UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
UNIVERSIDADE VIRTUAL DO ESTADO DO MARANHÃO
ESPECIALIZAÇÃO EM
MATEMÁTICA NA MODALIDADE A DISTÂNCIA

UNIVIMA
Universidade Virtual do Estado do Maranhão

ANTONIO ALFREDO SOARES FONSECA

ERMERSON NEY LEITE RODRIGUES

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

São Luís

2009

ANTONIO ALFREDO SOARES FONSECA
ERMERSON NEY LEITE RODRIGUES

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Matemática da Universidade Virtual do Maranhão para obtenção do título Especialista em Matemática.

Orientador: Profº. Márcio Rodolfo Fernandes

São Luís
2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
Departamento de Matemática
Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor na modalidade a distância

"Equações Diferenciais de 1ª Ordem"

Monografia submetida a Comissão de avaliação do Curso de Especialização em Matemática-Formação do professor em cumprimento parcial para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 20/08/2009

Dr. Márcio Rodolfo Fernandes (CFM/UFSC - Orientador) ____________

Dr. Mário César Zambaldi (CFM/UFSC - Examinador) ____________

Dr. Fermin S. V. Bazán (CFM/UFSC – Examinador) ____________

Dra. Neri Terezinha Both Carvalho
Coordenadora do Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor

Florianópolis, Santa Catarina, agosto de 2009.

À Deus e à nossa família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos aqueles que contribuíram para a elaboração desta pesquisa em especial:

*À **Deus,** por ter me dado saúde e força para continuar nesta caminhada.*
*À **nossa Família,** pelo apoio e incentivo em todos os momentos.*

***Aos Professores do Curso de Especialização em Matemática,** pelo compartilhamento de horas e horas na disseminação do conhecimento.*

Ao Professor Márcio Rodolfo Fernandes, pela orientação, incentivo e colaboração na construção desta pesquisa e pela administração segura deste curso.

A Professora Nery Terezinha Both Carvalho coordenadora pelo o incentivo e colaboração.

A todos os professores do nosso curso de especialização.

***Aos Coordenadores, Servidores e Técnicos da Univima, São Luís-MA,** que nos ajudaram e nos apoiaram nas apresentações das aulas.*

***E aos nossos colegas de classe,** pela experiência e conhecimento disponibilizado a cada dia de aula.*

“Tudo aquilo que as maiores inteligências,
ao longo dos séculos, têm realizado em relação
`a compreensão das formas, por meios de conceitos
preciosos, está reunido numa grande ciência - A
Matemática ”

J.M.Herbart

RESUMO

Esta monografia tem como objetivo principal apresentar a importância das equações diferenciais de primeira ordem, bem suas aplicações e suporte matemático para muitas áreas da ciência e da Engenharia. Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de *equações diferenciais(ED).*
Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem é representada pelo simbolismo.

$$F\left(x, y, \frac{dx}{dy}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0.$$

Palavras-chave: Equações Diferenciais de Primeira Ordem

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LETRA GREGA

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As palavras *diferencial* e *equações* sugerem a resolução de algum tipo de equação envolvendo derivadas. As equações diferenciais são o suporte matemático para muitas áreas da ciência e da engenharia, surgem a partir da tentativa de formular, ou descrever, certos sistemas físicos em termos matemáticos.

As equações diferenciais podem ser modelos de situações reais. Muitos problemas ou fenômenos da Engenharia, das Ciências Físicas ou mesmo das Ciências Sociais e Humanas, quando formulados em termos de conceitos matemáticos, envolvem funções e suas derivadas fazendo surgir as equações diferenciais.

Equações diferenciais estão presentes em diversos modelos em física, química, biologia, economia, engenharia, etc. Vários fenômenos envolvem a variação de uma quantidade em relação a outra, levando naturalmente a modelos baseados em equações diferenciais. Podemos ter variações temporais de, por exemplo, a posição de um objeto, a temperatura de um material, a concentração de um agente químico, a concentração de um poluente ou nutriente em um meio, a umidade do ar, o número de habitantes de uma cidade, a densidade de bactérias de uma cultura, a densidade de massa de um gás, o valor de uma mercadoria, o câmbio entre moedas, o produto interno bruto de um país, etc. Além de variações temporais dessas quantidades, podemos ter variações em relação a outras quantidades, como variação de temperatura em relação a posição e variação de densidade de massa de um fluido em relação a temperatura, por exemplo.

Equações diferenciais são equações que relacionam funções (relações entre variáveis) e suas derivadas. Ou seja, relacionam taxas de variação de variáveis. Também podemos dizer que equações diferenciais são equações cujas incógnitas são funções e suas derivadas. Assim resolver uma equação diferencial é encontrar uma função que satisfaça a equação, ou ainda, é uma função que a satisfaz sob determinadas condições.

A solução geral de uma dada equação diferencial representa uma família de curvas, pois para cada valor da constante temos uma função que pode ser representada geometricamente por uma curva. Essa família também é chamada de **curvas integrais** da equação diferencial.

Muitas vezes o interesse está numa das curvas integrais, escolhida mediante uma condição inicial.

Nesse caso a solução que satisfaz uma condição inicial é denominada solução particular ou solução de um problema de valor inicial.

Essas idéias levam ao conceito de equações diferenciais de variáveis separadas, que são equações diferenciais cuja solução pode ser obtida mediante integração direta.

Assim equações diferenciais de variáveis separadas são equações diferenciais cujas variáveis podem ser separadas, gerando uma equação diferencial do tipo:

$$f(x)dx = g(y)dy$$

1.1 NOTAS HISTÓRICAS

O desenvolvimento das equações diferenciais está intimamente ligado ao desenvolvimento geral da matemática e não pode ser separado dele. Apesar disso, para fornecer alguma perspectiva histórica, vamos indicar aqui algumas tendências principais na história desse assunto e identificar os matemáticos atuantes no período inicial de desenvolvimento que mais se destacaram.

De acordo com Boyce,(2006 p. 15) as equações diferenciais começaram com o estudo de cálculo por Isaac Newton , suas descobertas sobre cálculo e as leis da mecânica datam de 1665. Elas circulam privadamente, entre seus amigos, mas Isaac Newton era muito sensível a críticas e só começou a publicar seus resultados a partir de 1687, quando lançou seu livro mais famoso, *Phifosophia Naturalis Principia Mathematica.* Apesar de Isaac Newton ter atuado relativamente pouco na área de equações diferenciais propriamente ditas, seu desenvolvimento de cálculo e a elucidação dos princípios básicos da mecânica forneceram a base para a aplicação das equações diferenciais no século XVIII.

Isaac Newton apud (BOYCE, 2006, p.15) classificou as equações diferenciais de primeira ordem de acordo com as formas $dy/dx = f(x)$, $dy/dx = f(y)$ *e* $dy/dx = f(x,y)$. Ele desenvolveu um método para resolver a última equação, no caso em que $f(x,y)$ é um polinômio em x e y, usando séries infinitas. Isaac Newton parou de fazer pesquisa matemática no início da década de 1690, exceto pela solução de problemas desafiadores ocasionais e pela revisão e publicação de resultados obtidos anteriormente.

Os irmãos Jakob e Johann Bernoulli, de Basel fizeram muito sobre o desenvolvimento de métodos para resolver equações diferenciais e para ampliar o campo de suas aplicações (BOYCE,2006 p.15). Com ajuda do cálculo, resolveram diversos problemas em mecânica formulando-os como equações diferenciais. Por exemplo, Jakob Bernoulli resolveu a equação diferencial $y' = [a^3 / (b^2y - a^3)]^{1/2}$ em 1690 e, no mesmo artigo, usou pela primeira vez a palavra "*integral*" no sentido moderno.

Daniel Bernoulli, filho de Johann Bernoulli, emigrou para São Petersburgo na juventude para se incorporar à Academia de São Petersburgo, recém-formada, mas retornou a Basel em 1773, como professor de botânica e, mais tarde, de física. Seus interesses eram, principalmente, em equações diferenciais e suas aplicações.

O maior matemático do século XVIII, *Leonhard Euler* , foi o matemático mais prolífico de todos os tempos, suas obras completas enchem mais de 70 volumes grossos. Entre outras coisas *Leonhard Euler* identificou a condição para que ***equações diferenciais de primeira ordem*** sejam exatas, desenvolveu a teoria de *fatores Integrantes*, no mesmo artigo e encontrou a solução geral para equações Lineares Homogêneas com coeficientes constantes em 1743.

De acordo com Boyce (2006 p.15) Pierre-Simon de Laplace destacou-se no campo da mecânica celeste, seu trabalho mais importante, *Traité de Mécanique céleste* foi publicado em 5 volumes. A equação de Laplace é fundamental em muitos ramos da física matemática e Laplace a estudou extensamente em conexão com a atração gravitacional. A transformada de Laplace recebeu o nome em sua homenagem, embora sua utilidade na resolução de equações diferenciais só tenha sido reconhecida muito mais tarde.

Alex Claude Clairaut(1713-1765) Nascido em Paris em 1713, Clairaut foi uma criança prodígio que escreveu seu primeiro livro sobre matemática ao 11 anos. Foi um dos primeiros a descobrir soluções singulares para equações diferenciais. Como muitos matemáticos de sua época, Clairaut foi também físico e astrônomo.

2 DEFINIÇÃO

Chama-se **Equação Diferencial (ED)** a uma equação que estabelece uma relação entre a variável independente, a função desconhecida e as suas derivadas.

Exemplo:

- 9y(x)y´+4x =0
- ,x é a variável independente
- ,y é a função incógnita

Designando por x a variável independente, por y a função desconhecida e por y´(x), y´´(x), ... $y^{(n)}$ as derivadas. A equação que estabelece a relação entre x, y(x), y´(x), y´´(x),...$y^{(n)}$ (x) é uma equação diferencial e escreve-se simbolicamente:

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0.$$

2 .1 Como Resolver uma Equação Diferencial Ordinária (EDO)

Chama-se solução da EDO uma função com n derivadas que satisfaça a equação. Na solução de uma EDO dois caminhos podem ser seguidos. Isto é, o que tenta levar à solução exata do problema (método analítico) ou o que encontra uma solução aproximada (método numérico).

Do ponto de vista analítico, resolver uma EDO do tipo $y' = f(x, y)$ é encontrar uma função $y = F(x)$ que satisfaça a equação dada. Por exemplo, dada a equação diferencial $y' = f(x, y) = 2x + 3$, sua solução é obtida por

$$y = \int (2x + 3)\, dx = x^2 + 3x + C.$$

Na verdade, temos uma família de soluções (para cada $C \in \mathbf{R}$ tem-se uma solução particular). Na Figura 1 são mostradas algumas destas soluções. No caso para $C = 0,\ C = 2$ e $C = 4$.

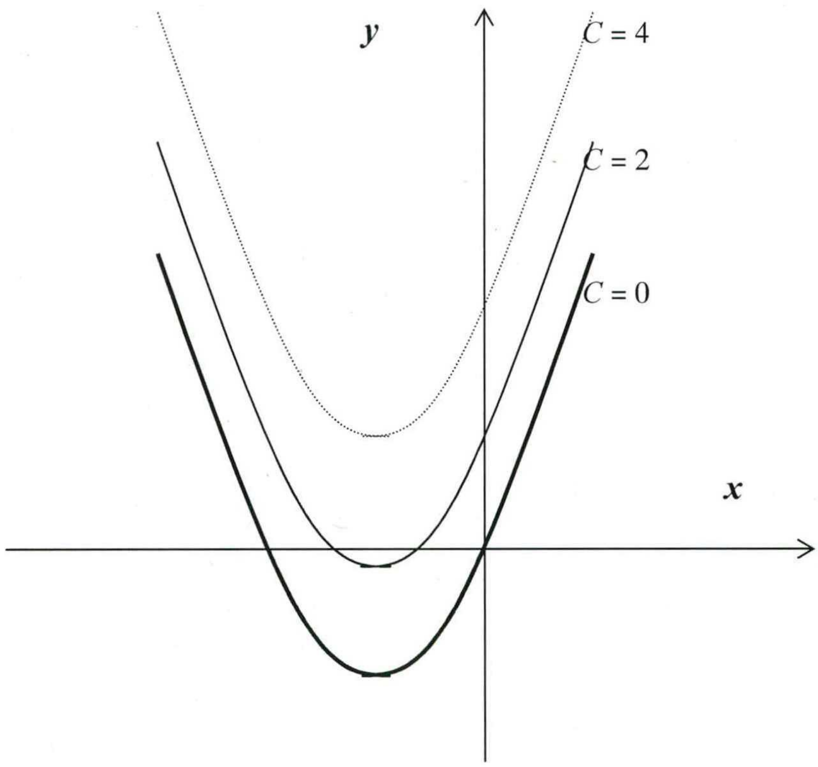


Gráfico 1: Soluções particulares para equações diferenciais

Representações de soluções particulares, para alguns valores de C, da função

$$y = x^2 + 3x + C.$$

Para determinarmos uma solução específica é necessária a atribuição do valor de y em um dado x. Em outras palavras, deve ser dado um ponto ($x = a$, $y = s$) por onde a solução particular deve obrigatoriamente passar.

O processo para encontrar esta solução específica y da equação $y' = f(x, y)$ com $y(a) = s$, onde a e s são dados numéricos, é chamado de problema de condição inicial.

Assim, podemos particularizar a solução do problema anterior atribuindo-lhe, por exemplo, a seguinte condição:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2x + 3 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Logo, a solução geral é dada por $y = x^2 + 3 + C$, e a particular será dada por

$y(0) = 0 = 0^2 + 3 \times 0 + C \Rightarrow C = 0$. Ou seja, $y = x^2 + 3x$.

2.2 Solução de Equações Diferenciais

Determinadas equações diferenciais podem ser solucionadas de forma simbólica, cuja solução é uma expressão literal. Isto nem sempre é possível. Neste caso, a solução é a utilização de integração numérica, como será visto na seqüência.

Exemplo :

$$\frac{dy}{dx} = y \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = dx \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{y} = \int dx \;\Rightarrow\; \ln(y) + c_1 = x + c_2$$

$$y(x) = e^{x+c} = ae^{x}$$

Observe que a solução da equação diferencial resulta numa família de curvas que dependem da constante *a*, como pode ser visto na figura abaixo. Uma solução particular pode ser obtida a partir das condições iniciais do problema. A especificação de uma condição inicial define uma solução entre a família de curvas.

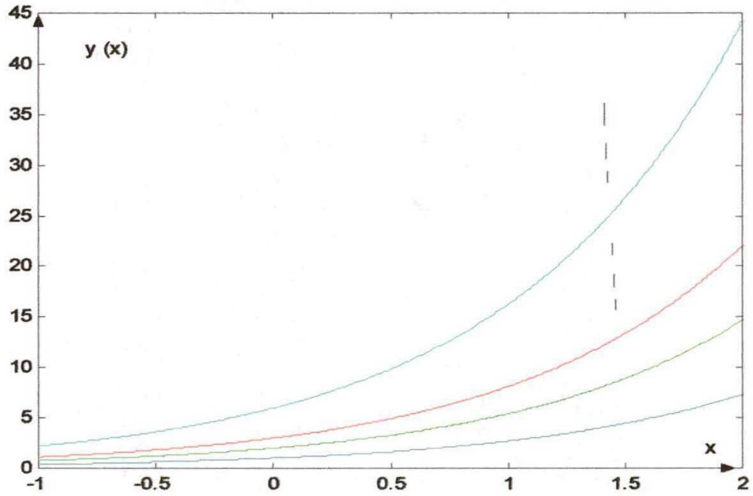


Gráfico 2: Solução de equações diferenciais : Famílias de curvas

Suponha no exemplo dado que o problema tem como condição inicial $y(0) = 1$.
Portanto:

$$y(x) = ae^{x} \Rightarrow ae^{0} = 1 \Rightarrow a = 1$$

A solução $y(x) = 1 \cdot e^{x}$ é a solução para a condição inicial dada.

Quando as condições iniciais estão associadas a um único valor da variável independente, define-se como um problema de valor inicial – (PVI). Quando as condições iniciais estão associadas mais de um valor da variável independente, define-se como um problema de valor de contorno – (PVC). Normalmente, problemas tendo como variável independente o tempo, são problemas de valor inicial.

2.3 Solução Numérica de Equações Diferenciais Ordinárias – Problema de Valor Inicial

Considere a equação diferencial ordinária:

$y' = f(x,y)$ com condição inicial $y(x_0) = y_0$

A solução da equação diferencial acima é uma função do tipo $y(x)$, conforme ilustrada abaixo:

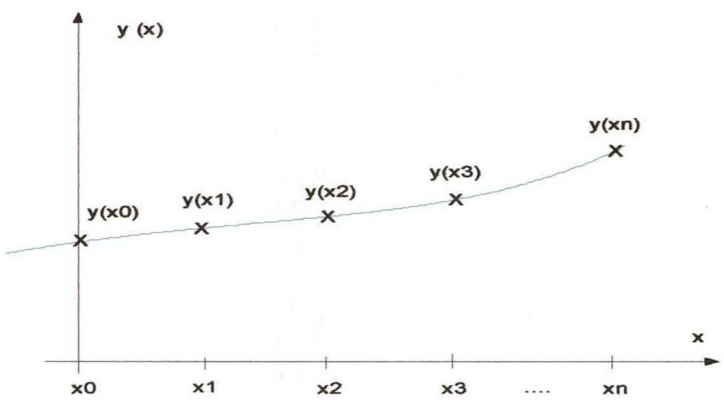


Gráfico 3 : Solução de equações diferenciais

Com a solução numérica de uma equação diferencial, obtém-se uma aproximação para os valores $y(x_0), y(x_1), y(x_2), y(x_3), \ldots\ldots, y(x_n)$, ou seja:

X	x_1	x_2	x_3	....	x_n
Y	y_1	y_2	y_3	....	y_n

Considera-se que a notação $y(x_j), j=1,2,...,n$ indica a solução exata da EDO nos pontos $x_1, x_2, x_3,..., x_n$, e $y_j, j=1,2,....,n$ indica a solução aproximada obtida por método numérico.

Na solução numérica não se determina a expressão literal da função $y(x)$, mas aproximações para pontos da função $y(x)$. Com os valores aproximados obtidos, pode-se plotar a curva. Em aplicações da engenharia, normalmente estuda-se o comportamento dinâmico de determinadas variáveis, portanto necessita-se a evolução das variáveis em função da variável independente. Com a curva plotada, pode-se estudar esta evolução.

2.4 Classificação.

Equações diferenciais são classificadas de acordo com o ***tipo***, a ***ordem*** e a ***linearidade***.

2.4.1 Classificação pelo Tipo

Uma equação diferencial é qualquer relação entre uma função e as suas derivadas. Existem dois tipos de equações diferenciais.

Equação diferencial ordinária (EDO) Contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável dependente.

Exemplos:

$\frac{dy}{dx} = x + y \Longrightarrow$ y é função de x; x é a única variável independente.

$\frac{dy}{dt} = x^2 + y^2 \Longrightarrow$ y e x são função de t; t é a única variável independente.

$\frac{d^2y}{dt^2} + (1 - y^2)\frac{dy}{dt} + y = 0 \Longrightarrow$ y é função de t; t é a única variável independente.

Equação diferencial Parcial (EDP) São equações que envolvem as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes.

Exemplo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \Longrightarrow$$ *u* é função de *x* e *y;* *x* e *y* são variáveis independentes.

2.4.2 Classificação pela Ordem

A ordem da derivada de maior ordem em uma equação diferencial é, por definição, a ordem da equação.

Uma Equação Diferencial é dita de ordem n se a derivada de ordem mais elevada da função incógnita é de ordem n.

Por exemplo.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-4y=e^x$$ É uma equação diferencial ordinária de segunda ordem.

$$4x\frac{dy}{dx}+y=x$$ É uma equação diferencial ordinária de primeira ordem.

$$4x\frac{d^3y}{dx^3}-y=0$$ É uma equação diferencial ordinária de terceira ordem.

Uma equação diferencial ordinária geral de *n-ésima* ordem é freqüentemente representada pelo simbolismo.

$$F\left(x, y, \frac{dx}{dy}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0.$$

O grau de uma Equação Diferencial, que pode ser escrita como um polinômio, é o grau do termo de sua derivada de ordem mais elevada.

$(y'')^2 + (y')^3 + 3y = x^2$ É uma equação de 2ª ordem e 2º grau

$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^4 + 4\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 3x = 0$ É uma equação de 2ª ordem e 4º grau.

$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} = 3$ É uma equação de 2ª ordem e 1º grau

1. $y'' + 3y + 6y = \sin(x)$ e $y'' + 3y\,y' = e^x$ têm ordem 2 e grau 1.

2. $(y'')^3 + 3(y')^{10} + 6y = \tan(x)$ tem ordem 2 e grau 3.

2.4.3 Classificação por Linearidade

Forma Geral para uma Equação Diferencial Linear de ordem "*n*" como.

Uma equação é linear quando todos os coeficientes são funções de "*x*" somente e que "*y*" e todas as suas derivadas são elevadas à primeira potência. Agora, quando *n=1*, obtemos uma equação linear de Primeira Ordem.

As equações diferenciais lineares são caracterizadas por duas propriedades:

1- A variável dependente "*y*" e todas as suas derivadas são do primeiro grau; isto é, a potência de cada termo envolvendo "*y*" é 1.
2- Cada coeficiente depende apenas da variável independente "*x*".

Uma equação diferencial da forma:

$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$, é chamada de **equação linear.**

3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Se *g(x)* é uma função continua dada, então a equação de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \qquad (1)$$

$$\int \frac{dy}{dx} = \int g(x)$$

Pode ser resolvida por integração. A solução é

$$y = \int g(x)dx + c$$

3.1 Equações Separáveis

Definição – Equações Separáveis

Uma equação diferencial da forma:

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g(x)}{h(y)}$ (1) é chamada de **separável** ou tem **variáveis separáveis.**

Observe que uma equação separável pode ser escrita como:

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \qquad (2)$$

É imediato que (2) se reduz a (1) quando h(y) = 1.

Agora, se y = f(x) denota uma solução para (2), temos:

$$h(f(x))f'(x) = g(x)$$

logo,

$$\int h(f(x))f'(x)dx = \int g(x)dx + c \qquad (3)$$

Mas $dy = f'(x)dx$, a equação acima é o mesmo que:

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c \qquad (4)$$

A equação geral de primeira ordem $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, pode ser colocada na forma

$$\frac{dy}{dx} - f(x,y) = 0$$

$$-f(x,y) + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \text{ , onde}$$

$$M(x,y) = -f(x,y) \quad \text{e} \quad N(x,y) = 1$$

Porém se M depende apenas de x e N apenas de y, ela pode ser escrita com

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Esta equação é dita separável, pois se for escrita na forma diferencial.

$$\boxed{M(x)dx + N(y)dy = 0}$$

Então as fórmulas envolvendo cada variável pode ser separada pelo sinal de igualdade.

3.1.1 Método de Solução

A equação (4) indica o procedimento na resolução para equações diferenciais separáveis. Uma família a um parâmetro de soluções, em geral implicitamente, é obtida integrando ambos os lados de $h(y)dy = g(x)dx$.

Não há necessidade de usar duas constantes na integração de uma equação separável pois.

$$\int h(y)dy + c_1 = \int g(x)dx + c_2$$

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c_2 - c_1 = \int g(x)dx + c$$

Exemplos:

$$1)\ \frac{dy}{dx} = -2xy \rightarrow \frac{dy}{y} = -2xdx \rightarrow \int \frac{dy}{y} = -2\int xdx$$

$$\ln|y| = -x^2 + c \rightarrow y = \pm e^{-x^2} + c$$

2)Resolva a equação $(1+x)dy - ydx = 0$ Dividindo por $(1+x)y$ podemos escrever,

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{(1+x)}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{(1+x)}$$

$$\ln|y| = \ln|1+x| + c_1$$

$$y = e^{\ln|1+x| + c_1}$$

$$y = e^{\ln|1+x|}.e^{c_1}$$

$$y = |1+x|.e^{c_1}$$ pela definição de módulo, temos

$$y = \pm e^{c_1}(1+x)$$

3) Sob certas circunstâncias, um corpo movendo-se através do ar encontra uma resistência que é proporcional à sua velocidade v. Em geral, a resistência do ar é diretamente proporcional a uma potência positiva da velocidade do corpo, quanto mais rapidamente o corpo se move, maior a resistência. Para corpos movendo-se em alta velocidade, tais como projéteis ou pára-quedistas em queda livre (Foto1), a resistência do ar é freqüentemente tida como proporcional a V^2

Foto 1: Queda Livre

O enunciado da 2ª lei de Newton diz que o produto da massa pela aceleração de um corpo é igual ao somatório das forças a que está sujeito:

$$ma = \sum_i F \quad \text{, sendo } a = \frac{dv}{dt}$$

as forças que agem sobre o corpo é a Força Peso (P) e a resistência do ar (k) contrária ao peso.

$$m\frac{dv}{dt} = P - kv \text{ , } P = mg$$

$$m\frac{dv}{dt} = \text{mg} - kv$$

em que v é a velocidade do corpo, k o coeficiente de atrito e g a aceleração da gravidade.

Dividindo tudo por m, temos $\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v$, chamando $\frac{k}{m} = h$, obtemos

$$\frac{dv}{dt} = g - hv \quad =>$$

$\frac{1}{g-hv}\frac{dv}{dt}=1$, integrando ambos os lados em relação à variável t, obtemos

$$\int \frac{1}{g-hv}\frac{dv}{dt}dt = \int dt = t + c_1 \qquad (1.1)$$

Agora, para calcular a integral do lado esquerdo acima, fazemos a substituição $u = g - hv \Rightarrow du = -hdv$, assim

$$\int \frac{1}{g-hv}dv = -\frac{1}{h}\int \frac{1}{u}du = -\frac{1}{h}\ln|u| + c_2 = -\frac{1}{h}\ln|g-hv| + c_2 \qquad (1.2)$$

Assim as equações 1.1 e 1.2 implicam que

$$-\frac{1}{h}\ln|g-hv| + c_2 = t + c_1$$

$$-\frac{1}{h}\ln|g-hv| = t + c_1 - c_2$$

$$\ln|g-hv| = -ht - hc_1 + hc_2$$

$\ln|g-hv| = -ht - hc_1 + hc_2$ *onde* $c_3 = -hc_1 + hc_2$ *é uma constante real qualquer. Assim,*

$$\ln|g-hv| = -ht + c_3$$

$$|g-hv| = e^{-ht+c_3} \Rightarrow g - hv = \pm e^{-ht+c_3}$$

$g - hv = \pm e.^{-ht}e^{c_3}$ *, sendo* $c = \pm e^{c_3}$ *, temos*

$g - hv = c.e^{-ht}$ => $-hv = c.e^{-ht} - g$

$$hv = +g - c.e^{-ht}$$

$$v = \frac{g}{h} - \frac{c.e^{-ht}}{h}$$

Se o pára-quedista parte do repouso, temos uma condição inicial v(0)=0, assim,

$$v(0) = \frac{g}{h} - \frac{c}{h} = 0 \Rightarrow c = g$$ *, e portanto*

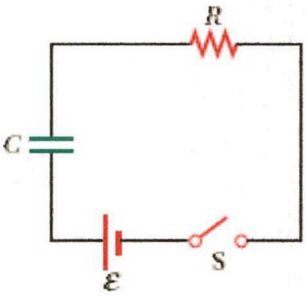
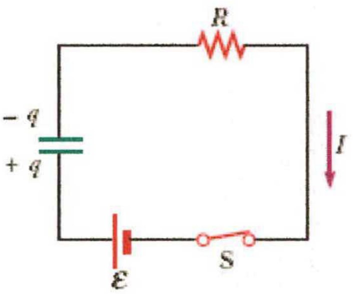
$$v(t) = \frac{g}{h} - \frac{g.e^{-ht}}{h}$$

$$v(t) = \frac{g}{h}\left(1 - e^{-ht}\right)$$

Circuitos *RC*

Circuitos *RC* são aqueles que contêm *resistores e capacitores.* Eles são interessantes porque as correntes e os potenciais, nestes circuitos, variam com o tempo. Apesar das fontes (*fem*) que alimentam estes circuitos serem independentes do tempo, ocorrem efeitos dependentes do tempo com a introdução de capacitores.

Estes efeitos são úteis para controle de funcionamento de máquinas e motores.

	a) Carregando um capacitor: chave *S* fechada *em* t=0. Assim que *S* se fecha, surge uma corrente dependente do tempo no circuito. $t=0 \Rightarrow q=0; t\neq 0 \Rightarrow q(t)$
	Resolver (estudar) este circuito é encontrar a expressão da corrente $i(t)$ que satisfaça à equação: $\varepsilon - iR - \frac{q}{C} = 0$

Como $i=\frac{dq}{dt}$, temos que implica: $\varepsilon - iR - \frac{q}{C} = 0$ implica

$$\frac{dq}{dt}+\frac{q}{RC}=\frac{\varepsilon}{R}$$

Resolvendo esta equação diferencial para *q(t)*, vamos ter:

$q(t) = C\varepsilon(1 - e^{-t/RC}) = Q_f(1 - e^{-t/RC})$, onde $Q_f \equiv C_\varepsilon$ é a carga final do capacitor.

Calculando a corrente:

$$i = \frac{dq}{dt} \rightarrow i(t) = C\varepsilon\left(\frac{1}{RC}e^{-t/RC}\right) = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC} = i_0 e^{-t/RC}$$

$i_0 \equiv \dfrac{\varepsilon}{R}$ é a corrente inicial

$t = 0 \rightarrow q(0) = 0,\ i(0) = \dfrac{\varepsilon}{R}$

Observe que a corrente tem valor inicial igual a $i_0 \equiv \dfrac{\varepsilon}{R}$ e decresce até zero, quando capacitor ser torna completamente carregado.

3.2 Equações Homogêneas

Antes de considerar o conceito de **equação diferencial homogênea de primeira ordem** e seu método de solução, precisamos estudar a natureza de uma **função homogênea**.

Definição – Função Homogênea

Se uma função *f* satisfaz $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para algum número real n, então dizemos que *f* é uma **função homogênea de grau n.**

Exemplo 1

(a) $f(x, y) = x^2 - 3xy + 5y^2$

$$f(tx, ty) = (tx)^2 - 3(tx)(ty) + 5(ty)^2$$

$$= t^2x^2 - 3t^2xy + 5t^2y^2$$

$$= t^2(x^2 - 3xy + 5y^2) = t^2 f(x,y)$$

Logo a função é homogênea de grau 2

(b) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 1$

$$f(tx,ty) = (tx)^3 + (ty)^3 + 1$$

$$= t^3x^3 + t^3y^3 + 1$$

$t^3 f(x,y) = t^3x^3 + t^3y^3 + t^3$, logo $f(tx,ty) \neq t^3 f(x,y)$

A função não é homogênea

(d) $f(x,y) = \dfrac{x}{2y} + 4$

$$f(tx,ty) = \frac{tx}{2ty} + 4 = \frac{x}{2y} + 4 = t^0 f(x,y)$$

Logo a função é homogênea de grau zero

Nos exemplos (c) e (d), uma constante adicionada à função destrói a homogeneidade, a menos que a função seja homogênea de grau zero.

Ainda, muitas vezes uma função homogênea pode ser reconhecida examinando o grau de cada termo.

Exemplo 2

(a) $f(x,y) = 6xy^3 - x^2y^2$, somando os graus do primeiro termo $6xy^3$ = 4

somando os graus do segundo termo x^2y^2 = 4

A função é homogênea de grau quatro

(b) $f(x,y) = x^2 - y$

O grau do primeiro termo é 2

O grau do segundo termo é 1, logo a função não é homogênea, pois os graus dos dois termos são diferentes.

Se $f(x,y)$ for uma função homogênea de grau *n*, note que podemos escrever.

$$f(x,y) = x^n f\left(1,\frac{y}{x}\right) \quad \text{e} \quad f(x,y) = x^n f\left(\frac{x}{y},1\right)$$

onde $f\left(1,\frac{y}{x}\right)$ e $f\left(\frac{x}{y},1\right)$ são ambas homogêneas de grau zero

Uma equação diferencial da forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

É chamada de **homogênea** se ambos os coeficientes M e N são funções homogêneas do mesmo grau., em outras palavras. $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é homogênea se

$$M(tx,ty) = t^n M(x,y) \quad \text{e} \quad N(tx,ty) = t^n N(x,y) \qquad (2)$$

3.2.1 Método de Solução

Uma equação diferencial homogênea pode ser resolvida por meio de uma substituição algébrica. Especificamente, a substituição $y = ux$ ou $x = vy$, em que 'u' e 'v' são novas variáveis independentes, *transformará a equação diferencial de primeira ordem separável* . Para ver isso, seja y = ux; então, sua diferencial dy = u dx + x du. Substituindo na eq. Homogênea, temos

$$M(x,ux)dx + N(x,ux)[udx + xdu] = 0$$

Agora, pela propriedade de homogeneidade dada em (2), podemos escrever

$$x^n M(1,u)dx + x^n N(1,u)[udx + xdu] = 0$$

$$M(1,u)dx + N(1,u)udx + N(1,u)xdu = 0$$

$$M(1,u)dx + N(1,u)udx + N(1,u)xdu = 0$$

$[M(1,u) + uN(1,u)]dx + xN(1,u)du = 0$, dividindo por $[M(1,u) + uN(1,u)]dx$ e x , fica

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1,u)du}{M(1,u) + uN(1,u)} = 0$$

Exemplo 3

(a) Resolva $(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$

Solução: Tanto M(x,y) quanto N(x.y) são homogêneas de grau dois. Se fizermos $y=ux$ e dy = u dx + x du. segue-se

$$(x^2 + u^2x^2)dx + (x^2 - ux^2)[udx + xdu] = 0$$

$x^2(1+u)dx + x^3(1-u)du = 0$, dividindo por $1+u$

$x^2dx + x^3\frac{(1-u)}{1+u}du = 0$, dividindo por x^3

$$\frac{dx}{x} + \frac{(1-u)}{1+u}du = 0$$

$\left[-1 + \frac{2}{1+u}\right]du + \frac{dx}{x} = 0$, integrando obtemos

$-u + 2\ln|1+u| + \ln|x| = \ln|c|$, sendo $u = \frac{y}{x}$, temos

$-\frac{y}{x} + 2\ln\left|1 + \frac{y}{x}\right| + \ln|x| = \ln|c|$, usando as propriedades do logaritmo, podemos escrever a solução como

$lx\left|\frac{(x+y)^2}{cx}\right| = \frac{y}{x}$, logo $(x+y)^2 = cxe^{\frac{y}{x}}$

3.3 Equações Exatas

Definição – Equações Exatas

Uma equação na forma M(x,y) + N(x,y) y´ = 0 é uma equação exata em R (uma região) se, e somente se, M_y (x,y) = N_x (x,y) em cada ponto de R.

Exemplo 1

Verifique se a equação

(2xy + 1) + (x2 + 4y)y´ = 0 é exata.

Solução: Neste caso, M(x,y) = 2xy +1 e

N(x,y) = x2 + 4y.

Logo M_y = 2x e N_x = 2x, donde M_y = N_x e conseqüentemente ela é exata.

Exemplo 2

Verifique se a equação $2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$, é exata.

$M(x, y) = 2xy$ e $N(x, y) = x^2 - 1$

Logo $M_y(x, y)$ = 2x e $N_x(x, y)$ = 2x, donde $M_y(x, y)$ = $N_x(x, y)$ e conseqüentemente ela é exata

3.3.1 Método de Solução

Dada a equação $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

Mostre primeiro que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Depois suponha que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$$

Daí podemos encontrar f integrando M(x, y) com relação a x, considerando y constante. Escrevemos,

$$f(x,y)=\int M(x,y)dx+g(y) \qquad (6)$$

Em que a função arbitrária g (y) é a constante de integração. Agora, derivando *f(x,y)* com relação a *y* e supondo $\partial f/\partial y = N(x,y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+g'(y)=N(x,y)$$

Assim,

$$g'(y)=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx. \qquad (7)$$

Finalmente, integre *g'(y)* com relação a *y* e substitua o resultado em *f (x,y)*. A solução para a equação é *f (x, y) = c*.

Exemplo 3

Resolva a equação $2xydx+(x^2-1)dy=0$.

$\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)=2xy$ e $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)=x^2-1$

Logo $\frac{\partial M}{\partial y}=2x$ e $\frac{\partial N}{\partial x}=2x$, donde $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ e conseqüentemente ela é exata.

Sendo a equação exata, existe uma função $f(x,y)$, tal que

$M(x,y)=2xy$ e $N(x,y)=x^2-1$

$f(x,y)=\int M(x,y)dx+g(y)$ => $f(x,y)=\int 2xydx+g(y)$

$f(x,y)=x^2y+g(y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2y)+g'(y)=N(x,y)=x^2-1$

=> $g'(y)=-1$ e $g(y)=-y$, a solução é
$f(x,y)=c$

Exemplo 4

Resolva o problema de valor inicial

$(\cos x sen x - xy^2)dx + y(1-x^2)dy = 0$, *y(0)=2*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) = \cos x sen x - xy^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) = 1 - x^2$$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = -2xy = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, logo a equação é exata.

$$f(x,y) = \int N(x,y)dy + h(x) \Rightarrow f(x,y) = \int y(1-x^{2)})dy + h(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int y(1-x^2)dy + h(x) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{y^2}{2}(1-x^2) + h(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -xy^2 + h'(x) = \cos x sen x - xy^2$$

logo $h'(x) = \cos x sen x$

$$h(x) = -\int (\cos x(-sen x dx) = -\frac{1}{2}\cos^2 x$$

$$\frac{y^2}{2}(1-x^2) - \frac{1}{2}\cos^2 x = c_1$$

$y^2(1-x^2) - \cos^2 x = c$, em que $2c_1$, foi trocado por c. A condição inicial y=2 quando x = 0 demanda que $4(1) - \cos^2(0) = c$, ou seja c = 3. Portanto a solução do problema é

$$\frac{y^2}{2}(1-x^2) - \cos^2 x = 3$$

3.4 Fatores Integrantes

Definição: Uma função F(x, y) é um fator integrante da equação

M(x,y) dx + N(x, y) dy = 0 se quando multiplicar esse fator por toda a equação ela se transforma em uma equação exata, então,

F(x, y) [M(x,y) dx + N(x, y) dy] = 0, é uma equação exata.

3.4.1 Determinação de Fatores Integrantes:

Se F(x , y) é Fator Integrante de M(x,y) dx + N(x, y) dy = 0 então:

F(x,y) M(x,y) dx + F(x, y)N(x, y) dy = 0 é exata. Então é verdade a

$$\frac{\partial FM}{\partial y} = \frac{\partial FN}{\partial x}$$

Ou fazendo a derivada do produto:

$$M\frac{\partial F}{\partial y} + F\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial F}{\partial x} + F\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$F\frac{\partial M}{\partial y} - F\frac{\partial N}{\partial x} = N\frac{\partial F}{\partial x} - M\frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)F = N\frac{\partial F}{\partial x} - M\frac{\partial F}{\partial y}$$ Fórmula Básica.

1) Se F é função só de y , F(y), então: $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$

Logo:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)F(y) = -M\frac{\partial F(y)}{\partial y}$$

Ou

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)F(y) = -M\frac{dF(y)}{dy}$$

$$\frac{dF(y)}{F(y)} = -\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dy$$

fazendo $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = g(y)$

$$\frac{dF(y)}{F(y)} = -\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dy$$

fazendo $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = g(y)$

$$\frac{dF(y)}{F(y)} = -g(y)dy \Rightarrow \ln F(y) = -\int g(y)dy + c$$

Como qualquer membro da família dessa função nos interessa podemos fazer c = 0.

Então

$$e^{\ln F(y)} = e^{-\int g(y)dy} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F(y) = e^{-\int g(y)dy}}$$

e F(y) é o fator integrante.

2) Se F é função só de x , F(x), então: $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$

Logo:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)F(y) = -M\frac{\partial F(y)}{\partial y}$$

Ou

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)F(x) = N\frac{dF(x)}{dx} \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{F(x)}dF(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx$$

Fazendo $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = g(x)$

$$\frac{1}{F(x)}dF(x) = g(x)dx \Rightarrow \ln F(x) = \int g(x)dx + c$$

Como qualquer membro da família dessa função nos interessa podemos fazer c = 0.
Então

$$e^{\ln F(x)} = e^{\int g(x)dx} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F(x) = e^{\int g(x)dx}}$$

e F(x) é o fator integrante.

Se $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(x)$, uma função apenas de x, apenas, então o fator integrante será $F(x)=e^{\int f(x)dx}$ é fator integrante da equação.

Exemplo: Resolver $(x^2+y^2+x)dx+xydy=0$ para $y=f(x)$.

$M=x^2+y^2+x$ e $N=xy$

$\frac{\partial M}{\partial y}=2y$ e $\frac{\partial N}{\partial x}=y$ por tanto a equação não é exata, mas $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{1}{x}$ e o fator integrante será $F(x)=e^{\int\frac{dx}{x}}=e^{\ell n(x)}=x$. Assim, a equação será

$$[(x^2+xy^2+x)dx+xydy]x=(0)x \quad \Rightarrow \quad (x^3+xy^2+x^2)dx+x^2ydy=0$$

onde $\frac{\partial M}{\partial y}=2xy$ e $\frac{\partial N}{\partial x}=2xy$ por tanto a equação é uma equação diferencial exata e

$$u=\int(x^3+xy^2+x^2)dx+k(y)$$

$$u=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^3}{3}+k(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0+x^2y+0+\frac{dk(y)}{dy}=x^2y \quad \Rightarrow \quad \frac{dk(y)}{dy}=0 \quad \Rightarrow \quad k(y)=C_1$$

$u=C_0=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^3}{3}+C_1$ é a solução geral ou primitiva da equação, isto é,

Resposta: $\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^3}{3}=C$

3.4.2 Fatores Integrantes por Inspeção.

Com esta finalidade deve-se ter em mente algumas diferenciais exatas bem conhecidas.

Às vezes, depois de reagrupar os termos da equação, pode-se determinar um fator integrante pelo reconhecimento de certo grupo de termos como parte de uma diferencial exata, como por exemplo:

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{y^2},\quad d\left(\ln\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{xy},\quad d\left(arctg\left(\frac{x}{y}\right)\right)=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2},$$

onde as funções $\frac{1}{y^2}, \frac{1}{xy}, \frac{1}{x^2+y^2}, etc.$ são fatores integrantes, para a equação

$$ydx-xdy=0$$

E as soluções correspondentes são $\frac{x}{y}=C,\quad \ln\frac{x}{y}=C$ e $\arctan\left(\frac{x}{y}\right)=C$, que essencialmente são as mesmas, pois representam uma família de retas que passam pela origem.

Exemplo: Verificar se a equação $ydx-xdy=0$, para $f(x)$, é exata e integrá-la, sem utilizar nenhum dos fatores apresentados anteriormente.

Solução:

$ydx-xdy=0$, então:

$$\begin{matrix} M(x,y)=y & \Rightarrow & \dfrac{\partial M}{\partial y}=1 \\ N(x,y)=-x & \Rightarrow & \dfrac{\partial M}{\partial y}=-1 \end{matrix} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \text{não exata}$$

Esta equação não é exata e sendo a mesma equação apresentada anteriormente, e tendo em mente, as diferenciais exatas apresentadas, pode-se usar, o fator integrante:

$$F(x)=\frac{1}{x^2}.$$

Pois, essencialmente é $(ydx-xdy=0)\times(-1)$, ou seja, $ydx-xdy=0$. Assim,

$$F(x)=\frac{1}{x^2} \;\Rightarrow\; (xdy-ydx=0)\cdot F(x) \;\Rightarrow\; (xdy-ydx)\cdot F(x)=0\cdot F(x)=0,$$

isto é,

$$\frac{(xdy-ydx)}{x^2}=d\left(\frac{y}{x}\right)=0 \;\therefore\; \int d\left(\frac{y}{x}\right)=C \;\Rightarrow\; y=Cx$$

Exemplo: Resolver $(2y-3x)dx+xdy=0$ para $y=f(x)$.

$\frac{\partial M}{\partial y}=2$ e $\frac{\partial N}{\partial x}=1$ por tanto a equação não é exata.

Solução: Por inspeção, tem-se: $F=x$

$$[(2y-3x)dx+xdy]x=(0)x \;\Rightarrow\; (2yx-3x^2)dx+x^2dy=0$$

donde $\frac{\partial M}{\partial y}=2x$ e $\frac{\partial N}{\partial x}=2x$ por tanto a equação passa a ser uma equação diferencial exata e a solução, será obtida na forma das equações exatas, isto é,

$$u=\int(2yx-3x^2)dx+k(y)$$

$$u=yx^2-x^3+k(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2-0+\frac{dk(y)}{dy}=x^2 \;\Rightarrow\; \frac{dk(y)}{dy}=0 \;\Rightarrow\; k(y)=C_1$$

$$u=C_0=yx^2-x^3+C_1$$

é a solução geral ou primitiva da equação, isto é,

Resposta: $yx^2-x^3=C$

4 CONCLUSÃO

O desenvolvimento das equações diferenciais é uma parte significativa do desenvolvimento da matemática em geral. Usamos o cálculo diferencial e integral na forma de equações diferenciais para resolver problemas em vários ramos da ciência.

De acordo com os fatos históricos citados nesta pesquisa, muitos cientistas e pesquisadores estudaram e contribuíram para o desenvolvimento das equações diferenciais e suas aplicações na resolução de problemas importantes **da engenharia, das ciências exatas e das ciências sociais.**

Abordamos especificamente as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, principalmente as separáveis, homogêneas e exatas.

Por fim, diante do exposto, acreditamos que este trabalho não esgotou o entendimento sobre os temas discutidos, mas esperamos ter contribuído para a compreensão de alguns tópicos relacionada às equações diferenciais e suas aplicações.

5 - REFERÊNCIAS

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen, Eq. Diferenciais, vol 1, 3ª edição

WILLIAM E Boyce, RICHARD C Diprima, oitava edição
Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno,

FLEMMING, Diva Marília , GONÇALVES, Mirian Buss , 6ª edição
Cálculo A: Funções, limite, derivação e integração

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA. Introdução a Equação Diferenciais. Disponível em: < http://www.mtm.ufsc.br>. Acesso em:13 mar. 2009.

STAMFORD Alexandre, Equações Diferenciais. Disponível em <http://stamford.pro.br>. Acesso em 16 abr. de 2009.