

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA – UFSC  
UNIVERSIDADE VIRTUAL DO ESTADO DO MARANHÃO – UNIVIMA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – UFSC  
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MODALIDADE À DISTÂNCIA

**Equações Diferenciais Parciais e a  
Termoelasticidade Linear**

DANILO LIMA FALCÃO  
PAULO MELCIDES

CODÓ-MA, JUNHO DE 2009

**DANILO LIMA FALCÃO**  
**PAULO MELCIDES**

**Equações Diferenciais Parciais e a**  
**Termoelasticidade Linear**

**Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao**  
**Curso de Especialização em Matemática**  
**Departamento de Matemática-UFSC**  
**Curso de Especialização em Matemática**  
**Modalidade à Distância**

**Orientador: Dr. Félix Pedro Quispe Gómez**

**CODÓ-MA, JUNHO DE 2009**

## **AGRADECIMENTOS**

Agradecemos aos nossos pais, pelo apoio, incentivo e pela formação acadêmica e moral que nos proporcionaram e por sempre acreditarem em nossa capacidade de contribuir na construção de um mundo melhor. Agradecemos a Deus pela vida e pelos dons que dá a cada pessoa. Agradecemos ao nosso orientador, Félix Pedro Quispe Gómez, por socializar um pouco de seu grande conhecimento. Agradecemos à banca examinadora e a todos os professores e alunos do Curso de Especialização em Matemática que ajudaram na nossa formação acadêmica.

## Sumário

INTRODUÇÃO.....	5
1. NOTAS HISTÓRICAS.....	5
2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS (EDP's).....	7
2.1. SOLUÇÃO DE UMA EDP LINEAR.....	8
2.2. OUTRA CLASSIFICAÇÃO.....	8
2.3. CONDIÇÕES DE FRONTEIRA.....	9
2.4. AUTOVALORES E AUTOFUNÇÕES.....	10
3. SÉRIES DE FOURIER.....	11
3.1. FUNÇÕES PERIÓDICAS.....	11
3.2. ORTOGONALIDADE DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO.....	11
3.3. COEFICIENTES DE FOURIER.....	12
3.4. SÉRIES DE FOURIER.....	13
4. MÉTODO DE FOURIER.....	14
5. ANÁLISE DAS EQUAÇÕES DA ONDA E DO CALOR.....	18
5.2. VIBRAÇÕES DE UMA CORDA ELÁSTICA.....	21
6. INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS TERMOELÁSTICOS.....	24
7. A TEORIA DA TERMOELASTICIDADE LINEAR.....	26
7.1. EQUAÇÕES BÁSICAS DA TERMOELASTICIDADE.....	27
7.2. EQUAÇÕES DA TEORIA LINEAR.....	28
7.3. RELAÇÕES TERMODINÂMICAS.....	31
7.4. EQUAÇÕES PARA O CAMPO DE DESLOCAMENTO E TEMPERATURA.....	34
7.5. TERMOELASTICIDADE CLÁSSICA.....	35
8. O SISTEMA DE EQUAÇÕES DA VIGA DE TIMOSHENKO.....	36
CONCLUSÃO.....	38
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	40

## INTRODUÇÃO

Neste trabalho pretende-se fazer um estudo das EDP's de forma simples, clara e objetiva para que qualquer principiante nesta área da matemática possa entender e quem sabe passar a gostar mais de estudá-las. A importância das EDP'S está no fato de que elas representam modelos matemáticos de processos físicos e, portanto, podem ser aplicadas em várias áreas do conhecimento humano, como Engenharia, Química, Biologia, Física dentre outras. Porém, este texto limita-se ao estudo e a aplicação das EDP's como modelos matemáticos para fenômenos termoelásticos.

A termoelasticidade é uma teoria que estuda o efeito do campo de temperatura sobre o campo de tensão e o efeito associado do campo de tensão sobre as condições térmicas num sólido elástico.

Entende-se por elasticidade a capacidade do corpo para restabelecer sua configuração original depois que as forças que causam a deformação sejam retiradas. Mais precisamente, elasticidade é um estado do meio contínuo que é caracterizado pela relação um a um entre as componentes de tensão e deformação, sendo que uma deformação nula corresponde a uma tensão nula.

Quando um sólido é deformado por meios mecânicos ou térmicos aparecem o campo de deslocamento  $u$  e o campo de temperatura não uniforme  $T$ . Estas mudanças implicam na criação de um campo de velocidade  $V$  e uma distribuição de tensão e deformação. Seguindo a tal deformação do estado de equilíbrio, a energia é transferida de uma parte do sólido para outro por deformação elástica e por condução de calor, então, a teoria termodinâmica de processos irreversíveis serve para deduzir as EDP'S que descrevem esse fenômeno.

### 1. NOTAS HISTÓRICAS

O desenvolvimento das equações diferenciais parciais está ligado ao desenvolvimento geral da matemática e não pode ser separado dele. Para fornecer alguma perspectiva histórica, indica-se aqui algumas das tendências principais na história desse assunto identificando os matemáticos atuantes no período inicial de desenvolvimento que mais se destacaram.

As equações diferenciais começaram com o estudo de cálculo por ISAAC NEWTON e LEIBNIZ. ISAAC NEWTON (1642 – 1727) nasceu na Inglaterra e suas descobertas sobre o cálculo e as leis da mecânica datam de 1665, mas só foram publicadas em 1687 no seu livro *PHILOSOPHIAE NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA*. Seu desenvolvimento do cálculo e a elucidação dos princípios básicos da mecânica forneceram a base para a aplicação das equações diferenciais no século XVIII. NEWTON classificou as equações diferenciais de primeira ordem de acordo com as formas

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad \frac{dy}{dx} = f(y) \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

GOTTFRIED W. LEIBNIZ (1646 – 1716) nasceu em Leipzig na Alemanha e chegou aos resultados fundamentais do cálculo independentemente de Newton. É devido a ele a nossa notação para a derivada  $\frac{dy}{dx}$  e o sinal de integração. Descobriu o método de separação de variáveis em 1691 e o procedimento para resolver equações lineares de primeira ordem em 1694. DANIEL BERNOULLI (1700 – 1782) concentrou seu interesse nas equações diferenciais e suas aplicações. Desenvolveu estudos sobre a equação da onda, onde escreveu a solução do problema da corda vibrante em forma de séries trigonométricas a partir de considerações físicas.

LEONHARD EULER (1707 – 1783) desenvolveu a teoria de fatores integrantes, encontrou a solução geral para equações lineares homogêneas com coeficientes constantes em 1743. Fez contribuições importantes em equações diferenciais parciais no estudo da equação de onda.

J. FOURIER (1768 – 1830) matemático francês que desenvolveu o problema de uma função ser representada por uma série trigonométrica chamada série de Fourier. Desenvolveu estudos sobre a análise harmônica com a dedução da equação do calor, escreveu a solução da equação do calor como uma série trigonométrica.

No século XIX as equações diferenciais parciais começaram a ser estudadas intensamente, à medida que se tornava claro o seu papel crucial em física matemática.

CONSTANTINE DAFERMOS (1948- ) matemático grego que trabalha na interface da mecânica do contínuo e a teoria das equações diferenciais parciais, nos últimos anos a sua pesquisa esta focalizada em sistemas hiperbólicos não lineares de leis de conservação, cujas soluções desenvolvem espontaneamente singularidades que se propagam como ondas de choque. Também, seu interesse está concentrado nos resultados que surgem na interseção da termodinâmica e a análises desses sistemas e trabalha intensamente para

elucidar a importância da entropia como agente de estabilização. Foi uns dos primeiros matemáticos que estudou os sistemas termoelásticos clássicos, ver, Dafermos (1968) [6]

## 2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS (EDP's)

Neste capítulo, pretende-se estudar as equações diferenciais parciais que são assim chamadas, pois envolvem as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes com relação a duas ou mais variáveis independentes. Por exemplo

$$\partial_t^2 u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t) - \partial_t u(x, t) \quad (2.1)$$

onde  $x$  e  $t$  na equação (2.1) são as variáveis independentes, enquanto  $u(x, t)$  a variável dependente.

Toda equação diferencial parcial possui uma ordem, que é estabelecida pela maior ordem da derivada da função dependente. Por exemplo,

$$\partial_t u(x, t) - \alpha^2 \partial_x^2 u(x, t) = 0 \quad (2.2)$$

A equação (2.2) conhecida como equação unidimensional do calor que descreve a condução do calor em corpos sólidos é uma equação diferencial parcial de segunda ordem.

As equações diferenciais também são classificadas como lineares e não-lineares. Uma EDP linear é caracterizada pelo fato de que a variável dependente e suas derivadas estão no primeiro grau, e também por não ocorrer produto entre a variável dependente e suas derivadas. Por exemplo,

$$\partial_t^2 u(x, t) - a^2 \partial_x^2 u(x, t) = 0 \quad (2.3)$$

A equação (2.3), mais conhecida como equação unidimensional da onda, descreve movimentos ondulatórios em sólidos ou fluídos, é uma EDP linear.

As EDP's lineares também podem ser classificadas como homogênea e não-homogênea. A EDP homogênea é caracterizada pelo fato de que cada termo da equação deve conter a variável dependente ou suas derivadas parciais.

## 2.1 SOLUÇÃO DE UMA EDP LINEAR

Define-se como solução geral de uma EDP linear uma solução da mesma que contenha funções arbitrárias formando assim um conjunto de todas as soluções particulares da equação.

Por exemplo, considere a função

$$u(x, y) = f(xy) \quad (2.4)$$

onde  $f(xy)$  é uma função arbitrária de  $xy$ . Derivando  $u(x, y)$  com relação a  $x$  assim

$$\partial_x u(x, y) = f'(xy)y \quad (2.5)$$

Agora com relação a  $y$ , logo:

$$\partial_y u(x, y) = f'(xy)x \quad (2.6)$$

Somando as equações (2.5) e (2.6), assim sendo temos

$$\partial_x u(x, y) + \partial_y u(x, y) = f'(xy)(x + y) \quad (2.7)$$

Da equação (2.6) vem,

$$f'(xy) = \frac{\partial_y u(x, y)}{x} \quad (2.8)$$

Substituindo a equação (2.8) na equação (2.7) vem:

$$x\partial_x u(x, y) = y\partial_y u(x, y) \quad (2.9)$$

A equação (2.9) é uma EDP que tem como solução geral a função

$$u(x, y) = f(xy)$$

Se  $u_1, u_2, \dots, u_n$  forem  $n$  soluções de uma EDP linear homogênea, então uma combinação linear destas soluções dada como a função  $u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n$  onde  $c_1, c_2, \dots, c_n$  são constantes arbitrárias, também é solução da mesma EDP. Este resultado é chamado de Princípio de Superposição.

## 2.2 OUTRA CLASSIFICAÇÃO

Algumas leis físicas em formas de equações diferenciais parciais em duas variáveis independentes formam casos especiais de equações diferenciais lineares homogêneas de segunda ordem, onde o caso geral é:

$$a\partial_x^2 u(x, y) + 2h\partial_{xy}^2 u(x, y) + b\partial_y^2 u(x, y) + 2f\partial_x u(x, y) + 2g\partial_y u(x, y) + eu(x, y) = 0 \quad (2.10)$$

onde  $a, b, e, f, g, h$  são constantes ou funções de  $x$  e  $y$ .



Observando a equação (2.10) percebe-se que ela se parece com a equação geral das cônicas,

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + e = 0 \quad (2.11)$$

de onde vem,

$$\begin{cases} ab - h^2 > 0, \text{ elipse} \\ ab - h^2 = 0, \text{ parábola} \\ ab - h^2 < 0, \text{ hipérbole} \end{cases}$$

E pela semelhança da relação (2.11) à equação diferencial (2.10) será classificada em,

$$\begin{cases} \text{elíptica, quando } ab - h^2 > 0 \\ \text{parabólica, quando } ab - h^2 = 0 \\ \text{hiperbólica, quando } ab - h^2 < 0 \end{cases}$$

### 2.3 CONDIÇÕES DE FRONTEIRA

As equações diferenciais parciais devem satisfazer certas exigências conhecidas como condições de fronteira. Uma EDP e um conjunto de condições de fronteiras podem representar um fenômeno físico, se este tiver solução única.

Seja a equação diferencial dada por

$$y\partial_y u(x,y) = x\partial_x u(x,y)$$

Procura-se uma solução da equação diferencial parcial anterior, que satisfaça as seguintes condições de fronteiras

$$u(x,0) = 1, u(0,y) = 1$$

$$\partial_x u(0,y) = 0$$

verifica-se que  $u(x,y) = \cos(x \cdot y)$  satisfaz a equação e as condições de fronteiras.

As condições de fronteiras devem fazer com que as EDP's tenham soluções únicas e estáveis. Tais condições aparecem em estudos de fenômenos físicos.

Um exemplo são as condições de Cauchy, onde uma das variáveis independentes é a variável  $t$  (tempo) e são conhecidos os valores de  $u(x,t)$  e de sua derivada no tempo  $\partial_t u(x,t)$  para  $t = 0$ .

## 2.4 AUTOVALORES E AUTOFUNÇÕES

Os autovalores são os valores que colocados na equação diferencial faz com que ela apresente soluções não-triviais. As soluções não-triviais são chamadas de autofunções. Os autovalores aparecem no estudo de fenômenos físicos como a solução da equação do calor e na solução da equação da onda.

Por exemplo, seja o problema dado pelas seguintes relações,

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0 \quad (2.12)$$

Este problema é de grande importância pela sua aplicação na resolução da equação da onda e do calor.

Para resolver o problema (2.12) deve-se considerar os casos em que  $\lambda < 0$ ,  $\lambda = 0$  e  $\lambda > 0$ . Sendo  $\lambda < 0$  e fazendo  $\lambda = -\mu^2$ , vem

$$y'' - \mu^2 y = 0 \quad (2.13)$$

Onde  $y = e^{rx}$ ,  $y' = r e^{rx}$  e  $y'' = r^2 e^{rx}$ , então  $r^2 - \mu^2 = 0$  é o polinômio característico da equação (2.13), onde  $r = \mu$  ou  $r = -\mu$ . A solução geral para a equação (2.13) pode ser escrita como:

$$y = c_1 \cos(h\mu x) + c_2 \operatorname{sen}(h\mu x) \quad (2.14)$$

Aplicando as condições de contorno, vem  $c_1 = 0$  e  $c_2 = 0$ . Logo a única solução é  $y = 0$ . Sendo  $\lambda = 0$ , então  $y'' = 0$ , com solução geral dada por  $y = c_3 x + c_4$ , e pelas condições de contorno vem que  $c_3 = 0$  e  $c_4 = 0$ . Assim a única solução é  $y = 0$ .

Sendo  $\lambda > 0$  e fazendo  $\lambda = \mu^2$ , vem:

$$y'' + \mu^2 y = 0 \quad (2.15)$$

onde  $r^2 + \mu^2 = 0$  é o polinômio característico da equação (2.15). Logo,  $r = \mu i$  ou  $r = -\mu i$ . A solução geral é da forma:

$$y = A \cdot \cos(\mu x) + B \cdot \operatorname{sen}(\mu x) \quad (2.16)$$

Onde A e B são constantes arbitrárias. Para satisfazer as condições de fronteira, vem que:

$$A = 0 \quad \text{e} \quad B \operatorname{sen}(\mu L) = 0 \quad (2.17)$$

Da equação (2.17) segue que B é não nulo que:

$$\begin{aligned} \mu L &= n\pi \\ \mu &= \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Portanto os autovalores e as autofunções são da forma:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad \text{e} \quad y_n = B \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{respectivamente.} \quad (2.18)$$

### 3. SÉRIES DE FOURIER

#### 3.1. FUNÇÕES PERIÓDICAS

Uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita periódica de período  $T$  se  $f(x + T) = f(x)$ . As funções  $f(x) = \cos x$  e  $f(x) = \sin x$  são periódicas de período  $2\pi$ . Pretende-se determinar o período da função  $f(x) = \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ .

Sabendo que  $f(x + T) = f(x)$ , então devemos verificar

$$\cos\left[\frac{m\pi(x + T)}{L}\right] = \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

$$\cos\left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{m\pi T}{L}\right) = \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \text{ sendo } y = \frac{m\pi x}{L}, \text{ então}$$

$$\cos\cos\left(y + \frac{m\pi T}{L}\right) = \cos(y)$$

$$\text{Assim } \frac{m\pi T}{L} = 2\pi, \text{ pois } \cos y \text{ tem período } 2\pi. \text{ Logo } T = \frac{2L}{m}$$

Se  $T$  é o período da função  $f(x)$  então qualquer  $nT$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ , também é período de  $f(x)$ , onde o menor período positivo é chamado de período fundamental. Assim  $T = 2L$  é o período fundamental para  $f(x) = \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ .

#### 3.2. ORTOGONALIDADE DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO

As funções  $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$  e  $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$  com  $m = 1, 2, 3, \dots$ , formam um conjunto ortogonal de funções no intervalo  $[-L, L]$ . Elas satisfazem as relações de ortogonalidade:

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, \forall m, n \quad (3.2)$$

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n \end{cases} \quad (3.3)$$

Verifica-se cada uma das propriedades anteriores utilizando propriedades trigonométricas e integração por partes.

### 3.3. COEFICIENTES DE FOURIER

Considere a série trigonométrica dada pela seguinte expressão,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (3.4)$$

Supõe-se que a série (3.4) converge e seja a soma  $f(x)$ , então:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [a_m \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)] \quad (3.5)$$

Pode-se determinar uma relação entre os coeficientes  $a_m$ ,  $b_m$  e  $f(x)$ . Para isso multiplica-se a equação (3.5) por  $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ , onde  $n$  é inteiro positivo fixo, e aplica-se a integral em relação a  $x$  de  $-L$  a  $L$

$$\int_{-L}^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (3.6)$$

Pelas relações de ortogonalidade (3.1) e (3.2) segue que o termo não nulo na equação (3.6) é o termo onde  $m = n$  no primeiro somatório. Assim

$$\int_{-L}^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = a_n \cdot L$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

Para o cálculo de  $b_n$  usa-se um procedimento análogo, porém multiplica-se a equação (3.5) por  $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  e aplica-se a integral de  $-L$  a  $L$ . Assim encontra-se a equação:

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.8)$$

### 3.4. SÉRIES DE FOURIER

**Teorema de Fourier:** Seja  $f$  uma função periódica de período  $2L$ . Se  $f$  e  $f'$  são ambas contínuas por seções em  $[-L, L]$ , então  $f$  é representada pela série (3.4), sendo os coeficientes  $a_m$  e  $b_m$  calculados pelas fórmulas (3.7) e (3.8) respectivamente, com o seguinte sentido de convergência:

- A série converge para  $f(x)$  em cada ponto  $x \in (-L, L)$  em que  $f$  é contínua.
- A série converge para  $\frac{1}{2}[\lim_{k \rightarrow x^-} f(k) + \lim_{k \rightarrow x^+} f(k)]$  em cada ponto  $x \in (-L, L)$  em que  $f$  é descontínua.
- A série converge para  $\frac{1}{2}[\lim_{k \rightarrow x^-} f(k) + \lim_{k \rightarrow x^+} f(k)]$  em cada extremo:  $-L$  e  $L$

Suponha-se que existe uma série de Fourier convergindo para a função  $f$  definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -2 \leq x \leq 0, \\ 1 & 0 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad (3.9)$$

$$f(x+4) = f(x)$$

Pretende-se determinar a série de Fourier convergindo para a função  $f(x)$ .

A função  $f(x)$  é periódica de período  $T = 4$ , então  $L = 2$  e a série de Fourier tem a forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [a_m \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right) + b_m \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{2}\right)] \quad (3.10)$$

Cálculo de  $a_0$  com  $m = 0$ .  $a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (-1) dx + \frac{1}{2} \int_0^2 1 dx$

$$a_0 = \frac{-x}{2} \Big|_{-2}^0 + \frac{x}{2} \Big|_0^2 = 1 - 1 = 0 \quad (3.11)$$

Cálculo de  $a_m = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 -\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right) dx + \frac{1}{2} \int_0^2 \cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right) dx$

$$a_m = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{-2}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi x}{2}\right) \right) \right] \Big|_{-2}^0 + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{2}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi x}{2}\right) \right) \right] \Big|_0^2$$

$$a_m = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 \Rightarrow a_m = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.12)$$

Cálculo do coeficiente  $b_m$

$$b_m = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 -\sin\left(\frac{m\pi x}{2}\right) dx + \frac{1}{2} \int_0^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{2}\right) dx$$

$$b_m = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{2}{m\pi} \cos \left( \frac{m\pi x}{2} \right) \right) \right] \Bigg|_{-2}^0 + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{-2}{m\pi} \cos \left( \frac{m\pi x}{2} \right) \right) \right] \Bigg|_0^2$$

$$b_m = \frac{2}{m\pi} - \frac{2}{m\pi} \cos(m\pi)$$

$$b_m = \frac{2}{m\pi} (1 - \cos(m\pi))$$

$$b_m = \begin{cases} 0, & m \text{ par} \\ \frac{4}{m\pi}, & m \text{ ímpar} \end{cases} \quad (3.13)$$

Substituindo-se os coeficientes  $a_m$  e  $b_m$  encontrados nas expressões (3.12) e (3.13) na série (3.10) encontra-se  $f(x) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[ \frac{4}{m\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{2} \right) \right]$ .

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\operatorname{sen}(2n-1)\pi x/2}{(2n-1)} \right] \quad (3.14)$$

#### 4. MÉTODO DE FOURIER

O método de Fourier é um dos métodos de resolução de EDP's, ele consiste na combinação do princípio da superposição com o método de separação de variáveis, que assume que a variável dependente é igual ao produto de duas funções, cada uma dependendo apenas de uma das variáveis independentes.

Para entender melhor o método, considera-se o seguinte problema:

$$\partial_x^2 u(x, t) = \frac{1}{a^2} \partial_t^2 u(x, t) \quad (4.1)$$

A EDP (4.1) é conhecida como equação unidimensional da onda. Seja as condições de fronteiras de Dirichlet

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(L, t) &= 0, & t \geq 0; \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq L; \\ \partial_t u(x, 0) &= g(x) & 0 \leq x \leq L; \end{aligned} \quad (4.2)$$

Onde  $f$  e  $g$  são funções dadas, e  $L$  uma constante dada. Admite-se uma solução separável da forma:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t) \quad (4.3)$$

Onde  $X$  é função de  $x$  e  $T$  é função de  $t$ , então a equação (4.1) fica da forma:

$$\partial_x^2 X \cdot T = \frac{1}{a^2} \partial_t^2 T \cdot X$$

$$T \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{a^2} X \frac{d^2 T}{dT^2}$$

fazendo  $\frac{d^2 X}{dx^2} = X''$  e  $\frac{d^2 T}{dT^2} = T''$ , logo:

$$TX'' = \frac{1}{a^2} XT''$$

Dividindo-se os dois lados da equação por  $X \cdot T \neq 0$ , logo:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T}$$

Para que essa igualdade seja verdadeira é necessário que:

$$\frac{T''}{Ta^2} = \lambda \text{ e } \frac{X''}{X} = \lambda,$$

Onde  $\lambda$  é uma constante de separação. Assim tem-se:

$$T'' - \lambda a^2 T = 0 \quad (4.4)$$

$$X'' - \lambda X = 0 \quad (4.5)$$

As equações (4.4) e (4.5) são EDO's lineares de segunda ordem. O candidato a solução da equação diferencial deve ser,  $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ , e deve satisfazer as condições de fronteira  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ , então:

$$u(0, t) = X(0) \cdot T(t) \quad \forall t,$$

$$u(L, t) = X(L) \cdot T(t) \quad \forall t,$$

pretende-se evitar a solução trivial, portanto  $T(t) \neq 0$ . Assim  $X(0) = X(L) = 0$  (4.6)

Agora resolve-se a equação (4.5) que consiste no problema de autovalores estudado na seção (2.4).

Sendo  $\lambda < 0$  e fazendo  $\lambda = -\mu^2$ , encontra-se a solução geral  $X = c_1 \cdot \cos(\mu x) + c_2 \cdot \sin(\mu x)$ . Aplicando as condições de contorno (4.6), logo  $c_1 = 0$  e  $c_2 \cdot \sin(\mu L) = 0$ , portanto os autovalores são da forma:

$$\lambda_n = - \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.7)$$

E as autofunções são da forma:

$$X_n = c_n \cdot \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.8)$$

Verifica-se que quando  $\lambda = 0$  e  $\lambda > 0$  não existem autovalores e autofunções. Agora resolve-se a EDO (4.4), substituindo o valor de  $\lambda$  encontrado na expressão (4.7), Logo:

$$T'' + \left( \frac{an\pi}{L} \right)^2 \cdot T = 0,$$

sendo  $T(t) = e^{rt}$ ,  $T' = re^{rt}$  e  $T'' = r^2 e^{rt}$ , assim o polinômio característico é  $r^2 + \left( \frac{an\pi}{L} \right)^2 = 0$ , de onde vem,  $r_1 = \frac{an\pi}{L} i$  e  $r_2 = -\frac{an\pi}{L} i$ , a solução geral é dada por:

$$T(t) = d_1 \cdot \cos\left(\frac{an\pi t}{L}\right) + d_2 \cdot \text{sen}\left(\frac{an\pi t}{L}\right) \quad (4.9)$$

Onde  $d_1$  e  $d_2$  são constantes arbitrárias.

Substituindo-se os valores encontrados nas expressões (4.8) e (4.9) na equação (4.3), obtém-se:

$$u(x,t) = c_2 \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \left[ d_1 \cos\left(\frac{an\pi t}{L}\right) + d_2 \text{sen}\left(\frac{an\pi t}{L}\right) \right]$$

$$u(x,t) = \left[ d_1 c_2 \cos\left(\frac{an\pi t}{L}\right) + d_2 c_2 \text{sen}\left(\frac{an\pi t}{L}\right) \right] \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

sendo  $d_1 c_2 = a_n$  e  $d_2 c_2 = b_n$ , então

$$u_n(x,t) = \left[ a_n \cos\left(\frac{an\pi t}{L}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{an\pi t}{L}\right) \right] \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\text{sendo } n = 1, u_1(x,t) = \left[ a_1 \cos\left(\frac{\pi at}{L}\right) + b_1 \text{sen}\left(\frac{\pi at}{L}\right) \right] \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$n = 2, u_2(x,t) = \left[ a_2 \cos\left(\frac{2\pi at}{L}\right) + b_2 \text{sen}\left(\frac{2\pi at}{L}\right) \right] \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

$$n = k, u_k(x,t) = \left[ a_k \cos\left(\frac{k\pi at}{L}\right) + b_k \text{sen}\left(\frac{k\pi at}{L}\right) \right] \cdot \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

Onde as constantes  $a_1, a_2, \dots, a_k$  e  $b_1, b_2, \dots, b_k$  são constantes arbitrárias. Fazendo  $k \rightarrow \infty$  e somando membro a membro os valores encontrados para  $u_n(x,t)$ , então

$$u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \right] \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (4.10)$$

onde  $a_n$  e  $b_n$  são os coeficientes de Fourier. A equação (4.10) é a solução geral da equação (4.1) satisfazendo as condições de fronteira  $u(0,t) = u(L,t) = 0, t \geq 0$ . Agora verifica-se as condições

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

$$\partial_t u(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

Estas condições determinam as constantes arbitrárias  $a_n$  e  $b_n$ .

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi a 0}{L}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi a 0}{L}\right) \right] \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos 0 + b_n \text{sen} 0] \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x) \quad (4.11)$$

Para o cálculo de  $a_n$  multiplica-se a equação (4.11) por  $\text{sen}\left(\frac{s\pi x}{L}\right)$  e aplica-se a integral em relação a  $x$  de 0 a  $L$ , então

$$\int_0^L f(x) \cdot \text{sen}\left(\frac{s\pi x}{L}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{s\pi x}{L}\right) dx, \text{ Calcula-se o número fixo}$$

$$\int_0^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{s\pi x}{L}\right) dx \text{ se } n \neq s$$



$$\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{s\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^L \cos\left[\frac{(n-s)\pi x}{L}\right] dx - \frac{1}{2} \int_0^L \cos\left[\frac{(n+s)\pi x}{L}\right] dx$$

$$\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{s\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2(n-s)\pi} \operatorname{sen}\left[\frac{(n-s)\pi x}{L}\right] \Bigg|_0^L - \frac{L}{2(n+s)\pi} \operatorname{sen}\left[\frac{(n+s)\pi x}{L}\right] \Bigg|_0^L$$

$$\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{s\pi x}{L}\right) dx = 0, \text{ se } n \neq s.$$

Para o caso em que temos  $n = s$ , então:

$$\int_0^L \left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right] dx$$

$$\int_0^L \left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L dx - \frac{1}{2} \int_0^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx$$

$$\int_0^L \left[\operatorname{sen}\left(\frac{Ln\pi x}{L}\right)\right]^2 dx = \frac{x}{2} \Bigg|_0^L - \frac{L}{2n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \Bigg|_0^L$$

$$\int_0^L \left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]^2 dx = \frac{L}{2} - 0$$

$$\int_0^L \left[\operatorname{sen}\left(\frac{Ln\pi x}{L}\right)\right]^2 dx = \frac{L}{2}, \text{ se } n = s.$$

Portanto,

$$\int_0^L f(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = a_n \frac{L}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (4.12)$$

Para determinar  $b_n$  utiliza-se a última condição de fronteira  $\partial_t u(x, 0) = g(x)$ .

Antes, deriva-se a equação (4.10) com relação a  $t$  e aplica-se  $t = 0$ . Assim vem

$$\partial_t u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -a_n \frac{n\pi a}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a t}{L}\right) + b_n \frac{n\pi a}{L} \cos\left(\frac{n\pi a t}{L}\right) \right] \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Substituindo-se  $t = 0$ , vem

$$\partial_t u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -a_n \frac{n\pi a}{L} \operatorname{sen} 0 + b_n \frac{n\pi a}{L} \cos 0 \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\partial_t u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi a}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi a}{L} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (4.13)$$

Para o cálculo de  $b_n$  multiplica-se a equação (4.13) por  $\operatorname{sen} \left( \frac{s\pi x}{L} \right)$  e depois aplica-se a integral em relação a  $x$  de 0 a  $L$ , então

$$\int_0^L g(x) \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{s\pi x}{L} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi a}{L} \cdot \int_0^L \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{s\pi x}{L} \right) dx.$$

Sabe-se que

$$\int_0^L \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{s\pi x}{L} \right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq s \\ \frac{L}{2}, & \text{se } n = s. \end{cases}$$

Logo,

$$\int_0^L g(x) \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx = b_n \frac{n\pi a}{L} \cdot \frac{L}{2}$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi a} \cdot \int_0^L g(x) \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx. \quad (4.14)$$

Portanto, a solução para a equação (4.1) satisfazendo as condições (4.2) é dada pela equação (4.10) com os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  calculados pelas equações (4.12) e (4.14) respectivamente.

## 5. ANÁLISE DAS EQUAÇÕES DA ONDA E DO CALOR

### 5.1 CONDUÇÃO DE CALOR EM UMA BARRA

O estudo matemático de condução do calor começou em torno de 1800 pelo matemático J. Fourier que estabeleceu a partir de princípios físicos a equação geral que devia satisfazer a temperatura  $u(x,t)$ .

Seja o problema da equação de calor:

$$u \in C^2 [(0, L) \times (0, +\infty)] \subset [[0, L] \times [0, +\infty]]$$

$$\alpha^2 \partial_x^2 u = \partial_t u, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (5.1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

onde  $\alpha^2$  é uma constante de difusividade térmica

$u(x,t)$

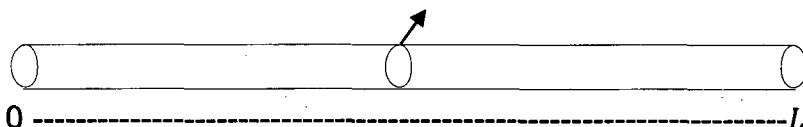


Figura 5.1.1. Uma barra sólida condutora de calor.

Este problema descreve a variação de temperatura ao longo do fio de comprimento  $L$ . Supondo-se que em cada secção perpendicular do fio a temperatura é constante.

A condição de contorno  $u(0,t) = u(L,t) = 0$ , indica que a temperatura nos extremos é nula. A condição inicial  $u(x,0) = f(x)$  descreve a temperatura em cada ponto  $x \in [0, L]$  no instante  $t$ . Para resolver o problema (5.1) aplica-se o método de Fourier. Admite-se uma solução separável da forma:

$$u(x, t) = X(x).T(t) \quad (5.2)$$

onde  $X$  é função de  $x$  e  $T$  é função de  $t$ . Assim tem-se  $\alpha^2 \partial_x^2 X T = \partial_t T X$ . dividindo-se por  $X.T \neq 0$ , vem

$$\alpha^2 \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{T} \frac{dT}{dt}$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{\alpha^2 T}$$

Para que a igualdade seja verdadeira é necessário que  $\frac{X''}{X} = \lambda$  e  $\frac{T'}{\alpha^2 T} = \lambda$ , onde  $\lambda$  é uma constante de separação. Então tem-se duas EDO's,

$$X'' - \lambda X = 0 \quad (5.3)$$

$$T' - \lambda \alpha^2 T = 0 \quad (5.4)$$

A equação (5.2) deve satisfazer as condições de fronteira

$$u(0,t) = X(0).T(t) = 0, \quad \forall t$$

$$u(L,t) = X(L).T(t) = 0, \quad \forall t$$

Para evitar a solução trivial  $T(t) \neq 0$ , então

$$X(0) = X(L) = 0 \quad (5.5)$$

Os autovalores e as autofunções da equação (5.3) são os mesmos da equação.

(4.5) de onde obtém-se

$$\lambda_n = - \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$X_n = c_n \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Substitui-se o valor de  $\lambda$  na equação (5.4), então

$$T' + \left( \frac{n\pi\alpha}{L} \right)^2 . T = 0$$

sendo  $T = e^{kt}$  e  $T' = ke^{kt}$ , logo

$$ke^{kt} + \left( \frac{n\pi\alpha}{L} \right)^2 . e^{kt} = 0$$

$$k = - \left( \frac{n\pi\alpha}{L} \right)^2$$

$$\text{Logo, } T_n(t) = D \cdot e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{L}\right)^2 t}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.6)$$

Onde  $D$  é uma constante de integração.

Agora substituindo-se os valores obtidos para  $X(x)$  e  $T(t)$  na equação (5.2) obtém-se:

$$u(x, t) = D e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{L}\right)^2 t} \cdot c_n \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Seja  $D \cdot c_n = B_n$ , então

$$u_n(x, t) = B_n \cdot e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{L}\right)^2 t} \cdot \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right)$$

$$n = 1, u_1(x, t) = B_1 e^{-\left(\frac{\pi\alpha}{L}\right)^2 t} \text{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right)$$

$$n = 2, u_2(x, t) = B_2 e^{-\left(\frac{2\pi\alpha}{L}\right)^2 t} \text{sen} \left( \frac{2\pi x}{L} \right)$$

$$n = p, u_p(x, t) = B_p e^{-\left(\frac{p\pi\alpha}{L}\right)^2 t} \text{sen} \left( \frac{p\pi x}{L} \right).$$

Onde as constantes  $B_1, B_2, \dots, B_p$  são arbitrárias. Somando-se todos os valores obtidos quando  $p \rightarrow \infty$  para  $u(x, t)$ , tem-se

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{L}\right)^2 t} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (5.7)$$

Para satisfazer a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ , vem

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{L}\right)^2 \cdot 0} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right)$$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^0 \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right)$$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (5.8)$$

O cálculo de  $B_n$  é semelhante ao procedimento utilizado no capítulo 4 de onde obtém-se como resultado a equação (4.12), portanto,

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx. \quad (5.9)$$

Substituindo-se o valor de  $B_n$  na equação (5.7), encontra-se

$$u(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^L f(s) \text{sen} \left( \frac{n\pi s}{L} \right) ds \right] \cdot \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \cdot e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{L}\right)^2 t}. \quad (5.10)$$

onde  $s$  é variável de integração e  $x$  é a variável independente. A equação (5.10) descreve a variação de temperatura ao longo do fio de comprimento  $L$  satisfazendo as condições iniciais e de contorno do problema (5.1).

## 5.2. VIBRAÇÕES DE UMA CORDA ELÁSTICA

O problema da corda vibrante foi um dos principais problemas matemáticos do século XVIII. A equação da onda foi estudada por D'Alembert em 1746, atraiu a atenção de Euler (1748) e Daniel Bernoulli (1753).

O modelo matemático das vibrações de uma corda elástica de comprimento  $L$ , que está fixa nas extremidades é a EDP (5.11) conhecida como equação unidimensional da onda.

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0 \quad (5.11)$$

Onde  $a$  é a velocidade de propagação das ondas ao longo da corda.

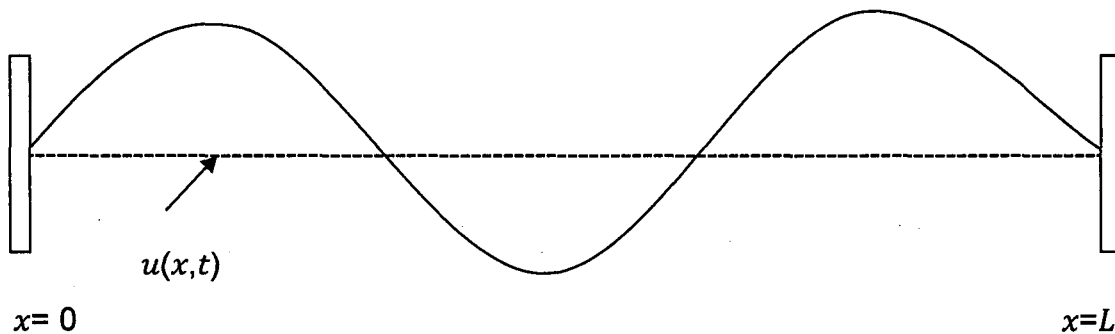


Figura 5.2.1 Uma corda vibrante

A incógnita  $u(x,t)$  que depende do espaço  $x$  e do tempo  $t$ , descreve o deslocamento vertical da corda no ponto  $x$  no instante  $t$ . Como os extremos estão fixos as condições de contorno são

$$u(0,t) = 0 \text{ e } u(L,t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (5.12)$$

E as condições iniciais são

$$u(x,0) = f(x) \text{ e } \partial_t u(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L \quad (5.13)$$

Onde  $f(x)$  é uma função dada que descreve a posição inicial da corda em  $t = 0$ .

Admite-se como solução separável da equação (5.11) a equação (5.14).

$$u(x,t) = X(x).T(t). \quad (5.14)$$

onde  $X$  depende de  $x$  e  $T$  depende de  $t$ . Logo

$$a^2 X'' T = T'' X$$

dividindo-se a equação por  $X \cdot T \neq 0$ , vem

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T}$$

Para que essa igualdade seja verdadeira é necessário que

$$\frac{X''}{X} = \lambda \quad e \quad \frac{T''}{a^2 T} = \lambda$$

Onde  $\lambda$  é uma constante de separação. Assim obtém-se duas EDO's.

$$X'' - \lambda X = 0 \tag{5.15}$$

$$T'' - \lambda a^2 T = 0. \tag{5.16}$$

A equação (5.14) deve satisfazer as condições de contorno (5.12), então

$$u(0, t) = X(0) \cdot T(t) = 0, \quad \forall t$$

$$u(L, t) = X(L) \cdot T(t) = 0, \quad \forall t$$

Evita-se a solução trivial fazendo  $T(t) \neq 0$ , assim

$$X(0) = X(L) = 0, \quad \forall t \tag{5.17}$$

Os autovalores e as autofunções da equação (5.15) são as expressões (4.7) e (4.8) respectivamente, logo.

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$X_n = c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Substitui-se o valor de  $\lambda$  na equação (5.16), então

$$T'' + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 a^2 T = 0$$

Seja  $T = e^{rt}$ ,  $T' = r e^{rt}$  e  $T'' = r^2 e^{rt}$ , logo

$$r^2 e^{rt} + \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 \cdot e^{rt} = 0, \quad r^2 + \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 = 0 \quad e \quad \text{portanto } r = \pm \left(\frac{n\pi a}{L}\right) i$$

Onde a solução geral é da forma

$$T(t) = D_n \cos\left(\frac{n\pi a t}{L}\right) + P_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a t}{L}\right)$$

Sendo  $D_n$  e  $P_n$  constantes de integração.

Substituindo-se os valores de  $X$  e  $T$  na equação (5.14), vem

$$u(x, t) = \left[ D_n \cos\left(\frac{n\pi a t}{L}\right) + P_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a t}{L}\right) \right] \cdot c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$u(x, t) = \left[ D_n c_n \cos\left(\frac{n\pi a t}{L}\right) + P_n c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a t}{L}\right) \right] \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Sendo  $A_n = D_n \cdot c_n$  e  $B_n = P_n \cdot c_n$ , então

$$u_n(x, t) = \left[ A_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$n = 1, u_1(x, t) = \left[ A_1 \cos\left(\frac{\pi at}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\pi at}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$n = 2, u_2(x, t) = \left[ A_2 \cos\left(\frac{2\pi at}{L}\right) + B_2 \sin\left(\frac{2\pi at}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

$$n = k, u_k(x, t) = \left[ A_k \cos\left(\frac{k\pi at}{L}\right) + B_k \sin\left(\frac{k\pi at}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right).$$

Somando-se todos os valores obtidos quando  $k \rightarrow \infty$  para  $u(x, t)$ , logo

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (5.18)$$

A equação (5.18) deve satisfazer as condições (5.13), então pela condição  $u(x, 0) = f(x)$ , vem

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos\left(\frac{n\pi a 0}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi a 0}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos 0 + B_n \sin 0] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Pelos estudos desenvolvidos sobre séries de Fourier percebe-se que  $f(x)$  tem período  $2L$  e  $A_n$  é coeficiente da série, logo

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (5.19)$$

Pela condição inicial  $\partial_t u(x, 0) = 0$  determina-se  $B_n$

$$\partial_t u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -A_n \frac{n\pi a}{L} \sin\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + B_n \frac{n\pi a}{L} \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\partial_t u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -A_n \frac{n\pi a}{L} \sin\left(\frac{n\pi a 0}{L}\right) + B_n \frac{n\pi a}{L} \cos\left(\frac{n\pi a 0}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\partial_t u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0. \quad (5.20)$$

Para determinar  $B_n$  multiplica-se os dois membros da equação (5.20) por  $\sin\left(\frac{s\pi x}{L}\right)$  e aplica-se a integral em relação a  $x$  de  $0$  a  $L$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{s\pi x}{L}\right) dx = \int_0^L 0 \cdot \sin\left(\frac{s\pi x}{L}\right) dx.$$

$$B_n \frac{n\pi a}{L} \cdot \frac{L}{2} = \int_0^L 0 \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq s \\ \frac{L}{2}, & \text{se } n = s \end{cases}$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi a} \cdot \int_0^L 0 \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$B_n = 0 \quad (5.21)$$

Agora substitui-se os valores de  $A_n$  e  $B_n$  na equação (5.18), então

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{x\pi x}{L}\right) dx \cdot \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + 0 \cdot \sin\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{L} \int_0^L f(x') \cdot \sin\left(\frac{n\pi x'}{L}\right) dx' \right] \cdot \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (5.22)$$

onde  $x'$  é a variável de integração e  $x$  a variável independente.

Portanto, (5.22) é a solução da equação (5.11) satisfazendo as condições de contorno (5.12) e as condições iniciais (5.13).

## 6. INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS TERMOELÁSTICOS

A deformação de um corpo termoelástico que varia no tempo leva a uma mudança da distribuição de temperatura no corpo e reciprocamente. A energia interna do corpo depende da deformação e temperatura. O sistema termoelástico descreve o processo acoplado mencionado anteriormente. Em geral está constituído de uma equação elástica e uma equação do calor as quais são acopladas de uma forma que se considera a transferência da energia mecânica e a energia térmica, veja Nowacki (1986) [12].

A existência, regularidade e comportamento assintótico de sua solução foi estudada exhaustivamente para sistemas termoelásticos lineares e não lineares, pode-se conferir o estado da arte desses resultados consultando Racke (1996) [7] e poderá reparar muitas situações muito interessantes. Neste trabalho restringiremos nosso interesse unicamente para sistemas lineares.

As equações que descrevem uma barra termoelástica linear de um material homogêneo são,

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) + \alpha \partial_x \theta(x, t) &= 0, \quad [0, L] \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_t \theta(x, t) - \partial_x^2 \theta(x, t) + \beta \partial_x^2 u(x, t) &= 0, \quad [0, L] \times \mathbb{R}^+ \end{aligned} \quad (6.1)$$

onde a variável  $u(x, t)$  é o deslocamento e a outra variável  $\theta(x, t)$  representa a temperatura resultante a partir da temperatura de referência. Os coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$  são constantes.

As equações descrevendo uma placa termoelástica linear de um material homogêneo são dadas por,



$$\begin{aligned}\partial_t^2 w(x,t) - \Delta \partial_t^2 w(x,t) + \Delta^2 w(x,t) + \alpha \Delta \theta(x,t) &= 0, \quad \Omega \times \square^+ \\ \partial_t \theta(x,t) - \Delta \theta(x,t) + \theta(x,t) + \beta \Delta \partial_t w(x,t) &= 0, \quad \Omega \times \square^+\end{aligned}\quad (6.2)$$

onde  $\Omega \subset \square^2$  é um domínio limitado no plano com fronteira bem regular  $\Gamma = \partial\Omega$ , a variável  $w(x,t)$  representa a deflexão vertical e a outra variável  $\theta(x,t)$  representa a temperatura relativa sobre o estado de tensão livre,  $\theta \equiv 0$  e as constantes são representadas por  $\alpha, \beta$ .

Faz pouco tempo, se mostrou que a dissipação de calor sozinha era suficientemente forte para induzir um decaimento da energia dos dois tipos de sistemas mencionados anteriormente com muitos tipos de condições de fronteira. Em geral, as condições de fronteira de um sistema termoelástico, estão constituídas de condições de fronteira de estrutura e condições de fronteira de temperatura. Aqueles que foram considerados para o sistema (6.1) são os seguintes

- Condições de fronteira de estrutura

$$\begin{aligned}u(0,t) = u(L,t) &= 0, \quad \text{extremos fixos} \\ \partial_x u(0,t) - \alpha \theta(0,t) &= 0 \quad \text{extremo livre} \\ \partial_x u(L,t) - \alpha \theta(L,t) &= 0 \quad \text{extremo livre}\end{aligned}\quad (6.3)$$

- Condições de temperatura na fronteira,

$$\begin{aligned}\theta(0,t) = \theta(L,t) &= 0, \quad \text{temperatura nula} \\ \partial_x \theta(0,t) = \partial_x \theta(L,t) &= 0, \quad \text{fluxo de temperatura nulo}\end{aligned}\quad (6.4)$$

Podem ser considerados outros tipos de combinações das condições de fronteira acima mencionados em cada extremo da barra.

As condições de fronteira pesquisadas para o sistema (6.2) são os seguintes

- Condições de Fronteira de estrutura

$$\begin{aligned}w = \partial_\nu w &= 0, \quad \text{lados engastados} \\ w = \Delta w + (1 - \mu) B_1 w + \alpha \theta &= 0, \quad \text{lados suportados} \\ \Delta w + (1 - \mu) B_1 w + \alpha \theta &= 0, \quad \text{lados livres} \\ \partial_\nu \Delta w + (1 - \mu) \partial_t B_2 w - \partial_\nu \partial_x^2 w + \beta \partial_\nu \theta &= 0 \quad \text{lados livres}\end{aligned}\quad (6.5)$$

onde  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  é o vetor normal unitário exterior, a variável  $\mu$  é taxa de Poisson;  $B_1$  e  $B_2$  são operadores de fronteira definidos por definidas,

$$\begin{aligned}B_1 w &= 2\nu_1 \nu_2 \partial_x^2 w - \nu_1^2 \partial_y^2 w - \nu_2^2 \partial_x^2 w, \\ B_2 w &= (\nu_1^2 - \nu_2^2) \partial_{xy}^2 w + \nu_1 \nu_2 (\partial_x^2 w - \partial_y^2 w)\end{aligned}$$

- Condições de Fronteira de temperatura

$$\lambda_1 \partial_\nu \theta + \lambda_2 \theta = 0 \quad (6.6)$$

com  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ . Quando  $\lambda_1 = 0$  corresponde a temperatura nula; quando  $\lambda_2 = 0$  corresponde ao fluxo nulo; quando  $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$  corresponde a lei de esfriamento de Newton.

Seja  $\Omega \subset \square^n$  um domínio limitado com fronteira regular  $\Gamma = \partial\Omega$  de classe  $C^2$  e considere um corpo termoelástico homogêneo, isotrópico linear de dimensão  $n$  ocupando  $\Omega$  em seu estado não deformado. Para um ponto material com configuração  $x \in \square^n$  no tempo  $t$  considere  $u(x, t)$  e  $\theta(x, t)$  as variáveis que denotam o deslocamento e a desvio de temperatura do estado natural da configuração de referência. Então as variáveis  $u, \theta$  satisfazem as equações do sistema termoelástico

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div}(u) + \alpha \nabla \theta &= 0, \quad \text{em } \Omega \times \square^+ \\ \partial_t \theta - \Delta \theta + \beta \operatorname{div}(\partial_t u) &= 0, \quad \text{em } \Omega \times \square^+ \\ u(0) = u^0, \quad \partial_t u(0) = u^1, \quad \theta(0) = \theta^0, \quad \text{em } \Omega \end{aligned} \quad (6.7)$$

com ausência de forças externas e fontes de calor, onde  $\lambda, \mu > 0$  são chamadas de constantes de Lamé e  $\alpha, \beta > 0$  são parâmetros de acoplamento. Os símbolos  $\Delta, \nabla$  e  $\operatorname{div}$  denotam os operadores de Laplace, gradiente e divergência nas variáveis espaciais, respectivamente. As representações  $u(0), \partial_t u(0)$  e  $\theta(0)$  denotam funções  $u(x, 0), \partial_t u(x, 0)$  e  $\theta(x, 0)$  respectivamente.

## 7. A TEORIA DA TERMOELASTICIDADE LINEAR

A termoelasticidade é uma teoria que estuda o efeito do campo de temperatura sobre o campo de tensão e o efeito associado do campo de tensão sobre as condições térmicas num sólido elástico. Este estudo limita-se a sólidos perfeitamente elásticos submetidos a pequenas deformações e flutuações infinitesimais de temperatura. Estas suposições são suficientes para justificar a dedução termodinâmica da equação de estado de um sólido elástico.

As equações da termoelasticidade resultantes são lineares se a variação de algumas quantidades mecânicas e térmicas com a temperatura podem ser desprezadas. Observa-se que a deformação de um sólido perfeitamente elástico é um processo reversível, a difusão de calor acontece de forma irreversível de maneira que a dedução das equações de campo terá que ser baseada na teoria de processos irreversíveis.

O desenvolvimento de uma teoria termodinâmica irreversível fornece as ferramentas necessárias para estabelecer uma teoria própria da termoelasticidade. Assume-se que as constantes elásticas independem do tempo. Em geral em termoelasticidade as constantes elásticas dependem da posição do ponto  $x$  no corpo.

Quando as constantes elásticas não dependem da posição do ponto  $x$ , o corpo é chamado homogêneo. Quando as constantes elásticas mudam de um ponto a outro, o corpo é dito não-homogêneo.

Entende-se por elasticidade a capacidade do corpo para restabelecer sua configuração original depois que as forças que causam a deformação sejam retiradas. Mais precisamente, elasticidade é um estado do meio contínuo que é caracterizado pela relação um a um entre as componentes de tensão e deformação, sendo que uma deformação nula corresponde a uma tensão nula.

Um corpo é chamado isotrópico, se suas constantes elásticas não dependem da orientação dos eixos coordenados, ou em outras palavras, se as propriedades elásticas do corpo são as mesmas em todas as direções. Quando o corpo não é isotrópico é chamado de anisotrópico.

## 7.1. EQUAÇÕES BÁSICAS DA TERMOELASTICIDADE

Considera-se um sólido perfeitamente elástico, inicialmente não deformado, sem tensão e com temperatura uniforme  $T_0$ .

Considera-se as seguintes variáveis:

$T = T(x, t)$ , temperatura absoluta do corpo;

$u = (u_1, u_2, u_3)$ , campo de deslocamento, com componentes  $u_i = u_i(x, t)$ ;

$x = (x_1, x_2, x_3)$ , variável espacial;

$V = (V_1, V_2, V_3)$ , campo de velocidade com componentes  $V_i = V_i(x, t)$ ;

$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x, t)$ , componentes do tensor deformação;

$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x, t)$ , componentes do tensor tensão e

$\rho = \rho(x, t)$  densidade da massa do corpo.

Quando um sólido é deformado por meios mecânicos ou térmicos aparecem o campo de deslocamento  $u$  e o campo de temperatura não uniforme  $T$ . Estas mudanças implicam na criação de um campo de velocidade  $V$  e uma distribuição de tensão e deformação descritas pelos tensores  $\sigma_{ij}$  e  $\varepsilon_{ij}$  respectivamente ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

Seguindo a tal deformação do estado de equilíbrio, a energia é transferida de uma parte do sólido para outro por deformação elástica e por condução de calor, então a teoria termodinâmica de processos irreversíveis serve deduzir as equações diferenciais parciais que descrevem este fenômeno. Esta teoria é baseada em três leis de conservação e na segunda lei da termodinâmica.

1ª) A conservação da massa é expressa pela equação:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (7.1)$$

onde

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

é um operador de diferenciação total.

2ª) A conservação do movimento é expressa por três equações:

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho X_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad (i = 1,2,3) \quad (7.2)$$

onde  $(X_1, X_2, X_3)$  são as componentes das forças aplicadas em  $X$  no corpo por unidade de massa.

3ª) A conservação da energia é expressa pela equação:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( U + \frac{1}{2} v_i v_i \right) = \rho X_i v_i + \frac{\partial (v_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_j} + Q \quad (7.3)$$

onde  $U$  é a energia interna específica (por unidade de volume),  $Q$  é a razão com que o calor é gerado (por unidade de volume) por fontes internas ou externas e  $F = (F_1, F_2, F_3)$  o vetor fluxo de calor.

4ª) A segunda lei da Termodinâmica é expressa pela equação:

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \rho T \frac{DS}{Dt} + \sigma_{ij} \frac{D\varepsilon_{ij}}{Dt} \quad (7.4)$$

Onde  $S$  é a entropia específica do sistema. As equações (7.1), (7.2), (7.3) e (7.4) são o ponto de partida para a dedução das equações diferenciais parciais que governam o movimento de um sólido elástico conduzindo calor.

## 7.2. EQUAÇÕES DA TEORIA LINEAR

No caso linear os desvios do equilíbrio mecânico e térmico são ambos pequenos, de maneira que o máximo deslocamento é bem menor do que a amplitude efetiva da onda de perturbação, e outra exigência é

$$\text{MAX}|T - T_0| \ll T_0 \quad (7.5)$$

Isto é, o  $MAX|T - T_0|$  é uma pequena fração da temperatura de referência  $T_0$ . Sob estas exigências os produtos dos desvios de todas as quantidades físicas do estado de referência e suas derivadas espaciais podem ser consistentemente desprezadas. De maneira que o tensor de deformação infinitesimal é dado por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (7.6)$$

Também, o operador diferencial Total  $\frac{D}{Dt}$  pode ser substituído pelo operador simples  $\frac{\partial}{\partial t}$ .

Supõe-se que cada constante elástica e térmica nesta teoria linear não depende das variáveis de estado (deformação e temperatura). Assim as equações diferenciais parciais tornam-se lineares.

Portanto a equação (7.1) reduz-se a:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0,$$

onde  $\vartheta$  é a dilatação e denota-se  $\vartheta = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \varepsilon_{ii}$  e cuja solução é,  $\rho = \rho_0 e^{-\vartheta}$  com  $\rho_0$  denotando a densidade inicial uniforme do sólido. Como a dilatação  $\vartheta$  é pequena, então

$$\rho = \rho_0 (1 - \vartheta). \quad (7.7)$$

A equação (7.2) reduz-se a forma familiar:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho X_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

As equações da energia e entropia ficam da forma:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left( U + \frac{1}{2} V_i^2 \right) = \rho X_i V_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (V_i \sigma_{ij}) - \frac{\partial F_j}{\partial x_j} + Q$$

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} = \rho T \frac{\partial S}{\partial t} + \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}$$

Multiplicando (7.2) pela velocidade  $V_i$  e fazendo a diferença com (7.3) encontra-se:

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} = \sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} - \frac{\partial F_j}{\partial x_j} + Q$$

utilizando a simetria do tensor tensão, logo:

$$\sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}$$

então

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} = \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} - \frac{\partial F_j}{\partial x_j} + Q. \quad (7.8)$$

Colocando (7.4) no caso linear e substituindo em (7.8), encontra-se:

$$\rho T \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial F_j}{\partial x_j} + Q \quad (7.9)$$

Ou na forma alternativa,

$$\rho \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\frac{F_j}{T} \right) + \frac{Q}{T} - \frac{F_j}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_j}. \quad (7.10)$$

A relação (7.9) tem a forma da equação de balanço de entropia do sistema. Isto nos diz que a mudança de entropia é devido a divergência negativa de um fluxo, o fluxo de entropia, denotado por  $F_E = -\frac{F_j}{T}$  somada a uma fonte de entropia denotada:

$$\rho(S) = -\frac{F_j}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (7.11)$$

Esta fonte de entropia pode ser escrita como:

$$\rho(S) = F_j X_j, \quad (7.12)$$

Onde os fluxos  $F_j$  são dados em termos das forças termodinâmicas  $X_j$  pelas equações fenomenológicas:

$$F_j = L_{ij} X_j \quad (7.13)$$

Os coeficientes  $L_{ij}$  satisfazem as relações ONSAGER, isto é,  $L_{ij} = L_{ji}$ . Comparando estes resultados de (7.11) até (7.13), assim

$$X_j = -\frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

Então

$$F_j = -\frac{L_{ij}}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

onde  $L_{ij}$  é uma constante. A expressão anterior é chamada lei de Fourier. Neste texto interessa-se nos meios isotrópicos, então

$$F_j = -k \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (7.14)$$

onde  $k$  é a condutividade térmica. Substituindo-se (7.14) em (7.9) obtém-se:

$$\rho T \frac{\partial S}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} + Q \quad (7.15)$$

### 7.3. RELAÇÕES TERMODINÂMICAS

Nesta seção faz-se a dedução das relações que determinam as componentes de tensão  $\sigma_{ij}$  e a entropia  $S$  como funções do deslocamento  $u_i$  e a temperatura  $T$ . A equação de estado de um sólido relaciona os elementos  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  e  $T$ . Tal relação não pode ser deduzida por meios termodinâmicos, a menos que se utilize alguma hipótese adicional.

Como o corpo é perfeitamente elástico e a tensão depende unicamente das variáveis de estado  $\varepsilon_{ij}$  e  $T$ , não de suas derivadas com respeito ao tempo, a função termodinâmica associada com estas variáveis é a energia livre de HELMHOLTZ:

$$F(\varepsilon_{ij}, T) = U(\varepsilon_{ij}, T) - TS(\varepsilon_{ij}, T). \quad (7.16)$$

As funções  $U$ ,  $F$ , e  $S$  são funções de estado, isto é, seus incrementos perante a mudança do estado do corpo elástico são totalmente diferenciáveis. Estas funções são chamadas também de potenciais termodinâmicos.

Escrevendo na sua forma diferencial a equação de entropia, tem-se:

$$\rho dU - \rho T dS = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (7.17)$$

A equação (7.16) é equivalente a:  $dF = -SdT + \frac{\sigma_{ij}}{\rho} d\varepsilon_{ij}$ . Da relação diferencial total

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial F}{\partial T} dT$$

deduz-se imediatamente,

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (7.18)$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}. \quad (7.19)$$

Desenvolvendo-se a função energia livre em série de Taylor no entorno de  $(0, T_0)$ , em duas variáveis:

$$\begin{aligned} F(\varepsilon_{ij}, T) - F(0, T_0) &= \frac{\varepsilon}{\rho} ij A_{ij} + (T - T_0) \partial_T F(0, T_0) + \frac{\varepsilon}{2\rho} ij^{\varepsilon} kl B_{ijkl} \\ &+ \frac{1}{2} (T - T_0)^2 \partial_T^2 F(0, T_0) + \frac{1}{\rho} \varepsilon_{ij} (T - T_0) C_{ij} + \dots \end{aligned}$$

Utilizando-se (7.18) mostra-se que a equação que relaciona  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  e  $T$  é da forma:

$$\sigma_{ij} = A_{ij} + B_{ijkl} \varepsilon_{kl} + C_{ij} (T - T_0) + \dots,$$

onde,  $A_{ij} = \rho \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}(0, T_0)$ ,  $B_{ijkl} = \rho \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}$ ,  $C_{ij} = \rho \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T}$ .

Por hipótese tem-se que  $\sigma_{ij} = 0$  quando  $\varepsilon_{ij} = 0$  e  $T = T_0$ , então:

$$0 = A_{ij} + B_{ijkl}0 + C_{ij}0 + \dots \Rightarrow A_{ij} = 0$$

Além disso, podemos desprezar produtos de deformações e derivadas com respeito a temperatura das quantidades  $B_{ijkl}$  e  $C_{ij}$  assim os demais termos das séries de Taylor são nulos, usando propriedades de isotropia, o número de elementos independentes do tensor de quarta ordem  $B_{ijkl}$  reduz-se a dois, também  $C_{ij} = \left(\lambda + \frac{2}{3\mu}\right)\alpha\delta_{ij}$ .

Um tensor isotrópico de quarta ordem tem a representação:  $B_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu\delta_{ik}\delta_{jl}$ , onde  $\lambda$  e  $\mu$  são constantes de Lamé, isto é,  $\lambda = \frac{E\eta}{(1+\eta)(1-2\eta)}$  e  $\mu = \frac{E}{2(1+\eta)}$  logo a equação de estado sólido sob consideração é descrita por:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\eta}\varepsilon_{ij} + \frac{E\eta}{(1+\eta)(1-2\eta)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - \frac{E\alpha}{3(1-2\eta)}(T - T_0)\delta_{ij} \quad (7.20)$$

onde  $E$  e  $\eta$  são módulo de Young e razão de Poisson respectivamente, e o coeficiente de expansão térmica de volume é:  $\alpha = \frac{\partial\varepsilon_{kk}}{\partial T}$ . Da equação (7.17) obtém-se,

$$dS = \frac{1}{T}dU - \frac{1\alpha}{\rho T}ij\varepsilon_{ij}$$

Utilizando-se as equações diferenciais:

$$dU = \partial_T U dT + \frac{\partial U}{\partial\varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} \quad (7.21)$$

$$dS = \partial_T S dT + \frac{\partial S}{\partial\varepsilon_{ij}} \quad (7.22)$$

Obtém-se:

$$dS = \frac{1}{T}\partial_T U dT + \left(\frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial\varepsilon_{ij}} - \frac{1\alpha}{\rho T}\right) d\varepsilon_{ij} \quad (7.23)$$

Comparando (7.21) e (7.23) tem-se:

$$T\partial_T S = \partial_T U \quad (7.24)$$

$$\frac{\partial S}{\partial\varepsilon_{ij}} = \frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial\varepsilon_{ij}} - \frac{\sigma_{ij}}{\rho T} \quad (7.25)$$

O lado esquerdo de (7.24) é o calor específico e constante de deformação que denota-se por  $C_0$ , isto é:

$$C_0 = \partial_T U = T\partial_T S. \quad (7.26)$$

Da equação (7.16) tem-se

$$\frac{\partial F}{\partial\varepsilon_{ij}} = \frac{\partial U}{\partial\varepsilon_{ij}} - \frac{T\partial S}{\partial\varepsilon_{ij}}, \quad \partial_T F = \partial_T U - T\partial_T S - S.$$



Fazendo uso das relações (7.24) e (7.25) observa-se que as identidades anteriores são equivalentes a:

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\sigma_{ij}}{\rho} \quad e \quad \partial_T F = -S.$$

De (7.7) obtém-se:  $\partial_T \rho = 0$ . Das últimas duas relações tem-se:

$$\frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{ij}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T}, \quad (7.27)$$

E das equações (7.25) e (7.27), tem-se:

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\sigma_{ij}}{\rho} - \frac{T}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T}, \quad (7.28)$$

Sendo a densidade  $\rho$  constante e pela equação (7.7) a deformação(dilatação) é constante. Substituindo-se (7.20) em (7.27) e (7.28) obtém-se,

$$\frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{E\alpha}{3(1-2\eta)} \delta_{ij} \quad (7.29)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{E\eta}{(1+\eta)(1-2\eta)} \vartheta \delta_{ij} + \frac{E}{(1+\eta)} \varepsilon_{ij} + \frac{E\alpha T_0}{3(1-2\eta)} \delta_{ij} \right] \quad (7.30)$$

Substituindo-se (7.27) e (7.30) na fórmula diferencial (7.21) e utilizando a fato,  $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{ij} \delta_{ij}$  quando  $i = k = j$ , então:

$$dU = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{E}{(1+\eta)} \varepsilon_{ij} d\varepsilon_{ij} + \frac{E\eta}{(1+\eta)(1-2\eta)} \varepsilon_{kk} d\varepsilon_{kk} + \frac{E\alpha T_0}{3(1-2\eta)} d\varepsilon_{kk} \right] + C_0 dT.$$

Trata-se de uma diferencial exata que integrando resulta:

$$U(\varepsilon_{ij}, T) - U(0, T_0) = \frac{1}{2\rho} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{E\alpha}{3\rho(1-2\eta)} (T - T_0) \vartheta + C_0 (T - T_0) \quad (7.31)$$

Na relação anterior  $C_0(T - T_0)$  é o termo que representa o conteúdo de calor por unidade de massa, o termo  $\frac{1}{2\rho} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$  é a energia de deformação por unidade de volume do corpo, o termo

$$\frac{E\alpha}{3\rho(1-2\eta)} (T - T_0),$$

É consequência da interação da deformação elástica e a difusão térmica. De maneira semelhante, de (7.26) e (7.29) tem-se

$$dS = \frac{E\alpha}{3\rho(1-2\eta)} d\varepsilon_{kk} + C_0 \frac{dT}{T}.$$

Integrando a diferencial exata exterior, obtém-se:

$$S(\varepsilon_{ij}, T) - S(0, T_0) = \frac{E\alpha}{3\rho(1-2\eta)} \varepsilon_{kk} + C_0 \ln \left( \frac{T}{T_0} \right). \quad (7.32)$$

Nota-se que mudanças elásticas são processos reversíveis e não geram mudanças de entropia. O termo  $C_0 \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)$  é a mudança de entropia devido a condução de calor, somente e o termo  $\frac{E\alpha}{3(1-2\eta)}$ , resulta de um acoplamento de mudanças térmicas e elásticas.

#### 7.4. EQUAÇÕES PARA O CAMPO DE DESLOCAMENTO E TEMPERATURA

Nesta seção determina-se as equações diferenciais parciais lineares para o fenômeno termoelástico.

Da equação (7.32) resulta:

$$\partial_t S = \frac{E\alpha}{3\rho(1-2\eta)} \partial_t \vartheta + \frac{C_0}{T} \partial_t T.$$

Substituindo-se na equação (7.15) tem-se:

$$\rho C_0 \partial_t T + \frac{E\alpha T}{3(1-2\eta)} \partial_t \vartheta = k\Delta T + Q.$$

Fazendo uso de (7.5) substitui-se  $T\partial_t \vartheta$  por  $T_0 \partial_t \vartheta$  então a expressão anterior fica

$$\rho C_0 \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{E\alpha T_0}{3(1-2\eta)} \partial_t \vartheta = k\Delta T + Q.$$

Agora substitui-se a equação (6.20) em (6.2), então:

$$\frac{E\eta}{(1+\eta)(1-2\eta)} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + \frac{E}{(1+\eta)} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_i} - \frac{E\alpha}{3(1-2\eta)} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \rho X_i = \rho \partial_t^2 u_i. \quad (7.33)$$

Estas equações pedem ser escritas na notação vetorial. Seja  $u = (u_1, u_2, u_3)$ , então as variações,

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{2} (\Delta u + \nabla \operatorname{div} u), \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} = \nabla \operatorname{div} u$$

de maneira que as equações (7.32) e (7.33) tomam as seguintes formas,

$$\frac{E}{2(1+\eta)} \Delta u + \frac{E}{2(1+\eta)(1-2\eta)} \nabla \operatorname{div} u - \frac{E\alpha}{3(1-2\eta)} \nabla T + \rho X = \rho \partial_t^2 u$$

e

$$\rho C_0 \partial_t T + \frac{E\alpha T_0}{3(1-2\eta)} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} u = k\Delta T + Q.$$

Interessa-se em obter as equações em dimensão um ( $n = 1$ ), então as equações unidimensionais são:

$$\rho C_0 \partial_t T + \frac{E\alpha T_0}{3(1-2\eta)} \partial_t \varepsilon = k \partial_x^2 T + Q, \quad (7.34)$$

$$\rho \partial_t^2 u - \rho X = \frac{E}{2(1+\eta)} \partial_x^2 u - \frac{E\alpha}{3(1-2\eta)} \partial_x T \quad (7.35)$$

Escrevendo-se  $\theta = T - T_0$  e tomando-se sólidos livres de forças e fontes externas de calor, isto é,  $X = 0$  e  $Q = 0$ , então (7.34) e (7.35) ficam da forma:

$$\begin{aligned} \rho \partial_t^2 u - \frac{E}{2(1+\eta)} \partial_x^2 u + \frac{E\alpha}{3(1-2\eta)} \partial_x \theta &= 0, \\ \rho C_0 \partial_t \theta - k \partial_x^2 \theta + \frac{E\alpha T_0}{3(1-\eta)} \partial_{xt}^2 u &= 0, \end{aligned}$$

Mudando-se convenientemente a escala de  $x$  e  $t$ , e usando o fato de que todas as constantes que aparecem são estritamente positivas, elas não mudam a natureza das equações diferenciais parciais resultantes, então pode-se escrever o sistema de equações de seguinte modo:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) + \alpha \partial_x \theta(x, t) &= 0, \\ \partial_t \theta(x, t) - \partial_x^2 \theta(x, t) + \beta \partial_{xt}^2 u(x, t) &= 0, \end{aligned}$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes.

## 7.5. TERMOELASTICIDADE CLÁSSICA

Propomos iniciar com o seguinte problema de valor inicial da termoelasticidade clássica no domínio limitado  $]0, L[$ ,  $L > 0$ ,

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u + \beta \partial_x \theta &= 0, \quad \text{em } ]0, L[ \times \square^+ \\ \partial_t \theta - \partial_x^2 \theta + \alpha \partial_{xt}^2 u &= 0, \quad \text{em } ]0, L[ \times \square^+ \end{aligned} \quad (7.36)$$

onde  $u$  e  $\theta$  são funções de  $(x, t) \in ]0, L[ \times \square^+$  descrevendo o deslocamento e a diferença de temperatura do material termoelástico considerado, respectivamente; as constantes positivas,  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes materiais dados pelos diferentes materiais. Além disso temos as condições iniciais,

$$u(x=0) = u^0, \quad \partial_t u(x=0) = u^1, \quad \theta(x=0) = \theta^0 \quad (7.37)$$

e as condições de fronteira Dirichlet – Neumann,

$$\begin{aligned} u(x=0) = 0, \quad u(x=L) = 0, \\ \partial_x \theta(x=0) = 0, \quad \partial_x \theta(x=L) = 0. \end{aligned} \quad (7.38)$$

A solução do sistema termoelástico **Erro! Fonte de referência não encontrada.**

**Erro! Fonte de referência não encontrada.** é um fato bem conhecido (boa colocação do

problema), também é conhecido que sua energia associada vai para o zero exponencialmente para dados iniciais satisfazendo a condição natural

$$m_{\theta_0} = \int_0^L \theta^0(x) dx = 0$$

caso contrário a relação  $\theta - m_{\theta_0}$  deve substituir a variável  $\theta$ . Para maiores detalhes deve-se consultar Slemrod (1981) [8] e Jiang & Racke (2000) [15].

## 8. O SISTEMA DE EQUAÇÕES DA VIGA DE TIMOSHENKO

As vibrações transversais de uma viga são descritas matematicamente por um sistema de duas equações diferenciais parciais acopladas, dadas por:

$$\begin{aligned} \varphi_{tt} - k\varphi_{xx} - k\psi_x &= 0, \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, \infty[ \\ \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) &= 0, \text{em } ]0, L[ \times ]0, \infty[ \end{aligned}$$

onde,  $L > 0$  é o comprimento de uma viga uniforme em seu estado de equilíbrio, a variável  $t$  é o tempo e variável  $x$  denota a coordenada espacial ao longo da viga. A função  $\varphi(x, t)$  é a deflexão da viga em relação ao seu estado de equilíbrio e  $\psi(x, t)$  é o ângulo total de rotação da viga. O significado preciso das funções, coeficientes e termos que aparecem nas equações acima podem ser encontrados em Timoshenko (1955) [14] e Russell (1986) [9].

O sistema acima é conhecido como sistema de TIMOSHENKO é intensamente utilizado em muitos sistemas mecânicos, como artefatos espaciais ou braços de robôs com ligações flexíveis. Esses sistemas mecânicos podem ser modelados como uma combinação de partes elásticas e rígidas. Muitas aplicações espaciais futuras, como uma estação espacial dependem de materiais leves e com sistemas de controle de alto desempenho por causa da necessidade de alta precisão pontual e contínua. Para maior informação veja Banks et al. (1995) [2].

O modelo matemático descrevendo as vibrações da viga com extremidades fixadas esta formado pelo sistema de Timoshenko, as condições de fronteira e as condições iniciais,

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \varphi - k\partial_x^2 \varphi - k\partial_x \psi &= 0, \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, \infty[ \\ \partial_t^2 \psi - b\partial_x^2 \psi + k(\partial_x \varphi + \psi) &= 0, \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, \infty[ \end{aligned} \quad (8.1)$$

com condições de fronteira,

$$\begin{aligned} \varphi(0, t) = 0, \quad \varphi(L, t) = 0, \quad t > 0 \\ \psi(0, t) = 0, \quad \psi(L, t) = 0. \quad t > 0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

e dados iniciais,

$$\begin{aligned}\varphi(x,0) &= \varphi^0, \quad \partial_t \varphi(x,0) = \varphi^1, \quad \text{em } ]0,L[ \\ \psi(x,0) &= \psi^0, \quad \partial_t \psi(x,0) = \psi^1, \quad \text{em } ]0,L[\end{aligned}\tag{8.3}$$

Quando é tomado em conta a fricção o sistema **Erro! Fonte de referência não encontrada.** se transforma no seguinte sistema,

$$\begin{aligned}\partial_t^2 \varphi - k \partial_x^2 \varphi - k \partial_x \psi + \alpha \partial_t \varphi &= 0, \quad \text{em } ]0,L[ \times \square^+ \\ \partial_t^2 \psi - b \partial_x^2 \psi + k(\partial_x \varphi + \psi) + \beta \partial_t \psi &= 0, \quad \text{em } ]0,L[ \times \square\end{aligned}\tag{8.4}$$

onde as constantes  $\alpha, \beta$  são positivas. Os termos representados por  $\alpha \partial_t \varphi$  e  $\beta \partial_t \psi$  são interpretados como a ação do atrito na vibração vertical e no ângulo de rotação das componentes da viga, respectivamente.

As propriedades dissipativas associadas ao sistema (8.4) foram estudadas por muitos autores considerando mecanismos dissipativos de tipo friccional ou viscoelástico. A dissipação friccional, obtida pela introdução de um mecanismo de fricção que atua na fronteira ou em todo o domínio, também já foi estudado por muitos autores. A dissipação viscoelástica, dado por efeito de memória, foi também considerada.

Quando se considera o sistema de vibrações de Timoshenko com um mecanismo de historia passada, espécie de memória que leva em consideração uma integral com um extremo infinito, possui a seguinte formulação,

$$\varphi_{tt} - k\varphi_{xx} - k\psi_x = 0\tag{8.5}$$

$$\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int_0^\infty g(s)\psi_{xx}(x, t-s)ds + k(\varphi_x + \psi) = 0\tag{8.6}$$

com condições iniciais,

$$\begin{aligned}\varphi(x,0) &= \varphi^0, \quad \partial_t \varphi(x,0) = \varphi^1, \quad \text{em } ]0,L[ \\ \psi(x,0) &= \psi^0, \quad \partial_t \psi(x,0) = \psi^1, \quad \text{em } ]0,L[\end{aligned}\tag{8.7}$$

Uma das preocupações é saber sobre seu comportamento assintótico de suas soluções, portanto é necessário reescrever o sistema de modo a aplicar técnicas no contexto mais favorável. Para obter este objetivo introduzimos uma nova variável  $N^t$  para mudar a equação (8.6) fazendo:

$$N^t(x, s) = \psi(x, t) - \psi(x, t - s)\tag{8.8}$$

Isolando-se a equação (6.41), tem-se:

$$\psi(x, t - s) = \psi(x, t) - N^t(x, s)\tag{8.9}$$

Deriva-se parcialmente a equação (6.42) duas vezes com relação a  $x$ , vem

$$\psi_x(x, t - s) = \psi_x(x, t) - N_x^t(x, s)$$

$$\partial_x^2 \psi(x, t-s) = \partial_x^2 \psi(x, t) - \partial_x^2 N^t(x, s)$$

Substituindo-se na integral, tem-se:

$$\int_0^\infty g(s) \psi_{xx}(x, t-s) ds = \int_0^\infty g(s) \psi_{xx}(x, t) ds - \int_0^\infty g(s) N_{xx}^t(x, s) ds \quad (8.10)$$

Substituindo-se a equação (6.44) na equação (6.40), tem-se:

$$\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int_0^\infty g(s) \psi_{xx}(x, t) ds - \int_0^\infty g(s) N_{xx}^t(x, s) ds + k\varphi_x k\psi = 0$$

$$\psi_{tt} - \psi_{xx}(b - \int_0^\infty g(s) ds) - \int_0^\infty g(s) N_{xx}^t(x, s) ds + k\varphi_x + k\psi = 0 \quad (8.11)$$

O sistema resultante após substituições apropriadas será,

$$\varphi_{tt} - k\varphi_{xx} - k\psi_x = 0$$

$$\psi_{tt} - \psi_{xx}(b - \int_0^\infty g(s) ds) - \int_0^\infty g(s) N_{xx}^t(x, s) ds + k\varphi_x + k\psi = 0$$

$$N_t^t(x, s) + N_s^t(x, s) = \psi_t(x, t)$$

e as condições iniciais são dadas por

$$\varphi(x, 0) = \varphi^0, \quad \partial_t \varphi(x, 0) = \varphi^1, \quad \text{em } ]0, L[$$

$$\psi(x, 0) = \psi^0, \quad \partial_t \psi(x, 0) = \psi^1, \quad \text{em } ]0, L[$$

$$N_0(x, s) = \psi^0(x, 0) - \psi^0(x, -s) \quad \text{em } ]0, L[ \times \mathbb{R}^+$$

isto significa que a historia será utilizada com um dado inicial. Consideramos condições de fronteira de tipo Dirichlet,

$$\varphi(0, t) = 0, \quad \varphi(L, t) = 0, \quad t > 0$$

$$\psi(0, t) = 0, \quad \psi(L, t) = 0, \quad t > 0$$

porém podem ser utilizados outros tipos de fronteira. Com relação a função núcleo  $g$  consideramos as seguintes hipóteses,

$$g(t) > 0, \quad \text{existem constantes } k_0, k_1, k_2 \quad \text{tal que}$$

$$-k_0 g(t) \leq g'(t) \leq k_1 g(t), \quad |g''(t)| \leq k_2 g(t), \quad t \geq 0, \text{ e}$$

$$\tilde{b} = b - \int_0^\infty g(s) ds > 0.$$

## CONCLUSÃO

O fenômeno termoelástico, que ocorre quando um sólido elástico inicialmente não deformado, sem tensão e com temperatura uniforme  $T_0$ , é deformado por meios mecânicos ou térmicos, no qual a energia é transferida de uma parte do sólido para outro por deformação elástica e por condução de calor, é governado pelo sistema de EDP's lineares da forma

$$\begin{aligned}\partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) + \alpha \partial_x \theta(x, t) &= 0 \\ \partial_t \theta(x, t) - \partial_x^2 \theta(x, t) + \beta \partial_{xt}^2 u(x, t) &= 0\end{aligned}$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes materiais que são fornecidas pelas matérias modelados, como silicone, mistura de alumínio, aço, diamante ou bronze. Ver o artigo de Irscher & Racke (2006) [10].

Este sistema de EDP's apresenta a equação unidimensional da onda acoplada de modo linear com a equação unidimensional do calor e é chamado na literatura de Sistema Termoelástico. Tal sistema descreve vibrações de uma barra muito fina, homogênea, formada por material condutor de calor sujeita a efeitos térmicos. A variável  $u(x, t)$  representa o deslocamento e a variável  $\theta(x, t)$  é a temperatura da barra.

O sistema termoelástico também pode ser representado na forma matricial, dado por,

$$\partial_t \begin{bmatrix} u \\ u_t \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_t \\ u_{xx} - \alpha \theta_x \\ \theta_{xx} - \beta u_{xt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ \partial_x^2(\cdot) & 0 & -\alpha \partial_x(\cdot) \\ 0 & -\beta \partial_x(\cdot) & \partial_x^2(\cdot) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ u_t \\ \theta \end{bmatrix}$$

Também, pode ser usado o mesmo método para escrever as equações do sistema de vibrações de Timoshenko na forma matricial.

As EDP's que descrevem o fenômeno termoelástico são deduzidas através da teoria termodinâmica de processos irreversíveis, a qual é baseada em três leis de conservação e na segunda lei da Termodinâmica.

Conservação da massa:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial V_j}{\partial x_j} = 0$$

onde

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

É um operador de diferenciação total.

Conservação do movimento:

$$\rho \frac{DV_i}{Dt} = \rho X_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, (i = 1,2,3)$$

onde  $(X_1, X_2, X_3)$  são as componentes das forças aplicadas em  $X$  no corpo por unidade de massa.

Conservação da energia:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( U + \frac{1}{2} V_i V_i \right) = \rho X_i V_i + \frac{\partial (V_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_j} + Q$$

onde  $U$  é a energia interna específica (por unidade de volume),  $Q$  é a razão com que o calor é gerado (por unidade de volume) por fontes internas ou externas e  $F = (F_1, F_2, F_3)$  o vetor fluxo de calor.

Segunda lei da Termodinâmica:

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \rho T \frac{DS}{Dt} + \sigma_{ij} \frac{D\varepsilon_{ij}}{Dt}$$

onde  $S$  é a entropia específica do sistema.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Bassanezi, Rodney Carlos. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*, 3ª edição, Contexto, São Paulo, 2006.
2. Banks, H. T., Smith, R. C., & Wang, Y., *The modeling of Piezoceramic patch interactions with shells, plates and beams*, Quart. J. Appl. Math., 53, 353-381, (1995).
3. Boyce, W. E. & Diprima, Richard C., *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, LTC, Rio de Janeiro, Brasil, 2006.
4. Bronson, R., *Moderna Introdução as Equações Diferenciais*, Mc Craw-Hill, São Paulo, Brasil, 1977.
5. Eves, H., *Introdução à História da Matemática*, Editora da UNICAMP, 1997.
6. Dafermos, C., *On the Existence and the Asymptotic Stability of Solutions to the Equations of Linear Thermoelasticity*, Arch. Rat. Mech. Analysis, 29 (1968), 241-271.
7. Racke, R., *Nonlinear Evolutions Equations in Thermoelasticity*, Math, Reserarch Note, 96-004, Institute of Mathematics at the University of Tsukuba, (1996).



8. Slemrod, M. *Global existence, uniqueness and Assymptotic Stability of Classical Smooth Solutions in one-dimensional nonlinear Thermoelasticity*, Arch. Ration. Mech. Anal. 76, (1981), 409-441.
9. Russell, D. L. *Mathematical Models for the Elastic Beam and their Control-Theoretic implications*, Semigroups, Theory and Applications, Vol 2, Essex, UK Longman, (1986), 177-217.
10. Irmischer, T., & Racke, R., *Sharp Decay Rates in Parabolic and Hyperbolic Thermoelasticity*, IMA, Journal of Applied Mathematics, 71, (2006), 459-478.
11. Leithold, L., *O Cálculo com Geometria Analítica*, Volume I, Habra Ltda, São Paulo, 1986.
12. Nowacki, W., *Thermoelasticity*, 2nd Ed., PWN-Polish Sci. Publ., Warsawa, (1996).
13. Simmons, F. G., *Cálculo com Geometria Analítica* 2ª edição, Pearson Prentice Hall, São Paulo, 1985.
14. Timoshenko, S., *Vibrations Problems in Engineering*, Van Nostrand, New York, (1955).
15. Jiang, S. & Racke, R., *Evolution Equations in Thermoelasticity*, Monographs and Survey in Pure and Applied Mathematics 112, Boca Raton, Chapman & Hall.