UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
UNIVERSIDADE VIRTUAL DO MARANHÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E FÍSICA

HENRIQUE ALMEIDA LIMA
RAFAEL CHAVES DA LUZ

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO: ABORDAGEM VETORIAL

Imperatriz-MA
2009

HENRIQUE ALMEIDA LIMA
RAFAEL CHAVES DA LUZ

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO: ABORDAGEM VETORIAL

Monografia apresentada ao departamento de Matemática e Física da Universidade Federal de Santa Catarina, como requisito para obtenção do Título de Especialista em Matemática.

Orientador: Fermin S. V. Bazán

Imperatriz - MA
2009

HENRIQUE ALMEIDA LIMA
RAFAEL CHAVES DA LUZ

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO: ABORDAGEM VETORIAL

Monografia apresentada ao departamento de Matemática e Física da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito para obtenção do Título de Especialista em Matemática.

Aprovada em: 24 / 07 / 09.

BANCA EXAMINADORA

Professor Dr. Fermim S. V. Bazán
(orientador)

Professor Dr. Daniel Norberto Kozakevich

Professor Dr. Marcio Rodolfo Fernandes

À Deus, a meus pais e amigos que sempre me incentivaram a estudar.

AGRADECIMENTOS

Ao paciente, professor Fermin S. Viloche Bazan, orientador dessa monografia, que com esse papel importantíssimo acreditou na realização desse trabalho.

Aos professores da UFSC do curso de especialização, em especial a professora Neri Terezinha Both Carvalho pelo grande incentivo.

A UNIVIMA, por ter propiciado esse curso. Agradeço em especial aos funcionários do pólo de Imperatriz, pelo apoio durante o curso.

Em fim, agradeço a Deus, aos meus familiares e a todos que ajudaram direta ou indiretamente na realização dessa monografia.

Não há ramo da matemática, por abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.

(Lobachevsky)

RESUMO

Datar precisamente o surgimento do estudo da geometria não é muito fácil, já que esse fato esta associado ao surgimento das civilizações. Atualmente, o estudo da geometria é muito vasto, por isso nos restringiremos às relações métricas no triângulo, com uma visão vetorial. Fazer uso de instrumentos (propriedades, demonstrações) que podem contribuir para a realização de tarefas e resolução de problemas do cotidiano. O que podemos obter de vantagem com o uso dos termos de geometria vetorial, é que são conteúdos considerados facilitadores na interpretação de problemas e do desenvolvimento de habilidades para o estudo de outros assuntos afins.

Palavras-chave: Triângulos. Geometria. Vetores. Relações Métricas.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A Álgebra vetorial desempenha um papel especial nesse trabalho. Assim noções de vetores, que constituem uma importante ferramenta para o estudo de Física, Geometria Analítica, Cálculo, etc., serão apresentados primeiro a fim de estudar as relações métricas no triângulo com uma abordagem vetorial. Para tanto, serão apresentadas algumas demonstrações e interpretações geométricas, tornando nossa pesquisa mais auto-contida e agradável. Os tópicos abordados, são organizados da seguinte maneira:

Primeiro faremos um breve estudo sobre os fatos históricos de mais relevância no estudo da geometria vetorial para sistematização do conhecimento geométrico. Em seguida, apresentaremos uma revisão de vetores abordando as operações sobre os vetores.

Nos tópicos seguintes, apresentamos propriedades das figuras planas (triângulos) que serão demonstradas por meio do cálculo vetorial.

Por fim, abordaremos as relações métricas no triângulo com demonstrações tradicionais e vetoriais. Alguns exercícios serão resolvidos, pois complementam uma parte essencial do texto.

Há inúmeros caminhos para a resolução de problemas geométricos através da Álgebra, porém o tratamento vetorial é o mais indicado pela sua elegância e simplicidade, além de ser muito importante a outras disciplinas.

Esperamos, contudo despertar o gosto pelo estudo de vetores os estudantes em geral, percebendo as teorias, fórmulas relevantes nas resoluções e organização do pensamento que visa comparar e facilitar a compreensão e solução de questões que envolvem as relações métricas no triângulo.

2. BREVE HISTÓRICO

Dentre todos os ramos da matemática, a geometria tem sido o mais sujeito a mudanças. Existem indícios de que a civilização da Babilônia, dede cerca de 2000 a.C., desenvolveu um considerável conhecimento geométrico, e assim também o Egito. Uma das obras mais citadas e talvez a mais importante para o estudo da geometria, na época, chama-se "Os Elementos" elaborado por Euclides. Certamente a geometria surgiu há milhares de anos, mas somente em meados do século XIX houve uma progressiva e expressiva redescoberta da geometria. Esse processo histórico foi baseado em [2] e [5].

Vários outros estudiosos deram continuidade aos estudos de geometria, difundindo mais ainda o conhecimento para o mundo. Jean-Victor Poncelet (1788 – 1867) diz que: "As propriedades métricas descobertas para uma figura primitiva permanecem aplicáveis, sem modificações além de mudança de sinal, a todas as figuras correlatas que podem ser consideradas como provindo da primeira".

O conceito de vetor surgiu na Mecânica com o engenheiro flamengo Simon Stevin - o "Arquimedes holandês". Em 1586 apresentou em sua Estática e Hidrostática, o problema da composição de forças e enunciou uma regra empírica para se achar a soma de duas forças aplicadas num mesmo ponto. Tal regra, a conhecemos hoje como regra do paralelogramo.

A palavra vetor, provém do verbo latino "*vehere*": transportar, levar. Vetor é o particípio passado de *vehere*, significando transportado e/ou levado. Apesar de primitiva e até bizarra, a palavra vetor é pertinente: o ponto A é "transportado" até B.

> [...] Além disso, embora raramente o nome de Hamilton seja associado aos vetores, pois as notações de Gibbs vinham principalmente de Grassmann, as propriedades principais dos vetores tinham sido estabelecidas nas longas investigações de Hamilton sobre álgebras múltiplas. (BOYER, pg. 407).

A sistematização da teoria vetorial ocorreu no século XIX com os trabalhos do irlandês William Hamilton, do alemão Hermann Grassmann (1809-1877), e do físico norte-americano Josiah Gibbs, inicialmente com representações geométricas de números complexos.

O desenvolvimento da álgebra vetorial e da análise vetorial como conhecemos hoje foi revelado primeiramente em um conjunto de notas de aula feitos por J. Willard Gibbs (1839-1903), tendo suas conquistas científicas principais em física, termodinâmica propriamente dita.

Os métodos vetoriais foram introduzidos na Itália (1887, 1888, 1897), na Rússia (1907) e na Holanda (1903). Vetores agora são a linguagem moderna de grande parte da física e da matemática aplicada e continuam tendo seu próprio interesse matemático intrínseco.

3. TÓPICOS DE VETORES: Revisando Vetores

3.1 Conceitos Básicos

Conceitos e algumas demonstrações baseiam-se em [1], [4], [5] e [6]. Existem grandezas, chamadas escalares que são caracterizadas por um número real qualquer. Entretanto, outras requerem mais que isso, por exemplo: intensidade, direção e sentido. Grandezas com essas características são chamadas vetoriais.

Primeiramente, a definição de flecha. Flecha é, intuitivamente, um segmento no qual se fixou uma orientação. E fixar uma orientação é escolher um sentido. No caso da figura 1, o segmento orientado representado tem orientação de A para B. Na verdade não precisamos da flecha, bastam os pontos A e B e a ordem: primeiro A e depois B.

Definição:

Um segmento orientado é um par ordenado (A, B) de pontos no espaço. A é dito origem, B extremidade do segmento orientado. Os segmentos orientados da forma (A, A) são ditos nulos. Observe que se A $\neq$ B, (A, B) é diferente de (B, A).

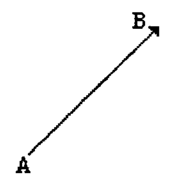


figura 1

Definição 2

- Dizemos que os segmentos orientados (A, B) e (C, D) têm o mesmo compriemto se os segmentos geométricos AB e CD têm o mesmo comprimento.
- Suponha (A, B) e (C,D) não nulos. Então dizemos que (A, B) e (C, D) têm a mesma direção se AB // CD (incluindo o caso em que as retas suportes coincidem). Nesse caso dizemos que (A, B) e (C, D) são paralelos.
- Suponha que (A, B) e (C, D) têm mesma direção.

a) Se as retas AB e Cd são distintas, dizemos que (A, B) e (C, D) têm o mesmo sentido caso os segmentos AC e BD tenham interseção vazia. Caso AB $\cap$CD $\neq$ ϕ, dizemos que (A, B) e (C, D) têm sentido cotrario. Figura 1.1 e figura 1.2

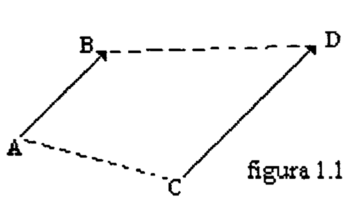


figura 1.1

mesmo sentido

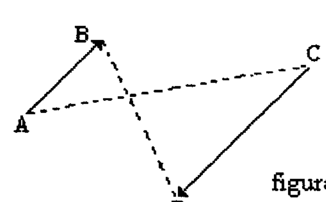


figura 1.2

sentido contrário

b) Se as retas AB e CD coincidem, tome (A', B') tal que A' não pertença à reta AB e (A', B') tenha mesma direção, e mesmo sentido que (A, B) (como em a)). Então dizemos que (A, B) e (C, D) têm o mesmo sentido se (A', B') e (C, D) têm o mesmo sentido. Se não, dizemos que (A, B) e (C, D) têm sentido contrário. Ver figuras 1.3 e 1.4

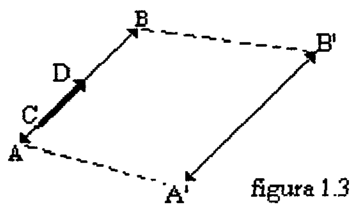


figura 1.3

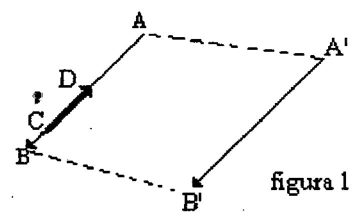


figura 1.4

Definição 3

Os segmentos orientados (A, B) e (C, D) são eqüipolentes, e indica-se por (A, B) ~ (C, D), se um dos casos ocorrer:

a) ambos são nulos;

b) nenhum é nulo, e têm mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido.

Proposição: A relação de eqüipolência goza das seguintes propriedades:

1) (A, B) ~ (A, B) (reflexiva)

2) (A, B) ~ (C, D) $\Rightarrow$ (C, D) ~ (A, B) (simétrica)

3) (A, B) ~ (C, D) e (C, D) ~ (E, F) $\Rightarrow$ (A, B) ~ (E, F) (transitiva)

Nota: Uma relação que goza das propriedades a), b) e c) se chama relação de equivalência.

Considere agora um segmento orientado (A, B) fixado. Chama-se classe de eqüipolência de (A, B) ao conjunto de todos os segmentos orientados que são eqüipolentes a (A, B) (e portanto eqüipolentes entre si, pela propriedade transitiva). O próprio (A, B) é um deles, pela propriedade reflexiva. (A, B) se diz um representante da classe. Note que se (C, D) pertence à classe de eqüipolência de (A, B) então (A, B) pertence à classe de eqüipolência de (C, D) (devido à propriedade simétrica) e na verdade essas duas classes coincidem, pois quem for eqüipolente a (C, D) será a (A, B) e vice-versa (propriedade transitiva). Assim, qualquer segmento orientado pertencente a uma classe de eqüipolência pode ser considerado seu representante, e cada segmento orientado é representante de uma única classe de eqüipolência.

Quando escrevemos $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, estamos afirmando eu o vetor $\vec{v}$ é determinado pelo segmento orientado AB (figura 2). Mas lembre-se que todo segmento eqüipolente a este representa o mesmo vetor $\vec{v}$. Assim o módulo, a direção e o sentido de um vetor $\vec{v}$ é o módulo, a direção e o sentido de qualquer um dos seus representantes (vetores equipolentes), e indica-se o módulo de um vetor $\vec{v}$ por $|\vec{v}|$ ou $\|\vec{v}\|$.

A soma do ponto A com o vetor $\vec{v}$ é dada por: A + $\vec{v}$ = B.

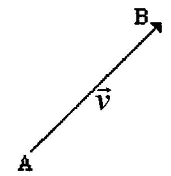


figura 2

Onde A é a origem e B é extremidade a do vetor. Esta notação é assaz vantajosa pelas aplicações das operações algébricas e é devida ao matemático alemão H. Grassmann. Também bastante usual a notação $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Em uma terna ordenada temos por exemplo:

$\vec{v} = (2, 8, 3)$; *na figura temos* $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

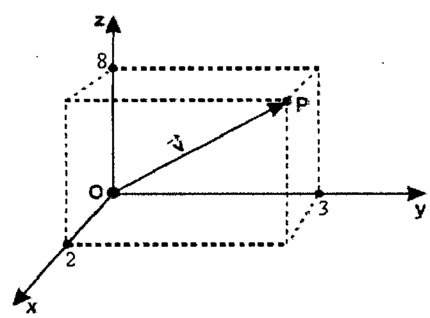


figura 3

$A + \vec{v} = B \Rightarrow \vec{v} = B - A$

Usualmente, quando já estiver fixado o sistema de coordenadas, o representante do vetor é aquele cuja origem coincida com a origem do sistema.

A magnitude de um vetor é o seu comprimento, poderia ser a distância entre dois pontos. Na figura seria a distancia de A a B.

figura 4

3.2 Operações Com Vetores: Adição de Vetores

Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, cuja soma $\vec{u} + \vec{v}$ queremos encontrar (ver figura ao lado). Tomemos um ponto A qualquer e, com origem nele, tracemos um segmento orientado AB representando o vetor $\vec{u}$. Utilizemos a extremidade B para traçar o segmento orientando BC representando o vetor $\vec{v}$. E segundo Paulo Winterle, o vetor representado pelo segmento orientado de origem A e extremidade C é, por definição, o vetor soma de $\vec{u} + \vec{v}$, isto é,

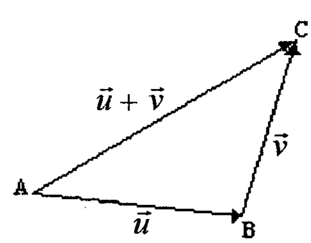


figura 5

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC} \text{ ou } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores quaisquer, a adição admite as seguintes propriedades:

I) Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

II) Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

III) Elemento Neutro: $\vec{u} + 0 = \vec{u}$

IV) Elemento oposto: $\vec{u} + (-\vec{u}) = 0$

Assim, com a propriedade IV, podemos definir a diferença em vetores. O vetor $\vec{u} - \vec{v}$, é chamado diferença entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Observe que a diferença entre vetores não é comutativa: $\vec{v} - \vec{u} \neq \vec{u} - \vec{v}$.

3.3 Vetores Paralelos:

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de mesma direção são ditos (ver figura 6) paralelos quando existir um α tal que $\vec{u} = \alpha\,\vec{v}$.

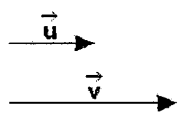


figura 6

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos e podem ser representados colinearmentes (podem ser representados sobre uma mesma reta): (figura 7)

figura 7

Os vetores que possuem o mesmo sentido são chamados equiversos e os de sentido contrário são chamados contraversos.

3.4 Produto de Um Número Real Por Vetor.

Dado um vetor $\vec{v} \neq 0$ e um número real $\alpha \neq 0$, chama-se produto do número real α pelo vetor $\vec{v}$, o vetor $\alpha\,\vec{v}$ tal que:

- Se $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $\alpha\,\vec{v} = \vec{0}$ (por definição)
- Se $\alpha \neq 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\alpha\,\vec{v}$ é caracterizado por:
    1. módulo: $|\alpha\vec{v}| = |\alpha|.|\vec{v}|$, assim o comprimento de $\alpha\,\vec{v}$ é igual ao comprimento $\vec{v}$ multiplicado por $|\alpha|$.
    2. direção: $\alpha\,\vec{v}\ //\ \vec{v}$, ou seja, o produto $\alpha\,\vec{v}$ é paralelo ao vetor $\vec{v}$.
    3. sentido: $\alpha\,\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm o mesmo sentido se $\alpha > 0$, e contrário se $\alpha < 0$.

Exemplo: Seja um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$. Determinar o vetor paralelo a $\vec{v}$ tal que:

a) tenha o mesmo sentido de $\vec{v}$ e módulo 2;

b) tenha sentido contrário ao de $\vec{v}$ e módulo 8.

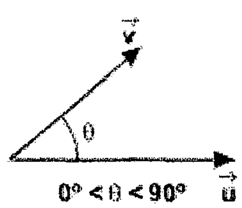
Solução: A partir de um vetor $\vec{v}$ arbitrário é sempre possível associar os dois vetores paralelos e unitários: $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ com mesmo sentido de $\vec{v}$, e $-\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ com sentido contrário ao de $\vec{v}$.

Assim, temos as soluções: a) $\frac{2\vec{v}}{|\vec{v}|}$ e b) $-\frac{8\vec{v}}{|\vec{v}|}$

3.5 Ângulos entre vetores

O ângulo $0° \leq 180°$ de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não nulos, é formado entre suas direções, levando-se em consideração os sentidos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

figura 8



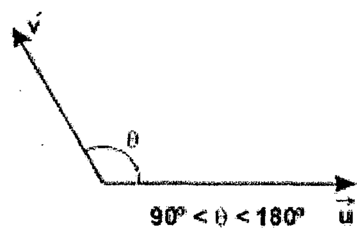
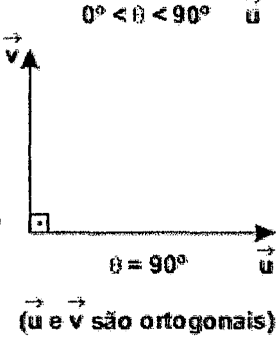


figura 9

figura 10



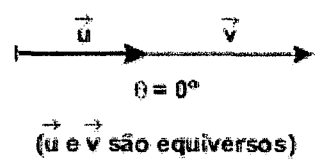
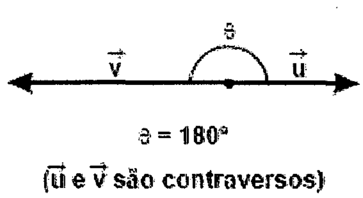


figura 11

figura 12



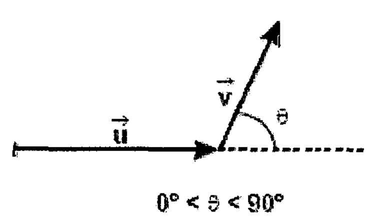


figura 13

3.6 Produto Escalar

Chama-se produto escalar dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ao número $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ dado por:

$$\vec{u}\,.\,\vec{v}\begin{cases} 0 & se \quad \vec{u} = 0\, ou\, \vec{v} = 0 \\ |\vec{u}||\vec{v}|.\cos\theta & se \quad \vec{u} \neq 0 \;e\; \vec{v} \neq 0 \end{cases}$$

sendo θ a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Assim, o produto escalar tem expressão cartesiana $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ importantíssima. Num sistema cartesiano ortogonal são conhecidos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ por suas expressões cartesianas:

$$\vec{u}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k} \qquad \text{e} \qquad \vec{v}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$$

Dedução:

$$\vec{u}\,.\,\vec{v}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\,.\,(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})$$

$$= x_1x_2\vec{i}.\vec{i}+x_1y_2\vec{i}.\vec{j}+x_1z_2\vec{i}.\vec{j}\vec{k}+x_2y_1\vec{i}.\vec{j}+y_1y_2\vec{j}.\vec{j}+y_1y_2\vec{j}.\vec{k}+x_2z_1\vec{i}.\vec{k}+y_2z_1\vec{j}.\vec{k}+z_1z_2\vec{k}.\vec{k}$$

Mas:

$$\vec{i}.\vec{i}=\vec{j}.\vec{j}=\vec{k}.\vec{k}=|\vec{i}|^2=|\vec{j}|^2=|\vec{k}|^2=1$$

$$\vec{i}.\vec{j}=\vec{i}.\vec{k}=\vec{j}.\vec{k}=0$$

Donde:

$$\vec{u}\,.\,\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

Considerando que as coordenadas usadas se refiram a uma base ortonormal.

Da primeira equação resulta: $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$

Proposição 1

A condição de ortogonalidade de vetores indicado por $\vec{u}\perp\vec{v}$ ocorre se, e somente se, $\vec{u}\,.\,\vec{v}=0$. Assim: $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\,.\,\vec{v}=0$.

Demonstração:

Se $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ é nulo, é imediato. Senão, decorre de $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$, que nos diz que:

$\vec{u}\,.\,\vec{v}=0\Leftrightarrow\cos\theta\Leftrightarrow\theta=\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$ (lembre-se de que $0\leq\theta\leq\pi$).

Proposição 2

Decorre da própria definição que $|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}.\vec{v}}$

De fato, vimos que módulo do vetor $\vec{u}=(x, y, z)$ é dado por $|\vec{u}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Tendo em vista que $\vec{u}\,.\,\vec{v}=(x, y, z)\,.\,(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$. Daí concluí-se que:

$$|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}.\vec{v}}$$

Exemplo: Sendo $|\vec{u}|=4$, $|\vec{v}|=3$ e $\vec{u}\,.\,\vec{v}=2$, calcular $(2\vec{u}-\vec{v})\,.\,(\vec{u}+2\vec{v})$

Solução:

$(2\vec{u} - \vec{v}) . (\vec{u}+2\vec{v}) = 2\vec{u} .(\vec{u} + 2\vec{v}) - \vec{v} .(\vec{u} + 2\vec{v})$

$= 2. \vec{u} . \vec{u} + 2. \vec{u} . \vec{v} - \vec{u} . \vec{v} - 2\vec{v} . \vec{v}$

$= 2 |\vec{u}|^2 + \vec{u} . \vec{v} - 2|\vec{v}|^2$

$= 2.(4)^2 + 2 - 2.(3)^2$

$= 2.16 + 2 - 2.9 = 16$

Resposta: 16

Exemplo: Sabendo que o vetor $\vec{u} = (2, 1, -1)$ forma um ângulo de 60° com o vetor $\overrightarrow{AB}$ determinado pelos pontos A (3, 1, -2) e B (4, 0, *m*), calcule m.

Solução:

Como $\cos 60° = \frac{1}{2}$; $\overrightarrow{AB} = \vec{v} = B - A = (1. -1, m + 2)$ e sabendo que $\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$, vem que:

$$\frac{1}{2} = \frac{(2,1,-1).(1,-1,m+2)}{\sqrt{4+1+1}.\sqrt{1+1+m^2+4m+4}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2-1-m-2}{\sqrt{6}\sqrt{m^2+4m+6}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{-1-m}{\sqrt{6m^2+24m+36}}\right)^2$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1+2m+m^2}{6m^2+24m+36}$$

$$6m^2+24m+36 = 4+8m+4m^2 \Rightarrow$$

$$m^2+8m+16 = 0$$

Resolvendo a equação obtemos $m = -4$ (raiz dupla)

Resposta: m = -4

3.7 Projeções Vetoriais

Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos e θ o ângulo entre eles. Pretendemos decompor um dos vetores, digamos $\vec{v}$, tal que: $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

Vejamos na figura as duas situações possíveis para os vetores ($\vec{v}_1 // \vec{u}$ e $\vec{v}_2 // \vec{u}$), podendo ser θ um ângulo agudo ou obtuso. (ver figuras 14 e 15)

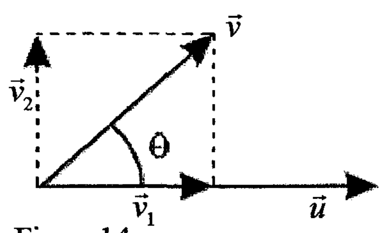


Figura14

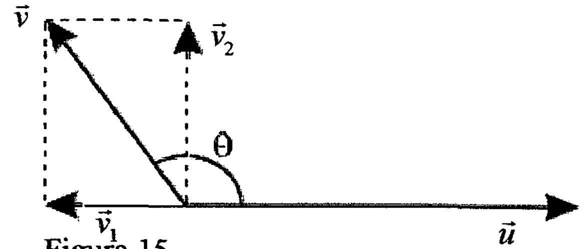


Figura 15.

O vetor $\vec{v}_1$ é chamado projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ e indicado por:

$\vec{v}_1 = \operatorname{Proj}_u \vec{v}$

Sendo $\vec{v}_1 // \vec{u}$, temos $\vec{v}_1 = \alpha\,\vec{u}$ e como $\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1 = \vec{v} - \alpha\,\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{u}$, vem

$$(\vec{v} - \alpha\,\vec{u}) . \vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{v} . \vec{u} - \alpha\,\vec{u} . \vec{u} = 0 \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{\vec{v}.\vec{u}}{\vec{u}.\vec{u}}$$

Portanto, sendo $\vec{v}_1 = \alpha\,\vec{u}$, concluí-se que:

$$\operatorname{Proj}_u \vec{v} = \left(\frac{\vec{v}.\vec{u}}{\vec{u}.\vec{u}}\right)\vec{u}$$

Exemplo: Determinar o vetor projeção de $\vec{v} = (2, 1, 3)$ sobre $\vec{u} = (1, -1, 0)$

Solução:

$\vec{u} . \vec{v} = 2.(1) + 1.(-1) + 3.(0) = 1$

$\vec{u} . \vec{u} = (1)^2 + (-1)^2 + 0^2 = 2$

Logo:

$$\operatorname{Proj}_u \vec{v} = \left(\frac{\vec{v}.\vec{u}}{\vec{u}.\vec{u}}\right)\vec{u} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)(1,-1,0) \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

4. VETORES: Uma Aplicação na Física

O produto escalar é uma importante ferramenta matemática para a Física, uma vez que inúmeras grandezas físicas são definidas com seu emprego, como por exemplo, o trabalho.

Um assunto útil à Física: $\vec{f}$ representa uma força aplicada a um bloco (figura 16). Nosso escopo é decompor $\vec{f}$ sobre outro vetor ou sobre os eixos cartesianos x e y. Esse texto baseia-se em [5] e [6].

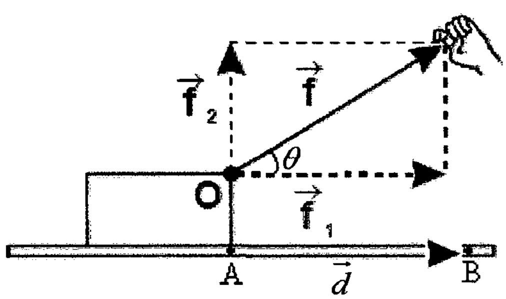


figura 16

O trabalho realizado por uma força constante $\vec{f}$ ao longo de um determinado deslocamento $\vec{d}$ é definido como o produto escalar desta força pelo seu deslocamento efetuado pelo corpo no qual a força está aplicada.

Pode-se observar que a componente da força $\vec{f}$ que realiza o trabalho é $\vec{f_1}$ paralela ao deslocamento $\overrightarrow{AB} = \vec{d}$, conforme a figura acima.

Então, $|\vec{f_1}| = |\vec{f}| \, . \cos \theta$

onde θ é o ângulo entre a força e o deslocamento.

A grandeza física trabalho, notado por W, é uma grandeza escalar e tem como unidade no Sistema Internacional o joule, notado por J.

A expressão parao cálculo do trabalho W é:

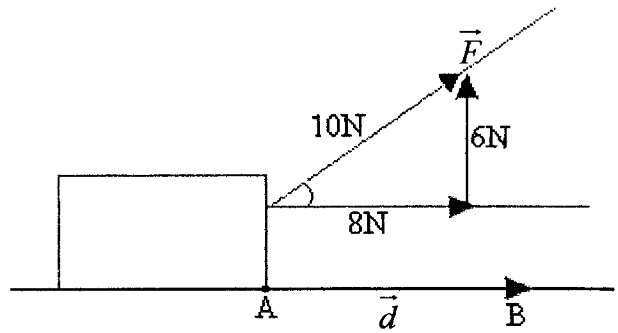
$W = \vec{f} . \vec{d}$ ou $W = |\vec{f}| \, . \, |\vec{d}| . \cos \theta$

e

1J = 1N. 1m (1 Newton vezes um metro)

Exemplo:

Calcular o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ para deslocar o corpo de A até B (figura), sabendo que $|\vec{F}| = 10$ N, $|\overrightarrow{AB}| = |\vec{d}|$ 20m e $\theta = 36{,}9°$.



Solução:

A força $\vec{F}$ é decomposta em $\vec{F} = 8\,\vec{i} + 6\,\vec{j}$, onde $8 = |\vec{F}|.\cos\theta$, $6 = |\vec{F}|.\text{sen}\,\theta$ e $\vec{d} = 20\,\vec{i} + 0\,\vec{j}$.

O trabalho realizado pela força $\vec{F}$ pode ser calculado pro:

$W = \vec{F} \,.\, \vec{d}$ (produto escalar)

$W = (8\,\vec{i} + 6\,\vec{j}).(20\,\vec{i} + 0\,\vec{j})$

W = 160 J

Ou por:

$W = |\vec{F}|.|\vec{d}|.\cos\theta$

W = (10N).(20m).(cos36,9°)

W = 160 J

Resposta: 160 J

5. O TRIÂNGULO NO PLANO

É um lugar geométrico resultante da intersecção de três retas não paralelas. Segundo Dolce (p 36. 1993), dados três pontos A, B e C não colineares, à reunião dos segmentos $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$ chamam-se triângulo ABC (figura 17). Texto baseado em [3].

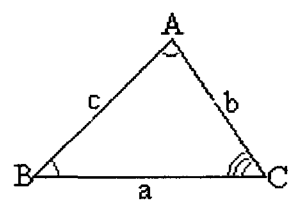


figura 17

Indicação:

Triangulo ABC = Δ ABCΔABC = AB ∪ AC ∪ BC.

O triangulo constitui os seguintes elementos:

- Vértices: os pontos A, B e C são os vértices do Δ ABC.
- Lados: os segmentos AB (de medida c), AC (de medida b) e BC (de medida a) são os lados do triângulo.
- Ângulos: os ângulos BÂC ou Â, A$\hat{B}$C ou $\hat{B}$ e A$\hat{C}$B ou $\hat{C}$ são os ângulos do ΔABC (ou ângulos internos do ΔABC).

Diz que os lados BC, AC e AB e os segmentos Â, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são respectivamente, opostos.

Para conhecermos melhor os triângulos, vamos inicialmente conhecer sua classificação, ou seja, os tipos de triângulos existentes. Assim sendo os triângulos podem se classificar quanto:

a) Aos seu lados:

- Eqüiláteros se, e somente se, têm os três lados congruentes;
- Isóceles se, e somente se, têm dois lados congruentes;
- Escaleno, e somente se, dois quaisquer lados não são congruentes.

b) Aos seus ângulos:

- Retângulo se, e somente se, o triângulo possuir um ângulo reto (90° graus);
- Obtusângulo se, e somente se, o triângulo possuir um ângulo maior que 90° graus;
- Acutângulo se, e somente se, o triângulo possuir seus três ângulos menores que 90° graus.

5.1 Condição de Existência de um Triângulo

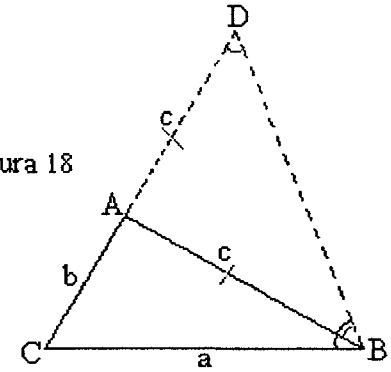
Devemos saber em que condições existirá um triangulo, assim falaremos sobre a desigualdade triangular. Ver figura 18

Hipótese Tese

A, B e C não colineares $\Rightarrow$ BC < AC + AB

a, b e c lados de um triângulo $\Rightarrow$ a < b + c

figura 18



Demonstração:

Consideremos um pondo D na semi-reta oposta à semi-reta AC, tal que AD $\equiv$AB (1).

$$DC = AC + AD \overset{(1)}{\Rightarrow} DC = AC + AB \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} (1) \Rightarrow \Delta ABC \text{ isósceles de base BD} \Rightarrow A\hat{D}B \equiv A\hat{B}D \\ A \text{ é interno ao ângulo } C\hat{B}D \Rightarrow C\hat{B}D > A\hat{B}D \end{array}\right\} \Rightarrow C\hat{B}D > A\hat{B}D \equiv C\hat{B}D \quad (3)$$

No triângulo BCD com (3) e o teorema anterior, vem:

BC < DC e com (2) Bc < Ac + AB, ou ainda: a < b + c

Observações:

a) A desigualdade triangular também pode ser enunciada como segue:

Em todo triângulo, cada lado é maior que a diferença dos outros dois.

b) Se a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo, devemos ter as três condições abaixo:

$$a < b + c \qquad b < a + c \qquad \text{e} \qquad c < a + b$$

Estas relações podem ser resumida como segue:

$$\left.\begin{array}{l} a < b + c \\ \left.\begin{array}{l} b < a + c \Leftrightarrow b - c < a \\ c < a + b \Leftrightarrow c - b < a \end{array}\right\} \Leftrightarrow |b - c| < a \end{array}\right\} \Leftrightarrow |b - c| < a < b + c$$

5.2 Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Agora estudaremos as relações que envolvem os lados de um triângulo retângulo, observando suas principais características e verificando suas demonstrações.

5.2.1 Demonstrações Geométricas

Consideremos o triângulo retângulo ABC (Â é reto) da figura 19, onde destacamos:

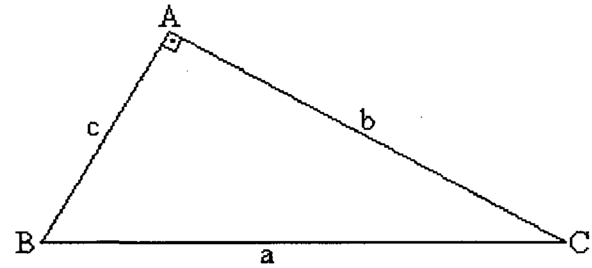


figura 19

- o lado BC, chamamos de **hipotenusa**, cuja medida indicaremos por **a**.
- os lados AC e BC, chamados de **catetos**, cujas medidas indicaremos por **b** e **c**, respectivamente.

Note que:

I – A altura traçada a partir do vértice do ângulo reto Â determina sobre a hipotenusa BC dois segmentos: BH que indicaremos por m e HC indicado por n. (projeções). Figura 20

BH é chamado de projeção do cateto de medida c sobre a hipotenusa;

HC é chamado projeção do cateto de medida b sobre a hipotenusa.

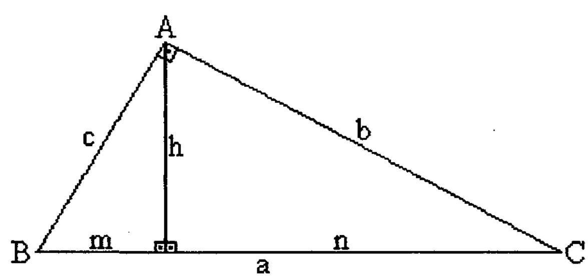


figura 20

II – A altura traçada a partir do vértice do ângulo reto Â divide o triângulo ABC em dois outros triângulos retângulos: figura 21 e 22

Δ AHB ($\hat{H}$ é reto) e Δ AHC ($\hat{H}$ é reto)

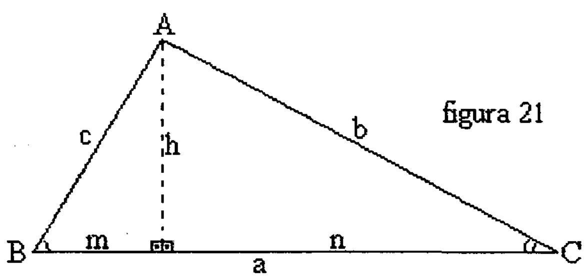


figura 21

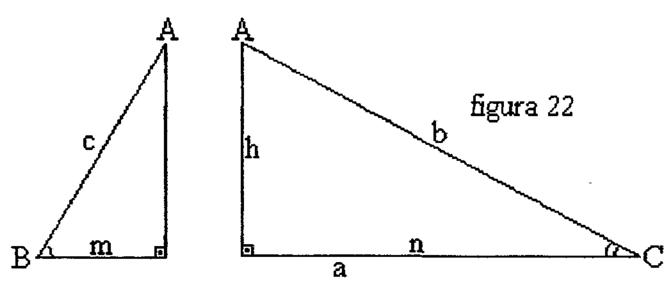


figura 22

Observe que:

Δ ABC ~ Δ AHB, pois ambos têm um ângulo reto e um ângulo em comum ($\hat{B}$).

Δ ABC ~ Δ AHC, pois ambos têm um ângulo reto ($\hat{A}$ e $\hat{H}$).

Δ AHB ~ Δ AHC, pela propriedade transitiva.

Assim, a partir das semelhanças apresentadas, podemos obter as chamadas relações métricas no triângulo retângulo (figura 23).

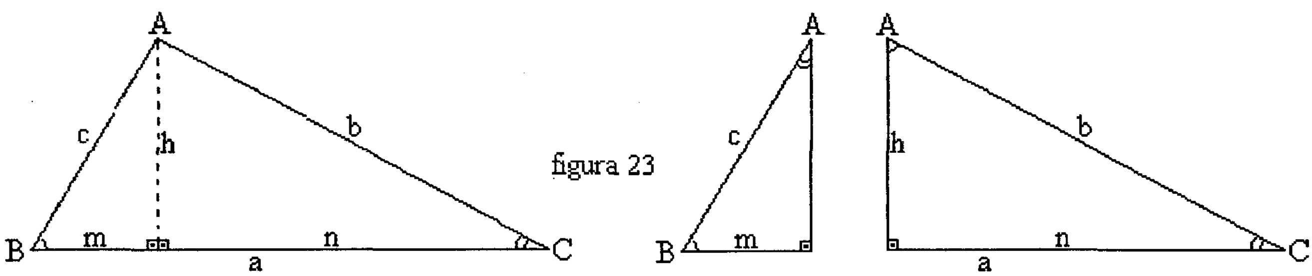


figura 23

Com base nas semelhanças dos triângulos citados e com os elementos já caracterizados, temos:

1ª Relação: Teorema de Pitágoras.

A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Demonstração:

Da primeira relação, sabemos que:

$$c^2 = a.m \qquad \text{e} \qquad b^2 = a.n$$

Adicionando membro a membro as igualdades, temos:

$b^2 + c^2 = a.n + a.m \Rightarrow b^2 + c^2 = a.(n + m) \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$

Observações:

1ª) Num triângulo retângulo, a soma dos inversos dos quadrados dos catetos é igual ao inverso do quadrado da altura relativa à hipotenusa.

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$$

De fato:

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{c^2 + b^2}{b^2.c^2} = \frac{a^2}{b^2.c^2} = \frac{a^2}{a^2.h^2} = \frac{1}{h^2}$$

Observe que $b^2 = c^2$, vem da relação três.

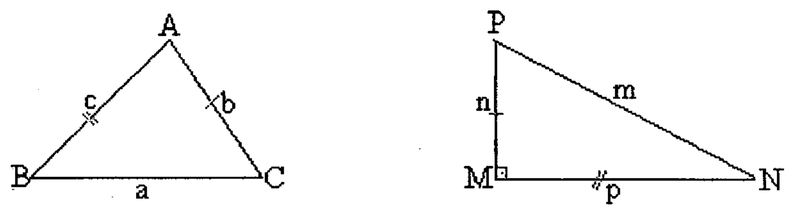
2ª) Recíproco do teorema de Pitágoras

Se *num triângulo o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, então o triângulo é retângulo.*

Hipótese $\rightarrow$ Tese

Δ ABC em que $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \Delta$ ABC é retângulo

Demonstração:



Construindo o triângulo MNP, retângulo em M e cujos catetos MN e MP sejam respectivamente congruentes a AB e AC, temos:

Δ MNP retângulo em M $\Rightarrow m^2 = n^2 + p^2$

Como $n = b$ e $p = c$, vem $m^2 = b^2 + c^2$.

Logo, $m^2 = a^2$, ou seja, $m = a$.

Então, pelo caso LLL, Δ ABC $\equiv$ Δ MNP e, como ΔMNP é retângulo em M, o Δ ABC *é retângulo em* A.

2ª Relação: Catetos e Projeções.

$$\Delta ABC \sim \Delta AHB \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{AB}{BH} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = a.m$$

$$\Delta ABC \sim \Delta AHC \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{HC} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = a.n$$

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida de um cateto é igual ao produto das medidas da hipotenusa e da sua projeção desse cateto sobre a hipotenusa. (Podemos dizer ainda que, cada cateto é a média geométrica entre sua projeção sobre a hipotenusa e a hipotenusa).

3ª Relação: hipotenusa, altura relativa e catetos.

$$\Delta ABC \sim \Delta AHB \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AH} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow a.h = b.c$$

Num triangulo retângulo, o produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa a ela é igual ao produto das medidas dos catetos.

4ª Relação: altura relativa e catetos.

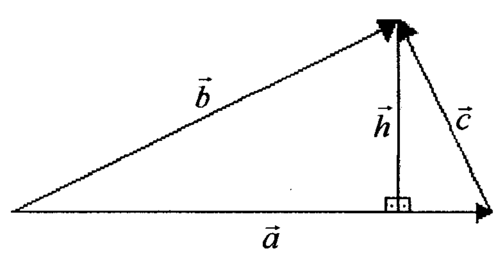
$$\Delta\ AHB \sim \Delta\ AHC \Rightarrow \frac{AH}{HC} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow h^2 = m.n$$

Num triângulo retângulo, o quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas dos segmentos que ela determina sobre a hipotenusa. (Podemos dizer ainda que, a altura relativa à hipotenusa é média geométrica ente os segmentos que determinam sobre a hipotenusa).

5.2.2 Demonstrações Vetoriais

1ª Relação: O teorema de Pitágoras

Sejam os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, como mostra a figura:



Sendo a figura um triângulo formado, queremos mostrar que $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$

Demonstração:

Como o triângulo é retângulo, temos que $\vec{b}\ .\ \vec{c} = 0$ (1).

Temos ainda que: $\vec{b} = \left(\vec{b} + \vec{a}\right) \Rightarrow \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$ (2).

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{a}|\ .\ |\vec{a}|$$

Pelo teorema de Pitágoras, tiramos:

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 \Rightarrow (\vec{b} - \vec{c})\ .\ (\vec{b} - \vec{c})$$

$$\Rightarrow \vec{b}.\vec{b} - \vec{b}.\vec{c} - \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{c}$$

De (1) temos:

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}.\vec{b}| + |\vec{c}.\vec{c}|$$

Logo, concluímos que:

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$$

2ª Relação: A relação do quadrado do cateto com hipotenusa e projeção:

- Queremos demonstrar que $c^2 = a\,.\,n$, equivale vetorialmente à relação:

$$|\vec{c}|^2 = \vec{a}\,.\,|\overrightarrow{\Pr oj_{\vec{a}} c}|$$

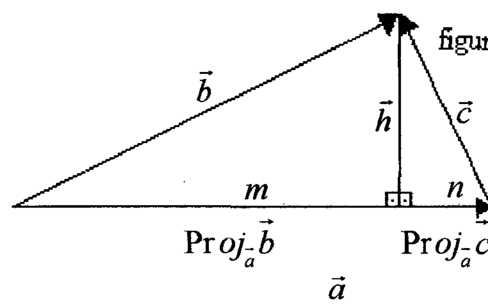


figura 24

Demonstração:

Com efeito da figura 24, note que: $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$. Aplicando o produto interno com o vetor $\vec{c}$, temos:

I. $\vec{c}.\vec{c} = \vec{c}.(\vec{b} - \vec{a})$

$|\vec{c}|^2 = \vec{c}\,.\,\vec{b} - \vec{c}\,.\,\vec{a}$

$|\vec{c}|^2 = -\,\vec{c}\,.\,\vec{a}$, pois sabemos que (ver figura) $\vec{b} \perp \vec{c}$, isto é, $\vec{b}\,.\,\vec{c} = 0$

Agora observe que:

$$\overrightarrow{\Pr oj_{\vec{a}} c} = \frac{\vec{a}.\vec{c}}{|\vec{a}|^2}.\vec{a}$$

E observe também que o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{c}$ é obtuso, isto é, $\vec{a}\,.\,\vec{c} < 0$. Portanto,

$$|\overrightarrow{\Pr oj_{\vec{a}} c}| = \frac{|\vec{a}.\vec{c}|}{|\vec{a}|^2}.|\vec{a}| = -\frac{\vec{a}.\vec{c}}{|\vec{a}|}$$

Logo temos:

$$|\vec{a}|.|\Pr oj_{\vec{a}}\vec{c}| = -\vec{a}.\vec{c}$$

A demonstração termina comparando este resultado com I.

De maneira análoga, faz-se a demonstração para o outro cateto. Queremos demonstrar que:

$$|\vec{b}|^2 = |\vec{a}|.|\Pr oj_{\vec{a}}\vec{b}|$$

Com efeito, começamos observando novamente que $\vec{b} \perp \vec{c}$. Então:

II. $\vec{b} \,.\, \vec{c} = 0$

$\vec{b} \,.\, (\vec{b} - \vec{a}) = 0$

$\vec{b} \,.\, \vec{b} - (\vec{b} \,.\, \vec{a}) = 0$

$|\vec{b}|^2 = \vec{b} \,.\, \vec{a}$

Por outro lado temos que:

$$|\Pr oj_{\vec{a}} \vec{b}| = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|a|^2}.\vec{a},$$

E observe também que o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é agudo, isto é, $\vec{a} \,.\, \vec{b} < 0$. Portanto:

$$|\Pr oj_{\vec{a}} \vec{b}| = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|a|^2}.|\vec{a}| = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|}$$

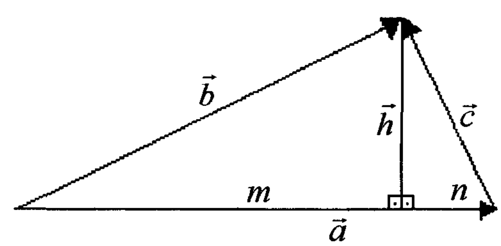
Logo temos:

$$|\vec{a}|.|\Pr oj_{\vec{a}} \vec{b}| = \vec{a} \,.\, \vec{b}$$

Agora basta comparar este resultado com II.

Também, podemos demonstrar assim:

Na figura: $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$



Multiplicando os escalarmente por $\vec{b}$:

$\vec{a} \,.\, \vec{b} = \vec{b} \,.\, \vec{b} + \vec{b} \,.\, \vec{c}$

$|\vec{a}|.|\vec{b}| \,.\, \cos\theta = |\vec{b}|^2 + |\vec{b}|.|\vec{c}|.\cos 90°$

Porém $|\vec{b}|.\, \cos\theta = \text{m}$

Então $|\vec{a}|.\text{m} = |\vec{b}|^2 \Rightarrow \text{b}^2 = \text{a.m}$

3ª Relação: O produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa a ela é igual ao produto das medidas dos catetos. Vamos provar que:

$$|\vec{a}| \,.\, |\vec{h}| = |\vec{b}| \,.\, |\vec{c}|$$

Note que:

$$\vec{h} = \vec{b} - \Pr oj_{\vec{a}} \vec{b} = \vec{b} - \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|}.\vec{a}$$

Tomando módulo (ou norma) em ambos os membros, temos:

$$|\vec{h}|^2 = |\vec{b} - \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|^2}.\vec{a}|^2$$

$$= (|\vec{b} - \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|^2}.\vec{a}|).(|\vec{b} - \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|^2}.\vec{a}|)$$

$$= |\vec{b}|^2 - 2.\frac{(\vec{b}.\vec{a})^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{(\vec{a}.\vec{b})^2}{|a|^2}$$

Notando que $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$ e lembrando que $|\vec{b}|^2 = \vec{a} \ . \ \vec{b}$; (veja a prova da primeira relação), da igualdade acima temos:

$$|h|^2 = \frac{(|a|^2 - |\vec{b}|^2).|\vec{b}|^2}{|\vec{a}|^2}$$

Multiplicando ambos os membros por $|\vec{a}|^2$, temos:

$$|\vec{a}|^2 . |\vec{h}|^2 = \frac{(|a|^2 - |\vec{b}|^2).|\vec{b}|^2}{|a^2|}.|\vec{a}|^2$$

$$|\vec{a}|^2 . |\vec{h}|^2 = (|a|^2 - |\vec{b}|^2).|\vec{b}|^2$$

$$|\vec{a}|^2 . |\vec{h}|^2 = |\vec{c}|^2 . |\vec{b}|^2$$

Logo, temos:

$$|\vec{a}| . |\vec{h}| = |\vec{b}| . |\vec{c}|$$

3ª Relação: A hipotenusa ao quadrado é igual ao produto dos catetos (projeções): $h^2 = m.n$ ou:

$$|\vec{h}|^2 = \mathrm{Pr}oj_{\vec{a}}\overrightarrow{c} \ . \ \mathrm{Pr}oj_{\vec{a}}\vec{b}$$

Demonstração:

I. Sendo $\vec{h} \perp \vec{a}$, temos que: $\vec{h}.\vec{a} = 0$

$$\vec{a} = \mathrm{Pr}oj_{\vec{a}}\overrightarrow{c} + (-\mathrm{Pr}oj_{\vec{a}}\vec{b})$$

$$|\vec{b}|^2 = |\vec{h}| + |\mathrm{Pr}oj_{\vec{a}}\vec{b}|^2 \Rightarrow |\vec{h}|^2 = |\vec{b}| - |\mathrm{Pr}oj_{\vec{a}}\vec{b}|^2 \Rightarrow |\vec{h}|^2 = \vec{a}.\vec{b} - |\mathrm{Pr}oj_{\vec{a}}\vec{b}|^2$$

Ainda temos:

$\text{Pr}oj_{\vec a}\vec b \perp \text{Pr}oj_{\vec a}\overrightarrow{c} \Rightarrow$ então $\text{Pr}oj_{\vec a}\vec b \,.\, \text{Pr}oj_{\vec a}\overrightarrow{c} = 0$

$\text{Pr}oj_{\vec a}\vec b \perp \text{Pr}oj_{\vec a}\overrightarrow{c} \Rightarrow$ então $(-\text{Pr}oj_{\vec a}\vec b)\,.\,\text{Pr}oj_{\vec a}\overrightarrow{c} = 0$

Se $\vec b \perp \vec c$ então: $\vec b \,.\, \vec c = 0$

$$\vec b\,.\,(\vec b - \vec a) = 0$$

$$\vec b\,.\vec b - \vec b\,.\vec a = 0$$

$$|\vec b|^2 = \vec b\,.\vec a$$

II. $|\text{Pr}oj_{\vec a}\overrightarrow{c}| = \left|\dfrac{\vec a.\vec c}{|\vec a|}\right| = -\dfrac{\vec a.\vec c}{|\vec a|} = \dfrac{-\vec a.(\vec b - \vec a)}{|\vec a|} = \dfrac{\vec a.\vec a - \vec a.\vec b}{|\vec a|} = \dfrac{|\vec a|^2 - \vec a.\vec b}{|\vec a|} = |\vec a| - \dfrac{\vec a.\vec b}{|\vec a|}$

III. $|\text{Pr}oj_{\vec a}\vec b| = \dfrac{\vec a.\vec b}{|\vec a|} = \dfrac{\vec a.\dfrac{|\vec b|}{\vec a}}{|\vec a|} = \dfrac{|\vec b|}{|\vec a|}.|\vec a| = |\vec b|^2 = \vec a\,.\,\vec b$

Assim, de II e III, fazemos:

$$|\text{Pr}oj_{\vec a}\vec b|\,.\,|\text{Pr}oj_{\vec a}\overrightarrow{c}| = \frac{\vec a.\vec b}{|\vec a|}\,.\left(\vec a - \frac{\vec a.\vec b}{|\vec a|}\right)$$

$$= \frac{\vec a.\vec b}{|\vec a|}.|\vec a| - \frac{\vec a.\vec b}{|\vec a|}.\frac{\vec a.\vec b}{|\vec a|}$$

$$= \vec a\,.\,\vec b - \frac{|\vec a.\vec b|^2}{|\vec a|^2}$$

$$= \vec a\,.\,\vec b - \left|\frac{\vec a.\vec b}{\vec a}\right|^2$$

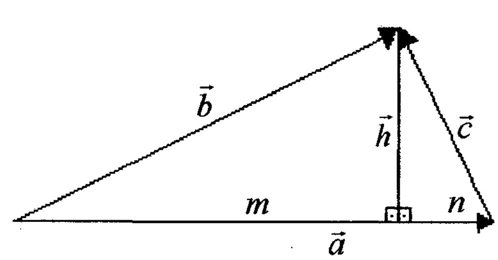
$$= \vec a\,.\,\vec b - |\text{Pr}oj_{\vec a}\vec b|^2 = |\vec h|^2$$

E pela equação I, podemos concluir que:

$|\vec h|^2 = |\text{Pr}oj_{\vec a}\vec b|\,.\,|\text{Pr}oj_{\vec a}\overrightarrow{c}|$

Também podemos demonstrar assim:

Na figura:



$\vec{b} = \vec{m} + \vec{h}$

$\vec{c} = \vec{n} . \vec{h}$

Multiplicando escalarmente, membro a membro:

$\vec{b} . \vec{c} = (\vec{m} + \vec{h}) . (\vec{n} . \vec{h})$

$0 = \vec{m} . \vec{n} - \underbrace{\vec{m} . \vec{h}}_{0} + \underbrace{\vec{n} . \vec{h}}_{0} - \vec{h} . \vec{h}$

Logo: $h^2 = m.n$

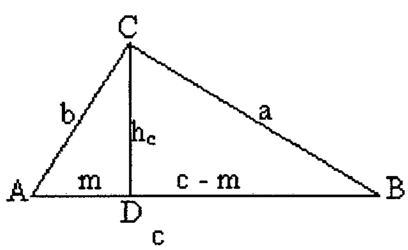
5.3 Relações Métricas no Triângulo Qualquer

Agora veremos que as relações métricas se estendem a qualquer triângulo. Assim, as medias dos lados de um triângulo qualquer vão nos mostras suas relações.

5.3.1 Demonstrações Geométricas

1ª Relação

Num triângulo qualquer, o quadrado do lado oposto a um ângulo agudo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos duas vezes o produto de um desses lados pela projeção do outro sobre ele.

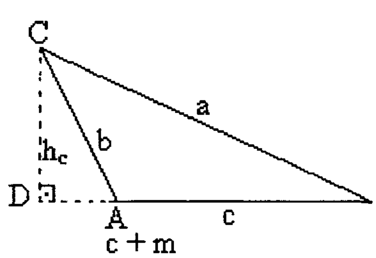


Hipótese Tese

$A < 90°$, m = proj. de b sobre c $\Rightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2 - 2.c.m$

2ª Relação

Num triângulo obtusângulo qualquer, o quadrado do lado oposto ao ângulo obtuso é igual à soma dos quadrados dos outros lados, mais duas vezes o produto de um desses lados pela projeção do outro sobre ele (ou sobre a reta que o contém).



Hipótese Tese

$A > 90°$, m = proj. de b sobre c $\Rightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2 + 2.c.m$

Demonstração (conjunta – para os dois casos):

Conduzindo CD = h_c = altura relativa ao lado c, vem:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta CDB\text{: } a^2 = h_c^2 + (c \pm m)^2 \\ \Delta CDA\text{: } h_c^2 = b^2 - m^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 = b^2 - m^2 + c^2 \pm 2.c.m + m^2 \Rightarrow$$

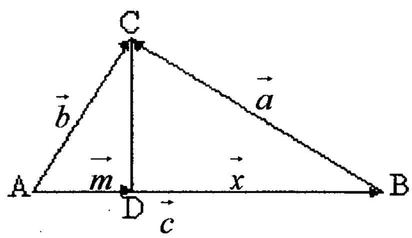
$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2.c.m$ (1) ou $a^2 = b^2 + c^2 + 2.c.m$ (2)

5.3.2 Demonstrações Vetoriais

1ª Relação

Queremos mostrar que: $a^2 = b^2 + c^2 - 2.c.m$ ou $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2.|\vec{c}|.|\vec{m}|$

Demonstração:



Note que: $\vec{c} = \vec{m} + \vec{x}$, e:

$$\begin{cases} \vec{m} = \mathrm{Proj}_{\vec{c}}\vec{b} \\ \vec{x} = \vec{c} - \vec{m} = \mathrm{Proj}_{\vec{c}}\vec{a} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \vec{a} = \vec{h_c} - \vec{x} \\ \vec{b} = \vec{m} + \vec{h_c} \end{cases}$$

Ainda temos que:

$\vec{m} \perp \vec{h_c} \Rightarrow \vec{m}.\vec{h_c} = 0$

$\vec{x} \perp \vec{h_c} \Rightarrow \vec{x}.\vec{h_c} = 0$

Sendo:

$\vec{a} = \vec{h_c} - \vec{x}$

$|\vec{a}|^2 = (\vec{h_c} - \vec{x}).(\vec{h_c} - \vec{x})$

$|\vec{a}|^2 = |\vec{h_c}|^2 - 2.|\vec{h_c}|.|\vec{x}| + |\vec{x}|^2$

$|\vec{a}|^2 = |\vec{h_c}|^2 - 2.0 + |\vec{x}|^2$

$|\vec{a}|^2 = |\vec{h_c}|^2 + |\vec{x}|^2$

$|\vec{a}|^2 = |\vec{h_c}|^2 + (\vec{c} - \vec{m}).(\vec{c} - \vec{m})$

$|\vec{a}|^2 = |\vec{h_c}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2.\vec{c}.\vec{m} + |\vec{m}|^2$

$|\vec{a}|^2 = |\vec{m}|^2 + |\vec{h_c}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2.\vec{c}.\vec{m}$

Mas, sabemos que $\vec{b} = \vec{m} + \vec{h_c}$, assim:

$|\vec{b}|^2 = (\vec{m} + \vec{h_c}).(\vec{m} + \vec{h_c})$

$|\vec{b}|^2 = |\vec{m}|^2 + 2.\vec{m}.\vec{h_c} + |\vec{h_c}|^2$

$|\vec{b}|^2 = |\vec{m}|^2 + 2.0 + |\vec{h_c}|^2$

$|\vec{b}|^2 = |\vec{m}|^2 + |\vec{h_c}|^2$

Logo: $|\vec{a}|^2 = |\vec{m}|^2 + |\vec{h_c}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2.\ \vec{c}.\vec{m} \quad \Rightarrow \quad |\vec{a}|^2 = |b|^2 + |\vec{c}|^2 - 2.\ \vec{c}.\vec{m}$

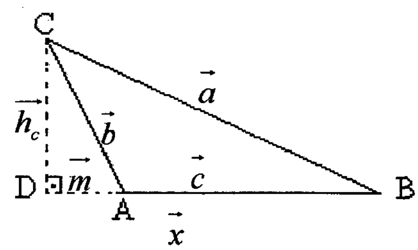
2ª Relação:

Queremos mostrar que: $a^2 = b^2 + c^2 + 2.c.m$ ou $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2.|\vec{c}|.|\vec{m}|$

Demonstração:

Note que: $\vec{x} = \vec{c} + \vec{m}$, e:

$$\begin{cases} \vec{b} = \vec{h_c} - \vec{m} \\ \vec{h_c} = \vec{x} + \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{h_c} - \vec{x} \end{cases}$$



Ainda temos que:

$\vec{m} \perp \vec{h_c} \Rightarrow \vec{m}.\vec{h_c} = 0$

$\vec{x} \perp \vec{h_c} \Rightarrow \vec{x}.\vec{h_c} = 0$

Sendo:

$$\begin{cases} \vec{b} = \vec{h_c} - \vec{m} \\ |\vec{x}|^2 = (\vec{c} + \vec{m}).(\vec{c} + \vec{m}) \\ |\vec{x}|^2 = |\vec{c}|^2 + 2.\ \vec{c}.\vec{m} + |\vec{m}|^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{b} = \vec{h_c} - \vec{m} \\ |\vec{b}|^2 = (\vec{h_c} - \vec{m}).\ (\vec{h_c} - \vec{m}) \\ |\vec{b}|^2 = |\vec{h_c}|^2 - 2.\ \vec{m}.\vec{h_c} + |\vec{m}|^2 \\ |\vec{b}|^2 = |\vec{h_c}|^2 - 2.0 + |\vec{m}|^2 \\ |\vec{b}|^2 = |\vec{h_c}|^2 + |\vec{m}|^2 \end{cases}$$

Segue:

$\vec{a} = \vec{h_c} - \vec{x}$

$|a|^2 = (\vec{h_c} - \vec{x}).(\vec{h_c} - \vec{x})$

$|a|^2 = |\vec{h_c}|^2 - 2.\ \vec{h_c}.\vec{x} + |\vec{x}|^2$

$|a|^2 = |\vec{h_c}|^2 - 2.0 + |\vec{x}|^2$

$$|a|^2 = |\overrightarrow{h_c}|^2 + |\vec{x}|^2$$

$$|a|^2 = |\overrightarrow{h_c}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2.\ \vec{c}\,.\overrightarrow{m}\ + |\overrightarrow{m}|^2$$

$$|a|^2 = |\overrightarrow{m}|^2 + |\overrightarrow{h_c}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2.\ \vec{c}\,.\overrightarrow{m}$$

$$|a|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2.\ \vec{c}\,.\overrightarrow{m}$$

6. CONCLUSÃO

A partir desse trabalho cresce a oportunidade de se abordar e buscar mais informações sobre os vetores, que desempenham um importante papel do ponto de vista da Geometria Descritiva. A aprendizagem das relações métricas, através da álgebra vetorial permite que o estudante faça de seus estudos mais interessantes e quem sabe mais divertidos, já que o seu conhecimento torna-se mais prático na resolução de problemas.

Foi pensando nesse aspecto que pesquisamos uma forma de expor os cálculos e demonstrações, dando ênfase principal aos triângulos. Neste trabalho, fizemos um paralelo entre vetores e geometria plana para mostrar o Teorema de Pitágoras e as Relações Métricas nos triângulos.

Verificamos assim, que o estudo de triângulos, tanto de forma geométrica (tradicional) quanto vetorial, possuem estreitas relações com a sua explicação casual, mas que divergem na maneira de estudo e de justificação lógica. Compreende-se então, que essas duas vias convergem e fica mais uma vez comprovado que nessa aprendizagem deve-se buscar técnicas de aprendizagem e constantemente aprimorar sues conhecimentos, dinamizar seus métodos, para que acompanhe o ritmo da globalização.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan de. Geometria Analítica: **Um tratamento vetorial**. São Paulo, McGraw-Hill, 1987.

[2] BOYER, Carl B. **História da Matemática** (tradução Elza F. Fomide – 2 ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

[3] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar**, vol 9.São Paulo: Atual, 1993.

[4] SANTOS, Nathan Moreira dos. **Vetores e Matrizes: Uma Introdução à Álgebra Linear**. 4ªed. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

[5] VENTURI, Jacir J. **Álgebra Vetorial e Geometria Analítica**. 9ª ed. Curitiba, 2000.

[6] WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Pearson Makron Books, 2000.