere um paralelo entre a relação entre as noções de positividade e limitação real e a relação entre as noções de estabilidade para sistemas contínuos e discretos. Um sistema discreto estável tem todos os seus pólos no interior do círculo de raio unitário, e um sistema contínuo estável possui todos os pólos em um semi-plano. As mesmas condições (trocando-se “pólos” por “diagrama de Nyquist”) definem sistemas limitados reais e positivos reais. Para o caso de sistemas contínuos-discretos conhecemos um meio, a transformada Cayley (bilinear) de mapear um em outro de tal forma que o estado de estabilidade seja mantido. O resultado que segue mostra que isso também é válido para a abordagem positividade- \mathcal{H}_∞ :

Lema 40 (Haddad e Bernstein [34]) *Seja $\gamma \in \mathbb{R} > 0$. A equivalência entre positividade e limitação é dada pelas seguintes relações:*

1. *Suponha $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. Se $\gamma^{-1}H(s)$ é limitada real e ainda, $\forall \Re(s) > 0$, $\det[I - \gamma^{-1}H(s)] \neq 0$, então a função $G(s) \triangleq [I - \gamma^{-1}H(s)]^{-1}[I + \gamma^{-1}H(s)]$ é positiva real. Uma representação de estados para esse mapeamento é dada por*

$$G(s) \sim \left[\begin{array}{c|c} A + B(I - D)^{-1}C & \sqrt{2}B(I - D)^{-1} \\ \hline \sqrt{2}(I - D)^{-1}C & (I - D)^{-1}(I + D) \end{array} \right].$$

Se $H(s)$ for mínima então $G(s)$ também o será.

2. *Suponha $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. Se $G(s)$ é positiva real e ainda $G(s)$ é analítica para todo $\Re(s) \geq 0$, então a função $\gamma^{-1}H(s) \triangleq [G(s) - I][G(s) + I]^{-1}$ é limitada real. Uma representação para esse mapeamento é dada por*

$$H(s) \sim \gamma \left[\begin{array}{c|c} A - B(I + D)^{-1}C & \sqrt{2}B(I + D)^{-1} \\ \hline \sqrt{2}(I + D)^{-1}C & (D - I)(D + I)^{-1} \end{array} \right].$$

Se $G(s)$ for mínima então $H(s)$ também o será.

Cabe notar que γ pode ser tomado como qualquer valor tal que $\gamma < \|H(s)\|_\infty$. A prova dos dois resultados está em [34].

Capítulo 3

Critérios de Estabilidade para Sistemas Lur'e

3.1 Introdução

Estudaremos nesse capítulo alguns critérios de estabilidade, tratando sempre de sistemas tipo Lur'e. Esse tipo de sistema é caracterizado por uma planta linear realimentada por um bloco não-linear sem memória, ou seja, o sistema é descrito por

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \\ u = -\phi(y, t) \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ e $y \in \mathbb{R}^{n_y}$. Para a aplicação de todos os critérios, excetuando-se o critério do círculo, exige-se que $n_u = n_y$, isto é, que o sistema tenha o mesmo número de entradas e de saídas. Nesses casos definiremos $m = n_u = n_y$. Para a aplicação de vários critérios exige-se que essa representação seja mínima. Definiremos $G(s)$ como a matriz de transferência de malha aberta do sistema. Para problemas de síntese utilizaremos também o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_w w + B_u u \\ y = Cx + D_{wy} w + D_{uy} u \\ u = -Fx \\ w = -\phi(y, t) \end{cases} \quad (3.2)$$

onde F é o ganho para realimentação de estados.

Antes de iniciarmos a descrição dos critérios iremos revisar o conceito de estabilidade absoluta.

3.1.1 Estabilidade Absoluta

O problema de estabilidade absoluta é formulado com base nos sistemas tipo Lur'e, e pode ser colocado da seguinte forma [62]:

Problema da estabilidade absoluta: Sejam as matrizes (A, B, C, D) uma descrição mínima da matriz de transferência quadrada $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$, e seja essa função de transferência realimentada por $u = -\phi(y, t)$, onde $\phi : \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$

pertence ao setor $[a, b]$, com $a < b$. O problema consiste em encontrar condições, dependentes apenas de G , a e b , que garantam a estabilidade¹ do sistema realimentado para *qualquer* função $\phi(\cdot, \cdot)$ com as características mencionadas.

Esse problema é também conhecido como problema da estabilidade absoluta, ou ainda problema de Lur'e.

3.1.2 Critério do pequeno ganho

O critério do pequeno ganho é tratado na literatura muitas vezes como uma condição na norma $\|\cdot\|_\infty$ da função de transferência. Como veremos, esse tratamento é apenas um caso particular de um critério mais geral. Como o critério é tratado de forma completa em várias referências [19] seremos bastante breves nessa seção, mas esse breve tratamento será suficiente para que possamos entender de forma melhor a derivação mais famosa desse critério, o critério do círculo [62].

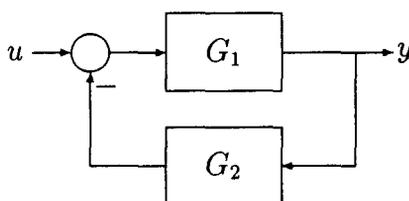


Figura 3.1: Sistema realimentado

Teorema 41 (*Teorema do pequeno ganho*) *Seja o sistema da figura 3.1, com G_1 e G_2 causais e \mathcal{L}_p -estáveis com ganho finito para $p \in [1, \infty]$. Sejam γ_{1p} e γ_{2p} os ganhos² \mathcal{L}_p de G_1 e G_2 . Sob essas condições, se*

$$\gamma_{1p}\gamma_{2p} < 1,$$

então o sistema realimentado é \mathcal{L}_p -estável.

O resultado que é comumente conhecido como “teorema do pequeno ganho” ocorre quando adotamos $p = 2$ e assumimos que G_1 e G_2 são lineares e invariantes no tempo. Nesse caso obtemos $\|G_1\|_\infty \|G_2\|_\infty < 1$. Um outro caso particular interessante ocorre quando G_1 é linear invariante no tempo e $G_2 = \phi(y, t)$ sem memória está contida no setor $[-k, k]$. Nesse caso, temos a estabilidade \mathcal{L}_2 se $\|G_1\|_\infty < k^{-1}$. A vantagem dessa abordagem é a de que temos apenas que calcular a norma $\|\cdot\|_\infty$ da função G_1 , e nesses casos esse cálculo pode ser feito com facilidade.

Não abordaremos aqui nem o problema de análise nem o de síntese através desse resultado, pois o critério do círculo nos fornecerá os instrumentos para tal.

¹Estabilidade global uniformemente assintótica.

²Para definições consultar a seção 2.4.2.

de resultados para sistemas tipo Lur'e é comum considerar-se que $a = 0$, ou seja, que $\phi \in [0, k]$. Isso é feito sem perda de generalidade, pois sempre podemos transformar um sistema Lur'e com uma não-linearidade $\phi_1 \in [a, b]$ em outro equivalente onde $\phi \in [0, k]$ através de *loop-shifting*. Para esses sistemas podemos apresentar o critério de uma forma mais simples:

Corolário 43 *Seja um sistema monovariável descrito por (3.1) de forma mínima, onde $\phi \in [0, k]$. O sistema é globalmente exponencialmente estável se o gráfico de Nyquist de $G(s)$ estiver completamente à direita da reta vertical que passa por $-1/k$.*

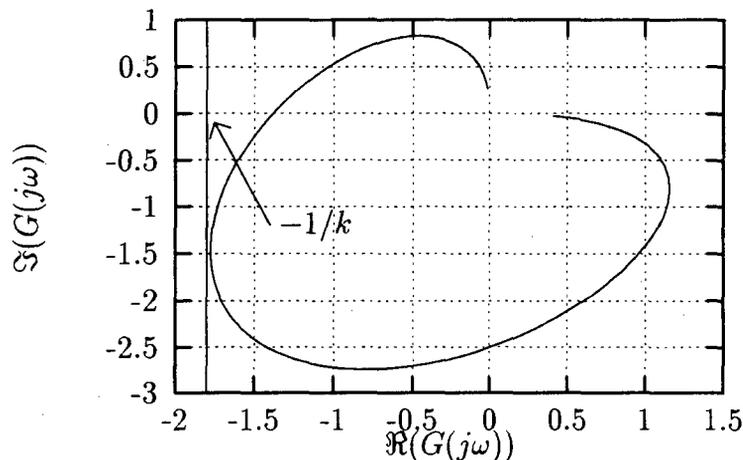


Figura 3.2: Critério do círculo simplificado

Um exemplo de sistema estável pode ser visto na figura 3.2. Como a formulação simplificada preserva a generalidade do problema trataremos sempre de não-linearidades pertencentes ao setor $[0, k]$.

O critério do círculo pode também ser interpretado em termos dos conceitos clássicos de margem de ganho e de fase [46] da seguinte forma: se um sistema é absolutamente estável para não-linearidades no setor $[k_1, k_2]$, então ele possui:

- Margem de ganho $m_g = k_2$.
- Margem de fase ϕ tal que $\cos(\phi) = (k_1 k_2 + 1)/(k_1 + k_2)$.
- Margem de redução de ganho $m_r = 100(1 - k_1)$ por cento.

Com essa interpretação torna-se claro que a síntese via critério do círculo pode ser utilizada para gerar sistemas com margens de fase e de ganho pré-determinadas.

Uma interpretação interessante para os nossos propósitos se dá quando a não-linearidade está no setor $[0, \infty)$. Nesse caso, é exigido que o gráfico de Nyquist esteja totalmente contido no semi-plano direito. Do que já foi visto sobre positividade, temos essa condição satisfeita sempre que $G(s) > 0$. Esse fato permite a derivação da extensão multivariável.

3.2.3 Caso multivariável

A extensão do critério do círculo para o caso multivariável pode ser feita de várias maneiras, dependendo de como é formulada a condição de setor e das suposições a respeito da não-linearidade. A extensão feita aqui é a apresentada em [32], que coloca o critério do círculo multivariável como uma condição de positividade, o que é muito útil quando desejamos obter uma LMI. Uma outra abordagem pode ser obtida em [45], onde o autor deriva condições necessárias e suficientes para a estabilidade absoluta do sistema.

Teorema 44 (*Critério do círculo multivariável*) *Seja o sistema descrito por (3.1) de forma mínima. Seja ainda o conjunto das não-linearidades descrito por*

$$\phi_c \triangleq \{ \phi : \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_u} : \phi(y, t)'[\phi(y, t) - Ky] \leq 0, \\ y \in \mathbb{R}^{n_y} \text{ e } \phi(y, \cdot) \text{ Lebesgue mensurável } \forall y \in \mathbb{R}^{n_y} \}$$

Então, se $I + KG(s) > 0$ o sistema é absolutamente estável $\forall \phi \in \phi_c$.

A prova desse teorema pode ser encontrada em [32] de uma forma um pouco mais generalizada. Deve-se notar, também, que devido à formulação do critério, não é exigido que o sistema tenha o mesmo número de entradas e saídas.

Formulação LMI

O teorema 44, juntamente com o lema 34, nos dá condições de derivarmos uma condição equivalente em termos de uma LMI. Essa formulação oferece grandes vantagens, entre elas a de podermos determinar o maior setor para o qual o critério do círculo garante a estabilidade. A formulação LMI é uma decorrência direta da formulação do critério por positividade, e por isso será apresentada como um corolário.

Corolário 45 (*Formulação LMI para o teorema 44*) *Sejam o sistema e o conjunto das não-linearidades descritos como no teorema 44. Então, se a LMI em P*

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & (KC - B'P)' \\ KC - B'P & -(2I + KD + D'K') \end{bmatrix} < 0, \quad P > 0$$

for factível o sistema é absolutamente estável $\forall \phi \in \phi_c$.

Prova: De acordo com o teorema 44, teremos a estabilidade absoluta se for verificada a condição $I + KG(s) > 0$. Calculando a representação de estados de $I + KG(s)$ ⁴ e aplicando o lema 34 vemos que a condição é equivalente à satisfação de $A'P + PA + (KC - B'P)'(2I + KD + D'K')^{-1}(KC - B'P) < 0$ para alguma $P > 0$. Aplicando o complemento de Schur na última expressão chegamos à LMI do corolário. ■

A representação por LMI é de fato muito mais versátil do que o teorema original, pois podemos, entre outras coisas, calcular qual o “maior” setor para o qual o critério do círculo garante estabilidade, pois K aparece de forma afim na expressão. Não é difícil notar que incertezas do tipo politopo podem ser consideradas em *todas* as matrizes de descrição do sistema através da utilização de um procedimento similar ao utilizado na seção 2.5.

⁴A representação é $(A, B, KC, I + KD)$.

Formulação Lyapunov

Se um sistema satisfaz o critério do círculo para um determinado K , então pode-se obter uma função de Lyapunov para o mesmo. O resultado apresentado aqui é tratado em [32]:

Teorema 46 *Seja o sistema (3.1) tal que as condições do teorema 44 sejam satisfeitas. Então existe uma matriz $P > 0$ tal que a função*

$$V(x) = x'Px$$

é uma função de Lyapunov para o sistema realimentado. Mais ainda, uma matriz P pode ser obtida através da LMI apresentada no corolário 45.

Em outras palavras, o que o teorema nos diz é que, se existir $P > 0$ tal que

$$A'P + PA + (KC - B'P)'(2I + KD + D'K')^{-1}(KC - B'P) < 0,$$

então a função $V(x) = x'Px$ é uma função de Lyapunov para o sistema.

3.2.4 Síntese

O problema de síntese através do critério do círculo foi abordado por Molander e Willems [46] para o caso monovariável. A solução foi dada em termos de equações de Riccati, e uma interessante interpretação do critério do círculo em termos de margem de ganho e de fase foi apresentada (ver seção 3.2.2). Assim, podemos utilizar a síntese aqui apresentada para gerar sistemas com margem de ganho e de fase pré-especificadas, da seguinte forma: sejam m_g e m_f as margens de ganho e de fase desejadas. Então basta sintetizarmos um controlador para não-linearidades pertencentes ao setor $[(m_g \cos(m_f) - 1)/(m_g - \cos(m_f)), m_g]$ e teremos garantidamente as margens desejadas.

Nessa seção é apresentada a solução para o problema mais geral, multivariável: suponha que temos um sistema na forma (3.1), e que desejamos, para um determinado setor K , projetar uma realimentação de estados que torne o sistema absolutamente estável. A formulação LMI nos fornece uma solução para esse problema:

Teorema 47 *(Síntese com o critério do círculo) Sejam o sistema (3.2), e o conjunto das não-linearidades descritos como no teorema 44. Então, se a LMI em W e L*

$$\begin{bmatrix} AW + WA' - B_u L - L' B_u' & (KCW - KD_{uy}L - B_w')' \\ KCW - KD_{uy}L - B_w' & -(2I + KD_{wy} + D'_{wy}K') \end{bmatrix} < 0, \quad W > 0 \quad (3.3)$$

for factível, existe um ganho F tal que a realimentação $u = -Fx$ faz com que o sistema seja absolutamente estável $\forall \phi \in \phi_c$. Mais ainda, esse ganho é dado por

$$F = LW^{-1}$$

Prova: O sistema realimentado por $u = -Fx$ tem a seguinte representação de estados:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - B_u F)x + B_w w \\ y = (C - D_{uy} F)x + D_{wy} w \\ w = -\phi(y, t) \end{cases}$$

Sejam W e L soluções para a LMI (3.3). Através do complemento de Schur temos que

$$AW + WA' - B_u L - L' B_u' + \\ + (KCW - KD_{uy}L - B_w')'(2I + KD_{wy} + D_{wy}'K')^{-1}(KCW - KD_{uy}L - B_w') < 0$$

é satisfeita. Definindo $P = W^{-1}$ e $F = LP$ temos que

$$(A - B_u F)'P + P(A - B_u F) + \\ + (K(C - D_{uy}F) - B_w'P)'(2I + KD_{wy} + D_{wy}'K')^{-1}(K(C - D_{uy}F) - B_w'P) < 0$$

também é satisfeita. Podemos então concluir, pelo lema 34, que $I + KG(s) > 0$ (onde $G(s)$ é a matriz de transferência do sistema realimentado), e pelo teorema 44 temos que o sistema é absolutamente estável. ■

Um resultado semelhante pode ser encontrado em [24]. Esse resultado, porém, considera a não-linearidade desacoplada e ainda que $D_{wy} = D_{uy} = 0$, o que não é exigido aqui. Cabe notar que, se $D_{uy} = 0$, então podemos estender o resultado de síntese para que o setor K apareça de forma *afim* na LMI. Essa extensão, que é realizada no corolário 85 (página 63), pode ser feita graças aos resultados obtidos para o problema de realimentação de saída.

3.3 Critério de Popov

3.3.1 Introdução

O critério de estabilidade de Popov foi originalmente formulado para sistemas “similares” a sistemas do tipo Lur’e. O sistema para o qual o critério foi desenvolvido é o seguinte:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - b\phi(y) \\ y = cx + d\xi \\ \xi = -\phi(y) \end{cases} \quad (3.4)$$

Não é difícil transformar esse sistema em um sistema aumentado que toma a forma exata de um sistema tipo Lur’e. O sistema modificado tem a seguinte representação:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [c \quad d] \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} \\ u = -\phi(y) \end{cases} \quad (3.5)$$

Dessa forma temos que o critério de Popov aplica-se a sistemas tipo Lur’e com a estrutura indicada no sistema modificado. O critério foi primeiramente desenvolvido para o caso monovariável, e extensões foram feitas posteriormente para o caso multivariável. Para o caso monovariável temos, ainda, uma interpretação gráfica para o critério.

O critério de Popov pode ainda ser derivado a partir de uma função de Lyapunov (ver [32]). Assim, podemos aplicar o critério para qualquer tipo de sistema Lur’e, mesmo os que não obedecem à estrutura (3.5) [18].

Cabe observar que, para a aplicação do critério de Popov, exigimos que a não-linearidade seja *invariante no tempo*. Isso ficará claro quando a função de Lyapunov for escrita. Cabe lembrar que outros critérios, como por exemplo o do círculo, não fazem essa exigência, e são naturalmente mais conservativos para esse tipo de não-linearidade.

3.3.2 Caso monovariável

O caso monovariável do critério de Popov é tratado em várias referências, entre elas [62]. Considera-se, para esse tratamento, o sistema descrito pelas equações (3.4). Como veremos adiante, o critério pode ser aplicado a sistemas na forma (3.1) com $\phi = \phi(y)$ se abordarmos o problema como uma condição de positividade.

Normalmente, o critério de Popov é formulado considerando-se que a não-linearidade pertence ao setor *aberto* $(0, k)$. Isso é feito porque o sistema (3.5) é instável a laço fechado, e portanto não admite o ganho nulo de realimentação. Vamos agora ao teorema:

Teorema 48 (*Critério de Popov*) *Seja o sistema (3.4) descrito de forma mínima, com A Hurwitz e $d > 0$. Uma condição suficiente para que o sistema seja globalmente assintoticamente estável para $\phi \in (0, k)$ é a de que exista um número $r > 0$ tal que*

$$\Re[(1 + j\omega r)G(j\omega)] + \frac{1}{k} > 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

onde $G(s) = \frac{d}{s} + c(sI - A)^{-1}b$.

O critério de Popov pode ser estendido para sistemas do tipo (3.1) com $\phi = \phi(y) \in [0, k]$, com a condição de que a derivada de $g(t)$ seja distributiva [18]. Colocando o resultado como uma condição de positividade temos o seguinte teorema [11]:

Teorema 49 (*Critério de Popov Generalizado [11]*) *Seja o sistema (3.1) com $D = 0$ e $\phi = \phi(y)$. Se existir r tal que $[(1 + rs)G(s) + 1/k]$ seja positivo real, então sistema é globalmente assintoticamente estável para toda $\phi \in (0, k)$.*

Essa formulação nos permite uma interessante interpretação em termos de fase da planta: suponha, por simplicidade, que $\phi \in (0, \infty)$. Então o critério se reduz a $\Re[(1 + rs)G(s)] \geq 0$, e nesse caso necessita-se que $r \geq 0$, pois uma função positiva real tem a sua inversa estável. Da interpretação de positividade real, temos que o diagrama de Nyquist de $(1 + rs)G(s)$ deve estar contido no semi-plano direito, ou seja, a fase deve estar contida entre -90° e 90° . Como o multiplicador $(1 + rs)$ tem a fase contida entre 0° e 90° , notamos que o *critério de Popov, para não linearidades no setor $(0, \infty)$, não consegue garantir estabilidade para nenhuma função $G(s)$ cujo gráfico de Nyquist adentre o segundo quadrante*⁵.

Se retornarmos à condição original $\phi \in (0, k)$, o resultado é o seguinte [12]: o *critério de Popov não consegue garantir estabilidade para nenhuma função $[G(s) + 1/k]$ cujo gráfico de Nyquist adentre o segundo e o terceiro quadrantes*⁶.

⁵Ou seja, cuja fase seja maior que 90° em algum ponto.

⁶Ou seja, que a fase de $[G(s) + 1/k]$ seja maior que 90° em algum ponto e menor que -90° em outro.

Interpretação gráfica

A interpretação gráfica do critério se faz sobre o *gráfico de Popov*. Esse gráfico é semelhante ao gráfico de Nyquist, mas o eixo vertical é substituído por $\Im(\omega G(j\omega))$, e ω varia em \mathbb{R}_+ .

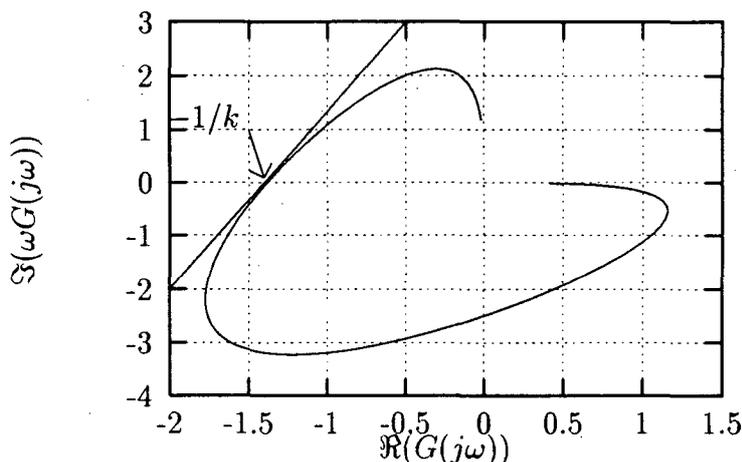


Figura 3.3: Interpretação gráfica do critério de Popov

O critério nos diz que deve existir uma reta com inclinação positiva (igual ao inverso do escalar r do teorema) que passe pelo ponto $-\frac{1}{k} + j0$ tal que o gráfico de Popov fique completamente à direita dessa reta, sem tocá-la em nenhum ponto. Essa reta também é conhecida como *reta de Popov*. Um exemplo da interpretação gráfica pode ser visto na figura 3.3. Essa interpretação decorre da relação $\Re[(1 + j\omega r)G(j\omega)] + \frac{1}{k} = \Re[G(j\omega)] - r\omega \Im[G(j\omega)] + \frac{1}{k}$.

Formulação Lyapunov

A conexão entre o critério de Popov, Lyapunov e positividade real pode ser encontrada em [32]. Vamos enunciar, para o caso monovariável, o resultado obtido em [32] para sistemas multivariáveis. Como podemos notar, não é exigida a estrutura do sistema (3.4) para a aplicação do resultado.

Teorema 50 *Seja o sistema (3.1), com $\phi = \phi(y)$, uma entrada e uma saída e ainda $D = 0$. Suponha que esse sistema satisfaz*

$$\frac{1}{k} + (1 + rs)G(s) > 0 \quad (3.6)$$

com $k > 0$ e para algum $r \geq 0$. Então existe $P > 0$ tal que, para toda $\phi \in [0, k]$, a função

$$V(x) = x'Px + 2r \int_0^y \phi(\sigma) d\sigma$$

é uma função de Lyapunov para o sistema referido.

Ainda, se o sistema satisfaz as condições do teorema, então a matriz P pode ser encontrada através da mesma matriz P utilizada para a verificação da condição (3.6) através do lema 34 (página 27).

Critério de Popov robusto - incertezas tipo intervalo

O critério de Popov, como foi enunciado anteriormente, exige que a descrição da planta seja conhecida com exatidão. Um resultado recente, obtido em [15], estende o critério para o caso de sistemas incertos através dos resultados de Kharitonov (ver seção 2.3.1):

Teorema 51 (*Critério de Popov Robusto*) *Suponha que a função de transferência do sistema (3.4) pertença a uma família de plantas-intervalo estáveis \mathcal{G}_I . Uma condição suficiente para que o sistema seja absolutamente estável para $\phi \in [0, k]$ e para toda $G \in \mathcal{G}_I$ é a de que exista um escalar $r \geq 0$ tal que*

$$\Re[(1 + j\omega r)G(j\omega)] + \frac{1}{k} > 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

para toda $G \in \mathcal{G}_K$, onde \mathcal{G}_K são as dezesseis plantas obtidas de \mathcal{G}_I através dos polinômios de Kharitonov, com $d \neq 0$ para toda $G \in \mathcal{G}_K$.

3.3.3 Caso multivariável

Assim como no caso do critério do círculo, a extensão do critério de Popov para o caso multivariável pode ser feita de várias maneiras. Em todos os casos da extensão de Popov, porém, considera-se que o sistema possui o mesmo número de entradas e de saídas. Uma extensão geral pode ser encontrada em [19]. Mostraremos aqui a extensão apresentada em [32].

Como seria de se esperar, a interpretação geométrica para o caso multivariável torna-se muito difícil, e devemos nos contentar apenas com as condições matemáticas do critério.

Formulação por positividade

Teorema 52 (*critério de Popov multivariável*) *Seja o sistema descrito por (3.1), quadrado, com $\phi = \phi(y)$ e $D = 0$. Seja ainda o conjunto das não-linearidades de realimentação descrito por*

$$\phi_c \triangleq \left\{ \phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \phi'(y)[K^{-1}\phi(y) - y] \leq 0, y \in \mathbb{R}^m \right\}$$

onde $K \in \mathbb{R}^{m \times m} > 0$ e $\phi(y) = [\phi_1(y_1) \quad \phi_2(y_2) \quad \cdots \quad \phi_m(y_m)]'$. Então, se existir uma matriz diagonal $R \geq 0$ tal que

$$K^{-1} + (I + Rs)G(s) > 0,$$

temos que o sistema realimentado é assintoticamente estável para todas as não-linearidades pertencentes ao conjunto ϕ_c .

Como podemos notar, esse teorema exige que as não-linearidades da realimentação estejam desacopladas. A condição de setor recai na condição $0 \leq \phi_i(y_i) \leq k_i y_i^2$ se K é uma matriz diagonal.

Formulação por LMI

A formulação em termos de positividade é bastante útil para expressar o critério em termos de LMI. Lembrando os resultados da seção 2.6, podemos chegar, após algumas manipulações (ver [32]), a uma condição equivalente à do teorema 52:

Corolário 53 *Seja o sistema e a não-linearidade descritos como no teorema 52. Então, se $(K^{-1} + RCB) + (K^{-1} + RCB)' > 0$ e se existir $P > 0$ e uma matriz diagonal $R \geq 0$ tais que*

$$\begin{aligned} & A'P + PA + (C + RCA - B'P)' \\ & \cdot [(K^{-1} + RCB) + (K^{-1} + RCB)']^{-1}(C + RCA - B'P) < 0 \end{aligned}$$

o sistema é assintoticamente estável para toda $\phi \in \phi_c$.

A utilização desse corolário e do complemento de Schur nos leva diretamente à formulação equivalente por LMI:

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & (C + RCA - B'P)' \\ C + RCA - B'P & -(K^{-1} + RCB) - (K^{-1} + RCB)' \end{bmatrix} < 0 \quad (3.7)$$

onde $P > 0$ e $R \geq 0$ e diagonal. Uma formulação semelhante a essa pode ser encontrada em [24]. Em particular, a formulação LMI pode ser útil para a obtenção de algoritmos de síntese a partir de critérios de análise [24], além de permitir a inclusão de incertezas tipo politopo nas matrizes A e B da planta.

Análise por Lyapunov

O fato das não-linearidades serem desacopladas permite a derivação de uma função de Lyapunov para sistemas absolutamente estáveis pelo critério de Popov. O resultado é o que segue:

Teorema 54 *Se um sistema satisfaz o teorema 52, então existem matrizes $P > 0$ e $R \geq 0$ diagonal tais que a função*

$$V(x) = x'Px + 2 \sum_{i=1}^m \int_0^{y_i} \phi_i(\sigma) R_i d\sigma$$

é uma função de Lyapunov para o sistema realimentado, para toda $\phi \in \phi_c$.

A prova pode ser encontrada em [32]. As matrizes P e R , como no caso mono-variável, podem ser obtidas das mesmas matrizes utilizadas na verificação da condição de positividade do teorema 52 através do lema 34 (página 27). O escalar R_i da equação é simplesmente a i -ésima componente diagonal da matriz R .

3.3.4 Síntese

O objetivo dessa seção é derivar métodos de síntese baseados no critério de Popov, ou seja, sintetizar controladores que garantam a estabilidade de um sistema quando realimentado por uma não-linearidade desconhecida. A abordagem utilizada será sempre a abordagem convexa, via LMI. Outros resultados da síntese a partir do critério de Popov podem ser encontrados em [33], e não serão apresentados aqui. Como veremos, o resultado obtido não é, em verdade, uma LMI, e isso implica em uma certa dificuldade da utilização do mesmo para a síntese. Na verdade, o resultado apresentado requer o conhecimento *a priori* de uma matriz R para ser uma LMI, e essa LMI passa a não ser mais equivalente ao critério de Popov.

Utilizaremos para tratar o problema de síntese o sistema (3.2), com $\phi(y, t) = \phi(y)$ e $D_{wy} = D_{uy} = 0$. Vamos supor que a não-linearidade ϕ é desacoplada e satisfaz a condição de setor

$$\phi_c \triangleq \left\{ \phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \phi'(y)[K^{-1}\phi(y) - y] \leq 0, y \in \mathbb{R}^m, K \in \mathbb{R}^{m \times m} > 0 \right\}.$$

O resultado obtido aqui é um pouco mais abrangente do que o obtido em [24], embora o método de obtenção seja exatamente o mesmo. Por essa razão a prova do teorema será omitida.

Teorema 55 (*Síntese com o critério de Popov*) *Seja o sistema descrito como anteriormente. Então, se a inequação matricial em W, L e R*

$$\begin{bmatrix} WA' + AW - L'B'_u - B_uL & ((C + RCA)W - RC B_uL - B'_w)' \\ (C + RCA)W - RC B_uL - B'_w & -K^{-1} - RC B_w - (K^{-1} + RC B_w)' \end{bmatrix} < 0$$

for factível e $W > 0, R$ diagonal ≥ 0 , existe F tal que o sistema realimentado é absolutamente estável. Nesse caso, a realimentação F pode ser computada por

$$F = LW^{-1}$$

Deve-se notar que a inequação matricial do teorema 55 (uma BMI) somente é uma LMI de fato se a matriz R for dada e, das seções anteriores, sabemos que essa matriz é desconhecida *a priori*. Esse fato é notado em [24], mas até o presente momento, segundo o nosso conhecimento, não existe nenhuma solução geral para esse problema.

3.4 Critério de Brockett e Willems

3.4.1 O critério de estabilidade

O resultado que será tratado aqui não será propriamente o critério de Brockett e Willems, mas sim um resultado utilizado pelos mesmos para relacionarem o critério de Popov com a conjectura de Aizerman. Os resultados aqui relacionados podem ser obtidos em [11]. Cabe aqui lembrar o conteúdo da conjectura de Aizerman. Segundo a mesma, deveríamos ter o seguinte resultado:

Proposição 56 (*Conjectura de Aizerman*) *Se um sistema na forma (3.1) for estável para toda $\phi(y, t) = ky$ tal que $k_1 \leq k \leq k_2$, então ele é absolutamente estável para $\phi \in [k_1, k_2]$.*

Em outras palavras, o que a conjectura de Aizerman diz é que bastaria testarmos a estabilidade para todas as realimentações *lineares* para decidirmos sobre a estabilidade com realimentações *não-lineares*. Infelizmente essa conjectura é, em geral, falsa. Existem casos particulares, porém, onde ela é verdadeira.

Estudando a relação entre a conjectura de Aizerman e o critério de Popov, Brockett e Willems chegaram a um resultado que permite, através da teoria da positividade real, testar a condição da conjectura. Esse resultado pode ser entendido como um critério de estabilidade, com a peculiaridade de que é um critério *necessário e suficiente*.

Teorema 57 (Brockett e Willems [11]) *Seja o sistema (3.1) com $\phi(y, t) = ky, 0 < k < k_2$. O sistema é absolutamente estável se e somente se*

$$\exists Z(s) \geq 0 : Z(s)[G(s) + 1/k_2] \geq 0$$

com $Z(s)$ racional.

3.4.2 Formulação LMI

Não existe ainda uma formulação geral, via LMI, para a verificação do critério de Brockett e Willems. Existem, porém, várias abordagens que restringem o espaço de multiplicadores $Z(s)$ de forma a gerar um critério que seja verificável via LMI. A abordagem aqui tratada foi obtida de [28]. Para que o resultado possa ser enunciado introduziremos primeiro um resultado provado⁷ na seção C.4.6:

Lema 58 *A classe de funções de transferência fortemente positivas reais é dada por*

$$Z(s) = C_z(sI - A_z)^{-1}B_z + D_z$$

onde (A_z, B_z, C_z, D_z) são tais que a seguinte LMI é satisfeita

$$\begin{bmatrix} A'_z + A_z & B_z - C'_z \\ B'_z - C_z & -D_z - D'_z \end{bmatrix} < 0 \quad (3.8)$$

O resultado é importante pois parametriza linearmente *todas* as funções de transferência racionais tais que $Z(s) > 0$. A partir dele podemos gerar uma condição suficiente para a satisfação do critério de Brockett.

Teorema 59 *Seja o sistema (3.1) com $\phi(y, t) = ky \in [0, \infty)$. O sistema é absolutamente estável se o seguinte problema LMI em B_z, D_z, S, W, X e Y for factível:*

$$\begin{bmatrix} X + X' & X + Y'B' + WA' & Y'D' + WC' - B_z \\ X' + BY + AW & AS + SA' + BY + Y'B' & Y'D' + SC' - BD_z \\ DY + CW - B'_z & DY + CS - D'_z B' & -DD_z - D'_z D' \end{bmatrix} < 0 \quad (3.9)$$

$$\begin{bmatrix} X + X' & Y' - B_z \\ Y - B'_z & -D_z - D'_z \end{bmatrix} < 0$$

$$W > 0, \quad P > 0$$

Note que a segunda LMI é exatamente a LMI (3.8) para o sistema (X, B_z, Y, D_z) .

⁷O resultado pode ser obtido de [28] ou de [26], com pequenas diferenças conceituais.

Prova: Seja $G(s) = (A, B, C, D)$ e $Z(s) = (A_z, B_z, C_z, D_z)$. A representação por variáveis de estado da conexão em cascata das duas funções é dada por

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & \tilde{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_z & 0 & B_z \\ BC_z & A & BD_z \\ \hline DC_z & C & DD_z \end{array} \right] \quad (3.10)$$

Para aplicarmos o critério de Brockett necessitamos agora verificar a passividade tanto de $Z(s)$ quanto de $Z(s)G(s)$. Isso pode ser feito, de forma suficiente, a partir das LMI

$$\begin{bmatrix} WA'_z + A_zW & WC'_z - B_z \\ C_zW - B'_z & -D_z - D'_z \end{bmatrix} < 0 \quad \begin{bmatrix} \tilde{W}\tilde{A}' + \tilde{A}\tilde{W} & \tilde{W}\tilde{C}' - \tilde{B} \\ \tilde{C}\tilde{W} - \tilde{B}' & -\tilde{D} - \tilde{D}' \end{bmatrix} < 0 \quad (3.11)$$

Como as matrizes de descrição do multiplicador não aparecem de forma afim, restringe-se a matriz \tilde{W} a possuir a forma

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} W & W \\ W & S \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Desenvolvendo as inequações (3.11) para a nova estrutura de \tilde{W} e definindo $X = A_zW$ e $Y = C_zW$ chegamos exatamente em (3.9) e a uma condição suficiente para a satisfação do critério de Brockett e Willems. ■

3.5 Critério de Zames e Falb

3.5.1 Introdução

Os critérios de estabilidade apresentados até agora podem ser representados através da seguinte condição no domínio frequência⁸:

$$\Re[M(j\omega)G(j\omega)] > 0 \quad (3.13)$$

Podemos notar que para o critério do círculo temos $M(j\omega) = 1$ e para o critério de Popov temos $M(j\omega) = 1 + j\omega r$. Essa observação nos leva à idéia de um critério mais geral, e nos sugere a seguinte pergunta: quais as funções M fazem com que a satisfação de (3.13) implique na estabilidade absoluta?

Uma resposta inicial foi fornecida por Zames em [67]. Pouco tempo depois, Zames e Falb [68] ampliaram o conjunto das funções M admissíveis, gerando um critério muito poderoso para a análise de estabilidade de sistemas incertos.

3.5.2 A idéia de multiplicadores

A idéia básica por trás da equação (3.13) é a de *multiplicadores*. Introduzida em [67], envolve várias definições a respeito de setores, definições essas que já foram abordadas na seção 2.2. A abordagem básica é a seguinte: retiramos um elemento $K(s)$ da parte linear da planta e o colocamos com a parte não-linear, aplicando então o critério do círculo. A escolha adequada de K pode fazer com que o novo sistema satisfaça o critério do círculo.

⁸Considerando que a não-linearidade está no setor $(0, \infty)$ ou $[0, \infty]$.

A dificuldade, como foi notado na seção 2.2, é a de obtermos o setor resultante da união de K com o elemento não linear. Para que a relação com a notação da condição (3.13) seja mantida, vamos utilizar $K(s) = M^{-1}(s)$, por razões que serão vistas posteriormente. Vejamos agora a abordagem com um pouco mais de detalhes:

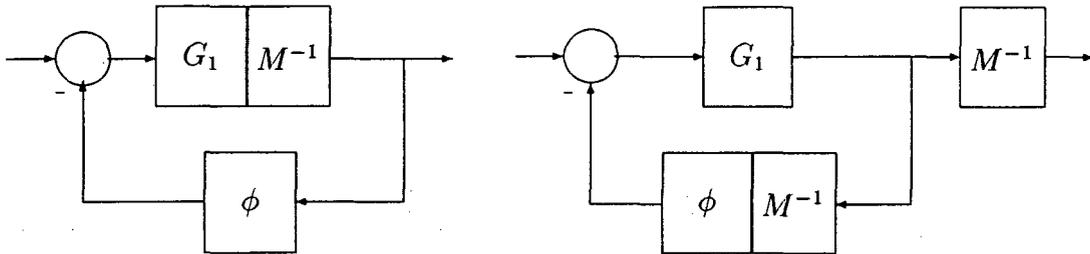


Figura 3.4: Remoção de multiplicador do sistema

Suponha que temos uma planta descrita pela função de transferência $G(s)$, e que essa função, por sua vez, possa ser desmembrada em duas partes, tais que

$$G(s) = M^{-1}(s)G_1(s)$$

Então, como indicado na figura 3.4, podemos deslocar a parte $M^{-1}(s)$ para a não-linearidade e, sob condições apropriadas de $M(s)$, manteremos o estado de estabilidade mesmo desprezando o bloco M^{-1} da saída. Assim, temos um novo sistema, onde a parte linear é representada por $G_1(s)$ e a realimentação pela combinação de $\phi(x)$ e $M^{-1}(s)$.

A idéia agora é testar a estabilidade do sistema resultante através do critério do círculo. Como a condição de estabilidade da saída foi mantida pela escolha apropriada de $M(s)$, se o sistema resultante for estável o sistema original também será. Temos então dois problemas:

1. Quais as escolhas de $M(s)$ que mantêm a estabilidade da saída?
2. Dentro dessas escolhas, quais as úteis para a determinação da estabilidade?

Uma resposta para o primeiro problema pode ser dada através de duas condições suficientes: para que possamos desprezar o multiplicador na saída basta que $M^{-1}(s)$ seja estável, e para que o multiplicador não introduza conservatividade⁹ basta que $M(s)$ seja estável (pois assim garantimos que cancelamentos entre pólos e zeros instáveis de $G(s)$ continuarão ocorrendo em $G_1(s)$). Note que $M(s)$ não precisa ser próprio. Podemos ter, por exemplo, $M(s) = 1 + s$, que é o multiplicador de Popov.

A resposta para o segundo problema decorre da interpretação de setores (seção 2.2) e da interpretação gráfica do critério do círculo (seção 3.2.2), e pode ser resumida como segue:

1. A combinação de $\phi(x)$ e $M^{-1}(s)$ deve estar em um setor não maior do que o dado pelo produto escalar dos setores originais de ϕ e M^{-1} .

⁹No sentido de manter a estabilidade caso o sistema original seja estável.

2. A planta original, $G(s)$, deve estar contida em um setor maior que o produto escalar dos setores de $G_1(s)$ e $M^{-1}(s)$.

Qual o significado dessas condições? Se conseguirmos satisfazer as duas, então teremos *afastado* o gráfico de Nyquist da parte linear da região de instabilidade do critério do círculo (ver figura 3.5). Assim, escolhas adequadas de $M(s)$ podem reduzir de forma significativa a conservatividade do critério original.

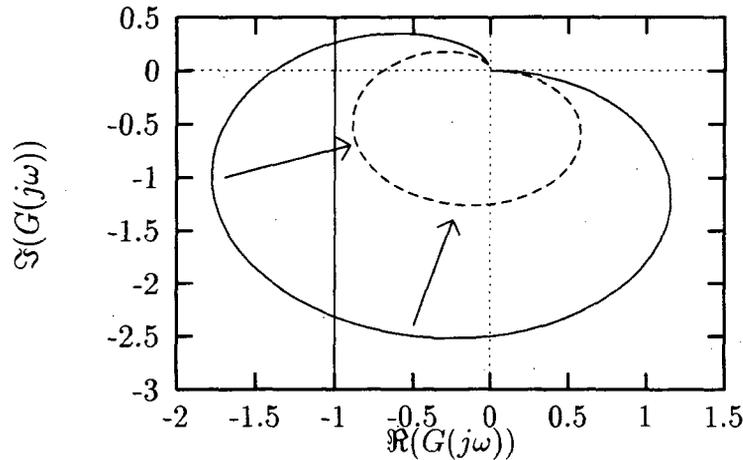


Figura 3.5: Efeito do multiplicador

Um dos problemas na escolha de $M(s)$ é a determinação do setor resultante do bloco de realimentação. Como já visto na seção 2.2, não existe uma expressão simples para determinarmos qual o setor resultante da união de uma não-linearidade com uma função de transferência. Para algumas classes de não-linearidades e de multiplicadores, porém, essa expressão existe. Assim, o resultado particular da seção 2.2 nos mostra porque o critério de Popov considera não-linearidades que não variam no tempo.

Por último cabe notar como essa idéia de multiplicadores se aplica à condição (3.13). Suponha que temos um sistema com a planta original $G(s)$. Multipliquemos agora essa planta por $M(s)M^{-1}(s)$. Da mesma forma como fizemos anteriormente, deslocamos $M^{-1}(s)$ para a realimentação. Ficamos assim com a parte linear igual a $M(s)G(s)$. A aplicação do critério do círculo nos leva exatamente à condição (3.13), como desejávamos¹⁰.

3.5.3 O critério de estabilidade

O critério de Zames e Falb [68] é uma aplicação das idéias vistas na seção 3.5.2. Zames e Falb encontraram, para um determinado conjunto de não-linearidades, uma classe bastante ampla de multiplicadores que permite a realização do teste pela condição (3.13). O conjunto das não-linearidades às quais se aplica o critério de Zames e Falb é o seguinte:

$$\phi_{zf} \triangleq \{ \phi(x) : \phi(x) \in [0, \infty), (x - y)[\phi(x) - \phi(y)] \geq 0 \} \quad (3.14)$$

¹⁰Note que agora o setor do bloco de realimentação já não é o mesmo, e para determiná-lo deveremos exigir certas características da não-linearidade.

esse conjunto impõe que as não-linearidades sejam monotonicamente não decrescentes e invariantes no tempo.

Para o enunciado do critério de estabilidade Zames e Falb utilizaram a condição (3.13) substituindo $M(s)$ por $(1 - Z(s))$. Tornou-se costumeira a nomenclatura *multiplicador* também para a função de transferência $Z(s)$, e utilizaremos essa nomenclatura aqui. Denotaremos por $z(\cdot)$ a transformada inversa de Laplace de $Z(s)$. Para o conjunto de não-linearidades (3.14) a classe de multiplicadores permissíveis foi derivada como sendo

Definição 60 (*Multiplicadores de Zames e Falb*) Sejam $z(\cdot) > 0 \in \mathcal{L}_1$ e $\{\sigma_i\}, \{z_i > 0\}$ seqüências em l_1 tais que

$$\int_{-\infty}^{\infty} z(t)dt + \sum_{i=1}^{\infty} z_i < 1$$

então a classe de multiplicadores admissíveis é dada por:

$$Z_{zf} \triangleq \left\{ Z(j\omega) : Z(j\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i e^{-j\omega\sigma_i} + \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-j\omega t} dt \right\}$$

De posse das definições de ϕ_{zf} e Z_{zf} podemos finalmente enunciar o critério de estabilidade:

Teorema 61 (*Critério de Zames e Falb*) Seja o sistema realimentado descrito por (3.1), onde a não linearidade pertence ao conjunto ϕ_{zf} . Se existir uma função de transferência $Z(s) \in Z_{zf}$ tal que

$$\Re[(1 - Z(j\omega))G(j\omega)] > 0$$

então o sistema é assintoticamente estável.

A prova pode ser encontrada em [68]. Podemos notar que o critério não fornece pistas de como encontrar a escolha adequada de $Z(s)$ dentro do conjunto Z_{zf} . Existem, porém, algoritmos para a busca desse multiplicador de maneira aproximada (veja, por exemplo, o resultado de Safonov e Wyetzner [58] ou o de Gapski e Geromel [25]).

Para o caso de não-linearidades cuja derivada pertença a um setor, foi obtido o seguinte corolário:

Corolário 62 Seja o sistema realimentado descrito por (3.1), onde a não linearidade pertence ao conjunto ϕ_{zf} e ainda $d\phi(x)/dx \in [a, b]$. Se existir uma função de transferência $Z(s) \in Z_{zf}$ tal que

$$\Re \left[(1 - Z(j\omega)) \left(G(j\omega) + \frac{1}{b} \right) \left(G^*(j\omega) + \frac{1}{a} \right) \right] > 0$$

e o gráfico de Nyquist de $G(s)$ não englobar o ponto $(-1/a, 0)$, então o sistema é assintoticamente estável.

3.5.4 Formulação LMI

O resultado descrito aqui foi obtido de [14]. Nessa referência vários resultados são obtidos para a abordagem LMI do critério de Zames e Falb. Trataremos aqui apenas do caso de análise da estabilidade de um sistema¹¹. Como trataremos de sistemas multivariáveis,

¹¹É possível estimar o "maior setor" para o qual o critério de Zames e Falb é válido, o que é feito pelos autores.

redefiniremos alguns conjuntos: o conjunto de não-linearidades admissíveis é dado por

$$\phi_{ZF} \triangleq \left\{ \text{diag} \{ \phi_1(x), \dots, \phi_p(x) \} \mid \phi_i(x) : \mathbb{R}^{m_i} \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}, \|\phi_i(x)\| < \infty, \phi_i(0) = 0, \right. \\ \left. [\phi(y) - \phi(x)]'(y - x) \geq 0 \right\} \quad (3.15)$$

e o conjunto de multiplicadores admissíveis é dado de acordo com o das não-linearidades

$$Z_{ZF} \triangleq \left\{ \text{diag} \{ Z_1 I_{m_1}, \dots, Z_p I_{m_p} \} : Z_i \in Z_{zf}, \text{ com } \{ z_i = 0 \} \right\} \quad (3.16)$$

Com essas definições, podemos enunciar o critério de estabilidade para sistemas multivariáveis.

Teorema 63 *Seja o sistema realimentado descrito por (3.1), com A Hurwitz, onde a não linearidade pertence ao conjunto ϕ_{ZF} . Se existir uma função de transferência $Z(s) \in Z_{ZF}$ tal que*

$$(I - Z(s))G(s) > 0$$

então o sistema é globalmente assintoticamente estável para toda $\phi \in \phi_{ZF}$. Mais ainda, se $Z(s)$ for de dimensão finita, então a estabilidade é exponencial.

Para formular essa condição em termos de uma LMI, devemos primeiro procurar uma parametrização LMI dos multiplicadores admissíveis. Para a classe Z_{ZF} não conseguimos uma parametrização dos multiplicadores em si, mas sim de *aproximações* dos multiplicadores.

Aproximação L_1

Da definição da classe de multiplicadores admissíveis fica claro que $z(\cdot) \in L_1(\mathbb{R})$. Podemos decompor $L_1(\mathbb{R})$ em $L_1(\mathbb{R}_-) \oplus L_1(\mathbb{R}_+)$, e toda a função $z(\cdot) \in L_1(\mathbb{R})$ em $z_-(\cdot) + z_+(\cdot)$, onde

$$z_-(t) = \begin{cases} z(t) & \text{se } t < 0, \\ 0 & \text{alhores.} \end{cases} \quad z_+(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0, \\ z(t), & \text{alhores.} \end{cases}$$

Fica claro que, desse modo, $z_- \in L_1(\mathbb{R}_-)$ e $z_+ \in L_1(\mathbb{R}_+)$.

Lema 64 [60] *Seja $f(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$. Então, para todo $\epsilon > 0$, pode-se encontrar um vetor $[a_0 \ a_1 \ \dots \ a_N] \in \mathbb{R}^N$ tal que*

$$\int_0^\infty \left| f(t) - \sum_{i=0}^N a_i e^{-t(i+\alpha)} \right| dt < \epsilon,$$

onde α é uma constante maior que -1 .

Para o caso do espaço $L_1(\mathbb{R}_-)$ o resultado é o mesmo, apenas substituindo-se t por $-t$. Escolhendo $\alpha = 0$ temos a seguinte base para a aproximação¹² no espaço $L_1(\mathbb{R}_+)$

$$B_+ = \left\{ e^{-t}, e^{-2t}, \dots, e^{-tN} \right\} = \left\{ e_{0+}, e_{1+}, \dots, e_{N+} \right\}, t \geq 0.$$

¹²Como notado na referência, a escolha de α é praticamente livre, e o valor nulo é escolhido por conveniência.

Para o espaço $L_1(\mathbb{R}_-)$ a base é similar. Com essa base, a aproximação de ordem N da função $z(\cdot)$ pode ser expressa como

$$z_N(t) = \sum_{i=0}^N (a_i e_{i+} + b_i e_{i-})$$

Substituindo essa aproximação na definição da classe de multiplicadores chegamos a uma nova classe, a classe de *aproximações dos multiplicadores*, que representaremos, para uma dada ordem N de aproximação, por Z_N . Essa classe pode ser levada arbitrariamente próxima à classe Z_{ZF} tomando-se N grande o suficiente. Cada um dos multiplicadores Z_i da definição (3.16) pode ser expresso como

$$Z_i(j\omega) = \sum_{k=0}^N k! \left(\frac{a_{ik}}{(j\omega + 1)^{k+1}} - \frac{b_{ik}}{(j\omega - 1)^{k+1}} \right) \quad (3.17)$$

$$\sum_{k=0}^N (a_{ik} + (-1)^k b_{ik}) k! < 1 \quad (3.18)$$

$$\frac{\sum_{k=0}^N a_{ik} (-1)^k s^{2k}}{(1-s)^N (1+s)^N} \geq 0 \quad \forall s = j\omega \quad (3.19)$$

$$\frac{\sum_{k=0}^N b_{ik} s^{2k}}{(1-s)^N (1+s)^N} \geq 0 \quad \forall s = j\omega \quad (3.20)$$

A inequação (3.18) pode ser verificada imediatamente a partir de uma LMI. Para as inequações (3.19) e (3.20) podemos utilizar o resultado do teorema 132 para a verificação, notando que as referidas funções de transferência possuem representações de estado controláveis¹³ (obtidas através da forma canônica controlável)

$$\frac{\sum_{k=0}^N a_{ik} (-1)^k s^{2k}}{(1-s)^N (1+s)^N} \sim \left[\begin{array}{c|c} A_a & B_a \\ \hline C_a & D_a \end{array} \right] \quad \frac{\sum_{k=0}^N b_{ik} s^{2k}}{(1-s)^N (1+s)^N} \sim \left[\begin{array}{c|c} A_b & B_b \\ \hline C_b & D_b \end{array} \right] \quad (3.21)$$

onde

$$A_a, A_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ (-1)^{N-1} & 0 & (-1)^{N-2} N & 0 & \dots & N & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_a, B_b = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]'$$

$$C_a = \begin{bmatrix} (-1)^N (a_{i0} - a_{iN}) & 0 & (-1)^{N-1} (a_{i1} - N a_{iN}) & 0 & \dots \\ \dots & -(a_{iN-1} - N a_{iN}) & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

$$C_b = \begin{bmatrix} (-1)^N (b_{i0} - (-1)^N b_{iN}) & 0 & (-1)^{N-1} (-b_{i1} - (-1)^N N b_{iN}) & 0 & \dots \\ \dots & -((-1)^{N-1} b_{iN-1} - (-1)^N N b_{iN}) & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

¹³Para a implementação numérica essa descrição não é muito importante. Fornecemos as matrizes para ressaltar que os parâmetros de aproximação aparecem de forma afim e apenas nas matrizes C e D .

e ainda $D_a = a_{iN}$, $D_b = (-1)^N b_{iN}$. Note que somente as matrizes $C_{a,b}$ e $D_{a,b}$ possuem elementos variáveis¹⁴, e a dependência é afim nos parâmetros de descrição da aproximação. Temos então, através do teorema 132, uma parametrização via LMI da classe Z_N .

Verificação LMI do critério

Tendo em mãos uma parametrização LMI da classe Z_N resta-nos apenas verificar a positividade de $(I - Z(s))G(s)$. Primeiro obtemos uma descrição controlável para $Z(s) \in Z_N$ e a seguir montamos a descrição de estados para $(I - Z(s))G(s)$

$$\begin{aligned} Z(s) &\sim \left[\begin{array}{c|c} A_z & B_z \\ \hline C_z & 0 \end{array} \right] \\ (I - Z(s))G(s) &\sim \left[\begin{array}{cc|c} A & 0 & B \\ \hline B_z C & A_z & B_z D \\ \hline C & -C_z & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{ZG} & B_{ZG} \\ \hline C_{ZG} & D_{ZG} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

Se conseguirmos uma descrição de estados para $Z(s)$ tal que A_z e B_z sejam constantes para um dado N , fica claro que a verificação de positividade via LMI de $(I - Z(s))G(s)$ será também afim nos parâmetros a e b da descrição de Z . Da mesma forma como feito anteriormente, podemos encontrar tal descrição através da forma canônica controlável¹⁵. O resultado é que a matriz C_z depende apenas dos parâmetros a e b (sempre de forma afim). Temos agora condições de formular uma verificação LMI para o critério:

Teorema 65 *Seja o sistema realimentado descrito por (3.1), com A Hurwitz, onde a não linearidade pertence ao conjunto ϕ_{ZF} . O sistema é globalmente exponencialmente estável para toda $\phi \in \phi_{ZF}$ se existir um inteiro N tal que as seguintes LMI sejam factíveis*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A'_{ZG}P + PA_{ZG} & PB_{ZG} - C'_{ZG} \\ B'_{ZG}P - C_{ZG} & -D_{ZG} - D'_{ZG} \end{bmatrix} &< 0 \\ \begin{bmatrix} A'_a X_a + X_a A_a & X_a B_a - C'_a \\ B'_a X_a - C_a & -D_a - D'_a \end{bmatrix} &\leq 0 \\ \begin{bmatrix} A'_b X_b + X_b A_b & X_b B_b - C'_b \\ B'_b X_b - C_b & -D_b - D'_b \end{bmatrix} &\leq 0 \\ \sum_{k=0}^N (a_{ik} + (-1)^k b_{ik}) k! &< 1 \end{aligned}$$

onde $P > 0$, $X_a = X'_a$, $X_b = X'_b$ e as descrições de estado são dadas como anteriormente em (3.21) e (3.22). Cabe ressaltar que as LMI são afins nos parâmetros a e b do multiplicador.

Esse mesmo resultado pode ser utilizado para estimar a margem de estabilidade. Não derivaremos aqui o método para obter esta estimativa, mas forneceremos os passos a

¹⁴Para uma dada ordem N .

¹⁵Como muitos pacotes matemáticos possuem funções para encontrar essas formas, não vamos continuar descrevendo as mesmas literalmente. No programa Scilab, por exemplo, pode-se utilizar a função "cont_frm".

serem seguidos: considerar cada bloco diagonal da não-linearidade em um setor $[\alpha, \alpha + \beta]$ tal que

$$(\phi(x_1) - \phi(x_2) - \alpha(x_1 - x_2))' (\phi(x_1) - \phi(x_2) - (\alpha + \beta)(x_1 - x_2)) \leq 0,$$

definir $\mathcal{A} = \text{diag}\{\alpha_i\}$, $\mathcal{B} = \text{diag}\{\beta_i\}$, considerar \mathcal{A} conhecido, e através de *loop-shifting* transformar o sistema para o setor $[0, \infty)$. A função de transferência resultante das modificações, $G(I + \mathcal{A}G)^{-1} + \mathcal{B}^{-1}$, pode ser utilizada para estimar o máximo valor de \mathcal{B} caso esse seja expresso por βI . Através do mesmo procedimento podemos estimar o maior setor simétrico $[-\mathcal{B}, \mathcal{B}]$ para o qual o sistema é absolutamente estável.

Capítulo 4

Performance e Restrições Estruturais

4.1 Introdução

Trataremos nesse capítulo da síntese de reguladores através de realimentação estática estruturalmente restrita, como por exemplo realimentação de saída ou realimentação descentralizada. Trataremos também de problemas de otimização de performance. Para os problemas de síntese utilizaremos a planta

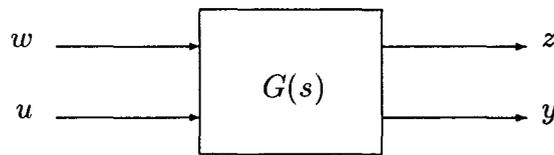


Figura 4.1: Planta

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_w w + B_u u \\ z = C_z x + D_{wz} w + D_{uz} u \\ y = C_y x + D_{wy} w + D_{uy} u \end{cases} \quad (4.1)$$

onde u é a entrada de controle e y é a saída mensurável. Para o caso de realimentação de estados basta fazermos $C_y = I$. No caso específico da realimentação estática $u = -F_o y$, a função de transferência a laço fechado é

$$G_{wz}(s) \sim \left[\begin{array}{c|c} A - B_u(I + F_o D_{uy})^{-1} F_o C_y & B_w - B_u(I + F_o D_{uy})^{-1} F_o D_{wy} \\ \hline C_z - D_{uz}(I + F_o D_{uy})^{-1} F_o C_y & D_{wz} - D_{uz}(I + F_o D_{uy})^{-1} F_o D_{wy} \end{array} \right] \quad (4.2)$$

Os resultados apresentados nesse capítulo derivam do resultado obtido por Bernussou, Peres e Geromel [9], resultado esse que é tratado na próxima seção. Esse resultado possibilitou várias extensões ([27], [29], [51]), algumas das quais serão tratadas nesse capítulo.

¹O caso da realimentação dinâmica é equivalente ao da realimentação estática de uma planta aumentada com integradores. Dessa forma, o estudo da realimentação estática engloba o de realimentação dinâmica.

4.1.1 Realimentação de estados

Antes de prosseguirmos vale a pena estudarmos o caso da estabilização do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (4.3)$$

através da realimentação de estados.

Teorema 66 *O sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ é estabilizável por realimentação de estados $u = -Fx$ se e somente se a LMI*

$$AW + WA' - BL - L'B' < 0, \quad W > 0$$

for factível em W e L . Nesse caso, um ganho estabilizante é dado por $F = LW^{-1}$.

Esse resultado é bastante conhecido na literatura, e foi obtido em [9]. Para a prova basta desenvolvermos a equação de Lyapunov $(A - BF)'P + P(A - BF) < 0$ fazendo as substituições $P = W^{-1}$ e $L = FW$.

Observando a equação resultante notamos um fato muito importante: o ganho F não aparece explicitamente na formulação. Isso implica em que não seja possível, de forma trivial, impor uma condição do tipo realimentação de saída $F = F_0C$ ou ainda $F \in \mathcal{F}$, onde \mathcal{F} pode ser, por exemplo, o conjunto de controladores estáticos descentralizados. Isso se deve ao fato do conjunto $\mathcal{F}_s \triangleq \{F : A - BF \text{ estável}\}$ não ser convexo. Na verdade, o problema de realimentação de estados através da matriz $P = W^{-1}$ pode ser expresso através de uma BMI (ver exemplo 142).

4.1.2 Extensão para realimentação de saída

Tendo em vista o observado no caso $u = -Fx$, torna-se claro qual o problema: como impor a restrição $u = -F_0y$ sem que seja perdida a generalidade da solução? Mais ainda, o ideal seria impor essa condição e continuarmos com um problema apenas de factibilidade, de modo que mais restrições na forma de LMI pudessem ser colocadas juntamente com a estabilização. Caminhos para uma possível solução serão analisados nas próximas seções.

A abordagem através de LMI do problema nos fornece uma solução que pode fornecer um ganho estabilizante. Consideremos, sem perda de generalidade, que $C = [I \ 0]$ em (4.3). Consideremos, ainda, que $D = 0$. Então podemos notar que se exigirmos a seguinte estrutura:

$$L = [L_1 \ 0] \quad W = \begin{bmatrix} W_{11} & 0 \\ 0 & W_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

onde $L_1 \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ e $W_{11} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$, teremos, através da mesma LMI para realimentação de estados, uma condição suficiente para realimentação de saída, pois assim $F = [F_0 \ 0] = F_0C$.

A estrutura imposta nas matrizes L e W podem parecer muito restritivas, mas essa impressão é, de certa forma, falsa. Isso se deve ao fato de existirem infinitas representações de estado para o mesmo sistema tal que $C = [I \ 0]$. De fato, dado um sistema com C genérico, defina a matriz não-singular $T' = [C' \ E]$ e a transformação de similaridade $\tilde{x} = Tx$ levará a matriz C a ter a forma desejada. Como pode-se notar, existem

infinitas matrizes E que fazem T não-singular. O resultado que segue, devido a Geromel, Peres e Souza ([17],[29]), mostra que, levando em conta os graus de flexibilidade da matriz E , a abordagem tratada aqui na verdade é necessária e suficiente para estabilização por realimentação de saída:

Teorema 67 *O sistema (4.3), com $D = 0$, é estabilizável via realimentação estática de saída se e somente se existirem matrizes $W > 0$ e L como em (4.4) e uma transformação de similaridade $\tilde{x} = [C' \ E]'$ tais que, para o sistema transformado,*

$$AW + WA' - BL - L'B' < 0.$$

A prova desse resultado pode ser encontrada em [17] ou em [29]. Fornecemos nos apêndices (seção C.5) uma prova mais voltada para os nossos propósitos.

4.1.3 Extensão para realimentação de saída descentralizada

Se desejarmos um controle descentralizado podemos proceder como anteriormente: consideramos que $C = [I \ 0]$ e $D = 0$. Desejamos um ganho na forma

$$F_o = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F_r \end{bmatrix},$$

onde $F_i \in \mathbb{R}^{f_{li} \times f_{ci}}$. Então uma condição suficiente para a existência dessa realimentação pode ser conseguida da mesma forma como na realimentação estática de saída, mas agora particionando as matrizes L_1 e W_{11} da seguinte forma:

$$L_1 = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_{rr} \end{bmatrix} \quad W_{11} = \begin{bmatrix} W_{11}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & W_{11}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & W_{11}^r \end{bmatrix},$$

onde $L_{ii} \in \mathbb{R}^{f_{li} \times f_{ci}}$ e $W_{11}^i \in \mathbb{R}^{f_{ci} \times f_{ci}}$, ou seja, a matriz L_1 tem exatamente a mesma estrutura do controlador desejado. Cabe notar que, do ponto de vista numérico, o problema descentralizado, da forma como colocado, é o de mais fácil solução via LMI, pois possui o menor número de variáveis. Para maiores detalhes sobre o tratamento convexo de realimentação descentralizada o leitor pode consultar [17] e [27].

4.1.4 Aplicação na síntese via critério do círculo

Os resultados das seções anteriores permitem a extensão de vários resultados para o caso de realimentação de saída. Realizaremos como exemplo a extensão da síntese via critério do círculo (teorema 47). Por simplicidade, faremos apenas a extensão para o caso do controle estático descentralizado de saída.

Corolário 68 *Sejam o sistema e o conjunto das não-linearidades descritos como no teorema 47. Então, se a LMI em W e L*

$$\begin{bmatrix} AW + WA' - B_u L - L' B_u' & (KCW - KD_{uy}L - B_w')' \\ KCW - KD_{uy}L - B_w' & -(2I + KD_{wy} + D_{wy}'K') \end{bmatrix} < 0, \quad W > 0,$$

com L e W particionadas como na seção anterior for factível, existe um ganho descentralizado de saída F_o (como na seção anterior) tal que a realimentação $u = -F_o y$ faz com que o sistema seja absolutamente estável $\forall \phi \in \phi_c$. Mais ainda, esse ganho é dado por

$$F_o = L_1 W_{11}^{-1}$$

Esse resultado mostra como a abordagem via LMI pode fornecer, de forma bastante simples, possibilidade de solução para casos onde outras abordagens falham ou tornam-se demasiadamente complexas.

4.2 Realimentação de saída

Nessa seção apresentamos alguns resultados sobre realimentação de saída obtidos de Guoxiang Gu [30] e Galimidi e Barmish [22], reformulando-os através de LMI. Esses resultados motivaram o desenvolvimento de uma nova técnica apresentada no final dessa seção.

4.2.1 LQR e realimentação de saída

Essa seção trata da estabilização via realimentação estática de saída, e deriva um método de síntese via LMI a partir do resultado obtido por Guoxiang Gu [30]. Nessa referência, o autor relaciona, para uma classe de sistemas, a realimentação de saída com o problema LQR. Para o nosso propósito de estabilização a relação com o problema LQR não é importante, mas a prova construtiva do resultado de Gu nos fornece um meio de sintetizar reguladores de saída para uma classe de sistemas definida. No trabalho original havia uma incorreção em relação ao problema LQR, que é corrigida aqui.

Iremos utilizar o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (4.5)$$

onde, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, B e $C' \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Sem perda de generalidade, consideraremos $B = [I \ 0]'$. Isso sempre pode ser conseguido através de uma transformação adequada, desde que B possua posto m . Para a formulação do teorema utilizaremos matrizes particionadas da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{12}' & W_{22} \end{bmatrix} \\ C = [C_1 \ C_2]$$

onde A_{11} , W_{11} e $C_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Teorema 69 Considere o sistema (4.5), com $\det(CB) \neq 0$. Então, se o sistema em malha aberta não possuir zeros de transmissão instáveis, existe uma realimentação de saída que estabiliza o sistema. Mais ainda, $F_o = \rho(C_1W_{11} + C_2W'_{12})^{-1}$ é um ganho estabilizante que é fornecido pelo problema de factibilidade (definido para o sistema com $B = [I \ 0]'$)

$$W_{12} = -C_1^{-1}C_2W_{22} \quad W > 0 \quad \rho > 0 \quad \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi'_{12} & \phi_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.6)$$

onde

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= A_{11}W_{11} + W_{11}A'_{11} + A_{12}W'_{12} + W_{12}A'_{12} - \rho I \\ \phi_{12} &= A_{11}W_{12} + A_{12}W_{22} + W_{11}A'_{21} + W_{12}A'_{22} \\ \phi_{22} &= (A_{22} - A_{21}C_1^{-1}C_2)W_{22} + W_{22}(A_{22} - A_{21}C_1^{-1}C_2)' \end{aligned}$$

Prova: Consideraremos o sistema onde $B = [I \ 0]'$. Vamos definir o ganho $F_o = \rho\mathcal{F}$. Então, por Lyapunov, uma condição necessária e suficiente para a estabilidade do sistema a malha fechada é a de que exista uma matriz $W > 0$ tal que²

$$\phi = (A - \rho B\mathcal{F}C)W + W(A - \rho B\mathcal{F}C)' + \rho BB' < 0$$

onde ϕ é particionada conforme as matrizes A e W .

Vamos agora escrever o ganho \mathcal{F} na forma $\mathcal{F}CW = B'$ ³. Expandindo essa última relação, chegamos ao sistema

$$\begin{cases} \mathcal{F}^{-1} = C_1W_{11} + C_2W'_{12} \\ 0 = C_1W_{12} + C_2W_{22} \end{cases}$$

donde temos a condição

$$W_{12} = -C_1^{-1}C_2W_{22} \quad (4.7)$$

que parametriza W_{12} em função de W_{22} . Note que, como $\det(CB) \neq 0$, sempre existirá a inversa de C_1 .

Expandindo a equação de Lyapunov chegamos à condição

$$\phi_{22} = (A_{22} - A_{21}C_1^{-1}C_2)W_{22} + W_{22}(A_{22} - A_{21}C_1^{-1}C_2)' < 0$$

e, por Lyapunov, sempre existirá $W_{22} > 0$ tal que $\phi_{22} < 0$, pois C_1^{-1} existe e $A_{22} - A_{21}C_1^{-1}C_2$ é uma matriz estável pela condição dos zeros de transmissão [31].

A mesma expansão da equação de Lyapunov nos leva à outra condição

$$\phi_{11} = A_{11}W_{11} + W_{11}A'_{11} + A_{12}W'_{12} + W_{12}A'_{12} - \rho I$$

onde é possível notar que, para ρ grande o suficiente, teremos $\phi_{11} < 0$. Como já garantimos que $\phi_{22} < 0$, resta apenas garantirmos que $\phi < 0$ para que a estabilidade seja alcançada. Ora, mas isso equivale, pelo complemento de Schur, a garantir que

$$\phi_{11} - \phi_{12}\phi_{22}^{-1}\phi'_{12} < 0$$

²A condição clássica de Lyapunov é que, dada uma matriz $Q > 0$, exista $W > 0$ tal que $AW + WA' + Q = 0$. Imagine agora que $Q = Q_1 + Q_2$, com $Q_1 \geq 0$ e $Q_2 > 0$. Então a condição é equivalente a $AW + WA' + Q_1 = -Q_2$, ou seja, $AW + WA' + Q_1 < 0$, para qualquer $Q_1 \geq 0$.

³Claramente um ganho na forma de um ganho ótimo por um critério LQR, com $W = P^{-1}$.

e podemos notar⁴ que essa condição sempre pode ser satisfeita tomando-se ρ grande o suficiente, garantindo assim a estabilidade do sistema para a realimentação $u = -Fx = -\rho\mathcal{F}x$ ■

Como podemos notar, esse resultado fornece, para uma classe de sistemas bem definida, garantias de estabilização através de realimentação de saída. Mais ainda, nos fornece um ganho estabilizante através de uma condição de *factibilidade*, o que nos dá uma flexibilidade maior para introduzirmos outras restrições ao nosso problema. Uma desvantagem do método é termos de colocar o sistema na forma específica exigida pelo algoritmo, ou seja, $B = [I \ 0]'$.

O resultado anterior permite relacionar a realimentação de saída com o problema LQR.

Teorema 70 *Seja a LMI (4.6) satisfeita. Então $F = \rho\mathcal{F}C$ é a solução para o problema LQR com pesos $Q = -W^{-1}\phi W^{-1}$ e $R = \rho^{-1}$.*

Prova: Se a LMI é satisfeita, então $(A - \rho B\mathcal{F}C)W + W(A - \rho B\mathcal{F}C)' + \rho BB' - \phi = 0$. Sabendo que $\mathcal{F}CW = B'$, temos que

$$AW + WA' - \rho BB' - \phi = 0.$$

Multiplicando pela esquerda e pela direita por $P = W^{-1}$ tem-se $A'P + PA - PB\rho B'P - W^{-1}\phi W^{-1} = 0$, que é exatamente a equação de Riccati para o problema LQR com Q e R definidos como no teorema. Como ρ e as matrizes P e W satisfazem essa equação, concluímos que o ganho $\rho\mathcal{F}C$ é a solução do problema LQR colocado. ■

Por fim, notamos que a única diferença do resultado apresentado aqui e o original de [30] é que o deste trabalho é desenvolvido em cima da equação $\phi = (A - \rho B\mathcal{F}C)W + W(A - \rho B\mathcal{F}C)' + \rho BB' < 0$, enquanto o de Gu é desenvolvido a partir de $\phi = (A - \rho B\mathcal{F}C)W + W(A - \rho B\mathcal{F}C)' < 0$. Essa pequena diferença faz com que a relação com o problema LQR seja “perdida” no resultado de Gu⁵.

4.2.2 Problema Restrito de Lyapunov

Nessa seção derivamos, para o caso de plantas quadradas, uma abordagem convexa para a realimentação estática de saída baseada no Problema Restrito de Lyapunov (PRL). A abordagem equivale à apresentada por Guoxiang Gu com a vantagem de não precisarmos colocar o sistema na representação de estados com $B = [I \ 0]'$. Os resultados aqui apresentados fornecem uma nova interpretação para o Problema Restrito de Lyapunov através de condições geométricas. O problema restrito de Lyapunov foi definido em [22] da seguinte forma:

Definição 71 (PRL) *Sejam $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Gamma \in \mathbb{R}^{l \times n}$ e $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times k}$, com Γ e Σ de posto completo, com $l < n$ e $k < n$ matrizes dadas. Defina uma matriz Ψ tal que $\Gamma\Psi = 0$ e*

⁴Pela formulação de ϕ_{11} e pelo fato de que ϕ_{12} e ϕ_{22} não dependem de ρ .

⁵Na verdade, Gu relaciona o seu resultado com o LQR de forma incorreta. As matrizes para o problema LQR no caso de Gu deveriam ser $R = \rho^{-1}$ e $Q = -W^{-1}(\rho BB' + \phi)W^{-1}$, mas, como pode-se notar, teremos então Q com sinal indefinido.

$\Psi'\Psi = I$. O problema restrito de Lyapunov consiste em encontrar, se possível, matrizes Π e Ω tais que

$$\begin{cases} \Psi'(\Phi'\Pi + \Pi\Phi)\Psi < 0 \\ \Pi > 0 \\ \Pi^{-1}\Gamma' = \Sigma\Omega \text{ ou } \Sigma'\Pi = \Omega\Gamma \end{cases} \quad (4.8)$$

Em [22], os autores derivam condições necessárias e suficientes para a existência de solução para o PRL e derivaram resultados para a realimentação estática de saída para o caso onde $k \geq l$. Para o caso $k < l$ resultados de estabilidade só puderam ser formulados em termos de uma realimentação dinâmica de saída baseada em um observador de estados. Note que, se a condição $\Pi^{-1}\Gamma' = \Sigma\Omega$ for descartada da definição original, temos um caso particular do PRL

$$\begin{cases} \Psi'(\Phi'\Pi + \Pi\Phi)\Psi < 0 \\ \Pi > 0 \\ \Sigma'\Pi = \Omega\Gamma \end{cases}$$

que é *convexo* nas matrizes desconhecidas. A solução, caso exista, para esse caso particular é um problema de factibilidade LMI. Todavia, esse problema particular não possui muitas aplicações para realimentação estática de saída, como será visto a seguir. De fato, esse problema é *sempre infactível* quando $k > l$.

Consideremos o sistema (4.5), onde $B \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$ e $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$ são matrizes de posto completo. Por Lyapunov, o sistema é estabilizável por realimentação estática de saída $u = -F_o y$ se e somente se existirem matrizes $P > 0$ e F_o tais que

$$P(A - BF_o C) + (A - BF_o C)'P < 0. \quad (4.9)$$

Seja M uma matriz tal que $C'M = PB$ e defina-se a matriz $L = MF_o$. Substituindo em (4.9) temos

$$PA + A'P - C'LC - C'L'C < 0. \quad (4.10)$$

Podemos agora definir os problemas em cima dos quais trabalharemos:

Problema 72 (PRLP) Dadas A , B e C , o PRLP consiste em encontrar, se possível, matrizes P , L e M tais que

$$\begin{cases} PA + A'P - C'(L + L')C < 0 \\ P > 0 \\ C'M = PB \end{cases} \quad (4.11)$$

Problema 73 (PRLW) Dadas A , B e C , o PRLW consiste em encontrar, se possível, matrizes W , L e M tais que

$$\begin{cases} AW + WA' - B(L + L')B' < 0 \\ W > 0 \\ CW = MB' \end{cases} \quad (4.12)$$

Como pode-se notar, esses problemas estão intimamente relacionados com o PRL. De fato, a factibilidade tanto de (4.11) quanto de (4.12) implica⁶ na factibilidade do PRL. A partir da definição dos problemas podemos enunciar o seguinte resultado:

⁶Para o PRLP realizar as substituições $\Phi = A$, $\Gamma = C$, $\Sigma = B$, $\Pi = P$ e $\Omega = M'$. Para o PRLW, $\Phi = A'$, $\Gamma = B'$, $\Sigma = C'$, $\Pi = W$ e $\Omega = M$.

Teorema 74 *Sejam P , L e M soluções para o PRLP. Suponha que $\mathcal{R}(C) \subseteq \mathcal{R}(M)$. Então a realimentação*

$$u = -M^+Ly = -F_0y$$

estabiliza o sistema (4.5).

Prova: Sejam P , L e M soluções para o PRLP. Então temos (4.10) satisfeita. Utilizando propriedades das matrizes pseudo-inversas, temos, para todo $\tilde{x} \in \mathcal{R}(M)$, $MM^+\tilde{x} = \tilde{x}$. Como foi assumido que $\mathcal{R}(C) \subseteq \mathcal{R}(M)$ temos, para todo x , $MM^+Cx = Cx$. Utilizando essa relação em (4.10) e o fato que $MM^+ = (MM^+)'$ temos

$$PA + A'P - C'L'M^+M'C - C'MM^+LC < 0.$$

Definindo $F_0 = M^+L$ e utilizando o fato de que $C'M = PB$ chegamos à conclusão de que (4.9) é satisfeita, e por Lyapunov garantimos a estabilidade do sistema a malha fechada. ■

Lema 75 *Se B e C têm posto completo e $n_y = n_u$, então a condição $\mathcal{R}(C) \subseteq \mathcal{R}(M)$ é automaticamente satisfeita sempre que o PRLP for factível.*

Lema 76 *Se B e C têm posto completo e $n_y > n_u$, então a condição $\mathcal{R}(C) \subseteq \mathcal{R}(M)$ nunca é satisfeita pelas soluções do PRLP, e nesse caso o teorema não garante estabilidade.*

Lema 77 *Se B e C têm posto completo e $n_y < n_u$, então o PRLP é infactível.*

Prova: Para o caso da planta quadrada, seja $m = n_y = n_u = \text{posto}(B) = \text{posto}(C)$. Por propriedades de posto de matrizes, como $P > 0$, tem-se $\text{posto}(PB) = \text{posto}(C'M) = m$, e, como $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tem-se $\text{posto}(M) = m$. Agora, pelas dimensões das matrizes, é fácil verificar que $\mathcal{R}(C) = \mathcal{R}(M)$. Quando $n_y \neq n_u$, uma abordagem similar leva aos lemas restantes. ■

Podem-se derivar, da mesma maneira, resultados equivalentes para o PRLW. Substituindo a condição de imagem por $\mathcal{R}(B') \subseteq \mathcal{R}(M')$ temos os seguintes resultados:

- $n_y = n_u$: A realimentação $u = -LM^+y$ estabiliza o sistema.
- $n_y > n_u$: O PRLW é sempre infactível.
- $n_y < n_u$: A condição de imagem nunca é satisfeita. A estabilidade não pode ser assegurada para $u = -LM^+y$.

Corolário 78 *Para plantas quadradas, o PRLP e o PRLW são equivalentes ao PRL. Os problemas são factíveis se e somente se o sistema for fase mínima e $\det(CB) \neq 0$.*

A prova para a primeira parte do corolário é derivada da definição do PRL notando que, para plantas quadradas, a matriz M é não-singular. Estando estabelecida a equivalência, a prova para a segunda parte pode ser obtida de [17] e [31].

Corolário 79 *Uma condição necessária para a factibilidade de (4.11) e (4.12) é a de que $\text{posto}(CB) = \min(n_u, n_y)$.*

A prova pode ser derivada de [22] utilizando os resultados prévios sobre a infactibilidade dos problemas.

A matriz L possui um papel interessante nos problemas definidos. Pode-se notar que, para o problema proposto (de factibilidade apenas), podemos, sem perda de generalidade, exigir $L > 0$. Ainda mais, se L e M são soluções estabilizantes, então qualquer \tilde{L} tal que $\tilde{L} + \tilde{L}' \geq L + L'$ também fornecerá, junto com M , uma outra solução estabilizante.

4.2.3 Uma nova abordagem

Nessa seção será apresentada uma abordagem para a realimentação estática de saída baseada na equação de Lyapunov. Consideraremos para fins de estabilização o sistema (4.5). Partimos, como na seção 4.2.2, da equação (4.9). Definindo a matriz $L = PBF_o$ e substituindo em (4.9) chegamos a

$$A'P + PA - C'L' - LC < 0. \quad (4.13)$$

Seguimos com algumas definições:

Problema 80 (problema P) *Dadas A , B e C , com B posto completo, encontrar, se possível, matrizes P , L , M e N tais que*

$$\begin{cases} A'P + PA - C'L' - LC < 0 \\ BM = PB, \quad LC = BN \\ P > 0 \end{cases}$$

Problema 81 (problema W) *Dadas A , B e C , com C posto completo, encontrar, se possível, matrizes W , L , M e N tais que*

$$\begin{cases} WA' + AW - L'B' - BL < 0 \\ M'C = CW, \quad BL = NC \\ W > 0 \end{cases}$$

Assim como na seção 4.2.2, enunciaremos o resultado apenas para um dos problemas, ressaltando que resultados equivalentes podem ser obtidos para o outro problema.

Teorema 82 *Sejam P , L , M e N soluções para o problema P. Então a realimentação*

$$u = -B^+P^{-1}Ly = -F_o y$$

estabiliza o sistema (4.5).

Prova: Se $BM = PB$, então $\mathcal{N}(M'B') = \mathcal{N}(B'P)$. Como B é de posto completo e $P > 0$, M é inversível e daí $\mathcal{N}(B') = \mathcal{N}(B'P)$. De fato, pode-se deduzir que, para todo i inteiro, $\mathcal{N}(B') = \mathcal{N}(B'P^i)$. Partindo dessa relação e sabendo que $BN = LC$ pode-se chegar em $\mathcal{N}(C'L') \supseteq \mathcal{N}(B'P^i)$. Provemos então que o sistema a laço fechado é estável provando que, para todo $x \neq 0$,

$$x'\phi x = x'(A'P + PA - PBB^+P^{-1}LC - (PBB^+P^{-1}LC)')x < 0.$$

Seja x representado por $x = x_R + x_N$, onde $x_R \in \mathcal{R}(PB)$ e $x_N \in \mathcal{N}(B'P)$. Das relações obtidas anteriormente temos $x_R \in \mathcal{R}(P^{-1}B)$ e, por propriedades de pseudo-inversas, $P^{-1}B^{+}B'Px_R = x_R$. Através dessa relação e lembrando que $B'Px_N = 0$ tem-se que

$$\begin{aligned} x' \phi x &= x'_R(A'P + PA - LC - C'L')x_R + x'_N(A'P + PA)x_N + \\ & x'_R(A'P + PA - LC)x_N + x'_N(A'P + PA - C'L')x_R. \end{aligned}$$

Lembrando que x_N também satisfaz $C'L'x_N = 0$, podemos, após algum algebrismo, chegar a

$$x' \phi x = x'(A'P + PA - C'L' - LC)x,$$

e pelas condições do teorema temos, finalmente, $\phi < 0$. ■

Os mesmos resultados podem ser obtidos para o problema W. A realimentação passa a ser $u = -LW^{-1}C^{+}y$ e a prova pode ser obtida da mesma forma, notando-se que $\mathcal{N}(C) = \mathcal{N}(CW^i)$ e $\mathcal{N}(BL) \supseteq \mathcal{N}(CW^i)$.

Por fim cabe ressaltar a equivalência desse resultado e do resultado do teorema 67. Considere, como na seção 4.1.2, o sistema com $C = [I \ 0]$. Não é difícil notar que as restrições de igualdade do problema W equivalem a exigir a mesma estrutura bloco-diagonal de matrizes de (4.4). As condições de igualdade são satisfeitas com $M' = W_{11}$ e $N = BL_1$. O que resta é exatamente uma equação de Lyapunov e, pelo teorema 67, podemos derivar o seguinte resultado:

Corolário 83 *O sistema (4.5) é estabilizável por realimentação estática de saída se e somente se existir uma transformação de similaridade $\tilde{x} = Tx$ tal que o problema P seja factível para o sistema transformado.*

O mesmo é válido para o problema W. No atual estágio não podemos ainda estabelecer as vantagens de uma ou outra abordagem. Algumas características desse problema merecem, porém, ser destacadas. Em comparação com a abordagem via PRL (seção 4.2.2) notamos que a abordagem dessa seção se aplica a uma classe mais ampla de sistemas. Em particular, a condição $\det(CB) = \min(n_u, n_y)$ não é mais necessária para a factibilidade dos problemas. Incertezas do tipo politopo⁷ são facilmente tratadas. Na abordagem via PRL somente a matriz A poderia ser incerta. Por fim, cabe notar que o problema P propicia um meio alternativo de obtermos ganhos estabilizantes via realimentação de estados. Essa interpretação nos leva ao seguinte resultado:

Corolário 84 *Seja um sistema representado pelas equações (4.5), com B posto completo. Então, se*

$$\begin{cases} A'P + PA - BN - N'B' < 0 \\ BM = PB, \quad P > 0 \end{cases}$$

for factível, a realimentação de estados

$$u = -B^{+}P^{-1}BNx$$

estabiliza o sistema.

⁷Matrizes A e C para o problema P e A e B para o problema W.

A prova é trivial, bastando considerar $C = I$ no problema P. Esse resultado poderia ser empregado em problemas onde a inversão de P levaria a BMI⁸, ou onde desejássemos obter maior flexibilidade em soluções já existentes, como por exemplo na síntese via critério do círculo:

Corolário 85 (*Síntese com o critério do círculo - setor variável*) *Sejam o sistema (3.2) com $D_{uy} = 0$, e o conjunto das não-linearidades descritos como no teorema 44. Então, se a LMI em P, N, M e K*

$$\begin{bmatrix} A'P + PA - B_u N - N' B_u' & (KC - B_w' P)' \\ KC - B_w' P & -(2I + K D_{wy} + D_{wy}' K') \end{bmatrix} < 0, \quad B_u M = P B_u, \quad P > 0$$

for factível, existe um ganho F tal que a realimentação $u = -Fx$ faz com que o sistema seja absolutamente estável $\forall \phi \in \phi_c$. Mais ainda, esse ganho é dado por

$$F = B_u^+ P^{-1} B_u N$$

4.3 O problema \mathcal{H}_2

4.3.1 A norma em \mathcal{H}_2

Antes de definirmos o problema \mathcal{H}_2 necessitamos da definição da norma em \mathcal{H}_2 para funções de transferência⁹. Para funções de transferência $G(s)$ que pertencem a esse espaço, a norma é definida como

$$\|G\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}(G^*(j\omega)G(j\omega)) d\omega.$$

Se possuímos a representação por variáveis de estado de G , então a norma em \mathcal{H}_2 pode ser calculada de duas maneiras (veja, por exemplo, [16]). A primeira é através do Gramiano de controlabilidade:

$$\|G\|_2^2 = \text{tr}(CL_c C'): AL_c + L_c A' + BB' = 0$$

a segunda através do Gramiano de observabilidade:

$$\|G\|_2^2 = \text{tr}(B' L_o B): A' L_o + L_o A + C' C = 0$$

Essas equações somente são válidas se o sistema for estável e estritamente próprio, ou seja, $D = 0$. Se o sistema possuir $D \neq 0$, então sua norma em \mathcal{H}_2 será infinita. De qualquer forma, as equações podem ser utilizadas para calcular a norma da "parte estritamente própria" do sistema. A norma pode também ser calculada através de um problema de otimização [10]:

$$\|G\|_2^2 = \min\{\text{tr}(CL_c C') : AL_c + L_c A' + BB' \leq 0, L_c > 0\}$$

$$\|G\|_2^2 = \min\{\text{tr}(B' L_o B) : A' L_o + L_o A + C' C \leq 0, L_o > 0\}$$

onde se exige que o sistema seja controlável (caso L_c) ou observável (caso L_o).

⁸Para que o leitor possa ter uma idéia de possíveis aplicações dessa abordagem basta considerar a LMI de análise do critério Popov (3.7, página 41) trocando-se o termo RCA por RC . O problema de síntese via realimentação de estados para essa nova LMI poderia ser solucionado de forma suficiente através da aplicação do corolário 84 por um problema de factibilidade LMI. Se tentássemos solucioná-lo através da inversão de P chegaríamos a uma BMI.

⁹Normalmente diz-se simplesmente *norma \mathcal{H}_2* .

4.3.2 Definição do problema

Seja o sistema descrito como em (4.1). O problema \mathcal{H}_2 consiste em encontrar um controlador tal que a norma \mathcal{H}_2 da função de transferência em laço fechado G_{wz} seja minimizada.

Esse problema é equivalente ao problema clássico LQR [16], [5] que, como sabemos, possui uma solução definida através de uma equação de Riccati. A solução via LMI para esse problema, relacionando-o com essa equação, foi claramente definida por Willems em [64]. A abordagem que será dada aqui é outra, baseada na minimização da norma \mathcal{H}_2 como definida anteriormente. A vantagem da abordagem desse trabalho é a de que restrições na estrutura do controlador podem ser introduzidas da mesma forma como anteriormente. Além disso, a abordagem via LMI tratada aqui permite a garantia de limitantes na norma \mathcal{H}_2 através de um problema de factibilidade.

4.3.3 Realimentação de estados

Um resultado semelhante ao obtido aqui pode ser encontrado em [51] para sistemas aumentados. Utilizaremos aqui o sistema (4.1) para o caso particular onde

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_w w + B_u u \\ z = C_z x + D_{uz} u \\ y = x \end{cases} \quad (4.14)$$

A solução para o problema \mathcal{H}_2 para esse sistema é enunciada a seguir

Teorema 86 *Seja o sistema dado como em (4.14). A minimização da norma \mathcal{H}_2 por realimentação de estados é conseguida através do seguinte problema de minimização:*

$$\min \operatorname{tr}(N) : \begin{cases} \begin{bmatrix} N & C_z W - D_{uz} L \\ (C_z W - D_{uz} L)' & W \end{bmatrix} \geq 0, \\ \begin{bmatrix} AW + WA' - B_u L - L' B_u' & B_w \\ B_w' & -I \end{bmatrix} \leq 0, \\ W > 0 \end{cases}$$

e o ganho $u = -Fx$ que minimiza a norma é dado por $F = LW^{-1}$.

Antes de prosseguirmos com a prova, notemos que o valor de $\operatorname{tr}(CWC')$ é o mesmo para a solução dos dois seguintes problemas:

- Original: $\min_W \{\operatorname{tr}(CWC') : f(W) \leq 0\}$
- Aumentado: $\min_{W,N} \{\operatorname{tr}(N) : N - CWC' \geq 0, f(W) \leq 0\}$

De fato, a equivalência pode ser verificada se notarmos que o problema original não impõe nenhuma restrição em N . Podemos agora prosseguir com a prova do teorema:

Prova: Para o caso considerado, a função de transferência (4.2) torna-se

$$G_{wz}(s) \sim \left[\begin{array}{c|c} A - B_u F & B_w \\ \hline C_z - D_{uz} F & 0 \end{array} \right]$$

Calculando a norma dessa função através do Gramiano de controlabilidade, com $L_o = W$ e $L = FW$, tem-se

$$\|G\|_2^2 = \min\{\text{tr}(CWC') : AW - WA' - B_u L - L'B'_u + B_w B'_w \leq 0, W > 0\}$$

onde $C = C_z - D_{uz}F$. Como a função objetivo não é afim¹⁰, introduzimos a variável auxiliar N e minimizamos o problema aumentado visto anteriormente. A inequação $N - CWC' \geq 0$ pode facilmente ser transformada em uma LMI através do complemento de Schur. Como o problema aumentado e o original são equivalentes, a minimização da norma se dá exatamente através da LMI do teorema e o ganho pode ser restaurado fazendo-se $F = LW^{-1}$. ■

Por fim, nota-se que restrições do tipo realimentação descentralizada de saída podem ser introduzidas no problema através das técnicas já vistas, apesar de perdermos a garantia de que a norma do sistema, a laço fechado, será a mínima possível. Podemos também considerar incertezas do tipo politopo¹¹ nas matrizes de descrição da planta, garantindo assim um limitante superior para a norma \mathcal{H}_2 de toda uma família de plantas.

4.3.4 Compensador de ordem completa

Antes de formularmos a solução para esse problema trabalhemos um pouco a idéia dos *estimadores de estado* (conhecidos também por observadores de estado). Os estimadores de estado são sistemas dinâmicos construídos com a finalidade de fornecer, a partir de dados disponíveis através de medidas, uma estimativa do valor de todos os estados do sistema. Essa estimativa é utilizada para realizar uma falsa¹² “realimentação de estados” no sistema. Normalmente as variáveis disponíveis são a saída y e a entrada u do sistema. Algumas características são imperiosas para um observador de estados:

- O erro entre o estado estimado e o estado real deve cair a zero com o passar do tempo.
- Esse decaimento deve ser independente da condição inicial (tanto do estimador quanto do sistema).

Consideraremos, para a nossa abordagem, o seguinte caso particular do sistema (4.1):

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_w w + B_u u \\ z = C_z x + D_{uz} u \\ y = C_y x + D_{wy} w \end{cases} \quad (4.15)$$

Para o estimador vamos primeiramente considerar que sua descrição é dada por

$$\begin{cases} \dot{x}_e = A_e x_e + B_y y + B_{ue} u \\ y_e = C_{x_e} x_e \end{cases}$$

Desejamos que o estado x_e nos forneça uma estimativa do estado real x , e para isso devemos determinar as matrizes de descrição do estimador adequadamente. Unindo os

¹⁰Pelo fato da variável F aparecer na matriz C .

¹¹Utilizando a técnica desenvolvida na seção 2.5.

¹²No sentido de que o verdadeiro vetor de estado é substituído por um vetor de estado estimado.

dois sistemas e definindo a variável erro de estimação $e = x - x_e$ temos que a dinâmica do erro é dada por

$$\dot{e} = (A - B_y C_y - A_e)x + (B_w - B_y D_{wy})w + (B_u - B_{ue})u + A_e e.$$

Para que o erro de estimação caia a zero independentemente da entrada e da trajetória específica de x , tem-se que $A_e = A - B_y C_y$ e $B_{ue} = B_u$. Substituindo essas duas expressões na dinâmica do erro e definindo $F_e = B_y$ chegamos finalmente a

$$\dot{e} = (A - F_e C_y)e + (B_w - F_e D_{wy})w.$$

A única matriz desconhecida nessa equação é a matriz F_e , e ela deve ser determinada de forma a fazer com que o estimador seja estável. Não é difícil notar, pelo teorema 4.14, que podemos minimizar a norma \mathcal{H}_2 da entrada w para o erro de estimação calculando $F_e = P^{-1}L$ através do seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min \text{tr}(N) : & \begin{bmatrix} N & (PB_w - LD_{wy})' \\ PB_w - LD_{wy} & P \end{bmatrix} \geq 0, \\ & A'P + PA - LC_y - C_y' L' \leq 0, \\ & P > 0 \end{aligned}$$

A prova segue a mesma linha da prova para o problema \mathcal{H}_2 via realimentação de estados, utilizando as relações duais para o cálculo da norma.

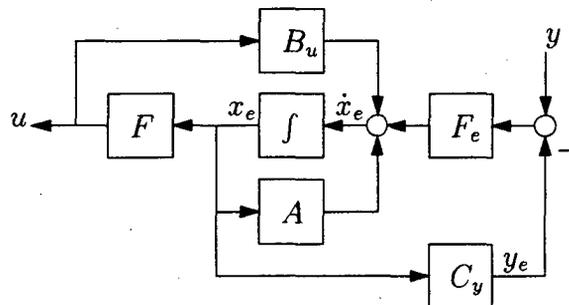


Figura 4.2: Estimador de estados

Tendo um estimador de estados à mão, a solução para o problema ocorre de forma intuitiva: calculamos a solução F como se todos os estados estivessem disponíveis. A seguir, aplicamos esse ganho nos estados estimados, fornecidos pelo estimador de estados. Apesar de intuitiva, essa solução carece de prova rigorosa para a manutenção da otimalidade da solução obtida. A prova, que resulta na propriedade conhecida como *princípio da separação*, não será fornecida aqui, apenas ressaltamos que essa solução intuitiva é válida na realidade.

Note que a matriz C_{x_e} ainda é indeterminada, e não influi no resultado final. Caso ela seja escolhida como $C_{x_e} = C_y$, tem-se a estrutura do estimador como mostrada na figura 4.2, onde nota-se que a entrada de referência do mesmo é o erro de saída $y - y_e$, que deve cair a zero com o passar do tempo.

Assim, a solução para o problema \mathcal{H}_2 via realimentação dinâmica de ordem completa consiste na solução de dois problemas em separado: na solução do problema de realimentação de estados e na solução do problema do estimador "ótimo". Como as duas soluções já foram apresentadas, não será necessário apresentá-las novamente. Para maiores detalhes sobre o problema do estimador de estado pode-se consultar [5]. Uma abordagem convexa similar à apresentada neste trabalho pode ser encontrada em [17].

4.4 O Problema \mathcal{H}_∞

4.4.1 A norma em \mathcal{H}_∞

Assim como no problema \mathcal{H}_2 , necessitamos primeiro definir a norma em \mathcal{H}_∞ para a formulação correta do problema. Normalmente, a norma em \mathcal{H}_∞ é chamada simplesmente de *norma \mathcal{H}_∞* . Para operadores \mathcal{G} que pertencem ao espaço \mathcal{H}_∞ , a norma pode ser equivalentemente definida de várias maneiras:

$$\|\mathcal{G}\|_\infty = \sup_{x \in \mathcal{L}_2} \frac{\|\mathcal{G}x\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{\|x\|_2=1} \|\mathcal{G}x\|_2.$$

Assim, a norma \mathcal{H}_∞ é a norma *induzida* pela norma \mathcal{H}_2 , ou seja, é o maior ganho em norma 2 que pode-se obter do sistema. Se o operador é uma função de transferência $G(s)$, então a seguinte definição pode ser empregada:

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}\{G(j\omega)\},$$

onde $\bar{\sigma}\{G(j\omega)\}$ é o máximo valor singular de $G(j\omega)$. Se G é SISO, então $\bar{\sigma}\{G(j\omega)\} = |G(j\omega)|$ e a norma \mathcal{H}_∞ corresponde ao valor máximo do gráfico de módulo de Bode.

O cálculo da norma, para funções de transferência, não pode ser feito diretamente como na norma \mathcal{H}_2 , e um procedimento iterativo deve ser utilizado. O resultado que segue fornece a chave para o procedimento, e pode ser encontrado em [17]:

Teorema 87 *Seja o sistema $G(s) \sim (A, B, C, D)$, com (A, B) estabilizável. Então tem-se $\|G\|_\infty < \gamma$ se e somente se existir uma matriz $P > 0$ tal que*

$$(A + BZ^{-1}D'C)'P + P(A + BZ^{-1}D'C) + PBZ^{-1}B'P + \gamma^2 C'T^{-1}C = 0 \quad (4.16)$$

onde $Z = \gamma^2 I - D'D$ e $T = \gamma^2 I - DD'$. $T^{-1} = \gamma^{-2} I - D^{-T} D^{-1}$

O procedimento para cálculo consiste, então, em procurar o menor valor de γ tal que a equação (4.16) seja satisfeita. Pode-se utilizar, por exemplo, o método da bissecção. Normalmente não é procurada uma solução para a equação de Riccati, mas sim verificados os autovalores de sua matriz Hamiltoniana (veja, por exemplo, [17]). Como nosso interesse maior é em problemas de síntese, vamos abordar o cálculo da norma via LMI. O resultado que segue pode ser encontrado em [10]:

Teorema 88 *Seja a função de transferência $G(s) \sim (A, B, C, D)$ controlável e observável. Então a sua norma \mathcal{H}_∞ é dada pelo problema¹³*

$$\|G\|_\infty = \min \gamma : \begin{bmatrix} A'P + PA & PB \\ B'P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C' \\ D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \leq 0, \quad P > 0$$

Por fim clarificaremos a relação entre a LMI e a equação (4.16). O material que segue não é necessário para a compreensão das próximas seções, mas como a equação (4.16) é encontrada com certa frequência, consideramos válido mostrar como podemos chegar, a partir dela, na forma simplificada da LMI. Para começar, relembramos um resultado da seção 1.2.4:

Fato 89 *A solução P da equação (4.16) é a solução máxima da inequação*

$$(A + BZ^{-1}D'C)'P + P(A + BZ^{-1}D'C) + PBZ^{-1}B'P + \gamma^2 C'T^{-1}C \leq 0.$$

Pelo lema de inversão de matrizes (veja por exemplo [5]), tem-se que

$$Z^{-1} = \gamma^{-2}(I + D'T^{-1}D) \quad (4.17)$$

$$T^{-1} = \gamma^{-2}(I + DZ^{-1}D') \quad (4.18)$$

daí temos

$$\gamma^2 C'T^{-1}C = C'C + C'DZ^{-1}D'C$$

utilizando essa relação e trabalhando algebricamente com a equação (4.16) chegamos ao resultado equivalente

$$A'P + PA + (PB + C'D)Z^{-1}(PB + C'D)' + C'C = 0$$

aplicando o fato 89 e o complemento de Schur temos a LMI

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + C'C & PB + C'D \\ B'P + D'C & D'D - \gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0$$

que é idêntica à LMI do teorema 88, estando portanto a relação de equivalência estabelecida. Note que uma LMI equivalente pode ser escrita, em termos de $W = P^{-1}$ e através do complemento de Schur, da seguinte forma:

$$\sim \begin{bmatrix} WA' + AW & B_{\omega} & WC'_{\omega} \\ B'_{\omega} & -\gamma^2 I & D' \\ C_{\omega}W & D_{\omega} & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.19)$$

4.4.2 Definição do problema

Seja o sistema descrito como em (4.1). O *problema subótimo* \mathcal{H}_∞ consiste em encontrar um controlador tal que a norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência em laço fechado G_{wz} seja menor do que um valor pré-especificado γ . O *problema ótimo* \mathcal{H}_∞ consiste em encontrar um controlador que minimize essa norma.

¹³Se a função não for controlável ou observável, então o problema retorna um limitante superior para a norma.

Os problemas \mathcal{H}_∞ possuem algumas peculiaridades: em primeiro lugar, a solução¹⁴ para os mesmos não é única, mesmo para o problema ótimo. Em segundo lugar, o problema ótimo, da forma como colocado, é bastante problemático em termos numéricos [17], pois quase sempre a solução é atingida através de grandes ganhos de realimentação. Essa é, aliás, uma das motivações para o estudo do problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, já que uma restrição na norma \mathcal{H}_2 consegue, na maior parte das vezes, impor um limite na energia de controle. Normalmente, quando apenas restrições na norma \mathcal{H}_∞ são consideradas, procura-se resolver o problema subótimo.

4.4.3 Realimentação de estados

Apresentaremos a solução para o problema subótimo nessa seção. Como poderemos notar, essa mesma solução aplica-se ao problema ótimo. Consideraremos o caso particular de (4.1) onde

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_w w + B_u u \\ z = C_z x + D_{wz} w + D_{uz} u \\ y = x \end{cases} \quad (4.20)$$

A solução para o problema subótimo é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 90 *Seja o sistema (4.20), onde (A, B_u) e (A, B_w) são estabilizáveis, (C_z, A) observável, e γ um escalar positivo. Então existe uma realimentação de estados $u = -Fx$ tal que $\|G_{wz}\|_\infty \leq \gamma$ se e somente se a seguinte LMI em W e L for factível:*

$$\begin{bmatrix} WA' + AW - B_u L' - L' B_u' & B_w & WC_z' - L' D_{uz}' \\ B_w' & -\gamma^2 I & D_{wz}' \\ C_z W - D_{uz} L & D_{wz} & -I \end{bmatrix} \leq 0, \quad W > 0 \quad (4.21)$$

e nesse caso um ganho de realimentação é dado por $F = LW^{-1}$.

Podemos observar que esse mesmo resultado pode ser utilizado na solução do problema ótimo, bastando minimizar γ^2 . Para a prova, basta notarmos que a função de transferência a laço fechado é

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - B_u F)x + B_w w \\ z = (C_z - D_{uz} F)x + D_{wz} w \end{cases}$$

Substituem-se os valores apropriados na LMI (4.19) e faz-se a mudança de variável $FW = L$, chegando-se então à LMI do teorema.

4.4.4 Compensador de ordem completa

Nessa seção apresentamos o resultado obtido por Gahinet e Apkarian [21] para o problema de controladores dinâmicos \mathcal{H}_∞ . Nesse trabalho, é obtida uma condição necessária e suficiente para a existência de controladores dinâmicos de ordem reduzida para o problema subótimo \mathcal{H}_∞ . O resultado se dá em termos de um problema de minimização sujeito a

¹⁴Ou seja, o controlador que resolve o problema.

restrições LMI, onde o funcional não é convexo para controladores de ordem reduzida. Todavia, se desejarmos apenas construir controladores de ordem completa para o sistema subótimo teremos o resultado em termos de um problema convexo de factibilidade. Todo o material necessário para a prova do resultados pode ser encontrado em [50].

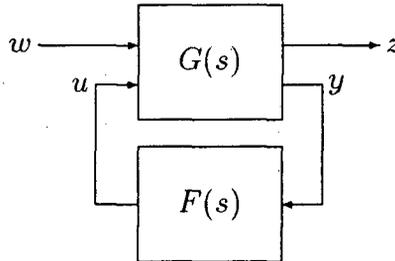


Figura 4.3: Sistema para síntese \mathcal{H}_∞

Definição do problema

Antes de apresentarmos o resultado necessitaremos de algumas definições e condições para a aplicabilidade do mesmo. O sistema a ser considerado está representado na figura 4.3. A função de transferência da planta é dada por

$$\begin{bmatrix} Z(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{wz}(s) & G_{uz}(s) \\ G_{wy}(s) & G_{uy}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s) \\ U(s) \end{bmatrix}$$

A função de transferência da entrada w para a saída z é dada por¹⁵ $G_{wz}(s) = G_{wz} + G_{uz}F(sI - G_{uy}F)^{-1}G_{wy}$. A descrição por variáveis de estado da planta é dada por

$$G(s) \sim \left[\begin{array}{c|cc} A & B_w & B_u \\ \hline C_z & D_{wz} & D_{uz} \\ C_y & D_{wy} & D_{uy} \end{array} \right]$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $D_{wz} \in \mathbb{R}^{n_z \times n_w}$ e $D_{uy} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$. São feitas ainda as seguintes suposições:

- (A, B_u) é estabilizável e (A, C_y) é detectável.
- $D_{uy} = 0$ (o que é feito sem perda de generalidade).

Podemos agora definir o problema:

Definição 91 (Problema subótimo \mathcal{H}_∞) Dado $\gamma > 0$, o problema subótimo \mathcal{H}_∞ consiste em encontrar um controlador $F(s)$ tal que

- O sistema a laço fechado seja estável.
- O sistema a laço fechado satisfaça $\|G_{wz}(s)\|_\infty < \gamma$.

¹⁵Por simplicidade vamos omitir o argumento s em alguns lugares.

Solução do problema

Enunciaremos a solução do problema subótimo \mathcal{H}_∞ em um teorema. Para detalhes sobre a prova do mesmo pode-se consultar [21] ou ainda [50].

Teorema 92 (Gahinet e Apkarian [21]) *O problema subótimo \mathcal{H}_∞ tem solução se e somente se existirem matrizes simétricas R e S satisfazendo*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}' \left[\begin{array}{cc|c} AR + RA' & RC'_z & B_w \\ C_z R & -\gamma I & D_{wz} \\ \hline B'_w & D'_{wz} & -\gamma I \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathcal{N}_R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} \mathcal{N}_S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}' \left[\begin{array}{cc|c} SA + A'S & SB_w & C'_z \\ B'_w S & -\gamma I & D'_{wz} \\ \hline C_z & D_{wz} & -\gamma I \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathcal{N}_S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

onde \mathcal{N}_R e \mathcal{N}_S são, respectivamente, bases para o núcleo¹⁶ de $[B'_u \ D'_{uz}]$ e $[C_y \ D_{wy}]$.

Esse teorema nos fornece uma condição necessária e suficiente para que exista uma solução dinâmica de ordem completa para o problema subótimo \mathcal{H}_∞ . Na verdade, a ordem do controlador pode ser ainda menor¹⁷, mas não trataremos desse caso aqui.

Construção do controlador

Dadas as matrizes S e R é possível construir um controlador que satisfaça o problema da maneira que apresentaremos a seguir.

Seja $k = \text{posto}(I - RS)$. Calculam-se matrizes de posto completo por colunas M e $N \in \mathbb{R}^{n \times k}$ tais que $MN' = I - RS$. Em seguida obtém-se uma matriz $X \in \mathbb{R}^{(n+k) \times (n+k)}$ que satisfaça o sistema linear

$$\begin{bmatrix} S & I \\ N' & 0 \end{bmatrix} = X \begin{bmatrix} I & R \\ 0 & M' \end{bmatrix}$$

A matriz X resultante deve ser positiva definida. Definem-se agora as matrizes auxiliares

$$A_0 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_k \end{bmatrix} \quad B_0 = \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_0 = [C_z \ 0]$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & B_u \\ I_k & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & I_k \\ C_y & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{uz} = [0 \ D_{uz}] \quad D_{wy} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_{wy} \end{bmatrix}$$

que nos permitem definir as matrizes

$$Q = [C \ D_{wy} \ 0_{(k+n_y) \times n_z}]$$

¹⁶I.e., suas colunas formam uma base para o núcleo.

¹⁷A ordem mínima do controlador é dada por $\text{posto}(I - RS)$. O problema então torna-se minimizar $\text{posto}(I - RS)$ sujeito às LMI do teorema. Esse funcional, no entanto, não é convexo.

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} B' & 0_{(k+n_u) \times n_w} & D'_{uz} \end{bmatrix}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} A'_0 X + X A_0 & X B_0 & C'_0 \\ B'_0 X & -\gamma I & D'_{wz} \\ C_0 & D_{wz} & -\gamma I \end{bmatrix}$$

Depois de encontradas as matrizes resolve-se a LMI

$$\Psi + Q'\Theta'P + P'\Theta Q < 0$$

particiona-se a matriz Θ como

$$\Theta = \begin{bmatrix} A_F & B_F \\ C_F & D_F \end{bmatrix}$$

com $D_F \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ e finalmente tem-se a descrição de estados para o controlador, que terá a função de transferência

$$F(s) = C_F(sI - A_F)^{-1}B_F + D_F$$

4.5 O Problema $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Misto

4.5.1 Definição do problema

O problema $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ pode ser formulado a partir da planta da figura 4.4: encontrar um controlador que minimize $\|G_{22}\|_2$ sujeito à restrição $\|G_{\infty\infty}\|_\infty < \gamma$. Podemos também propor o problema “inverso”, de minimizar $\|G_{\infty\infty}\|_\infty$ sujeito à restrição $\|G_{22}\|_2 < \gamma$.

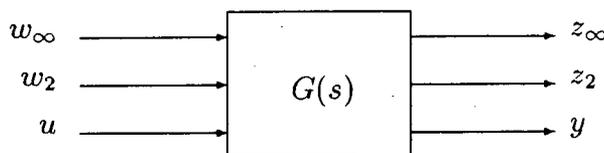


Figura 4.4: Planta para o problema misto

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_2 w_2 + B_\infty w_\infty + B_u u \\ z_2 = C_2 x + D_{22} w_2 + D_{\infty 2} w_\infty + D_{u2} u \\ z_\infty = C_\infty x + D_{2\infty} w_2 + D_{\infty\infty} w_\infty + D_{u\infty} u \\ y = C_y x + D_{2y} w_2 + D_{\infty y} w_\infty + D_{uy} u \end{cases} \quad (4.22)$$

$$\begin{bmatrix} z_2(s) \\ z_\infty(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{22}(s) & G_{\infty 2}(s) & G_{u2}(s) \\ G_{2\infty}(s) & G_{\infty\infty}(s) & G_{u\infty}(s) \\ G_{2y}(s) & G_{\infty y}(s) & G_{uy}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2(s) \\ w_\infty(s) \\ u(s) \end{bmatrix}$$

O problema encontra várias motivações. Uma delas é impor algum limitante no ganho \mathcal{H}_∞ , por razões vistas na seção 4.4, e uma restrição \mathcal{H}_2 pode cumprir esse papel. Outra motivação provém do chamado problema de “performance robusta”, que consiste

em garantir não só estabilidade como também performance frente a incertezas do modelo. Note que o problema $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ misto *não* resolve esse problema, mas suas soluções podem fornecer conhecimento para resolvê-lo [40]. De fato, mesmo o problema misto não possui ainda solução analítica¹⁸. As abordagens propostas minimizam não a norma \mathcal{H}_2 , mas sim um limitante superior para a mesma. A minimização de um limitante foi tratada em [8] e, de forma convexa, em [40].

4.5.2 Realimentação de estados

Iremos minimizar também um limitante superior para a norma \mathcal{H}_2 . A abordagem dessa seção consiste simplesmente em acoplar as soluções LMI do problema \mathcal{H}_2 e do problema subótimo \mathcal{H}_∞ . Consideremos o sistema (4.22) com $y = x$ e $D_{22} = 0$.

Teorema 93 *Sejam N , L e W as soluções para o seguinte problema:*

$$\begin{aligned} \min \operatorname{tr}(N) : & \begin{bmatrix} N & C_z W - D_{u2} L \\ (C_z W - D_{u2} L)' & W \end{bmatrix} \geq 0, \\ & \begin{bmatrix} AW + WA' - B_u L - L' B'_u & B_2 \\ B'_2 & -I \end{bmatrix} \leq 0, \\ & \begin{bmatrix} AW + WA' - B_u L - L' B'_u & B_\infty & WC'_\infty - L' D'_{u\infty} \\ B'_\infty & -\gamma^2 I & D'_{\infty\infty} \\ C_\infty W - D_{u\infty} L & D_{\infty\infty} & -I \end{bmatrix} \leq 0, \\ & W > 0 \end{aligned}$$

Então o sistema (4.22) realimentado por $u = -LW^{-1}x$ é tal que $\|G_{\infty\infty}\|_\infty < \gamma$ e ainda $\|G_{22}\|_2^2 < \operatorname{tr}(N)$.

A prova é trivial: basta notar que as restrições do teorema impõem que as restrições dos teoremas 86 e 90 são satisfeitas. Como estamos agora adicionando a restrição \mathcal{H}_∞ ao problema \mathcal{H}_2 , não podemos mais garantir a otimalidade da solução apenas minimizando o traço de N , e por isso podemos apenas garantir o limitante superior.

Cabe notar que, caso $\gamma^2 B_2 B'_2 \leq B_\infty B'_\infty$, as restrições se reduzem às mesmas encontradas em [40].

¹⁸A solução apresentada em [53] requer a solução de 7 equações não lineares acopladas.

Capítulo 5

Conclusões

Ao longo desse trabalho foram apresentados vários resultados importantes da área de controle e suas soluções via inequações matriciais lineares. Esses resultados foram agrupados e apresentados de forma didática, de forma que mesmo leitores pouco familiarizados tanto com os problemas quanto com a abordagem LMI pudessem acompanhar sem muitas dificuldades o desenvolvimento dos temas. Os resultados foram apresentados em três blocos:

No capítulo 2 foram apresentados resultados básicos para a compreensão dos problemas de controle em si. Um tratamento simples mas completo foi dado aos temas tratados. Nesse sentido podemos citar como contribuição desse trabalho a síntese realizada dos conceitos de passividade e positividade e suas interpretações e a breve síntese de espaços vetoriais (principalmente no que toca à teoria de Lebesgue). Esses dois tópicos, apesar de básicos em vários campos da teoria de controle, raramente são tratados de forma simples e objetiva na literatura, e quando o são normalmente acabam por omitir alguns aspectos importantes.

No capítulo 3 são apresentados resultados de estabilidade normalmente associados a sistemas não lineares. Os resultados são apresentados em ordem crescente de “complexidade” da abordagem. Soluções recentes para os critérios de Brockett e Willems e de Zames e Falb em termos de LMI foram apresentadas. O tratamento dado anteriormente aos conceitos de positividade e passividade reflete-se na interpretação dos critérios, que, como visto durante a abordagem do critério de Zames e Falb, reduzem-se a verificação da positividade de um sistema modificado.

No capítulo 4 são apresentados resultados da “nova” teoria de controle, referentes aos problemas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . A ordem de apresentação reflete o caráter “generalizador” da teoria \mathcal{H}_∞ em relação à teoria \mathcal{H}_2 . O problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ é apresentado para demonstrar o poder da abordagem LMI: de fato, uma vez formulado o problema, a sua solução em termos de LMI é realizada de forma simples. Nesse capítulo também é tratado o problema de realimentação estática de saída. Pequenas correções são feitas ao resultado de Guoxiang Gu [30] e uma formulação LMI é dada ao problema, o que pode ser visto como uma contribuição desse trabalho.

Os resultados derivados do problema restrito de Lyapunov permitiram determinar algumas características do problema em termos geométricos, além de estender o resultado de Gu para sistemas com representação de estados genérica.

Os resultados derivados da inequação de Lyapunov são, talvez, os mais interes-

santes desse trabalho. Propiciam, através da simples inclusão de duas restrições de igualdade lineares, condições suficientes para a existência de um ganho estabilizante. Além disso, como foi provado, são condições necessárias e suficientes se levarmos em conta todas as possíveis representações de estado do sistema. Nesse sentido o resultado pode ser comparado ao obtido em [29], mas as particularidades e propriedades da abordagem deste trabalho ainda são desconhecidas, e constituem um interessante tema a ser estudado. A partir dos resultados deste trabalho foi obtida uma nova formulação para o problema de realimentação de estados, formulação essa que permite extensões e generalizações de resultados existentes. A síntese via critério do círculo com o setor variável foi tratada como exemplo, um resultado que, segundo nosso conhecimento, também é novo.

Esta dissertação aponta várias direções para pesquisas futuras: as propriedades da abordagem do problema de realimentação de saída podem ser aprofundadas ainda mais. A colocação do problema de realimentação descentralizada na mesma formulação é um tópico a ser pesquisado. A formulação alternativa para a realimentação de estados pode gerar resultados proveitosos, a serem ainda explorados. A relação entre o problema restrito de Lyapunov e passividade¹ poderiam ser trabalhados. Por fim, a colocação dos resultados em termos de sistemas discretos é um tema a ser abordado, pois esse trabalho tratou apenas de sistemas contínuos.

¹As condições necessárias e suficientes para a solução do PRL para plantas quadradas são praticamente idênticas às necessárias para que um sistema seja passivizável via realimentação de estados.

Apêndice A

Análise convexa

Daremos aqui apenas alguns conceitos básicos para a análise convexa, pois um estudo mais aprofundado foge do escopo desse trabalho. O leitor interessado poderá encontrar um tratamento mais abrangente em [54].

A.1 Conjuntos afins

Sejam x e y pertencentes a \mathbb{R}^n . Definimos o produto interno $\langle x, y \rangle = x' \cdot y$. A reta que une esses dois pontos é dada pela equação

$$(1 - \lambda)x + \lambda y = x + \lambda(y - x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Definição 94 (*conjunto afim*) Um subconjunto M de \mathbb{R}^n é dito afim se, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e para todo par $x, y \in M$,

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in M.$$

Assim, um conjunto é afim se a reta que passa por quaisquer dois pontos do conjunto também pertence ao conjunto. Não é difícil notar que todos os subespaços de \mathbb{R}^n são conjuntos afins que contêm a origem. Um conjunto afim não necessita, porém, conter a origem: o *translado* de um conjunto afim M é definido como

$$M + a \triangleq \{x + a : x \in M\}.$$

Se, para um dado M , existir um a tal que $M = L + a$, então M e L são ditos *paralelos*. Todo conjunto afim M não vazio é paralelo a um único subespaço L , que por sua vez é dado por

$$L = M - M = \{x - y : x, y \in M\}.$$

A dimensão do conjunto M é a dimensão desse subespaço. Por definição, a dimensão do conjunto afim vazio é -1 . Todo conjunto afim M pode ser representado por

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : Bx = b, B \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m\}.$$

Lembrando que um hiperplano pode sempre ser representado por $H = \{x : \langle x, b \rangle = \beta, b \neq 0\}$, temos a seguinte conclusão: *todo conjunto afim de \mathbb{R}^n é a intersecção de finitos hiperplanos*. Esses hiperplanos são dados por

$$H_i = \{x : \langle x, b_i \rangle = \beta_i\},$$

onde os b_i são tomados da matriz B e β_i é tomado do vetor b .

Definição 95 (*casca afim*) Dado qualquer $S \subset \mathbb{R}^n$, o menor conjunto afim que contém S existe e é único. Esse conjunto é chamado de casca afim de S e é dado pela intersecção de todos os conjuntos afins M tais que $S \subset M$.

Representamos a casca afim de S como $\text{aff } S$. A casca afim de S é dada por todos os vetores na forma

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m,$$

onde $x_i \in S$ e $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = 1$. Um conjunto de $m+1$ pontos é *afim independente*¹ se $M = \text{aff}\{b_0, b_1, \dots, b_m\}$ for m -dimensional, ou seja, se os vetores $\{b_1 - b_0, \dots, b_m - b_0\}$ forem linearmente independentes.

A.2 Conjuntos convexos

Os conjuntos convexos são definidos de forma similar aos conjuntos afins:

Definição 96 (*conjunto convexo*) Um subconjunto C de \mathbb{R}^n é dito convexo se

$$\forall x, y \in C, (1 - \lambda)x + \lambda y \in C, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Assim, um conjunto é convexo se o segmento de reta que une quaisquer dois pontos do conjunto também pertencer ao conjunto. É claro então que todos os conjuntos afins são convexos, mas o contrário não é verdadeiro. Entre os conjuntos convexos destacam-se os *semi-planos*:

$$C_1 = \{x : \langle x, b \rangle \leq \beta\} \quad C_2 = \{x : \langle x, b \rangle > \beta\}$$

O primeiro exemplo é *fechado*, enquanto o segundo é *aberto*. Se as desigualdades forem substituídas por uma igualdade teremos um hiperplano. Sabendo que a intersecção de conjuntos convexos é também convexa, podemos tirar a seguinte conclusão:

Corolário 97 O conjunto solução de um sistema simultâneo de inequações lineares é convexo.

A intersecção de finitos conjuntos convexos é um conjunto convexo *poliédrico*. A soma vetorial $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m$ é uma *combinação convexa* de $\{x_1, \dots, x_m\}$ se $\lambda_i \geq 0$ e $\sum \lambda_i = 1$.

Um conjunto que é a casca convexa de um número finito de pontos é um *politopo*. Se um conjunto de m pontos é afim independente, sua casca convexa é um *simplex m -dimensional*.

Definição 98 (*Cone*) Um subconjunto K de \mathbb{R}^n é chamado cone se for fechado em relação à multiplicação escalar positiva, isto é, se

$$\forall x \in K, \quad \forall \lambda > 0, \quad \lambda x \in K.$$

¹Em inglês, *affinely independent*.

Alguns autores consideram que λ pode ser zero, e nesse caso todos os cones conteriam a origem. Adotamos a convenção de [54], onde $\lambda > 0$. Um cone é a união de semi retas que emanam da origem. Note que um cone não precisa ser “pontagudo”: qualquer semi-plano que contenha a origem, por exemplo, é um cone.

Teorema 99 (*Cone convexo*) *Um subconjunto de \mathbb{R}^n é um cone convexo se e somente se ele for fechado em relação à adição e à multiplicação escalar positiva.*

Por fim ressaltamos alguns fatos da álgebra de conjuntos convexos:

- Se C_1 e C_2 são conjuntos convexos, então também o é a sua soma $C_1 + C_2 \triangleq \{x_1 + x_2 : x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$.
- Com a soma definida como acima, a combinação linear de conjuntos convexos também é um conjunto convexo.
- Um conjunto convexo é *simétrico* se $C = -C$. Nesse caso, se o conjunto não for vazio ele contém obrigatoriamente a origem. Os cones convexos simétricos não vazios são os subespaços.
- Um conjunto C é convexo se e somente se, para todos escalares λ_1 e λ_2 não negativos, $(\lambda_1 + \lambda_2)C = \lambda_1 C + \lambda_2 C$.

A.3 Funções convexas

Seja $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. O *epígrafo* de f é o seguinte conjunto:

$$\text{epi } f \triangleq \{(x, \mu) : x \in S, \mu \in \mathbb{R}, \mu \geq f(x)\}.$$

Podemos considerar o epígrafo como o conjunto que está “acima” da função, como na figura A.1.

Definição 100 (*Função convexa*) *Uma função é convexa em S se o seu epígrafo é convexo.*

Uma função é *côncava* em S se sua negativa é convexa. Uma função é *afim* em S se ela é finita, côncava e convexa. A verificação matemática da convexidade de uma função pode ser feita de várias maneiras (C é um conjunto convexo):

- $f : C \rightarrow (-\infty, \infty]$ é convexa se e somente se

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y), \\ x, y \in C, \quad 0 < \lambda < 1.$$

- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$ é convexa se e somente se

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) < (1 - \lambda)\alpha + \lambda\beta, \quad 0 < \lambda < 1,$$

sempre que $f(x) < \alpha$ e $f(y) < \beta$.

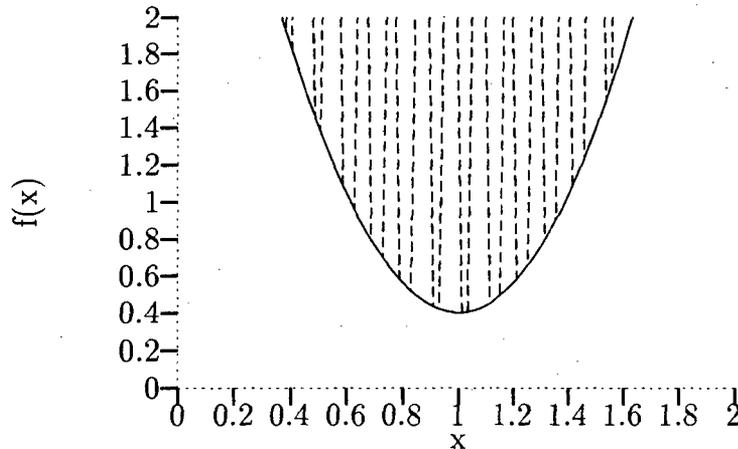


Figura A.1: Epígrafo de uma função convexa

- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$ é convexa se e somente se

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_m f(x_m),$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad \sum \lambda_i = 1.$$

- se f tem derivada de ordem dois contínua no intervalo (α, β) , então ela é convexa nesse intervalo se e somente se $f'' \geq 0$ em (α, β) .

Normalmente a primeira verificação é tomada como definição de função convexa. Ela é, porém, menos geral do que a definição dada aqui porque não inclui funções que assumem o valor $-\infty$ em algum ponto. Uma função convexa é *própria* se não assume o valor $-\infty$ em nenhum ponto e assume um valor finito em pelo menos um ponto. Isso é equivalente a exigir que seu epígrafo seja não vazio e não contenha linhas verticais. A última verificação pode ser estendida da seguinte forma:

Teorema 101 *Seja $f : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ com derivada segunda contínua no conjunto C . Então f é convexa em C se e somente se a sua Hessiana $Q(x)$ for positiva semi-definida para todo $x \in C$. A Hessiana é definida como*

$$H(f(x)) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{bmatrix},$$

onde $x = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]'$.

A prova pode ser encontrada em [54]. Para finalizar enunciamos alguns resultados sobre operações funcionais. As provas podem todas ser encontradas em [54].

- Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$ convexa e $g : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, \infty]$ convexa e não decrescente. Então $h(x) = g(f(x))$ é convexa em \mathbb{R} .
- A soma de duas funções convexas próprias é convexa.
- Seja C um conjunto convexo em \mathbb{R}^{n+1} . Então a função $f(x) = \inf\{\mu : (x, \mu) \in C\}$ é convexa.
- O supremo ponto-a-ponto de um conjunto de funções convexas é uma função convexa.

Apêndice B

Espaços vetoriais

Daremos aqui uma noção básica de espaços vetoriais e de elementos de álgebra. O objetivo final dessa parte é fornecer uma pequena introdução aos espaços de Lebesgue. A teoria dos espaços de Lebesgue possui de fato um nível de complexidade elevado. Em particular, deveríamos abandonar nosso conceito de integral para passarmos a trabalhar com outro tipo, a *integral de Lebesgue*. O trabalho com a integral a que estamos acostumados (integral de Riemann) não nos traz, porém, grandes inconvenientes, e por isso muitas vezes ela é utilizada nas definições dos espaços de Lebesgue na literatura de controle. Infelizmente, porém, essa diferenciação raramente é notada.

Começaremos com algumas definições mais básicas, mas igualmente importantes no ramo de controle. Seguiremos com uma breve passagem pela “verdadeira” teoria de Lebesgue, onde, como será visto, o grande diferencial é a definição de integral. O material encontrado aqui pode ser obtido de [49], e uma versão mais voltada para controle, já simplificada, em [62].

B.1 Espaços de Banach

Definição 102 (*Espaço vetorial*) *Seja X um conjunto. Diz-se que X é um espaço vetorial sob um campo de escalares S se existirem operações $+$: $X^2 \rightarrow X$ e \cdot : $S \times X \rightarrow X$ tais que, para $(x, y) \in X^2$ e $(s_1, s_2) \in S^2$ as seguintes relações forem satisfeitas:*

1. $x + y = y + x$
2. $(s_1 s_2)x = s_1(s_2 x)$
3. $(s_1 + s_2)x = s_1 x + s_2 x$
4. $s_1(x + y) = s_1 x + s_1 y$
5. $Ix = x$, onde I representa o elemento identidade no campo S .

Os elementos de um espaço vetorial X são chamados *vetores*. Se $S = \mathbb{R}$ ou $S = \mathbb{C}$ chamaremos X de espaço vetorial linear. Normalmente suprimiremos a palavra *vetorial* por brevidade.

Definição 103 (*Espaço linear normado*) *Seja X um espaço linear. Se existir, para todo $x \in X$, um número $\|x\|$ tal que*

1. $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall y \in X$
3. $\forall s \in S$, $\|sx\| = |s|\|x\|$

então o par $(X, \|\cdot\|)$ é dito um espaço linear normado.

O número $\|\cdot\|$ é chamado *norma em X*. Sempre que possível preferimos dizer que X é um espaço linear normado ao invés de utilizar a notação $(X, \|\cdot\|)$. Isso será feito também para outros espaços, mas pela sua definição a distinção deverá ser clara.

Definição 104 (*Seqüência convergente*) *Seja X um espaço linear normado. A seqüência $\{x_i\} = \{x_1, x_2, \dots\}$ de vetores em X é dita convergente para um vetor $x \in X$ se, dado $\epsilon > 0$, existir um número $j > 1, j \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$\|x_i - x\| < \epsilon \quad \forall i > j$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|x_i - x\| = 0.$$

Definição 105 (*Seqüência de Cauchy*) *Seja X um espaço linear normado. A seqüência $\{x_i\}$ é uma seqüência de Cauchy se, dado $\epsilon > 0$, existir um número $j > 1, j \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$\|x_i - x_k\| < \epsilon \quad \forall i > j, k > j$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{k, i \rightarrow \infty} \|x_i - x_k\| = 0$$

Finalmente podemos prosseguir com a definição principal:

Definição 106 (*Espaço de Banach*) *Seja X um espaço linear normado. X é dito um Espaço de Banach (ou ainda um espaço linear normado completo) se toda seqüência de Cauchy em X é convergente.*

A distinção entre seqüência de Cauchy e seqüência convergente não é muito clara, pois pode parecer que uma seqüência de Cauchy *sempre* converge. Realmente, exemplos de seqüência de Cauchy não convergentes são difíceis de serem imaginados, em particular porque o *espaço euclidiano \mathbb{R}^n , com as definições habituais, é espaço de Banach*. Assim, nesse espaço a que estamos tão habituados, toda a seqüência de Cauchy é de fato convergente. Para que o leitor tenha um “sentimento” da diferença entre os dois tipos de seqüência enunciaremos os seguinte fatos[59]:

- Se a derivada de uma função tende a zero, isso não significa que ela seja convergente. Como exemplo temos a função $f(t) = \sin(\log(t))$, ou ainda a função não limitada $f(t) = \log(t)$.
- Se uma função converge, isso não quer dizer que sua derivada tenda a zero. Como exemplo temos $f(t) = e^{-t} \sin(e^{2t})$.

B.2 Espaços de Hilbert

Definição 107 (*Produto interno*) Seja X um espaço linear em \mathbb{C} . O funcional bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em X se, para todo par $(x, y) \in X^2$, as seguintes condições forem satisfeitas:

1. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$, onde $\overline{(\cdot)}$ é o complexo conjugado.
2. $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.
3. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$, para todo escalar λ .
4. $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$, $\forall z \in X$.

O par $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é um espaço linear com produto interno.

O seguinte teorema nos dá algumas propriedades úteis do produto interno e de normas. Para a prova consultar [49].

Teorema 108 *Seja X um espaço linear com produto interno. Defina-se, nesse espaço, a norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Então as seguintes propriedades se verificam:*

1. $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ (*desigualdade de Cauchy*).
2. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Definição 109 (*Métrica induzida*) *Seja X um espaço linear normado. A métrica ou função distância ρ em X é definida para todo par $(x, y) \in X^2$ como $\rho(x, y) = \|x - y\|$. O par (X, ρ) é dito então um espaço com métrica, e a função ρ é chamada de métrica induzida pela norma $\|\cdot\|$.*

Pela definição de norma, a função ρ tem as seguintes propriedades:

1. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.
2. $\rho(x, y) \geq 0$, $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$.
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Podemos agora prosseguir com a definição principal:

Definição 110 (*Espaço de Hilbert*) *Seja X um espaço linear com produto interno. Se, para todo $x \in X$, definirmos $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$, então o par $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço linear normado. Se ainda X for completo com respeito à métrica induzida pela norma $\|\cdot\|$, então X é dito um Espaço de Hilbert.*

Assim, um espaço de Hilbert nada mais é do que um espaço de Banach com produto interno, de tal forma que a norma seja dada como na definição.

B.3 Medida de Lebesgue

Definição 111 (*Álgebra*) Seja X um conjunto. A classe \mathcal{X} dos subconjuntos de X é dita um corpo ou uma álgebra se as seguintes condições forem verificadas:

1. $X \in \mathcal{X}$, e o conjunto vazio $\emptyset \in \mathcal{X}$.
2. Dados $A \in \mathcal{X}$ e $B \in \mathcal{X}$, então $A \cup B \in \mathcal{X}$.
3. Dados A e B como acima, então $\tilde{A} = A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\} \in \mathcal{X}$.

Se, em adição, dada uma classe contável $\{A_i, i \in \mathbb{Z}_+\}$ de conjuntos em \mathcal{X} , o conjunto $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{X}$, então a álgebra \mathcal{X} é chamada de álgebra de Borel (ou ainda σ -álgebra).

Nos espaços a que estamos habituados é muito difícil encontrar um exemplo de uma álgebra que não seja de Borel.

Definição 112 (*Espaços mensuráveis*) Se \mathcal{X} é uma álgebra de Borel nos subconjuntos de X , o par (X, \mathcal{X}) é dito um espaço mensurável, e os membros de \mathcal{X} são chamados conjuntos \mathcal{X} -mensuráveis.

Definição 113 (*Medida*) Seja X um espaço mensurável. Então a função conjunto¹ m é dita uma medida aditiva em \mathcal{X} se

1. $0 \leq m(E) \leq \infty$, para $E \in \mathcal{X}$.
2. $(A \cap B) = \emptyset \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

A medida aditiva m é dita uma medida em \mathcal{X} se, para todas as seqüências $\{A_i, i \in \mathbb{Z}_+\}$ de conjuntos em \mathcal{X} tais que $i \neq j \Rightarrow (A_i \cap A_j) = \emptyset$,

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

Se X é um espaço mensurável e m uma medida em \mathcal{X} , então o triplete (X, \mathcal{X}, m) é chamado um *espaço medida*. Um subconjunto E de X tal que $m(E) = 0$ é chamado um *conjunto nulo*. Se alguma propriedade for válida em todo conjunto X exceto em um conjunto E tal que $m(E) = 0$, então essa propriedade é dita válida *m-quase sempre*² em X .

Podemos pensar na função m com sendo uma função que retorna o *tamanho* de um espaço. Assim, se tomarmos em $X = \mathbb{R}$ e \mathcal{X} como sendo o conjunto dos subespaços limitados pelos intervalos $E_i = [a_i, b_i]$ (podendo ser abertos em qualquer extremidade), então seria lógico pensar na *medida* $m(E_i) = b_i - a_i$, que nos daria o *tamanho* do subespaço E_i .

Definição 114 (*Medida externa*) Uma função conjunto μ definida na classe de todos os subconjuntos de um conjunto X é dita uma medida externa se as seguintes condições são satisfeitas:

¹Um mapeamento de conjuntos no conjunto dos números reais.

²Em inglês, *m-almost everywhere*.

1. $0 \leq \mu(A) \leq \infty, \quad \forall A \subseteq X.$
2. $\mu(\emptyset) = 0.$
3. $A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B).$
4. Se $\{A_i, i \in \mathbb{Z}_+\}$ é uma classe contável dos subconjuntos de X , então

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Um subconjunto A de X é dito μ -mensurável se, para todos os subconjuntos $E \subseteq X$,

$$\mu(E) = \mu(A \cap E) + \mu((X \setminus A) \cap E).$$

Utilizaremos a notação \mathcal{M}_μ para representar a classe de conjuntos μ -mensuráveis. Assim, se μ é uma medida externa em X , tem-se que \mathcal{M}_μ é uma álgebra de Borel, e que μ é uma medida em \mathcal{M}_μ . O triplete $(X, \mathcal{M}_\mu, \mu)$ é, portanto, um espaço medida. A partir da definição 111 podemos concluir que a classe dos conjuntos \mathcal{M}_μ -mensuráveis consiste dos conjuntos μ -mensuráveis.

O seguinte teorema (prova em [49]) nos fornece um meio de construir uma medida externa em um conjunto medida:

Teorema 115 *Seja X um conjunto medida tal que, dado qualquer subconjunto A de X existe uma classe $\{B_i, i \in \mathbb{Z}_+\}$ de conjuntos em \mathcal{X} tal que*

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Seja a função conjunto μ definida em X como

$$\mu(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i, B_i \in \mathcal{X}, \forall i \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

Então μ é uma medida externa em X , $\mu(B) = m(B)$ para $B \in \mathcal{X}$, e $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{M}_\mu$.

Podemos agora prosseguir com a definição principal:

Definição 116 *(Medida de Lebesgue em \mathbb{R}^n)* Dado o espaço euclidiano \mathbb{R}^n , denotamos por \mathcal{R}^n o conjunto de todos os retângulos na forma $R = r_1 \times r_2 \times \dots \times r_n$, onde cada conjunto r_n é um subintervalo de \mathbb{R} limitado pelo intervalo $[a_i, b_i]$ (podendo ser aberto em qualquer extremidade). Para cada retângulo definimos $m(R)$ como

$$m(R) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i),$$

onde $m(R)$ nos dá o volume do retângulo R . Definimos agora o conjunto \mathcal{X}^n como o conjunto de todas as uniões contáveis de retângulos em \mathcal{R}^n . Como, para todos os retângulos A e B , $A \setminus B$ é um retângulo, temos que \mathcal{X}^n é uma álgebra de Borel e $(\mathbb{R}^n, \mathcal{X}^n)$

é um espaço mensurável. Temos ainda que $(\mathbb{R}^n, \mathcal{X}^n, m)$ é um espaço medida. Defina-se agora a medida externa μ com o procedimento do teorema 115. Essa medida externa é chamada medida de Lebesgue em \mathbb{R}^n , e é denotada por m quando não houver risco de confusão. A classe $\mathcal{M}_\mu = \mathcal{M}_m$ de conjuntos μ -mensuráveis é chamada de conjuntos Lebesgue mensuráveis.

Se definirmos, em \mathbb{R}^n , a norma como sendo a norma euclideana, então todos os subconjuntos abertos de \mathbb{R}^n são Lebesgue mensuráveis. Como os subconjuntos fechados são o complemento dos abertos, o mesmo é válido para todos os subconjuntos fechados de \mathbb{R}^n .

B.4 Funções Lebesgue mensuráveis

Definição 117 (*Função \mathcal{X} -mensuráveis*) Seja X um espaço mensurável. A função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita \mathcal{X} -mensurável se e somente se para cada número $a \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{X}$.

Como \mathcal{X} é uma álgebra de Borel, que contém o complemento de seus membros, então a função f é \mathcal{X} -mensurável se e somente se, para cada $a \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{X}$. Se a função retornar valores no campo \mathbb{C} , então f é \mathcal{X} -mensurável se e somente se suas partes real e imaginária forem \mathcal{X} -mensuráveis.

Definição 118 (*Função Lebesgue mensurável*) Se μ é uma medida externa em X , e \mathcal{M}_μ é definido como anteriormente, então as funções \mathcal{M}_μ -mensuráveis são chamadas funções μ -mensuráveis. Se, em particular, $X = \mathbb{R}^n$ e m representa a medida de Lebesgue em \mathbb{R}^n , então as funções m -mensuráveis são chamadas funções Lebesgue mensuráveis.

B.5 Integral de Lebesgue

Seja A um subconjunto de um conjunto X . Definimos a função característica χ_A como

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \in \tilde{A}. \end{cases}$$

Essa função possui, entre outras, as seguintes propriedades (A e B são subconjuntos de X):

1. $\chi_\emptyset = 0$.
2. $\chi_A + \chi_{\tilde{A}} = \chi_X = 1$.
3. $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x)$.
4. $\chi_{A \cap B}(x) = 0 \iff A \cap B = \emptyset$.
5. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x)$.
6. $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$.

B.5.1 Funções simples

Definição 119 (*Função simples*) Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ é dita uma função simples se sua imagem consiste em um conjunto finito de escalares.

Por exemplo, seja a função f com imagem $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, com os elementos a distintos entre si. Definimos $A_i = \{x \in X : f(x) = a_i\}$. Daí os conjuntos A são disjuntos, e ainda

$$f(x) = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{A_i}(x).$$

Se X é um espaço mensurável, então a função simples f é \mathcal{X} -mensurável se e somente se os conjuntos A_i forem \mathcal{X} -mensuráveis. Se g é uma função \mathcal{X} -mensurável, então existe uma seqüência $\{f_i, i \in \mathbb{Z}_+\}$ tal que $|f_1| \leq |f_2| \leq \dots \leq |g|$ em X e

$$\forall x \in X, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x) = g(x).$$

Definição 120 (*Função salto*) Sejam retângulos em \mathbb{R}^n definidos como na definição 116. Então a função simples f é dita uma função salto se os conjuntos A_i definidos como acima forem retângulos.

Definição 121 (*Integral de Lebesgue para funções simples*) Seja X um espaço medida, e f uma função simples \mathcal{X} -mensurável representável por

$$f(x) = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{A_i}(x).$$

Se o conjunto E está em \mathcal{X} , então a integral de Lebesgue de f em E é definida como sendo

$$\sum_{i=1}^m a_i m(A_i \cap E),$$

e representada com a seguinte notação:

$$\int_E f(x) dm.$$

A integral de Lebesgue para funções simples possui as propriedades usuais da integral de Riemann (linearidade, ...).

B.5.2 Funções limitadas

Seja f uma função limitada em X . Seja ainda uma seqüência $\{a_i\}$ finita de $n+1$ escalares tais que

$$\inf_{x \in X} f(x) = a_0 < a_1 < \dots < a_n = \sup_{x \in X} f(x).$$

Definimos agora os seguintes conjuntos:

$$F_i = \begin{cases} \{x \in X : a_0 \leq f(x) \leq a_1\} & \text{se } i = 0, \\ \{x \in X : a_i < f(x) \leq a_{i+1}\} & \text{se } 0 < i < n. \end{cases}$$

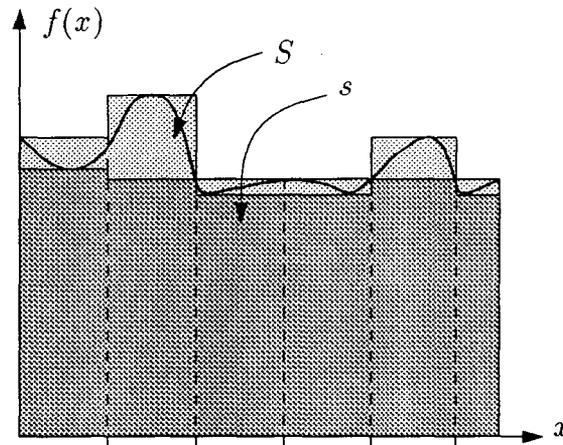


Figura B.1: Somas para integral de Lebesgue

A partir desses conjuntos definimos as seguintes somas:

$$s(a, f) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} a_i m(F_i), \quad S(a, f) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} m(F_i).$$

Introduzindo mais um elemento intermediário na seqüência $\{a_i\}$ teremos, para a nova seqüência a' , $s(a', f) \geq s(a, f)$ e $S(a', f) \leq S(a, f)$. É possível notar que, para quaisquer seqüências a e b satisfazendo as condições do começo dessa seção, tem-se que

$$s(a, f) \leq S(b, f).$$

Essa relação pode ser derivada mais facilmente através da interpretação gráfica de s e S , como feita na figura B.1. O teorema a seguir nos fornece um resultado fundamental e a definição desejada.

Teorema 122 *Se $m(X) < \infty$, então é verdade que*

$$\sup_a s(a, f) = \inf_a S(a, f).$$

Nesse caso, o valor comum das expressões é a integral de Lebesgue da função limitada f , representada por $\int_X f(x) dm$.

Para tomarmos integrais em um subespaço, basta notar que se $F \subseteq X$ e $m(F) < \infty$, então

$$\int_F f(x) dm = \int_X f(x) \chi_F(x) dm.$$

Como a integral é linear, funções retornando valores complexos podem ser integradas através de duas integrais de funções reais. Para o caso onde $m(X)$ é ilimitada, existe uma extensão do conceito de integral (para maiores detalhes consultar [49]).

B.5.3 Funções ilimitadas

Seja X um espaço medida, e f uma função \mathcal{X} -mensurável. Dado um número $a \in \mathbb{R}$, dividimos a função f em duas funções:

$$f_a = \begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)| \leq a, \\ a|f(x)|/f(x) & \text{se } |f(x)| > a. \end{cases}$$

$$f^a = f - f_a$$

Um exemplo dessa divisão pode ser visto na figura B.2. Consideremos agora que

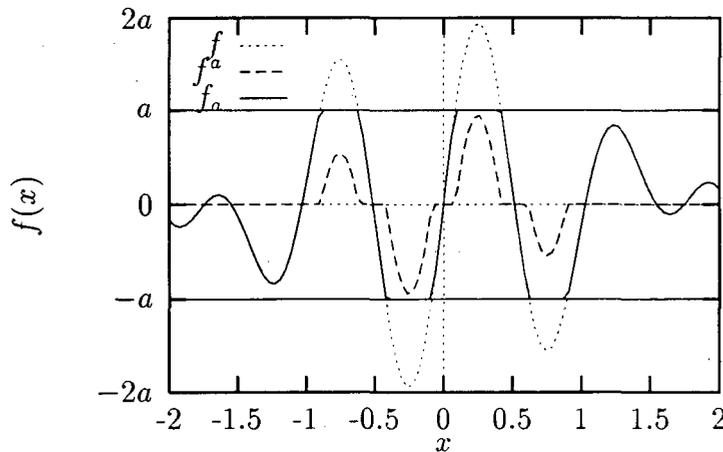


Figura B.2: Divisão de $f(x)$

$f(x) \geq 0$. Então [49] o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n dm$$

existe. Se esse limite for finito, a função é dita \mathcal{X} -integrável em E com respeito a m . O valor desse limite é a *integral de Lebesgue* de f em E com respeito a m .

Se $X = \mathbb{R}^m$ e m é a medida de Lebesgue, então a função é dita simplesmente *Lebesgue integrável*, e o limite é a sua *integral de Lebesgue*.

No caso em que $f(x) \not\geq 0$ para todo x , basta repartirmos f como a soma de duas funções, uma sempre positiva e outra sempre negativa. A definição passa a ser válida para quando dois limites existirem. O mesmo ocorre quando f toma valores complexos.

O teorema que segue será útil em definições posteriores.

Teorema 123. *Seja X um espaço medida σ -finito ³, e seja f \mathcal{X} integrável em um conjunto $E \in \mathcal{X}$. Então*

1. f é finita em E exceto em um conjunto E_0 tal que $m(E_0) = 0$.
2. Se $f \geq 0$ em E e $\int_E f dm = 0$, então $f = 0$ m -quase sempre em E .

³Um espaço é σ -finito se ele pode ser representado por $X = \cup_{i=1}^{\infty} X_i$, onde todos os X_i possuem medida finita e $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq X_n \subseteq \dots$

B.5.4 Integral de Lebesgue e de Riemann

Ao leitor deve restar a seguinte pergunta: qual a relação entre a integral de Lebesgue e a integral de Riemann⁴? Na verdade, a partir das definições dadas, não é fácil encontrarmos qual é a diferença entre as duas, em particular porque nos acostumamos com a idéia de integral como sendo a “inversa da derivada”. Além disso, a definição como “soma de retângulos” parece familiar, pois muitas vezes é empregada para o cálculo computacional da integral de Riemann.

Para explicarmos a diferença vamos tomar a definição para funções limitadas que retornam valores nos reais. A definição para a integral de Lebesgue (teorema 122) é equivalente à integral de Riemann se exigirmos que os conjuntos F sejam constituídos, na verdade, de *intervalos*. Assim, a integral de Lebesgue é mais abrangente do que a integral de Riemann. Tomemos como exemplo a função $\chi_{\mathbb{Q}}$ em algum intervalo $[a, b]$, onde \mathbb{Q} é o conjunto dos números racionais. Sabe-se que a linha dos reais é constituída de uma alternância entre pontos racionais e pontos irracionais⁵. Assim, não é difícil notar que é impossível, para essa função, representar os conjuntos F através de intervalos, e portanto essa função não é Riemann integrável. Ela é, no entanto, Lebesgue integrável. O seguinte resultado nos fornece a relação final:

Teorema 124 *A função limitada $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ em um intervalo $[a, b]$ é Riemann integrável se e somente se o conjunto de pontos onde ela é descontínua tiver medida de Lebesgue zero. Se f é Riemann integrável, então o valor da sua integral de Riemann é igual ao da integral de Lebesgue.*

B.6 Espaços L_p e \mathcal{L}_p

Os espaços de Lebesgue (os espaços L_p) são definidos da seguinte forma:

Definição 125 (*Espaços L_p*) *Seja X um espaço medida σ -finito. Então, dado qualquer real finito p , denota-se por $L_p(X, \mathcal{X}, m)$ a classe das funções complexas \mathcal{X} mensuráveis cujas potências p são \mathcal{X} integráveis em X com respeito a m . Daí $f \in L_p(X, \mathcal{X}, m)$ se e somente se $\int_X |f|^p dm$ for finita. O número $\|f\|_p$ é definido como*

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p dm \right)^{1/p}.$$

A classe $L_\infty(X, \mathcal{X}, m)$ é definida com $p \rightarrow \infty$, e o número $\|f\|_\infty = \inf_\alpha \{ \alpha : m(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = 0 \}$ é denominado de limite superior essencial de f em X .

Com o objetivo de simplificar a notação, sempre que possível representa-se o espaço $L_p(X, \mathcal{X}, m)$ simplesmente como $L_p(X)$. Em particular, quando \mathcal{X} representa a classe dos espaços Lebesgue mensuráveis em \mathbb{R}^n , temos a representação já conhecida $L_p(\mathbb{R}^n)$.

⁴A integral a que estamos habituados.

⁵Isto é, para quaisquer dois pontos racionais, existe sempre um número irracional entre eles, e vice-versa. Em outras palavras, não existe nenhum intervalo onde a função $\chi_{\mathbb{Q}}$ seja contínua.

O leitor mais atento deve ter notado que chamamos $\|f\|_p$ de *número* e não de *norma*, como é mais tradicional. Na verdade, $\|f\|_p$ não é uma norma. Pelo que já vimos da integral de Lebesgue, se $\|f\|_p = 0$ então f é zero *quase sempre*. Mas, pela definição de norma, deveríamos ter $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$. Para que possamos trabalhar em espaços normados, devemos contornar esse problema. Isso é feito com a criação de um espaço de classes equivalentes de funções de tal forma que $(L_p(X), \|\cdot\|_p)$ seja um espaço normado:

Definição 126 (*Espaços \mathcal{L}_p*) Denotamos por $\mathcal{L}_p(X, \mathcal{X}, m)$ o conjunto de classes de equivalência $[f]$, onde $f \in L_p(X)$ e $g \in [f]$ se e somente se $f = g$ *m-quase sempre*. Como $\|g\|_p = \|f\|_p$ para toda $g \in [f]$, definimos $\|[f]\|_p = \|f\|_p$, e por conveniência denotamos a classe $[f]$ simplesmente por f .

Da mesma forma como nos espaços L_p , o espaço agora definido será representado sempre que possível por $\mathcal{L}_p(X)$. O novo espaço possui propriedades bastante interessantes:

Teorema 127 (*Riesz-Fischer*) Seja X um espaço medida σ -finito. Então, para $1 \leq p \leq \infty$, $(L_p(X), \|\cdot\|_p)$ é um espaço linear normado e completo (portanto de Banach). Mais ainda, se $p = 2$, então o espaço $\mathcal{L}_2(X)$ com o produto interno definido como

$$\langle f, g \rangle = \int_X fg dm$$

é um espaço de Hilbert.

Cabe notar que a distinção entre os espaços L_p e \mathcal{L}_p nem sempre é feita, o que normalmente acarreta em uma certa confusão.

Apêndice C

Resultados complementares

C.1 Matrizes

C.1.1 Inversas Generalizadas

Trataremos aqui de inversas generalizadas, também conhecidas como *pseudo-inversas*. Os resultados e definições aqui fornecidos podem ser obtidos de [7] e [5]. Primeiramente notamos algumas propriedades da inversa convencional. Se A é não singular, então $X = A^{-1}$ satisfaz

1. $AXA = A$
2. $XAX = X$
3. $AX = (AX)'$
4. $XA = (XA)'$
5. $AX = XA$
6. $A^i = XA^{i+1}, i = 0, 1, \dots$

Definição 128 *A pseudo-inversa de Moore-Penrose, representada por A^+ , é a única matriz tal que as propriedades (1-4) sejam satisfeitas.*

Definição 129 *Se existir uma matriz X que satisfaz as propriedades 1, 2 e 5, então ela é dita pseudo-inversa de grupo e representada por $A^\#$. Uma condição necessária para sua existência é a de que A deve ser quadrada.*

Definição 130 *Seja A uma matriz com índice¹ i . A pseudo-inversa de Drazin, representada por A^D , é a única matriz que satisfaz as propriedades 2, 5 e 6.*

Seja $A^{m \times n}$ com posto $A = r$ fatorada como $A = BG$. A existência de $A^\#$ é equivalente a qualquer um dos itens que seguem:

- $\mathcal{R}(A)$ e $\mathcal{N}(A)$ são complementares.

¹O índice de uma matriz é o menor inteiro i não negativo tal que posto $A^{i+1} =$ posto A^i .

- GB é não singular.

Caso exista, a pseudo-inversa de grupo é dada por $A^\# = B(GB)^{-2}G$. A pseudo-inversa de Moore-Penrose é igual à de grupo se e somente se $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A')$. Um fato importante a ser notado é que a pseudo-inversa de Moore-Penrose satisfaz

- $A^+Ax = x \quad \forall x \in \mathcal{R}(A')$
- $AA^+x = x \quad \forall x \in \mathcal{R}(A)$
- $A^+x = 0 \quad \forall x \in \mathcal{N}(A')$

C.2 Transformação de setores (loop shifting)

A técnica de *loop shifting* é bastante utilizada na análise de estabilidade de sistemas Lur'e para transformar um sistema onde a não-linearidade original está em um setor genérico $[K_1, K_2]$ em outro equivalente onde a não-linearidade está no setor $[0, \infty)$. Pode-se obter também um sistema onde a não-linearidade está no setor $[0, K]$. A figura C.1 mostra os passos da transformação.

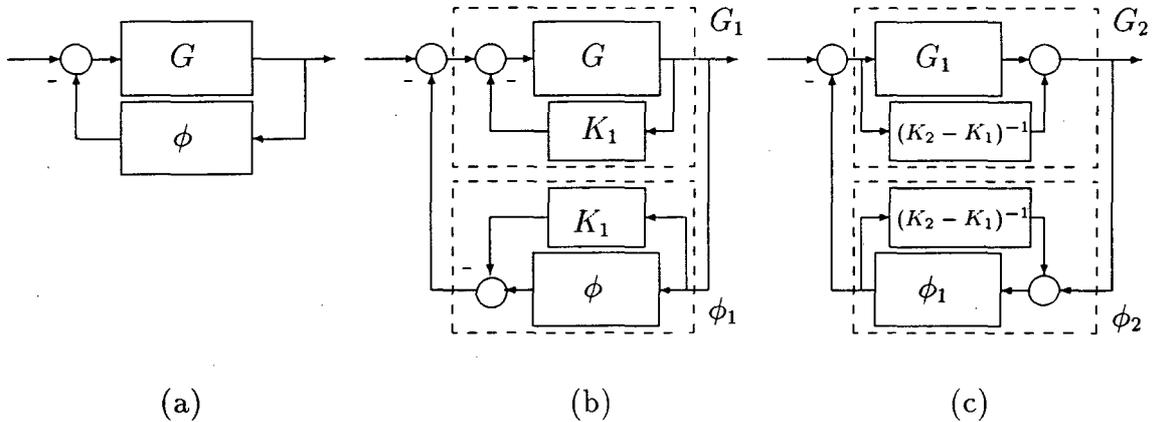


Figura C.1: Transformação de setores: (a) Sistema original, $\phi \in [K_1, K_2]$ (b) Primeira transformação, $\phi_1 \in [0, K_2 - K_1]$ (c) Transformação final, $\phi_2 \in [0, \infty)$

Essa transformação mantém também o sinal da derivada da não-linearidade. Para maiores detalhes ver [19] ou [37]. O procedimento é idêntico caso o setor original seja aberto em algum extremo, e teremos o setor resultante aberto no mesmo extremo, como é fácil de notar. As funções de transferência G_1 e G_2 são, respectivamente,

$$G_1 = G(I + K_1G)^{-1} \quad G_2 = G(I + K_1G)^{-1} + (K_2 - K_1)^{-1}.$$

Daí temos a representação por variáveis de estado

$$G_1 \sim \left[\begin{array}{c|c} A - B(I + K_1D)^{-1}K_1C & B(I + K_1D)^{-1} \\ \hline (I + DK_1)^{-1}C & (I + DK_1)^{-1}D \end{array} \right]$$

$$G_2 \sim \left[\frac{A - B(I + K_1 D)^{-1} K_1 C}{(I + DK_1)^{-1} C} \mid \frac{B(I + K_1 D)^{-1}}{(I + DK_1)^{-1} D + (K_2 - K_1)^{-1}} \right].$$

Cabe notar que a mesma transformação pode ser utilizada para transformar um setor genérico $[K_1, K_2]$ em um setor *simétrico* $[-K, K]$, bastando aplicar a primeira transformação substituindo-se o bloco K_1 por um bloco $(K_2 + K_1)/2$.

C.3 Zeros de transmissão

C.3.1 Verificação matricial

Os zeros de transmissão são dados pelos pontos onde

$$\det(C(sI - A)^{-1}B + D) \cdot \det(sI - A) = 0.$$

Aplicando uma conhecida identidade de determinantes (ver, por exemplo, [20]) temos

$$\det(C(sI - A)^{-1}B + D) \cdot \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & D \end{bmatrix}.$$

Consideraremos o caso onde $\det(CB) \neq 0$ e a matriz $C = [I \ 0]$. Particionaremos as matrizes do sistema como na seção 4.2.1. O posto de uma matriz permanece o mesmo se a multiplicarmos por uma matriz de mesma dimensão e posto completo, portanto

$$\begin{aligned} & \text{posto} \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} \\ &= \text{posto} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ -B_2 B_1^{-1} & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} \\ &= \text{posto} \begin{bmatrix} sI - A_{11} & -A_{12} & B_1 \\ B_2 B_1^{-1}(A_{11} - sI) - A_{21} & B_2 B_1^{-1}A_{12} - A_{22} + sI & 0 \\ -I & 0 & D \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Se $D = 0$, fica claro que os zeros de transmissão são dados pelos pontos onde $\det(sI - A_{22} + B_2 B_1^{-1} A_{12}) = 0$. No caso $B = [I \ 0]'$ o mesmo é válido para a matriz $sI - A_{22} + A_{21} C_1^{-1} C_2$ (resultado que pode ser encontrado em [31]).

C.3.2 Relação $\det(CB) \neq 0$ e zeros de transmissão

Consideremos a função de transferência $G(s) = N(s)/p(s) = C(sI - A)^{-1}B$, onde $p(s)$ é um polinômio e $N(s)$ uma matriz polinomial. Será considerado, também, que $\det(CB) \neq 0$. Para o caso monovariável é fácil notar, pelo que foi desenvolvido na seção anterior, que o número de zeros de transmissão é sempre menor exatamente em uma unidade do que o número de pólos, pois a matriz A_{22} possui dimensão igual ao número de zeros de transmissão.

Para o caso multivariável temos um procedimento um pouco mais elaborado. Como $M^{-1} = \text{adj}(M)/\det(M)$, temos $N(s) = C \text{adj}(sI - A)B$. Sendo n o grau de

$\det(sI - A)$ não é difícil notar² que todos os polinômios da diagonal de $\text{adj}(sI - A)$ serão mônicos e de grau $n - 1$. Mais ainda, os polinômios fora da diagonal de $\text{adj}(sI - A)$ nunca terão grau maior que $\min(n - 2, 0)$. Com um pouco de álgebra, notamos que todos os polinômios de $C \text{adj}(sI - A)$ terão os coeficientes de s^{n-1} iguais ao respectivo elemento de C . Utilizando o mesmo raciocínio pode-se concluir que a matriz $N(s)$ terá os coeficientes de grau $n - 1$ iguais às respectivas entradas da matriz CB , donde se conclui (pois $\det(CB) \neq 0$) que, para cada entrada de $G(s)$, existirá uma saída tal que a função de transferência entre as duas possua $n - 1$ zeros. O mesmo é válido se escolhermos primeiro uma saída.

C.4 Passividade e positividade

C.4.1 Relaxamento da exigência de observabilidade

Em [4] a condição de observabilidade do teorema 30 foi suprimida, resultando no seguinte teorema:

Teorema 131 (Anderson e Moore [4]) *Seja $G(s)$ uma função de transferência satisfazendo as mesmas hipóteses do teorema 30, salvo a de observabilidade. Então $G(s) \geq 0$ se e somente se existirem matrizes $P \geq 0, W$ e L tais que*

$$A'P + PA = -LL'$$

$$PB = C' - LW$$

$$W'W = D + D'$$

C.4.2 Verificação de positividade no eixo imaginário

Também em [4] foi derivada uma verificação para a condição $G(j\omega) + G'(-j\omega) \geq 0$. A verificação se dá da seguinte forma:

Teorema 132 *Seja $G(s)$ uma matriz de transferência própria e quadrada, com realização mínima descrita por (A, B, C, D) . Então*

$$G(j\omega) + G'(-j\omega) \geq 0$$

para todo ω tal que $j\omega$ não seja pólo de $G(s)$ se e somente se existirem matrizes $P = P', \det P \neq 0, L$ e W tais que

$$A'P + PA = -LL'$$

$$PB = C' - LW$$

$$W'W = D + D'$$

O relaxamento para a condição de observabilidade para esse resultado é feito *mutatis mutandis* na mesma referência. De fato, a única diferença é a de que, se o sistema não for observável, devemos permitir que o determinante de P seja nulo.

²Pelo método recursivo do cálculo do determinante.

C.4.3 Prova da verificação LMI para passividade

A prova pode ser inferida de resultados obtidos para o problema LQR em [64]. O sistema a ser considerado é $\dot{x} = Ax + Bu$. Primeiramente necessitamos de algumas definições:

- $\mathcal{L}_{2e}^- \triangleq \{f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^p / f(t) \in \mathcal{L}_2(0, T) \quad \forall T \geq 0\}$
- $w(x, u) \triangleq \langle u, Ru \rangle + 2\langle u, Cx \rangle + \langle x, Qx \rangle$
- $V^-(x_0) \triangleq - \inf_{\substack{u \in \mathcal{L}_{2e}^- \\ x(-\infty) \rightarrow 0}} \int_0^\infty w(x, u) dt$
- Inequação de dissipação (DIE): $\int_{t_0}^{t_1} w(x, u) dt + V(x_1) \geq V(x_0)$, onde V é uma função que satisfaz a inequação.

Uma observação importante é a de que, se o par (A, B) for controlável, temos imediatamente que $V^- > -\infty$, ou seja, V^- é limitada inferiormente, e que esse fato implica em que V^- satisfaz a DIE. Prova-se também [47] que V^- pode ser escrita na forma $x'Wx$.

A seguir enunciamos de forma simplificada o teorema 1 de [64]:

Teorema 133 (Willems) *Seja o par (A, B) controlável. Então as seguintes afirmativas são equivalentes:*

- $\int_0^T w(x, u) \geq 0 \quad \forall T \geq 0 \quad \forall (x, u) / x(0) = 0$
- $V^- \leq 0$
- *Existe $V \leq 0$ que satisfaz a DIE.*

A seguir, notamos que, se V pode ser expresso na forma $x'Wx$, então a DIE é equivalente a uma LMI em W : tomando $x_0 = 0$ e reescrevendo a DIE na forma diferencial a [64]

$$2\langle Wx, Ax + Bu \rangle \geq -\langle u, Ru \rangle - 2\langle u, Cx \rangle - \langle x, Qx \rangle$$

expandindo essa relação chegamos facilmente a

$$\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'W + WA + Q & WB + C' \\ C + B'W & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \geq 0$$

que nos dá uma LMI em W . Podemos agora proceder com a prova:

Consideremos o caso particular onde $w(x, u) = \langle u, 2Du \rangle + 2\langle u, Cx \rangle$. Daí temos imediatamente que, com $y = Cx + Du$, $w(x, u) = 2u'y$. Sendo assim, a primeira afirmativa do teorema de Willems torna-se a verificação de passividade. Então a passividade do sistema equivale à existência de uma função $V = x'Wx$ com $W \leq 0$ que satisfaz a DIE, o que por sua vez equivale à factibilidade da LMI derivada. Fazendo a mudança de variável $P = -W$ chegamos finalmente à LMI do teorema 35. ■

C.4.4 Prova da verificação LMI para passividade estrita

Reescrevendo a condição de passividade estrita para sistemas lineares temos

$$\int_0^T u'(Cx + Du) - \delta u'udt \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{L}_{2e}^n, \quad \forall T \in \mathbb{R}^+.$$

Tomando, como na prova anterior, um caso particular de $w(x, u)$:

$$w(x, u) = \langle u, 2(D - \delta)u \rangle + 2\langle u, Cx \rangle$$

podemos chegar, através do mesmo procedimento aplicado no caso da passividade, à LMI do corolário 36 tomando $\epsilon = 2\delta$. ■

C.4.5 Outras definições de passividade estrita

Em [38] são definidos os conceitos de *Y-passividade estrita* e *passividade muito estrita* em termos da função $w(x, u)$. As definições são como segue:

Definição 134 *Um sistema é Y-estritamente passivo se ele é dissipativo com respeito à função $w(x, u) = u'(Cx + Du) - \epsilon(Cx + Du)'(Cx + Du)$ para algum $\epsilon > 0$*

Definição 135 *Um sistema é muito estritamente passivo se ele é dissipativo com respeito à função $w(x, u) = u'(Cx + Du) - \epsilon_1 u'u - \epsilon_2(Cx + Du)'(Cx + Du)$ para algum $\epsilon_1 > 0$ e $\epsilon_2 > 0$.*

Essas duas definições implicam estabilidade assintótica. Do mesmo modo como fizemos anteriormente, podemos derivar verificações LMI para essas condições:

Corolário 136 *Um sistema $G(s)$ controlável é Y-estritamente passivo se e somente a seguinte LMI em P e ϵ for factível:*

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + \epsilon C'C & PB - C' + \epsilon C'D \\ B'P - C + \epsilon D'C & \epsilon D'D - D - D' \end{bmatrix} \leq 0 \quad P \geq 0, \epsilon > 0$$

Corolário 137 *Um sistema $G(s)$ controlável é muito estritamente passivo se e somente a seguinte LMI em P , ϵ_1 e ϵ_2 for factível:*

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + \epsilon_2 C'C & PB - C' + \epsilon_2 C'D \\ B'P - C + \epsilon_2 D'C & \epsilon_1 I + \epsilon_2 D'D - D - D' \end{bmatrix} \leq 0 \quad P \geq 0, \epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0$$

C.4.6 Auto-dualidade e parametrização de passividade

Seja $G(s)$ uma função de transferência passiva, com realização (A, B, C, D) . Essa realização é dita *auto-dual* [35] se as condições do teorema de Anderson (teorema 30) forem satisfeitas com $P = I$, isto é, se existirem matrizes L e W tais que

$$\begin{aligned} A' + A &= -LL' \\ B &= C' - LW \\ W'W &= D + D' \end{aligned}$$

Na verdade, a definição original considera $D = 0$, o que não é feito aqui. A partir dessa definição não é difícil chegar ao seguinte resultado:

Lema 138 *Toda função de transferência passiva possui uma representação de estados auto-dual. Em particular, se P é uma solução para as equações do teorema 30, então uma representação auto-dual é dada por*

$$\left[\begin{array}{c|c} P^{\frac{1}{2}}AP^{-\frac{1}{2}} & P^{\frac{1}{2}}B \\ \hline CP^{-\frac{1}{2}} & D \end{array} \right]$$

A prova é trivial, e será omitida aqui. Maiores detalhes podem ser encontrados em [41] para o caso $D = 0$. A existência de uma representação de estados auto-dual nos permite parametrizar uma grande classe de funções de transferência passivas através de LMI:

Lema 139 *Sejam A, B, C e D soluções para a LMI*

$$\left[\begin{array}{cc} A + A' & B - C' \\ B' - C & -D - D' \end{array} \right] < 0$$

Então a função de transferência $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ é passiva.

Pelos resultados da seção 2.6 a prova pode parecer trivial. O leitor atento deve ter notado, porém, que o lema não garante nem a controlabilidade nem a observabilidade da realização (A, B, C, D) , e que todos os resultados da seção 2.6 requerem no mínimo a controlabilidade. Como o lema não garante isso, a prova se faz necessária.

Prova: Primeiramente notamos que a LMI do lema 139 implica em que a matriz A seja Hurwitz e em que

$$(PB - C')(D + D')^{-1}(B'P - C) < -(A'P + PA),$$

com $P = I$. Defina-se a matriz de transferência

$$H(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline (D + D')^{-\frac{1}{2}}(C - B') & (D + D')^{\frac{1}{2}} \end{array} \right]$$

e a matriz $G(s)$ como no lema. Uma manipulação algébrica idêntica à realizada em [1] nos leva a³

$$G'(-s) + G(s) \geq H'(-s)H(s),$$

e, como $H(s)$ e $G(s)$ são assintoticamente estáveis por definição, fica claro que

$$G'(-s) + G(s) \geq 0, \quad \forall \Re[s] > 0,$$

e daí se conclui que $G(s)$ é passiva. ■

Se estendermos a definição de função fortemente positiva real (seção 2.6) para admitir o caso não controlável e não observável, então podemos tomar o resultado do lema 139 como parametrização de todas as funções fortemente positivas reais.

³Basta substituímos a equação 17 da referência por $PF + F'P < -(PG - H)\Phi(\infty)^{-1}(PG - H)'$ e desenvolvermos a equação 19 da mesma referência *mutatis mutandis*.

C.5 Realimentação de saída

Provaremos aqui o teorema 67. Para isso será necessário enunciarmos o resultado original, como obtido de [17]:

Teorema 140 *Seja um sistema dinâmico descrito pelas matrizes (A, B, C) , com C e B posto completo. Esse sistema é estabilizável via realimentação estática de saída se e somente se o seguinte problema em W , L e E for factível com $W > 0$:*

$$\det \begin{bmatrix} C \\ E' \end{bmatrix} \neq 0 \quad (\text{C.1})$$

$$AW + A'W - BL - L'B' < 0 \quad (\text{C.2})$$

$$CWE = 0 \quad (\text{C.3})$$

$$LE = 0 \quad (\text{C.4})$$

Suponha então que o sistema seja estabilizável por realimentação estática de saída. Então existe solução para as equações (C.1-C.4). Seja agora $T' = [C' \ E]$. De (C.1) tem-se que T é inversível. Aplicando a transformação de similaridade $\tilde{x} = Tx$ chegamos a um sistema equivalente $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$. Definindo $\tilde{W} = TWT'$, $\tilde{L} = LT'$ e $\tilde{E} = T^{-1}E$ não deve ser difícil para o leitor verificar que as equações (C.1-C.4) são satisfeitas para o sistema modificado. Notando agora que

$$TT^{-1} = \begin{bmatrix} C \\ E' \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} CT^{-1} \\ E'T^{-1} \end{bmatrix} = I$$

temos

$$\tilde{C} = CT^{-1} = [I \ 0]$$

$$\tilde{E} = T^{-1}E = [0 \ I]'$$

e dessas relações obtemos que, na nova base, as restrições (C.3-C.4) equivalem a impor a restrição estrutural

$$\tilde{L} = [L_1 \ 0] \quad \tilde{W} = \begin{bmatrix} W_{11} & 0 \\ 0 & W_{22} \end{bmatrix},$$

exatamente a mesma exigida na seção 4.1.2. Feitas essas observações e notando-se que o ganho $u = -L_1 W_{11}^{-1} y$ estabiliza o sistema⁴, o resultado do teorema 67 segue-se sem grandes dificuldades.

C.6 Exemplos

C.6.1 Forma canônica

Exemplo 141 Neste exemplo vamos tratar a LMI $A'P + PA < 0$. Consideremos uma matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ particular e representemos P através de seus elementos:

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

⁴resultado da seção 4.1.2.

Expandindo essa equação em termos de x_i podemos, através de algum algebrismo, chegar a uma formulação como em (1.1) com as seguintes matrizes:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 142 Consideremos agora o problema de estabilização via realimentação de estados. Temos o sistema $\dot{x} = Ax + Bu$. Utilizaremos a mesma matriz A do exemplo 141 e a matriz $B = [0 \ 1]'$. Procuramos um ganho $u = -Fx$ que estabilize o sistema, ou seja, desejamos encontrar F e $P > 0$ tais que $(A - BF)'P + P(A - BF) < 0$. Representando esse ganho por $F = [y_1 \ y_2]$, temos

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} [0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [y_1 \ y_2] < 0 \end{aligned}$$

Trabalhando algebricamente com essa inequação chegamos às seguintes matrizes $F_{i,j}$ da formulação (1.6):

$$F_{1,0} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_{2,0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}, \quad F_{3,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$F_{2,1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_{3,1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_{3,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

onde representamos apenas as matrizes não nulas para maior comodidade. Podemos observar que o problema de realimentação de saída pode também ser colocado na forma de uma BMI, bastando substituir BF por BFC , onde C é uma matriz conhecida.

C.6.2 Estabilização

Exemplo 143 Neste exemplo utilizaremos alguns resultados da seção 4.2 para estabilizar o sistema descrito por⁵

$$G(s) \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 4 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

O conjunto de pólos do sistema é $\{-1, 0, 0, 3\}$. Aplicando os resultados da seção 4.2 obtemos os seguintes ganhos estabilizantes:

⁵O sistema é o mesmo utilizado em [30].

- PRLW (problema 73):

$$F_o = \begin{bmatrix} 4.833 & 6.218 \\ 6.695 & 9.428 \end{bmatrix}$$

- problema W (problema 81):

$$F_o = \begin{bmatrix} 31.91 & 45.42 \\ 50.75 & 73.04 \end{bmatrix}$$

Exemplo 144 Consideremos agora uma planta retangular, onde não podemos utilizar os resultados derivados do problema restrito de Lyapunov:

$$G(s) \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Esse sistema possui dois pólos instáveis. Podemos empregar os resultados da seção 4.2.3 e obter ganhos estabilizantes:

- problema W (problema 81):

$$F_o = \begin{bmatrix} 0.1521 \\ 0.9509 \end{bmatrix}$$

- problema P (problema 80):

$$F_o = \begin{bmatrix} 0.2788 \\ 0.8866 \end{bmatrix}$$

C.6.3 Critério do círculo

Exemplo 145 Analisaremos o sistema (3.1) através do critério do círculo para determinar o “maior” setor que garante a estabilidade absoluta. O sistema será descrito por⁶

$$G(s) \sim \left[\begin{array}{cccccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6 & 0.6 & 0 & 0 & 440.676 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0.6 & -0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -441.11 & 0 & 0 & -218.263 & -94.5665 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.36001 & 0 & 0 & 125.966 & 5.254172 & 0.71246 & 0 & 0 \\ 0 & -0.00468 & 0 & 0 & 23.2524 & -24.9518 & -2.67167 & 0.55870 & 0 \\ 0 & -0.03096 & 0 & 0 & 4.51605 & -18.4446 & -5.99599 & -2.60747 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Consideramos que a não-linearidade está no setor $[K_1, K_2]$. Aplicando loop-shifting para levar a não-linearidade para o setor $[0, \infty)$ temos a função de transferência

$$\tilde{G}(s) \sim \left[\frac{A - B(I + K_1 D)^{-1} K_1 C}{(I + DK_1)^{-1} C} \mid \frac{B(I + K_1 D)^{-1}}{(I + DK_1)^{-1} D + (K_2 - K_1)^{-1}} \right]$$

⁶O sistema é o mesmo utilizado em [36].

Como notado em [36], podemos estimar o valor de K_2 fazendo $K_1 = 0$ e verificando qual o maior valor de K_2 tal que \tilde{G} seja fortemente positiva real. Assim, estimamos o valor de K_2 através do problema

$$\min \text{tr}(K_2^{-1}) : \begin{bmatrix} A'P + PA & PB - C' \\ B'P - C & -D - K_2^{-1} - D' - K_2^{-T} \end{bmatrix} < 0 \\ P > 0$$

O valor de K_1 pode ser estimado da mesma maneira substituindo-se \tilde{G} por $-\tilde{G}$. Utilizando esse procedimento chegamos aos seguintes valores:

$$\begin{aligned} K_1 &\leq -0.1517 \\ K_2 &\geq 0.5429 \end{aligned}$$

C.6.4 Problema \mathcal{H}_2

Exemplo 146 Faremos a minimização de um limitante superior da norma \mathcal{H}_2 de um sistema através da realimentação de saída. O sistema a ser considerado é descrito como

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_w w + B_u u \\ z = C_z x + D_{uz} u \\ y = C_y x \end{cases}$$

onde as matrizes de descrição são⁷:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B_u} = \underline{B_w} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C'_y = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C_z} = \begin{bmatrix} C_y \\ 0_{4 \times 4} \end{bmatrix} \quad \underline{D_{uz}} = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 2} \\ I_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

Os resultados são sumarizados na tabela C.1. As três colunas referentes ao problema W

	PRLW	prob W	prob W	prob W	LQR
Limitante	5.249	12.58	5.249	4.936	-
Norma real	4.779	5.588	4.779	4.600	3.645

Tabela C.1: Resultados de minimização \mathcal{H}_2

correspondem ao problema aplicado a diferentes representações de estado do sistema. A menor norma via realimentação de saída foi obtida com o ganho

$$F_o = \begin{bmatrix} 3.3252 & 4.6573 \\ 8.0209 & 17.023 \end{bmatrix}$$

⁷Sistema utilizado em [30], exceto pelas matrizes de ponderação.

Referências Bibliográficas

- [1] B. D. Anderson. An algebraic solution to the spectral factorization problem. *IEEE Transactions On Automatic Control*, AC-12(4):410–414, August 1967.
- [2] B. D. Anderson. A system theory criterion for positive real matrices. *SIAM J. Contr*, 5(2):171–182, 1967.
- [3] B. D. Anderson. A simplified viewpoint of hyperstability. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 13:292–294, Jun 1968.
- [4] B. D. Anderson and J. Moore. Algebraic structure of generalized positive real matrices. *SIAM J. Contr*, 6(4):615–624, 1968.
- [5] B. D. Anderson and J. Moore. *Optimal Control - Linear Quadratic Methods*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.
- [6] B. R. Barmish. *New Tools for Robustness of Linear Systems*. Macmillan, 1994.
- [7] A. Berman and R. J. Plemmons. *Nonnegative Matrices in Mathematical Sciences*. Academic Press, New York, 1979.
- [8] D. S. Bernstein and W. M. Haddad. LQG control with an \mathcal{H}_∞ performance bound: A Riccati equation approach. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 34(3):293–305, March 1989.
- [9] J. Bernussou, P. L. D. Peres, and J. C. Geromel. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *System & Control Letters*, 13:65–72, 1989.
- [10] S. Boyd, L. El-Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Studies in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1994.
- [11] R. Brockett and J. Willems. Frequency domain stability criteria - part I. *IEEE Transactions On Automatic Control*, AC-10:255–261, July 1965.
- [12] R. Brockett and J. Willems. Frequency domain stability criteria - part II. *IEEE Transactions On Automatic Control*, AC-10(4):407–413, October 1965.
- [13] C. I. Byrnes, A. Isidori, and J. C. Willems. Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 36(11):1228–1240, Nov 1991.

- [14] X. Chen and J. T. Wen. Multiplier based stability analysis for LTI systems with structured incrementally sector bounded feedback nonlinearities. Submetido à publicação, 1995.
- [15] M. Dahleh, A. Tesi, and A. Vicino. On the robust Popov criterion for interval Lur'e system. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 38(9):1400–1405, 1993.
- [16] R. L. Dailey. Lecture notes for the workshop on \mathcal{H}_∞ and μ methods for robust control. In *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, December 1991.
- [17] S. R. de Souza. *Análise Convexa Aplicada a Sistemas Dinâmicos Contínuos*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas, June 1994.
- [18] C. A. Desoer. A generalization of the Popov criterion. *IEEE Transactions On Automatic Control*, AC-10(4):182–185, 1965.
- [19] C. A. Desoer and M. Vidyasagar. *Feedback Systems: Input-Output Properties*. Academic Press, New York, 1985.
- [20] T. E. Fortmann. A matrix inversion identity. *IEEE Transactions On Automatic Control*, AC-15:599, October 1970.
- [21] P. Gahinet and P. Apkarian. An LMI-based parametrization of all \mathcal{H}_∞ controllers with applications. In *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, pages 656–661, December 1993.
- [22] A. R. Galimidi and B. R. Barmish. The constrained Lyapunov problem and its application to robust output feedback stabilization. *IEEE Transactions On Automatic Control*, AC-31(5):410–419, 1986.
- [23] F. Gantmacher. *The Theory Of Matrices*. Chelsea Publishing Company, New York, NY, 2nd edition, 1990.
- [24] P. B. Gapski. Análise convexa do problema da estabilidade absoluta de sistemas tipo Lur'e. Master's thesis, FEE/UNICAMP, 1994.
- [25] P. B. Gapski and J. C. Geromel. A convex approach to the absolute stability problem. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 39(9):1929–1932, 1994.
- [26] P. B. Gapski and J. C. Geromel. LMI solutions to the robust stability problem with multipliers. Submetido à publicação, 1995.
- [27] J. C. Geromel, J. Bernussou, and P. L. D. Peres. Decentralized control through parameter space optimization. *Automatica*, 30(10):1565–1578, 1994.
- [28] J. C. Geromel and P. B. Gapski. Robust analysis and synthesis of feedback systems using multipliers. Submetido à publicação, 1995.
- [29] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. Souza. Output feedback stabilization of uncertain systems throughout a min/max problem. In *12th IFAC World Congress on Automatic Control*, volume 6, pages 35–38, 1993.

- [30] G. Gu. On the existence of linear optimal control with output feedback. *SIAM J. Contr.*, 28(3):771–719, 1990.
- [31] G. Gu. Stabilizability conditions of multivariable uncertain systems via output feedback control. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 35(8):925–927, 1990.
- [32] W. M. Haddad and D. S. Bernstein. Explicit construction of quadratic Lyapunov functions for the small gain, positivity, circle, and Popov theorems and their application to robust stability. In *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, volume 3, pages 2618–2623, December 1991.
- [33] W. M. Haddad and D. S. Bernstein. Parameter-dependent Lyapunov functions, constant real parametric uncertainty, and the Popov criterion in robust analysis and synthesis - parts I and II. In *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, volume 3, December 1991.
- [34] W. M. Haddad and D. S. Bernstein. Robust stabilization with positive real uncertainty: Beyond the small gain theorem. *System & Control Letters*, 17:191–208, 1991.
- [35] W. M. Haddad, D. S. Bernstein, and Y. W. Wang. Dissipative $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ controller synthesis. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 39(4):827–831, April 1994.
- [36] W. M. Haddad, E. Collins Jr., and D. S. Bernstein. Robust stability analysis using the small gain, circle, positivity, and Popov theorems: A comparative study. *IEEE Control Systems Technology*, 1(4):290–293, 1993.
- [37] W. M. Haddad, J. P. How, S. R. Hall, and D. S. Bernstein. Extensions of mixed- μ bounds to monotonic and odd monotonic nonlinearities using absolute stability theory: Part I. In *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, pages 2813–2819, Tucson, Arizona, December 1992.
- [38] D. J. Hill and P. J. Moylan. The stability of nonlinear dissipative systems. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 21:708–711, Oct 1976.
- [39] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Macmillan, New York, 1992.
- [40] P. P. Khargonekar and M. A. Rotea. Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control: A convex optimization approach. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 36(7):824–837, July 1991.
- [41] R. Lozano-Leal and S. M. Joshi. On the design of dissipative LQG-type controller. In *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, pages 1645–1646, 1988.
- [42] R. Lozano-Leal and S. M. Joshi. Strictly positive real transfer functions revisited. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 35(11):1243–1245, 1990.
- [43] Lyapunov. Stability of motion. *International Journal of Control*, 55(3), March 1992.
- [44] H. Marquez and C. Damaren. Comments on “strictly positive real transfer functions revisited”. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 40(3):478–479, March 1995.

- [45] A. Megretski. Necessary and sufficient conditions of stability: A multiloop generalization of the circle criterion. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 38(5):753–756, May 1993.
- [46] P. Molander and J. C. Willems. Synthesis of state feedback control laws with a specified gain and phase margin. *IEEE Transactions On Automatic Control*, AC-25(5):928–931, 1980.
- [47] B. Molinari. The time-invariant linear-quadratic optimal control problem. *Automatica*, 13:347–357, 1977.
- [48] A. Nemirovskii and P. Gahinet. The projective method for solving linear matrix inequalities. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 840–844, June 1994.
- [49] G. O. Okikiolu. *Aspects of the Theory of Bounded Integral Operators in L_p -spaces*. Academic Press, London, 1971.
- [50] A. Packard, K. Zhou, P. Pandey, and G. Becker. A collection of robust control problems leading to LMI's. In *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, pages 1245–1250, December 1991.
- [51] P. L. D. Peres and J. C. Geromel. An alternate numerical solution to the linear quadratic problem. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 39(1):198–202, 1994.
- [52] A. C. M. Ran and R. Vreugdenhil. Existence and comparison theorems for algebraic Riccati equations for continuous- and discrete-time systems. *Linear Algebra and Its Applications*, 99:63–83, 1988.
- [53] D. B. Ridgely, L. Valavani, M. Dahleh, and G. Stein. Solution to the general mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control problem - necessary conditions for optimality. *Proceedings of the American Control Conference*, pages 1348–1352, 1992.
- [54] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princenton University Press, Princenton, New Jersey, 1970.
- [55] M. A. Rotea, M. Corless, D. Da, and I. Petersen. Systems with structured uncertainty: Relations between quadratic and robust stability. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 38(5):799–803, May 1993.
- [56] M. G. Safonov, K. Goh, and J. Ly. Control system synthesis via bilinear matrix inequalities. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 45–49, June 1994.
- [57] M. G. Safonov and G. Papavassilopoulos. The diameter of an intersection of ellipsoids and BMI robust synthesis. In *Symposium On Robust Control Design*, pages 313–317. IFAC, September 1994.
- [58] M. G. Safonov and G. Wietzner. Computer-aided stability analysis renders Popov criterion obsolete. *IEEE Transactions On Automatic Control*, AC-32(12):1128–1131, 1987.

- [59] J.-J. E. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.
- [60] G. Szego. *Orthogonal Polynomials*. American Mathematical Society, Providence, 1975.
- [61] L. Vandenberghe and S. Boyd. A primal-dual potential reduction method for problems involving matrix inequalities. *Mathematical Programming Series B*, 1994. also from the ftp address isl.stanford.edu.
- [62] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2nd edition, 1993.
- [63] J. T. Wen. Time domain and frequency domain conditions for strict positive realness. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 33(10):988-992, 1988.
- [64] J. C. Willems. Least squares stationary optimal control and the algebraic riccati equation. *IEEE Transactions On Automatic Control*, AC-16(6):621-634, 1971.
- [65] J. C. Willems. Mechanisms for the stability and instability in feedback systems. *Proceedings of the IEEE*, 64(1):24-35, Jan 1976.
- [66] G. Zames. On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems part I: Conditions derived using concepts of loop gain, conicity, and positivity. *IEEE Transactions On Automatic Control*, AC-11(2):228-238, 1966.
- [67] G. Zames. On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems part II: Conditions involving circles in the frequency plane and sector nonlinearities. *IEEE Transactions On Automatic Control*, AC-11(3):465-476, 1966.
- [68] G. Zames and P. Falb. Stability conditions for systems with monotone and slope-restricted nonlinearities. *SIAM J. Contr*, 6(1):89-108, 1968.